

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS COM CONEXÕES  
SEMI-RÍGIDAS ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO  
MATEMÁTICA**

**ANDRÉA DE ALMEIDA HERINGER**

ORIENTADORA: CARMEN LUCIA DE MESQUITA SAHLIT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS  
PUBLICAÇÃO: E.DM 006A/96

BRASÍLIA / DF: SETEMBRO DE 1996

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS COM CONEXÕES  
SEMI-RÍGIDAS ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO  
MATEMÁTICA

ANDRÉA DE ALMEIDA HERINGER

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:



---

PROF.<sup>a</sup> CARMEN LUCIA DE MESQUITA SAHLIT, PhD (UnB)  
(ORIENTADORA)



---

PROF. ELDON LONDE MELLO, PhD (UnB)  
(EXAMINADOR INTERNO)



---

PROF. NESTOR ALBERTO ZOUAIN PEREIRA, DSc (COPPE/UFRJ)  
(EXAMINADOR EXTERNO)

DATA: BRASÍLIA/DF, 11 DE SETEMBRO DE 1996

## FICHA CATALOGRÁFICA

HERINGER, ANDRÉA DE ALMEIDA

Análise de Pórticos Planos com Conexões Semi-rígidas Através da Programação Matemática [Distrito Federal] 1996.

xviii, 105 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas, 1996)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.  
Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil.

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| 1. Estruturas Reticuladas | 2. Problema de Complementaridade Linear |
| 3. Conexões Semi-rígidas  | 4. Programação Matemática               |
| I. ENC/FT/UnB             | II. Título (série)                      |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

HERINGER, A. A. (1996). Análise de Pórticos Planos com Conexões Semi-rígidas Através da Programação Matemática. Dissertação de Mestrado. Publicação E.DM 006A/96, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 105 p.

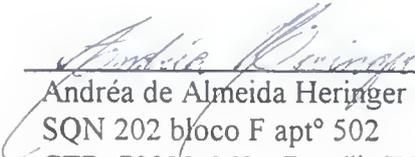
## CESSÃO DE DIREITOS

**NOME DO AUTOR:** Andréa de Almeida Heringer

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO:** Análise de Pórticos Planos com Conexões Semi-rígidas Através da Programação Matemática

**GRAU / ANO:** Mestre / 1996

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

  
\_\_\_\_\_  
Andréa de Almeida Heringer

SQN 202 bloco F apt° 502

CEP: 70832-060 - Brasília/DF - Brasil

*O temor do Senhor é o princípio da  
sabedoria, e o conhecimento do  
Senhor é prudência.  
Provérbios 9.10*

## AGRADECIMENTOS

À profª Carmen Lucia Sahlit, pela orientação constante e dedicada, pelo estímulo e sobretudo pela amizade demonstrada.

Aos professores, colegas e funcionários do Mestrado em Estruturas da UnB, pelo apoio e amizade durante todo o curso.

Aos meus pais, pelo amor e apoio constantes, pelo incentivo e por todo o envolvimento e investimento pessoal.

A Deus, "porque dele e por meio dele e para ele são todas as cousas. A ele, pois, a glória eternamente. Amém." (Romanos 11:36).

## RESUMO

A maioria das conexões de pórtico têm rigidezes intermediárias entre as apresentadas pelas conexões totalmente rígidas e pelas rotuladas, sendo assim classificadas de semi-rígidas. Neste trabalho a programação matemática é utilizada na análise de pórticos planos com conexões semi-rígidas, submetidos a carregamentos quasi-estáticos. Desta forma, são efetuadas as análises linear elástica, elastoplástica, plástica limite e de *shakedown*

Considera-se a estrutura discretizada em elementos de comprimento finito, sendo que as conexões apresentam comprimento nulo. São utilizadas as duas descrições alternativas - malha e nodal - das relações de equilíbrio e de compatibilidade, assumindo-se o regime dos pequenos deslocamentos e deformações. O material estrutural é considerado elástico-perfeitamente plástico, com a superfície de plastificação linearizada em trechos finitos. A curva experimental momento-rotação da conexão semi-rígida é modelada por segmentos lineares, aproximando-se o seu comportamento por relações constitutivas elastoplásticas com a consideração de encruamento. Alternativamente, adota-se um sistema de classificação de conexões, apresentado na literatura, que fornece a estimativa do comportamento da conexão em função de sua rigidez inicial e momento de plastificação reduzidos.

A análise elastoplástica é efetuada através de problemas de complementaridade linear (PCL) e de complementaridade linear paramétrico (PCLP), desenvolvidos em quatro formulações diferentes: malha-flexibilidade, nodal-rigidez, malha-rigidez e nodal-flexibilidade. Considera-se a possibilidade de ocorrência do fenômeno da descarga plástica. As análises plástica limite e de *shakedown* são realizadas através de quatro problemas de programação linear (PL), associados aos teoremas estático e cinemático, nas descrições de malha e nodal.

Os exemplos apresentados são comparados com resultados disponíveis na literatura, mostrando a validade das formulações desenvolvidas. Observa-se que a consideração de conexões semi-rígidas altera a distribuição dos esforços na estrutura. O deslocamento horizontal de um pórtico sem travamento é maior quanto mais flexível for a conexão utilizada. A carga de colapso plástico e de *shakedown* são reduzidas com a substituição das conexões rígidas pelas semi-rígidas. A diferença entre o fator de carga de colapso plástico e o de *shakedown*, de um mesmo pórtico, é maior quando se consideram conexões mais flexíveis.

## ABSTRACT

Generally, the frame connections present an intermediate behaviour between fully rigid and pinned connections, being classified as semirigid. In this work, the mathematical programming is utilized in the analysis of plane frames with semirigid connections, subjected to quasi-static loads. Linear elastic, elastoplastic, plastic limit and shakedown analyses are then performed.

The frame is envisaged as a structural network, the joints being modelled as zero-length elements. Mesh and nodal descriptions of the static and kinematic laws are considered under the restriction of small displacements. The structural material is assumed elastic, perfectly plastic, and a piecewise linear approximation of the yield surface is adopted. The experimental moment-rotation curve of the semirigid connection is modelled by a series of straight-line segments, with its behaviour approximated by elastoplastic constitutive relations with strain-hardening. Alternatively, a connection classification system presented in the literature is adopted. This system defines the estimative behaviour of the connection in function of its reduced initial stiffness and plastic moment.

The elastoplastic analysis is carried out by a linear complementarity problem (LCP) and a parametric linear complementarity problem (PLCP), developed in four different formulations: mesh-flexibility, nodal-stiffness, mesh-stiffness and nodal-flexibility. The possibility of occurrence of plastic unstraining is considered. The plastic limit and shakedown analyses are accomplished through four linear programming (LP) problems related to the static and kinematic theorems, in the mesh and nodal descriptions.

The examples presented are compared with known results in the literature, demonstrating the validity of the developed formulations. It is observed that the presence of semirigid connections affects the distribution of generalised stresses in the structure. The horizontal displacement of an unbraced frame is greater for more flexible connections. The plastic collapse load and the shakedown load are reduced if it is considered semirigid connections instead of fully rigid connections. The difference between the plastic collapse and shakedown loads, for the same frame, is greater for more flexible connections.

# ÍNDICE

Capítulo	Página
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 IMPORTÂNCIA	1
1.2 OBJETIVOS	2
1.3 DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO	2
1.4 HIPÓTESES BÁSICAS	3
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	5
2.1 INTRODUÇÃO	5
2.1.1 Estudo experimental do comportamento das conexões existentes	6
2.1.2 Modelagem matemática das curvas experimentais	8
2.1.3 Métodos de análise estrutural com conexões semi-rígidas	10
2.1.4 Classificação das conexões	11
2.2 ESTÁTICA, CINEMÁTICA E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	12
2.2.1 Estática e cinemática do elemento discreto	13
2.2.2 Descrição de malha para o sistema estrutural	15
2.2.3 Descrição nodal para o sistema estrutural	16
2.2.4 Relações constitutivas do material	17
2.3 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA	20
2.3.1 Análise elastoplástica	21
2.3.2 Análise plástica limite	22
2.3.3 Análise de acomodação plástica ou <i>shakedown</i>	23
<b>3 CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS COM COMPORTAMENTO LINEAR ELÁSTICO</b>	24
3.1 INTRODUÇÃO	24
3.2 MATRIZES DE FLEXIBILIDADE E RIGIDEZ MODIFICADAS	25

<b>Capítulo</b>	<b>Página</b>
3.3 INCLUSÃO DE CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS EM MÉTODOS DE ANÁLISE LINEAR CONHECIDOS	28
3.4 MATRIZES DE EQUILÍBRIO E DE COMPATIBILIDADE NAS FORMAS DE MALHA E NODAL	29
3.4.1 Descrição de malha	30
3.4.2 Descrição nodal	32
3.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS	34
<b>4 CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS COM COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO</b>	<b>40</b>
4.1 INTRODUÇÃO	40
4.2 MODELAGEM DAS CONEXÕES	41
4.2.1 Sistema de classificação de conexões	44
4.3 SISTEMAS GOVERNANTES COMO UM PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR	45
4.3.1 PCL malha-flexibilidade	45
4.3.2 PCL nodal-rigidez	46
4.3.3 PCL malha-rigidez	47
4.3.4 PCL nodal-flexibilidade	48
4.4 SISTEMAS GOVERNANTES COMO UM PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR PARAMÉTRICO	49
4.4.1 PCLP malha-flexibilidade	50
4.4.2 PCLP nodal-rigidez	50
4.4.3 PCLP malha-rigidez	51
4.4.4 PCLP nodal-flexibilidade	52
4.5 SOLUÇÃO DOS SISTEMAS GOVERNANTES	53
4.5.1 Programas computacionais	53
4.6 EXEMPLO DA OBTENÇÃO DA MATRIZ DE ENCRUAMENTO	54
4.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS	55

<b>Capítulo</b>	<b>Página</b>
<b>5 ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE E DE SHAKEDOWN</b>	<b>78</b>
5.1 INTRODUÇÃO	78
5.2 ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE	79
5.2.1 PL malha-estático	80
5.2.2 PL malha-cinemático	81
5.2.3 PL nodal-estático	81
5.2.4 PL nodal-cinemático	82
5.3 ANÁLISE DE SHAKEDOWN	82
5.3.1 PL malha-estático	85
5.3.2 PL malha-cinemático	85
5.3.3 PL nodal-estático	86
5.3.4 PL nodal-cinemático	86
5.4 SOLUÇÃO DOS PROGRAMAS LINEARES	87
5.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS	88
<b>6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	<b>99</b>
6.1 CONCLUSÕES	99
6.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	101
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>102</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela</b>		<b>Página</b>
3.1	Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas - exemplo 1	35
3.2	Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas e rígidas - exemplo 1	36
3.3	Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas e rígidas - exemplo 2	37
3.4	Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas e rígidas - exemplo 3	38
4.1	Comparação de momentos fletores na viga 4 - exemplo 2	59
4.2	Comparação de momentos fletores nas vigas - exemplo 3	62
5.1	Comparação de resultados - exemplo 1	89
5.2	<i>Shakedown</i> para as conexões da figura 5.3 - exemplo 1	91
5.3	Comparação de resultados - exemplo 2	93
5.4	Comparação da carga de <i>shakedown</i> para k real e k rígido - exemplo 2	95
5.5	Comparação de resultados - exemplo 3	96
5.6	Comparação da carga de <i>shakedown</i> para k real e k rígido - exemplo 3	98

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
2.1	Momentos fletores em uma viga isolada	5
2.2	Curvas momento-rotação de conexões	7
2.3	Carga/descarga de uma conexão	8
2.4	Modelos lineares de comportamento da conexão	9
2.5	Curvas momento-rotação idealizadas das conexões (Vimonsatit, 1995)	12
2.6	Grandezas da estática para um elemento plano no sistema local	13
2.7	Grandezas da cinemática para um elemento plano no sistema local	14
2.8	Modelo de encruamento de Koiter	20
3.1	Esforços internos e deformações em um elemento estrutural	25
3.2	Pórtico plano (Wang, 1983)	30
3.3	Discretização adotada	30
3.4	Diagramas para descrição de malha	32
3.5	Sistemas de forças nodais de restrição	33
3.6	Pórtico - exemplo 1 (Wang, 1983)	34
3.7	Pórtico - exemplo 3	38
4.1	Aproximações lineares da curva momento-rotação	41
4.2	Modelagem da curva momento-rotação	43
4.3	Pórtico - exemplo 1	55
4.4	Carga v. desloc. horizontal do nó B - exemplo 1	56
4.5	Pórtico - exemplo 2 (Borkowski, 1988)	57
4.6	Tipos de conexões semi-rígidas das vigas - exemplo 2	57
4.7	Carga v. desloc. horizontal normalizado - exemplo 2	58
4.8	Momento no meio do vão da viga 4 v. carga - exemplo 2	59
4.9	Pórtico - exemplo 3 (Vimonsatit, 1995)	60
4.10	Tipos de conexões viga-pilar - exemplo 3	60

Figura		Página
4.11	Carga v. desloc. horizontal da viga superior - exemplo 3	61
4.12	Mom. no meio do vão da viga superior v. carga - exemplo 3	62
4.13	Mom. na conexão à esquerda da viga superior v. carga - exemplo 3	63
4.14	Pórtico - exemplo 4 (Lui & Chen, 1987)	63
4.15	Tipos de conexões viga-pilar - exemplo 4	64
4.16	Carga v. desloc. horizontal - conexões tipo 1 e 2 - exemplo 4	65
4.17	Carga v. desloc. horizontal - conexão tipo 3 - exemplo 4	65
4.18	Carga v. desloc. horizontal - conexões tipo 1 e 3 - exemplo 4	66
4.19	Momento na viga v. carga - conexão tipo 3 - exemplo 4	67
4.20	Pórtico com travamento - exemplo 5 (Lui & Chen, 1987)	67
4.21	Carga v. desloc. horizontal - exemplo 5	68
4.22	Comparação dos pórticos dos exemplos 4 e 5	69
4.23	Pórtico - exemplo 6 (Rodrigues et al., 1994)	69
4.24	Modelagem da conexão viga-pilar - exemplo 6	70
4.25	Carga horizontal v. desloc. do nó A - exemplo 6	71
4.26	Carga v. desloc. do nó A - conexões rígidas e semi-rígidas - exemplo 6	71
4.27	Carga v. desloc. do nó A - comportamento estimado das conexões - exemplo 6	72
4.28	Pórtico contraventado - exemplo 7 (Rodrigues et al., 1995)	73
4.29	Comparação dos pórticos dos exemplos 6 e 7	74
4.30	Pórtico - exemplo 8 (Rodrigues et al., 1994)	74
4.31	Carga horizontal v. desloc. do nó A - exemplo 8	76
4.32	Carga v. desloc. do nó A - conexões rígidas e semi-rígidas - exemplo 8	76
4.33	Carga v. desloc. do nó A - comportamento estimado das conexões - exemplo 8	77
5.1	Pórtico - exemplo 1 (Tin-Loi & Vimonsatit, 1993)	88
5.2	Rótulas plásticas formadas no colapso plástico e no <i>shakedown</i> - exemplo 1	90
5.3	Modelagem das conexões viga-pilar - exemplo 1	91
5.4	Pórtico - exemplo 2 (Vimonsatit, 1995)	92

<b>Figura</b>		<b>Página</b>
5.5	Tipos de conexões viga-pilar - exemplo 2	92
5.6	Rótulas plásticas formadas no colapso plástico e no <i>shakedown</i> - exemplo 2	94
5.7	Pórtico - exemplo 3 (Borkowski, 1988)	95
5.8	Tipos de conexões semi-rígidas das vigas - exemplo 3	96
5.9	Rótulas plásticas formadas no colapso plástico e no <i>shakedown</i> - exemplo 3	97

# LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

Salvo indicação contrária, a notação seguinte é utilizada em todo este trabalho.

## 1- Matrizes e Vetores:

**Negrito** indica matriz ou vetor

$A$	matriz nodal (ordem $s \times \beta$ )
$A_o$	matriz nodal referente às cargas aplicadas (ordem $n \times \beta$ )
$a_o$	vetor nodal referente às cargas aplicadas, para o caso de carregamento proporcional (ordem $\beta \times 1$ )
$B$	matriz de malha (ordem $s \times \alpha$ )
$B_o$	matriz de malha referente às cargas aplicadas (ordem $s \times n$ )
$b_o$	vetor de malha referente às cargas aplicadas, para o caso de carregamento proporcional (ordem $s \times 1$ )
$c$	vetor constante do carregamento proporcional (ordem $n \times 1$ )
$D_i$	matriz de transformação entre os dois sistemas de referência para o elemento $i$ (ordem $s_i \times S_i$ )
$d_i$	vetor dos deslocamentos nodais ou deslocamentos de extremo de barra (ordem $S_i \times 1$ )
$F_i$	vetor das forças de extremo de barra, do elemento $i$ (ordem $S_i \times 1$ )
$F$	vetor das forças de extremo de barra da estrutura (ordem $S \times 1$ )
$f_i$	matriz de flexibilidade do elemento $i$ (ordem $s_i \times s_i$ )
$f$	matriz de flexibilidade da estrutura desconexa (ordem $s \times s$ )
$\bar{f}_i$	matriz de flexibilidade modificada do elemento $i$ (ordem $s_i \times s_i$ )
$\bar{f}$	matriz de flexibilidade modificada da estrutura desconexa (ordem $s \times s$ )
$f_i^c$	matriz de flexibilidade das conexões, do elemento $i$ (ordem $s_i \times s_i$ )
$H$	matriz de encruamento (ordem $\xi^c \times \xi^c$ )
$I$	matriz identidade
$k_i$	matriz de rigidez do elemento $i$ (ordem $s_i \times s_i$ )
$k$	matriz de rigidez da estrutura desconexa (ordem $s \times s$ )

$\bar{k}_i$	matriz de rigidez modificada do elemento $i$ (ordem $s_i \times s_i$ )
$\bar{k}$	matriz de rigidez modificada da estrutura desconexa (ordem $s \times s$ )
$k_i^c$	matriz de rigidez das conexões, do elemento $i$ (ordem $s_i \times s_i$ )
$N$	matriz de incidência ou de normalidade (ordem $vs \times \xi c$ )
$p$	vetor dos esforços hiperestáticos (ordem $\alpha \times 1$ )
$p_r$	vetor dos esforços hiperestáticos referente a uma distribuição de esforços residuais auto-equilibrados (ordem $\alpha \times 1$ )
$Q$	vetor das forças nodais de restrição correspondentes aos graus de liberdade cinemáticos (ordem $\beta \times 1$ )
$q$	vetor dos deslocamentos nodais nas direções dos graus de liberdade cinemáticos (ordem $\beta \times 1$ )
$v$	vetor das descontinuidades (ordem $\alpha \times 1$ )
$X_i$	vetor dos esforços internos independentes do elemento $i$ (ordem $s_i \times 1$ )
$X$	vetor dos esforços internos independentes da estrutura (ordem $s \times 1$ )
$X_o$	vetor dos esforços de engastamento perfeito da estrutura (ordem $s \times 1$ )
$\bar{X}_o$	vetor dos esforços de engastamento perfeito modificados da estrutura (ordem $s \times 1$ )
$X_*$	vetor dos esforços de plastificação (ordem $\xi c \times 1$ )
$X_E$	vetor da envoltória dos esforços elásticos (ordem $\xi c \times 1$ )
$X_r$	vetor dos esforços residuais auto-equilibrados (ordem $s \times 1$ )
$X_l$	vetor dos esforços elásticos limite (ordem $\xi c \times 1$ )
$x_i$	vetor das deformações totais independentes para o elemento $i$ (ordem $s_i \times 1$ )
$x$	vetor das deformações totais independentes da estrutura (ordem $s \times 1$ )
$x^b$	vetor das deformações da barra/elemento (ordem $s \times 1$ )
$x^c$	vetor das deformações da conexão (ordem $2N \times 1$ )
$x_o$	vetor das deformações iniciais da barra (ordem $s \times 1$ )
$x_*$	vetor dos multiplicadores plásticos (ordem $\xi c \times 1$ )
$y_*$	vetor dos potenciais plásticos (ordem $\xi c \times 1$ )
$y_*^0$	vetor dos potenciais plásticos referente a um nível de carregamento fixo aplicado (ordem $\xi c \times 1$ )
$\delta$	vetor dos deslocamentos nodais correspondentes às forças nodais (ordem $n \times 1$ )

$\lambda$  vetor das forças nodais aplicadas (ordem  $n \times 1$ )

## 2- Escalares:

$A$	área da seção transversal
$c$	número de seções críticas
$d$	altura da viga conectada
$E$	módulo de elasticidade ou módulo de Young
$I$	momento de inércia da seção transversal
$k$	rigidez inicial
$L$	comprimento da barra/elemento
$M$	momento fletor
$M_c$	momento fletor resistente da conexão
$N$	número de elementos da estrutura
$n$	número de forças nodais aplicadas
$p$	fator de fixação da conexão
$R$	índice de rigidez da conexão
$S_i$	número de forças de extremo de barra (deslocamentos) para o elemento $i$ ( $S_i = 6$ para um elemento de pórtico plano e $S_i = 12$ para pórtico espacial)
$S$	número de forças de extremo de barra (deslocamentos) da estrutura
$s_i$	número de esforços independentes (deformações) para o elemento $i$ ( $s_i = 3$ para um elemento de pórtico plano e $s_i = 6$ para pórtico espacial)
$s$	número de esforços independentes (deformações) da estrutura
$\alpha$	grau de indeterminação estática
$\beta$	grau de indeterminação cinemática
$\delta$	deslocamento generalizado associado ao fator de carga $\gamma$
$\gamma$	fator de carga genérico
$\gamma_a$	fator de carga de plasticidade alternada
$\gamma_c$	fator de carga de colapso plástico da estrutura
$\gamma_l$	fator de carga de colapso incremental
$\gamma_s$	fator de carga de <i>shakedown</i> da estrutura

$\mu$	constante utilizada no sistema de classificação de conexões
$\nu$	número de esforços que controlam a plasticidade em cada seção crítica
$\sigma_y$	tensão de escoamento do aço
$\xi$	número de planos de escoamento em cada seção crítica

### 3- Índices:

$( )$	indica que a matriz (vetor) é calculada a partir da solução de um estado de carregamento conhecido
$( )^0$	indica que a matriz (vetor) refere-se a um estado de carregamento conhecido
$( )^T$	transposta da matriz (vetor)
$( )_e$	indica a natureza elástica da matriz (vetor)
$( )_p$	indica a natureza plástica da matriz (vetor)

### 4- Operadores:

$( )$	taxas
$\Delta( )$	incremento finito

### 5- Abreviações:

DEC	dualidade estático-cinemática
PL	programa linear
PCL	problema de complementaridade linear
PCLP	problema de complementaridade linear paramétrico
PQ	programa quadrático
KKT	Karush-Kuhn-Tucker

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 IMPORTÂNCIA

Normalmente, na análise e projeto de estruturas aporricadas, simplifica-se o comportamento das conexões viga-pilar em dois casos extremos. Ou a conexão é flexível (rótula), quando não existe continuidade rotacional, implicando em nenhuma transferência de momento fletor entre a viga e o pilar, ou a conexão é totalmente rígida, quando a continuidade rotacional existente provoca a completa transferência de momento. No entanto, investigações experimentais mostram que a maioria das conexões apresenta rigidezes que se situam entre estes extremos. As conexões consideradas rotuladas apresentam um certo grau de rigidez rotacional, enquanto as consideradas rígidas demonstram alguma flexibilidade. Portanto as conexões reais devem ser classificadas como *semi-rígidas*, considerando-se a sua flexibilidade na análise e projeto de pórticos.

A flexibilidade da conexão influencia na distribuição dos momentos fletores no pórtico. Para Jones et al. (1983), a utilização de conexões semi-rígidas provoca a redução dos momentos das vigas, levando à utilização de vigas mais leves. Segundo esses autores, há uma possibilidade de economia da ordem de 20% no projeto de vigas em pórticos com a consideração de conexões semi-rígidas. Além disso, Lui & Chen (1986) afirmam que a hipótese de conexões rígidas leva a um deslocamento de pórtico subestimado e a uma resistência superestimada, enquanto que a consideração de conexões rotuladas provoca um superdimensionamento das vigas principais e um subdimensionamento dos pilares.

Buscando-se determinar o comportamento dos pórticos com conexões semi-rígidas, várias pesquisas têm sido desenvolvidas, tanto para a determinação experimental da curva momento-rotação da conexão quanto para sua inclusão em métodos de análise estrutural. Um estudo da literatura demonstra que grande parte dos métodos utilizados são incrementais iterativos. Propondo uma direção alternativa para esta área de pesquisa, Kaliszky (1978) sugere a utilização da programação matemática para a análise da estrutura, modelando as

conexões semi-rígidas com relações similares às governantes de um material perfeitamente plástico.

## 1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo a utilização da programação matemática para a análise de pórticos planos com conexões semi-rígidas, submetidos a carregamentos quasi-estáticos. Para se atingir este objetivo pretende-se:

- modelar o comportamento experimental das conexões semi-rígidas, utilizando as relações constitutivas de um material elastoplástico, devidamente linearizadas através de segmentos finitos;

- realizar análise linear elástica, elastoplástica, plástica limite e de *shakedown* de pórticos planos com conexões semi-rígidas, comparando os resultados obtidos aos disponíveis na literatura;

- obter formulações genéricas que possam ser utilizadas para pórticos planos, qualquer que seja o material estrutural, contanto que se conheça a curva experimental da conexão utilizada;

- determinar o comportamento de pórticos planos com juntas semi-rígidas, considerando o comportamento estimado da conexão, através da utilização do sistema de classificação de conexões proposto por Bjorhovde et al. (1990).

## 1.3 DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O Capítulo 2 apresenta um resumo das pesquisas desenvolvidas com conexões semi-rígidas, mostrando a importância do tema em estudo e justificando a linha de pesquisa adotada. Faz, ainda, uma breve revisão das relações da estática, cinemática e constitutivas do material, utilizadas nas formulações desenvolvidas. Por fim, apresenta alguns aspectos da programação matemática relativos à análise elastoplástica, análise plástica limite e análise de *shakedown*.

O Capítulo 3 apresenta a análise linear elástica de pórticos planos com conexões semi-rígidas. São determinadas as matrizes de flexibilidade e rigidez do elemento, considerando-se a

presença das conexões semi-rígidas, bem como as relações de equilíbrio e de compatibilidade nas formas nodal e de malha, utilizadas nos métodos de análise. Alguns exemplos de pórticos são mostrados, comparando-se os resultados obtidos com os disponíveis na literatura.

No Capítulo 4, o comportamento da conexão semi-rígida é descrito por relações constitutivas elasto-plásticas com encruamento, modelando-se a curva por um número variável de segmentos lineares. Com base nesta modelagem são desenvolvidas as formulações do problema de complementaridade linear (PCL) e do problema de complementaridade linear paramétrico (PCLP), respectivamente para carregamento fixo e proporcional variável, utilizadas para a análise elasto-plástica de pórticos. Os exemplos apresentados comparam pórticos com conexões rígidas e semi-rígidas, bem como com resultados teóricos e experimentais conhecidos.

O Capítulo 5 apresenta os programas lineares (PLs) utilizados na análise plástica limite e de *shakedown* de pórticos planos com conexões semi-rígidas. Os exemplos desenvolvidos destacam a variação do comportamento do pórtico com a utilização de diferentes conexões. Neste capítulo utiliza-se um sistema de classificação de conexões para a determinação das curvas momento-rotação.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas com o presente trabalho e sugestões para estudos futuros.

## 1.4 HIPÓTESES BÁSICAS

Neste trabalho adotam-se as seguintes hipóteses básicas:

- regime das pequenas deformações e deslocamentos;
- elemento prismático, com as dimensões da seção transversal pequenas em comparação com o seu comprimento,
- seções transversais planas permanecem planas após a deformação;
- material homogêneo e isotrópico;
- deformações plásticas concentradas nas seções críticas, localizadas nas extremidades dos elementos discretizados;
- carregamentos fixos e proporcionais aplicados estaticamente;
- permitida a ocorrência do fenômeno da descarga plástica;

- relações constitutivas plásticas linearizadas em trechos finitos;
- considerada apenas a deformação rotacional da conexão semi-rígida;
- conexão apresenta comprimento nulo.

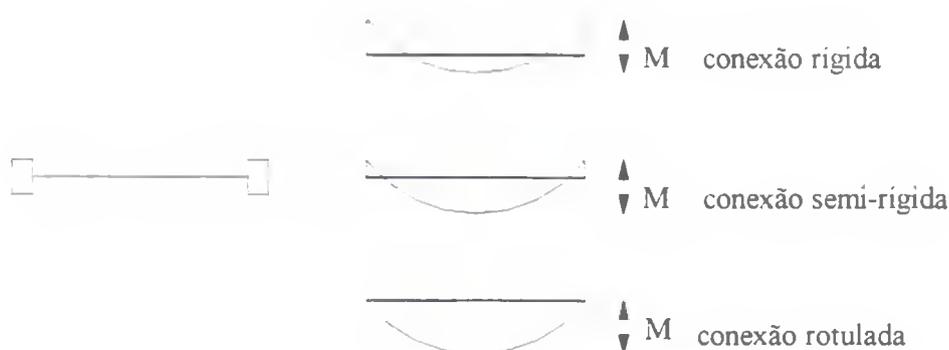
## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Estudos experimentais indicam que, em geral, as conexões utilizadas nos pórticos podem ser classificadas como *semi-rígidas*, pois apresentam rigidezes intermediárias entre as das conexões rotuladas e as das totalmente rígidas. A consideração das conexões semi-rígidas na análise e projeto de pórticos altera a distribuição de esforços na estrutura, assim como os deslocamentos e deformações encontrados.

A figura 2.1 demonstra a alteração na distribuição dos momentos fletores em uma viga isolada, em função do tipo de conexão utilizada. Quando são adotadas conexões semi-rígidas os momentos críticos, no meio do vão para conexões rotuladas e nas extremidades no caso de engastes, tornam-se mais equilibrados. Estudos demonstram que, mesmo no caso de conexões que possuam grande flexibilidade, a carga máxima suportada por uma viga isolada pode ser aumentada significativamente, conclusão que pode ser estendida para a análise de vigas internas em pórticos cujos pilares estejam somente comprimidos (Lorenz et al., 1993).



**Fig. 2.1** Momentos fletores em uma viga isolada

Kirby et al. (1988) apresentam duas vantagens no projeto de pórticos com conexões semi-rígidas em relação à consideração usual de conexões rotuladas. A primeira é a presença

de restrição dos pilares pelas vigas, reduzindo o comprimento efetivo e as deflexões à meia altura do pilar, moderando o efeito P- $\Delta$ . A segunda é a redução do momento e deflexões no meio do vão da viga, provocada pela existência de continuidade entre pilar e viga.

Podem-se destacar, ainda, as seguintes vantagens dos projetos de estrutura metálica com conexões semi-rígidas (Lorenz et al., 1993):

- o comportamento inelástico das conexões previne a ocorrência de pontos de concentração de tensões nos elementos conectados;
- para cargas como terremotos, pesquisas iniciais indicam que a energia absorvida pelas conexões inelásticas colabora com a manutenção do deslocamento lateral dentro de limites razoáveis;
- a natureza da análise semi-rígida leva o projetista a participar mais do processo de cálculo estrutural;
- nem as conexões rotuladas nem as rígidas são obtidas nas estruturas reais e deve-se buscar continuamente o comportamento mais próximo da realidade.

Yu & Liew (1994) observam ser possível utilizar conexões menos rígidas para se conseguir um projeto de mínimo peso de um pórtico metálico. Segundo Abdalla & Chen (1995), a principal deformação da conexão metálica viga-pilar é a deformação rotacional causada pelo momento fletor no plano de aplicação das cargas. Esta deformação da conexão pode causar um efeito desestabilizador do pórtico, pois provoca deslocamento adicional da estrutura e diminuição da rigidez efetiva do elemento ao qual a conexão está ligada. Um aumento do deslocamento intensificará o efeito P- $\Delta$  (não-linearidade geométrica) e a estabilidade global do pórtico poderá ser afetada

As pesquisas sobre conexões semi-rígidas desenvolvem-se em três linhas principais:

- estudo experimental do comportamento das conexões existentes;
- modelagem matemática das curvas experimentais,
- métodos de análise estrutural com conexões semi-rígidas.

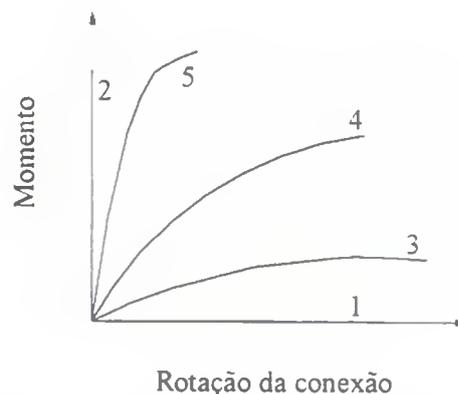
### **2.1.1 Estudo experimental do comportamento das conexões existentes**

As primeiras pesquisas foram iniciadas em 1917 quando Wilson e Moore estudaram a flexibilidade de conexões estruturais rebitadas. Antes de 1950, foram testados vários tipos de

conexões metálicas rebitadas, aparafusadas e soldadas para a determinação da curva momento-rotação destas conexões. Após 1950, intensificou-se o uso de conexões aparafusadas e soldadas e vários testes experimentais foram realizados. Jones et al. (1983) apresentam uma revisão destes primeiros estudos e dos vários testes realizados. Em 1985, Nethercot coletou mais de 800 testes individuais de 70 artigos e publicações; Goverdhan, em 1984, e Kishi e Chen, em 1986, coletaram um total de 303 testes e criaram um sistema de banco de dados informatizado (Wu & Chen, 1990). A partir destes estudos experimentais, observa-se que todos os tipos de conexões apresentam um comportamento não-linear e inelástico, devendo ser consideradas como conexões semi-rígidas.

Uma conexão viga-pilar deve transmitir esforços axiais, cisalhantes, momentos fletores e torsões. No caso de estudos de pórticos planos, o efeito da torsão não é levado em consideração. Para a maioria das conexões, as deformações axiais e de cisalhamento são pequenas quando comparadas com a deformação rotacional. Conseqüentemente, para efeitos práticos, apenas a deformação rotacional da conexão necessita ser considerada (Lui & Chen, 1987). Liew et al. (1993a) comentam que poucas pesquisas foram feitas na área de pórticos semi-rígidos espaciais e que existe uma falta de verificações experimentais sobre o comportamento das conexões sob carregamentos nas três direções, sob forças axiais e interações de momentos.

O comportamento de uma conexão à flexão é descrito pela relação entre o momento fletor  $M$  por ela transmitido e a rotação relativa  $\theta^c$  entre os dois elementos ligados pela conexão. A figura 2.2 mostra curvas típicas de conexões, onde a curva 1 representa uma rótula ideal, a curva 2 um engaste (totalmente rígida) e as curvas 3, 4 e 5 conexões semi-rígidas de diferentes rigidezes.

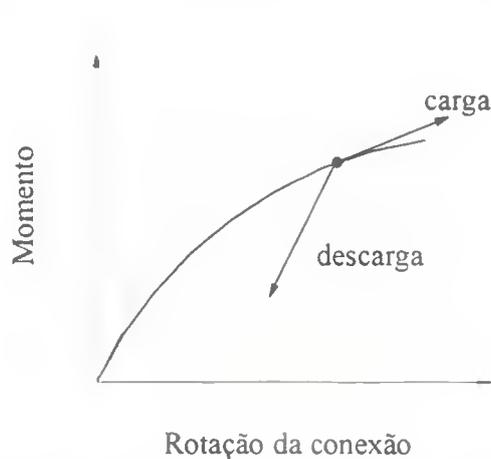


**Fig. 2.2** Curvas momento-rotação de conexões

Algumas observações podem ser feitas a partir desta figura (Lui & Chen, 1987):

- para o mesmo momento, quanto mais flexível for a conexão, maior será o valor da rotação  $\alpha^c$ ;
- o momento máximo que uma conexão consegue transmitir decresce com o aumento da flexibilidade;
- a relação momento-rotação para as conexões semi-rígidas é não-linear em toda a faixa de carregamento.

Quando um momento é aplicado, a conexão comporta-se de acordo com as curvas da figura 2.2. Porém, se o sentido do momento é revertido, a conexão irá sofrer um descarregamento e seguir um caminho que será totalmente linear com uma declividade igual à inclinação inicial da curva, conforme mostra a figura 2.3 (Lui & Chen, 1987).



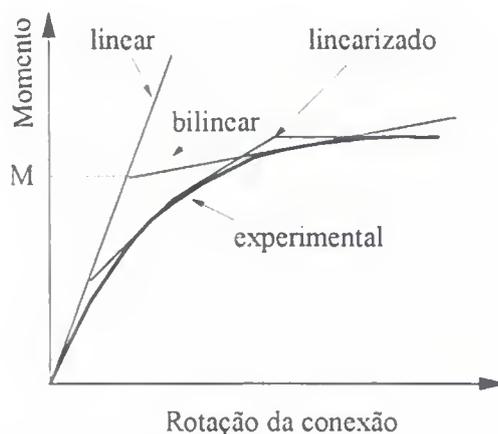
**Fig. 2.3** Carga / descarga de uma conexão

### 2.1.2 Modelagem matemática das curvas experimentais

Devido ao comportamento não-linear das conexões, a sua análise por uma modelagem matemática exata é muito difícil, sendo necessária a utilização de modelos simplificados. Desde a década de 30, métodos de modelagem de curvas momento-rotação de conexões semi-rígidas têm sido desenvolvidos. Alguns dos principais modelos apresentados na literatura (por exemplo, Lorenz et al., 1993; Jones et al., 1983; Lui & Chen, 1987; Wu & Chen, 1990; Abdalla & Chen, 1995) são listados a seguir:

- *Modelo linear*: a figura 2.4 apresenta três modelos lineares simples. O modelo linear utiliza a rigidez inicial para representar o comportamento da conexão em toda a faixa de carregamento.

O modelo bilinear apresenta uma segunda inclinação em um determinado momento de transição. O modelo linearizado em trechos finitos aproxima a curva não-linear por uma série de segmentos lineares. Apesar destes modelos lineares serem de fácil utilização eles apresentam mudanças bruscas de rigidez nos pontos de transição.



**Fig. 2.4** Modelos lineares de comportamento da conexão

- *Modelo polinomial*: este modelo, proposto por Frye e Morris na década de 70, aproxima a curva momento-rotação por uma função polinomial, cujos parâmetros dependem do tipo e da geometria da conexão. Este modelo representa razoavelmente bem o comportamento da conexão, porém a sua rigidez pode se tornar negativa para alguns valores de momento fletor, produzindo dificuldades numéricas na análise de pórticos (Lui & Chen, 1987).

- *Modelo B-Spline*: utiliza uma curva B-Spline Cúbica para aproximar cada pequeno intervalo da curva experimental, mantendo a continuidade da primeira e segunda derivadas entre segmentos adjacentes (Jones et al., 1980). Apesar de apresentar uma boa aproximação dos dados experimentais e produzir valores mais exatos da rigidez da conexão, este método requer um grande número de dados no processo de modelagem da curva. Rodrigues (1991) e Rodrigues et al. (1994) melhoraram esta modelagem com a utilização da Teoria B-Spline Tensionada

- *Modelo de potência*: as várias modelagens com dois a quatro parâmetros (por exemplo, Wu & Chen, 1990; Lui & Chen, 1987) apresentam uma aproximação razoavelmente boa, com um número menor de informações experimentais.

- *Modelo exponencial*: proposto por Lui & Chen (1986), utiliza uma função exponencial de vários parâmetros. Outros modelos exponenciais propostos por Kishi e Chen, e por Yee e

Melchers, são apresentados por Wu & Chen (1990). Estes modelos apresentam uma boa aproximação porém, em alguns casos, é necessária a utilização de muitos parâmetros na função.

Na escolha da modelagem a ser utilizada, a sua adequação não deve ser analisada apenas pelo grau de exatidão na aproximação da curva momento-rotação da conexão, mas também pelo grau de inexatidão que pode ser considerado aceitável na determinação do desempenho estrutural (Lorenz et al., 1993).

### **2.1.3 Métodos de análise estrutural com conexões semi-rígidas**

Vários métodos têm sido desenvolvidos para incorporar o comportamento real das conexões na análise e projeto de estruturas. Segundo Jones et al. (1983), na década de 30, métodos convencionais de análise de pórticos, como o método dos deslocamentos e o processo de Cross, foram modificados utilizando uma relação momento-rotação linear-elástica para a modelagem da conexão.

A partir da década de 60, com o desenvolvimento dos computadores, a análise de pórticos planos pelo método da rigidez direto passou a ser mais utilizada. Monforton e Wu foram os primeiros a modificar este método, em 1963, para a inclusão dos efeitos das conexões semi-rígidas através da alteração da matriz de rigidez dos elementos e dos esforços de engastamento perfeito, mas ainda considerando a modelagem linear da conexão (Jones et al., 1983, Li et al., 1995). Em 1970, Romstad e Subramanian estenderam este método para investigar o problema da estabilidade de pórticos com conexões semi-rígidas, utilizando uma modelagem bilinear para a curva momento-rotação (Jones et al., 1983).

Desde 1980 estão sendo desenvolvidas várias pesquisas sobre a análise não-linear de pórticos com conexões semi-rígidas. Estes estudos incluem os efeitos da não-linearidade geométrica e da não-linearidade do material (plasticidade), utilizando diferentes métodos de análise de resistência e estabilidade de pórticos planos ou espaciais, com destaque para os pórticos metálicos. Dentre os vários trabalhos disponíveis, pode-se citar Moncarz & Gerstle (1981), Stelmack et al. (1986), Al-Bermani & Kitipornchai (1992), Lui & Chen (1986, 1987, 1988), Liew et al. (1993b), Mohamed & Simitse (1990, 1993) e Yu & Shanmugam (1988).

Estudos considerando cargas cíclicas (por exemplo, Vimonsatit, 1995; Osman et al., 1993), análise de *shakedown* (Tin-Loi & Vimonsatit, 1993; Vimonsatit, 1995), projeto de mínimo custo de pórticos metálicos (Xu & Grierson, 1993) e análise de estruturas mistas de aço e concreto (Lorenz et al., 1993) também estão sendo desenvolvidos.

Grande parte das pesquisas desenvolvidas utiliza métodos incrementais iterativos. No entanto, segundo Kaliszky (1978), o comportamento das conexões semi-rígidas pode ser caracterizado por relações similares às governantes de um material perfeitamente plástico. Assim sendo, este pesquisador sugere que a programação matemática seja utilizada para a análise das estruturas com juntas semi-rígidas.

#### 2.1.4 Classificação das conexões

Na prática, o projeto de estruturas com a consideração de conexões semi-rígidas não tem sido usualmente realizado (Lindsey, 1988). O uso da curva momento-rotação específica da conexão na fase inicial do projeto não é indicado. Nesta fase é preferível estimar a influência da conexão no comportamento da estrutura, sem precisar proceder a uma análise não-linear, até que os demais parâmetros de projeto sejam conhecidos (Bjorhovde et al., 1990).

Um sistema de classificação simples para conexões metálicas foi proposto por Bjorhovde et al. (1990) definindo os parâmetros de projeto necessários que são aplicáveis a todos os tipos de comportamento das conexões. Este sistema incorpora simultaneamente os três grupos básicos de conexões: rígidas, semi-rígidas e rotuladas. O sistema é representado por uma relação bilinear momento-rotação na forma adimensional e pode ser utilizado para determinar a rigidez, a resistência última e a ductilidade de qualquer conexão. Um sistema similar de classificação de conexões foi proposto pelo "Eurocode3", em 1990. A descrição dos dois sistemas de classificação referidos pode ser encontrada em Liew et al. (1993a).

Em parte do presente trabalho, será adotado o sistema proposto por Bjorhovde et al. (1990), e utilizado por Tin-Loi & Vimonsatit (1993) e Vimonsatit (1995). A figura 2.5 ilustra graficamente o referido sistema. Nesta figura, o eixo vertical representa a relação entre os momentos de plastificação da conexão  $M_c$  e o da viga conectada  $M_p$ . O eixo horizontal representa a rotação adimensional da conexão,  $EI_x^\epsilon/dM_p$ , onde  $E$ ,  $I$ ,  $d$  e  $x^\epsilon$  são respectivamente o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a altura da viga conectada e a rotação da

conexão. A rigidez inicial de cada relação bilinear momento-rotação é definida como

$$k = \frac{EI}{\mu d} \quad (2.1)$$

onde  $\mu$  é uma constante que varia de  $\mu = 0$ , para a conexão totalmente rígida, a  $\mu = \infty$ , para uma rótula ideal. Para a obtenção de valores intermediários de  $\mu$  para um determinado momento de plastificação da conexão  $M_c$  utiliza-se a linha pontilhada da figura 2.5.

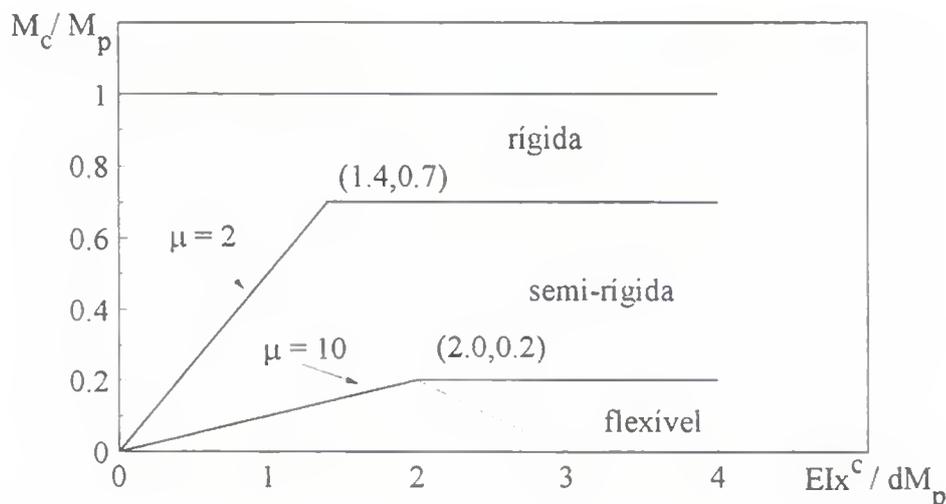


Fig 2.5 Curvas momento-rotação idealizadas das conexões (Vimonsatit, 1995)

## 2.2 ESTÁTICA, CINEMÁTICA E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

A mecânica das estruturas deformáveis baseia-se em três tipos de leis. Primeiramente, a lei de Newton para um sistema de partículas de massa em movimento, fornecendo as leis da *cinética* para o sistema estrutural. Quando não existe movimento estas leis tornam-se leis da *estática* ou de *equilíbrio*. Considerando-se pequenos os deslocamentos totais de cada elemento estrutural, as equações de equilíbrio podem se referir à configuração indeformada da estrutura, relacionando forças aplicadas com esforços internos dos elementos, sem a intervenção dos deslocamentos.

Em segundo lugar, existem as leis da *cinemática* que relacionam as deformações em cada elemento com os deslocamentos totais da estrutura, implicando na existência de compatibilidade, isto é, os elementos permanecem conectados enquanto a estrutura se

deforma. Estas leis estão fundamentadas na geometria euclidiana e resultam em equações lineares quando se considera válida a hipótese de pequenos deslocamentos.

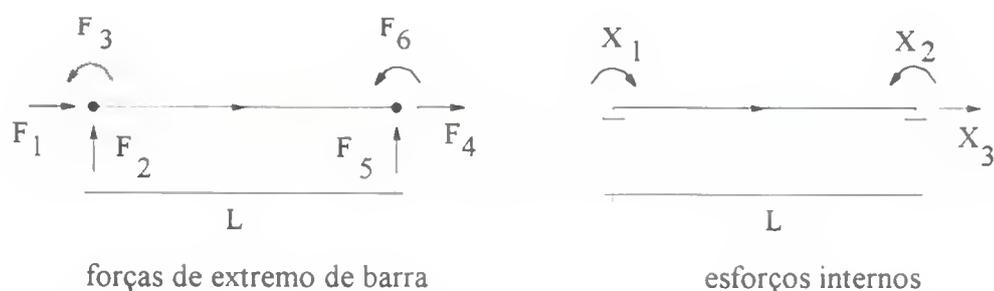
Em terceiro lugar, aparecem as *relações constitutivas* que expressam as deformações induzidas no material construtivo por esforços impostos à estrutura.

As leis da estática e cinemática são independentes das relações constitutivas. As relações utilizadas neste trabalho estão apresentadas a seguir e são baseadas no regime dos pequenos deslocamentos e deformações. Uma informação detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em, por exemplo, Smith (1990b).

### 2.2.1 Estática e cinemática do elemento discreto

Cada barra do modelo gráfico de um pórtico representa um elemento estrutural de comprimento finito, conectado nas suas extremidades a outros elementos por pontos chamados nós.

Seja o elemento finito  $i$ , de comprimento  $L$ , desconexo de um pórtico plano, apresentado na figura 2.6, com as grandezas estáticas correspondentes. Nesta figura,  $F_k$  ( $k = 1, \dots, S_i = 6$ ) define as forças de extremo de barra, as quais representam as forças de interação com a estrutura da qual o elemento considerado foi retirado. Ainda na mesma figura  $X_j$  ( $j = 1, \dots, s_i = 3$ ) representa os esforços internos independentes neste mesmo elemento.



**Fig. 2.6** Grandezas da estática para um elemento plano no sistema local

De forma similar, as grandezas cinemáticas são apresentadas na figura 2.7. Nesta figura  $d_k$  ( $k = 1, \dots, S_i = 6$ ) representa os deslocamentos nodais ou de extremo de barra, e  $x_j$  ( $j = 1, \dots, s_i = 3$ ) as deformações independentes no elemento considerado.

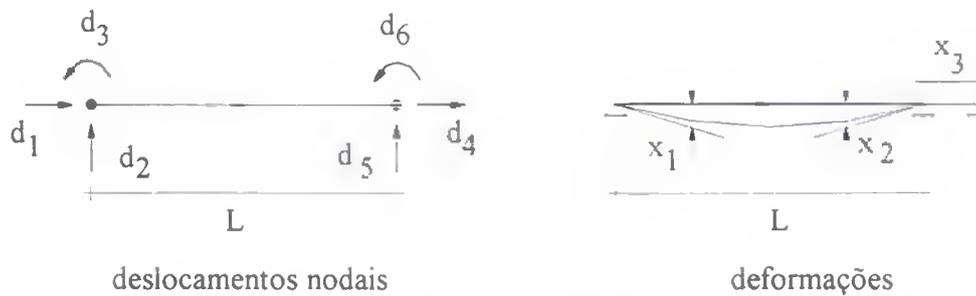


Fig. 2.7 Grandezas da cinemática para um elemento plano no sistema local

Para o elemento plano das figuras 2.6 e 2.7, considerando válida a hipótese de pequenos deslocamentos, obtêm-se as relações da estática (2.2) e da cinemática (2.3)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & L & 1 & L & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & -1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & -1 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1 & L & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Relações similares podem ser escritas para um elemento de pórtico espacial onde  $S_i=12$  e  $s_i=6$ .

As relações (2.2) e (2.3) têm a forma matricial

$$F_i = D_i^T X_i \quad (2.4)$$

$$x_i = D_i d_i \quad (2.5)$$

onde o índice  $T$  indica a transposta da matriz. As relações da cinemática são independentes das relações da estática e a presença da matriz comum  $D_i$  depende da consideração de pequenos deslocamentos e da correspondência, inclusive dos sinais, de  $F_i$  com  $d_i$  e  $X_i$  com  $x_i$ . Esta propriedade, conhecida inicialmente por Princípio da Contragrediência, passou a ser referida como Princípio da Dualidade Estático-Cinemática - DEC (por exemplo, Smith, 1990b; Sahlit, 1992).

Portanto, a estática e a cinemática dos sistemas estruturais lineares podem ser descritas por transformações lineares que não dependem das leis constitutivas do material estrutural, normalmente constituindo um modelo matemático razoável para a solução das estruturas de comportamento linear elástico, elastoplástico e rígido-plástico (Mello & Sahlit, 1983).

### 2.2.2 Descrição de malha para o sistema estrutural

Podem ser utilizadas duas maneiras distintas para se descrever a estática e a cinemática de um sistema estrutural - a *descrição de malha* e a *descrição nodal* - dependendo da forma como a conectividade da estrutura é descrita. Se a conectividade é descrita pela incidência dos elementos nos nós gera-se a descrição nodal. Se a mesma é descrita pela incidência dos elementos em um conjunto completo de malhas independentes, obtém-se a descrição de malha. A descrição de malha para um sistema estrutural é revista nesta subseção enquanto que a descrição nodal na subseção 2.2.3.

Quando o número de equações de equilíbrio independentes não for suficiente para se determinar os esforços em todos os elementos de uma estrutura, diz-se que a estrutura é *estaticamente indeterminada* ou *hiperestática*. Neste caso, os esforços podem ser expressos em função das cargas aplicadas juntamente com um certo número de forças internas independentes na estrutura. Este número excedente de forças internas é chamado de *grau de indeterminação estática* (ou de hiperestaticidade)  $\alpha$  da estrutura.

O número de deslocamentos nodais independentes da estrutura é chamado de *grau de indeterminação cinemática*  $\beta$  e representa o número de graus de liberdade cinemáticos da estrutura. Sendo  $s$  o número de esforços internos independentes e das deformações duais da estrutura, tem-se a relação

$$s = \alpha + \beta \quad (2.6)$$

onde  $\beta$  depende da discretização adotada para a estrutura, ao contrário de  $\alpha$  que é um invariante topológico.

As condições de equilíbrio de uma estrutura podem ser descritas na forma de malha como

$$X = Bp + B_0\lambda \quad (2.7)$$

ou

$$X = [B \ B_o] \begin{bmatrix} P \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde  $X$  são os esforços internos independentes para todos os elementos da estrutura,  $p$  representa os  $\alpha$  esforços hiperestáticos e  $\lambda$  as forças nodais aplicadas.  $B_o$  e  $B$  são matrizes de transformação linear, sendo que  $B_o \lambda$  fornece uma solução equilibrada com o carregamento externo, chamada de solução particular, e  $Bp$  fornece uma solução autoequilibrada, chamada de solução complementar.

Utilizando-se o Princípio da Dualidade Estático-Cinemática obtêm-se as relações cinemáticas a seguir, a partir da equação (2.8) (por exemplo, Mello & Sahlit, 1983)

$$\begin{bmatrix} \delta \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o^T \\ B^T \end{bmatrix} x \quad \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{matrix} \quad (2.9)$$

onde  $x$  é o vetor das deformações independentes,  $\delta$  o vetor dos deslocamentos nodais e  $v$  o vetor das descontinuidades associadas aos hiperestáticos  $p$ . Impondo-se a compatibilidade geométrica tem-se

$$v = 0 \quad (2.10)$$

$$\delta = B_o^T x \quad (2.11)$$

$$B^T x = 0 \quad (2.12)$$

### 2.2.3 Descrição nodal para o sistema estrutural

As condições de equilíbrio de uma estrutura podem ser descritas na forma nodal como

$$Q = 0 = [A^T \ -A_o^T] \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

As equações cinemáticas, obtidas por dualização da relação (2.13), apresentam a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A_o \end{bmatrix} q \quad \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{matrix} \quad (2.14)$$

onde  $A$  é a matriz nodal,  $A_o$  a matriz nodal referente às cargas aplicadas,  $Q$  o vetor das forças nodais de restrição correspondentes aos  $\beta$  graus de liberdade e  $q$  o vetor dos deslocamentos nodais. Para satisfazer o equilíbrio nos nós da estrutura

$$Q = 0 \quad (2.15)$$

As equações apresentadas podem ser ampliadas para a consideração dos efeitos dinâmicos conforme mostrado por Sahlit (1992).

#### 2.2.4 Relações constitutivas do material

A descrição matemática da relação entre esforços internos e correspondentes deformações é conhecida como equação constitutiva do material. Pode-se decompor a deformação total  $x$  de um elemento em duas parcelas independentes, a deformação elástica  $x_e$  e a deformação plástica  $x_p$  (por exemplo, Teixeira de Freitas, 1990).

$$x = x_e + x_p \quad (2.16)$$

O campo de deformação é então decomposto em um campo contínuo de deformações elásticas, que se desenvolvem ao longo do elemento, e um conjunto de deformações plásticas discretas que ocorrem nas chamadas seções críticas, as quais se localizam nas extremidades dos elementos.

No presente trabalho são considerados elementos de pórtico plano sujeitos a carregamentos aplicados no próprio plano. Assume-se que o elemento seja prismático, com as dimensões da seção transversal pequenas em comparação com o seu comprimento, e que o seu comportamento à flexão seja governado pela hipótese de Bernouilli-Euler.

Para um *material linear elástico*, homogêneo e isotrópico, considerando-se apenas as deformações axiais e à flexão, e assumindo-se que as deformações de cisalhamento são negligenciáveis, obtém-se a relação entre as deformações elásticas  $x_{ei}$  e os esforços internos  $X_i$  do elemento  $i$  como

$$x_{ei} = \begin{bmatrix} L / 3EI & L / 6EI & 0 \\ L / 6EI & L / 3EI & 0 \\ 0 & 0 & L / EA \end{bmatrix} X_i \quad (2.17)$$

ou

$$x_{ei} = f_i X_i \quad (2.18)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade ou de Young,  $I$  o momento de inércia,  $A$  a área da seção transversal,  $L$  o comprimento do elemento e  $f_i$  é a *matriz de flexibilidade* do elemento  $i$ .

A relação constitutiva elástica pode ser utilizada na forma rigidez como mostrado a seguir

$$X_i = \begin{bmatrix} 4EI & L & -2EI & L & 0 \\ -2EI & L & 4EI & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA & L \end{bmatrix} x_{ei} \quad (2.19)$$

ou

$$X_i = k_i x_{ei} \quad (2.20)$$

onde  $k_i$  é a *matriz de rigidez* do elemento  $i$ . As matrizes  $f_i$  e  $k_i$  dependem da escolha dos esforços internos feita na figura 2.6 e guardam a seguinte relação

$$f_i k_i = k_i f_i = I \quad (2.21)$$

As relações (2.17) a (2.20) foram obtidas para um elemento submetido a cargas aplicadas nas suas extremidades. Os efeitos de carregamentos ao longo do elemento (cargas distribuídas e concentradas), de temperatura e defeitos de fabricação são considerados no vetor  $x_o$  de deformações iniciais ou deformações nodais equivalentes no elemento. Pode-se então escrever as equações (2.18) e (2.20) na forma geral

$$x_{ei} = f_i X_i + x_{oi} \quad (2.22)$$

$$X_i = k_i (x_{ei} - x_{oi}) \quad (2.23)$$

As matrizes de flexibilidade  $f$  e de rigidez  $k$  para a estrutura desconexa são facilmente determinadas a partir das matrizes  $f_i$  e  $k_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) onde  $N$  representa o número de elementos estruturais.

As teorias matemáticas da plasticidade podem ser divididas em dois grupos. O primeiro grupo, *teorias de deformação*, assume a reversibilidade das deformações e as relações constitutivas associadas são chamadas de *holonômicas* ou não-lineares elásticas. O segundo grupo, *teorias incrementais*, considera as deformações plásticas irreversíveis e as relações constitutivas correspondentes são chamadas de *não-holonômicas* (por exemplo, Sahlit, 1992).

Assumindo-se que as deformações plásticas se desenvolvam em um número finito de seções críticas, que a superfície de escoamento seja convexa e que as relações constitutivas plásticas sejam linearizadas em trechos finitos, a representação matricial das relações constitutivas plásticas não-holonômicas, conforme proposto por Maier, pode ser escrita na forma (por exemplo, Appleton & Smith, 1979; Sahlit, 1992)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -H & N^T \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_* \\ X_* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_* \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} & \text{(a)} \\
& \text{(b)} & (2.24) \\
y_* \geq 0 & \quad y_*^T \dot{x}_* = 0 & \quad \dot{x}_* \geq 0 & \text{(c - e)}
\end{aligned}$$

onde  $y_*$  é o vetor dos potenciais plásticos,  $N$  é a matriz das componentes das normais aos vários hiperplanos de escoamento,  $H$  é a matriz de encruamento,  $x_*$  os multiplicadores plásticos e  $\dot{x}_*$  suas derivadas em relação ao tempo,  $X_*$  os esforços de plastificação e  $\dot{x}_p$  as taxas de deformação plástica.

A equação (2.24a) apresenta as condições de resistência (*yield condition*). A equação (2.24b) define  $\dot{x}_p$  como uma combinação linear das componentes das normais aos vários hiperplanos. Esta relação é conhecida como lei de fluxo plástico (*flow rule*). As relações (2.24c-e) interligam as grandezas da estática e da cinemática e são conhecidas como *condições de complementaridade*.

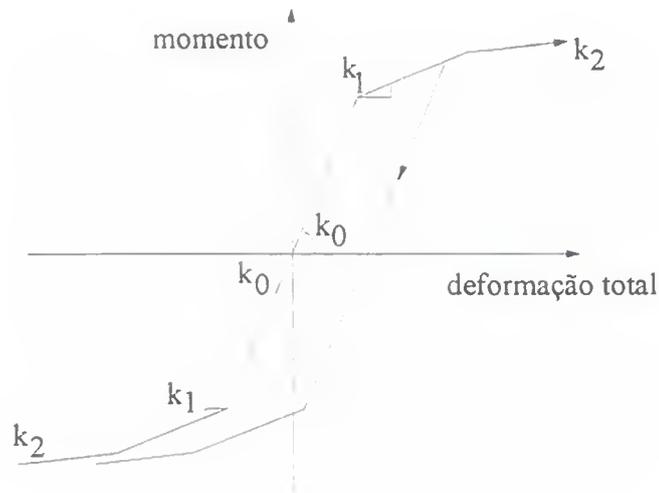
As equações (2.24) podem ser escritas na forma holonômica a seguir, a qual permite a recuperação das deformações quando existe descarga plástica, o que contraria a definição básica de plasticidade.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -H & N^T \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ X_* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_* \\ x_p \end{bmatrix} & \text{(a)} \\
& \text{(b)} & (2.25) \\
y_* \geq 0 & \quad y_*^T x_* = 0 & \quad x_* \geq 0 & \text{(c - e)}
\end{aligned}$$

As equações (2.24) e (2.25) coincidem quando não existe tendência para descarga plástica, isto é, quando há progressão plástica regular. Ambas são válidas para o caso da plasticidade ser governada por  $v$  esforços, onde  $v$  é no máximo igual a três para estruturas planas e seis para estruturas espaciais.

Appleton (1979) descreve algumas formas convencionais de se considerar o encruamento linearizado em trechos finitos:

- *Não interação dos planos de escoamento*: é caracterizado por não existir interação entre os planos de escoamento, gerando uma matriz de encruamento com elementos não nulos apenas na diagonal principal. Uma curva típica, para o caso de um esforço apenas (por exemplo, momento fletor), é mostrada na figura 2.8.



**Fig. 2.8** Modelo de encruamento de Koiter

sendo os elementos da matriz de encruamento correspondente positivos e dados por

$$H^{+i} = \frac{k_i^- k_{i-1}^-}{k_{i-1}^- - k_i^-} \quad (a) \quad (2.26)$$

$$H^{-i} = \frac{k_i^+ k_{i-1}^+}{k_{i-1}^+ - k_i^+} \quad (b)$$

Em (2.26),  $k_i$  representa a tangente do ângulo que o trecho  $i$  faz com o eixo das abscissas.

Este modelo, também chamado de modelo de encruamento de Koiter, é utilizado no presente trabalho, por sua simplicidade e por fornecer resultados válidos do ponto de vista prático (por exemplo, Sahlit, 1992).

- *Interação dos planos de escoamento*: é caracterizado pela inclusão de elementos fora da diagonal principal, na matriz de encruamento, chamados de parâmetros de interação ( $H_{ij}$ ,  $i \neq j$ ). Neste modelo de encruamento, pode-se utilizar a relação de encruamento cinemático de Prager, que é definida pela translação de toda a superfície de escoamento.

- *Encruamento isotrópico*: é caracterizado por uma expansão uniforme da superfície de escoamento, sem mudanças na sua forma. Na matriz de encruamento  $H$  apenas os elementos da diagonal principal são independentes.

### 2.3 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

A programação matemática preocupa-se com a otimização de funções sujeitas a restrições. Ela envolve a minimização (ou maximização) de uma função de variáveis reais, chamada de função

objetivo, onde estas variáveis devem satisfazer a restrições adicionais. Estas restrições são expressas na forma de equações e/ou inequações sendo possível que algumas variáveis sejam também restritas em sinal.

Quando a função objetivo e as restrições são funções lineares contínuas tem-se o *programa linear* (PL), caso contrário tem-se um *programa não-linear*. Se a função objetivo é uma função quadrática contínua, enquanto as restrições são funções lineares contínuas, tem-se o *programa quadrático* (PQ).

Em problemas de natureza física pode ocorrer que um programa de minimização, chamado *primal*, esteja associado a um programa de maximização, chamado *dual*. Apesar das variáveis do programa primal não aparecerem no programa dual, e vice-versa, ambos os programas apresentam a mesma solução ótima para as suas respectivas funções objetivo.

A programação matemática pode ser aplicada em várias áreas da análise e síntese de estruturas como, por exemplo, análise elastoplástica, análise plástica limite, análise de *shakedown* (acomodação plástica) e plasticidade dinâmica. Informações sobre o desenvolvimento histórico da programação matemática e suas aplicações na análise estrutural podem ser encontradas nos trabalhos de Maier & Munro (1982) e Maier (1984).

### 2.3.1 Análise elastoplástica

A análise elastoplástica permite que se conheça a evolução das tensões, deformações e deslocamentos desenvolvidos na estrutura ao longo da história do carregamento. Esta análise pode ser obtida pela aplicação da teoria de programação matemática.

Considerando-se as relações constitutivas elastoplásticas linearizadas em trechos finitos, os sistemas governativos dos problemas elastoplásticos estáticos e dinâmicos têm a forma de um programa quadrático (PQ). As condições necessárias e suficientes para a obtenção de uma solução ótima de um programa matemático genérico são conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Ocorre que as condições de KKT para um PQ são quase todas lineares, formando um *problema de complementaridade linear* (PCL) composto de equações lineares e condições de complementaridade. Assim a solução de um PQ pode ser obtida de forma indireta pela resolução do PCL correspondente (por exemplo, Maier, 1984).

Quando se considera um carregamento variando monotonicamente de acordo com um parâmetro ou fator de carga, a análise estrutural pode ser realizada através de um *problema de complementaridade linear paramétrico* (PCLP). No presente trabalho os PCL e PCLP, utilizados para a análise elastoplástica de estruturas, são solucionados pelo algoritmo de Wolfe nas suas formas curta e longa, respectivamente, conforme adaptados por Smith (1978, 1990a) Este método apresenta as seguintes vantagens (Smith, 1978; Appleton & Smith, 1979):

- convergência garantida e não violação das condições de plastificação;
- determinação automática de cada incremento de carga, que é definido pela ativação de uma seção plástica ou mudança de plano de escoamento ou descarga de uma seção plastificada;
- consideração da ocorrência de descarga plástica;
- para o material de comportamento elástico perfeitamente plástico, fornece, além da completa análise sequencial, o valor do fator de carga de colapso e o mecanismo correspondente;
- permite a combinação de cargas fixas e proporcionais variáveis.

### **2.3.2 Análise plástica limite**

A análise plástica limite tem por objetivo a determinação da carga de colapso plástico da estrutura, sem o conhecimento da história do carregamento. Quando ocorre a formação de um número suficiente de rótulas plásticas a estrutura se transforma em um mecanismo, provocando o colapso plástico da estrutura. A análise plástica limite só é aplicada para materiais perfeitamente plásticos, isto é, que não ganham resistência com o desenvolvimento das deformações plásticas. Em um mecanismo de colapso plástico a estrutura tende a se mover como um sistema de corpo rígido, articulado pela presença das taxas de deformação nas rótulas plásticas.

Mais detalhes sobre a teoria da análise plástica limite podem ser encontrados, por exemplo, em Neal (1977), Horne (1979) e Smith (1990c).

A análise plástica limite pode ser efetuada por problemas de programação linear (PLs) associados aos teoremas estático e cinemático ou através de um problema de complementaridade linear (PCL), que constitui as relações de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

necessárias e suficientes para a obtenção da solução ótima dos PLs duais (por exemplo, Smith, 1990c).

### 2.3.3 Análise de acomodação plástica ou *shakedown*

O carregamento atuante em uma estrutura pode variar consideravelmente durante a sua vida útil. Se a estrutura está sujeita a uma sucessão de carregamentos diferentes, que variam dentro de um intervalo conhecido, diz-se que a mesma está submetida a um *carregamento variável repetido*.

Conforme observado por Grüning, em 1926, e Kazinczy, em 1931, um pórtico submetido a carregamentos variáveis repetidos pode entrar em ruína devido ao desenvolvimento de deformações plásticas excessivas, mesmo que não exista uma específica combinação de cargas que seja suficiente para provocar o colapso plástico (Neal, 1977).

O objetivo da teoria de *shakedown* é a determinação do fator de carga  $\gamma_s$  que represente o limite máximo para que as deformações plásticas na estrutura se estabilizem. Este comportamento é conhecido como *shakedown*, adaptação ou acomodação plástica.

Maiores detalhes sobre a teoria de *shakedown* podem ser encontrados, por exemplo, em Neal (1977) e Horne (1979).

A análise de *shakedown* pode ser efetuada pela programação matemática através de programas lineares (PLs) associados ao teoremas estático e cinemático.

## CAPÍTULO 3

### CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS COM COMPORTAMENTO LINEAR ELÁSTICO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Uma conexão viga-pilar semi-rígida de pórtico plano pode ser modelada considerando-se três graus de liberdade (deformações axiais, cisalhantes e rotacionais). Porém, devido à falta de dados experimentais sobre o comportamento das deformações axiais e cisalhantes e por elas serem, em geral, pequenas quando comparadas com a deformação rotacional, elas não precisam ser consideradas para propósitos práticos (Lui & Chen, 1987; Li et al., 1995). Portanto, no presente trabalho, apenas a deformação rotacional é considerada na modelagem do comportamento da conexão semi-rígida.

O comportamento da conexão é descrito pela relação entre o momento por ela transmitido e a rotação relativa entre os dois elementos conectados, conforme apresentado na subseção 2.1.1. A curva experimental momento-rotação da conexão pode ser simplificada por um dos vários modelos matemáticos existentes, alguns dos quais estão listados na subseção 2.1.2. No presente capítulo é utilizado o modelo linear elástico para descrever o comportamento da conexão semi-rígida.

Apesar das curvas momento-rotação das conexões serem não-lineares em toda a faixa de carregamento, estudos mostram que a resposta das conexões submetidas a cargas de serviço é essencialmente linear elástica. Assim, a análise linear elástica pode ser utilizada para prever o comportamento da estrutura sujeita a cargas de serviço (por exemplo, Stelmack et al., 1986; Gerstle & Cook, 1988).

No presente capítulo são obtidas as matrizes de flexibilidade e rigidez modificadas pela inclusão dos efeitos das conexões semi-rígidas do elemento. Estas matrizes são utilizadas na análise linear elástica de pórticos planos submetidos a carregamentos estáticos.

### 3.2 MATRIZES DE FLEXIBILIDADE E RIGIDEZ MODIFICADAS

Considera-se um elemento estrutural  $i$ , de comprimento finito  $L$ , ligado nas suas extremidades a outros elementos por conexões semi-rígidas, sujeito ao regime dos pequenos deslocamentos e deformações. Assume-se que o elemento e as conexões têm um comportamento linear elástico, com a rigidez à flexão  $EI$  constante ao longo do elemento.

Seja o elemento estrutural da figura 3.1 com os esforços internos independentes  $X_i$ , desenvolvidos

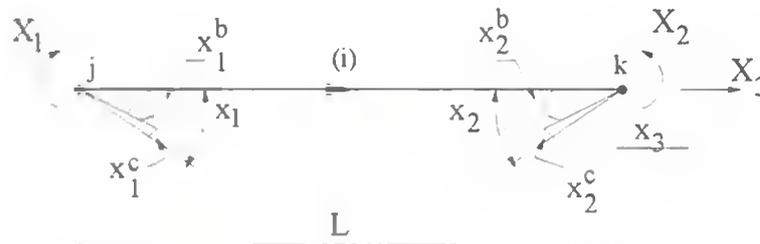


Fig. 3.1 Esforços internos e deformações em um elemento estrutural

onde  $x_i^c$  é o vetor das deformações causadas pela flexibilidade das conexões,  $x_i^b$  é o vetor das deformações da barra (elemento) e  $x_i$  é o vetor das deformações totais dado por

$$x_i = x_i^b + x_i^c \quad (3.1)$$

Como o material é linear elástico

$$x_i = x_{ei} = x_{ei}^b + x_{ei}^c \quad (3.2)$$

Segundo Wang (1983), a simplificação linear da relação momento-rotação da conexão, para o elemento considerado, pode ser expressa na forma

$$X_1 = R_j \frac{EI}{L} x_{e1}^c \quad (a)$$

$$X_2 = R_k \frac{EI}{L} x_{e2}^c \quad (b) \quad (3.3)$$

onde  $R$  é chamado de *índice de rigidez da conexão* nas extremidades  $j$  e  $k$  do elemento. É uma variável adimensional com valores entre zero, para rótulas, e infinito, para conexões rígidas. As rigidezes das conexões semi-rígidas são, desta forma, proporcionais à rigidez à flexão do elemento.

As deformações elásticas da barra, para um carregamento qualquer, são definidas na forma flexibilidade em (2.22) como

$$\mathbf{x}_{ei}^b = \mathbf{f}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{x}_{oi} \quad (3.4)$$

A partir de (3.3) pode-se escrever

$$\mathbf{x}_{ei}^c = \mathbf{f}_i^c \mathbf{X}_i \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{f}_i^c = \begin{bmatrix} L & R_j EI & 0 & 0 \\ 0 & L & R_k EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

A matriz  $\mathbf{f}_i^c$  é chamada de *matriz de flexibilidade das conexões* do elemento  $i$  e, no presente trabalho, considera apenas a deformação rotacional das conexões.

Combinando as equações (3.2), (3.4) e (3.5) obtêm-se

$$\mathbf{x}_{ei} = \mathbf{f}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{x}_{oi} + \mathbf{f}_i^c \mathbf{X}_i \quad (3.7)$$

$$\mathbf{x}_{ei} = \bar{\mathbf{f}}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{x}_{oi} \quad (3.8)$$

onde

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^c \quad (3.9)$$

ou

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} \frac{R_j + 3}{3R_j} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{R_k + 3}{3R_k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I}{A} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{f}}_i$  é chamada de *matriz de flexibilidade modificada* do elemento  $i$  e a matriz  $\mathbf{f}_i$  é definida em (2.17). Pode ser reescrita em função do *fator de fixação*  $p$  da conexão, que varia de zero, para rótulas, a um, para conexões rígidas (Wang, 1983)

$$p = \frac{1}{1 + 3/R} \quad (3.11)$$

$$R = \frac{3p}{1 - p} \quad (3.12)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{3p_j} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3p_k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I}{A} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A relação entre as matrizes de flexibilidade e de rigidez do elemento, conforme (2.21), é apresentada a seguir

$$f_i k_i = k_i f_i = I \quad (3.14)$$

Seja  $\bar{k}_i$  a *matriz de rigidez modificada* do elemento  $i$ , que mantém a seguinte relação com  $\bar{f}_i$ ,

$$\bar{f}_i \bar{k}_i = \bar{k}_i \bar{f}_i = I \quad (3.15)$$

Premultiplicando a relação (3.8) por  $\bar{k}_i$ , tem-se a relação constitutiva elástica, na forma rigidez

$$X_i = \bar{k}_i (x_{ei} - x_{oi}) \quad (3.16)$$

onde  $\bar{k}_i$  é a inversa da matriz  $\bar{f}_i$  sendo, portanto,

$$\bar{k}_i = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12/p_k}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & \frac{-6}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & 0 \\ \frac{-6}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & \frac{12/p_j}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Segundo Wang (1983), os *esforços de engastamento perfeito modificados*  $\bar{X}_{oi}$  com a consideração de conexões semi-rígidas são dados por

$$\bar{X}_{oi} = -\bar{k}_i x_{oi} \quad (3.18)$$

Como

$$x_{oi} = -f_i X_{oi} \quad (3.19)$$

onde  $X_{oi}$  é o vetor dos *esforços de engastamento perfeito* para conexões rígidas, pode-se relacionar  $\bar{X}_{oi}$  com  $X_{oi}$  pelas equações a seguir

$$\bar{X}_{oi} = \bar{k}_i f_i X_{oi} \quad (3.20)$$

ou

$$\bar{X}_{oi} = \begin{bmatrix} \frac{-1+4/p_k}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & \frac{-2+2/p_k}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & 0 \\ \frac{-2+2/p_j}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & \frac{-1+4/p_j}{\left[4 \begin{matrix} (p_j, p_k) \end{matrix} \right] - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_{oi} \quad (3.21)$$

O vetor  $x_{oi}$  das deformações iniciais ou deformações nodais equivalentes não se altera com a consideração de conexões semi-rígidas, pois é definido para elementos estruturais rotulados nas suas extremidades.

Deve-se ressaltar que as matrizes  $\bar{f}_i$  e  $\bar{k}_i$ , nas equações (3.13) e (3.17), quando consideradas conexões rígidas, isto é  $p_j = p_k = 1$ , reduzem-se às conhecidas matrizes  $f_i$  e  $k_i$ , dadas por (2.17) e (2.19).

### 3.3 INCLUSÃO DE CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS EM MÉTODOS DE ANÁLISE LINEAR CONHECIDOS

A análise linear elástica de pórticos planos com conexões semi-rígidas, submetidos a carregamentos estáticos, pode ser feita através de métodos de análise conhecidos, sendo necessárias apenas algumas alterações para a consideração da flexibilidade das conexões. No presente capítulo são utilizados os métodos malha-flexibilidade, nodal-rigidez e rigidez direto.

O método *malha-flexibilidade* (ou método da flexibilidade) utiliza as relações da estática e da cinemática na forma da descrição de malha, dadas pelas equações (2.7) a (2.12), juntamente com a relação constitutiva do material na forma flexibilidade (2.22). Para a análise dos pórticos, através deste método, é utilizado o programa computacional MFSA.FOR desenvolvido por Brandão (1994). A entrada de dados deste programa é semi-automática, sendo necessário fornecer as matrizes de malha  $B$  e  $B_o$ , e a matriz de flexibilidade da estrutura, além dos dados sobre a geometria do pórtico e o carregamento aplicado. A influência das conexões semi-rígidas é incluída na análise através da utilização da matriz de flexibilidade modificada da estrutura  $\bar{f}$  na entrada de dados. Todos os demais dados de entrada independem da flexibilidade das conexões.

A matriz de flexibilidade modificada da estrutura desconexa  $\bar{f}$ , tem a forma

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 & & & \\ & \bar{f}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{f}_N \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $\bar{f}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) é a matriz de flexibilidade modificada do elemento desconexo  $i$ , dada pela equação (3.10), e  $N$  é o número de elementos da estrutura.

O método *nodal-rigidez* (ou método da rigidez) utiliza as relações da estática e da cinemática na forma da descrição nodal, dadas pelas equações (2.13) a (2.15), e a relação

constitutiva do material na forma rigidez (2.23). Este método é aplicado na análise de pórticos planos através do programa computacional NRSA.FOR desenvolvido por Brandão (1994). A entrada de dados é semi-automática, sendo necessário fornecer a matriz nodal  $A$  e a matriz de rigidez da estrutura, além dos dados sobre a geometria do pórtico e o carregamento aplicado. A consideração das conexões semi-rígidas é feita através da utilização da matriz de rigidez modificada da estrutura  $\bar{k}$  na entrada de dados. Todos os demais dados de entrada independem da rigidez das conexões.

A matriz de rigidez modificada da estrutura desconexa  $\bar{k}$ , tem a forma

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & & & \\ & \bar{k}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{k}_N \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

onde  $\bar{k}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) é a matriz de rigidez modificada do elemento desconexo  $i$ , dada pela equação (3.17), e  $N$  é o número de elementos da estrutura.

Maiores detalhes sobre os métodos malha-flexibilidade e nodal-rigidez podem ser encontrados em Mello & Sahlit (1983).

Para a utilização do *método da rigidez direto* na análise de pórticos planos com conexões semi-rígidas, foi modificado o programa computacional PPEF.FOR desenvolvido na Universidade de Brasília pelo Prof. Partridge para pórticos com conexões rígidas. Por se tratar de um programa automático as modificações consistiram basicamente em alterar a matriz de rigidez e o vetor dos esforços de engastamento perfeito. A matriz de rigidez utilizada neste método é montada a partir de um elemento livre e pode ser obtida pela transformação  $A_i^T \bar{k}_i A_i$ , onde  $A_i$  é a matriz nodal e  $\bar{k}_i$  a matriz de rigidez modificada, ambas referidas a um elemento livre  $i$  (por exemplo, Paula, 1995).

### 3.4 MATRIZES DE EQUILÍBRIO E DE COMPATIBILIDADE NAS FORMAS DE MALHA E NODAL

Seja o pórtico da figura 3.2, analisado por Wang (1983).

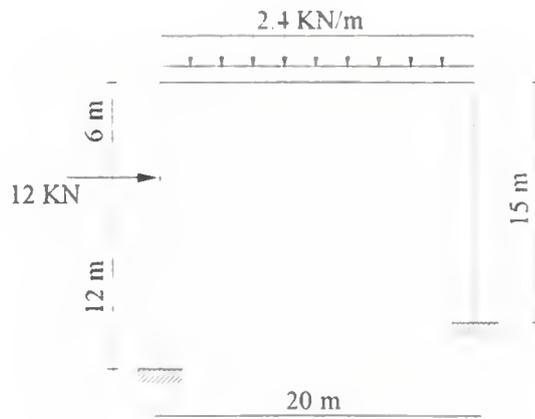


Fig. 3.2 Pórtico plano (Wang, 1983)

As matrizes nas formas da descrição de malha e nodal são obtidas como se todas as conexões fossem totalmente rígidas, sendo assim independentes da flexibilidade das conexões. Deve-se ressaltar que a presença de rótulas na estrutura é considerada nas matrizes de malha  $B$  e  $B_o$ , sem alterar a matriz de flexibilidade convencional. No caso da descrição nodal, a rótula é introduzida apenas na matriz de rigidez  $\bar{k}$ , considerando-se o fator de fixação  $p$  igual a zero.

### 3.4.1 Descrição de malha

Considerando-se inextensíveis os elementos do pórtico da figura 3.2, pode-se adotar a discretização mostrada na figura 3.3.

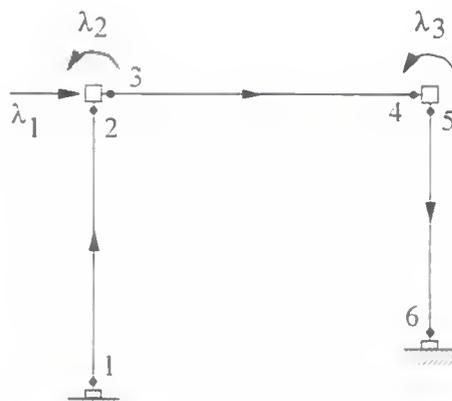


Fig. 3.3 Discretização adotada

Para qualquer elemento inextensível é necessário considerar, na análise estrutural, apenas os momentos nas extremidades do elemento como os esforços independentes na estrutura. Assim, para o pórtico da figura 3.3, composto de três elementos, existem seis esforços internos independentes  $X$ .

O vetor  $\lambda$  das forças nodais aplicadas é calculado considerando-se as cargas diretamente aplicadas aos nós, somadas às ações equivalentes das cargas ao longo dos elementos. As deformações produzidas nas extremidades por cargas aplicadas ao longo dos elementos são incluídas no vetor  $x_0$  de deformações iniciais. O vetor  $\lambda$  para o pórtico da figura 3.2 é dado por

$$\lambda = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (KN)} \quad (3.24)$$

Pela equação (2.6) calcula-se o grau de indeterminação  $\alpha$  da estrutura; sendo  $s = 6$  e  $\beta = 3$  tem-se que  $\alpha = 3$ . As matrizes  $B$  e  $B_0$  são calculadas a partir de bases isostáticas obtidas pela liberação de vínculos, sendo a matriz  $B$  obtida através da aplicação dos respectivos esforços hiperestáticos  $p$ . Pode-se utilizar bases diferentes para cada componente de  $\lambda$  e  $p$  ocasionando, porém, a perda do sentido físico dos esforços hiperestáticos calculados.  $B$  e  $B_0$  são obtidas através da relação de equilíbrio descrita em (2.8) como

$$X = [B \quad B_0] \begin{bmatrix} p \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde  $B \cdot \lambda$  fornece a solução equilibrada com o carregamento externo  $\lambda$  e  $Bp$  a solução autoequilibrada, em equilíbrio com os hiperestáticos  $p$ , ou ainda, em equilíbrio com  $\lambda = 0$

Para o pórtico estudado pode-se utilizar as bases mostradas na figura 3.4, considerando-se a tradicional convenção de momento fletor positivo quando o mesmo traciona as fibras inferiores. As setas nos elementos da figura 3.3 caracterizam as fibras inferiores e superiores ao definirem a orientação dos elementos

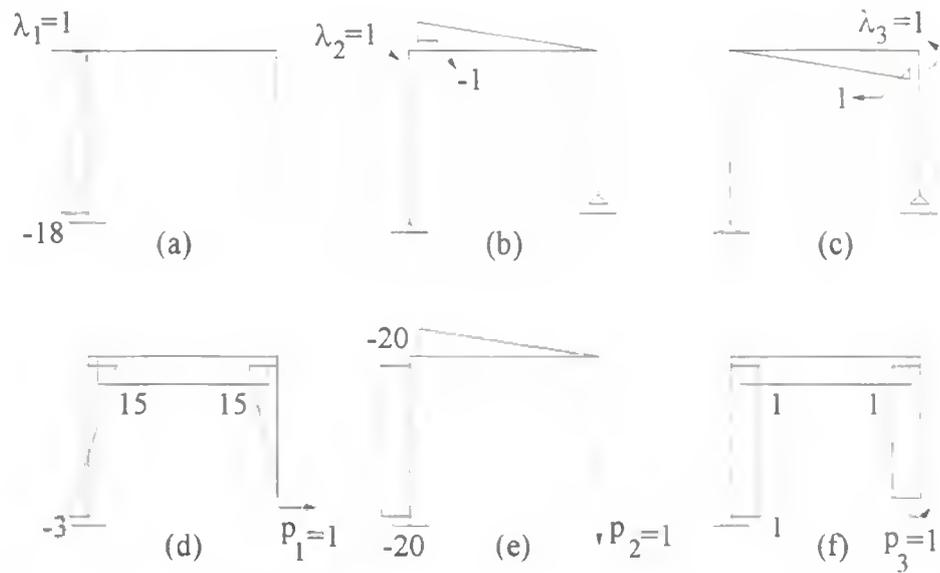


Fig. 3.4 Diagramas para descrição de malha

Tem-se, então, que

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -20 & 1 & -18 & 0 & 0 \\ 15 & -20 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -20 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

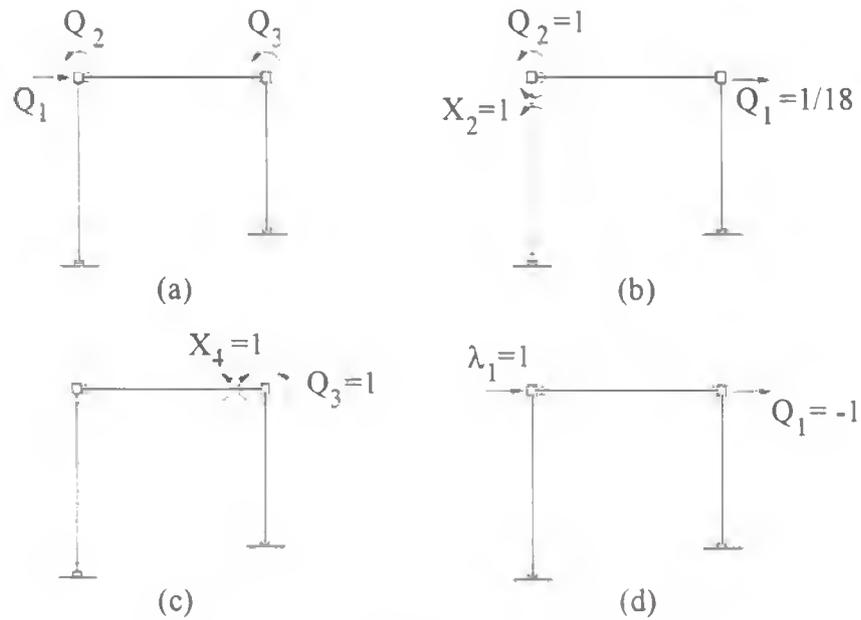
Como o vetor  $\lambda$  apresenta apenas um componente não nulo, a matriz  $B_o$  poderia ser calculada com  $\lambda = [\lambda_i]$ , reduzindo  $B_o$  a um vetor coluna. A matriz  $B$  não se altera pois o grau de indeterminação  $\alpha$  da estrutura é invariável.

As matrizes  $B$  e  $B_o$  também podem ser calculadas pelas relações cinemáticas apresentadas em (2.9)

### 3.4.2 Descrição nodal

Os esforços internos independentes  $X$ , do pórtico da figura 3.2, podem ser temporariamente anulados pela inclusão de rótulas nas extremidades de cada elemento inextensível. Assim a estrutura estaticamente indeterminada transforma-se em um mecanismo com  $\beta = 3$  graus de

liberdade. Para tornar a estrutura isostática deve-se impor  $\beta = 3$  forças nodais de restrição  $Q$ , conforme mostrado na figura 3.5(a).



**Fig. 3.5** Sistemas de forças nodais de restrição

Os esforços internos  $X$ , temporariamente nulos, podem ser restabelecidos separadamente. As figuras 3.5(b) e (c) mostram que a inclusão de  $X_2$  e  $X_4$  induzem a presença de forças nodais de restrição para que o equilíbrio seja mantido. O vetor  $\lambda = [ \lambda_1 ]$ , das forças externas aplicadas, também deve ser equilibrado através de forças nodais de restrição, conforme a figura 3.5(d). Os sistemas de forças nodais de restrição, para os demais esforços internos, são obtidos de forma similar.

A relação de equilíbrio é descrita em (2.13) como

$$Q = [A^T \quad -A_o^T] \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Portanto, para o pórtico da figura 3.2, tem-se

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/18 & 1/18 & 0 & 0 & -1/15 & 1/15 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Para a satisfação do equilíbrio nos nós da estrutura é necessário que  $\bar{Q} = 0$ , conforme (2.15).

As matrizes  $A$  e  $A_o$  também podem ser calculadas pelas relações cinemáticas apresentadas em (2.14).

### 3.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### Exemplo 1

Considera-se o pórtico da figura 3.6, originalmente apresentado por Wang (1983), que apresenta as seguintes propriedades:  $E = 210 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ ,  $A = 27 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $I_c = 50 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ .

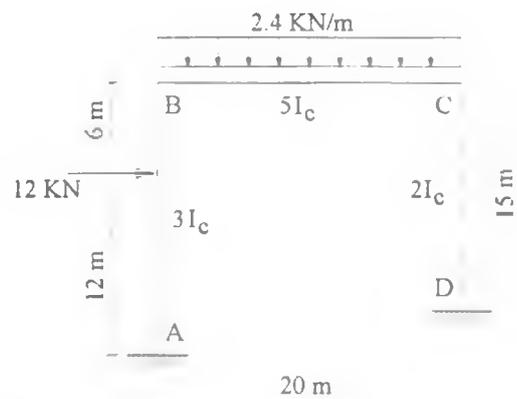


Fig. 3.6 Pórtico - exemplo 1 (Wang, 1983)

Utilizando-se a discretização mostrada na figura 3.3, o fator de fixação  $p$  de cada conexão é dado como:  $p_1 = 0.4$ ,  $p_2 = 0.5$ ,  $p_3 = 0.6$ ,  $p_4 = 0.4$ ,  $p_5 = 0.3$ ,  $p_6 = 0.8$ . As matrizes de malha  $B_o$  e  $B$  bem como as nodais  $A_o$  e  $A$  foram obtidas na seção 3.4. A matriz de flexibilidade modificada da estrutura desconexa  $\bar{f}$ , calculada conforme (3.13) e (3.22) considerando os elementos inextensíveis, é apresentada a seguir

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 4.76 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.95 & 3.81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.12 & 0.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.64 & 3.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.94 & 1.19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.19 & 2.98 \end{bmatrix} 10^{-4} \text{ (KNm)}^{-1} \quad (3.29)$$

De forma semelhante, a matriz de rigidez modificada da estrutura desconexa  $\bar{k}$ , calculada conforme (3.17) e (3.23) considerando os elementos inextensíveis, é apresentada a seguir.

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} 2210.53 & -552.63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -552.63 & 2763.16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5026.59 & -1005.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1005.32 & 3351.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1340.43 & -536.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -536.17 & 3574.47 \end{bmatrix} \text{KNm} \quad (3.30)$$

O vetor das forças nodais aplicadas  $\lambda$  foi obtido na seção 3.4, enquanto o vetor  $x_o$  das deformações causadas por carregamentos ao longo das barras é calculado da forma convencional.

O pórtico da figura 3.6 é então calculado pelos métodos malha-flexibilidade, nodal-rigidez e rigidez direto, comparando-se os resultados obtidos com os apresentados por Wang (1983). O momento fletor é considerado positivo quando traciona as fibras inferiores do elemento, cuja orientação é definida pela discretização da figura 3.3, e os deslocamentos nodais correspondem às forças nodais aplicadas. Com exceção do método da rigidez direto, todos os outros resultados apresentados na tabela 3.1, inclusive os do Wang (1983), consideraram as barras inextensíveis.

**Tab. 3.1** Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas - exemplo 1

Resultados		Wang (1983)	MF / NR	Rigidez direto
Momento fletor (KNm)	$X_1$	-36.953	-36.970	-37.042
	$X_2$	-8.324	-8.237	-8.306
	$X_3$	-8.325	-8.237	-8.306
	$X_4$	-33.254	-33.210	-33.261
	$X_5$	-33.255	-33.210	-33.261
	$X_6$	62.888	62.830	62.879
Deslocam. nodais (m)	$\delta_1$	0.221	0.221	0.221
	$\delta_2$	-0.011	-0.011	-0.011
	$\delta_3$	0.004	0.004	0.004

Percebe-se uma boa concordância entre os resultados apresentados, sendo que os obtidos pelas formulações malha-flexibilidade (MF) e nodal-rigidez (NR) são idênticos.

A tabela 3.2 apresenta os resultados obtidos pela análise do pórtico da figura 3.6 considerando tanto as conexões semi-rígidas como as conexões rígidas, sendo que em ambos os casos as barras foram consideradas extensíveis.

**Tab. 3.2** Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas e rígidas - exemplo 1

Resultados		Conexões semi-rígidas	Conexões rígidas
Momento fletor (KNm)	$X_1$	-37.042	-35.543
	$X_2$	-8.306	-35.343
	$X_3$	-8.306	-35.343
	$X_4$	-33.261	-66.322
	$X_5$	-33.261	-66.322
	$X_6$	62.879	53.519
Deslocam. nodais (m)	$\delta_1$	0.221	0.073
	$\delta_2$	-0.011	-0.007
	$\delta_3$	0.004	0.005

Observa-se que a consideração de flexibilidade nas conexões altera a distribuição dos esforços no pórtico de forma significativa como, por exemplo, o momento fletor no nó B ( $X_2$  e  $X_3$ ) cujo valor mudou de 8.31 para 35.34 KNm. O deslocamento horizontal  $\delta_1$  do pórtico também aumentou consideravelmente com a utilização de conexões semi-rígidas.

### Exemplo 2

Considera-se o pórtico da figura 3.6, originalmente apresentado por Wang (1983), porém com engastes nos apoios. Desta forma o fator de fixação  $p$  de cada conexão é dado como:  $p_1 = 1.0$ ,  $p_2 = 0.5$ ,  $p_3 = 0.6$ ,  $p_4 = 0.4$ ,  $p_5 = 0.3$ ,  $p_6 = 1.0$ . As matrizes de malha  $B_o$  e  $B$ , o vetor das forças nodais aplicadas  $\lambda$  e o vetor das deformações iniciais  $x_o$  são idênticos aos do exemplo 1. A matriz de flexibilidade modificada da estrutura desconexa  $\bar{f}$  sofre alterações e é dada a seguir.

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 1.91 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.95 & 3.81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.12 & 0.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.64 & 3.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.94 & 1.19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.19 & 2.38 \end{bmatrix} 10^{-4} \text{ (KNm)}^{-1} \quad (3.31)$$

Os resultados obtidos pelos métodos malha-flexibilidade e rigidez direto são apresentados na tabela 3.3, comparando-se com os resultados obtidos com a consideração de conexões rígidas em todas as ligações do pórtico. No cálculo pelo método malha-flexibilidade as barras foram consideradas inextensíveis, enquanto que no método da rigidez direto e no cálculo com conexões rígidas utilizou-se barras extensíveis.

**Tab. 3.3** Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas e rígidas - exemplo 2

Resultados		Conexões semi-rígidas		Conexões rígidas
		Malha-flexibilidade	Rigidez direto	
Momento fletor (KNm)	$X_1$	-64.530	-64.510	-35.543
	$X_2$	-12.780	-12.858	-35.343
	$X_3$	-12.780	-12.858	-35.343
	$X_4$	-26.360	-26.408	-66.322
	$X_5$	-26.360	-26.408	-66.322
	$X_6$	50.520	50.580	53.519
Deslocam. nodais (m)	$\delta_1$	0.133	0.134	0.073
	$\delta_2$	-0.011	-0.011	-0.007
	$\delta_3$	0.006	0.006	0.005

Observa-se que é indiferente, neste caso, se considerar as barras extensíveis ou inextensíveis. Porém a consideração da flexibilidade das conexões altera de forma significativa a distribuição dos momentos fletores no pórtico. Os deslocamentos, em especial o horizontal  $\delta_1$ , aumentam quando se considera conexões semi-rígidas.

### Exemplo 3

Considera-se o pórtico da figura 3.7, com as seguintes propriedades:  $E = 210 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ ,  $A = 27 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $I_c = 50 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ . Apenas as conexões viga-pilar são consideradas como semi-rígidas, com o fator de fixação  $p$  de cada conexão dado por:  $p_1 = 1.0$ ,  $p_2 = 1.0$ ,  $p_3 = 0.6$ ,  $p_4 = 0.4$ ,  $p_5 = 1.0$ ,  $p_6 = 1.0$ . Utiliza-se novamente a discretização da figura 3.3.

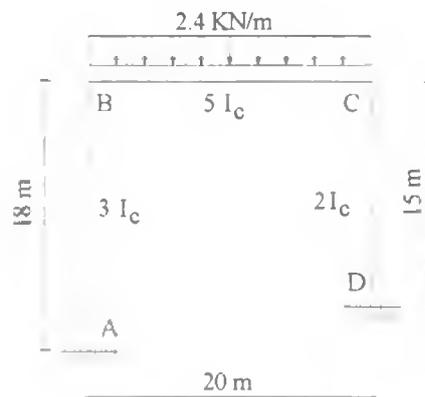


Fig. 3.7 Pórtico - exemplo 3

Os resultados obtidos pelos métodos malha-flexibilidade e rigidez direto, para o caso de conexões semi-rígidas, são comparados com os calculados com as conexões viga-pilar como totalmente rígidas ( $p_3 = p_4 = 1.0$ ) e apresentados na tabela 3.4.

Tab. 3.4 Comparação de resultados utilizando conexões semi-rígidas e rígidas - exemplo 3

Resultados		Conexões semi-rígidas		Conexões rígidas
		Malha-flexibilidade	Rigidez direto	
Momento fletor (KNm)	$X_1$	15.900	15.935	23.921
	$X_2$	-36.180	-36.268	-47.365
	$X_3$	-36.180	-36.268	-47.365
	$X_4$	-27.530	-27.597	-39.759
	$X_5$	-27.530	-27.597	-39.759
	$X_6$	15.870	15.907	19.647
Deslocam. nodais (m)	$\delta_1$	0.008	0.008	-0.001
	$\delta_2$	-0.006	-0.006	-0.007
	$\delta_3$	0.004	0.004	0.007

As barras foram consideradas inextensíveis apenas no cálculo pelo método malha-flexibilidade, apresentando resultados muito próximos dos calculados utilizando-se barras extensíveis. Observou-se ainda que a consideração de conexões semi-rígidas nas ligações vigapilar, além de modificar a distribuição dos esforços no pórtico, reduz o momento fletor nas extremidades da viga. O deslocamento horizontal  $\delta_1$  do pórtico aumenta com a consideração de flexibilidade nas conexões.

## CAPÍTULO 4

# CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS COM COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

### 4.1 INTRODUÇÃO

De forma a melhor representar as características não-lineares de uma conexão semi-rígida, pode-se modelar a sua curva momento-rotação através de uma série de segmentos lineares finitos. No presente capítulo, esta aproximação é utilizada na análise elastoplástica de pórticos planos com conexões semi-rígidas, permitindo a determinação do comportamento da estrutura ao longo da sua história de carregamento.

Segundo Gerstle & Cook (1988), os resultados de uma análise na qual se modelam as conexões como elásticas-perfeitamente plásticas refletem, com uma precisão razoável, o comportamento fornecido por uma análise em que as conexões são modeladas não-linearmente. Desta forma, a resistência da estrutura pode ser obtida através da análise plástica limite.

Alguns pesquisadores assumem que as conexões são mais fracas que os outros elementos da estrutura, concentrando assim a maior parte das deformações elásticas e plásticas. Desta forma, modelando-se o comportamento das conexões por relações similares às governantes para o material perfeitamente plástico, pode-se utilizar a programação matemática para análise da estrutura (Kaliszky, 1978). Smith (1983) desenvolve o sistema governante de um pórtico com conexões semi-rígidas, submetido a um carregamento proporcional, na forma de um problema de complementaridade linear paramétrico (PCLP), utilizando o método da rigidez direto. Este autor, porém, não apresenta exemplos numéricos.

No presente capítulo será utilizada a programação matemática para a análise de pórticos planos submetidos a carregamentos fixos e proporcionais, aplicados estaticamente. O comportamento da conexão semi-rígida será aproximado por relações constitutivas elastoplásticas linearizadas em trechos finitos, com as deformações plásticas concentradas em um número finito de seções críticas. Considera-se também a possibilidade de ocorrência de

plastificação em extremidades de elementos que não coincidam com conexões semi-rígidas. Leva-se em conta apenas a deformação rotacional da conexão, utilizando-se um número de segmentos lineares adequado ao ajuste da curva momento-rotação.

## 4.2 MODELAGEM DAS CONEXÕES

Seja a curva momento-rotação de uma conexão semi-rígida mostrada na figura 4.1. Esta curva pode ser aproximada linearmente por dois ou mais segmentos lineares, de acordo com a precisão pretendida. A curva 1 da figura 4.1 representa um material elástico-perfeitamente plástico, enquanto a curva 2 representa um material elastoplástico com encruamento.

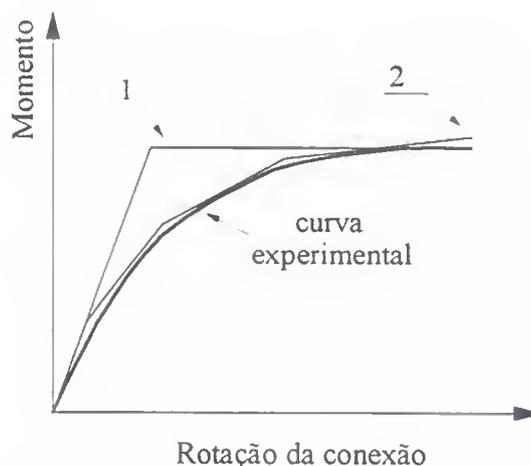


Fig. 4.1 Aproximações lineares da curva momento-rotação

A deformação total  $x$  do sistema estrutural, conforme apresentado em (2.16), é dada por duas parcelas independentes

$$x = x_e + x_p \quad (4.1)$$

onde  $x_e$  representa a deformação elástica e  $x_p$  a deformação plástica.

Para uma estrutura reticulada cujas barras sejam conectadas por conexões semi-rígidas, a deformação elástica  $x_e$ , considerando-se o material com comportamento linear elástico, é, de acordo com (3.2), (3.8) e (3.16)

$$x_e = x_e^b + x_e^c \quad (4.2)$$

$$x_e = \bar{f}X + x_o \quad (4.3)$$

$$X = \bar{k} (x_e - x_o) \quad (4.4)$$

A matriz  $\bar{f}$  é a *matriz de flexibilidade modificada da estrutura desconexa*, apresentada em (3.22), sendo a mesma obtida através das matrizes de flexibilidade modificadas de todos os elementos  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), definidas em (3.13). A matriz  $\bar{k}$  é a *matriz de rigidez modificada da estrutura desconexa*, definida como a inversa de  $\bar{f}$  e, para um elemento  $i$ , pode ser dada por (3.17). A matriz  $f^c$  pode também ser obtida diretamente da curva momento-rotação da conexão, sendo  $\bar{f}$  neste caso fornecida pela soma de  $f$  com  $f^c$ .

Como dito anteriormente, assume-se que as deformações plásticas estão concentradas em um número finito de seções críticas, utilizando-se no presente capítulo as relações constitutivas chamadas de *holonômicas* e apresentadas em (2.25). Estas relações são linearizadas em trechos finitos conforme proposto por Maier (por exemplo, Appleton, 1979; Appleton & Smith, 1979; Sahlit, 1992), e dadas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -H & N^T \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_c \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_c \\ x_p \end{bmatrix} & \text{(a)} \\ & \text{(b)} & (4.5) \\ y_c \geq 0 & \quad y_c^T x_c = 0 & \quad x_c \geq 0 & \text{(c - e)} \end{aligned}$$

A equação (4.5a) fornece as condições de resistência, a equação (4.5b) é conhecida como lei de fluxo plástico e as relações (4.5c-e) são as condições de complementaridade.

Quando  $y_c^j > 0$  a equação (4.5d) fornece  $x_c^j = 0$ , indicando que o modo  $j$  da seção crítica  $i$  ainda não sofreu ativação plástica. Se  $y_c^j = 0$ , o modo  $j$  está plastificando com  $x_c^j \geq 0$ ; porém se após esta plastificação ocorrer a descarga ou desativação do modo considerado, as condições de complementaridade (4.5c-e) impõem que  $y_c^j > 0$  e  $x_c^j = 0$ . Isto implica em afirmar que as deformações plásticas são totalmente recuperadas, contrariando o conceito de plasticidade baseado na irreversibilidade das deformações.

Para a consideração da irreversibilidade das deformações durante a descarga plástica, as relações constitutivas plásticas *não-holonômicas* (2.24), podem ser utilizadas. Mas, segundo Smith (1978), para estruturas submetidas a carregamentos proporcionais, aplicados estaticamente, a seção comporta-se holonomicamente entre sucessivas descargas e reativações plásticas. Assim, as equações (4.5c-e) podem ser substituídas por

$$y_c \geq 0 \quad y_c^T \Delta x_c = 0 \quad \Delta x_c \geq 0 \quad \text{(a-c)} \quad (4.6)$$

onde cada  $\Delta x_c \geq 0$  é medido a partir da última descarga plástica da seção.

Portanto, o efeito da descarga plástica pode ser considerado nas relações holonômicas procedendo-se, para cada iteração, a uma análise das deformações. Em caso de tendência à redução das deformações em uma seção, introduz-se a variável incremental  $\Delta x_*$  e armazena-se a deformação  $x_*$  existente. Assim, continua-se utilizando as relações holonômicas, simplificadas e mais práticas, sem a perda da precisão da análise quando da ocorrência de descarga plástica. É evidente que, quando existe progressão regular da plasticidade, isto é, se não ocorre descarga plástica em nenhuma seção da estrutura, a estrutura comporta-se holonomicamente ao longo de todo o trecho de carregamento considerado.

Para a modelagem da figura 4.2, com  $x_e$  e  $x_p$  dados por (4.3) e (4.5) respectivamente, utiliza-se o modelo de encruamento de Koiter que considera a *não interação dos planos de escoamento*, apresentado na subseção 2.2.4.

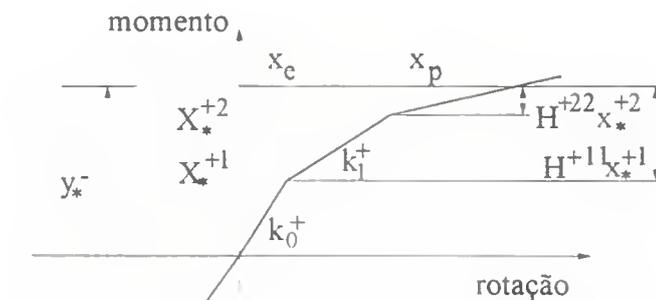


Fig. 4.2 Modelagem da curva momento-rotação

Os elementos da matriz de encruamento são não nulos apenas na diagonal principal e seus valores podem ser obtidos através da figura 4.2 (por exemplo, Poggi, 1988; Vimonsatit, 1995). Conforme (2.26), os referidos elementos são

$$H^{+n} = \frac{k_i^- k_{i-1}^-}{k_{i-1}^+ - k_i^-} \quad (a) \quad (4.7)$$

$$H^{-n} = \frac{k_i^- k_{i-1}^-}{k_{i-1}^- - k_i^-} \quad (b)$$

No caso de  $k_i = 0$ , a matriz de encruamento é nula ( $H = 0$ ), sendo o material portanto elástico-perfeitamente plástico, como apresentado na curva 1 da figura 4.1.

No presente estudo considera-se que as conexões semi-rígidas possuem uma menor resistência que os outros elementos da estrutura, conforme observado no sistema de

classificação das conexões da figura 2.5, apresentado por Bjorhovde et al. (1990), Tin-Loi & Vimonsatit (1993) e Vimonsatit (1995). Assim as deformações plásticas nas extremidades dos elementos estão concentradas nas conexões. Assume-se ainda a possibilidade de plastificação de outras seções críticas, utilizando-se a relação constitutiva referente ao material estrutural e representando o nó, onde foi definida esta seção crítica, como uma conexão totalmente rígida.

#### 4.2.1 Sistema de classificação de conexões

Quando não se conhece a curva momento-rotação experimental de uma conexão semi-rígida, nem uma modelagem adequada, pode-se utilizar o sistema de classificação de conexões apresentado na subseção 2.1.4 para se estimar o seu comportamento. Este sistema, apresentado por Bjorhovde et al. (1990), Tin-Loi & Vimonsatit (1993) e Vimonsatit (1995), é aplicável para conexões metálicas e mostrado na figura 2.5. Em parte do presente trabalho, utiliza-se este sistema para estimar a influência do comportamento de conexões semi-rígidas em análise de pórticos, comparando-se os resultados aos obtidos com a curva experimental e outros tipos de conexões.

Através deste sistema o comportamento da conexão é representado por um material elástico-perfeitamente plástico. Conhecendo-se o valor de  $M_c/M_p$ , onde  $M_c$  é o momento fletor resistente da conexão e  $M_p$  é o momento de plastificação da barra conectada, tem-se uma relação bilinear momento-rotação na forma adimensional, com a transição da fase elástica para a plástica definida pela linha pontilhada da figura 2.5. A partir da curva bilinear retira-se a inclinação  $1/\mu$  do trecho elástico, calculando-se a rigidez inicial da conexão através de (2.1).

Conhecendo-se a rigidez inicial da conexão, o cálculo da matriz de rigidez modificada do elemento pode ser efetivado utilizando-se a formulação de Romstad e Subramanian (Tin-Loi & Vimonsatit, 1993). Porém os valores obtidos através desta formulação são idênticos aos encontrados neste trabalho com a matriz  $\bar{k}_i$  dada por (3.17). Assim, conhecendo-se a rigidez inicial  $k$ , e a partir de (3.3) e (3.11), calculam-se o índice de rigidez  $R$  e o fator de fixação da conexão  $p$ . Com  $R$  e  $p$  as matrizes  $\bar{f}_i$  e  $\bar{k}_i$  são calculadas por (3.13) e (3.17).

### 4.3 SISTEMAS GOVERNANTES COMO UM PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR

A análise elastoplástica de um pórtico plano com conexões semi-rígidas, sujeito ao regime dos pequenos deslocamentos e deformações, e submetido a um carregamento estático fixo, pode ser efetuada através da solução de um problema de complementaridade linear (PCL) em quatro formulações básicas.

#### 4.3.1 PCL malha-flexibilidade

A formulação malha-flexibilidade utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma malha e a relação constitutiva elástica na forma flexibilidade.

As relações da estática e da cinemática na descrição de malha são dadas a seguir, conforme (2.7), (2.11) e (2.12)

$$X = Bp + B_o \lambda \quad (4.8)$$

$$\delta = B_o^T x \quad (4.9)$$

$$B^T x = 0 \quad (4.10)$$

onde  $\lambda$  é o vetor das forças nodais aplicadas o qual, nesta seção, é composto de cargas fixas.

A deformação total  $x$  é a soma das parcelas elástica e plástica, conforme (4.1), sendo a deformação elástica utilizada na forma flexibilidade, como (4.3), e a deformação plástica obtida das relações (4.5).

Substituindo-se (4.1), (4.3) e (4.5b) em (4.10) tem-se

$$B^T (\bar{f} X + x_o + N x_p) = 0 \quad (4.11)$$

Incluindo-se a relação de equilíbrio (4.8) em (4.11) obtém-se

$$(B^T \bar{f} B) p + (B^T N) x_p + (B^T \bar{f} B_o) \lambda = -B^T x_o \quad (4.12)$$

Substituindo-se, ainda, a relação de equilíbrio (4.8) na condição de resistência (4.5a) tem-se

$$(N^T B) p - H x_p + y_p + N^T B_o \lambda = X \quad (4.13)$$

Com as equações (4.12) e (4.13) juntamente com as condições de complementaridade (4.5c-e), monta-se o PCL apresentado a seguir

$$\begin{bmatrix} B^T \bar{f} B & B^T N & B^T \bar{f} B_o \\ N^T B & -H & I & N^T B_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x_p \\ y_p \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^T x_o \\ X \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{matrix} \quad (4.14)$$

$$y_p \geq 0 \quad y_p^T x_p = 0 \quad x_p \geq 0 \quad \text{(c-e)}$$

Com os hiperestáticos  $p$  obtidos através do PCL (4.14), calculam-se os esforços internos  $X$  através de (4.8). Os multiplicadores plásticos  $x_p$  fornecem as deformações plásticas  $x_p$  através da relação (4.5b). As deformações elásticas totais  $x_e$ , bem como as relativas à barra  $x_e^b$  e à conexão  $x_e^c$ , são dadas por (4.3), (3.4) e (3.5) respectivamente. Por fim, os deslocamentos nodais  $\delta$  são obtidos através da relação (4.9).

#### 4.3.2 PCL nodal-rigidez

A formulação nodal-rigidez utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma nodal e a relação constitutiva elástica na forma rigidez.

As relações da estática e cinemática na descrição nodal são dadas a seguir, conforme (2.13) e (2.14a-b)

$$Q = 0 = A^T X - A_o^T \lambda \quad (4.15)$$

$$x = Aq \quad (4.16)$$

$$\delta = A_o q \quad (4.17)$$

onde  $\lambda$  é composto de cargas fixas.

A relação constitutiva elástica na forma rigidez, apresentada em (4.4), pode ser modificada pela introdução dos esforços de engastamento perfeito modificados  $\bar{X}_o$ , dados por (3.18). Logo,

$$X = \bar{k} x_e + \bar{X}_o \quad (4.18)$$

Substituindo-se (4.1) em (4.16) e premultiplicando-se a equação resultante por  $\bar{k}$

$$\bar{k} (x_e + x_p) = \bar{k} Aq \quad (4.19)$$

Incluindo-se as relações constitutivas (4.18) e (4.5b) na equação (4.19) tem-se

$$X + \bar{k} N x_p - \bar{k} Aq - \bar{X}_o = 0 \quad (4.20)$$

Premultiplicando-se (4.20) por  $A^T$  e incluindo-se a equação de equilíbrio (4.15) obtém-se

$$(-A^T \bar{k} A) q + (A^T \bar{k} N) x_* + A_o^T \lambda = A^T \bar{X}_o \quad (4.21)$$

Introduzindo-se a equação (4.20) na condição de resistência (4.5a) encontra-se

$$(N^T \bar{k} A) q + (-N^T \bar{k} N - H) x_* + y_* = X_* - N^T \bar{X}_o \quad (4.22)$$

Com as equações (4.21) e (4.22) juntamente com as condições de complementaridade (4.5c-e), monta-se o PCL apresentado a seguir

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} -A^T \bar{k} A & A^T \bar{k} N & . & A_o^T \\ N^T \bar{k} A & (-N^T \bar{k} N - H) & I & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ x_* \\ y_* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \bar{X}_o \\ X_* - N^T \bar{X}_o \end{bmatrix} \\ y_* \geq 0 \quad y_*^T x_* = 0 \quad x_* \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c-e)} \end{array} \quad (4.23)$$

Com os deslocamentos nodais  $q$  obtidos pela solução do PCL (4.23), calculam-se as deformações totais  $x$  e os deslocamentos nodais  $\delta$  através de (4.16) e (4.17), respectivamente. Os multiplicadores plásticos  $x_*$  fornecem as deformações plásticas  $x_p$  com a relação (4.5b). Os esforços internos  $X$  são calculados a partir de (4.18).

### 4.3.3 PCL malha-rigidez

A formulação malha-rigidez utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma malha, dadas por (4.8) a (4.10), e a relação constitutiva elástica na forma rigidez, dada por (4.18).

Introduzindo-se a equação constitutiva (4.18) na relação de equilíbrio (4.8) obtém-se

$$-\bar{k} x_e + Bp + B_o \lambda = \bar{X}_o \quad (4.24)$$

Substituindo-se (4.1) e (4.5b) em (4.10) encontra-se

$$B^T x_e + B^T N x_* = 0 \quad (4.25)$$

Incluindo-se a equação de equilíbrio (4.8) na condição de resistência (4.5a) tem-se

$$N^T Bp - H x_* + y_* + N^T B_o \lambda = X_* \quad (4.26)$$

Com as equações (4.24) a (4.26), juntamente com as condições de complementaridade (4.5c-e), monta-se o sistema governante na forma do PCL (4.27).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -\bar{k} & B & . & . & B_o \\ B^T & . & B^T N & . & . \\ . & N^T B & -H & I & N^T B_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ p \\ x_* \\ y_* \\ \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{X}_o \\ . \\ X_* \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{array} & (4.27) \\
y_* \geq 0 & \quad y_*^T x_* = 0 & \quad x_* \geq 0 & \text{(d-f)}
\end{aligned}$$

onde  $x_e$  é a soma das deformações elásticas da barra e da conexão conforme (4.2). Com os hiperestáticos  $p$  obtidos, calculam-se os esforços internos  $X$  através de (4.8). Os multiplicadores plásticos  $x_*$  fornecem as deformações plásticas  $x_p$  através da relação (4.5b). Com  $x_e$  e  $x_p$  calcula-se  $\delta$  através de (4.9).

#### 4.3.4 PCL nodal-flexibilidade

A formulação nodal-flexibilidade utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma nodal, dadas por (4.15), (4.16) e (4.17), e a relação constitutiva elástica na forma flexibilidade, dada por (4.3).

A substituição de (4.1) na relação cinemática (4.16) fornece

$$x_e + x_p = Aq \quad (4.28)$$

Introduzindo-se as equações constitutivas (4.3) e (4.5b) em (4.28) tem-se

$$\bar{f}X - Aq + Nx_* + x_o = 0 \quad (4.29)$$

Com (4.29), a equação de equilíbrio (4.15) e a condição de resistência (4.5a), juntamente com as condições de complementaridade (4.5c-e), monta-se o PCL (4.30).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{f} & -A & N & . & . \\ -A^T & . & . & . & A_o^T \\ N^T & . & -H & I & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ q \\ x_* \\ y_* \\ \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x_o \\ . \\ X_* \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{array} & (4.30) \\
y_* \geq 0 & \quad y_*^T x_* = 0 & \quad x_* \geq 0 & \text{(d-f)}
\end{aligned}$$

Com os esforços internos  $X$  obtidos, calculam-se as deformações elásticas totais  $x_e$ , bem como as relativas à barra  $x_e^b$  e à conexão  $x_e^c$ , pelas equações (4.3), (3.4) e (3.5) respectivamente. Os multiplicadores plásticos  $x_p$  fornecem as deformações plásticas  $x_p$  com a relação (4.5b). Os deslocamentos nodais  $\delta$  são calculados através da equação (4.17).

#### 4.4 SISTEMAS GOVERNANTES COMO UM PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE LINEAR PARAMÉTRICO

Considera-se um pórtico plano com conexões semi-rígidas, sujeito ao regime dos pequenos deslocamentos e deformações, e que está submetido a um carregamento composto de uma parcela fixa e outra proporcional variável. Neste caso o carregamento varia monotonicamente de acordo com um parâmetro ou fator de carga, a partir de um estado de carregamento fixo ou conhecido. O carregamento, então, é dado por

$$\lambda = \lambda^0 + \lambda' \quad (4.31)$$

$$\lambda' = c\gamma \quad (4.32)$$

onde  $\lambda$  é o vetor das forças nodais aplicadas,  $\lambda^0$  representa o carregamento fixo ou conhecido,  $\lambda'$  representa o carregamento proporcional variável,  $c$  é o vetor constante do carregamento proporcional variável, sendo  $\gamma$  o *fator de carga* o qual varia monotonicamente até o colapso da estrutura. O vetor  $\lambda^0$  pode referir-se a um carregamento fixo aplicado anteriormente ao carregamento proporcional como, por exemplo, o peso próprio da estrutura, ou mesmo a um estágio elástico do carregamento proporcional cuja solução seja conhecida.

As relações da estática, cinemática e constitutivas elásticas foram descritas como transformações lineares na seção 2.2. Assim, pode-se definir a solução total para o carregamento (4.31) como (por exemplo, Appleton & Smith, 1979)

$$X = X^0 + X' \quad x = x^0 + x' \quad q = q^0 + q' \quad (\text{a-c}) \quad (4.33)$$

onde os índices  $^0$  e  $'$  definem as soluções associadas aos carregamentos  $\lambda^0$  e  $\lambda'$ .

A análise elastoplástica com a consideração do carregamento proporcional pode ser efetuada através da solução de um problema de complementaridade linear paramétrico (PCLP) em quatro formulações básicas.

#### 4.4.1 PCLP malha-flexibilidade

A formulação malha-flexibilidade utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma malha e a relação constitutiva elástica na forma flexibilidade.

Incluindo-se (4.32) em (4.8), (4.9) e (4.10) têm-se as relações da estática e da cinemática para um carregamento proporcional

$$X = Bp + b_o \gamma \quad (4.34)$$

$$\delta = b_o^T x \quad (4.35)$$

$$B^T x = 0 \quad (4.36)$$

onde

$$b_o = B_o c \quad (4.37)$$

e  $\delta$  é o deslocamento generalizado associado ao fator de carga  $\gamma$ .

Sabendo-se que a solução estrutural pode ser obtida pela soma das parcelas referentes aos carregamentos fixo  $\lambda^0$  e proporcional  $\lambda^1$ , conforme (4.33), têm-se

$$p = p^0 + p^1 \quad x = x_o^0 + x_o^1 \quad x_o = x_o^0 + x_o^1 \gamma \quad (a-c) \quad (4.38)$$

Substituindo-se (4.38) no PCL formado pelas equações (4.14) e utilizando-se o vetor de malha  $b_o$  referente às cargas aplicadas, definido para o carregamento proporcional em (4.37), monta-se o sistema governante na forma do PCLP apresentado a seguir

$$\begin{bmatrix} B^T \bar{f} B & B^T N & (B^T \bar{f} b_o + B^T x_o^0) \\ N^T B & -H & I \\ & & N^T b_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ x_o^1 \\ y_o^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^0 \\ x_o^0 \\ y_o^0 \end{bmatrix} \quad (a) \quad (4.39)$$

$$y_o^1 \geq 0 \quad y_o^1 x_o^1 = 0 \quad x_o^1 \geq 0 \quad (b) \quad (c-e)$$

onde

$$y_o^0 = X_o^0 - N^T X^0 + H x_o^0 \quad (4.40)$$

#### 4.4.2 PCLP nodal-rigidez

A formulação nodal-rigidez utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma nodal e a relação constitutiva elástica na forma rigidez.

Incluindo-se (4.32) em (4.15), (4.16) e (4.17), têm-se as relações da estática e da cinemática para um carregamento proporcional.

$$Q = 0 = A^T X - a_o \gamma \quad (4.41)$$

$$x = Aq \quad (4.42)$$

$$\delta = a_o^T q \quad (4.43)$$

onde

$$a_o = A_o^T c \quad (4.44)$$

e  $\delta$  é o deslocamento generalizado associado ao fator de carga  $\gamma$ .

Sabendo-se que a solução estrutural pode ser obtida pela soma das parcelas referentes aos carregamentos fixo  $\lambda^0$  e proporcional  $\lambda^1$ , conforme (4.33), tem-se

$$\bar{X}_o = \bar{X}_o^0 + \bar{X}_o^1 \gamma \quad (4.45)$$

Substituindo-se (4.33c), (4.38b) e (4.45) no PCL formado pelas equações (4.23) e utilizando-se o vetor nodal  $a_o$  referente às cargas aplicadas, definido para o carregamento proporcional em (4.44), monta-se o PCLP apresentado a seguir.

$$\begin{bmatrix} -A^T \bar{k} A & A^T \bar{k} N & (a_o - A^T \bar{X}_o^1) \\ N^T \bar{k} A & (-N^T \bar{k} N - H) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ x' \\ y. \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ y.^0 \\ . \end{bmatrix} \quad (a) \quad (4.46)$$

$$\begin{bmatrix} . \\ . \\ y.^0 \\ . \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$y. \geq 0 \quad y.^T x' = 0 \quad x' \geq 0 \quad (c - e)$$

onde

$$y.^0 = X_o - N^T X^0 - Hx^0 \quad (4.47)$$

#### 4.4.3 PCLP malha-rigidez

A formulação malha-rigidez utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma malha, dadas por (4.34) a (4.37), e a relação constitutiva elástica na forma rigidez, dada por (4.18).

A solução elástica correspondente ao carregamento fixo  $\lambda^0$  pode ser determinada através da solução do PCL (4.27). A solução estrutural pode ser obtida pela soma das parcelas referentes aos carregamentos fixo  $\lambda^0$  e proporcional  $\lambda^1$ , conforme (4.33).

Substituindo-se (4.33b), (4.38a,b) e (4.45) no PCL formado pelas equações (4.27) e utilizando-se o vetor de malha  $b_o$  referente às cargas aplicadas, definido para o carregamento proporcional em (4.37), monta-se o PCLP apresentado a seguir.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -\bar{k} & B & . & . & (b_o - \bar{X}'_o) \\ B^T & . & B^T N & . & . \\ . & N^T B & -H & I & N^T b_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_s \\ p' \\ x'_e \\ y. \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ y.^0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{array} & (4.48) \\
 & y. \geq 0 \quad y.^T x'_e = 0 \quad x'_e \geq 0 & \text{(d-f)}
 \end{aligned}$$

onde

$$y.^0 = X_s - N^T X^0 + Hx.^0 \quad (4.49)$$

#### 4.4.4 PCLP nodal-flexibilidade

A formulação nodal-flexibilidade utiliza as relações estáticas e cinemáticas na forma nodal, dadas por (4.41) a (4.44), e a relação constitutiva na forma flexibilidade, dada por (4.3).

A solução elástica correspondente ao carregamento fixo  $\lambda^0$  pode ser determinada através da solução do PCL (4.30). A solução estrutural pode ser obtida pela soma das parcelas referentes aos carregamentos fixo  $\lambda^0$  e proporcional  $\lambda^1$ , conforme (4.33).

Substituindo-se (4.33a), (4.33c), (4.38b,c) no PCL formado pelas equações (4.30) e utilizando-se o vetor nodal  $a_o$  referente às cargas aplicadas, definido para o carregamento proporcional em (4.44), monta-se o PCLP apresentado a seguir.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \bar{f} & -A & N & . & x'_o \\ -A^T & . & . & . & a_o \\ N^T & . & -H & I & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ q' \\ x'_e \\ y. \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ y.^0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{array} & (4.50) \\
 & y. \geq 0 \quad y.^T x'_e = 0 \quad x'_e \geq 0 & \text{(d-f)}
 \end{aligned}$$

onde

$$y.^0 = X_s - N^T X^0 + Hx.^0 \quad (4.51)$$

Os PCLPs apresentados em (4.39), (4.46), (4.48) e (4.50) podem ser utilizados para a análise de pórticos com conexões rígidas, considerando-se nula a matriz de flexibilidade das conexões, sendo neste caso  $\bar{f} = f$  e  $\bar{k} = k$ . Quando se consideram conexões rígidas e o material estrutural elástico-perfeitamente plástico, os PCLPs citados reduzem-se aos apresentados por Smith (1978).

## 4.5 SOLUÇÃO DOS SISTEMAS GOVERNANTES

A solução dos PCLs pode ser obtida através do algoritmo de Wolfe na sua forma curta, o qual consiste basicamente no algoritmo Simplex, modificado pela inclusão da condição de complementaridade  $y_i^T x_i = 0$ . Desta forma, a regra para a seleção da coluna pivô no algoritmo Simplex é acrescida da regra de *entrada na base restrita*, fazendo com que  $x_i^j$  e  $y_i^j$  não possam ser simultaneamente variáveis básicas, sendo  $j$  um modo de escoamento da seção crítica  $i$ .

O algoritmo de Wolfe na sua forma longa, também chamado por Smith (1978) de algoritmo de Wolfe-Markowitz, pode ser aplicado na solução de PCLPs. Neste caso o algoritmo Simplex modificado calcula uma sequência de soluções básicas à medida que o fator de carga  $\gamma$  aumenta monotonicamente. Smith (1990a) descreve as etapas básicas desenvolvidas pelo algoritmo de Wolfe nas formas curta e longa.

No presente trabalho utiliza-se o algoritmo de Wolfe conforme proposto por Smith (1978) para a análise elastoplástica de estruturas.

### 4.5.1 Programas computacionais

Foram utilizados dois programas computacionais de análise elastoplástica através do algoritmo de Wolfe, nas suas formas curta e longa, desenvolvidos pela Prof<sup>a</sup> Sahlit na Universidade de Brasília. Estes programas solucionam os PCLs e PCLPs apresentados nas seções 4.3 e 4.4 em qualquer uma das quatro formulações básicas sendo a entrada de dados feita pelos *tableaux* já montados. Isto implica na execução manual das operações matriciais envolvidas na montagem dos *tableaux*. Além disso os resultados são apresentados em termos de  $x_i$ ,  $y_i$  e das variáveis

irrestritas, criando a necessidade de novos cálculos para a obtenção dos esforços e deformações correspondentes.

Assim, foram desenvolvidas rotinas para a montagem semi-automática dos *tableaux* e cálculo dos esforços e deformações em cada nível de carga, considerando-se os programas existentes para solução dos PCLs e PCLPs como subrotinas. Desta forma as matrizes e vetores são obtidos manualmente mas os *tableaux* são montados automaticamente, tornando simples qualquer modificação na topologia e demais características da estrutura analisada.

No presente estudo as modificações citadas foram implementadas apenas para os PCLs e PCLPs nas formulações malha-flexibilidade e nodal-rigidez. A formulação malha-flexibilidade apresenta o *tableau* de menor tamanho, reduzindo o esforço computacional. No caso da formulação nodal-rigidez as matrizes utilizadas são de mais fácil obtenção, reduzindo a ocorrência de erros. É evidente que estas formulações estão associadas aos conhecidos métodos da flexibilidade e da rigidez para análise linear elástica referidos na seção 3.3.

#### 4.6 EXEMPLO DA OBTENÇÃO DA MATRIZ DE ENCRUAMENTO

Seja o pórtico da figura 3.2 proposto por Wang (1983), com a discretização adotada na figura 3.3. Considera-se que as duas seções críticas estão localizadas nas extremidades da viga, a primeira no nó 3 e a segunda no nó 4, com a modelagem da curva momento-rotação dada pela figura 4.2. Adotam-se os seguintes valores para a modelagem das conexões dos nós 3 e 4:  $k_o^- = k_o^+ = 4520$ ,  $k_1^- = k_1^+ = 1695$ ,  $k_2^- = k_2^+ = 226$ ,  $X_*^{-1} = X_*^{-1} = 5.65$ ,  $X_*^{+2} = X_*^{-2} = 14.69$ . Considera-se, ainda, que a plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico.

Os elementos da matriz de encruamento para uma seção crítica  $i$  são dados por (4.7) e, para as conexões consideradas, são iguais a  $H_i^{+11} = H_i^{-11} = 2712$  e  $H_i^{-22} = H_i^{+22} = 260.8$ . As matrizes  $H_i$  e  $X_*$ , de uma conexão, conforme (4.5a), são mostradas a seguir

$$- \begin{bmatrix} 2712 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 260.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2712 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 260.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{*1}^{-1} \\ x_{*1}^{-2} \\ x_{*2}^{-1} \\ x_{*2}^{-2} \end{bmatrix} + N_i^T X_i + y_{*i} = \begin{bmatrix} 5.65 \\ 14.69 \\ 5.65 \\ 14.69 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

onde  $x_{\cdot i}$  é o vetor dos multiplicadores plásticos da seção  $i$ . A deformação plástica nesta conexão é obtida através de (4.5b), sendo dada por

$$x_{pi} = x_{\cdot i}^{-1} + x_{\cdot i}^{-2} - x_{\cdot i}^{-1} - x_{\cdot i}^{-2} \quad (4.53)$$

Para toda a estrutura, as matrizes  $H$  e  $X$  são apresentadas a seguir

$$- \begin{bmatrix} 2712 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2712 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2608 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2608 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2712 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2712 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2608 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2608 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\cdot 1}^{-1} \\ x_{\cdot 2}^{-1} \\ x_{\cdot 1}^{-2} \\ x_{\cdot 2}^{-2} \\ x_{\cdot 1}^{-1} \\ x_{\cdot 2}^{-1} \\ x_{\cdot 1}^{-2} \\ x_{\cdot 2}^{-2} \end{bmatrix} + N^T X + y_{\cdot} = \begin{bmatrix} 5.65 \\ 5.65 \\ 14.69 \\ 14.69 \\ 5.65 \\ 5.65 \\ 14.69 \\ 14.69 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

onde  $x_{\cdot j}^i$  indica o multiplicador plástico correspondente ao modo de plastificação  $j$  da seção  $i$ .

## 4.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

### Exemplo 1

Considera-se o pórtico da figura 4.3 que apresenta as seguintes propriedades:  $E = 210 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ ,  $A = 27 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $I_c = 50 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ .

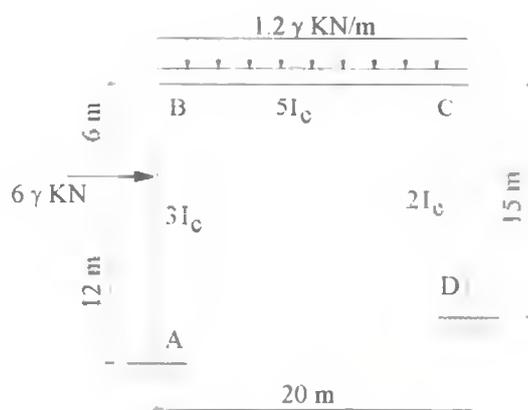


Fig. 4.3 Pórtico - exemplo 1

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento linear elástico, sendo possível a ocorrência de plastificação apenas nas conexões, conforme a

discretização mostrada na figura 3.3. Na análise do pórtico são utilizados dois tipos de conexões:

- Conexões semi-rígidas com comportamento elástico-perfeitamente plástico, com fator de fixação  $p$  dado como:  $p_1 = 0.4, p_2 = 0.5, p_3 = 0.6, p_4 = 0.4, p_5 = 0.3, p_6 = 0.8$ , e momentos de plastificação iguais a:  $M_{p1} = M_{p2} = M_{p5} = M_{p6} = 66 \text{ KNm}, M_{p3} = M_{p4} = 33 \text{ KNm}$ .
- Conexões rígidas com comportamento perfeitamente plástico, com momentos de plastificação iguais a:  $M_{p1} = M_{p2} = M_{p5} = M_{p6} = 66 \text{ KNm}, M_{p3} = M_{p4} = 33 \text{ KNm}$ .

A figura 4.4 apresenta os resultados obtidos, relacionando fator de carga  $\gamma$  e deslocamento horizontal  $\delta_1$ , referente ao nó B do pórtico. A análise elastoplástica das conexões semi-rígidas foi realizada pelos métodos malha-flexibilidade e nodal-rigidez, sendo encontrados os mesmos resultados.

Observa-se que a consideração das conexões semi-rígidas produz maiores deslocamentos do pórtico. A carga de colapso plástico encontrada é a mesma para os pórticos com conexões rígidas e semi-rígidas, pelo fato de serem utilizados os mesmos momentos de plastificação nos dois casos.

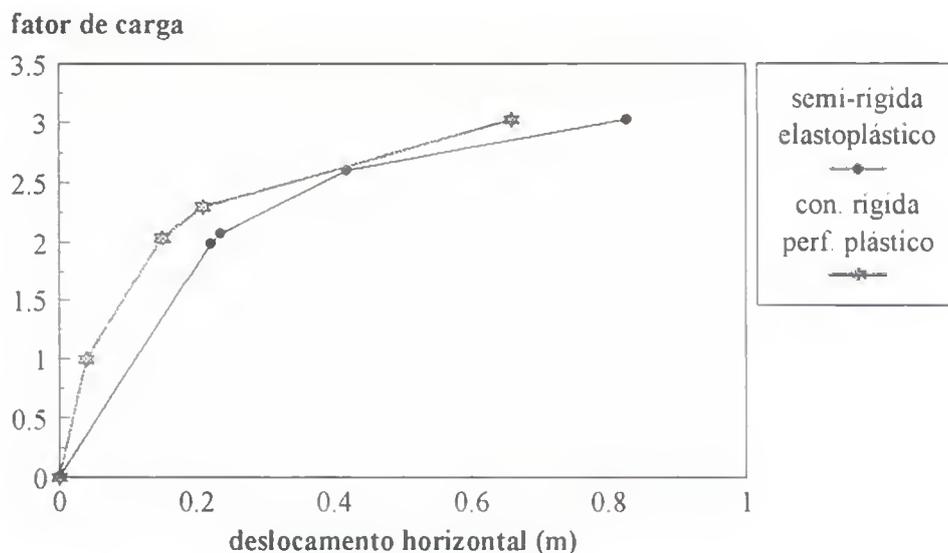


Fig. 4.4 Carga v. desloc. horizontal do nó B - exemplo 1

### Exemplo 2

Considera-se o pórtico da figura 4.5, originalmente apresentado por Borkowski (1988), que apresenta as seguintes propriedades, onde  $M_p$  é o momento de plastificação da barra:

- Pilares externos (barras 1 e 3):  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ KN/m}^2, I = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4, M_p = 45 \text{ KNm}$ .

- Pilar interno (barra 2):  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$ ,  $I = 0.5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 17.5 \text{ KNm}$ .
- Vigas (barras 4 e 5):  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$ ,  $I = 4.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 78 \text{ KNm}$ .

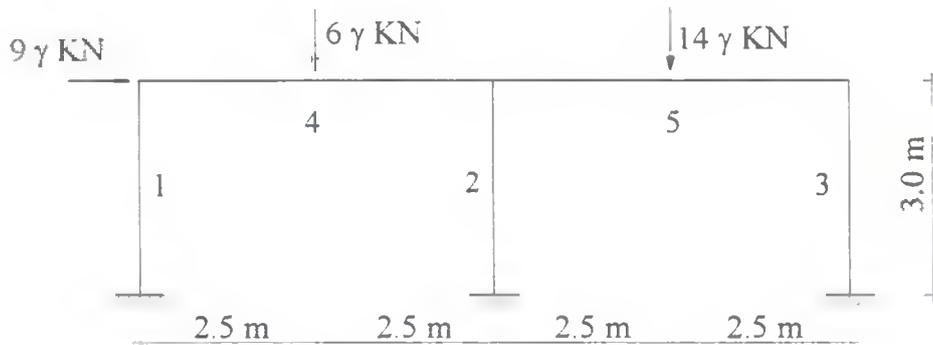


Fig. 4.5 Pórtico - exemplo 2 (Borkowski, 1988)

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto no ponto de aplicação das cargas. A figura 4.6 apresenta os dois tipos de conexões semi-rígidas utilizadas nas ligações viga-pilar. Assim, a análise do pórtico da figura 4.5 é efetuada para os seguintes casos: conexões rígidas; conexões viga-pilar tipo A; conexões viga-pilar tipo B; conexões viga-pilar tipo B para viga 4, e tipo A para viga 5

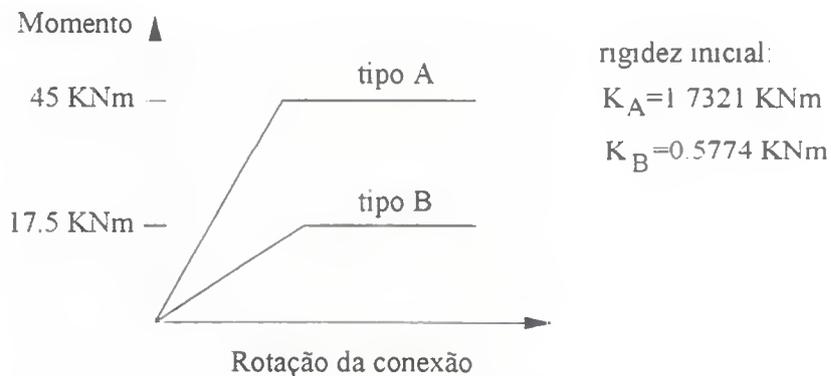


Fig. 4.6 Tipos de conexões semi-rígidas das vigas - exemplo 2

A figura 4.7 apresenta a variação do deslocamento horizontal do pórtico, normalizado em função do deslocamento máximo encontrado, em relação ao fator de carga  $\gamma$ . Observa-se que quanto mais flexível é a conexão maior o deslocamento do pórtico para um mesmo fator de carga. Observa-se ainda que, à medida que o momento de plastificação das conexões se reduz, o fator de carga de colapso plástico do pórtico também é reduzido.

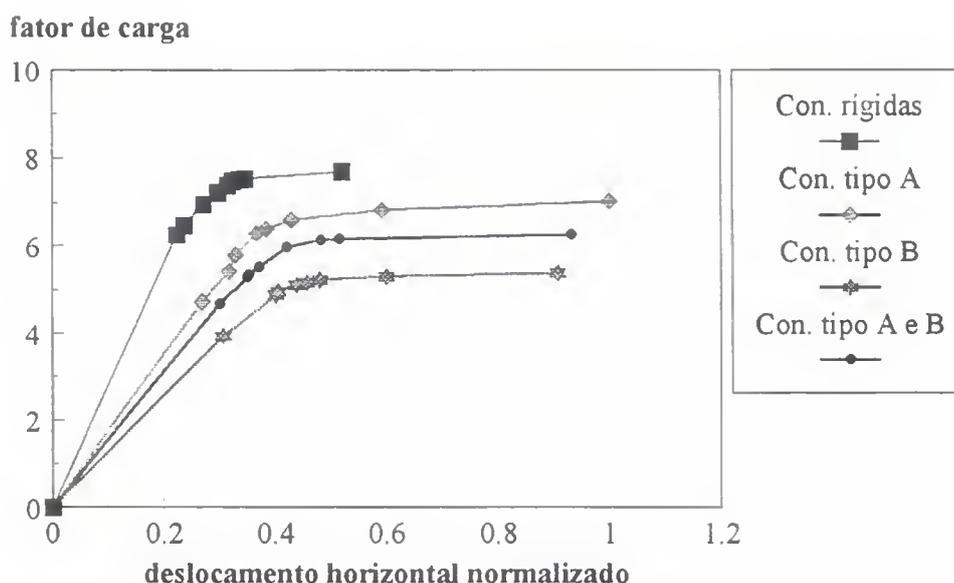


Fig. 4.7 Carga v. desloc. horizontal normalizado - exemplo 2

Em todos os casos estudados ocorre o fenômeno da descarga plástica no pilar interno (barra 2). Quando se considera conexão rígida, as rótulas plásticas formadas nas extremidades inferior e superior do pilar sofrem descarga plástica, com posterior reativação da seção do apoio. Nos casos das conexões semi-rígidas ocorre formação de rótula plástica apenas no apoio, que sofre descarga e posterior reativação. Desta forma percebe-se a eficiência do algoritmo na identificação da desativação plástica, considerando-se conexões rígidas ou semi-rígidas. Borkowski (1988) estudou apenas o pórtico com conexões rígidas, sendo que o fator de carga de colapso plástico e a sequência de formação de rótulas plásticas fornecidos coincidem com os resultados encontrados no presente trabalho.

A consideração de conexões semi-rígidas altera a distribuição dos esforços no pórtico. A tabela 4.1 apresenta os momentos fletores na viga 4, para todos os casos analisados, relativos a um mesmo fator de carga ainda na fase elástica. Nota-se que o maior momento (em módulo) encontrado na viga é reduzido quando são utilizadas conexões semi-rígidas em substituição às rígidas. Os sinais seguem a convenção de momento fletor positivo quando o mesmo traciona as fibras inferiores da barra.

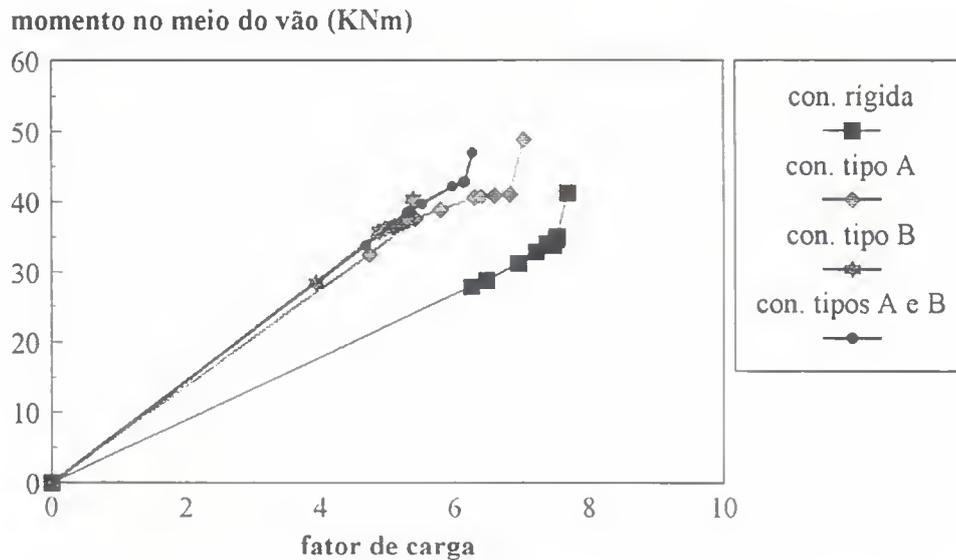
A figura 4.8 apresenta o desenvolvimento do momento fletor no meio do vão da viga 4 à medida que o fator de carga  $\gamma$  aumenta, considerando os quatro casos estudados. Conforme esperado, a utilização de conexões semi-rígidas produz um aumento do momento

fletor positivo no meio do vão, para um mesmo fator de carga, em relação ao pórtico com conexões rígidas.

**Tab. 4.1** Comparação de momentos fletores na viga 4 - exemplo 2

Momento fletor na viga 4 (KNm) para $\gamma = 3.931$											
Con. rígida			Con. tipo A			Con. tipo B			Con. tipos A e B		
E	M	D	E	M	D	E	M	D	E	M	D
13.85	17.49	-37.84	9.00	26.98	-14.01	6.38	28.45	-8.44	4.95	28.36	-7.18

E = momento na conexão da esquerda, M = momento no meio do vão da viga, D = momento na conexão da direita.



**Fig. 4.8** Momento no meio do vão da viga 4 v. carga - exemplo 2

### Exemplo 3

Considera-se o pórtico da figura 4.9, conforme apresentado por Vimonsatit (1995), que apresenta as seguintes propriedades, onde  $M_p$  é o momento de plastificação da barra:

- Pilares inferiores:  $E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $A = 66.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $I = 118.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 20 \text{ tm}$ .
- Viga inferior:  $E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $A = 86 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $I = 245.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 30 \text{ tm}$ ,  $d = 0.4 \text{ m}$ .
- Viga e pilares superiores:  $E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $A = 49.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $I = 85.2 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 10 \text{ tm}$ ,  $d = 0.3 \text{ m}$ .

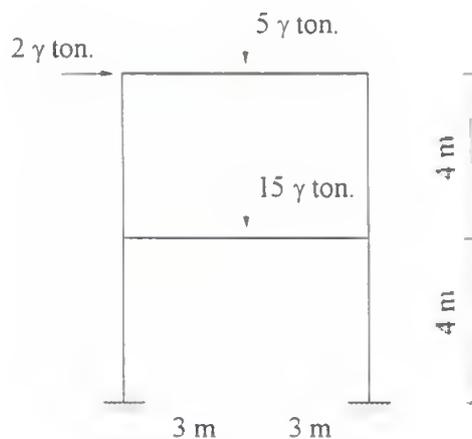


Fig. 4.9 Pórtico - exemplo 3 (Vimonsatit, 1995)

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto nos pontos de aplicação das cargas. A plastificação é governada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. A figura 4.10 apresenta os tipos de conexões utilizadas nas vigas. A modelagem das conexões semi-rígidas fornecida por Vimonsatit (1995) utiliza o sistema de classificação de conexões proposto por Bjorhovde et al. (1990), apresentado nas subseções 2.1.4 e 4.2.1, e constitui uma estimativa do comportamento real da conexão. As características das conexões semi-rígidas da figura 4.10 são:

- conexão 2:  $M_c/M_p = 0.5$ ,  $1/\mu = 0.305$ ,

- conexão 3:  $M_c/M_p = 0.2$ ,  $1/\mu = 0.10$ ,

onde  $M_c$  é o momento fletor na conexão,  $M_p$  é o momento de plastificação da barra conectada e  $1/\mu$  é a inclinação inicial da curva.

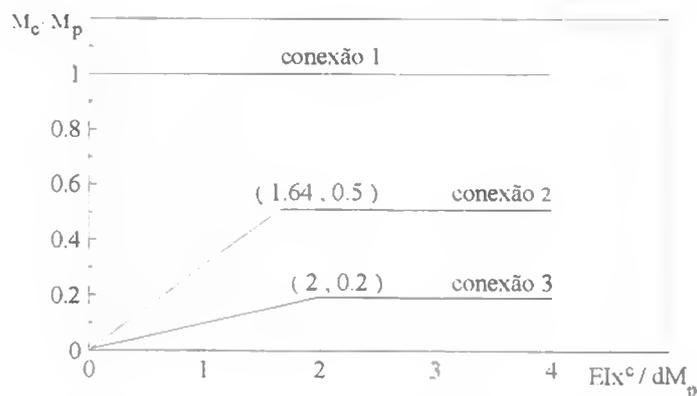
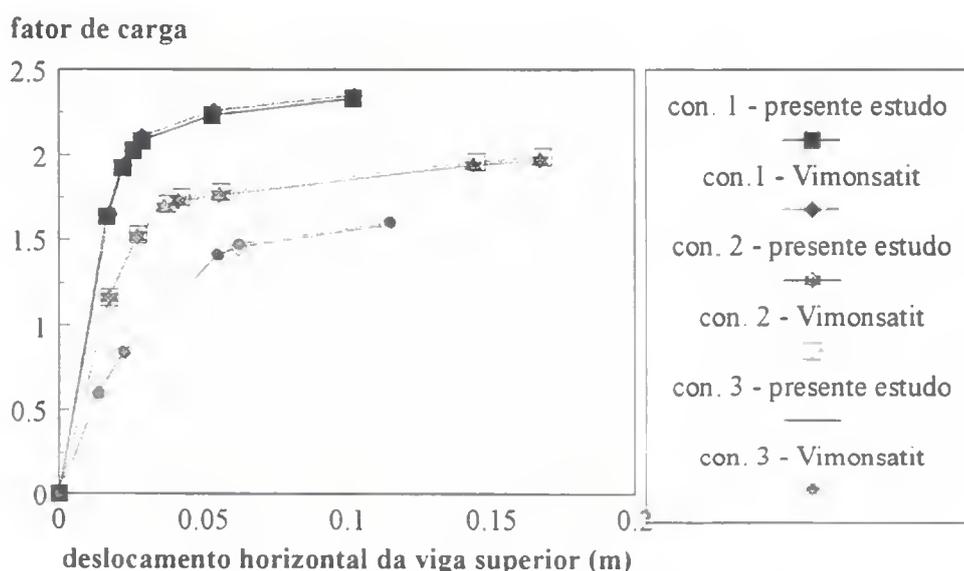


Fig. 4.10 Tipos de conexões viga-pilar - exemplo 3

Portanto, a análise do pórtico da figura 4.9 é efetuada para os seguintes casos: conexões rígidas (tipo 1); conexões viga-pilar tipo 2; conexões viga-pilar tipo 3. A figura 4.11 apresenta os resultados obtidos comparados com os resultados retirados do gráfico de Vimonsatit (1995), relacionando o fator de carga  $\gamma$  com o deslocamento horizontal da viga superior. Vimonsatit (1995) considerou a interação do momento fletor com o esforço normal para a plastificação dos pilares, e para as vigas apenas o momento fletor. Pela boa concordância encontrada entre os resultados do presente estudo e os de Vimonsatit (1995), percebe-se que a consideração do efeito do esforço normal na plastificação dos pilares, neste caso, parece não ser necessária. Observa-se, ainda, que quanto mais flexível é a conexão maior o deslocamento horizontal da viga para um mesmo fator de carga. Como o momento de plastificação das conexões semi-rígidas é menor que o das vigas, o fator de carga de colapso plástico do pórtico também se reduz em relação ao pórtico com conexões rígidas.



**Fig. 4.11** Carga v. desloc. horizontal da viga superior - exemplo 3

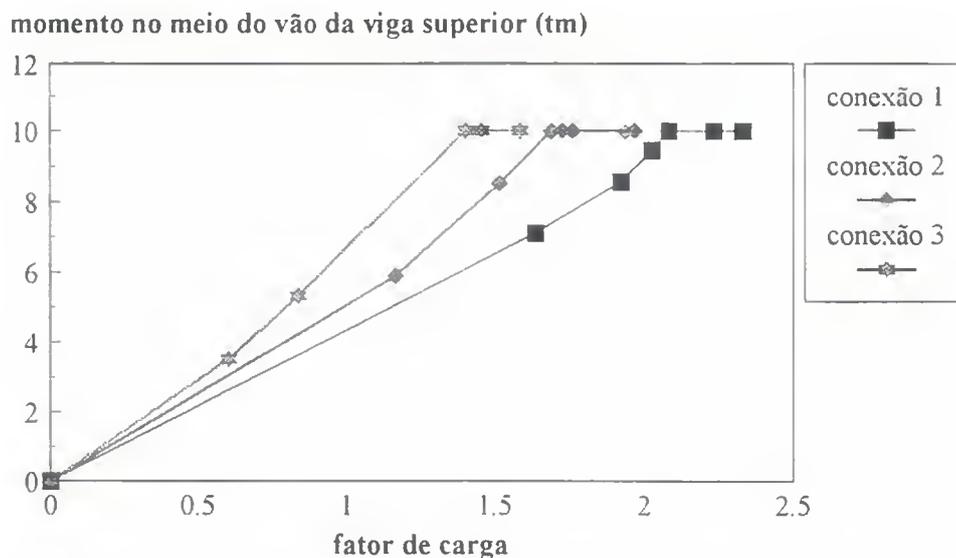
A consideração de conexões semi-rígidas altera consideravelmente a distribuição dos esforços no pórtico. A tabela 4.2 apresenta os momentos fletores nas vigas, para todos os casos analisados, ainda na fase elástica. Percebe-se que a consideração de conexões semi-rígidas em substituição às rígidas, embora reduza os momentos negativos, com o consequente aumento dos positivos, não reduz obrigatoriamente o maior momento (em módulo) encontrado na viga. Os sinais seguem a convenção de momento fletor positivo quando o mesmo traciona as fibras inferiores da barra.

**Tab. 4.2** Comparação de momentos fletores nas vigas - exemplo 3

Momento fletor (tm) para $\gamma = 0.60$				
	Extrem.	Conexão 1	Conexão 2	Conexão 3
Viga Superior	E	-0.83	-0.44	-0.08
	M	2.61	3.04	3.51
	D	-3.05	-2.58	-2.00
Viga Inferior	E	-2.79	-1.81	-0.89
	M	8.63	9.84	11.11
	D	-7.23	-5.78	-4.19

E = momento na conexão da esquerda, M = momento no meio do vão da viga, D = momento na conexão da direita.

As figuras 4.12 e 4.13 apresentam o desenvolvimento do momento fletor na viga superior, respectivamente no meio do vão e na conexão da esquerda, à medida que o fator de carga  $\gamma$  aumenta, considerando os três casos estudados. Conforme esperado, a utilização de conexões semi-rígidas produz um aumento do momento fletor positivo no meio do vão, para um mesmo fator de carga, em relação ao pórtico com conexões rígidas.



**Fig. 4.12** Mom. no meio do vão da viga superior v. carga - exemplo 3

Quanto à figura 4.13 nota-se que, para os três pórticos estudados, os pontos onde as curvas sofrem brusca mudança de inclinação ( $\gamma = 2.084$  para conexão 1,  $\gamma = 1.690$  para conexão 2 e  $\gamma = 1.401$  para conexão 3) correspondem à formação de rótula plástica no meio do vão da viga superior como visto na figura 4.12.

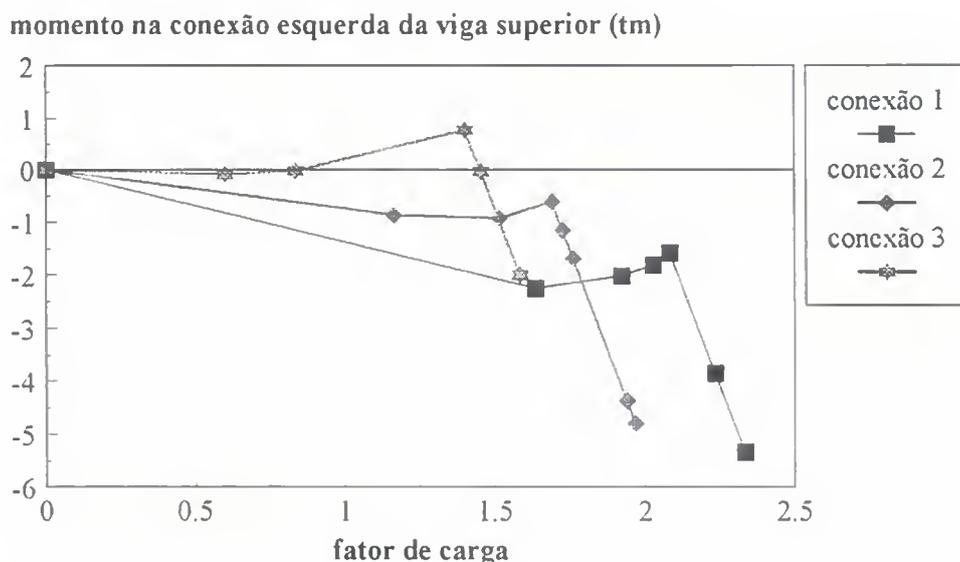


Fig. 4.13 Mom. na conexão à esquerda da viga superior v. carga - exemplo 3

#### Exemplo 4

Considera-se o pórtico da figura 4.14, originalmente apresentado por Lui & Chen (1987), que apresenta as seguintes propriedades:  $E = 2 \times 10^8 \text{ KN/m}^2$ ,  $\sigma_y = 2.48 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$ . A viga é em perfil W12x22, com  $A = 4.17 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $I = 6.49 \times 10^{-5} \text{ m}^4$  e  $M_p = 119 \text{ KNm}$ . Os pilares são montados em perfil W8x31, com  $A = 5.88 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $I = 4.58 \times 10^{-5} \text{ m}^4$  e  $M_p = 123.5 \text{ KNm}$ .

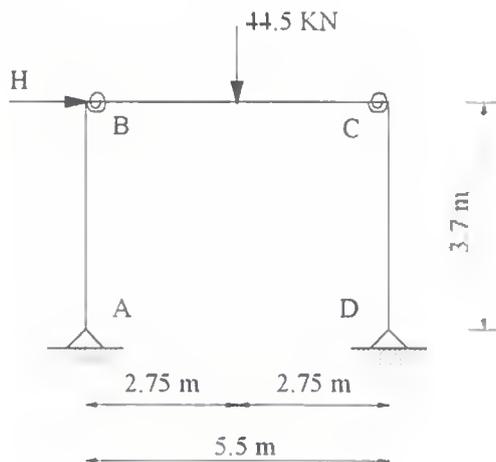


Fig. 4.14 Pórtico - exemplo 4 (Lui & Chen, 1987)

Os pilares e a viga são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto no ponto de aplicação da carga vertical. A plastificação é governada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. A figura 4.15 apresenta os tipos de conexões utilizadas na viga (nós B e C). As conexões tipo 1 (rígida) e tipo 2 (semi-rígida) possuem um momento de plastificação maior do que o das barras. A rigidez inicial das conexões tipo 2 e 3 foi fornecida por Al-Bermani & Kitipornchai (1992), que analisaram o mesmo pórtico, enquanto que a modelagem utilizada para a conexão 3 foi retirada graficamente da curva momento-rotação apresentada por Lui & Chen (1987). Assim, a análise do pórtico da figura 4.14 é efetuada para os seguintes casos: conexões rígidas (tipo 1); conexões viga-pilar tipo 2; conexões viga-pilar tipo 3. A matriz de encurvamento  $H$  para a modelagem da conexão tipo 3 é calculada conforme mostrado na seção 4.6.

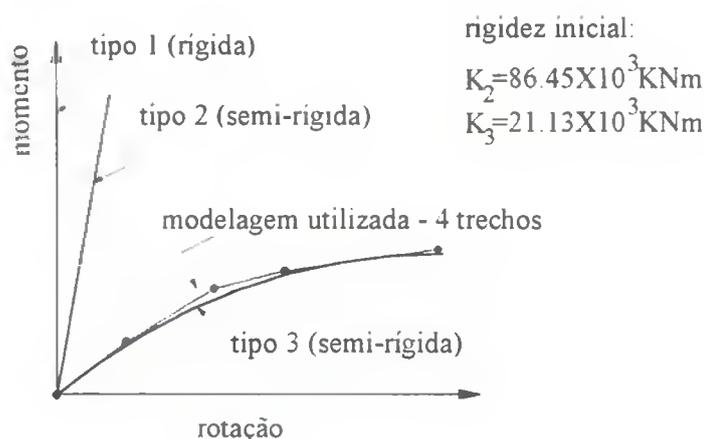


Fig. 4.15 Tipos de conexões viga-pilar - exemplo 4

Após a aplicação da carga de gravidade de 44.5 kN no meio do vão da viga, inicia-se a aplicação do carregamento horizontal, com a carga  $H$  sendo aumentada enquanto a carga vertical é mantida constante. Os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com os gráficos apresentados por Lui & Chen (1987) e Al-Bermani & Kitipornchai (1992) e mostrados nas figuras 4.16 e 4.17 em termos das relações entre a carga horizontal aplicada e o deslocamento horizontal do nó C. Lui & Chen (1987) realizaram uma análise elastoplástica do pórtico, considerando os efeitos da não-linearidade geométrica; posteriormente Al-Bermani & Kitipornchai (1992) acrescentaram o efeito da instabilidade.

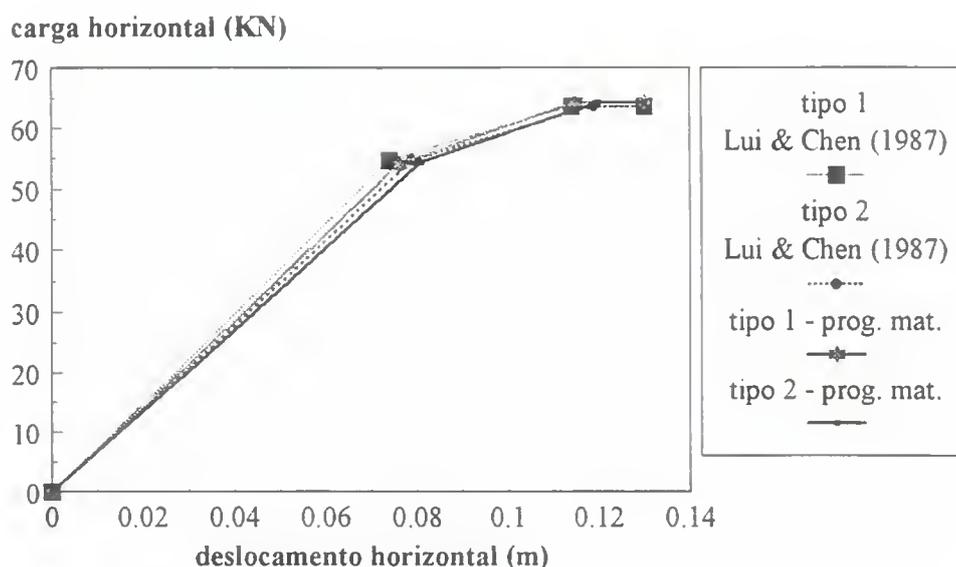


Fig. 4.16 Carga v. desloc. horizontal - conexões tipo 1 e 2 - exemplo 4

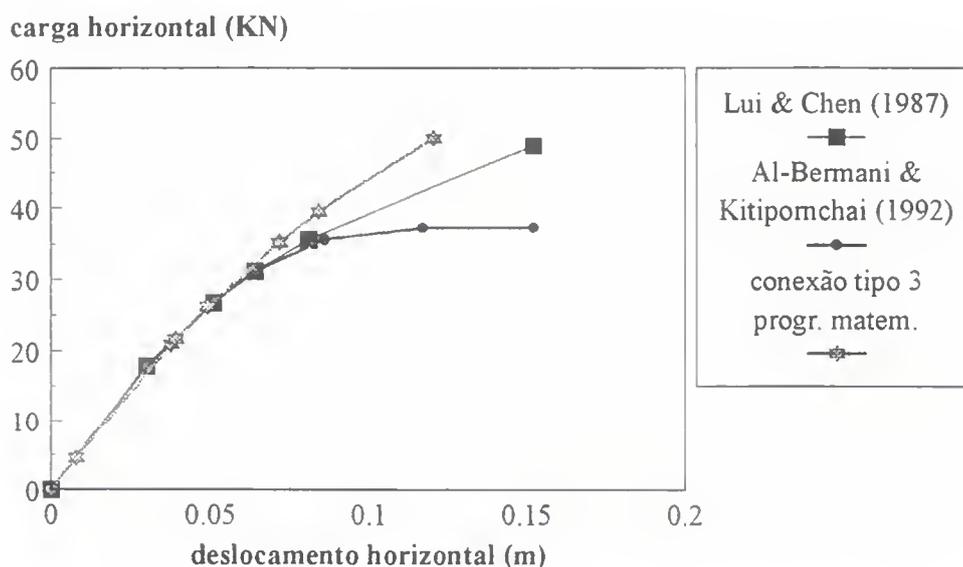


Fig. 4.17 Carga v. desloc. horizontal - conexão tipo 3 - exemplo 4

Observa-se que os resultados obtidos para o pórtico com as conexões tipo 1 e 2 (figura 4.16) estão muito próximos dos apresentados por Lui & Chen (1987). Segundo Al-Bermani & Kitipornchai (1992) os seus resultados também apresentaram ótima concordância com os de Lui & Chen (1987). Portanto, para estes dois casos, parece ser dispensável a consideração dos efeitos da não-linearidade geométrica e da instabilidade. As descontinuidades nestas curvas devem-se à formação das rótulas plásticas.

No pórtico com a conexão tipo 3 (figura 4.17) percebe-se uma maior divergência nos resultados com o aumento da carga aplicada, que pode ter sido causada pela consideração dos efeitos da não-linearidade geométrica e da instabilidade, não levados em conta no presente trabalho. Para cargas menores, até 30 KN, nota-se a excelente concordância entre os vários estudos.

A figura 4.18 mostra o aumento da flexibilidade do pórtico quando se considera conexões semi-rígidas (tipo 3) em substituição às conexões rígidas (tipo 1).

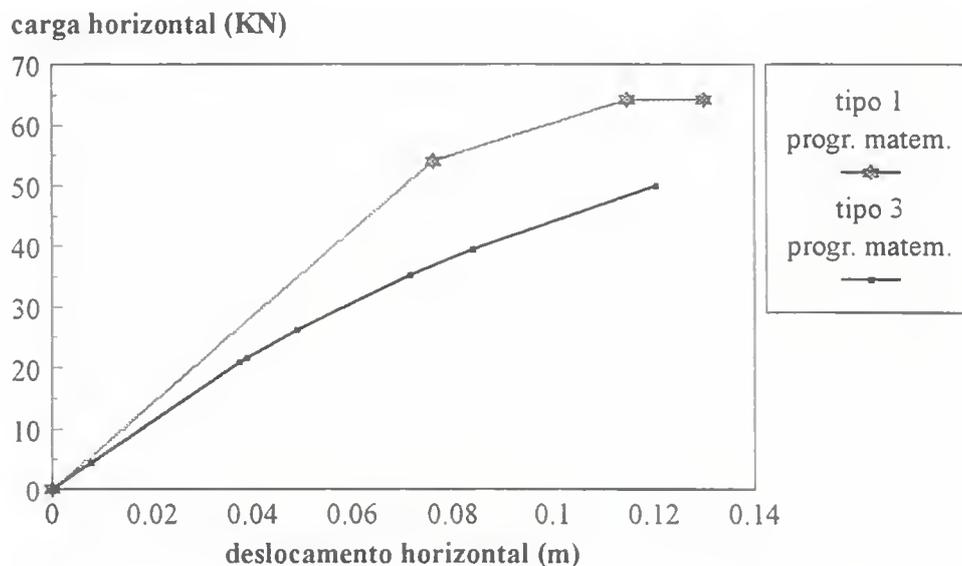


Fig. 4.18 Carga v. desloc. horizontal - conexões tipo 1 e 3 - exemplo 4

Por causa da sequência em que as cargas são aplicadas, o momento fletor na conexão viga-pilar do nó C continua a aumentar enquanto o momento na conexão do nó B começa a reduzir, quando a carga horizontal é aplicada. Assim, Lui & Chen (1987), neste instante da análise, utilizam uma rigidez instantânea para a conexão do nó C e a própria rigidez inicial para a conexão do nó B, considerando portanto modelagens diferentes para o comportamento de conexões idênticas. No presente estudo esta diferença de comportamento entre as conexões dos nós B e C é considerada automaticamente através do vetor  $y^0$ , definido em (4.40), (4.47), (4.49) e (4.51), que expressa os esforços de plastificação para o carregamento proporcional variável a partir da solução elástica encontrada para o carregamento fixo.

A figura 4.19 apresenta a variação dos momentos nas extremidades das vigas, nós B e C, para o caso da conexão semi-rígida do tipo 3, obtidos no presente trabalho e por Lui &

Chen (1987). Para manter a convenção de sinais utilizada por Lui & Chen (1987), considera-se o momento positivo quando o mesmo atua no sentido anti-horário.

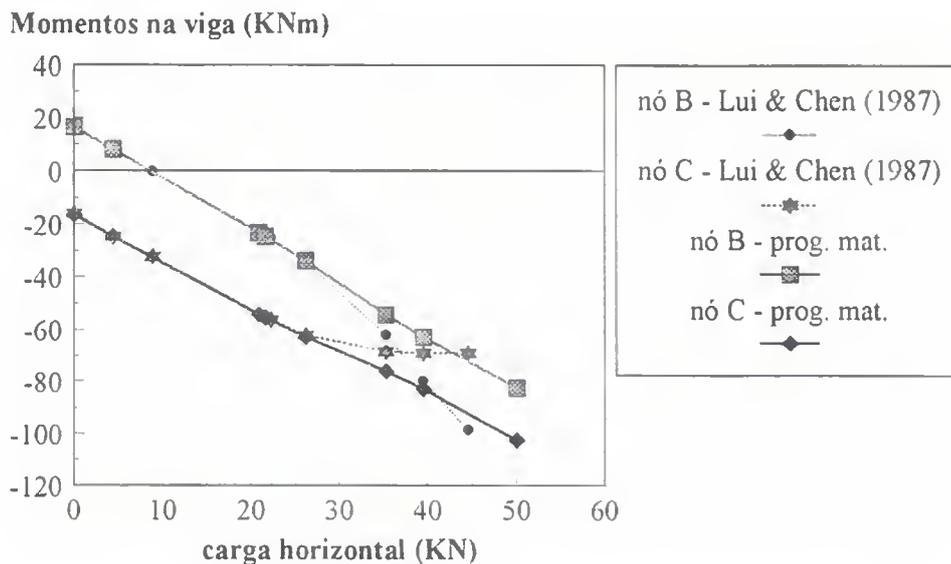


Fig. 4.19 Momento na viga v. carga - conexão tipo 3 - exemplo 4

### Exemplo 5

Considera-se o pórtico da figura 4.20, originalmente apresentado por Lui & Chen (1987), idêntico ao pórtico da figura 4.14 (exemplo 4) com a adição de um tirante. O tirante é em perfil W5x19, com  $A = 3.50 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e  $I = 1.06 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ , sendo utilizado como um elemento de treliça, com as extremidades da barra ligadas ao pórtico por rótulas.

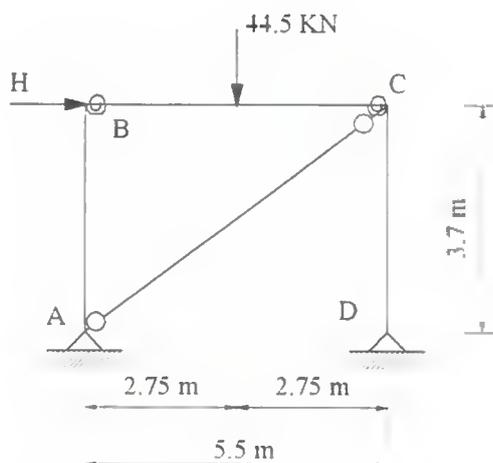
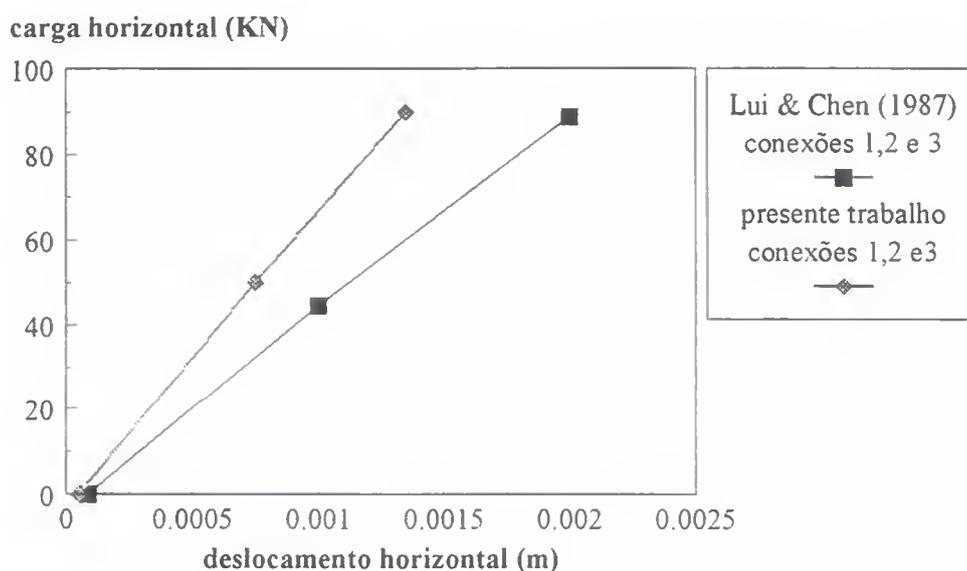


Fig. 4.20 Pórtico com travamento - exemplo 5 (Lui & Chen, 1987)

Os pilares e a viga são considerados extensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto no ponto de aplicação da carga vertical. A plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. As conexões viga-pilar utilizadas são as mesmas da figura 4.15 (exemplo 4) e o carregamento horizontal é aplicado enquanto a carga vertical de 44.5 KN permanece constante.

Os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com o gráfico apresentado por Lui & Chen (1987) e mostrados na figura 4.21 em termos das relações entre a carga horizontal aplicada e o deslocamento horizontal do nó C. Observa-se que, para a faixa de carregamento considerada, o comportamento do pórtico independe da flexibilidade da conexão. Pode-se concluir que para este pórtico, sendo o tirante construído com o perfil especificado, uma análise linear elástica é suficiente.



**Fig. 4.21** Carga v. desloc. horizontal - exemplo 5

Percebe-se, ainda, que a consideração de travamento reduz consideravelmente o deslocamento horizontal do pórtico, como mostra a figura 4.22 comparando os resultados obtidos nos exemplos 4 e 5.

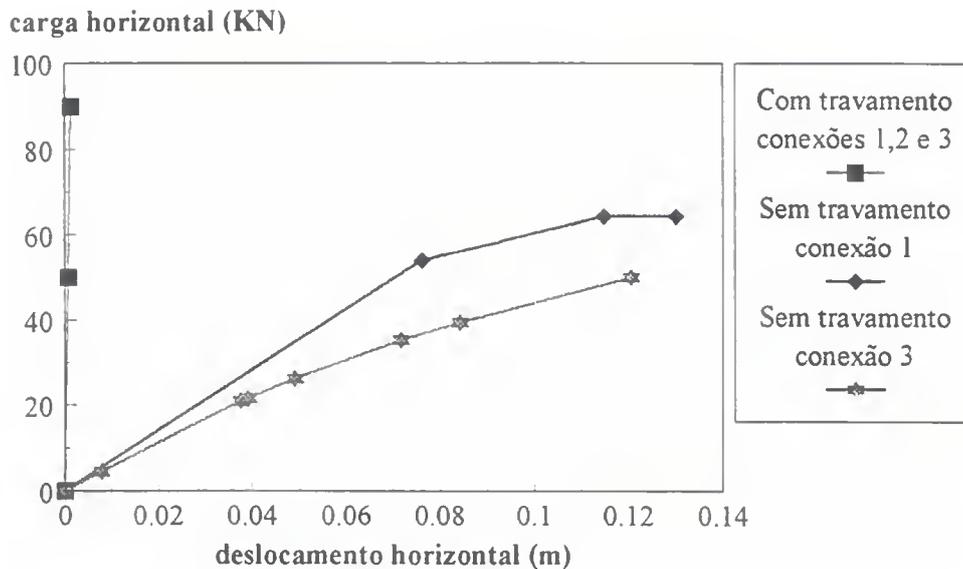


Fig. 4.22 Comparação dos pórticos dos exemplos 4 e 5

### Exemplo 6

Considera-se o pórtico da figura 4.23, conforme apresentado por Rodrigues et al. (1994), com as seguintes propriedades:  $E = 2.05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $A = 0.303 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $I = 0.887 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $\sigma_y = 2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ . Todas as barras são em perfis W5x16 de aço ASTM A-36.

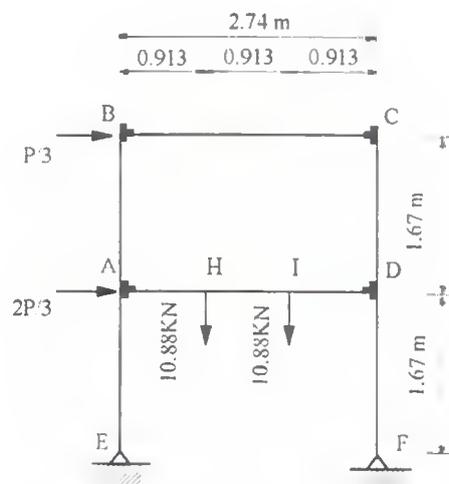
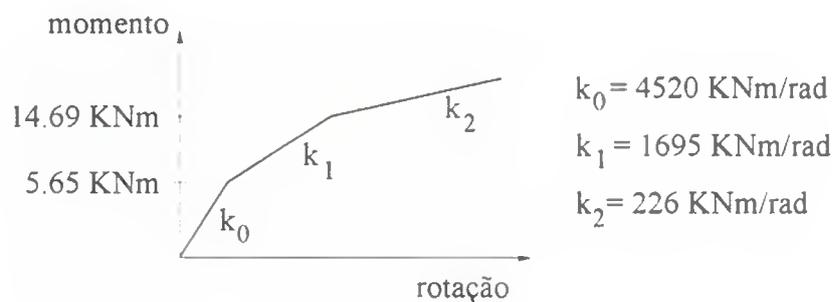


Fig. 4.23 Pórtico - exemplo 6 (Rodrigues et al., 1994)

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto nos pontos de aplicação das cargas verticais. A plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. As conexões viga-pilar dos nós A, B, C e D são iguais, do

tipo topo e assento (TA), com uma espessura padrão de 1.27 cm. As conexões E e F comportam-se como rótulas perfeitas, enquanto as conexões dos pilares são sempre rígidas. Após a aplicação das cargas de gravidade nas posições H e I no vão da viga inferior, inicia-se o carregamento horizontal.

O pórtico da figura 4.23 foi ensaiado em escala natural por Stelmack et al. (1986), submetido a cargas cíclicas. No presente trabalho adota-se a modelagem trilinear do comportamento real da conexão topo e assento (nós A, B, C e D), proposta por Stelmack et al. (1986) e mostrada na figura 4.24. Rodrigues et al. (1994) definiram um diagrama momento x rotação a partir dos pontos médios extraídos das curvas obtidas por Stelmack et al. (1986) através dos ensaios de 14 conexões iguais às utilizadas no pórtico da figura 4.23; esses autores utilizaram, ainda, a curva B-Spline Tensionada de ordem 6 para modelagem.



**Fig. 4.24** Modelagem da conexão viga-pilar - exemplo 6

A figura 4.25 apresenta os resultados do presente estudo comparados com os resultados experimentais, obtidos por Stelmack e co-autores, e teóricos retirados dos gráficos de Rodrigues et al. (1994) e Rodrigues (1991), relacionando carga aplicada ( $2P/3$ ) com deslocamento, ambos horizontais e referidos ao nó A do pórtico. Os valores encontrados para a formulação malha-flexibilidade são os mesmos da nodal-rigidez. Percebe-se uma melhor concordância dos resultados fornecidos pela presente formulação com os resultados experimentais, destacando-se o fato de que não houve plastificação das barras na faixa de carregamento estudada. Ainda, para este caso, os efeitos da não-linearidade geométrica não influem no comportamento do pórtico. Rodrigues et al. (1994) realizaram uma análise não-linear geométrica incremental utilizando o método dos elementos finitos. Esses autores justificam a divergência entre seus resultados e os experimentais pelo fato de que a possibilidade de plastificação em seções não coincidentes com as conexões não foi considerada na análise por eles realizada.

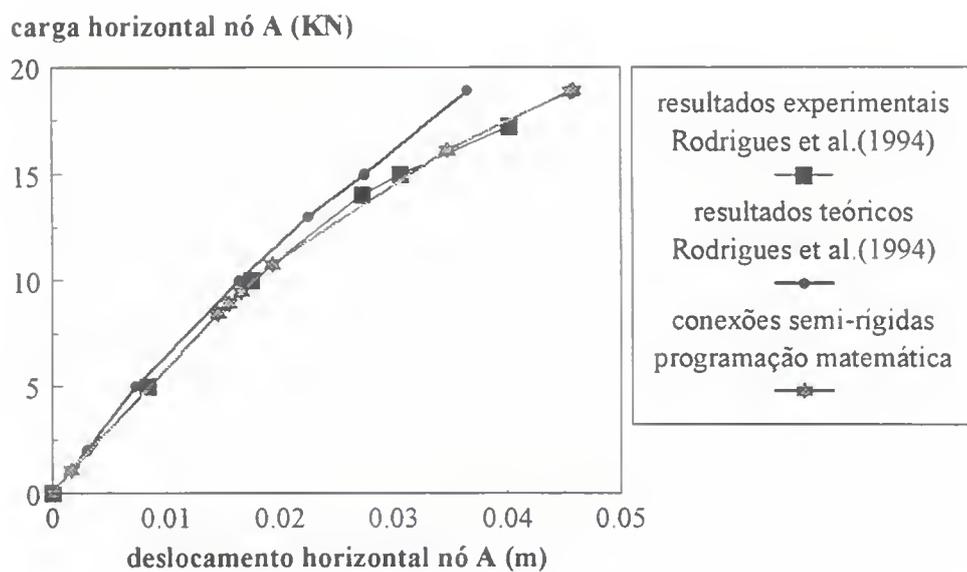


Fig. 4.25 Carga horizontal v. desloc. do nó A - exemplo 6

A figura 4.26 compara os resultados experimentais e os obtidos para conexões semi-rígidas através da presente formulação, com os calculados considerando todas as conexões viga-pilar como sendo rígidas.

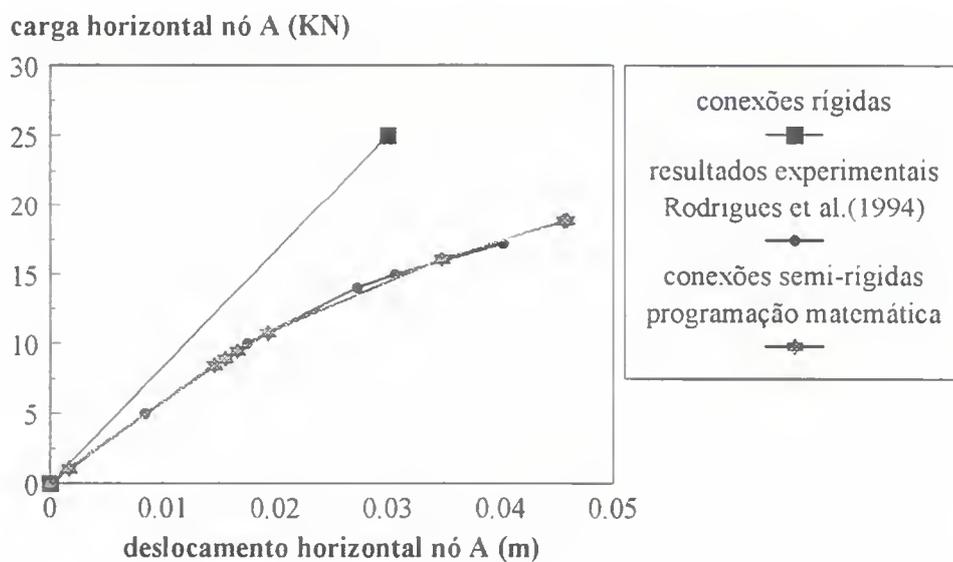


Fig. 4.26 Carga v. desloc. do nó A - conexões rígidas e semi-rígidas - exemplo 6

Na faixa de carregamento estudada não ocorre plastificação no pórtico com conexões rígidas. Observa-se que a consideração da não-linearidade das conexões viga-pilar aumenta significativamente o deslocamento do pórtico estudado.

Conforme explicado anteriormente, os resultados correspondentes à formulação proposta neste trabalho, apresentados nas figuras 4.25 e 4.26, foram obtidos a partir de uma modelagem trilinear da curva momento-rotação da conexão topo e assento. Mesmo sem conhecer a curva experimental da conexão ou sua modelagem, pode-se estimar o comportamento do pórtico com a utilização do sistema de classificação de conexões proposto por Bjorhovde et al. (1990), apresentado nas subseções 2.1.4 e 4.2.1. Segundo Bjorhovde et al. (1990) o momento último de uma conexão do tipo topo e assento varia de  $0.45$  a  $0.6M_p$ , onde  $M_p$  é o momento de plastificação da viga conectada. Assim, o pórtico da figura 4.23 é analisado considerando o comportamento elástico-perfeitamente plástico estimado das conexões semi-rígidas viga-pilar, para os casos de  $M_c/M_p = 0.45, 0.5$  e  $0.6$ , onde  $M_c$  é o momento fletor resistente da conexão.

A figura 4.27 compara os resultados obtidos, considerando a referida estimativa do comportamento da conexão, com os calculados para a modelagem trilinear da curva experimental e para o caso de conexões viga-pilar rígidas.

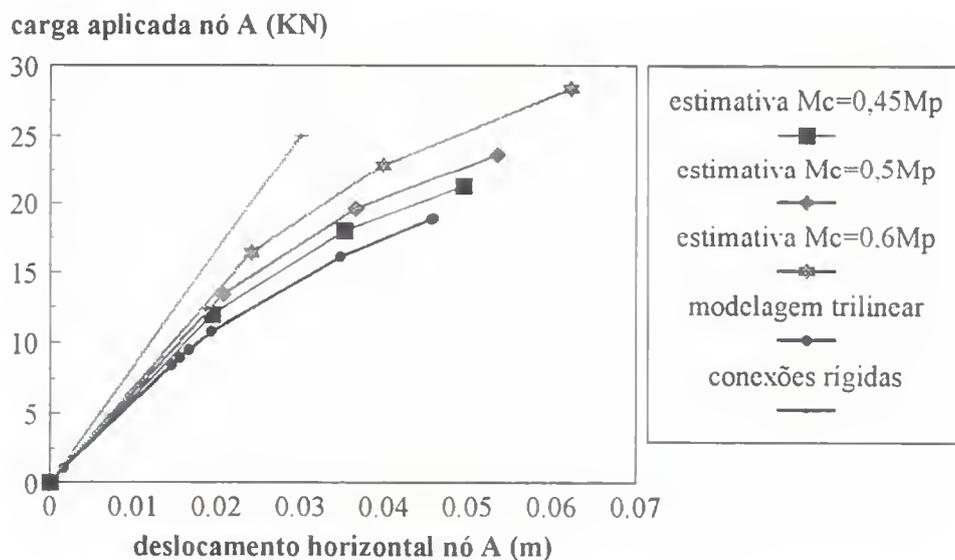


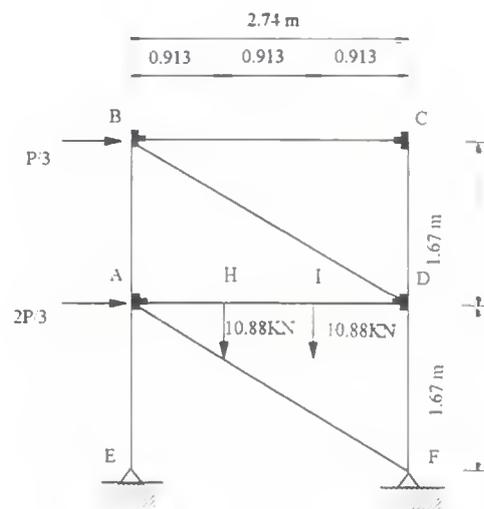
Fig. 4.27 Carga v. desloc. do nó A - comportamento estimado das conexões - exemplo 6

Observa-se que os resultados para  $M_c/M_p = 0.45$  foram próximos aos encontrados utilizando-se a modelagem trilinear da curva experimental. Todas as três estimativas utilizadas

são válidas para um estudo preliminar do pórtico, seja para o dimensionamento quando ainda não se definiu o tipo da conexão a ser usada ou para uma análise sem o conhecimento da curva real da conexão.

### Exemplo 7

Considera-se o pórtico contraventado da figura 4.28, originalmente apresentado por Rodrigues et al. (1995), idêntico ao pórtico da figura 4.23 (exemplo 6) com a adição das diagonais. As diagonais são em perfil 2L50.8x50.8x4.76, com  $A = 9.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  e  $I = 23.2 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ , sendo utilizadas como elemento de treliça, com as suas extremidades ligadas ao pórtico por rótulas. Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto nos pontos de aplicação das cargas verticais. A plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. As conexões viga-pilar utilizadas são do tipo topo e assento, com a modelagem dada pela figura 4.24 (exemplo 6), e o carregamento horizontal é iniciado após a aplicação das cargas de gravidade na viga inferior.



**Fig. 4.28** Pórtico contraventado - exemplo 7 (Rodrigues et al., 1995)

A figura 4.29 apresenta a comparação entre o pórtico contraventado e o não-contraventado (exemplo 6), através da relação entre a carga horizontal aplicada e o deslocamento horizontal, ambos referidos ao nó A. Observa-se que, neste caso, a consideração de travamento reduz consideravelmente o deslocamento horizontal do pórtico, conforme mostrado por Rodrigues et al. (1995).

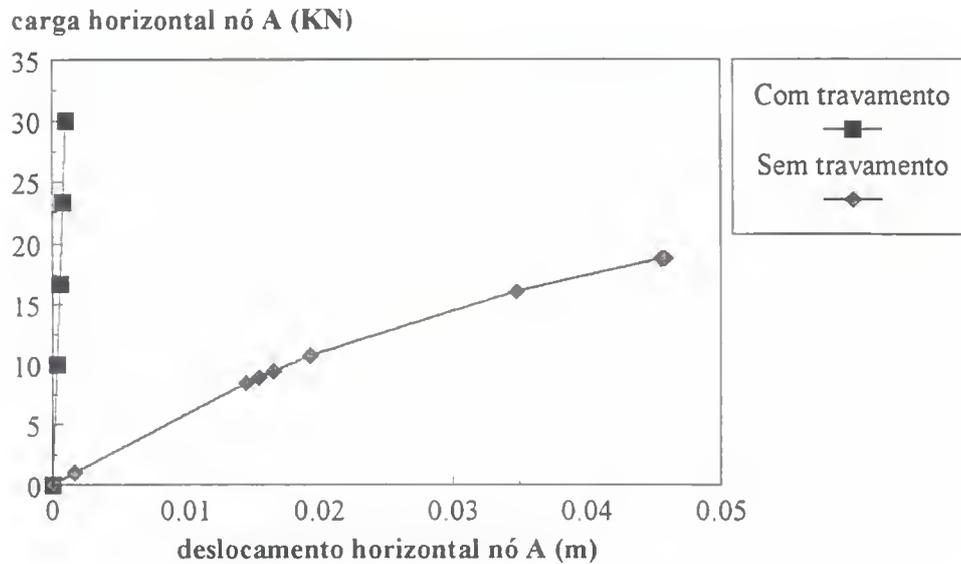


Fig. 4.29 Comparação dos pórticos dos exemplos 6 e 7

Calculando-se o mesmo pórtico contraventado considerando todas as conexões viga-pilar como rígidas, os resultados encontrados são iguais aos obtidos para conexões semi-rígidas. Desta forma percebe-se que, para a faixa de carregamento considerada, o comportamento do pórtico contraventado independe da flexibilidade da conexão. Como não ocorreu plastificação nas barras para o carregamento estudado, uma análise linear elástica seria suficiente para este pórtico.

### Exemplo 8

Considera-se o pórtico da figura 4 30, conforme apresentado por Rodrigues et al. (1994), com as seguintes propriedades:  $E = 2.05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $A = 0.303 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $I = 0.887 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $\sigma_y = 2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ . Todas as barras são em perfis W5x16 de aço ASTM A-36.

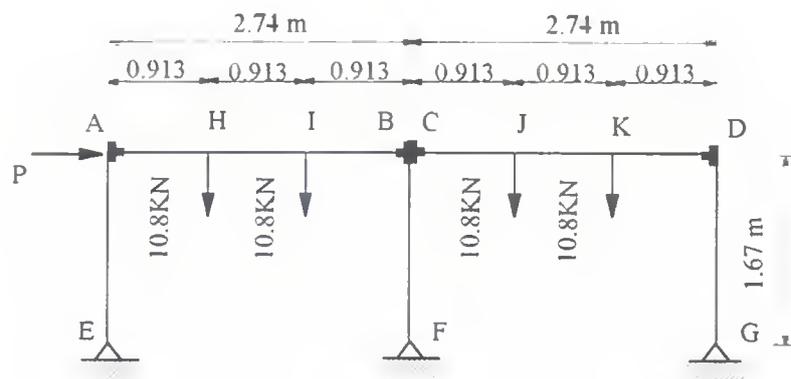
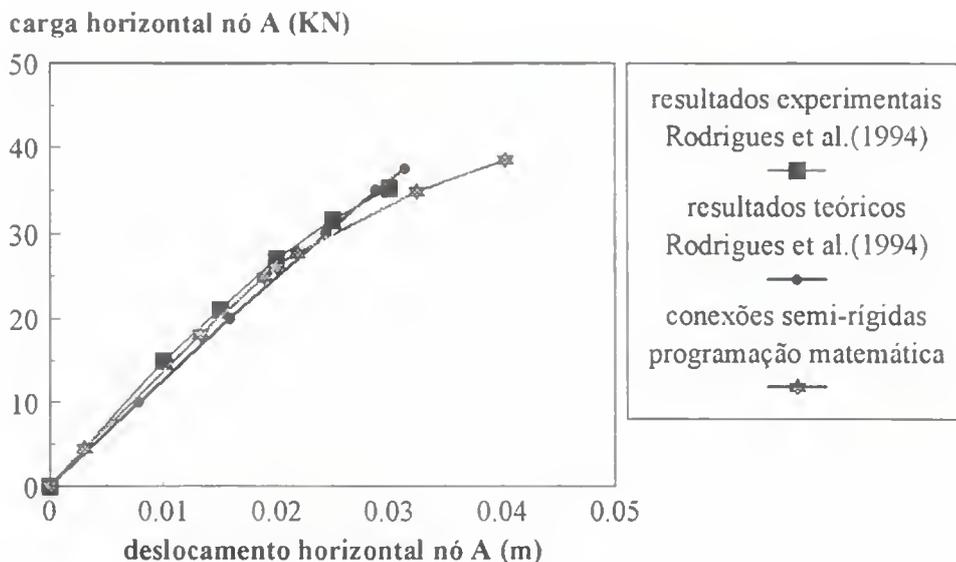


Fig. 4.30 Pórtico - exemplo 8 (Rodrigues et al., 1994)

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto nos pontos de aplicação das cargas verticais. A plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. As conexões viga-pilar dos nós A, B, C e D são iguais, do tipo topo e assento (TA), com uma espessura padrão de 1.27 cm. As conexões E, F e G comportam-se como rótulas perfeitas, enquanto as conexões dos pilares são sempre rígidas. Após a aplicação das cargas de gravidade nas posições H, I, J e K nos vãos das vigas, inicia-se o carregamento horizontal.

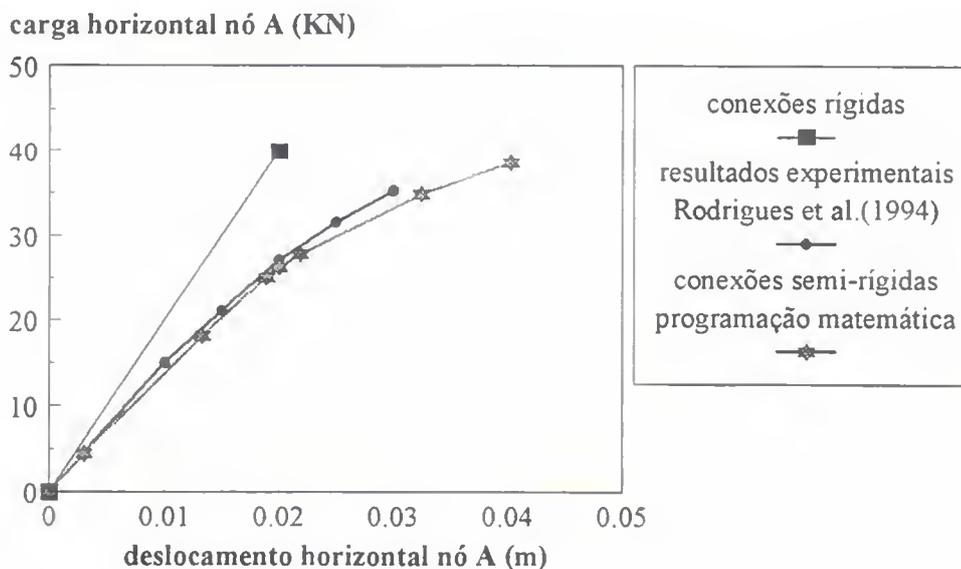
O pórtico da figura 4.30 foi ensaiado em escala natural por Stelmack et al. (1986), submetido a cargas cíclicas. No presente trabalho adota-se a modelagem trilinear do comportamento real da conexão topo e assento (nós A, B, C e D), proposta por Stelmack et al. (1986) e mostrada na figura 4.24 (exemplo 6). Rodrigues et al. (1994) definiram um diagrama momento x rotação a partir dos pontos médios extraídos das curvas obtidas por Stelmack et al. (1986) através dos ensaios de 14 conexões iguais às utilizadas no pórtico da figura 4.30; esses autores utilizaram, ainda, a curva B-Spline Tensionada de ordem 6 para modelagem.

A figura 4.31 apresenta os resultados do presente estudo comparados com os resultados experimentais, obtidos por Stelmack e co-autores, e teóricos retirados dos gráficos de Rodrigues et al. (1994) e Rodrigues (1991), relacionando carga aplicada com deslocamento, ambos horizontais e referidos ao nó A do pórtico. Os valores encontrados para a formulação malha-flexibilidade são os mesmos da nodal-rigidez. Rodrigues et al. (1994) realizaram uma análise não-linear geométrica incremental utilizando o método dos elementos finitos, mas não consideraram a possibilidade de plastificação. Percebe-se uma boa concordância entre os resultados fornecidos pela presente formulação e os resultados experimentais, destacando-se o fato de que não houve plastificação das barras na faixa de carregamento estudada. Ainda, para este caso, os efeitos da não-linearidade geométrica não influem no comportamento do pórtico.



**Fig. 4.31** Carga horizontal v. desloc do nó A - exemplo 8

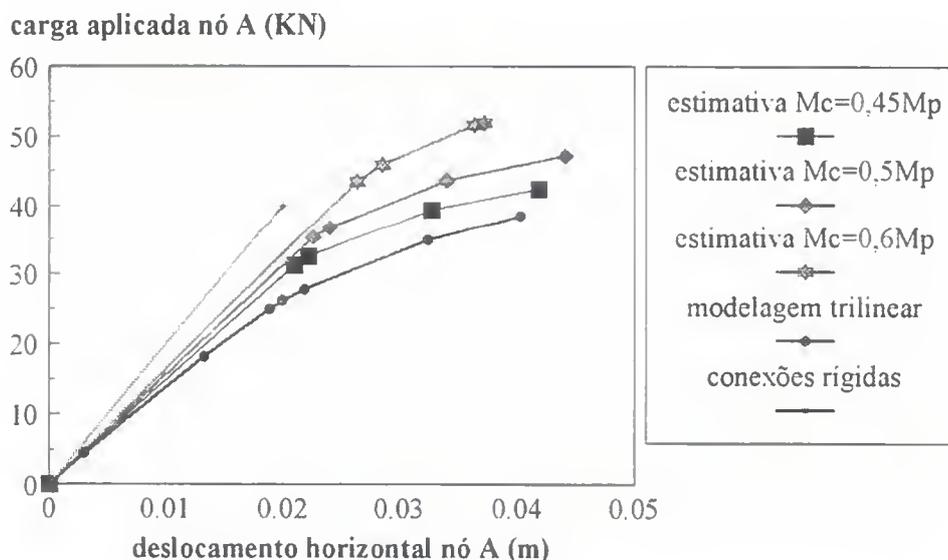
A figura 4.32 compara os resultados experimentais e os obtidos para conexões semi-rígidas, através da presente formulação, com os calculados considerando todas as conexões viga-pilar como sendo rígidas. Na faixa de carregamento estudada não ocorre plastificação no pórtico com conexões rígidas. Observa-se que a consideração da não-linearidade das conexões viga-pilar aumenta significativamente o deslocamento do pórtico estudado.



**Fig. 4.32** Carga v. desloc. do nó A - conexões rígidas e semi-rígidas - exemplo 8

Conforme citado anteriormente, os resultados correspondentes à formulação proposta neste trabalho, apresentados nas figuras 4.31 e 4.32, foram obtidos a partir de uma modelagem trilinear da curva momento-rotação da conexão topo e assento. De forma semelhante ao exemplo 6, o pórtico da figura 4.30 é analisado considerando o comportamento elástico-perfeitamente plástico das conexões semi-rígidas viga-pilar, estimado através do sistema de classificação de conexões de Bjorhovde et al. (1990), para os casos de  $M_c/M_p = 0.45$ , 0.5 e 0.6, onde  $M_c$  é o momento fletor resistente da conexão.

A figura 4.33 compara os resultados obtidos, considerando a referida estimativa do comportamento da conexão, com os calculados através da modelagem trilinear da curva experimental. Na mesma figura, apresentam-se também os resultados obtidos estimando-se que as conexões viga-pilar se comportem como rígidas. Observa-se que os resultados para  $M_c/M_p = 0.45$  foram próximos aos encontrados para a modelagem trilinear da curva experimental. Para  $M_c/M_p = 0.6$  ocorre plastificação do pilar interno, na sua extremidade superior. Todas as três estimativas utilizadas são válidas para um estudo preliminar do pórtico, seja para o dimensionamento quando ainda não se definiu o tipo da conexão a ser usada ou para uma análise sem o conhecimento da curva real da conexão.



**Fig. 4.33** Carga v. desloc. do nó A - comportamento estimado das conexões - exemplo 8

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE E DE SHAKEDOWN

#### 5.1 INTRODUÇÃO

A *análise plástica limite* é utilizada para a determinação da carga de colapso plástico de uma estrutura, sujeita a um carregamento proporcional variável, cujo fator de carga  $\gamma$  aumenta monotonicamente. Quando se aplica à estrutura um carregamento variável repetido, o fator de carga limite é obtido por uma *análise de shakedown* ou de acomodação plástica, sendo menor ou igual ao  $\gamma$  de colapso plástico.

Tin-Loi & Vimonsatit (1993) destacam que existem poucos estudos sobre o comportamento de estruturas com conexões semi-rígidas submetidas a carregamentos cíclicos, e que estes utilizam uma análise incremental iterativa para determinar a evolução da estrutura com o carregamento. O estudo de pórticos com conexões semi-rígidas sujeitos a carregamentos variáveis repetidos, como um problema de *shakedown*, foi então apresentado por Tin-Loi & Vimonsatit (1993) e Vimonsatit (1995), utilizando a formulação nodal.

No presente capítulo é estudada a influência das conexões semi-rígidas nos fatores de carga de colapso plástico e de *shakedown* de pórticos planos elastoplásticos. Para a análise são utilizados os problemas de programação linear (PLs) associados aos teoremas estático e cinemático nas formulações nodal e de malha. No caso da análise plástica limite o material estrutural é considerado rígido-perfeitamente plástico e, para análise de *shakedown*, elástico-perfeitamente plástico. As deformações plásticas concentram-se em um número finito de seções críticas, em geral nas conexões semi-rígidas, sendo possível também a plastificação de extremidades de barras que não coincidam com as conexões semi-rígidas. Considera-se apenas a deformação rotacional da conexão, utilizando-se na modelagem de sua curva momento-rotação o comportamento do material estrutural adequado à análise.

## 5.2 ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE

A análise plástica limite procura determinar a carga de colapso plástico de uma estrutura sem o conhecimento das suas características elásticas. O colapso plástico ocorre quando o número e disposição das rótulas plásticas torna-se suficiente para transformar a estrutura em um mecanismo.

A análise plástica limite baseia-se em três teoremas válidos para estruturas rígido-plásticas, as quais não apresentam deslocamentos até que se atinja a carga de colapso. Os deslocamentos são assumidos como pequenos de forma a não alterar as equações de equilíbrio. Considera-se a estrutura submetida a um carregamento proporcional variável, com o fator de carga  $\gamma$  aumentando monotonicamente.

- *Teorema estático* (ou limite inferior):

*Se, para uma estrutura existir uma distribuição de esforços estaticamente admissível, o valor de  $\gamma$  será menor ou igual ao fator de carga de colapso plástico  $\gamma_c$ .*

Uma distribuição de esforços é dita *estaticamente admissível* quando estiver em equilíbrio com as cargas aplicadas e obedecer às condições de resistência, não excedendo os valores dos esforços de plastificação.

- *Teorema cinemático* (ou limite superior):

*Para uma determinada estrutura submetida a um carregamento, o valor de  $\gamma$  que corresponde a um mecanismo de colapso plástico qualquer, geometricamente compatível, será maior ou igual ao fator de colapso plástico  $\gamma_c$ .*

Para um mecanismo *geometricamente compatível*,  $\dot{v} = 0$  onde  $\dot{v}$  é a taxa do vetor das descontinuidades  $v$  definido na equação (2.9).

- *Teorema da unicidade*:

*Para uma estrutura submetida a um carregamento, se existir pelo menos uma distribuição de esforços estaticamente admissível, e os esforços de plastificação nas seções ocorrerem em número suficiente para a formação de um mecanismo, o fator de carga  $\gamma$  correspondente será o fator de carga de colapso plástico  $\gamma_c$ .*

Portanto devem ser satisfeitas simultaneamente as condições de equilíbrio e resistência (distribuição estaticamente admissível) bem como de compatibilidade de mecanismo. Este teorema não garante a unicidade nem da distribuição de esforços nem do mecanismo de colapso, porém a carga de colapso é única.

Outros detalhes sobre os teoremas apresentados podem ser encontrados, por exemplo, em Neal (1977), Horne (1979) e Smith (1990c).

A carga de colapso plástico não depende de fatores como flexibilidade das conexões, movimentos dos apoios e presença de tensões residuais, que afetam a distribuição das tensões elásticas (Neal, 1977). Como a análise plástica limite não considera a elasticidade das estruturas, os teoremas apresentados podem ser utilizados para a análise de estruturas com conexões semi-rígidas, considerando-se apenas o fato de que o momento de plastificação de uma conexão semi-rígida depende da sua rigidez inicial (Bjorhovde et al., 1990).

Neste estudo a análise plástica limite é realizada através de PLs associados aos teoremas estático e cinemático, conforme apresentados por Mello & Sahlit (1983) e Smith (1990c).

### 5.2.1 PL malha-estático

O PL malha-estático é obtido do teorema estático utilizando-se as relações de equilíbrio na descrição de malha. Assim, procura-se o maior fator de carga  $\gamma$  correspondente a uma distribuição de esforços estaticamente admissível, satisfazendo às condições de equilíbrio e resistência.

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } [1 \quad 0^T] \begin{bmatrix} \gamma \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \\ & \text{sujeito a} \\ & [N^T \mathbf{b}_o \quad N^T \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \gamma \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \leq [\mathbf{X}_*] \\ & \gamma \geq 0 \quad \mathbf{p} \text{ irrestrito} \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $\gamma$  é o fator de carga,  $\mathbf{p}$  o vetor dos esforços hiperestáticos,  $N$  a matriz de incidência ou de normalidade,  $\mathbf{b}_o$  o vetor de malha referente às cargas aplicadas para o caso de carregamento proporcional,  $\mathbf{B}$  a matriz de malha e  $\mathbf{X}_*$  o vetor dos esforços de plastificação.

### 5.2.2 PL malha-cinemático

O PL malha-cinemático é obtido do teorema cinemático utilizando-se as relações de compatibilidade na descrição de malha. Assim, procura-se o menor fator de carga  $\gamma$  correspondente a um mecanismo de colapso plástico geometricamente compatível, satisfazendo à condição  $\dot{v} = 0$ , onde  $\dot{v}$  é a taxa do vetor das descontinuidades  $v$  definido na equação (2.9).

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } [X_o^T] [\dot{x}_o] \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} -b_o^T N \\ -B^T N \end{bmatrix} [\dot{x}_o] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \dot{x}_o \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $\dot{x}_o$  é a taxa dos multiplicadores plásticos.

Os PLs malha-estático e malha-cinemático são duais e apresentam a mesma solução ótima.

### 5.2.3 PL nodal-estático

O PL nodal-estático é obtido do teorema estático utilizando-se as relações de equilíbrio na descrição nodal.

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } [1 \quad 0^T] \begin{bmatrix} \gamma \\ X \end{bmatrix} \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} -a_o & A^T \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_o \end{bmatrix} \\ & \gamma \geq 0 \quad X \text{ irrestrito} \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $a_o$  é o vetor nodal referente às cargas aplicadas para o caso de carregamento proporcional,  $A$  a matriz nodal e  $X$  o vetor dos esforços internos independentes da estrutura.

### 5.2.4 PL nodal-cinemático

O PL nodal-cinemático é obtido do teorema cinemático utilizando-se as relações de compatibilidade na descrição nodal.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } [X^T \quad 0^T] \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} 0 & a_s^T \\ N & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \dot{x}_s \geq 0 \quad \dot{q} \text{ irrestrito} \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde  $\dot{q}$  é o vetor das taxas dos deslocamentos nodais nas direções dos graus de liberdade cinemáticos.

Os PLs nodal-estático e nodal-cinemático são duais e apresentam a mesma solução ótima.

## 5.3 ANÁLISE DE SHAKEDOWN

A análise de *shakedown* ou de acomodação plástica procura determinar o fator de carga máximo em que as deformações plásticas de uma estrutura, sujeita a um carregamento variável repetido, se estabilizem. A adaptação, ou *shakedown*, representa a ocorrência de resposta estrutural puramente elástica, após um número de ciclos de carregamento.

Uma estrutura, sujeita a um carregamento variável repetido, pode entrar em colapso com um fator de carga  $\gamma_S$  inferior ao fator de carga de colapso plástico  $\gamma_c$ . O colapso pode ser provocado por:

- *Plasticidade alternada*, quando as fibras, de uma ou mais seções, sofrem plastificação de forma repetida e alternada, na tração e compressão, causando uma fadiga de baixo ciclo. O fator de carga acima do qual a plasticidade alternada pode ocorrer é chamado de fator de carga de plasticidade alternada  $\gamma_a$ .
- *Colapso incremental*, quando os incrementos finitos de deformação nas rótulas plásticas aumentam a cada ciclo de carga provocando, após um número suficiente de ciclos, grandes

deformações e deslocamentos que mobilizam um mecanismo. O fator de carga acima do qual o colapso incremental pode ocorrer é chamado de fator de carga de colapso incremental  $\gamma$ .

Portanto, o fator de carga de *shakedown*  $\gamma_S$  será o menor valor entre  $\gamma_a$  e  $\gamma$ .

Os teoremas de *shakedown*, a seguir, apresentam as condições sob as quais o fluxo plástico irá cessar, independentemente do número de ciclos e da sequência em que as cargas são aplicadas. Considera-se que o comportamento do material é elástico perfeitamente-plástico, as equações de equilíbrio se referem à configuração indeformada da estrutura e as seções transversais da estrutura apresentam dois eixos de simetria, com as tensões de escoamento e plastificação iguais para a tração e a compressão.

- *Teorema estático* (ou limite inferior):

*Se existe uma distribuição de esforços residuais  $X_r$  ao longo da estrutura, estaticamente admissível com carregamento externo nulo (auto-equilibrada), e que satisfaz, em cada seção, às condições (5.5), (5.6) e (5.7), o valor do  $\gamma$  correspondente será menor ou igual ao fator de carga de shakedown  $\gamma_S$ .*

$$X_r + \gamma X_E^{m\acute{a}x} \leq X^* \quad (5.5)$$

$$X_r + \gamma X_E^{m\acute{i}n} \geq -X^* \quad (5.6)$$

$$\gamma (X_E^{m\acute{a}x} - X_E^{m\acute{i}n}) \leq 2X_v \quad (5.7)$$

onde  $X_r$  é o vetor dos esforços residuais auto-equilibrados,  $X_E^{m\acute{a}x}$  e  $X_E^{m\acute{i}n}$  são os valores máximos e mínimos, com seus respectivos sinais, do vetor da envoltória dos esforços elásticos nas seções,  $X^*$  é o vetor dos esforços de plastificação,  $X_v$  é o vetor dos esforços elásticos limite e  $\gamma$  o fator de carga da estrutura. Este teorema foi proposto por Bleich, em 1932, e generalizado por Melan, em 1936 (Neal, 1977).

O fator de carga de *shakedown*  $\gamma_S$  nunca excederá o fator de carga de colapso plástico  $\gamma_c$  para a combinação de cargas mais desfavorável, pois as condições do teorema estático da análise plástica limite estão incluídas nas condições do teorema de *shakedown* como um caso especial (Neal, 1977).

Quando o fator de forma da seção transversal, definido como a relação entre  $X^*$  e  $X_v$ , for igual a um, indicando que os esforços de plastificação são iguais aos esforços elásticos limite ( $X^* = X_v$ ), a equação (5.7) poderá ser eliminada pois esta condição estará incluída nas equações (5.5) e (5.6). Esta hipótese é adotada no presente estudo.

- *Teorema cinemático* (ou limite superior):

*O valor de  $\gamma$  correspondente a um mecanismo de plasticidade alternada ou de colapso incremental será maior ou igual ao fator de carga de shakedown,  $\gamma_S$ .*

- *Teorema da unicidade*:

*Se as condições do teorema estático e do teorema cinemático são satisfeitas simultaneamente então o fator de carga encontrado será igual ao fator de carga de shakedown  $\gamma_S$ .*

Outros detalhes sobre os teoremas apresentados podem ser encontrados, por exemplo, em Neal (1977) e Horne (1979).

Uma análise clássica de *shakedown*, como a utilizada neste estudo, não fornece os valores das deformações e deslocamentos na acomodação plástica, que podem se tornar excessivos para carregamentos inferiores ao limite de *shakedown*. A análise pode então ser complementada por métodos de deformação limite (Maier, 1979), o que não é objetivo do presente trabalho.

Segundo Neal (1977) a distribuição dos esforços elásticos depende das rigidezes dos apoios e conexões e assim  $\gamma_S$  também é influenciado por estes fatores. Neste caso a influência das conexões semi-rígidas é considerada no cálculo do vetor da envoltória dos esforços elásticos  $X_E$ , permanecendo válidos os teoremas apresentados. A envoltória  $X_E$  é determinada pelo cálculo dos esforços para cada combinação possível de cargas aplicadas, considerando-se a estrutura como infinitamente elástica. A análise elástica pode ser linear ou não-linear dependendo da modelagem utilizada para o comportamento do material estrutural. Logo, o vetor  $X_E$  da envoltória elástica pode ser definido por

$$X_E = \max ( N^T X_e^i ) \quad \text{para todo } i \quad (5.8)$$

onde  $N$  é a matriz de incidência ou de normalidade e  $X_e^i$  é o vetor dos esforços elásticos para a combinação de cargas aplicadas  $i$ . Como sempre deve ser considerada uma combinação de cargas nulas (Smith, 1974) tem-se

$$X_E = \begin{bmatrix} X_E^+ \\ X_E^- \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.9)$$

onde  $X_E^+$  e  $X_E^-$  são os valores máximos e mínimos em módulo.

No presente estudo a análise de *shakedown* é realizada através de PLs associados aos teoremas estático e cinemático, conforme apresentados por Mello & Sahlit (1983).

### 5.3.1 PL malha-estático

O PL malha-estático é obtido do teorema estático utilizando-se as relações de equilíbrio na descrição de malha. Assim, procura-se o maior fator de carga  $\gamma$  que satisfaça às condições (5.5), (5.6) e (5.7).

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } [1 \quad 0^T] \begin{bmatrix} \gamma \\ p_r \end{bmatrix} \\ & \text{sujeito a} \\ & [X_E \quad N^T B] \begin{bmatrix} \gamma \\ p_r \end{bmatrix} \leq [X_*] \\ & \gamma \geq 0 \quad p_r \text{ irrestrito} \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde  $p_r$  é o vetor dos esforços hiperestáticos referente a uma distribuição de esforços residuais auto-equilibrados,  $N$  a matriz de incidência ou de normalidade,  $B$  a matriz de malha,  $X_*$  o vetor dos esforços de plastificação e  $X_E$  o vetor da envoltória dos esforços elásticos definido em (5.8) e (5.9).

### 5.3.2 PL malha-cinemático

O PL malha-cinemático é obtido do teorema cinemático utilizando-se as relações de compatibilidade na descrição de malha.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } [X_*^T] [\dot{x}_*] \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} X_E^T \\ B^T N \end{bmatrix} [\dot{x}_*] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \dot{x}_* \geq 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde  $\dot{x}_*$  é a taxa dos multiplicadores plásticos.

Os PLs malha-estático e malha-cinemático são duais e apresentam a mesma solução ótima.

### 5.3.3 PL nodal-estático

O PL nodal-estático é obtido do teorema estático utilizando-se as relações de equilíbrio na descrição nodal.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } [1 \quad 0^T] \begin{bmatrix} \gamma \\ X_r \end{bmatrix} \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ X_E & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_s \end{bmatrix} \\
 & \gamma \geq 0 \quad X_r \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde  $A$  é a matriz nodal e  $X_r$  o vetor dos esforços residuais auto-equilibrados.

### 5.3.4 PL nodal-cinemático

O PL nodal-cinemático é obtido do teorema cinemático utilizando-se as relações de compatibilidade na descrição nodal.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } [X_s^T \quad 0^T] \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \begin{bmatrix} X_E^T & 0 \\ N & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \dot{x}_s \geq 0 \quad \dot{q} \text{ irrestrito}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde  $\dot{q}$  é o vetor das taxas dos deslocamentos nodais nas direções dos graus de liberdade cinemáticos.

Os PLs nodal-estático e nodal-cinemático são duais e apresentam a mesma solução ótima.

## 5.4 SOLUÇÃO DOS PROGRAMAS LINEARES

No presente estudo, os PLs apresentados nas seções 5.2 e 5.3 foram solucionados através do programa computacional LINDO<sup>®</sup> (Linear, Interactive, Discrete Optimizer). Como este programa aceita restrições na forma de inequações e variáveis irrestritas, pode-se utilizar qualquer uma das formulações sem a necessidade de alterações. A solução obtida fornece os valores ótimos das variáveis duais. Desta forma, pode-se determinar a solução completa através da resolução de um único PL.

Na escolha do PL a ser utilizado deve-se considerar que quanto maior o número de restrições maior será o esforço computacional necessário para solucioná-lo. Os PLs cinemáticos sempre apresentam menor número de restrições que os seus PLs estáticos duais, sendo o PL malha-cinemático o menor, com  $(1+\alpha)$  restrições onde  $\alpha$  é o grau de indeterminação estática da estrutura.

Neste estudo foram utilizados os PLs malha-cinemático e nodal-estático tanto para a análise plástica limite quanto para a análise de *shakedown*. A presença das conexões semi-rígidas foi considerada através da sua deformação rotacional e do seu momento de plastificação reduzido. Foi considerado, ainda, que as barras dos pórticos são inextensíveis e a plastificação é causada apenas pelo momento fletor.

Para viabilizar o estudo paramétrico pretendido foi utilizado o sistema de classificação de conexões da figura 2.5, proposto por Bjorhovde et al. (1990). Este sistema permite uma estimativa do comportamento de uma conexão, com a sua rigidez variando de 0 a  $\infty$ .

Na análise de *shakedown*, os esforços elásticos para cada tipo de carregamento foram obtidos através dos programas descritos nos Capítulos 3 e 4, sendo possível a consideração da curva elástica modelada em vários trechos lineares. Sabendo-se que  $N\dot{x}_p$  representa a taxa de deformação plástica geometricamente compatível, determinou-se a forma de colapso por *shakedown*. No colapso,  $N\dot{x}_p \neq 0$  indica que houve a formação de um mecanismo, correspondendo ao colapso incremental, e  $N\dot{x}_p = 0$  indica colapso por plasticidade alternada (Maier, 1979).

## 5.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

### Exemplo 1

Considera-se o pórtico da figura 5.1, conforme apresentado por Tin-Loi & Vimonsatit (1993), que apresenta as seguintes propriedades, onde  $M_p$  é o momento de plastificação da barra:  $E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $A = 6.67 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $I = 118.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 20 \text{ tm}$ ,  $d = 0.3 \text{ m}$ .

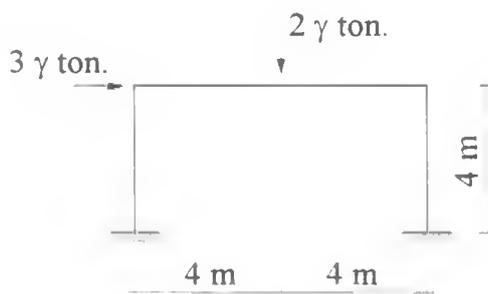


Fig. 5.1 Pórtico - exemplo 1 (Tin-Loi & Vimonsatit, 1993)

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto no ponto de aplicação da carga vertical. A plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. As conexões utilizadas na viga (conexões viga-pilar) são consideradas semi-rígidas e iguais nas duas extremidades, enquanto que as conexões dos pilares são sempre rígidas. Da mesma forma que Tin-Loi & Vimonsatit (1993), utiliza-se o sistema de classificação de conexões proposto por Bjorhovde et al. (1990), apresentado nas subseções 2.1.4 e 4.2.1, para a modelagem das conexões semi-rígidas.

Portanto as análises plástica limite e de *shakedown* para o pórtico da figura 5.1 são procedidas para diferentes graus de flexibilidade da conexão, definidos pela relação  $M_c/M_p$ , onde  $M_c$  é o momento resistente da conexão e  $M_p$  o momento de plastificação da barra conectada. A tabela 5.1 apresenta os resultados obtidos para as cargas de colapso e de *shakedown*, comparando-se os mesmos com os resultados retirados do gráfico de Tin-Loi & Vimonsatit (1993). No presente estudo os valores encontrados através do PL malha-cinemático são iguais aos do PL nodal-estático. Tin-Loi & Vimonsatit (1993) consideraram as barras extensíveis e afirmaram que, neste caso, a influência do esforço normal nas condições de plastificação pode ser desprezada.

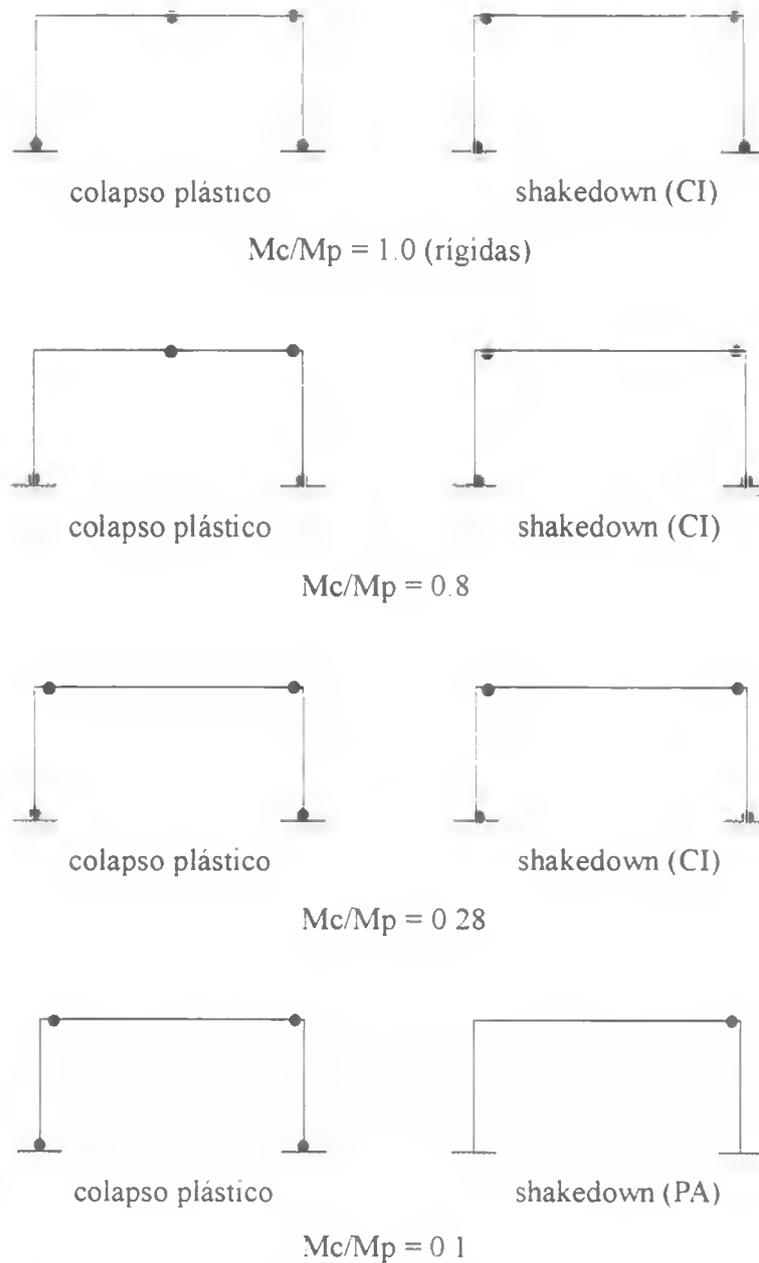
**Tab. 5.1** Comparação de resultados - exemplo 1

$M_c/M_p$	Tin-Loi & Vimonsatit (1993)		Presente estudo		
	$\gamma_c$	$\gamma_s$	$\gamma_c$	$\gamma_s$	$(\gamma_c - \gamma_s)/\gamma_c$
0.0	3.4	3.4	3.33	3.33	0%
0.01	3.4	1.8	3.37	1.82	46%
0.1	3.7	2.4	3.67	2.53	31%
0.28	4.3	3.7	4.27	3.73	13%
0.5	5.1	4.3	5.00	4.28	14%
0.8	5.6	5.0	5.60	5.06	10%
1.0	6.0	5.5	6.00	5.56	7%

$\gamma_c$  = fator de carga de colapso plástico,  $\gamma_s$  = fator de carga de *shakedown*

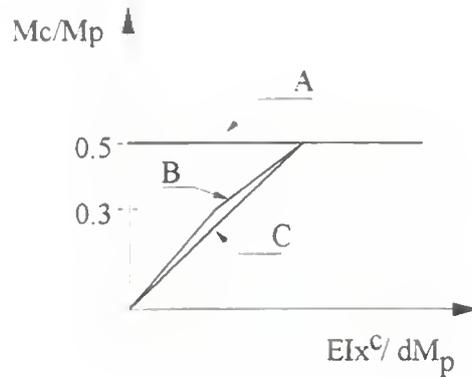
Observa-se a boa concordância encontrada entre os resultados do presente estudo e os de Tin-Loi & Vimonsatit (1993). Como a carga de colapso plástico não depende das características elásticas da estrutura, a sua variação, no caso presente, é consequência da redução do momento de plastificação da conexão definida por  $M_c/M_p$ . Conforme destacado por Tin-Loi & Vimonsatit (1993), a diferença entre  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  aumenta para valores de  $M_c/M_p$  inferiores a 0.28, até que  $M_c/M_p$  seja igual a zero (rótula), caso em que a carga de colapso e a de *shakedown* são idênticas. Verifica-se ainda que, neste intervalo de  $M_c/M_p$ , o colapso ocorre por plasticidade alternada (PA). Para conexões mais rígidas, faixa de  $0.28M_p$  a  $M_p$ , o colapso passa a ser causado por um mecanismo de colapso incremental (CI).

A figura 5.2 mostra as rótulas plásticas formadas para as cargas de colapso plástico e de *shakedown*, considerando algumas conexões rígidas e semi-rígidas. Nota-se que o mecanismo de colapso plástico não é necessariamente igual ao mecanismo de *shakedown*, para um mesmo  $M_c/M_p$ . Da mesma forma, para diferentes  $M_c/M_p$  os mecanismos de colapso plástico podem ser diferentes.



**Fig. 5.2** Rótulas plásticas formadas no colapso plástico e no *shakedown* - exemplo 1

Estuda-se ainda, no contexto do presente exemplo, o efeito da modelagem da fase elástica da conexão na carga de *shakedown*. Para isto três modelagens para as conexões vigapilar, mostradas na figura 5.3, são consideradas: rígido-perfeitamente plástico (tipo A) e elástico-perfeitamente plástico (tipos B e C). A fase elástica da conexão B é modelada em dois trechos lineares, utilizando-se os PCLs apresentados na seção 4.3 para a determinação da envoltória dos esforços elásticos  $X_E$ . Os PLs para determinação de  $\gamma_S$  não se alteram, devendo-se apenas considerar o vetor  $X_E$  calculado para cada caso



**Fig. 5.3** Modelagem das conexões viga-pilar - exemplo 1

A tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos para cada tipo de conexão viga-pilar utilizada. Observa-se que a consideração da não-linearidade da fase elástica (conexão tipo B) pode alterar o fator de carga de *shakedown*. Ainda, a consideração de conexão rígida, com o momento resistente reduzido, fornece um valor de  $\gamma_s$  conservativo em relação às conexões semi-rígidas

**Tab. 5.2** *Shakedown* para as conexões da figura 5.3 - exemplo 1

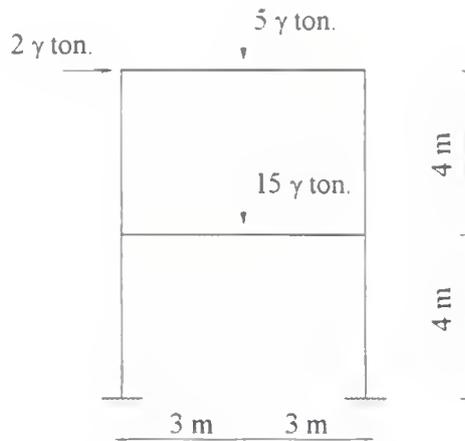
Fator de carga <i>shakedown</i>	Conexões viga-pilar		
	Tipo A	Tipo B	Tipo C
$\gamma_s$	4.17	4.21	4.28

### Exemplo 2

Considera-se o pórtico da figura 5.4, conforme apresentado por Vimonsatit (1995), com as seguintes propriedades, onde  $M_p$  é o momento de plastificação da barra:

- Pilares inferiores:  $E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $A = 66.7 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $I = 118.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 20 \text{ tm}$ .
- Viga inferior:  $E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $A = 86 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $I = 245.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 30 \text{ tm}$ ,  $d = 0.4 \text{ m}$ .
- Viga e pilares superiores:  $E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $A = 49.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $I = 85.2 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 10 \text{ tm}$ ,  $d = 0.3 \text{ m}$ .

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto no ponto de aplicação das cargas verticais. A plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico.



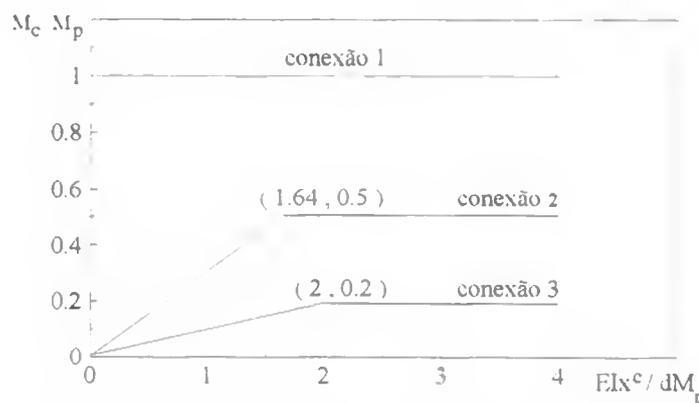
**Fig. 5.4** Pórtico - exemplo 2 (Vimonsatit, 1995)

A figura 5.5 apresenta os tipos de conexões utilizadas nas vigas, enquanto que as conexões dos pilares são sempre rígidas. A modelagem das conexões semi-rígidas fornecida por Vimonsatit (1995) utiliza o sistema de classificação de conexões proposto por Bjorhovde et al. (1990), apresentado nas subseções 2.1.4 e 4.2.1, e constitui uma estimativa do comportamento real da conexão. As características das conexões semi-rígidas da figura 5.5 são:

- conexão 2:  $M_c/M_p = 0.5$ ,  $1/\mu = 0.305$ ,

- conexão 3:  $M_c/M_p = 0.2$ ,  $1/\mu = 0.10$ ,

onde  $M_c$  é o momento resistente da conexão,  $M_p$  é o momento de plastificação da barra conectada e  $1/\mu$  é a inclinação inicial da curva. Vale mencionar que uma análise elastoplástica completa deste pórtico foi apresentada no exemplo 3 do Capítulo 4



**Fig. 5.5** Tipos de conexões viga-pilar - exemplo 2

Portanto, as análises plástica limite e de *shakedown* para o pórtico da figura 5.4 são procedidas para os seguintes casos: conexões rígidas (tipo 1); conexões viga-pilar tipo 2; conexões viga-pilar tipo 3. A tabela 5.3 apresenta os resultados obtidos para os fatores de carga de colapso plástico e de *shakedown*, sendo os mesmos comparados com os fornecidos por Vimonsatit (1995), que considerou a interação do momento fletor com o esforço normal para a plastificação dos pilares, e para as vigas apenas o momento fletor. Observa-se, pela diferença de no máximo 1% encontrada entre os resultados comparados, que a consideração do efeito do esforço normal na plastificação dos pilares, neste caso, parece não ser necessária.

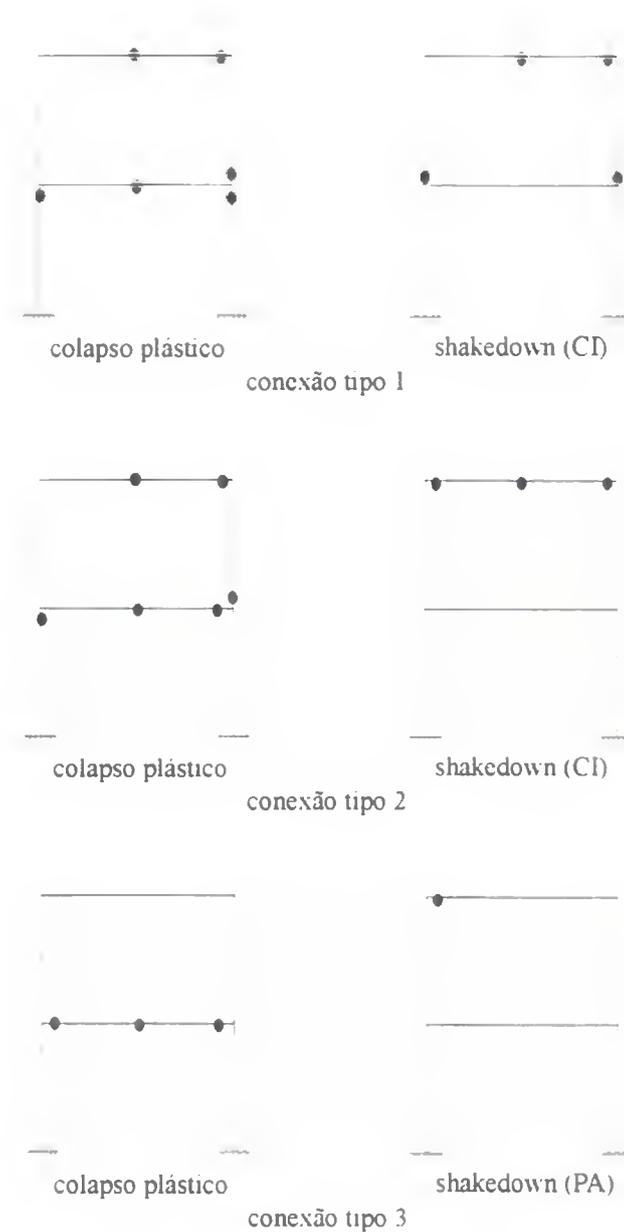
**Tab. 5.3** Comparação de resultados - exemplo 2

Conexão	Vimonsatit (1995)		Presente estudo		
	$\gamma_c$	$\gamma_s$	$\gamma_c$	$\gamma_s$	$(\gamma_c - \gamma_s) / \gamma_c$
tipo 1	2.353	2.229	2.332	2.212	5%
tipo 2	1.985	1.788	1.968	1.771	10%
tipo 3	1.600	1.208	1.584	1.198	24%

$\gamma_c$  = fator de carga de colapso plástico,  $\gamma_s$  = fator de carga de *shakedown*

A variação na carga de colapso plástico de uma conexão para outra é provocada pela redução do momento de plastificação considerado para cada caso. A diferença entre  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  é maior para a conexão tipo 3, quando ocorre o colapso por plasticidade alternada, do que para as conexões tipos 1 e 2, quando se forma um mecanismo de colapso incremental.

A figura 5.6 mostra as rótulas plásticas presentes nos mecanismos de colapso plástico e de *shakedown*, para os três tipos de conexões. Nota-se que pórticos iguais, com conexões diferentes, podem formar mecanismos de colapso plástico e de *shakedown* distintos. Logo, a presença de conexões semi-rígidas altera tanto as cargas de colapso plástico e de *shakedown* quanto os mecanismos correspondentes.



**Fig. 5.6** Rótulas plásticas formadas no colapso plástico e no *shakedown* - exemplo 2

A tabela 5.4 apresenta a comparação entre o fator de carga de *shakedown* considerando-se as conexões tipos 2 e 3, sendo a rigidez definida através da figura 5.5, e este fator de carga assumindo as conexões como rígidas, porém com o mesmo momento de plastificação das anteriores. Observa-se que quando o colapso ocorre por plasticidade alternada a consideração da flexibilidade da conexão aumenta consideravelmente o valor de  $\gamma_s$ , enquanto para o caso de colapso incremental os valores praticamente coincidem.

**Tab. 5.4** Comparação da carga de *shakedown* para k real e k rígido - exemplo 2

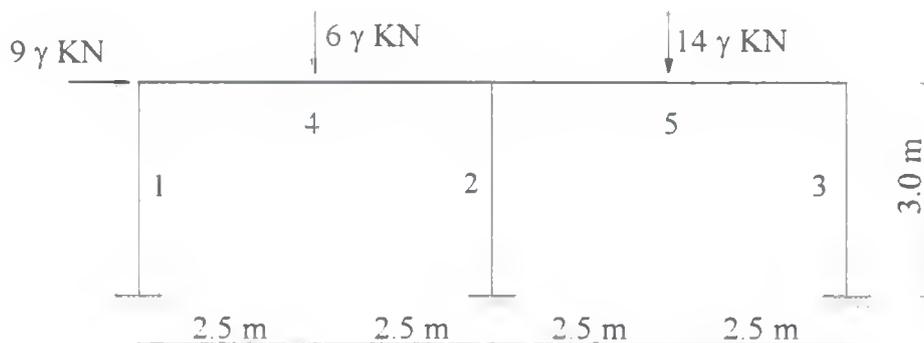
Conexão	k real		k rígido		$(\gamma_{real} - \gamma_{rig}) / \gamma_{real}$
	$\gamma_s$	tipo colapso	$\gamma_s$	tipo colapso	
tipo 2	1.771	CI	1.765	CI	0.34%
tipo 3	1.198	PA	0.786	PA	34.4%

$\gamma_s$  = fator de carga de *shakedown*, CI = colapso incremental, PA = plasticidade alternada.

### Exemplo 3

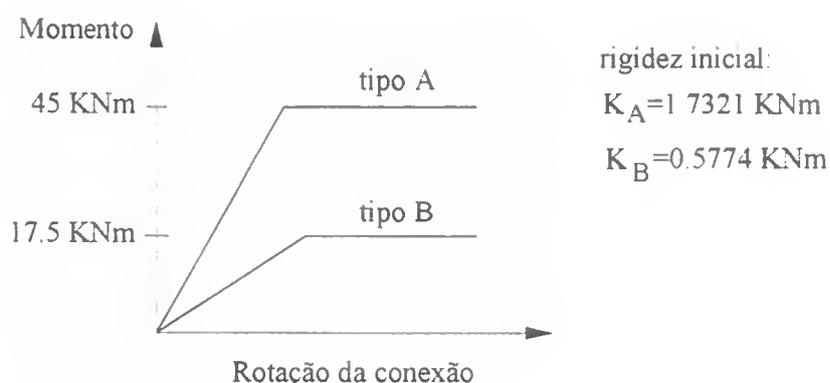
Considera-se o pórtico da figura 5.7, originalmente apresentado por Borkowski (1988), com as seguintes propriedades, onde  $M_p$  é o momento de plastificação da barra:

- Pilares externos (barras 1 e 3):  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$ ,  $I = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 45 \text{ KNm}$ .
- Pilar interno (barra 2):  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$ ,  $I = 0.5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 17.5 \text{ KNm}$ .
- Vigas (barras 4 e 5):  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ KN/m}^2$ ,  $I = 4.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $M_p = 78 \text{ KNm}$ .



**Fig. 5.7** Pórtico - exemplo 3 (Borkowski, 1988)

Os pilares e vigas são considerados inextensíveis e apresentam um comportamento elástico-perfeitamente plástico, sendo possível a ocorrência de plastificação tanto nas conexões quanto no ponto de aplicação das cargas verticais. A plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico. A figura 5.8 apresenta os dois tipos de conexões semi-rígidas utilizadas nas vigas, enquanto que as conexões dos pilares são sempre rígidas. Assim, as análises plástica limite e de *shakedown* do pórtico da figura 5.7 são efetuadas para os seguintes casos: conexões rígidas; conexões viga-pilar tipo A, conexões viga-pilar tipo B; conexões viga-pilar tipo B para viga 4, e tipo A para viga 5. Vale mencionar que a análise elastoplástica deste pórtico foi anteriormente apresentada no exemplo 2 do Capítulo 4.



**Fig. 5.8** Tipos de conexões semi-rígidas das vigas - exemplo 3

A tabela 5.5 apresenta os resultados obtidos nas análises plástica limite e de *shakedown*. Conforme esperado,  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  são menores para os pórticos com conexões mais flexíveis pois estas apresentam um momento de plastificação inferior ao da conexão rígida. A pequena diferença entre  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  para os casos estudados, de no máximo 9%, pode ser explicada pela formação de um mecanismo de colapso incremental no *shakedown*, como já observado nos exemplos 1 e 2.

**Tab. 5.5** Comparação de resultados - exemplo 3

Conexão	$\gamma_c$	$\gamma_s$	tipo colapso	$(\gamma_c - \gamma_s) / \gamma_c$
rígida	7.685	7.011	CI	9%
tipo A	7.029	6.435	CI	8%
tipo B	5.379	5.148	CI	4%
tipos A e B	6.266	5.961	CI	5%

$\gamma_c$  = fator de carga de colapso plástico,  $\gamma_s$  = fator de carga de *shakedown*, CI = colapso incremental.

A figura 5.9 mostra as rótulas plásticas presentes nos mecanismos de colapso plástico e de *shakedown*, para as conexões estudadas. Observa-se que, para o mesmo tipo de conexão, o mecanismo de colapso plástico não é obrigatoriamente igual ao mecanismo de colapso incremental.

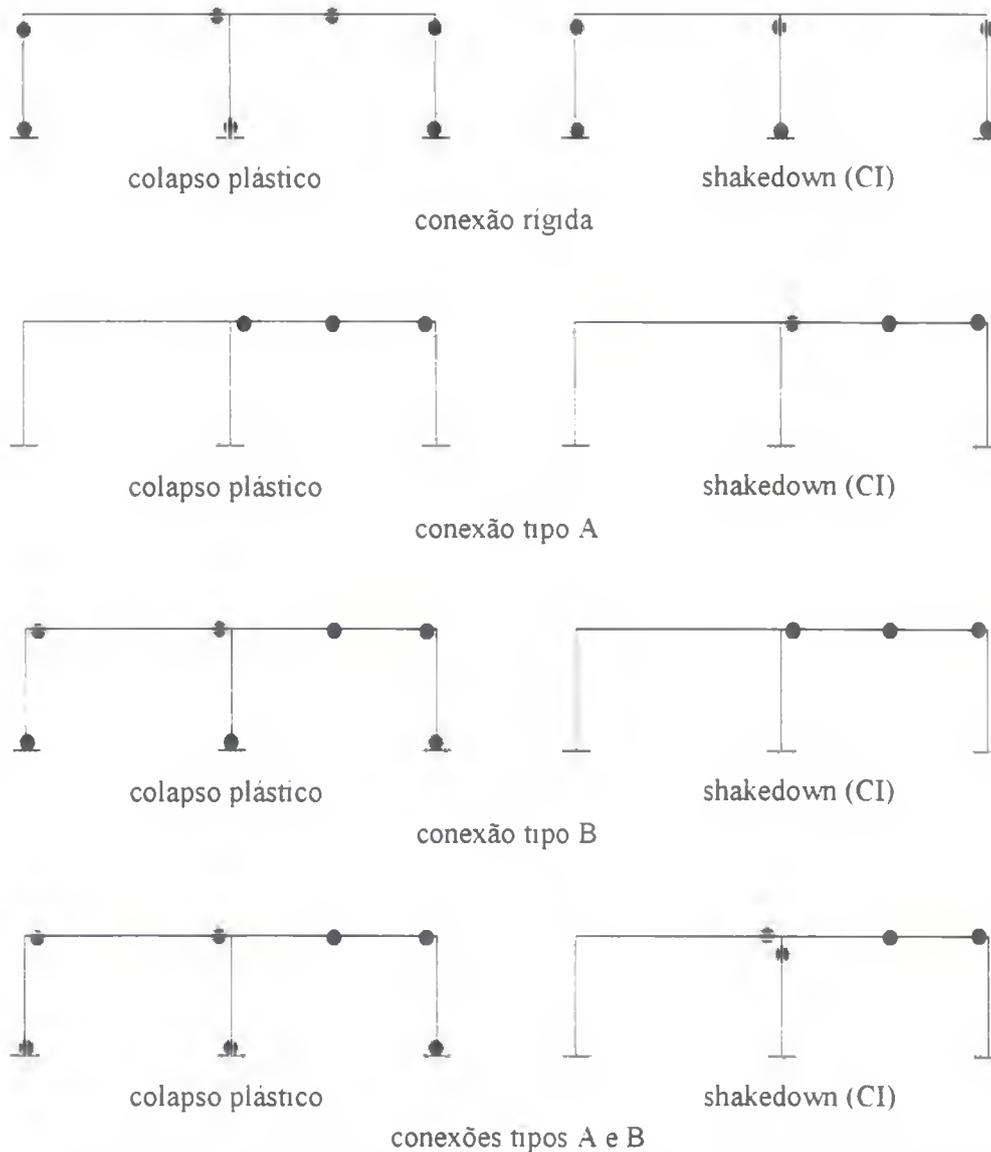


Fig. 5.9 Rótulas plásticas formadas no colapso plástico e no *shakedown* - exemplo 3

A tabela 5.6 apresenta a comparação entre o fator de carga de *shakedown* considerando-se as conexões semi-rígidas, sendo a rigidez definida através da figura 5.8, e este fator de carga assumindo as conexões como rígidas, porém com o mesmo momento de plastificação das anteriores. Percebe-se que para a conexão tipo A, mais rígida, ocorre o colapso incremental em ambos os casos e os valores de  $\gamma_s$  praticamente coincidem. Nos outros dois casos, quando as conexões são mais flexíveis, as diferenças são significativas alterando inclusive o mecanismo de colapso incremental para plasticidade alternada, demonstrando que a não consideração da flexibilidade inicial das conexões produz resultados bastante conservativos.

**Tab. 5.6** Comparação da carga de *shakedown* para k real e k rígido - exemplo 3

Conexão	k real		k rígido		$(\gamma_{real} - \gamma_{rig}) / \gamma_{real}$
	$\gamma_s$	tipo colapso	$\gamma_s$	tipo colapso	
tipo A	6.435	CI	6.221	CI	3.3%
tipo B	5.148	CI	3.263	PA	36.6%
tipos A e B	5.961	CI	3.636	PA	39.0%

$\gamma_s$  = fator de carga de *shakedown*, CI = colapso incremental, PA = plasticidade alternada.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 6.1 CONCLUSÕES

Apresentam-se a seguir as conclusões e comentários sobre a pesquisa realizada e os resultados obtidos no presente trabalho.

- A literatura pesquisada mostra que a maioria das conexões têm rigidezes intermediárias entre as apresentadas pelas conexões totalmente rígidas e pelas rotuladas. Estas conexões, chamadas de semi-rígidas, possuem um comportamento não-linear em toda a faixa de carregamento.

- Os resultados obtidos no presente estudo foram comparados aos disponíveis na literatura, comprovando a validade das formulações desenvolvidas.

- A consideração de conexões semi-rígidas em pórticos sem travamento mostra que quanto mais flexível for a conexão maior será o deslocamento horizontal desenvolvido, para um mesmo nível de carregamento.

- Os pórticos contraventados estudados, para a faixa de carregamento considerada, apresentam o mesmo comportamento independentemente da flexibilidade da conexão. Nestes casos uma análise linear elástica, considerando as conexões como rígidas, seria suficiente. Além disso, a inclusão do travamento reduz consideravelmente o deslocamento horizontal, em relação ao deslocamento apresentado pelo pórtico não contraventado com conexões rígidas ou semi-rígidas.

- A consideração de conexões semi-rígidas altera a distribuição dos esforços no pórtico. No caso das vigas do pórtico, o aumento da flexibilidade das conexões provoca a redução do momento fletor nas extremidades e o seu aumento no vão da viga. Porém, o maior momento fletor, em módulo, encontrado nas vigas de pórtico, não é necessariamente reduzido com o aumento da flexibilidade das conexões. Para os casos estudados, não é possível prever se a utilização de conexões semi-rígidas conduzirá a vigas de pórtico mais leves, como

observado nas vigas isoladas. Contudo, o conhecimento da distribuição dos esforços em um pórtico com conexões semi-rígidas é fundamental para o seu correto dimensionamento.

- Para pórticos sujeitos a cargas de serviço uma análise linear elástica, considerando apenas a rigidez inicial da conexão semi-rígida é, em geral, suficiente. Além disso, esta análise linear elástica fornece uma melhor modelagem do comportamento do sistema estrutural, em relação à consideração usual de conexões rígidas, qualquer que seja o nível de carregamento considerado.

- O sistema de classificação de conexões proposto por Bjorhovde et al. (1990), e utilizado em parte do presente trabalho, mostrou-se válido para a estimativa do comportamento de uma conexão semi-rígida, como mostrado nos exemplos 6 e 8 do Capítulo 4.

- O momento fletor máximo que uma conexão semi-rígida consegue transmitir decresce com o aumento da sua flexibilidade. Assim, a carga de colapso plástico e de *shakedown* de um pórtico são reduzidas em consequência da diminuição do momento de plastificação das conexões semi-rígidas

- A diferença entre o fator de carga de colapso plástico e o de *shakedown* de um mesmo pórtico é maior para conexões mais flexíveis, com momentos de plastificação menores, caso em que o colapso normalmente ocorre por plasticidade alternada. Para conexões mais rígidas, a diferença entre os fatores citados decresce e, em geral, um mecanismo de colapso incremental é mobilizado.

- Para o mesmo momento de plastificação, considerando-se a conexão rígida e a semi-rígida, observa-se que o fator de carga de *shakedown* obtido é maior quando se utiliza a rigidez inicial da conexão. Quando ocorre o colapso incremental a diferença entre os valores obtidos é pequena, mas aumenta consideravelmente quando o colapso é por plasticidade alternada.

- Para uma mesma conexão, o mecanismo de colapso plástico não é necessariamente igual ao mecanismo de *shakedown*. Da mesma forma, pórticos iguais com conexões semi-rígidas diferentes podem formar mecanismos de colapso plástico distintos.

- O fator de carga de *shakedown* pode ser alterado com a consideração da não-linearidade da fase elástica da conexão. Desta forma, uma aproximação em trechos lineares da fase elástica conduz a uma melhor modelagem do comportamento da conexão.

- O algoritmo utilizado na análise elastoplástica é aplicável para modelagens da curva momento-rotação da conexão em um ou mais trechos lineares, sendo possível considerar a

plastificação tanto nas conexões quanto em pontos internos das barras onde exista carga aplicada. O fenômeno da descarga plástica também pode ser considerado em todas as seções críticas. Neste trabalho a plastificação é causada apenas pelo momento fletor atuante no pórtico, entretanto os PCLs e PCLPs obtidos no Capítulo 4 são válidos para a consideração de interação de esforços na plastificação.

- Foram apresentados os PCLs e PCLPs para análise elastoplástica nas quatro formulações: malha-flexibilidade, nodal-rigidez, malha-rigidez e nodal-flexibilidade. Para a análise plástica limite e de *shakedown* as formulações utilizadas foram: malha-estático, malha-cinemático, nodal-estático e nodal-cinemático. Qualquer uma das formulações pode ser utilizada escolhendo-se a mais conveniente, considerando fatores como facilidade de automação e menor tamanho de *tableau*.

## 6.2 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

A partir do trabalho desenvolvido apresentam-se a seguir algumas sugestões e considerações para pesquisas futuras.

- Inclusão dos efeitos de não-linearidade geométrica e instabilidade na análise de pórticos planos com conexões semi-rígidas, pois a literatura indica que o aumento do deslocamento do pórtico pode intensificar estes efeitos.

- Consideração de carregamentos cíclicos, aplicados estaticamente, e de excitações dinâmicas na análise de pórticos planos com conexões semi-rígidas.

- Consideração dos efeitos dos esforços axiais e cisalhantes, e das deformações correspondentes, na modelagem da conexão semi-rígida.

- Utilização da curva momento-rotação experimental da conexão semi-rígida em substituição ao modelo linearizado considerado no presente trabalho.

- Consideração de encruamento na relação elastoplástica utilizada na análise de *shakedown* de pórticos planos com conexões semi-rígidas.

- Determinação do projeto de mínimo peso para pórticos planos com conexões semi-rígidas.

- Estudo de pórticos espaciais com conexões semi-rígidas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdalla, K. M. & Chen, W. F., Expanded database of semi-rigid steel connections, *Computers & Structures*, **56**(4), 553-564 (1995).
- Al-Bermani, F. G. A. & Kitipornchai, S., Elastoplastic nonlinear analysis of flexibly jointed space frames, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **118**(1), 108-127 (1992).
- Appleton, J. A. S., *Elastoplastic Analysis of Skeletal Structures by Mathematical Programming*, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, Imperial College, University of London (1979).
- Appleton, J. A. S. & Smith, D. L., Análise elastoplástica de estruturas via programação matemática, *Proceedings of the 2nd National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Lisboa (1979).
- Bjorhovde, R., Colson, A. & Brozzetti, J., Classification system for beam-to-column connections, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **116**(11), 3059-3076 (1990).
- Borkowski, A., *Analysis of Skeletal Structural Systems in the Elastic and Elastic-Plastic Range*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, chapter 7, 152-176 (1988).
- Brandão, L. R., *Métodos Computacionais para Análise Elástica e Plástica de Pórticos Planos*, Projeto final, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF (1994).
- Gerstle, K. H. & Cook, N. E., Simplicity in flexibly-connected frame analysis, *Connections in Steel Structures: Behaviour, Strength and Design*, ed. R. Bjorhovde, J. Brozzetti and A. Colson, Elsevier Applied Science Publishers, London, 300-308 (1988).
- Horne, M. R., *Plastic Theory of Structures*, Pergamon Press, Oxford (1979).
- Jones, S. W., Kirby, P. A. & Nethercot, D. A., Effect of semi-rigid connections on steel column strength, *Journal of Constructional Steel Research*, **1**(1), 38-46 (1980).
- Jones, S. W., Kirby, P. A. & Nethercot, D. A., The analysis of frames with semi-rigid connections - a state-of-the-art report, *Journal of Constructional Steel Research*, **3**(2), 2-13 (1983).
- Kaliszky, S., The analysis of structures with conditional joints, *Journal of Structural Mechanics*, **6**(2), 195-210 (1978).
- Kirby, P. A., Davison, J. B. & Nethercot, D. A., Large scale tests on column subassemblages and frames. *Connections in Steel Structures: Behaviour, Strength and Design*, ed. R. Bjorhovde, J. Brozzetti and A. Colson, Elsevier Applied Science Publishers, London, 291-299 (1988).

- Li, T. Q., Choo, B. S. & Nethercot, D. A., Connection element method for the analysis of semi-rigid frames, *Journal of Constructional Steel Research*, **32**, 143-171 (1995).
- Liew, J. Y. R., White, D. W. & Chen, W. F., Limit states design of semi-rigid frames using advanced analysis - part 1. connection modeling and classification, *Journal of Constructional Steel Research*, **26**, 1-27 (1993a).
- Liew, J. Y. R., White, D. W. & Chen, W. F., Limit states design of semi-rigid frames using advanced analysis - part 2: analysis and design, *Journal of Constructional Steel Research*, **26**, 29-57 (1993b).
- Lindsey, S. D., Practical considerations in the design of frames with PR connections, *Connections in Steel Structures: Behaviour, Strength and Design*, ed. R. Bjorhovde, J. Brozzetti and A. Colson, Elsevier Applied Science Publishers, London, 339-342 (1988).
- Lorenz, R. F., Kato, B. & Chen, W. F. (eds.), *Semi-Rigid Connections in Steel Frames*, McGraw-Hill, USA (1993).
- Lui, E. M. & Chen, W. F., Analysis and behaviour of flexibly-jointed frames, *Engineering Structures*, **8**, 107-118 (1986).
- Lui, E. M. & Chen, W. F., Steel frame analysis with flexible joints, *Journal of Constructional Steel Research*, **8**, 161-202 (1987).
- Lui, E. M. & Chen, W. F., Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames, *International Journal of Solids and Structures*, **24**(9), 893-913 (1988).
- Maier, G., Shakedown analysis, *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, ed. M. Z. Cohn and G. Maier, Pergamon Press, New York, chapter 6, 107-134 (1979).
- Maier, G., Mathematical programming applications to structural mechanics: some introductory thoughts, *Engineering Structures*, **6**, 2-6 (1984).
- Maier, G. & Munro, J., Mathematical programming applications to engineering plastic analysis, *Applied Mechanics Reviews*, **35**, 1631-1643 (1982).
- Mello, E. L. & Sahlit, C. L., *Análise Elástica e Elastoplástica das Estruturas*, Apostilas do Curso de Extensão em Engenharia Civil, UnB, Brasília (1983).
- Mohamed, S. E. & Simitse, G. J., Stability and collapse of semirigidly connected portal frames, *Journal of Aerospace Engineering, ASCE*, **3**(1), 46-63 (1990).
- Mohamed, S. E. & Simitse, G. J., Stability and strength of rigid and semirigid plane frameworks, *Journal of Aerospace Engineering, ASCE*, **6**(2), 186-198 (1993).
- Moncarz, P. D. & Gerstle, K. H., Steel frames with nonlinear connections, *Journal of the Structural Division, ASCE*, **107**(ST8), 1427-1441 (1981).

- Neal, B. G., *The Plastic Methods of Structural Analysis*, Chapman and Hall, London (1977).
- Osman, A., Ghobarah, A. & Korol, R. M., Seismic performance of moment resisting frames with flexible joints, *Engineering Structures*, **15**(2), 117-134 (1993).
- Paula, V. F., *Otimização e Segurança de Estruturas Metálicas Submetidas a Carregamentos Estáticos*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF (1995).
- Poggi, C., A finite element model for the analysis of flexibly connected steel frames, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 2239-2254 (1988).
- Rodrigues, F. C., *Previsão do Comportamento de Pórticos Planos Metálicos com Ligações Semi-rígidas*, 3º Seminário de Doutorado, Programa de Engenharia Civil - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ (1991).
- Rodrigues, F. C., Saldanha, A. C. & Pfeil, M. S., Análise não-linear do comportamento de pórticos planos metálicos com ligações semi-rígidas, *Anais do XV Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia (XV CILAMCE)*, Belo Horizonte, Brasil, 1512-1521 (1994).
- Rodrigues, F. C., Saldanha, A. C. & Pfeil, M. S., Análise não-linear do comportamento de pórticos planos metálicos contraventados e não contraventados, com ligações semi-rígidas, *XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, Tucumán, Argentina, 403-414 (1995).
- Sahlit, C. L., *Mathematical Programming Methods for Dynamically Loaded Rigid-Plastic Framed Structures*, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, Imperial College, University of London (1992).
- Smith, D. L., *Plastic Limit Analysis and Synthesis of Structures by Linear Programming*, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, Imperial College, University of London (1974).
- Smith, D. L., The Wolfe-Markowitz algorithm for nonholonomic elastoplastic analysis, *Engineering Structures*, **1**, 8-16 (1978).
- Smith, D. L., *Direct Stiffness Method for Elastoplastic Analysis*, Notes of the International Short Course on the Nonlinear Analysis and Synthesis of Structures, University of Jordan (1983).
- Smith, D. L., Quadratic programs and complementarity, *Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D. Lloyd Smith, Springer-Verlag, Vienna, chapter 3, 37-46 (1990a).
- Smith, D. L., Statics and kinematics, *Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D. Lloyd Smith, Springer-Verlag, Vienna, chapter 4, 47-60 (1990b).

- Smith, D. L., Plastic limit analysis, *Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D. Lloyd Smith, Springer-Verlag, Vienna, chapter 5, 61-82 (1990c).
- Stelmack, T. W., Marley, M. J. & Gerstle, K. H., Analysis and tests of flexibly connected steel frames, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **112**(7), 1573-1588 (1986).
- Teixeira de Freitas, J. A., Piecewise-Linear Elastic-Plastic Stress-Strain Relations, *Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D. Lloyd Smith, Springer-Verlag, Vienna, chapter 6, 83-114 (1990).
- Tin-Loi, F. & Vimonsatit, V., Shakedown of frames with semirigid connections, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **119**(6), 1694-1711 (1993).
- Vimonsatit, V., *Cyclic Behaviour of Flexibly Connected Frames*, Ph.D. thesis, The University of New South Wales, Sydney, Australia (1995).
- Wang, C. K., *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, chapter 20, 721-741 (1983).
- Wu, F. H. & Chen, W. F., A design model for semi-rigid connections, *Engineering Structures*, **12**, 88-97 (1990).
- Yu, C. H. & Liew, J. Y. R., Design of low-rise steel building frames considering semi-rigid joint actions, *Steel Structures*, **5**(1), 71-83 (1994).
- Yu, C. H. & Shanmugam, N. E., Stability of semi-rigid space frames. *Computers & Structures*, **28**(1), 85-91 (1988).
- Xu, L. & Grierson, D. E., Computer-automated design of semirigid steel frameworks, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **119**(6), 1740-1760 (1993)