Universidade de Brasília
Instituto de Física

Covariância Galileana e Representações de Spin 1/2

Gustavo Xavier Antunes Pretronilo

Universidade de Brasília
Instituto de Física

Covariância Galileana e Representações de Spin 1/2

Gustavo Xavier Antunes Petronilo

Orientador:Dr. Prof. Ademir Eugênio Santana

Coorientador:Dr. Prof. Sérgio Ulhoa

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças para finalizar mais uma etapa importante da minha vida.

Agradeço também ao meu orientador, o Dr. Prof. Ademir Eugênio Santana e coorientador Dr. Prof. Sérgio Ulhoa Costa, por terem me guiado com este tema, me ensinado os conceitos e fenômenos físicos, também por terem sido grandes amigos me ajudando em minhas dificuldades tanto acadêmicas como pessoais. Por terem se mostrado exemplos de pessoas a serem seguido. Obrigado por tudo.

Agradeço aos meus colegas e professores que me ajudaram durante o processo de escrita deste trabalho. Cito aqui alguns que foram os que acompanharam de perto esta minha luta: Rendisley Aristoteles, Kayo Vaz, Obrigado!

Dedico essa conquista à minha família: aos meus pais, João Petronilo Filho e Gildete Xavier Antunes Petronilo, e aos meus irmãos Gabriela, Gadiel e Gabriel, que sempre estiveram comigo e me incentivaram a continuar. Agradeço pelo carinho, apoio, amor e paciência que tiveram comigo.

“Só através da ciência podemos ser seres infinitos!”

-Rendisley Aristóteles Paiva

Resumo

Nesta dissertação, explorando o conceito do grupo estendido Galilei, uma representação para a mecânica quântica simplética na variedade $\mathcal{G}$ é derivada consistentemente com o método da função Wigner. Um espaço de Hilbert é construído dotado de uma estrutura simplética, estudando operadores unitários descrevendo rotações e translações, cujos geradores satisfazem a álgebra de Lie em $\mathcal{G}$. Essa representação dá origem à equação de Schrödinger (tipo Klein-Gordon) para as funções no espaço de fase, de tal forma que as variáveis tragam informações de posição e momento linear. As funções de onda estão associadas à função de Wigner através do produto de Moyal, de forma que as funções de onda representam uma quase-amplitude de probabilidade. Nós construímos a equação de Pauli-Schrödinger no espaço de fase em sua forma explicitamente covariante (tipo Dirac). Finalmente, mostramos a equivalência entre o formalismo de cinco dimensões do espaço de fase com o formalismo usual, propondo uma solução que recupera a forma usual (não covariante) da equação de Pauli-Schrödinger no espaço de fase.

Palavras-chave: Covariância Galileana, Produto-estrela, Espaço de Fase, Estrutura Simplética

Abstract

In this work, exploring the concept of the extended Galilei group, a representation for the symplectic quantum mechanics in the manifold $\mathcal{G}$ is derived consistently with the method of the Wigner function. A Hilbert space is constructed endowed with a symplectic structure, studying unitary operators describing rotations and translations, whose generators satisfy the Lie algebra in $\mathcal{G}$. This representation gives rise to the Schrödinger (Klein-Gordon-like) equation for the wave functions in phase space, such that the variables have the position and linear momentum contents.Wave functions are associated with the Wigner function through the Moyal product, such that the wave functions represent a quasi-amplitude of probability. We construct the Pauli-Schrödinger (Dirac-like) equation in phase-space in its explicitly covariant form. Finally, we show the equivalence between the five dimensional formalism of phase-space with the usual formalism, proposing a solution that recover the usual (non-covariant) form of the Pauli-Schrödinger equation in phase-space.

Key words: Galilean Covariance, Star-product, Phase-space, Symplectic Structure

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O estudo sistemático das representações unitárias do grupo de Poincaré inicia-se com o trabalho de Wigner de 1939 [1], resultando em um desenvolvimento inédito para a física, e em particular para a mecânica quântica relativística. Dentro deste contexto, são as simetrias do espaço tempo que essencialmente definem a estrutura e a dinâmica do sistema mecânico, sendo que a cada partícula elementar está associada uma representação irredutível do grupo de Poincaré.

Em 1988, Takahashi et. al. [2] iniciaram um estudo de covariância galileana, onde foi possível desenvolver uma teoria de campo não relativística explicitamente covariante. Com esse formalismo, a equação Schrödinger assume uma forma similar a Klein-Gordon [3, 4]. Com o advento da covariância galileana, foi possível criar a versão não-relativística da teoria de Dirac, que é conhecida em sua forma usual como a equação de Pauli-Schrödinger. Um objetivo básico do presente trabalho é derivar uma representação Wigner para essa teoria covariante.

A primeira tentativa, conhecida, de uma formulação da mecânica quântica no espaço de fase foi proposta por Dirac, em 1930[5], porém não obteve-se uma conexão de seu formalismo com a mecânica clássica. A distribuição de quasi-probabilidade de Wigner (também chamada de função Wigner ou a distribuição de Wigner-Ville em homenagem a Eugene Wigner e Jean-André Ville) foi introduzida por Eugene Wigner em 1932 [6] para estudar correções quânticas para mecânica estatística clássica. O objetivo era relacionar a função de onda que aparece na equação de Schrödinger a uma distribuição de probabilidade no espaço de fase. É uma função geradora para todas as funções de autocorrelação espacial de uma dada função de onda da mecânica quântica $\psi(x)$.Assim, mapeia a matriz de densidade quântica no mapa entre funções reais do espaço de fase e operadores hermitianos introduzidos por

Hermann Weyl em 1927 [7], em um contexto relacionado à teoria da representação em matemática (quantização de Weyl em física). De fato, esta é a transformação de Wigner-Weyl da matriz de densidade; daí a realização desse operador no espaço de fase. Mais tarde, foi re-derivado por Jean Ville em 1948 [8] como uma representação quadrática (em sinal) da energia do domínio de freqüência-tempo local de um sinal, efetivamente um espectrograma. Em 1949, José Enrique Moyal [9], que independentemente o derivou, reconheceu-o como o gerador funcional do momento quântico, e como base para uma elegante codificação de todos os valores esperados e, portanto, da mecânica quântica. Por meio do mapeamento do espaço de fase da mecânica hamiltoniana clássica em um espaço de fase quântico através da substituição das variáveis q e p, por operadores hermitianos $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$, respectivamente, que satisfazem a relação $[\widehat{Q},\widehat{P}] = i\hbar\mathbf{1}$, percebe-se que a noção de ponto é perdida e a constante de Planck, $\hbar$, limita o valor de uma área mínima no espaço de fase (células de Bohr). A noção de ponto é recuperada quando se toma o limite clássico, ou seja, $\hbar \to 0$.

Esse formalismo proposto por Wigner tem sido aplicado a várias áreas, como na física quântica, química quântica, processamento de informação quântica, eletrônica quântica e processamento de sinal[10]. Nesse formalismo, o sistema é descrito pela função de Wigner, $f_w(q,p)$, que originalmente foi criada com o intuito de ser uma função de distribuição no espaço de fase, mas, apesar de ser real e normalizada, pode tomar valores negativos, o que contraria o sentido usual da ideia de distribuição. Por esse motivo, ficou conhecida como função de quasi-distribuição. Outra característica é que as variáveis dinâmicas são representadas por funções no espaço de fase e não por operadores. No formalismo de Wigner, cada operador representado por A e definido em um espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, é associado a uma função no espaço de fase, Γ, denotada por $a_w(q,p)$[11]. Esta associação consiste na aplicação $\Omega_w : A \to a_w(q,p)$ de tal forma que, a álgebra associativa de operadores em $\mathcal{H}$ corresponde a uma álgebra associativa, porém, não-comutativa, em Γ. Assim, o produto de operadores, em $\mathcal{H}$, fica definido em Γ pelo produto de Moyal, também chamado de produto-estrela. O produto de dois operadores é, então, mapeado da seguinte forma $\Omega_w : AB \to a_w(q,p) \star b_w(q,p)$. Portanto, o produto-estrela no espaço corresponde ao produto de dois operadores no espaço de Hilbert e é dado por[11, 12]

$$a_w(q,p) \star b_w(q,p) = a_w(q,p) e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)} b_w(q,p).$$

Um fato importante a ser notado é que o produto acima pode ser visto como uma aplicação do operador $\widehat{A} = a_w\star$ atuando sobre a função b_w, ou seja $\widehat{A}(b_w) = a_w \star b_w$.

Utilizando o produto de Moyal, a função de Wigner obedece a uma equação análoga à de Liouville-von Neumann, com os parentêses de Moyal substituindo o comutador,

$$i\hbar\frac{\partial f_w(q,p)}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M = H_w \star f_w - f_w \star H_w.$$

Usando as propriedades do produto de Moyal, é possível construir problemas de autovalores dentro do formalismo de Wigner, sendo assim, considerado como uma descrição alternativa para a mecânica quântica de Schrödinger, de Heisenberg ou das integrais de caminho. Por outro lado, para se ter uma descrição completa de um sistema quântico no espaço de fase Γ é necessário resolver a equação de Schrödinger do problema, introduzir o operador densidade, e por fim determinar a função de Wigner. Este procedimento é bastante intricado, principalmente para sistemas não lineares ou sistemas quânticos relativísticos, pois a construção de simetrias de calibre ainda não é bem compreendida no formalismo, e também não é possível visualizar efeitos de superposição. Uma solução para essas dificuldades foi proposta por Oliveira *et al.* [13, 14]. Estudando as representações unitárias da álgebra de Lie do grupo de Galilei e utilizando a noção de estrutura simplética associada ao produto de Moyal, a função de Wigner é obtida por um caminho alternativo ao da equação de Liouville-von Neumann. Nesse formalismo, a equação de Schrödinger é deduzida de forma consistente.

À procura de resultados relativísticos, utilizando operadores do tipo $a_w\star$ para estudar representações unitárias do grupo de Poincaré, Amorim *et al.*[15, 16] mostrou como escrever as equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço fase.

A fim de derivar uma representação no espaço de fase para as partículas de spin 1/2 no formalismo da covariância galileana, utilizamos, nesse trabalho, uma representação simplética para o grupo estendido de Galilei, no cone de luz de um espaço-tempo de de Sitter em (4+1) dimensões, que está associada à abordagem de Wigner [14, 16, 17, 18, 19].

Nós procedemos como segue. Na seção 2 é apresentada a construção da Covariância Galileana. A equação Schrödinger (tipo Klein-Gordon) e a equação de Pauli-Schrödinger (tipo Dirac) são derivadas mostrando a equivalência entre nosso formalismo e o formalismo não-relativístico usual. Em 3 uma revisão do formalismo de Wigner é apresentado, mostrando as principais propriedades da função de Wigner. Também introduzimos o produto estrela e exploramos algumas de suas propriedades. Na Seção 4 uma estrutura simplética é construída na variedade Galileana. Usando as relações de comutação, a equação Schrödinger em cinco dimensões no espaço de fase é construída. Com uma solução proposta, a equação de Schrödinger no espaço de fase é restaurada para sua forma não-covariante em (3 + 1) dimensões. A equação de Pauli-Schrödinger explicitamente covariante é derivada na Seção 5. Estudamos a partícula galileana de spin 1/2 com potencial externo e soluções são propostas e discutidas. O problema de Landau é resolvido nesse formalismo e chegamos a sua solução em acordo com a literatura com a vantagem de obter a quebra de degenerescência de spin sem a necessidade de utilização de teorias de pertubação em um sistema não relativístico. Na Seção 6, as considerações finais são apresentadas.

Capítulo 2

Covariância Galileana

O objetivo deste capítulo é dedicado a construção de uma estrutura métrica associada com as simetrias galileanas em uma abordagem de cinco dimensões, tendo como base os trabalhos de Takahashi et. al. [3] e Santana et. al. [20, 4, 21, 22]. Neste capítulo a variedade $\mathcal{G}$ é definida. A álgebra de Lie dos geradores de transformações isométricas nesta variedade é deduzida. É mostrado algumas das imersões do espaço de de Sitter onde tais imersões são associadas a tipos de vetores de $\mathcal{G}$ com teorias relativísticas e não-relativísticas. A partir de vetores associados a invariância de Galilei, é identificada a álgebra do grupo de Galilei estendido $\tilde{G}_\xi$ como sub-álgebra em $\mathcal{G}$. São tratadas as representações unitárias irredutíveis de $\tilde{G}_\xi$ nesse contexto, são construída representações da mecânica quântica não-relativística de forma covariante.

2.1 A variedade Galileana $\mathcal{G}$

As transformações galileanas são dadas por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= R\boldsymbol{x} + \mathbf{v}t + \boldsymbol{a}, & (2.1) \\ t' &= t + b. & (2.2) \end{aligned}$$

onde R é uma rotação euclidiana tridimensional, v é a velocidade relativa que define os boosts de Galilei, a uma translação espacial e b uma translação temporal. No contexto da simetria galileana descrevendo processos de baixa velocidade, pode-se introduzir uma estrutura tensorial de espaço-tempo linear observando o seguinte. Na física não-relativística, a relação de dispersão de uma partícula livre é dada por $E = \mathbf{p}^2/2m$, onde E é a energia, p é o momento tridimensional e m é a massa. Esta relação de dispersão também pode ser escrita como

$$\mathbf{p}^2 - 2mE = 0. \tag{2.3}$$

Agora vamos considerar o observável físico que descreve o momento como uma quantidade composta por cinco entradas, ou seja, $(p_\mu) = (\mathbf{p}, p_4, p_5)$ onde $\mu = 1, ..., 5$; $\mathbf{p}$ denota o tri-momento, $p_4 = -E/c'$ é a energia e $p_5 = -c'm$ é a massa. Aqui c' é uma constante de velocidade e nós a tomaremos pela unidade, $c' = 1$. Usando esta notação e a fim de recuperar a Eq. (2.3), escrevemos uma relação de dispersão geral de cinco dimensões, isto é $p^\mu p_\mu = p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = \mathbf{p}^2 - 2p^4 p^5 = k^2$, onde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Isto é, tomado como um tensor métrico, que foi introduzido de diferentes maneiras na literatura.
Definindo um conjunto de coordenadas canônicas associadas a (p^μ), escrevemos $(q^\mu) = (\mathbf{q}, q^4, q^5)$, onde $\mathbf{q}$ é a coordenada canônica associada a $\mathbf{p}$; q^4 é a coordenada canônica associado a E, e assim pode ser considerado como a coordenada de tempo; q^5 é a coordenada canônica associada a m, que é explicitamente dada em termos de $\mathbf{q}$ e q^4. Podemos ver isso por $q^\mu q_\mu = q^\mu q^\nu g_{\mu\nu} = \mathbf{q}^2 - 2q^4 q^5 = S^2$. Desde $p^\mu p_\mu = 0$, temos que tomar $S^2 = 0$, assim $q^5 = \dfrac{\mathbf{q}^2}{2t}$; ou infinitesimalmente, obtemos $\delta q^5 = \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{q}$. Portanto, o quinto componente é basicamente definido pela velocidade.

2.2 A álgebra de Lie

Considere um vetor $x \in \mathcal{G}$ que obedece ao conjunto de transformações lineares do tipo

$$\bar{x}^\mu = G^\mu{}_\nu x^\nu + a^\nu. \tag{2.5}$$

Sendo $|G| = 1$. Partindo das transformações infinitesimais do modo

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu}. \tag{2.6}$$

Utilizando a representação unitária sobre o espaço das funções de um ponto em $\mathcal{G}$, os geradores são definidos por

$$M_{\mu\nu} := -i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}), \tag{2.7}$$

$$P_{\mu} = -i\partial_{\mu}. \tag{2.8}$$

onde $M_{\mu\nu}$ são os geradores das transformações homogêneas e P_{μ} das não-homogêneas. Conseguimos então a seguinte álgebra de Lie

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}), \tag{2.9}$$

$$[P_{\mu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}P^{\sigma} - g_{\mu\sigma}P^{\rho}), \tag{2.10}$$

$$[P_{\mu}, P_{\sigma}] = 0. \tag{2.11}$$

Os invariante de Casimir dessa álgebra são $I_1 = P_{\mu}P^{\mu}$ e $I_2 = W_{5\mu}W_5^{\mu}$, onde $W_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\rho\nu}P^{\alpha}M^{\beta\rho}$ é o tensor de Pauli-Lubanski em cinco dimensões, e $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta\rho}$ é o tensor de Levi-Civita totalmente antissimétrico em cinco dimensões. Nós assumimos que $\epsilon_{54abc} = \epsilon_{abc}$. Onde, na representação escalar podemos considerar $I_2 = 0$.

Podemos verificar que usando a transformação

$$\bar{x}^{\mu} = U^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}, \tag{2.12}$$

com $U^{\mu}{}_{\nu}$ representados pela matriz

$$U^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

com $U = U^{-1}$, obtemos o produto escalar entre dois vetores $\bar{x} = Ux$ e $\bar{y} = Uy$ da forma

$$\begin{aligned} (x, y) &= g_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \\ &= U^{\mu}{}_{\alpha}\, g_{\mu\nu} U^{\nu}{}_{\beta}\, \bar{x}^{\alpha} \bar{y}^{\beta}, \\ &\equiv \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{x}^{\alpha} \bar{y}^{\beta}, \end{aligned}$$

onde $\bar{g}_{\alpha\beta} = U^{\mu}{}_{\alpha}\, g_{\mu\nu} U^{\nu}{}_{\beta}$. Explicitamente, este produto interno gera

$$(x, y) = \bar{x}_i \bar{y}_i - \bar{x}_4 \bar{y}_4 + \bar{x}_5 \bar{y}_5.$$

onde $\bar{g}_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1, 1)$, é a métrica $g_{\mu\nu}$ diagonalizada. Esta é justamente a métrica do espaço de de Sitter em (4+1) dimensões, um espaço de Minkowski em cinco dimensões.

2.3 Imersões

1. A primeira imersão considerada é definada por

$$\mathcal{I}_1 : \mathbf{A} \to A = \left(\mathbf{A}, A_4, \frac{\mathbf{A}^2}{2A_4} \right);\ \mathbf{A} \in \mathcal{E}_3,\ A \in \mathcal{G}. \tag{2.14}$$

Sendo assim o quadrado da norma de A é

$$(A|A) = \mathbf{A}^2 - 2A^4 A^5 = 0. \tag{2.15}$$

A imersão $\mathcal{I}_1$ estabelece uma correspondência de $\mathcal{E}_3$ com vetores com norma nula de $\mathcal{G}$. Um exemplo são os vetores associados a invariância galileana em $\mathcal{G}$.

2. A segunda imersão possível é

$$\mathcal{I}_2 : \mathbf{A} \to A = (\mathbf{A}, A_4, 0). \tag{2.16}$$

Logo o quadrado da norma de A não é nula nos $(A|A) = \mathbf{A}^2$. Um exemplo é x=($\mathbf{x}$,vt,0).

3. Uma terceira possibilidade de imersão é

$$\mathcal{I}_3 : \mathbf{A} \to A = (\mathbf{A}, \frac{A_4}{\sqrt{2}}, \frac{A_4}{\sqrt{2}}). \tag{2.17}$$

Deste modo, temos $(A|A) = \mathbf{A}^2 - (A_4)^2$. Esta imersão leva portanto a um espaço de Minkowviski $\mathcal{M}_{3,1}$ em $\mathcal{G}$.

2.4 O Grupo de Galilei em $\mathcal{G}$

Analisaremos agora um caso particular das transformações lineares (2.5) de interesse, dado por

$$\bar{x}^i = R^i_j x^j + v^i x^4 + a^i, \tag{2.18a}$$

$$\bar{x}^4 = x^4 + a^4, \tag{2.18b}$$

$$\bar{x}^5 = x^5 - (R^i_j x^j) v_i + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 x^4. \tag{2.18c}$$

com o pentavetor coordenada estando de acordo com a imersão $\mathcal{I}_1$ na Eq. (2.31a). Na forma matricial, as transformações homogenias acima são escritas como

$$G^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 & v^i & 0 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 & v^2 & 0 \\ R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 & 0v^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_i R^i{}_1 & v_i R^i{}_2 & v_i R^i{}_3 & \frac{\mathbf{v}^2}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Podemos escrever os geradores, em uma decomposição (3+1+1), como

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk}, \tag{2.20}$$

$$K_i = M_{5i}, \tag{2.21}$$

$$C_i = M_{4i}, \tag{2.22}$$

$$D = M_{54}. \tag{2.23}$$

Com as relações de comutação, considerando aquelas não-nulas, são reescritas como

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, & [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k, \\
[J_i, C_j] &= i\epsilon_{ijk}C_k, & [K_i, C_j] &= i\delta_{ij}D + i\epsilon_{ijk}J_k, \\
[D, K_i] &= iK_i, & [C_i, D] &= iC_i, \\
[P_4, D] &= iP_4, & [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k, \\
[P_i, K_j] &= i\delta_{ij}P_5, & [P_i, C_j] &= i\delta_{ij}P_4, \\
[P_4, K_i] &= iP_i, & [P_5, C_i] &= iP_i. \\
[D, P_5] &= iP_5, & &
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Percebemos que estas relações formam uma álgebra que tem como subálgebra a álgebra de Lie do grupo de estendido Galilei no caso $\mathcal{R}^3 \times R^1$, considerando J_i os geradores das rotações, K_i das transformações puras de Galilei, P_μ das translações espaciais e temporais. De fato, podemos observar que as eqs. (2.18a) e (2.18b) são justamente as transformações de Galilei dadas por (2.1) com $x^4 = t$. A Eq. (2.18c) é uma condição de compatibilidade que representa a imersão $\mathcal{I}_1$, pois por coerência a norma deste tipo de vetor $\mathcal{G}$ tem que ser nula. A comutação de K_i e P_i é naturalmente diferente de zero nesse contexto, sendo que P_5 será relacionado a massa. Assim, o estudo das representações unitárias fiéis do grupo de Galilei em $\mathcal{G}$ é que tem interesse para a física galileana, e por construção fica semelhante ao caso do grupo de Poincaré para a física relativística.

Um pentavetor de interesse é o 5-momento

$$p^\mu = (\mathrm{p}, m, E)\,. \tag{2.25}$$

o que leva p^μ a estar de acordo com a imersão $\mathcal{I}_1$ e com as eqs. (2.18a)-(2.18c), considerando apenas as transformações homogêneas, por $\bar{p}^\mu = G^\mu{}_\nu p^\nu$, ou seja

$$\bar{p}^i = R^i{}_j p^j + v^i p^4, \tag{2.26}$$

$$\bar{p}^4 = p^4, \tag{2.27}$$

$$\bar{p}^5 = v_i(R^i_j) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 p^4 + p^5. \tag{2.28}$$

Nesta abordagem, o pentagradiente $\partial_\mu \equiv (\boldsymbol{\nabla}, \partial_t, \partial_5)$ também se transforma como um pentavetor, isto é,

$$\bar{\partial}_\mu = G_\mu{}^\nu \partial_\nu, \tag{2.29}$$

com $G_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} G^\rho{}_\sigma g^{\nu\sigma}$ dado por

$$G_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 & R^1{}_3 & 0 & -v^i \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 & R^2{}_3 & 0 & -v^2 \\ R^3{}_1 & R^3{}_2 & R^3{}_3 & 0 & -v^3 \\ -v_i R^i{}_1 & -v_i R^i{}_2 & -v_i R^i{}_3 & 1 & \frac{\mathbf{v}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Utilizando a métrica $g^{\mu\nu}$ para levantamento e abaixamento de índices, os pentavetores citados acima tornam-se

$$p_\mu = (p, -E, -m),$$
$$\partial^\mu = (\boldsymbol{\nabla}, -\partial_5, -\partial_t).$$

Assim, temos que $p^4 = -p_5 = m$ e $p^5 = -p_4 = E$.

Observamos das eqs. (2.29) e (2.30), temos que $\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}^\mu = \partial_\mu \partial^\mu$ e $\bar{\partial}_5 = \partial_5$, e Utilizando a relação de correspondência,$p_\mu = -i\partial_\mu$, temos

$$I_1 = p^\mu p_\mu, \tag{2.31a}$$
$$I_2 = W_{5\mu} W_5^\mu, \tag{2.31b}$$
$$I_3 = p_5, \tag{2.31c}$$

são invariantes de Casimir da álgebra de Lie relacionada ao grupo de Galilei.

2.5 Representações para a Mecânica Quântica não-Relativística

Nesta seção vamos estudar representações unitárias que descrevam partículas quânticas livres, partindo da análise dos invariantes da álgebra $\mathcal{G}$.

2.5.1 A Equação de Schrödinger

Utilizando os invariantes de Casimir I_1, (2.31a) e I_3, (2.31c) (no caso escalar $I_2 = 0$), encontrados na seção anterior e aplicando em Ψ, temos:

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \Psi = -k^2 \Psi \\ \partial_5 \Psi = -im\Psi \end{cases}, \tag{2.32}$$

onde k e m são constantes, e usando $\Psi(x^\mu) = \exp\Big((-imx^5)\psi(\mathbf{x}, x^4)\Big)$, obtemos

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x}, x^4) = \left(i\partial_t + \frac{k^2}{2m}\right)\psi(\mathbf{x}, x^4), \tag{2.33}$$

que é a equação de Schrödinger de uma partícula livre de massa m e energia $E + \dfrac{k^2}{2m}$. Neste contexto a 5-corrente é

$$j^\mu(x) = -i\Big(\psi^*(x)\partial^\mu\psi(x) - \partial^\mu(\psi^*(x))\psi(x)\Big), \tag{2.34}$$

e é conservada, pois a 5-divergência é nula, ou seja

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{2.35}$$

Deste modo, a 5-corrente equivale à 4-corrente usual,

$$\mathbf{j}(q) = \frac{1}{2m}\Big[\Psi^*(q)\boldsymbol{\nabla}\big(\Psi(q)\big) - \boldsymbol{\nabla}(\Psi^*(q)\Psi(q))\Big],$$

$$j^4 = \rho(q) = \frac{-i}{2m}\Big[-\Psi^*(q)\partial_5(\Psi(q)) + \partial_5(\Psi^*(q)\Psi(q))\Big] = |\Psi|^2,$$

sendo $\mathbf{j}(x)$ a corrente de probabilidade e $\rho(q)$ a densidade de probabilidade.

2.5.2 A Equação de Pauli-Schrödinger

Neste contexto, apresentamos uma construção da equação de onda de spin 1/2, definindo um novo quadrivetor γ^μ tal que,

$$(\partial_\mu\partial^\mu + k^2) = (\gamma^\mu\partial_\mu + ik)(\gamma^\nu\partial_\nu - ik), \tag{2.36}$$

para que (2.36) seja valida γ^μ deve obedecer à álgebra de Clifford, ou seja,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{2.37}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é nossas métrica penta-dimensional. Pegando a parte de sinal positivo e fazendo atuar na função de onda $\psi(x)$

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + ik)\Psi(x) = 0. \tag{2.38}$$

Que é a equação de Pauli-Schrödinger escrita de forma explicitamente covariante (tipo Dirac).
Por conveniência, utilizaremos as seguintes representações de γ^μ

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \qquad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli e $\sqrt{2}$ é a matriz identidade 2x2 multiplicada por $\sqrt{2}$. Podemos escrever o objeto Ψ, como

$$\Psi = e^{-imx^5} \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}, x^4) \\ \chi(\mathbf{x}, x^4) \end{pmatrix},$$

onde φ e χ são 2-espinores dependentes de $x^\mu; \mu = 1, ..., 5$. Portanto, na representação em que k=0, a eq (2.38) se reduz a

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi + \sqrt{2}\partial_5 \chi = 0, \tag{2.39a}$$

$$-\sqrt{2}\partial_4 \varphi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \chi = 0. \tag{2.39b}$$

As equações (2.39a) e (2.39b) tem o mesmo papel da Eq. (2.38), lembrando que as funções φ e χ devem satisfazer a Eq. (2.32).

A 5-corrente é

$$j^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}i} \left[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)\right], \tag{2.40}$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\zeta$, com

$$\zeta = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma^4 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

e j^μ é conservada, pois a 5-divergência é nula, ou seja

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Em termos de φ e χ

$$j^i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi^\dagger \boldsymbol{\sigma}\phi + \varphi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi\right]\epsilon_{ijk},$$

$$j^4 = \varphi^\dagger\varphi, \qquad j^5 = \chi^\dagger\chi,$$

utilizando as eqs. (2.32), (2.39a) e (2.39b) temos

$$\begin{aligned} j^i &= -\frac{i}{2m}\left[\varphi^\dagger(x)\partial^i\varphi(x) - \partial^i(\varphi^\dagger(x))\varphi(x)\right] + \frac{1}{2m}\partial^j\left[\varphi^\dagger\sigma^k\varphi\right]\epsilon_{ijk}, \\ &\text{e} \\ \partial_5 j^5 &= \partial_5(\chi^\dagger\chi) = 0. \end{aligned}$$

O primeiro termo em j^i representa a conhecida corrente de probabilidade dada na Eq. (2.35), e o segundo é associado com a corrente de spin, que resulta no valor correto do momento magnético intrínseco da partícula.

2.6 Interações Eletromagnéticas na Equação de Pauli

A natureza explicitamente covariante da equação de Pauli-Schrödinger permite introduzir as interações eletromagnéticas de forma simples. Fazemos simplesmente a substituição

$$\widetilde{p^\mu} \equiv p^\mu - eA^\mu, \tag{2.41}$$

onde e é a carga elétrica fundamental e A^μ o 5-potencial coulombiano, segundo imersões apropriadas [23]. A origem destas substituições vem do seguinte fato, constrói-se um Lagrangiano que reproduz-se a força de Lorentz, $\mathbf{F} = e\left[\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]$. Para a coordenada x_i o momento canônico é dado por

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \\ &= m\dot{x}_i + e\mathrm{A}_i, \end{aligned} \tag{2.42}$$

substituindo no Hamiltoniano temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{p}} &\rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \\ \widetilde{E} &\rightarrow E + e\varphi, \\ \widetilde{P^\mu} &\rightarrow P^\mu - eA^\mu. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Isto é chamado de acoplamento mínimo.

A equação de Pauli-Schrödinger torna-se, em forma matricial 2x2,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}} & -\sqrt{2}m \\ \sqrt{2}\widetilde{E} & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \tag{2.44}$$

o que nos leva a

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}}\varphi - \sqrt{2}m\chi = 0, \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}}\chi - \sqrt{2}\widetilde{E}\varphi = 0. \tag{2.46}$$

Na (2.45) temos que

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}}}{\sqrt{2}m}\varphi. \tag{2.47}$$

Substituindo na equação (2.46), temos

$$\widetilde{E}\varphi = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \widetilde{\mathbf{p}})}{2m}\varphi,$$

utilizando a identidade das matrizes de Pauli, temos

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\widetilde{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\widetilde{\mathbf{p}})}{2m}\varphi=\left[\frac{\widetilde{\mathbf{p}}^2}{2m}+\frac{i\boldsymbol{\sigma}}{2m}\cdot(\widetilde{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{p}})\right]\varphi=\widetilde{E}\varphi. \tag{2.48}$$

Na representação de coordenadas

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{p}}\times\widetilde{\mathbf{p}}u &= (i\boldsymbol{\nabla}+e\mathbf{A})\times(i\boldsymbol{\nabla}u+e\mathbf{A}u),\\ &= ie\left[\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}u)+\mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}u),\right]\\ &= ie\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)u=ie\mathbf{B}u. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Onde $\mathbf{B}$ é o campo magnético associado ao potencial vetor $\mathbf{A}$, logo a equação (2.48) torna-se

$$\left[\frac{\widetilde{\mathbf{p}}^2}{2m}-\mu\cdot\mathbf{B}\right]\varphi=\widetilde{E}\varphi. \tag{2.50}$$

onde

$$\mu=g\frac{e}{2m}\mathbf{S}, \tag{2.51}$$

com

$$\mathbf{S}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.52}$$

e

$$g=2. \tag{2.53}$$

A equação acima nada mais é que a equação de Pauli com interação eletromagnética. É interessante notar que o fator $g=2$ aparece naturalmente sem a necessidade de adicioná-lo ad-hoc. Fazendo o mesmo procedimento para χ chegaríamos ao mesmo resultado.

2.7 A Equação de Pauli Modificada

Para ilustrar um resultado, nessa seção usaremos a seguinte representação das matrizes γ^μ

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Escolhendo o Ansazt,

$$\psi^S \equiv -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi^L}{2\sqrt{2}mc^2},$$

onde c é a velocidade da luz, substituindo na expressão

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & \sqrt{2}(E-V) \\ -\sqrt{2}m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^L \\ \psi^S \end{pmatrix} = 0, \tag{2.54}$$

e rearranjando os termos, temos

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & \frac{V\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2mc^2} \\ 0 & \frac{p^2}{2\sqrt{2}mc^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^L \\ \phi^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2mc^2} \\ \sqrt{2}m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^L \\ \phi^L \end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

Thus,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi^L + \frac{V\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc^2}\phi^L = \frac{E\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc^2}\phi^L, \tag{2.56}$$

$$p^2\phi^L = 4m^2c^2\psi^L. \tag{2.57}$$

Multiplicando a primeira equação por $\dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m}$ pela esquerda, temos

$$\frac{p^2}{2m}\psi^L + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})V(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{4m^2c^2}\phi^L = E\psi^L.$$

O único termo que tem qualquer dependência de spin é o termo envolvendo o potencial em (2.7), e isso pode ainda ser separado usando a propriedade das matrizes de Pauli

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})V(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{p}V \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V \times \mathbf{p}.$$

Está claro agora que a verdadeira dependência de spin na equação de Pauli-Schrödinger tipo-Dirac não está na energia cinética, mas no potencial, um fato que está oculto em nossa forma explicitamente covariante da equação de Pauli-Schrödinger. Em um sistema atômico, o potencial é esfericamente simétrico, e podemos escrever o termo dependente do spin como

$$i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}V \times \mathbf{p} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{r} \times \mathbf{p} = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \tag{2.58}$$

Ao realizar a separação de spin, obtemos um termo que envolve a interação do spin e do momento angular orbital, uma interação spin-órbita.

Capítulo 3

Função de Wigner e o Produto estrela

A distribuição de quasi-probabilidade de Wigner (também chamada de função de Wigner ou distribuição de Wigner-Ville em homenagem à Eugene Wigner e Jean-André Ville) foi introduzida por Eugene Wigner em 1932 [6]. O seu objetivo era relacionar a função de onda que aparece na equação de Schrödinger a uma distribuição de probabilidade no espaço de fase. É uma função geradora para todas as funções de autocorrelação espacial de uma dada função de onda quanto-mecânica $\psi(x)$. Assim, ela mapeia a matriz de densidade quântica nas funções reais de espaço de fase e operadores hermitianos introduzidos por Hermann Weyl em 1927 [7], em um contexto relacionado à teoria da representação em matemática (quantização de Weyl em física). Com efeito, isto é a transformação de Wigner-Weyl da matriz de densidade, portanto, a realização desse operador no espaço de fase. Mais tarde foi rederivada por Jean Ville em 1948 [8] como uma representação quadrática (em sinal) da energia de frequência-tempo local de um sinal, efetivamente um espectrograma. Em 1949, José Enrique Moyal [9], que a derivou independentemente, reconheceu-a como funcional gerador do momento quântico, e assim como base de uma elegante codificação de todos os valores esperados e, portanto, da mecânica quântica, no espaço de fase (formulação do espaço de fase). Mapeando, porém, o espaço de fase da mecânica hamiltoniana clássica em um espaço de fase quântico através da substituição das variáveis q e p, por operadores hermitianos $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$, respectivamente, que satisfazem a relação $[\widehat{Q}, \widehat{P}] = i\hbar\mathbf{1}$, percebe-se que a noção de ponto é perdida e a constante de Planck, $\hbar$, limita o valor de uma área mínima no espaço de fase. Recupera-se a noção de ponto quando se toma o limite clássico, ou seja, $\hbar \to 0$. Tem aplicações em mecânica estatística, química quântica, óptica quântica, óptica clássica e análise de sinais em diversos campos, como engenharia elétrica, sismologia, análise de tempo-frequência para sinais de música, espectrogramas em biologia e processamento de fala e design de motores. Nesse capítulo faremos uma breve revisão da representação da mecânica quântica no espaço de fase e da função de Wigner, com ênfase em suas propriedades, evolução temporal, produto de dois operadores equivalentes em Wigner e propriedades do produto de Moyal, baseados nos trabalhos [15, 16, 17, 24, 25, 26, 27].

3.1 A Matriz Densidade

Na mecânica quântica podemos fazer uma abordagem do ponto de vista estatístico representando os estados macroscópicos por meio do operador densidade

$$\rho = \sum_i \omega_i \left|\psi_i(t)\right\rangle\!\left\langle\psi_i(t)\right|,$$

onde $\{\psi_i\}$, são os estados microscópicos do ensemble estatístico e $\omega_i = \dfrac{N_i}{N}$, é o peso estatístico para o estado quântico $|\psi_i\rangle$. A matriz densidade é dita conter toda a informação fisicamente relevante que podemos possivelmente obter sobre o ensemble em questão. Para estados puros teremos

$$\rho(t) = \left|\psi(t)\right\rangle\!\left\langle\psi(t)\right|. \tag{3.1}$$

O valor esperado de um operador A na formulação da mecânica quântica estatística usual é dado por

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = Tr(\rho A) = Tr(A\rho). \tag{3.2}$$

A matriz densidade ρ apresenta as seguintes propriedades

- hermeticidade: $\rho = \rho^\dagger$;
- traço: $\mathrm{Tr}\rho = 1$;

A equação que governa a evolução temporal da matriz densidade ρ é chamada de equação de Liouville-von Neumann, dada por

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left[H(t), \rho(t)\right]. \tag{3.3}$$

onde H representa a energia total do sistema. É possível introduzir uma formulação da mecânica quântica no espaço de fase a partir de ρ. Essa formulação é conhecida como método da função de Wigner.

3.2 Função de Wigner e suas propriedades

O operador densidade ρ pode receber várias representações matriciais, sendo a representação de posição, $\langle q|\rho|q'\rangle$, e a representação de momento, $\langle p|\rho|p'\rangle$, as mais comuns. A representação de Wigner é, em certo sentido, intermediária entre esses dois. Para uma única partícula em uma dimensão, ela é definida como

$$f_w(q,p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \, \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle . \tag{3.4}$$

ou ainda

$$f_w(q,p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dk \, \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle . \tag{3.5}$$

Correspondendo ao mapeamento $\Omega : \rho \to f_w(q,p)$. Considerando um sistema quântico descrito por um estado puro, de modo que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, a função de Wigner pode então ser escrita como

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dz \, \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \psi^\dagger \left(q + \frac{z}{2}\right) \psi \left(q - \frac{z}{2}\right) . \tag{3.6}$$

Tomemos como exemplo o oscilador harmônico. Em unidades atômicas e tomando $m = \omega = \hbar = 1$, o hamiltoniano fica dado por

$$H = \frac{p^2 + q^2}{2},$$

as soluções para o estado fundamental e para o primeiro estado excitado são, respectivamente,

$$\psi_0(q) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{q^2}{2}},$$

$$\psi_1(q) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} q e^{-\frac{q^2}{2}}.$$

A função de Wigner que corresponde a cada estado pode ser calculada através da Eq.(3.6). Então para o estado fundamental

$$f_w^0(q,p) = (2\pi)^{-1} \int e^{ipz} \psi_0^\dagger \left(q + \frac{z}{2}\right) \psi_0(q - \frac{z}{2}) dz,$$

$$f_w^0(q,p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q^2+p^2)}. \tag{3.7}$$

E, para o primeiro estado excitado

$$\begin{aligned} f_w^1(q,p) &= (2\pi)^{-1} \int e^{ipz} \psi_1^\dagger(q + \frac{z}{2}) \psi_1(q - \frac{z}{2}) dz, \\ f_w^1(q,p) &= \frac{1}{\pi} e^{-(q^2+p^2)}(2p^2 + 2q^2 - 1). \end{aligned} \tag{3.8}$$

As funções dadas pelas eqs. (3.7) e (3.8) possuem os seguintes comportamentos no espaço de fase, dadas nas figuras (3.1) e (3.2) , respectivamente,

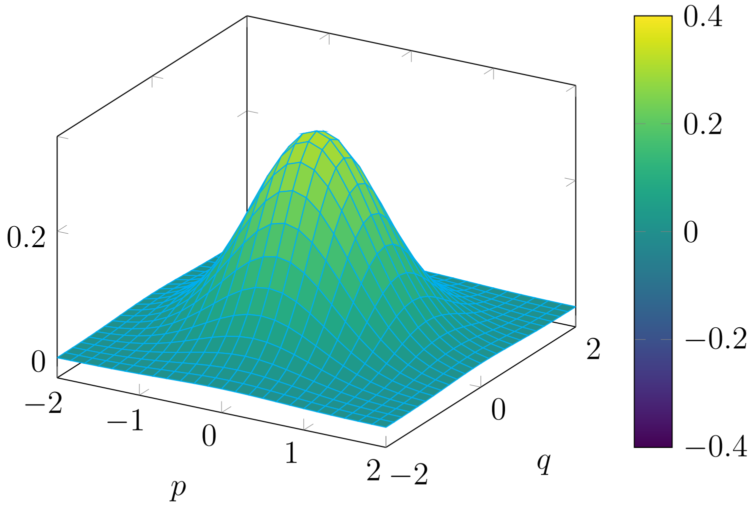


Figura 3.1: *Função de Wigner para o oscilador harmônico, estado fundamental*

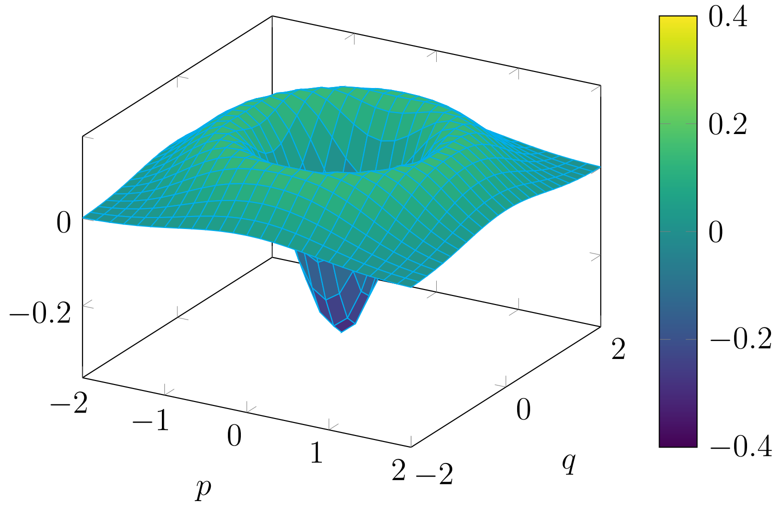


Figura 3.2: *Função de Wigner para o oscilador harmônico, primeiro estado excitado*

A função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade, pois se f_ψ e f_ϕ são duas funções de Wigner associadas respectivamente, aos estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, então

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^{-1}\int f_\psi(q,p;t)f_\phi(q,p;t)dqdp, \tag{3.9}$$

o lado esquerdo dessa equação é positivo ou nulo (nesse caso se os kets forem ortogonais), no último caso temos como consequência que a integral, $f_\psi^\dagger(q,p;t)f_\phi(q,p;t)$, é nula, porém $f_\psi(q,p;t)$ e $f_\phi(q,p;t)$ não são necessariamente nulas, forçando a concluir que podem assumir valores negativos. Por esse motivo a função de Wigner recebe o nome de distribuição de quasi-probabilidade, já que quando integrada pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidades de variáveis físicas, como veremos a seguir.

Primeiramente, a função de Wigner é limitada.

Demonstração:

Tomemos como exemplo um estado puro, dado pela Eq. (3.4)

$$f_w(q,p) = \Omega(\rho) = (2\pi\hbar)^{-1}\int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|\rho\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle.$$

Se definirmos as funções de onda normalizadas

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{ipz}{\hbar}}\psi^\dagger(q+\frac{z}{2}) \qquad \text{e} \qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(q-\frac{z}{2}),$$

vemos que a função de Wigner pode ser interpretada como o produto escalar

$$f_w(q,p) = \frac{1}{\pi\hbar}\int dz\, \varphi_1^\dagger(z)\varphi_2(z) = \frac{1}{\pi\hbar}\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\,,$$

e portanto,

$$|f_w(q,p)| = \frac{1}{\pi\hbar}|\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle|.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Scwarz

$$|\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle|^2 \leq \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle\,,$$

temos que, já que as funções φ_1 e φ_2 são normalizadas.

$$|\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle|^2 \leq 1.$$

Portanto,

$$|f_w(q,p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}. \tag{3.10}$$

A desigualdade $|f_w(q,p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}$ implica que a função de Wigner é diferente de zero em uma região cuja a área do espaço de fase é menor ou igual a $h/2$ [28]. Assim, a função de Wigner para um estado puro carrega intrinsecamente a informação sobre o princípio de incerteza, q e p não podem ser infinitamente localizados em um único ponto do espaço de fase.

Segue-se diretamente de (3.4) e (3.5) que

$$|\psi(q)|^2 = \int f_w dp \quad = \quad \langle q|\rho|q\rangle\,, \tag{3.11}$$

$$|\psi(p)|^2 = \int f_w dq \quad = \quad \langle p|\rho|p\rangle\,. \tag{3.12}$$

Demonstração:

Para demonstrar a Eq.(3.11) basta introduzir a Eq.(3.4) em $\int f_w dp$ o que nos leva a

$$\int dp f_w = (2\pi\hbar)^{-1}\int dpdz\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|\rho\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right), \tag{3.13}$$

se for feita primeiramente a integração em p, temos que

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left(\int dp \, (2\pi\hbar)^{-1} \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \right), \tag{3.14}$$

onde o termo entre parêntesis é o delta de Dirac, $\delta(z)$. Com isso temos

$$\int dz \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z) = \langle q|\rho|q\rangle = |\psi(q)|^2, \tag{3.15}$$

analogamente substituindo Eq.(3.12) em Eq.(3.4)

$$\int dq f_w = (2\pi\hbar)^{-1} \int dkdq \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle, \tag{3.16}$$

se for feita primeiramente a integração em q, temos que

$$\int dk \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle \left(\int dq \, (2\pi\hbar)^{-1} \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \right), \tag{3.17}$$

onde o termo entre parêntesis é o delta de Dirac, $\delta(k)$. Com isso temos

$$\int dk \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| \rho \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle \delta(k) = \langle p|\rho|p\rangle = |\psi(p)|^2. \tag{3.18}$$

Mostraremos agora a normalização da função de Wigner, insto é

$$\int f_w(q,p) dqdp = \mathrm{Tr}\rho = 1. \tag{3.19}$$

Demonstração:

Substituindo a equação (3.4) em (3.19), obtemos

$$\int f_w(q,p) dqdp = (2\pi\hbar)^{-1} \int dzdpdq \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \tag{3.20}$$

Se calcularmos primeiro em p, temos

$$\int f_w(q,p) dqdp = \int dzdq \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \left((2\pi\hbar)^{-1} \int dp \, e^{i\frac{p}{\hbar}z} \right). \tag{3.21}$$

O termo entre parênteses é a delta de Dirac. Com isso, temos

$$\int f_w(q,p)dqdp = \int dzdq \left\langle q - \frac{z}{2} \middle| \rho \middle| q + \frac{z}{2} \right\rangle \delta(z), \tag{3.22}$$

$$= \int dq \left\langle q|\rho|q \right\rangle = \mathrm{Tr}\rho = 1, \tag{3.23}$$

q.e.d.

Agora se a integração sobre o espaço de fase for realizada em um produto de duas funções de Wigner a dois estados distintos, caracterizados por ρ_1 e ρ_2, encontraremos uma propriedade que diz respeito ao traço do produto de duas matrizes de densidade.

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2). \tag{3.24}$$

Demonstração:

Usando a equação (3.4), segue que

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dqdpdz_1dz_2\, e^{\frac{ip}{\hbar}(z_1+z_2)}$$
$$\times \left\langle q - \frac{z_1}{2} \middle| \rho_1 \middle| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z_2}{2} \middle| \rho_2 \middle| q + \frac{z_2}{2} \right\rangle,$$

integrando em $\boldsymbol{p}$ nos dá uma delta de Dirac $\delta(z_1+z_2)$, de forma que, após integrar em z_2 temos

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int dqdz_1 \left\langle q - \frac{z_1}{2} \middle| \rho_1 \middle| q + \frac{z_1}{2} \right\rangle \left\langle q + \frac{z_1}{2} \middle| \rho_2 \middle| q - \frac{z_1}{2} \right\rangle.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$q' = q - \frac{z_1}{2}, \qquad q'' = q + \frac{z_1}{2},$$

chegamos a

$$\int dqdpf_{w1}(q,p)f_{w2}(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int dq'dq'' \left\langle q'|\rho_1|q''\right\rangle \left\langle q''|\rho_2|q'\right\rangle. \tag{3.25}$$

Utilizando a relação de completeza, temos

$$\begin{aligned}
\int dqdp f_{w1}(q,p) f_{w2}(q,p) &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int dq' \left\langle q'|\rho_1\rho_2|q'\right\rangle, \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2), \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Agora nos questionamos se é possível encontrar para qualquer operador quântico $A(Q,P)$, onde Q e P são os operadores de posição e momento, uma função correspondente, $A_w(q,p)$, na representação de Wigner. A resposta é positiva. De forma análoga ao que foi feito na definição da função de Wigner, definimos as funções $A_w(q,p)$ associadas ao operador $A(Q,P)$dada por,

$$A_w(q,p) = \int dz \ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2}\middle| A(Q,P) \middle| q + \frac{z}{2}\right\rangle, \qquad (3.27)$$

ou

$$A_w(q,p) = \int dz \ \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2}\middle| A(Q,P) \middle| p + \frac{k}{2}\right\rangle. \qquad (3.28)$$

Chamaremos estas funções de funções equivalentes de Wigner dos operadores $A(Q,P)$. Podemos, então, assim dizer que a função de Wigner é a função equivalente de Wigner para o operador ρ

$$f_w = (2\pi\hbar)^{-1}\rho_w. \qquad (3.29)$$

Com a definição dos equivalentes de Wigner a quaisquer operadores quânticos na representação de Wigner, temos que o valor esperado de um observável, num estado $|\psi\rangle$ é representado como

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \int dpdq A_w(q,p) f_w(q,p) = Tr(A\rho). \qquad (3.30)$$

Demonstração:

Substituindo as equações (3.4) e (3.28) em (3.30), temos

$$\langle A\rangle = \int dpdq\, A_w(q,p) f_w(q,p) = Tr(\rho A) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dqdpdz'dz'' \exp\left(\frac{ipz'}{\hbar}\right)$$
$$\times \left\langle q - \frac{z'}{2}\middle| A(Q,P) \middle| q + \frac{z'}{2}\right\rangle \left\langle q - \frac{z''}{2}\middle|\rho\middle| q + \frac{z''}{2}\right\rangle, \quad (3.31)$$

integrando em p resulta em uma delta de Dirac $\delta(z' + z'')$. Com isso, integrando em z''

$$\langle A\rangle = \int dqdz' \left\langle q - \frac{z'}{2}\middle| A(Q,P) \middle| q + \frac{z'}{2}\right\rangle \left\langle q + \frac{z'}{2}\middle|\rho\middle| q - \frac{z'}{2}\right\rangle. \quad (3.32)$$

Introduzindo a mudança de variáveis,

$$q' = q - \frac{z_1}{2}, \qquad q'' = q + \frac{z_1}{2},$$

temos

$$\langle A\rangle = \int dq'dq'' \langle q'|A(Q,P)|q''\rangle \langle q''|\rho|q'\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A). \quad (3.33)$$

q.e.d.

O problema agora consiste em mostrar a correspondência unívoca entre um operador quântico $A(Q,P)$ e o recíproco na representação de Wigner $A_w(q,p)$. Isso pode ser feito via a regra de quantização de Weyl que é definida da seguinte forma. Dada uma função no espaço de fase, $\alpha(\tau,\sigma)$, então existe um operador quântico no espaço de Hilbert, $A(Q,P)$, associado a $\alpha(\tau,\sigma)$ tal que

$$A(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\tau d\sigma\, e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}} \alpha(\tau,\sigma), \quad (3.34)$$

onde τ está associado à coordenada de posição e σ à coordenada de momento no espaço de fase. Se escrevermos $A(Q,P)$ em termos de $A_w(q,p)$ tem-se o seguinte resultado

$$\alpha(\tau,\sigma) = \int dqdp\, e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}} A_w(q,p). \quad (3.35)$$

Para verificar essa equivalência, deve ser mostrado que o operador definido por $W(Q,P) = e^{\frac{i(\sigma Q+\tau P)}{\hbar}}$, satisfaz uma espécie de ortogonalidade e completeza no espaço dos operadores do tipo $A(Q,P)$. Utilizando a formula de Glauber, dada por $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ rescrevemos então $W(P,Q)$ como

$$W(Q,P) = e^{\frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\frac{i\sigma\tau}{2}},$$

onde usamos o fato de que $[Q,P] = i\hbar$. Podemos então calcular o valor da expressão

$$\langle q'|e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)}|q\rangle = \langle q'|e^{\pm\frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\pm\frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\pm\frac{i\sigma\tau}{2}}|q\rangle .$$

Sabe-se que $Q\,|q\rangle = q\,|q\rangle$, então $e^{\pm\frac{i}{\hbar}\sigma Q}\,|q\rangle = e^{\pm\frac{i}{\hbar}\sigma q}\,|q\rangle$ e utilizando a propriedade do operador translação, $e^{\frac{i\tau P}{\hbar}}\,|q\rangle = |q-\tau\rangle$. Dessa forma obtemos

$$\langle q'|e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\sigma Q+\tau P)}|q\rangle = e^{\pm\sigma(\frac{i}{\hbar}q'\pm\frac{\tau}{2})}\delta(q'-q\pm\tau),$$

que implica

$$\mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{2}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)^3\delta(\sigma)\delta(\tau),$$

pois, por definição $\mathrm{Tr}A = \int dqdp\,\langle q'|A|q\rangle = (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdpA_w(q,p)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} &= (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\int dz\;\exp(ipz)\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)}\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle, \quad (3.36)\\
&= (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\int dz\;\exp(ipz)\exp(i\sigma(q-z-\tau))\delta(z+\tau).
\end{aligned}$$

Utilizando a delta de Dirac e integrando em z, temos

$$\mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\; e^{\frac{ip\tau}{\hbar}} e^{\frac{iq\sigma}{\hbar}}. \tag{3.37}$$

Identificamos, assim, duas deltas na forma integral, ou seja,

$$\mathrm{Tr}e^{-i\hbar(\sigma Q+\tau P)} = (2\pi\hbar)^3\delta(\sigma)\delta(\tau).$$

Isso nos leva às relações de ortogonalidade

$$\mathrm{Tr}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma' Q-\tau' P)}e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q-\tau P)} = (2\pi\hbar)^3\delta(\sigma'-\sigma)\delta(\tau'-\tau). \tag{3.38}$$

Para provar a equivalência entre as equações (3.28) e (3.29) e as equações (3.34) e (3.35), assumimos que a expansão

$$A(Q,P) = \int d\sigma d\tau \; \alpha(\sigma,\tau) e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}, \tag{3.39}$$

existe. Sendo assim, usando a relação de ortogonalidade mostrada anteriormente, facilmente notamos que

$$\alpha(\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} \mathrm{Tr}\left\{ A(Q,P) e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')} \right\}.$$

Para provar a existência da equação (3.39), substituímos a equação

$$\alpha(\sigma,\tau) = \int dqdp e^{-\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} A_w(q,p), \tag{3.40}$$

na própria equação (3.39). Calculando os elementos de matriz na representação de posição, chegamos a

$$\begin{aligned} \langle q|A(Q,P)|q'\rangle &= (2\pi\hbar)^{-1} \int d\sigma d\tau dq'' dq''' \left\langle q''|A(Q,P)|q'''\right\rangle \\ &\times \left\langle q'''|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}|q''\right\rangle \left\langle q|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)}|q'\right\rangle . \end{aligned}$$

E ainda com o uso da Eq. (3.38), obtemos a seguinte identidade

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = \langle q|A(Q,P)|q'\rangle . \tag{3.41}$$

O que prova a existência da expansão (3.39). Isso prova também que é possível usar as equações (3.39) e (3.40) para trabalhar em ambas direções: dado $A(Q,P)$, podemos determinar $A_w(q,p)$ univocamente e vice-versa.

3.3 Equivalência dos Operadores na Representação de Wigner

O objetivo dessa sessão é demonstrar algumas propriedades referentes a equivalência entre os operadores escritos na representação usual e seus respectivos equivalentes na representação de Wigner, que podem ser deduzidas a partir de resultados já obtidos. Tais propriedades são referentes a equivalência entre os operadores escritos na representação e seus respectivos equivalentes na representação de Wigner.

Se $A = A(P)$ (isto é, independente de Q), então $A_w = A(p)$. Ou seja, eles terão a mesma forma, com a ressalva que os operadores P serão substituídos pelas variáveis p.

Demonstração:

Um operador $A(P)$ pode ser expandido em uma série de P, como

$$A(P) = A(0) + PA'(0) + ... \tag{3.42}$$

Utilizando agora a equação (3.27), já substituindo $A(Q,P)$ pela expansão, tem-se

$$A_w(q,p) = \int dk \ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + ... \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle . \tag{3.43}$$

Sabendo que $P\,|p\rangle = p\,|p\rangle$ temos,

$$\begin{aligned} A_w(q,p) &= A(0) \int dk \ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle \\ &+ A'(0) \int dk \ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \left(p + \frac{k}{2}\right) \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle \\ &+ A(0)'' \int dk \ \exp\left(-\frac{iqk}{\hbar}\right) \frac{(p+\frac{k}{2})^2}{2!} \left\langle p - \frac{k}{2} \middle| p + \frac{k}{2} \right\rangle + ... \end{aligned}$$

Observando também que $\langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle = \delta k$ e utilizando a propriedade da delta para calcular a integral em k, chega-se a

$$A_w(p) = A(0) + pA'(0) + \frac{p^2}{2!}A''(0) + ... = A(p). \tag{3.44}$$

q.e.d.

Analogamente, usando a equação (3.28), chegamos a, se $A = A(Q)$, então $A_w(q,p) = A(q)$.

Se $A(Q,P) = c\mathbf{1}$, onde c é uma constante (isto é, $A(Q,P)$ é múltiplo do operador identidade 1), então $A_w = c$.

Demonstração:

Esta propriedade é demonstrada de forma imediata. Basta tomar a equação (3.27). e no lugar de $A(Q,P)$ colocar uma constante c.Como uma constante não age nos kets, temos

$$\begin{aligned} A_w(q,p) &= \int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|c\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle, \\ A_w(q,p) &= c\int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Utilizando o fato que $\left\langle q-\frac{k}{2}\middle|q+\frac{k}{2}\right\rangle = \delta k$ e integrando em z, obtemos

$$A_w(q,p) = c. \tag{3.46}$$

q.e.d.

O $\mathrm{Tr}A = (2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\ A_w(q,p)$.

Demonstração:

Utilizando $(2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\ A_w(q,p)$ e substituindo nela a eq (3.27), temos

$$(2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\ A_w(q,p) = \int dqdp\int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right)\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle.$$

Integrando em p, é identificada a função de delta de Dirac na forma integral,

$$(2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\ A_w(q,p) = \int dqdp\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle\int dz\ \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right).$$

Utilizando a delta para integrar em z, temos

$$(2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\ A_w(q,p) = \int dqdz\left\langle q-\frac{z}{2}\middle|A(Q,P)\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle\delta(z). \tag{3.47}$$

Ficamos com

$$(2\pi\hbar)^{-1}\int dqdp\ A_w(q,p) = \int dq\,\langle q|A(Q,P)|q\rangle = \mathrm{Tr}A. \tag{3.48}$$

q.e.d.

Da demonstração acima vê-se que $\int dp\ A_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-1}\langle q|A|q\rangle$ e $\int dq\ A_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-1}\langle p|A|p\rangle$, simplesmente substituímos a equação (3.27) na primeira propriedade e a equação (3.28) na segunda, utilizando o mesmo processo feito na demonstração acima.

Por fim temos que $\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-1}\int d\sigma\ e^{i\sigma\frac{q+q'}{2\hbar}}\alpha(\sigma,q-q')$, onde $\alpha(\sigma,\tau)$ é a transformada de Fourier de $A_w(q,p)$.

Demonstração:

Utilizando a expressão $A(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\sigma d\tau$, temos

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = \int d\sigma d\tau \; \alpha(\sigma,\tau)\, \langle q|e^{i\frac{\sigma Q+\tau P}{\hbar}}|q'\rangle\,. \tag{3.49}$$

E usando a equação (3.38), segue que

$$\langle q|A(Q,P)|q'\rangle = (2\pi\hbar)^{-1}\int d\sigma\; e^{i\sigma\frac{q+q'}{2\hbar}}\alpha(\sigma, q-q'). \tag{3.50}$$

q.e.d.

Agora que já sabemos como se dá a equivalência de operadores na representação de Wigner, nosso objetivo é descobrir como é que se representa a equivalência de produtos de operadores na representação de Wigner, pois isto é fundamental para o desenvolvimento da dinâmica.

3.4 O Produto de Weyl-Moyal

O produto de dois operadores quânticos AB na representação de Wigner é escrito na forma

$$(AB)_w = \int dz\; e^{i\frac{pz}{\hbar}} \left\langle q-\frac{z}{2}\middle|AB\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle, \tag{3.51}$$

introduzindo a relação de fechamento $\int dq\,|q\rangle\langle q| = 1$, temos

$$(AB)_w = \int dzdq\; e^{i\frac{pz}{\hbar}} \left\langle q-\frac{z}{2}\middle|A\middle|q\right\rangle \left\langle q\middle|B\middle|q+\frac{z}{2}\right\rangle, \tag{3.52}$$

Usando a Eq. (3.50)

$$\begin{aligned}(AB)_w = \;& (2\pi\hbar)^{-2}\int dzdq'\; e^{i\frac{pz}{\hbar}}\int d\sigma d\sigma' e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))}\alpha(\sigma, q'-q+\frac{z}{2})\\ \times\;& e^{i\frac{\sigma}{2\hbar}(q+q'(q+q'-\frac{z}{2}))}\beta(\sigma', q-q'+\frac{z}{2}).\end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis; $\tau = q' - q + \frac{z}{2}$ e $\tau' = q - q' + \frac{z}{2}$, chega-se a

$$(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-2} \int d\sigma d\sigma' d\tau d\tau' \; e^{i\frac{\sigma t + \tau q}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau) e^{i\frac{\sigma' \tau + \sigma \tau'}{2\hbar}} \beta(\sigma', \tau') e^{i\frac{\sigma' q + \tau' p}{\hbar}}. \tag{3.53}$$

O fator $e^{i\frac{\sigma'\tau + \sigma\tau'}{2\hbar}}$ pode ser substituído de modo equivalente por $e^{i\frac{\mathbf{\Lambda}\hbar}{2}}$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é o operador bidiferencial

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}.$$

As setas indicam o sentido onde os operadores devem ser aplicados. Portanto, utilizando de, $A_w = \int dqdpe^{i\frac{\sigma q + \tau p}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau)$ e $B_w = \int dqdpe^{i\frac{\sigma\prime q + \tau' p}{\hbar}} \beta(\sigma', \tau')$, o produto de operadores na representação de Wigner fica escirto como

$$(AB)_w = A_w(q,p) e^{\frac{\mathbf{i\Lambda}\hbar}{2}} B_w(q,p),$$

ou

$$(AB)_w = B_w(q,p) e^{-\frac{i\mathbf{\Lambda}\hbar}{2}} A_w(q,p).$$

Dessa forma, a operação denominada de produto-estrela fica definida como

$$(AB)_w = A_w(q,p) e^{\frac{\mathbf{i\Lambda}\hbar}{2}} B_w(q,p) = A_w(q,p) \star B_w(q,p).$$

Notemos que o produto-estrela não é comutativo, e relaciona o formalismo proposto por Wigner com o formalismo de quantização proposto por Weyl.

3.5 Evolução Temporal

Podemos determinar a evolução temporal da função de Wigner ou qualquer operador na representação de Wigner partindo da equação de Liuoville Von-Neumann dada por

$$i\hbar\partial_t \rho = H\rho - \rho H, \tag{3.54}$$

onde ρ é a matriz densidade e H é o Hamiltoniano. Usando a aplicação de Wigner, Ω nesta equação, temos

$$i\hbar\Omega(\partial_t\rho) = \Omega(H\rho) - \Omega(\rho H). \tag{3.55}$$

Como

$$i\hbar\frac{\partial f_w}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M, \tag{3.56}$$

onde $H_w, f_{wM} = H_w \star f_w - f_w \star H_w$ é o parentese de Moyal. O parêntese de Moyal pode ser ainda escrita da seguinte forma,

$$\{a, b\}_M = a \star b - b \star a = 2ia(q,p)\,\text{sen}\left[\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right] b(q,p), \tag{3.57}$$

onde, utilizamos do fato, $e^{i\hbar\mathbf{\Lambda}/2} - e^{-i\hbar\mathbf{\Lambda}/2} = 2i\,\text{sen}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right)$.

Expandindo em série de potências o seno da última expressão que define o parênteses de Moyal, obtemos,

$$\text{sen}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right) = \frac{\hbar\mathbf{\Lambda}}{2} - \frac{1}{3!}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\hbar\frac{\mathbf{\Lambda}}{2}\right)^5 + ... \tag{3.58}$$

No limite em que $\hbar \to 0$, obtemos como resultado que a função de Wigner obedece a equação de Liouville clássica, com H_w no lugar da função hamiltoniana, isto é

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial H_w}{\partial q}\frac{\partial f_w}{\partial p} - \frac{\partial H_w}{\partial p}\frac{\partial f_w}{\partial q} = \{H_w, f_w\}, \tag{3.59}$$

e ainda

$$\frac{\partial H_w}{\partial q} = \dot{p} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial H_w}{\partial p} = \dot{q}. \tag{3.60}$$

Então, o formalismo de Wigner recupera as equações canônicas da mecânica clássica, quando tomamos o limite clássico, o que mostra que esse formalismo é compatível com o princípio da correspondência, fortalecendo a importância da descrição de Wigner na mecânica quântica no estudo do limite clássico e no desenvolvimento de métodos semiclássicos. O estudo apresentado sobre o método de Wigner, até o momento, foi baseado na descrição de Schrödinger da mecânica quântica, ou seja, considerando que apenas os estados (e não os operadores) evoluem com o tempo. No entanto, é possível desenvolver um tratamento análogo em termos de operadores expressos na descrição de Heisenberg (onde os operadores evoluem com o tempo, e os estados ficam estáticos), sem maiores problemas.

3.6 Propriedades do Produto Estrela

O produto estrela ou produto de Weyl entre duas funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$ é definindo por

$$f(q,p) \star g(q,p) = f(q,p) \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right] g(q,p). \tag{3.61}$$

Apresentaremos a seguir algumas propriedades do produto estrela.

Seja $c \in C$. Então

$$c \star f(q,p) = f(q,p) \star c = cf(q,p). \tag{3.62}$$

Demonstração:

Expandindo o produto estrela em série de potências, temos

$$c \star f(q,p) = c\left\{1 + \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)^2 + ...\right\} f(q,p).$$

Os operadores que atuam em c pelo lado esquerdo se anularão, pois c é uma constante. O mesmo acontece se c estiver do lado direito, sobrando assim somente o operador identidade 1.

O produto estrela é não-comutativo, isto é

$$f(q,p) \star g(q,p) \neq g(q,p) \star f(q,p). \tag{3.63}$$

Ou seja, $f(q,p)e^{\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}g(q,p) \neq g(q,p)e^{\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}f(q,p)$. Pois na verdade,

$$f(q,p)e^{\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}g(q,p) = g(q,p)e^{-\frac{i\hbar\mathbf{\Lambda}}{2}}f(q,p).$$

Demonstração:

Fazendo os casos particulares $q \star p$ e $p \star q$, Caso 1:

$$q \star p = \left(q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right) p = qp + \frac{i\hbar}{2}.$$

Caso 2:

$$p \star q = \left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q\right) q = pq - \frac{i\hbar}{2}.$$

q.e.d.

O produto estrela realizado entre duas funções no espaço de fase promove uma delas a categoria de operador,

$$\begin{aligned} f(q,p) \star g(q,p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) g(q,p) \\ &= f(q,p) g\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right). \end{aligned}$$

Demonstração:

Fazendo $a \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}$ e $b \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}$, temos

$$f(q,p) \star g(q,p) = f(q,p) e^{\frac{i\hbar}{2}\left(a\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} - b\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\right)} g(q,p).$$

Considerando que $e^{a\partial_x} f(x) = f(x+a)$, obtemos

$$f(q,p) \star g(q,p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2}a, p - \frac{i\hbar}{2}b\right) g(p,q).$$

Assim

$$f(q,p) \star g(q,p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right) g(p,q).$$

Portanto definimos o operador-estrela,

$$\hat{f} = f(q,p) \star .$$

A conjugação complexa troca a ordem do produto estrela,

$$(f \star g)^{\dagger} = g^{\dagger} \star f^{\dagger}. \tag{3.64}$$

Demonstração:

A Eq. (3.61) pode ser reescrita como

$$f(q,p) \star g(q,p) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q'}\right)\right] f(q,p)g(q',p')\Big|_{q',p'=q,p} \tag{3.65}$$

Expandindo a exponencial numa série de potências, temos

$$\exp\left[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n (\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n.$$

E, ainda, escrevendo a escrevendo a expressão $(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n$ usando o binômio de Newton,

$$(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q\partial_{p'}\right]^{n-m}\left[\partial_p\partial_{q'}\right]^m. \tag{3.66}$$

Portanto, o produto estrela pode ser escrito como

$$f(q,p) \star g(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^m f(q,p)\right]\left[\partial_q^m\partial_p^{n-m} g(q,p)\right]. \tag{3.67}$$

Tomando o complexo conjugado da equação acima, temos

$$\begin{aligned}(f(q,p) \star g(q,p))^{\dagger} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \Bigg\{(-1)^n \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^m f^{\dagger}(q,p)\right] \\ &\times \left[\partial_q^m\partial_p^{n-m} g^{\dagger}(q,p)\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.68}$$

onde o termo $(-1)^n$ surge da conjugação complexa do termo $(i\hbar/2)^n$. Este termo pode ser associado ao binômio, isto é

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'}) = (-\partial_q\partial_{p'} + \partial_p\partial_{q'}) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_p\partial_{q'}\right]^{n-m}\left[\partial_q\partial_{p'}\right]^m.$$

Aplicando estes operadores em duas funções no espaço de fase, temos

$$(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p') = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\Big[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}f(q,p)\Big]\Big[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}g(q,p)\Big].$$

e

$$(-1)^n(\partial_q\partial_{p'} - \partial_p\partial_{q'})f(q,p)g(q',p') = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\Big[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}g(q,p)\Big]\Big[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}f(q,p)\Big].$$

Comparando estas duas últimas equações, obtemos

$$\begin{aligned}(-1)^n \quad & \textstyle\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}f(q,p)\right]\left[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}g(q,p)\right] \\ = \quad & \textstyle\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\left[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}g(q,p)\right]\left[\partial_q^{m}\partial_p^{m-n}f(q,p)\right].\end{aligned} \tag{3.69}$$

Substituindo a Eq. (3.69) em (3.68)

$$\begin{aligned}\Big(f(q,p)\star g(q,p)\Big)^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n\Bigg\{(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\Big[\partial_q^{n-m}\partial_p^{m}g^\dagger(q,p)\Big] \\ &\times \Big[\partial_q^{m}\partial_p^{n-m}f^\dagger(q,p)\Big]\Bigg\}, \\ &= g^\dagger(q,p)\star f^\dagger(g,p).\end{aligned}$$

q.e.d.

O produto estrela é associativo.
Considerando f, g e h como funções no espaço de fase, temos

$$\Big(f(q,p)\star g(q,p)\Big)\star h(q,p) = f(q,p)\star\Big(g(q,p)\star h(q,p)\Big). \tag{3.70}$$

Demonstração:

Temos que

$$\begin{aligned}\Big(f(q,p)\star g(q,p)\Big)\star h(q,p) &= \left\{f\left(q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p},p-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)g(q,p)\right\}h\left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p},p+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right),\\ &= f\left(q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p},p-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)g\left(q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p},p-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)h(q,p),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}f(q,p)\star\Big(g(q,p)\star h(q,p)\Big) &= f\left(q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p},p-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\left\{g(q,p)h\left(q-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p},p+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right\},\\ &= f\left(q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p},p-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)g\left(q+\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p},p-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)h(q,p)\\ \text{q.e.d.,}\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que os operadores diferenciais aqui compreendidos, são associativos. Neste caso, podemos concluir que o produto-estrela é associativo.

Capítulo 4

Mecânica Quântica Simplética e o Grupo de Galilei

Neste capítulo, definiremos um conjunto de operadores-estrela para construir representações unitárias do grupo estendido de Galilei em um espaço de Hilbert, associado a uma variedade simplética, e, como consequência, derivamos a equação de Schrödinger escrita covariantemente, isto é, escrita no cone de luz de um espaço-tempo de de Sitter de cinco dimensões, uma equação tipo Klein-Gordon, descrita no espaço de fase. Incorporamos assim à descrição da mecânica quântica no espaço de fase a noção de um espaço de Hilbert, $\mathcal{H}(\Gamma)$ descrito de forma covariantemente galileana. Essa variedade, então, é provida de uma função de onda, na qual damos uma interpretação física a esse objeto. Sabemos também que, com a construção do espaço de fase a partir de uma teoria de representação, o formalismo se torna autocontido e pode ser generalizado para outros contextos, como uma teoria quântica de campos, por exemplo. Por motivos de simplicidade consideramos nesse capítulo $\hbar = c = 1$.

4.1 Espaço de Hilbert e a Estrutura Simplética

Seja $\mathcal{G}$ uma variedade diferencial n-dimensional, onde cada ponto é representado por coordenadas $q = (q^1, ...q^n)$. No espaço cotangente, $T^*\mathcal{G}$, as coordenadas de cada ponto são dadas por $(q, p) = (q^1, ...q^n, p^1, ...p^n)$. O espaço cotangente pode então ser equipado com uma estrutura simplética, dada pela 2-forma

$$\omega = dq^\mu \wedge dp_\mu, \qquad \mu = 1, 2, ..., N \tag{4.1}$$

chamada de forma simplética. Essa forma simplética, em conjunto com o operador

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^{\mu}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_{\mu}} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p^{\mu}} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_{\mu}} \right) \tag{4.2}$$

tal que para as funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$ C^{∞}, temos,

$$\omega(f\mathbf{\Lambda}, g\mathbf{\Lambda}) = f\mathbf{\Lambda}g = \{f, g\}, \tag{4.3}$$

onde $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^{\mu}}\frac{\partial g}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial f}{\partial p^{\mu}}\frac{\partial g}{\partial q_{\mu}}$ é o parêntesis de Poisson. O espaço $T^{*}\mathcal{G}$ dotado dessa estrutura simplética é chamado de espaço de fase e será denotado por Γ, tal que um vetor é especificado por $\omega = (\omega^{1}, ..., \omega^{n}) = (q^{1}, ..., q^{n}, p^{1}, ..., p^{n})$ e $q = (q^{1}, ..., q^{n})$ e $p = (p^{1}, ..., p^{n})$ os vetores em $\mathcal{G}$. Onde, na equação (4.3), utilizamos o fato de que os operadores,

$$\mathbf{X}_{f} = f\mathbf{\Lambda} = \frac{\partial f}{\partial q^{\mu}}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial f}{\partial p^{\mu}}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}, \tag{4.4}$$

e

$$\mathbf{X}_{g} = g\mathbf{\Lambda} = \frac{\partial g}{\partial q^{\mu}}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial g}{\partial p^{\mu}}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}, \tag{4.5}$$

determinam campo vetoriais sobre Γ. Dessas definições gerais, podemos utilizar Γ para introduzir o espaço de Hilbert associado ao espaço de fase Γ.

Cosideremos o conjuto das funções complexas de quadrado integrável, $\varphi(q,p)$ em Γ, tal que

$$\int dpdq\ \varphi(q,p)'\varphi(q,p) < \infty,$$

é uma forma blilinear real. Nesse caso, podemos escrever $\varphi(q,p) = \langle q, p|\varphi\rangle$, com auxílio de

$$\int dqdp\, |q,p\rangle\langle q,p| = 1,$$

sendo $\langle\varphi|$ o vetor dual de $|\varphi\rangle$. Este espaço de *Hilbert simplético* é denotado por $\mathcal{H}(\Gamma)$

4.2 Operadores em $\mathcal{H}(\Gamma)$

A atuação de um operador linear em $\mathcal{H}(\Gamma)$ é um mapeamento $\Omega : \mathcal{H}(\Gamma) \to \mathcal{H}(\Gamma)$, tal que para dois vetores pertencentes a $\mathcal{H}(\Gamma)$,$|\varphi\rangle$ e $|\psi\rangle$ podemos fazer a seguinte associação

$$\Omega\,|\varphi\rangle = |\psi\rangle\,.$$

O operador é linear se

$$\Omega(c_1\,|\psi\rangle + c_2\,|\varphi\rangle) = c_1\Omega\,|\psi\rangle + c_2\Omega\,|\varphi\rangle\,.$$

O conjunto de operadores lineares, $\chi = (\Omega, \Theta, ...)$, atuando em $\mathcal{H}(\Gamma)$, é munido com a estrutura de um espaço vetorial a partir das definições das operações de soma vetorial

$$(\Omega + \Theta)\,|\psi\rangle = \Omega\,|\psi\rangle + \Theta\,|\psi\rangle$$

e de mutiplicação de um escalar por um vetor

$$(c\,\Omega)\,|\psi\rangle = c(\Omega\,|\psi\rangle).$$

Em geral, o ket $\Omega\,|\psi\rangle$ e o bra $\langle\psi|\,\Omega$, não são duais entre si, pois

$$\Omega\,|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi|\,\Omega^\dagger.$$

E consequentemente,

$$(\Theta\Omega)^\dagger \leftrightarrow \Theta^\dagger\Omega^\dagger.$$

O operador $\Omega^\dagger$ é chamado de adjunto de Ω. Caso seja um operador hermitiano, valerá a relação

$$\Omega = \Omega^\dagger.$$

Se for o caso, temos que

$$\langle\psi|\Omega|\varphi\rangle = \langle\varphi|\Omega^\dagger|\psi\rangle^\dagger\,.$$

É possível construir um operador a partir do produto de dois vetores de estado. Esse produto é conhecido como produto externo e é definido como

$$A = |\varphi\rangle\langle\psi|$$

e seu adjunto,

$$A^\dagger = |\psi\rangle\langle\varphi| \, .$$

Quando um operador linear Ω atua em um ket $|\omega\rangle$ gerando outro, proporcional a este, dizemos que $|\omega\rangle$ é autovetor ou autoestado de Ω. Ou seja,

$$\Omega \, |\omega\rangle = \omega \, |\omega\rangle \, ,$$

em que ω é um autovalor. Caso Ω seja hermitiano seus autovalores são reais, razão pela qual operadores desse tipo quase sempre se revelam como aqueles que representam algum tipo de observável físico.

4.2.1 Operadores Unitários

Um operador U é dito unitário se obedecer à seguinte condição

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1$$

ou seja $U^\dagger = U^{-1}$, seu adjunto é igual a seu inverso. Assim, dois vetores arbitrários $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ podem ser transformados da seguinte maneira

$$U \, |\psi\rangle = |\psi_1'\rangle \qquad \text{e} \qquad U \, |\psi_2\rangle = |\psi_2'\rangle \, .$$

Porém, temos que

$$\langle\psi_1'|\psi_2'\rangle = \langle\psi_1|U^\dagger U|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle \, .$$

Assim concluímos que o produto escalar, e consequentemente a norma é deixada inalterada sob uma transformação unitária.

4.2.2 Operador Translação em $\mathcal{H}(\Gamma)$

Agora iremos construir um operador que desloca o estado espacialmente e temporalmente, mantendo as outras características intocadas. Tal operação é chamada de translação infinitesimal. Tal operador deve observar quatro propriedades. Vamos denotá-lo por $T(a^\mu)$, definido por

$$T(a^\mu)\psi(q^\mu, p^\mu) = e^{i\phi}\psi(q^\mu + \frac{a^\mu}{2}, p^\mu), \tag{4.6}$$

onde $e^{i\phi}$ é uma fase arbitrária.

A primeira propriedade vem da conservação da probabilidade. Isto é, se o estado $|\psi\rangle$ é normalizado, então o estado transladado $T(a^\mu)|\psi\rangle$ também o será. Isso implica que a translação infinitesimal deve ser unitária, pois

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|T^\dagger(a^\mu)T(a^\mu)|\psi\rangle$$

A segunda propriedade é consequência de translações infinitesimais sucessivas não necessariamente na mesma direção. Por exemplo, uma translação infinitesimal a^μ seguida por outra b^μ pode ser interpretada como uma única translação que seja a soma vetorial de $a^\mu + b^\mu$, ou seja

$$T(a^\mu)T(b^\mu) = T(a^\mu + b^\mu).$$

A terceira propriedade vem do fato que uma translação no sentido oposto seja o mesmo que o inverso da translação original, portanto

$$T(-a^\mu) = T^{-1}(a^\mu).$$

E a quarte propriedade se refere ao fato que se $a^\mu \to 0$, a operação de translação se reduz ao operador identidade, isto é

$$\lim_{a^\mu \to 0} T(a^\mu) = 1.$$

Um operador que satisfaz essas propriedades pode ser escrito como

$$T(a^\mu) = e^{i\widehat{k}_\mu a^\mu}.$$

O que, através da relação de de Broglie, $\widehat{P}_\mu = \widehat{k}_\mu$, fica

$$T(a^\mu) = e^{i\widehat{P}_\mu a^\mu}.$$

Portanto, nessa representação o operador *5-momentum* é o gerador de translações, produzindo, também, uma fase. Resta-nos saber a forma deste operador. Utilizando a Eq. (4.6) e o fato que a expansão em primeira ordem do operador translação é dada por

$$T(a^\mu) = 1 + i\widehat{P}_\mu a^\mu,$$

temos

$$\big(1 + i\widehat{P}_\mu a^\mu\big)\psi(q^\mu, p^\mu) = e^{i\phi}\psi(q^\mu + \frac{a^\mu}{2}, p^\mu).$$

Usando o fato de que $f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x)$, chegamos a

$$\widehat{P}\psi(q^\mu, p^\mu) = \frac{\phi}{a^\mu}\psi(q^\mu, p^\mu) - \frac{i}{2}\partial_\mu\psi(q^\mu, p^\mu), \tag{4.7}$$

com $\partial_\mu = \partial_{q^\mu}$. Como o termo $\frac{\phi}{a^\mu}$ é um número, podemos, então, escrever

$$\frac{\phi}{a^\mu} = c_\mu.$$

Assim,

$$\phi = a^\mu c_\mu,$$

fazendo-nos concluir que c_μ tem unidade de *5-momento*. Fazendo, então, $c_\mu = p_\mu$, o operador *5-momento* fica dado por

$$\widehat{P}_\mu = p_\mu - \frac{i}{2}\partial_\mu.$$

Note que esse operador é hermitiano, pois $\partial_\mu = -\partial_\mu{}^\dagger$ sendo portanto um observável. Claramente vemos que

$$\widehat{P}_\mu = p_\mu \star .$$

Nosso próximo passo será a construção do operador posição.

4.2.3 O Operador $\widehat{Q}$ em $\mathcal{H}(\Gamma)$

O operador $\widehat{Q}^{\mu}$, assim como o operador *5-momentum*, deve ser um observável e, além disso, deve respeitar a transformação

$$T(a^{\mu})\widehat{Q^{\mu}}T^{\dagger}(a^{\mu}) = \widehat{Q}^{\mu} + a^{\mu}. \tag{4.8}$$

E, para que $\widehat{Q}^{\mu}$ possa ser fisicamente interpretado como 5-posição, deve obedecer à relação de Heisenberg $[\widehat{Q}^{\mu}, \widehat{P}^{\mu}] = ig^{\mu\nu}$. Iremos, então, considerar um operador posição arbitrário da forma

$$\widehat{Q}^{\mu} = Aq^{\mu} + Bp^{\mu} + C\frac{\partial}{\partial q_{\mu}} + D\frac{\partial}{\partial p_{\mu}},$$

onde A, B, C e D são constantes. Aplicando a relação de Heisenberg, com o operador $\widehat{P}$ dado por

$$\left[Aq^{\mu} + Bp^{\mu} + C\frac{\partial}{\partial q_{\mu}} + D\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}, p - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}\right] = ig^{\mu\nu}, \tag{4.9}$$

o que nos leva a

$$\frac{iA}{2} + D = i.$$

Logo, há uma infinidade de formas de escrever o operador 5-posição, todas igualmente válidas. Iremos escolher aqui uma para nossa representação que nos conduza à interpretação física do formalismo. Assim, vamos adotar $A = 1$, que implica em $D = \frac{i}{2}$. Assim o operador posição será

$$\widehat{Q}^{\mu} = q^{\mu} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}, \tag{4.10}$$

que pode ser escrito como

$$\widehat{Q}^{\mu} = q^{\mu} \star . \tag{4.11}$$

É importante ressaltar que fica satisfeita a Eq. (4.8), pois

$$e^{i\widehat{P}_\mu a^\mu}\widehat{Q}e^{-i\widehat{P}_\mu a^\mu} = \widehat{Q}^\mu + a^\mu,$$

em que foi usada a relação de *Baker-Hausdorff*

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty}[A,B]_n,$$

onde

$$[A,B]_0 = B, [A,B]_1 = [A,B], ..., [A,B]_n = [A,[A,B]_{n-1}], \quad n \geq 2.$$

Observa-se também que tal operador pode gerar translação nos momentos, e além disso, também de uma fase. Não é de difícil verificação ver que tais operadores se comportam realmente como momento e posição (basta a aplicação do boost $\widehat{K}^\mu$) [19].

4.3 O grupo de Galilei e o espaço de Hilbert Simplético

Nesta seção, estudaremos o grupo Galilei, considerando $H(\Gamma)$ como o espaço de representações. Para fazer isso, vamos considerar as transformações unitárias U:$\mathcal{H}(\Gamma) \to \mathcal{H}(\Gamma)$ tal que $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ seja invariante.

Usando o operador Λ, definimos um mapeamento $e^{i\frac{\Lambda}{2}} = \star$:$\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ chamado de produto de Moyal (ou estrela),

$$\begin{aligned} f \star g &= f(q,p)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p^\mu}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_\mu}\right)\right]g(q,p) \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p'_\mu} - \frac{\partial}{\partial p^\mu}\frac{\partial}{\partial q'_\mu}\right)\right]f(q,p)g(q',p')\Big|_{q',p'=q,p}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Os geradores de U podem ser introduzidos pelos seguintes operadores-estrela:

$$\widehat{F} = f(q,p)\star = f\left(q^\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}, p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}\right). \tag{4.13}$$

Para construir uma representação da álgebra de Galilei em $\mathcal{H}$, usaremos os seguintes operadores,

$$\widehat{P}^{\mu} = p^{\mu}\star = p^{\mu} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_{\mu}}, \tag{4.14a}$$

$$\widehat{Q}^{\mu} = q\star = q^{\mu} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}. \tag{4.14b}$$

e

$$\widehat{M}_{\nu\sigma} = M_{\nu\sigma}\star = \widehat{Q}_{\nu}\widehat{P}_{\sigma} - \widehat{Q}_{\sigma}\widehat{P}_{\nu}. \tag{4.14c}$$

Onde $\widehat{M}_{\nu\sigma}$ são os geradores de transformações homogêneas e $\widehat{P}_{\mu}$ do não-homogêneas. A partir deste conjunto de operadores unitários obtemos, após alguns cálculos simples, o seguinte conjunto de relações de comutações,

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\rho\sigma}\right] &= -i(g_{\nu\rho}\widehat{M}_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\nu\rho} - g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\nu\rho}),\\
\left[\widehat{M}_{\rho\sigma}, \widehat{P}_{\mu}\right] &= i(g_{\sigma\mu}\widehat{P}_{\rho} - g_{\mu\rho}\widehat{P}_{\sigma}),\\
\left[\widehat{P}_{\mu}, \widehat{P}_{\sigma}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Onde seguimos o mesmo procedimento de (2.20-2.23), porém aqui os operadores pertencem ao espaço de fase.

Seguindo também os procedimentos que levaram a Eq. (2.24), temos que as relações de comutação não nulas são dadas por

$$
\begin{aligned}
\left[\widehat{J}_i, \widehat{J}_j\right] &= i\epsilon_{ijk}\widehat{J}_k & \left[\widehat{J}_i, \widehat{K}_j\right] &= i\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k \\
\left[\widehat{J}_i, \widehat{C}_j\right] &= i\epsilon_{ijk}\widehat{C}_k & \left[\widehat{K}_i, \widehat{C}_j\right] &= i\delta_{ij}\widehat{D} + i\epsilon_{ijk}J_k \\
\left[\widehat{D}, \widehat{K}_i\right] &= i\widehat{K}_i & \left[\widehat{C}_i, \widehat{D}\right] &= i\widehat{C}_i \\
\left[\widehat{P}_4, \widehat{D}\right] &= i\widehat{P}_4 & \left[\widehat{J}_i, \widehat{P}_j\right] &= i\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k \\
\left[\widehat{P}_i, \widehat{K}_j\right] &= i\delta_{ij}\widehat{P}_5 & \left[\widehat{P}_i, \widehat{C}_j\right] &= i\delta_{ij}\widehat{P}_4 \\
\left[\widehat{P}_4, \widehat{K}_i\right] &= i\widehat{P}_i & \left[\widehat{P}_5, \widehat{C}_i\right] &= i\widehat{P}_i \\
\left[\widehat{D}, \widehat{P}_5\right] &= i\widehat{D}_5 & &
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Os invariantes desta álgebra em $\mathcal{I}_1$ em são,

$$I_1 = \widehat{P}_\mu \widehat{P}^\mu, \tag{4.16}$$

$$I_2 = \widehat{W}_{5\mu}\widehat{W}_5^\mu, \tag{4.17}$$

$$I_3 = \widehat{P}_5. \tag{4.18}$$

4.4 Representação Simplética da Equação de Schrödinger Covariantemente Galileana

Usando os invariantes Casimir I_1, e I_3, e aplicando em Ψ, temos:

$$
\begin{cases}
\widehat{P}_\mu \widehat{P}^\mu \Psi = k^2\Psi \\
\widehat{P}_5 \Psi = -m\Psi
\end{cases},
$$

utilizando (4.14a), temos

$$\left(p^\mu p_\mu - ip^\mu\partial_\mu - \tfrac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\right)\Psi(q,p) = k^2\Psi(q,p) \tag{4.19a}$$

$$\left(p_5 - \tfrac{i}{2}\partial_5\right)\Psi(q,p) = -m\Psi(q,p) \tag{4.19b}$$

uma solução para Eq. (4.19b) é

$$\Psi = e^{-2i[(p_5+m)q_5+(p_4+E)t]}\Phi(q,p).$$

A partir disso, obtemos

$$\frac{1}{2m}\left(p^2 - i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\nabla} - \frac{1}{4}\boldsymbol{\nabla}^2\right)\Phi = \left(E + \frac{k^2}{2m}\right)\Phi,$$

que é a forma usual da equação de Schrödinger independente do tempo no espaço de fase para a partícula livre de massa m, e uma energia cinética adicional, que podemos sempre tratar como o ponto zero de energia. Este é um resultado mostra a equivalência do formalismo aqui construído, da covariância galileana no espaço de fase, com o formalismo da mecânica quântica simplética no espaço euclidiano usual.

A Eq. (4.19a), e seu complexo conjugado, também pode ser obtida pela densidade Lagrangiana no espaço de fase (usamos $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial q_\mu}$)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}\partial^\mu\Psi(q,p)\partial_\mu\Psi^\dagger(q,p) + \frac{i}{2}p^\mu[\Psi(q,p)\partial_\mu\Psi^\dagger(q,p) \\ &- \Psi^\dagger(q,p)\partial_\mu\Psi(q,p)] + \left[p^\mu p_\mu - k^2\right]\Psi^\dagger\Psi = 0.\end{aligned}$$

A associação dessa representação com o formalismo de Wigner é dado por

$$f_w(q,p) = \Psi(q,p)\star\Psi^\dagger(q,p)$$

onde $f_w(q,p)$ é a função de Wigner. Para provarmos isso, reescrevemos a Eq. (4.19a) da seguinte forma

$$\widehat{P}_\mu\widehat{P}^\mu\Psi = p^2\star\Psi(q,p).$$

Multiplicando o lado direito da equação acima por $\Psi^\dagger$, nós temos

$$(p^2\star\Psi)\star\Psi^\dagger = k^2\Psi\star\Psi^\dagger, \tag{4.20}$$

porém, $\Psi^\dagger\star p^2 = k^2\Psi^\dagger$, portanto, nós temos também que

$$\Psi\star(\Psi^\dagger\star p^2) = k^2\Psi\star\Psi^\dagger. \tag{4.21}$$

Subtraindo a (4.21) de (4.20), obtemos

$$p^2\star f_w(q,p) - f_w(q,p)\star p^2 = 0, \tag{4.22}$$

que é o parentesis de Moyal $\{p^2, f_w\}_M$. Pela Eq. (3.57) a Eq. (4.22) se torna

$$p_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} f_w(q,p) = 0. \tag{4.23}$$

Onde a função de Wigner na variedade galileana é solução desta equação.

4.5 O Oscilador Harmônico Quântico

Para exemplificar a equivalência de nosso formalismo com o formalismo ususal resolveremos aqui o oscilador harmônico simples em uma dimensão e compararemos o resultado com aquele encontrado na seção (3.2).

Para facilitarmos nossas contas, escreveremos $m = \omega = \hbar = 1$, e $k = 0$ assim a equação do oscilador harmônico simples pode ser escirta como,

$$2\widehat{P}_4\widehat{P}_5\Psi = \left(\widehat{P}^2 + \widehat{Q}^2\right)\Psi,$$

ou

$$2\left(p_4 - \frac{i}{2}\partial_t\right)\left(p_5 - \frac{i}{2}\partial_s\right)\Psi = \left(\left(p^2 - ip\partial_q - \frac{1}{4}\partial_q^2\right) + \left(q^2 + iq\partial_p - \frac{1}{4}\partial_p^2\right)\right)\Psi$$

Separando as partes reais e imaginárias, temos

$$\left(p_4p_5 - \frac{1}{4}\partial_t\partial_s\right)\Psi = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_q^2 + \partial_p^2\right)\right)\Psi, \tag{4.24}$$

e

$$\left(p_4\partial_s + p_5\partial_t\right)\Psi = \left(-p\partial_q + q\partial_p\right)\Psi. \tag{4.25}$$

A Eq. (4.25) é simplesmente a equação de Liouville para a quasi-amplitude Ψ,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\{\Psi, h\},$$

onde $h = \frac{p^2+q^2}{2}$ e $\{\Psi, h\}$ é o parêntesis de Poisson. Portanto a Eq. (4.25) desceve a evolução temporal do sistema Ψ. Para a Eq. (4.24) fazemos uma separação de variável, com

$$\Psi = \psi(q,p)\phi(t,s)$$

, podemos então reescrever

$$\frac{1}{2}\left(p^2 + q^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_q^2 + \partial_p^2\right) - 2E\right)\psi(q,p) = 0, \tag{4.26}$$

e

$$\left(p_4 p_5 - \frac{1}{4}\partial_t\partial_s - \gamma\right)\phi(t,s) = 0, \tag{4.27}$$

onde, E e γ são constantes. Uma solução que satisfaz a equação Eq. (4.26) é $\psi(q,p) = \psi(4h)$. Logo, definindo $z = 4h$, temos

$$\partial_q = \frac{\partial z}{\partial q}\partial_z \rightarrow \partial_q = 4q\partial_z,$$

$$\partial_p = \frac{\partial z}{\partial p}\partial_z \rightarrow \partial_p = 4p\partial_z,$$

$$\partial^2 = 16q^2\partial_z^2 + 4\partial_z,$$
$$\partial_p^2 = 16p^2\partial_z^2 + 4\partial_z.$$

Assim, chegamos a

$$\left[\frac{z}{4} - z\partial_z^2 - \partial_z - E\right]\psi(z) = 0.$$

Escolhendo o ansatz $\psi(z) = e^{-\frac{z}{2}}L(z)$, temos

$$\left[z\partial_z^2 + (1-z)\partial_z + E - \frac{1}{2}\right]L(z) = 0,$$

Que é a equação de Laguerre

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + (m+1-x)\frac{\partial}{\partial x} + n\right)L_n^m(x) = 0,$$

com

$$m = 0 \qquad \text{e} \qquad n = E - \frac{1}{2} = 0, 1, 2, ...$$

com a energia dada por

$$E_n = n + \frac{1}{2}. \tag{4.28}$$

Portanto a solução para o oscilador harmônico quântico é dada por

$$\psi_n(q,p) = C_n e^{-(q^2+p^2)} L_n\big(2(q^2+p^2)\big), \tag{4.29}$$

onde L_n é o polinômio de Laguerre de ordem n e C_n o fator de normalização.

A forma geral do polinômio de Laguerre é dada por

$$L_n^m(x) = e^x \frac{x^m}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x}x^{n+m}\Big),$$

para $m = 0$,

$$L_n^m(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x}x^n\Big).$$

Para o estado fundamental, $n = 0$, temos

$$L_0(x) = 1,$$

portanto,

$$\psi_0(q,p) = C_0 e^{-(q^2+p^2)}. \tag{4.30}$$

Para o primeiro estado excitado, n=1,

$$L_1(x) = -x + 1,$$

logo,

$$\psi_1(q,p) = C_1 e^{-(q^2+p^2)}\Big(1 - 2(q^2+p^2)\Big). \tag{4.31}$$

Note que o resultado dado pela Eq. (4.31) representa uma amplitude de quasi-probabilidades no espaço de fase, não sendo, portanto a função de Wigner correspondente ao primeiro estado excitado do oscilador harmônico expresso em (3.8).

Para calcularmos a função de Wigner tomamos, $f_w^n = \psi_n(q,p) \star \psi_n^\dagger(q,p)$. Para o estado fundamental,

$$f_w^n = \psi_n(q,p) \star \psi_n^\dagger(q,p).$$

Como $z = 4h = 2(q^2+p^2)$, a Eq. (4.30) pode ser escrita como

$$\psi_0(h) = C_0 e^{-2h},$$

e portanto, como as amplitudes são reais,

$$f_w^n = C_0 e^{-2h} \star \psi_0(h) = e^{-2\hat{h}}\psi_0.$$

Como $\psi_n(q,p)$ é uma autofunção de $\hat{h} = h\star$, podemos escrever

$$e^{-2\hat{h}}\psi_0 = e^{-2E_0}\psi_0(q,p),$$

como $E_0 = 1/2$, temos

$$f_w^0 = (C_0)^2 e^{-1} e^{-(q^2+p^2)}, \tag{4.32}$$

onde, $C_0 = \sqrt{\frac{e}{\pi}}$ é a constante de normalização.

Para f_w^1, como $E_1 = 3/2$ temos

$$f_w^1 = (C_1)^2 5 e^{-3} e^{-(q^2+p^2)}\big(2q^2 + 2p^2 - 1\big), \tag{4.33}$$

com $C_1 = \sqrt{\frac{e^3}{5\pi}}$.

As figuras (4.1) e (4.2) demonstram o comportamento das amplitude de quasi-probabilidade, dadas pelas eqs. (4.30) e(4.31),

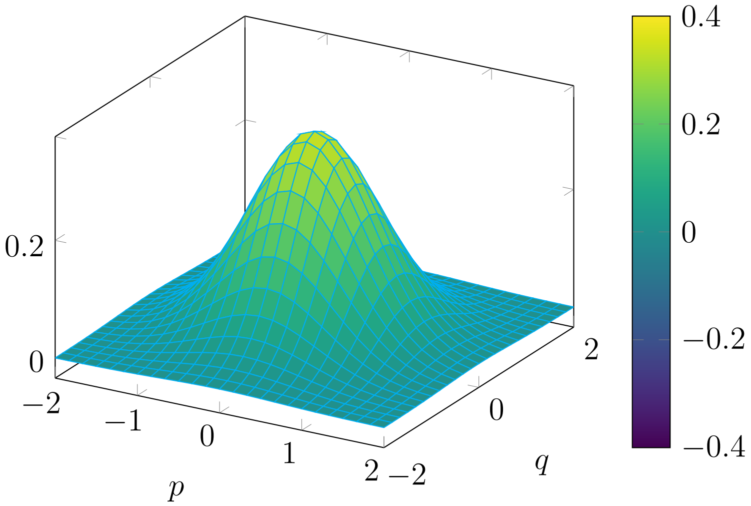


Figura 4.1: *Amplitude de quasi-probabilidade para o oscilador harmônico, estado fundamental*

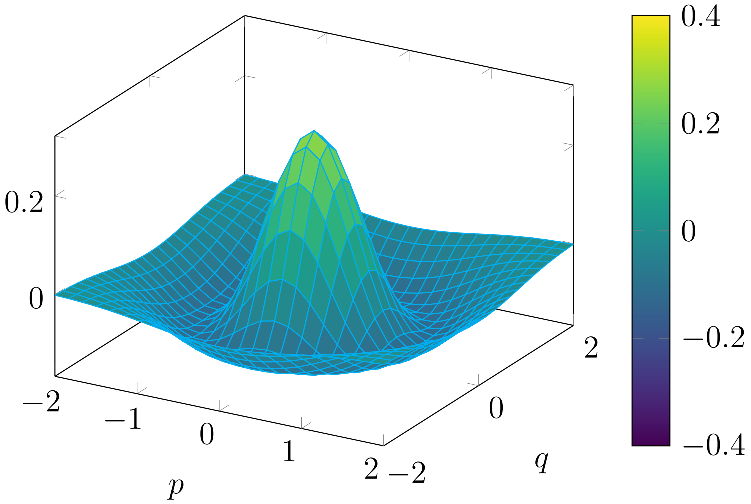


Figura 4.2: *Amplitude de quasi-probabilidade para o oscilador harmônico, primeiro estado excitado*

Note que as soluções encontradas para a função de Wigner, Eq. (4.32) e Eq. (4.33), coincidem com aquelas do capítulo 2, Eq. (3.7) e Eq. (3.8), quando foi-se utilizada apenas a definição da função de Wigner. A solução geral da função de Wigner é dada por

$$\frac{(-1)^n}{n!}e^{-(q^2+p^2)}L_n\big(2(q^2+p^2)\big),$$

onde na quasi-amplitude de probabilidade, temos

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}e^{-(q^2+p^2)}L_n\big(2(q^2+p^2)\big),$$

o que nos dá a diferença de concavidade das figuras (4.2) e (3.2) . Esse resultado é consistente, já que $\psi(q,p)$ e $f_w(q,p)$ obedecem à mesma equação de autovalores. Notemos que através desse procedimento, é possível encontrar mais de uma solução para a função de Wigner além da usual, já que podemos ter

$$f_w = \psi_1 \star \psi_2.$$

Logo, agora é possível estudar efeitos de interferência.

Capítulo 5

Mecânica Quântica Simplética e a Representação de Spin 1/2

No capítulo anterior as representações unitárias simpléticas para o grupo estendido de Galilei foram estudadas. O nosso formalismo é baseado na estrutura não-comutativa do produto-estrela, e usando a abordagem da teoria de grupo como guia, uma teoria física consistente no espaço de fase não-relativístico foi construída de forma covariante. O sistema quântico é descrito por uma quasi-amplitude de probabilidade que está associada à função de Wigner pelo produto estrela. Como resultado, as equações do tipo Klein-Gordon, (equação de Schrödinger covariantemente galileana) foi derivada no espaço de fase. Neste capítulo iremos derivar a equação de Pauli-Schrödinger no espaço de fase, também escrita de forma covariantemente galileana, que tem a forma de uma equação tipo Dirac no espaço de fase. Como aplicação, estudamos a equação de Dirac com interação eletromagnética no espaço de fase, e encontramos os níveis de Landau.

5.1 A Equação de Pauli-Schrödinger no Espaço de Fase

A fim de estudar as representações das partículas de spin 1/2, iremos introduzir o operador invariante $\gamma^\mu \widehat{P}_\mu$, onde, $\widehat{P}_\mu = p_\mu - \frac{i}{2}\partial_\mu$, tal que temos

$$\left(\gamma^\mu \widehat{P}_\mu - k\right)\Psi(q,p) = 0 \tag{5.1}$$

ou

$$\gamma^\mu\left(p_\mu - \frac{i}{2}\partial_\mu\right)\Psi(p,q) = k\Psi(q,p)$$

Que é a equação de Pauli-Schrödinger escrita de forma covariantemente galileana. Consequentemente, a condição da camada de massa é obtida seguindo os passos habituais.

$$(\gamma^\mu \widehat{P}_\mu)(\gamma^\nu \widehat{P}_\nu)\Psi(q,p) = k^2\Psi(q,p),$$

portanto

$$(\gamma^\mu \widehat{P}_\mu)(\gamma^\nu \widehat{P}_\nu) = k^2 = \widehat{P}_\mu \widehat{P}^\mu,$$

porém, $\widehat{P}^\mu \widehat{P}_\nu = \widehat{P}^\nu \widehat{P}_\mu$, temos então

$$\frac{1}{2}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\big)\widehat{P}_\nu \widehat{P}_\mu = \widehat{P}^\mu \widehat{P}_\mu$$

então

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

A Eq. (5.1) é derivada da densidade Lagrangiana para spin 1/2 partículas no espaço de fase, que é dada por

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{i}{4}\Big((\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi - \bar{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu\Psi)\Big) - (k - \gamma^\mu p_\mu)\Psi\bar{\Psi}.$$

onde $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\zeta$, com

$$\zeta = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\gamma^4 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

No caso da equação de Pauli-Schrödinger a associação com a função de Wigner é dada por

$$f_w = \Psi \star \bar{\Psi},$$

com cada componente satisfazendo a Eq. (4.23).

5.2 O Elétron em um Campo Externo

Vamos examinar as simetrias de calibre no espaço de fase exigindo a invariância da Lagrangiana por uma transformação de calibre local dada por $e^{\Lambda(q,p)}\Psi$. Isso leva ao acoplamento mínimo,

$$\widehat{P}_\mu \Psi \to \left(\widehat{P}_\mu - e\widehat{A}_\mu\right)\Psi = \left(p_\mu - \frac{i}{2}\partial_\mu - e\widehat{A}_\mu\right)\Psi,$$

onde $\widehat{A}_\mu = A(\widehat{Q}_\mu)$ é o 5-potencial. Isso descreve um elétron em um campo externo, com a Eq. de Pauli-Schrödinger dado por

$$\left[\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i}{2}\partial_\mu - e\widehat{A}_\mu\right) - k\right]\Psi = 0. \tag{5.2}$$

Em ordem de ilustrar tal resultado, vamos considerar um elétron em um campo externo dado por $\widehat{A}_\mu = (\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{A}_4, \widehat{A}_5)$, com $\widehat{A}_4 = -\phi$ e $\widehat{A}_5 = 0$. Considerando a seguinte representação das matrizes γ^μ

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \qquad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli e $\sqrt{2}$ é a matriz identidade 2x2 multiplicada por $\sqrt{2}$. Podemos escrever o objeto Ψ, como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

onde φ e χ são 2-espinores dependentes de $x^\mu; \mu = 1, ..., 5$. Portanto, na representação em que k=0, a eq (5.2) se reduz a

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{i}{2}\partial_q - e\widehat{\mathbf{A}}\right)\varphi - \sqrt{2}\left(p_5 - \frac{i}{2}\partial_5\right)\chi = 0,$$

$$\sqrt{2}\left(p_4 - \frac{i}{2}\partial_t - e\phi\right)\varphi - \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{i}{2}\partial_q - e\widehat{\mathbf{A}}\right)\chi = 0. \tag{5.3}$$

Resolvendo as equações acopladas chegamos a uma equação para ϕ e uma para χ, dadas por

$$\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{i}{2}\partial_q-e\widehat{\mathbf{A}}\right)\right]^2\varphi &= 2\left(p_4-\frac{i}{2}\partial_t-e\phi\right)\left(p_5-\frac{i}{2}\partial_5\right)\varphi \\
\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{i}{2}\partial_q-e\widehat{\mathbf{A}}\right)\right]^2\chi &= 2\left(p_4-\frac{i}{2}\partial_t-e\phi\right)\left(p_5-\frac{i}{2}\partial_5\right)\chi
\end{aligned}$$

Que são as equações de Pauli-Schrödinger para ϕ e χ respectivamente. Substituindo os autovalores de $\widehat{P}_4$ e $\widehat{P}_5$, temos

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{i}{2}\partial_q-e\widehat{\mathbf{A}}\right)\right)^2+e\phi\right]\varphi &= E\varphi \\
\left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{i}{2}\partial_q-e\widehat{\mathbf{A}}\right)\right)^2+e\phi\right]\chi &= E\chi
\end{aligned}$$

Que é a equação usual de Pauli-Schrödinger no espaço de fase independente do tempo.

5.3 Solução da Equação de Pauli-Schrödinger com Interações Eletromagnéticas

Nessa seção iremos estudar a solução para a equação de Pauli-Schrödinger com interação eletromagnética desenvolvida na seção anterior. A equação que descreve uma partícula de spin 1/2 escrita no formalismo covariantemente galileano no espaço de fase é dada pela Eq. (5.2)

$$\left[\gamma^\mu\left(\widehat{P}_\mu-e\widehat{A}_\mu\right)-k\right]\Psi=0.$$

Fazendo a seguinte definição

$$\Psi=\left[\gamma^\nu\big(\widehat{P}_\nu-e\widehat{A}_\nu\big)+k\right]\psi, \tag{5.4}$$

onde $\widehat{P}_\nu=(p_\nu-\frac{i}{2}\partial_\nu)$.

Portanto, temos

$$\Big[\gamma^\mu\gamma^\nu\big(\widehat{P}_\mu - e\widehat{A}_\mu\big)\big(\widehat{P}_\nu - e\widehat{A}_\nu\big) - k^2\Big]\psi = 0. \tag{5.5}$$

Considerando $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}$, onde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\Big(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\Big) = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Usando estes resultados a Eq. (5.5) toma a forma de

$$\left(\widehat{P}^\mu\widehat{P}_\mu - e\sigma^{\mu\nu}\left[\widehat{P}^\mu, \widehat{A}^\nu\right] + e^2\widehat{A}^\mu\widehat{A}_\mu\right)\psi = k^2\psi.$$

Fazendo $\widehat{A}^i = \frac{1}{2}e^{ijk}B_j\widehat{Q}_k$, com $\widehat{Q}_\mu = (q_\mu + \frac{i}{2}\partial_{p^\mu})$ e $\widehat{A}^4 = \widehat{A}^5 = 0$, que representa o calibre escolhido. Nós também escolhemos o campo magnético como $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

Confinando o movimento de uma partícula no plano (q_1, q_2), i.e. $\widehat{P}_3 = 0$, nós temos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
- \;& 2\left(p_4 - \frac{i}{2}\partial_t\right)\left(p_5 - \frac{i}{2}\partial_s\right)\psi + \left(p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big) - eB\left[\frac{i}{2}\Big(p_2\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)\right.\right. \\
+ \;& \left.\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial_{q_2}\partial_{p_1}} - \frac{\partial^2}{\partial_{q_1}\partial_{p_2}}\Big)\right] - i\Big(p_2\frac{\partial}{\partial q_2} + p_1\frac{\partial}{\partial q_2}\Big) - eB\left[(q_1p_2 - q_2p_1) - \frac{i}{2}\Big(q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\Big)\right] \\
+ \;& \left.\frac{e^2B^2}{4}\left[\Big(q_1 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_1}\Big)^2 + \Big(q_2 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)^2\right] - ie\sigma^{12}B\right)\psi = k^2\psi,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde $\sigma^{12} = -i\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$, e $\partial_s = \partial_{q_5}$.

Fazendo

$$\psi = \begin{pmatrix} \Phi(q^\mu, p^\mu) \\ \Theta(q^\mu, p^\mu) \end{pmatrix},$$

temos duas equações desacopladas, uma para $\Phi(q^\mu, p^\mu)$ e uma para $\Theta(q^\mu, p^\mu)$.

$$
\begin{aligned}
- \;& 2\left(p_4 - \frac{i}{2}\partial_t\right)\left(p_5 - \frac{i}{2}\partial_s\right)\Phi(q^\mu, p^\mu) + \left(p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big) - eB\left[\frac{i}{2}\Big(p_2\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)\right.\right.\\
+ \;& \left.\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial_{q_2}\partial_{p_1}} - \frac{\partial^2}{\partial_{q_1}\partial_{p_2}}\Big)\right] - i\Big(p_2\frac{\partial}{\partial q_2} + p_1\frac{\partial}{\partial q_2}\Big) - eB\left[(q_1p_2 - q_2p_1) - \frac{i}{2}\Big(q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\Big)\right]\\
+ \;& \left.\frac{e^2B^2}{4}\left[\Big(q_1 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_1}\Big)^2 + \Big(q_2 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)^2\right] - e\sigma^3 B\right)\Phi(q^\mu, p^\mu) = k^2\Phi,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
- \;& 2\left(p_4 - \frac{i}{2}\partial_t\right)\left(p_5 - \frac{i}{2}\partial_s\right)\Theta(q^\mu, p^\mu) + \left(p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big) - eB\left[\frac{i}{2}\Big(p_2\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)\right.\right.\\
+ \;& \left.\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial_{q_2}\partial_{p_1}} - \frac{\partial^2}{\partial_{q_1}\partial_{p_2}}\Big)\right] - i\Big(p_2\frac{\partial}{\partial q_2} + p_1\frac{\partial}{\partial q_2}\Big) - eB\left[(q_1p_2 - q_2p_1) - \frac{i}{2}\Big(q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\Big)\right]\\
+ \;& \left.\frac{e^2B^2}{4}\left[\Big(q_1 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_1}\Big)^2 + \Big(q_2 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)^2\right] - e\sigma^3 B\right)\Theta(q^\mu, p^\mu) = k^2\Theta.
\end{aligned}
$$

Resolvendo para $\Phi(q^\mu, p^\mu)$. Tomemos $\Phi(q^\mu, p^\mu) = \varphi(q^i, p^i)\phi(q^4, q^5, p^4, p^5)$. Isto nos leva as seguintes equações

$$
\left(p_4 - \frac{i}{2}\partial_t\right)\left(p_5 - \frac{i}{2}\partial_s\right)\phi = mE\phi + k^2\phi, \tag{5.7a}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\Big) - eB\left[\frac{i}{2}\Big(p_2\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial p_2}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial_{q_2}\partial_{p_1}} - \frac{\partial^2}{\partial_{q_1}\partial_{p_2}}\Big)\right]\right.\\
- \;& i\Big(p_2\frac{\partial}{\partial q_2} + p_1\frac{\partial}{\partial q_2}\Big) - eB\left[(q_1p_2 - q_2p_1) - \frac{i}{2}\Big(q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1}\Big)\right]\\
+ \;& \left.\frac{e^2B^2}{4}\left[\Big(q_1 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_1}\Big)^2 + \Big(q_2 + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)^2\right] - e\sigma^3 B\right)\varphi = 2mE\varphi + k^2\varphi
\end{aligned} \tag{5.7b}
$$

A solução da equação da Eq. (5.7a) é

$$
\phi = Ce^{-2i[(p_5+m)q_5+(p_4+E)t]},
$$

onde C_1 é uma constante de normalização. Para resolvermos a Eq. (5.7b) faremos uma mudança de variável, definida por

$$w(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^2 + eB(q_2 p_1 - q_1 p_2) + \frac{e^2 B^2}{4}(q_1^2 + q_2^2).$$

Após um longo cálculo, é mostrado que a parte imaginária desta equação é identicamente nula, o que nos dá

$$w\varphi - e^2 B^2 \frac{\partial \varphi(w)}{\partial w} - e^2 B^2 w \frac{\partial^2 \varphi(w)}{\partial w^2} = (2mE + esB + k^2)\varphi(w),$$

onde $\sigma^3 \varphi = s\varphi$, com $s = \pm 1$. Fazendo $\omega = w/(eB)$ e definindo $f(\omega) = \exp(\omega)\varphi(w)$, a equação para $f(w)$ é

$$\omega f''(\omega) + (1 - 2\omega) f'(\omega) - (1 - \alpha) f(\omega) = 0, \tag{5.8}$$

onde $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\omega}$ e $\alpha = (2mE + seB + k^2)/eB$. A equação (5.9) é uma equação hipergeométrica confluente, mais especificamente a equação de Kummer

$$\omega f''(\omega) + (1 - 2\omega) f'(\omega) - a f(\omega) = 0,$$

com $a = (1 - \alpha)$, com soluções físicas dadas por

$$f_n(\omega) = A_n U\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, 1, 2\omega\right),$$

onde $U(a, b, x)$ são as funções de Kummer de segundo tipo e A_n são constantes. Porém, percebe-se que, se $a = -n$ com $n = 0, 1, 2, ...$, a série $U(a, b, x)$ se torna uma série polinomial em x de grau não excedente de n. Portanto, escrevendo,

$$\alpha - 1 = 2n,$$

temos a seguinte relação de autovalor

$$E = \omega_c \left(n + \frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) - \frac{k^2}{2m},$$

com $\omega_c = \frac{eB}{m}$ e correspondendo as seguintes autofunções

$$f_n(w) = A_n U\left(-n, 1, \frac{2w}{eB}\right), \tag{5.9}$$

tal que A_n são constantes de normalização. Logo, as quasi-amplitudes se tornam,

$$\Phi_n = C_1 e^{-2i[(p_5+m)q_5+(p_4+E)t]}\left(\exp\Big(-\frac{w}{eB}\Big)A_n U\left(-n, 1, \frac{2w}{eB}\right)\right). \tag{5.10}$$

O análogo é válido para Θ. Esses cálculos fornecem o valor correto dos autoestados de energias para férmios em um campo magnético externo, o tão bem conhecido problema de Landau. Portanto, o formalismo é consistente com o cálculo padrão. Para encontrar a função de Wigner correspondente basta fazer $\psi_n \star \bar{\psi}_n$.

Para encontrarmos f_w, faremos o mesmo procedimento feito para o oscilador harmônico. Basta perceber que $w = 2mh$, com $h = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + eB(q_2p_1 - q_1p_2) + \frac{e^2B^2}{4}(q_1^2 + q_2^2)\right)$.

Logo

$$\psi_0 = C_0 e^{-2h/\omega_c}$$

Portanto

$$f_w^0 = C_0 e^{-2h/\omega_c} \star \psi_0 = C_0 e^{-2\hat{h}/\omega_c}\psi_0 = C_0 e^{-2E_0/\omega_c}\psi_0$$

Assim a função de Wigner do estado fundamental para a partícula de spin $1/2$ e $-1/2$ são dadas respectivamente

$$f_w^{0^+} = (C_{0^+})^2 \frac{1}{e^2} e^{-(p_1^2+p_2^2+eB(q_2p_1-q_1p_2)+\frac{e^2B^2}{4}(q_1^2+q_2^2))/eB},$$

e

$$f_w^{0^-} = (C_{0^-})^2 e^{-(p_1^2+p_2^2+eB(q_2p_1-q_1p_2)+\frac{e^2B^2}{4}(q_1^2+q_2^2))/eB}.$$

Para o caso de $n = 1$ temos

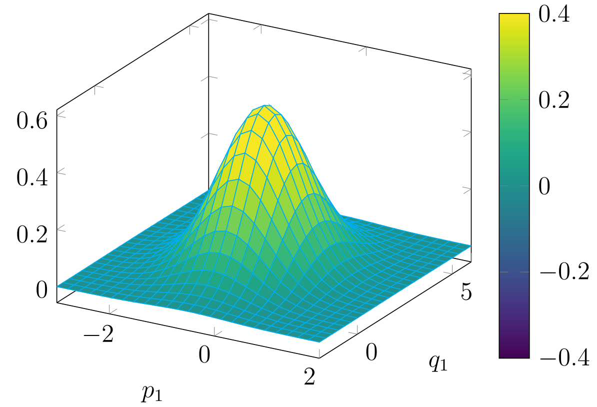
$$
\begin{aligned}
f_w^{1^+} &= (C_{1^+})^2 \frac{3}{e^4} e^{-(p_1^2+p_2^2+eB(q_2p_1-q_1p_2)+\frac{e^2B^2}{4}(q_1^2+q_2^2))/eB} \\
&\times \left(2\Big(p_1^2+p_2^2+eB\big(q_2p_1-q_1p_2\big)+\frac{e^2B^2}{4}\big(q_1^2+q_2^2\big)\Big)-1\right),
\end{aligned}
$$

e

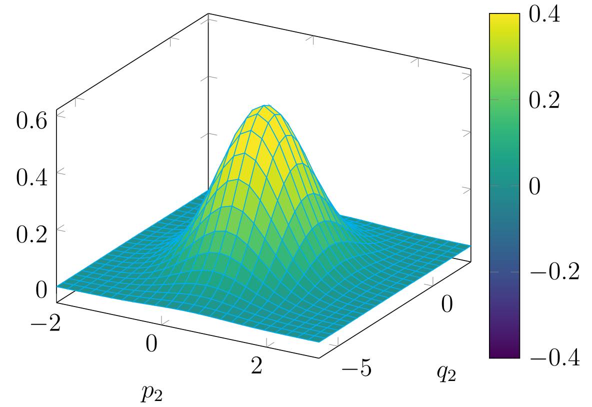
$$
\begin{aligned}
f_w^{1^-} &= (C_{1^-})^2 \frac{1}{e^2} e^{-(p_1^2+p_2^2+eB(q_2p_1-q_1p_2)+\frac{e^2B^2}{4}(q_1^2+q_2^2))/eB} \\
&\times \left(2\Big(p_1^2+p_2^2+eB\big(q_2p_1-q_1p_2\big)+\frac{e^2B^2}{4}\big(q_1^2+q_2^2\big)\Big)-1\right).
\end{aligned}
$$

As figuras abaixo, Fig.(5.1) e Fig.(5.2), mostram o comportamento das quasi-amplitudes e funções de Wigner no estado fundamental e no primeiro estado excitado. Corte em q_1 e p_1 considerando q_2 e p_2 constantes, corte em p_2 e q_2 considerando q_1 e p_1 constantes. Para facilitar a visualização consideramos $e = B = m = 1$.

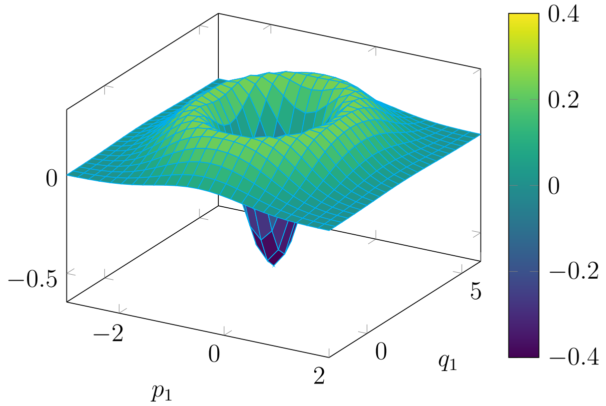
Figura 5.1: *Quasi-amplitudes de Probabilidades*



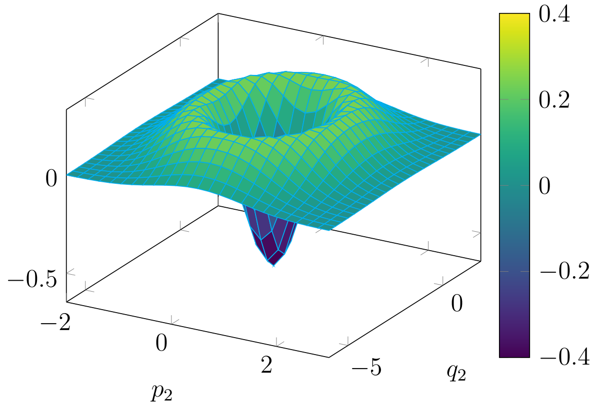
(a) *Quasi-amplitude de probabilidade para o nível de Landau (corte em q_1,p_1), estado fundamental.*



(b) *Quasi-amplitude de probabilidade para o nível de Landau (corte em q_2,p_2), estado fundamental.*

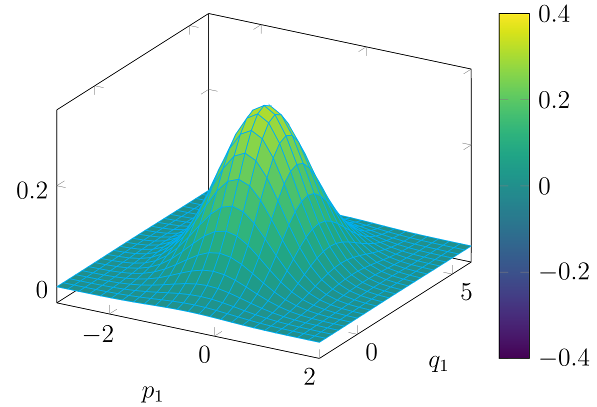


(c) *Quasi-amplitude de probabilidade para o nível de Landau (corte em q_1,p_1), primeiro estado excitado.*

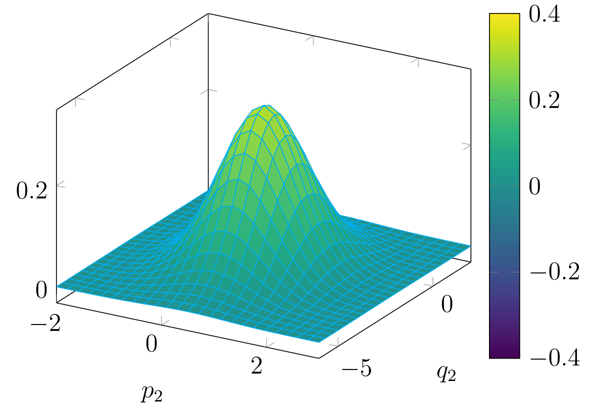


(d) *Quasi-amplitude de probabilidade para o nível de Landau (corte em q_2,p_2), primeiro estado exitado.*

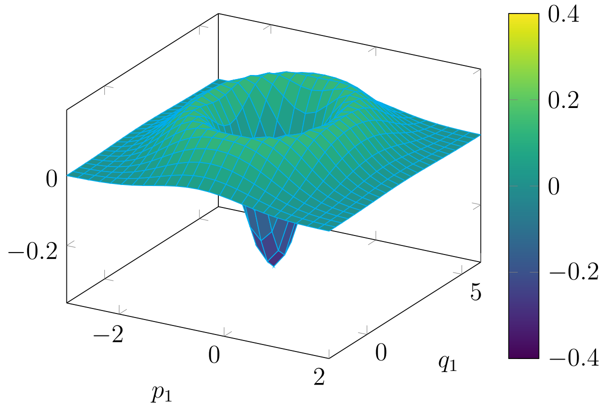
Figura 5.2: *Funções de Wigner*



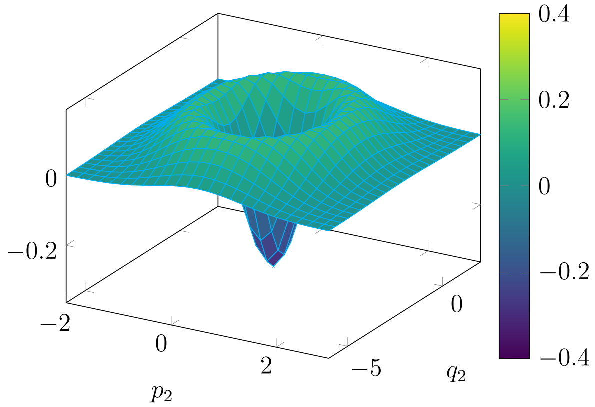
(a) *Função de Wigner para o nível de Landau (corte em q_1,p_1), estado fundamental.*



(b) *Função de Wigner para o nível de Landau (corte em q_2,p_2), estado fundamental.*



(c) *Função de Wigner para o nível de Landau (corte em q_1,p_1), primeiro estado excitado.*



(d) *Função de Wigner para o nível de Landau (corte em q_2,p_2), primeiro estado exitado.*

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Estudamos a equação para partículas de spin 1/2, a equação de Pauli-Schrödinger, no contexto da covariância galileana e depois construímos um formalismo no espaço de fase usando tal covariância. Iniciamos com uma apresentação acerca da variedade galileana onde a utilizamos para revisar a construção da covariância galileana e as representações da mecânica quântica nesse formalismo, a saber a representação escalar e de spin 1/2, a equação de Schrödinger (tipo-Klein-Gordon) e a equação de Pauli-Schrödinger (tipo-Dirac) respectivamente. Na equação tipo-Dirac introduzimos uma interação eletromagnética de campo externo e demonstramos que o fator giromagnético, $g = 2$, aparece sem necessidade de adicioná-lo ad-hoc. Com uma modificação na equação de Pauli, também conseguimos recuperar o acoplamento de spin-órbita escrito em sua forma usual para potenciais centrais.

Fizemos uma revisão do formalismo no espaço de fase detalhando as propriedades da função de Wigner e do produto esteala de Moyal. Apresentamos a equivalência dos operadores-estrela no espaço de fase com os operadores da formulação usual da mecânica quântica.

Construímos o formalismo da mecânica quântica do espaço de fase no contexto da covariância galileana e chegamos nas representações das equações de spin 0 e spin 1/2, onde para a equação de spin 1/2, a equação tipo-Dirac, estudamos o elétron em um campo externo e com a solução suposta conseguimos recuperar a equação de Pauli-Schrödinger usual (escrita de forma não covariante) para o espaço de fase.

Perspectivas: Desejamos expandir o formalismo covariantemente galileano na mecânica quântica simplética para mais equações de campos para os demais spins, além de estudar sistemas com outros acoplamentos além do acoplamento mínimo. Outro caminho que queremos seguir é expandir o formalismo para estudo de espaços conformais.

Referências Bibliográficas

1 WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 149–204, 1939. 1

2 TAKAHASHI, Y. Towards the many-body theory with the galilei invariance as a guide. 1. *Fortschritte der Physik*, v. 36, n. 1, p. 63–81, 1988. 1

3 OMOTE, M. et al. Galilean covariance e the schrödinger equation. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, Wiley Online Library, v. 37, n. 12, p. 933–950, 1989. 1, 5

4 SANTANA, A. E. Sobre covariância galileana e o campo de schrödinger. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 19, n. 1, p. 227, 1997. 1, 5

5 DIRAC, P. A. M. Note on exchange phenomena in the thomas atom. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1930. v. 26, n. 3, p. 376–385. 1

6 WIGNER, E. Über das überschreiten von potentialschwellen bei chemischen reaktionen. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, De Gruyter Oldenbourg, v. 19, n. 1, p. 203–216, 1932. 1, 19

7 WEYL, H. Quantenmechanik und gruppentheorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 46, n. 1-2, p. 1–46, 1927. 2, 19

8 VILLE, J. Cables et transmission. *V*, v. 2, p. 61, 1948. 2, 19

9 MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1949. v. 45, n. 1, p. 99–124. 2, 19

10 WEINBUB, J.; FERRY, D. K. Recent advances in wigner function approaches. *Applied Physics Reviews*, AIP Publishing, v. 5, n. 4, p. 041104, 2018. 2

11 HILLERY, M. O. S. M. et al. Distribution functions in physics: fundamentals. *Physics reports*, Elsevier, v. 106, n. 3, p. 121–167, 1984. 2

12 CURTRIGHT, T.; FAIRLIE, D.; ZACHOS, C. Features of time-independent wigner functions. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 2, p. 025002, 1998. 2

13 OLIVEIRA, M. D. Mecânica quântica no espaço de fase, dissertação de mestrado. 3

14 OLIVEIRA, M. D. et al. Symplectic quantum mechanics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 312, n. 2, p. 492–510, 2004. 3

15 AMORIM, R. G. G. Formulação de teorias de campos via estruturas simpléticas e o produto de weyl, dissertação de mestrado. 2006. 3, 20

16 AMORIM, R. G. G. Geometria nao-comutativa e teoria de campos simplética, tese de doutorado. 2009. 3, 20

17 FARIAS, H. D. Função de wigner, quasi-amplitudes de probabilidades e sistemas dissipativos, dissertação de mestrado. 2014. 3, 20

18 PAIVA, R. A. S.; AMORIM, R. G. G. Quantum physics in phase space: an analysis of simple pendulum. 2018. 3

19 FARIAS, H. D. et al. Wigner function and non-classicality for oscillator systems. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, p. 1–11, 2019. 3, 48

20 MONTIGNY, M. de et al. Poincaré gauge theory and galilean covariance. Annals of Physics, 1999. 5

21 SANTANA, A. E.; KHANNA, F. C.; TAKAHASHI, Y. Galilei covariance and (4,1)-de Sitter space. *Progress of theoretical physics*, Oxford University Press, v. 99, n. 3, p. 327–336, 1998. 5

22 ABREU, L. M. et al. Covariância galileana e estruturas simpléticas na variedade de cangemi-jackiw. 5

23 SANTOS, E. S. et al. Galilean covariant lagrangian models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 37, n. 41, p. 9771, 2004. 14

24 FILHO, J. S. C. Teoria quântica no espaço de fase: modelo de hénon-heiles e simetrias de calibre. 20

25 BALLENTINE, L. E. *Quantum mechanics: a modern development*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1998. 20

26 MARCHIOLLI, M. A. Quantum mechanics in phase space: I. the weyl-wigner formalism. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 24, n. 4, p. 421–436, 2002. 20

27 WEZEMAN, R. *Weyl quantization and Wigner distributions on phase space*. Tese (Doutorado), Groningen, 2014. Disponível em: ⟨http://fse.studenttheses.ub.rug.nl/11920/⟩. 20

28 SCHLEICH, W. P. *Quantum Optics in Phase Space Wiley*. [S.l.]: Berlin, 2001. 24