UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE RUPTURA EM VIGAS DE CONCRETO CONSIDERANDO OS ASPECTOS DINÂMICOS

MAURA ANGÉLICA MILFONT SHZU

ORIENTADORA: GRACIELA NORA DOZ DE CARVALHO

TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

PUBLICAÇÃO: E.TD - 003 A/06
BRASÍLIA/DF: ABRIL – 2006

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE RUPTURA EM VIGAS DE CONCRETO CONSIDERANDO OS ASPECTOS DINÂMICOS

MAURA ANGÉLICA MILFONT SHZU

TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISÍTOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

____

Profª Graciela Nora Doz de Carvalho, Dr.Ing. (ENC-UnB)
(Orientadora)

____

Prof. José Luís V. de Brito, Dr.Sc. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)

____

Profª Yosiaki Nagato, Dr.Sc. (ENC-UnB)
(Examinador interno)

____

Prof. Ignacio Iturrioz, Dr.Sc (UFRGS)
(Examinador Externo)

____

Profª. Silvana Maria Bastos Afonso e Silva, Ph.D. (UFPE)
(Examinadora Externa)

BRASÍLIA/DF, 19 DE ABRIL DE 2006

FICHA CATALOGRÁFICA

SHZU, MAURA ANGÉLICA MILFONT
Avaliação do Processo de Ruptura em Vigas de Concreto Considerando os Aspectos Dinâmicos. [Distrito Federal] 2006.
xxiii, 179p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutora, Estruturas e Construção Civil, 2006). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Método dos Elementos Discretos	2.Diagrama constitutivo
3.Propagação da fissura	4. Concreto
I. ENC/FT/UnB	II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SHZU, M. A. M. (2006). Avaliação do Processo de Ruptura em Vigas de Concreto Considerando os Aspectos Dinâmicos. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-003A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 179p.

CESSÃO DE DIREITOS

Maura Angélica Milfont Shzu
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília – UnB
Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 – Brasília – DF – Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas manifestações constantes de sua presença em minha vida.

Ao meu esposo, Tawid, pelo amor sincero e desmedido, pelo apoio amigo, pela confiança e pelo incentivo.

Ao meu filho, João Pedro, nas vezes que me propicia momentos mágicos ao brincar dentro do meu ventre.

Aos meus pais pelo entusiasmo e motivação em todas as fases de minha vida.

As minhas irmãs pelo carinho e união, especialmente minha irmã Lara e meu cunhado Adonis que muito ajudaram na fase final de minha tese.

À professora Graciela Doz pela orientação de extrema competência, pela paciência, incentivo, dedicação e amizade.

Aos professores do PEEC pelos conhecimentos transmitidos.

Ao professor Tarcísio Marciano da Rocha Filho, do departamento de Física, pelo interesse e satisfação em dividir seus conhecimentos científicos, exercendo assim seu papel profissional e humano.

Aos colegas do PECC que de uma forma ou de outra contribuíram para o meu amadurecimento pessoal e profissional, especialmente Carla Nascimento, Rosanna Duarte e Rúbia Carneiro pelo carinho e amizade.

Aos professores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Ignácio Iturrioz, Roberto Rios e Virgínia d'Ávila, pelos esclarecimentos prestados sempre que busquei.

À Universidade de Brasília pela oportunidade, e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Dedico esta página a todas
as pessoas que apostaram no meu
crescimento profissional, em
especial ao meu esposo, Tawid,
pela confiança depositada com a
qual me ajuda a subir os degraus
da vida.

RESUMO

AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE RUPTURA EM VIGAS DE CONCRETO CONSIDERANDO OS ASPECTOS DINÂMICOS.

Autor: Maura Angélica Milfont Shzu
Orientadora: Graciela Doz
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
Brasília, abril de 2006

O concreto é um material quase-frágil e heterogêneo, e esta característica é favorável ao surgimento de fissuras que podem se propagar com o tempo em estruturas submetidas a um carregamento. Vários avanços da teoria da mecânica da fratura aplicada ao concreto já foram conseguidos. Atualmente, existem três modelos básicos de diagramas constitutivos utilizados para a simular o comportamento do concreto: o linear, o bi-linear e o não linear. Vários pesquisadores utilizaram estes modelos para uma análise comparativa, dentre eles destacam-se, Petersson (1981), Rots et al (1985), Cornelissen et al (1986), Horii (1988), Jefferson e Wright (1991), Gopalaratnam e Ye (1991), Planas e Elices (1991), Guinea et al (1994), Li e Bazant (1994), Ali (1996) e Alfaiate et al (1997). No entanto, aqui, estes modelos constitutivos são usados sob uma abordagem ainda não explorada.

Diferentes valores de deformações críticas são considerados e duas metodologias para a representação da heterogeneidade do concreto são apresentadas e comparadas neste trabalho. Objetiva-se, portanto, avaliar os resultados obtidos por cada análise, enfocando os aspetos dinâmicos do processo da propagação de fissuras em vigas de concreto.

Alguns exemplos são avaliados e discutidos, possibilitando, através dos estudos conduzidos, o conhecimento do comportamento da propagação da fissura ao longo do tempo e a influência das formas dos diagramas constitutivos aplicadas ao concreto sobre os resultados obtidos.

ABSTRACT

AVALIATION OF CRACKING PROCESS IN CONCRETE BEAMS CONSIDERING DINAMICS ASPECTS

Author: Maura Angélica Milfont Shzu
Supervisor: Graciela Doz
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
Brasília, April of 2006

The concrete is a quasibrittle and heterogeneous material. These attributes are favourable to arise cracks that could propagate with time in a loaded structures. Some advances of the fracture mechanics theory applied to concrete have been already achieved. Nowadays, there are three basics models of constitutive diagrams used to simulate the concrete behaviour under crack propagation: the linear, bi-linear and non linear shapes. Several researchers used theses models for a comparative analysis, which are, Petersson (1981), Rots et al (1985), Cornelissen et al (1986), Horii (1988), Jefferson e Wright (1991), Gopalaratnam e Ye (1991), Planas e Elices (1991), Guinea et al (1994), Li e Bazant (1994), Ali (1996) e Alfaiate et al (1997). Though, these constitutive models are used, here, for an analysis that hadn't been discussed yet.

Differents values of critical deformations are consider and two methodologies for the simulation of the concrete heterogeneity are presented and compared in this work. The propose is to evaluate the results obtained by each analysis, emphasizing the dynamic aspects of crack propagation in concrete beams.

Some examples are evaluated and discussed, allowing, through the analyses carried out, the knowledge of the behaviour of the crack propagation and the influence of the constitutive law applied to concrete on results obtained.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIAÇÕES

a	- Comprimento da fissura
a_0	- Comprimento real da fissura
a_{eq}	- Comprimento equivalente da fissura
A_f	- Área de influência da barra
b	- Abertura da fissura
c	- Amortecimento proporcional à massa
c_A	- Constante que relaciona a área de influência da barra e seu comprimento
$C_{i,j}$	- Matriz das constantes elásticas
C_ρ	- Velocidade de propagação da onda
CV	- Coeficiente de variação para simular a heterogeneidade do material
D_f	- Constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico
E	- Módulo de elasticidade
EA_d	- Rigidez das barras diagonais
EA_n	- Rigidez das barras normais
f_n	- Frequência natural de vibração do modo n
f_t	- Tensão máxima
f_{tk}	- Resistência característica à tração do concreto
f_{ck}	- Resistência característica à compressão do concreto
f_{cm}	- Resistência média à compressão do concreto
f_{tm}	- Resistência de tração média do concreto
F	- Trabalho realizado pelas forças externas
G	- Energia elástica liberada no processo de fratura, (Griffith, 1920)
G_c	- Energia elástica crítica liberada no processo de fratura, (Griffith, 1920)
G_f	- Energia específica de fratura
G_{fc}	- Energia específica de fratura crítica
k_r	- Fator de ductilidade
K	- Fator de intensidade de tensões
K_I	- Fator de intensidade de tensões no modo I de fratura
K_{IC}	- Fator de intensidade crítico de tensões no modo I de fratura
l_{ch}	- Comprimento característico de fratura
L_c	- Comprimento do elemento discreto

L_{cr}	- Comprimento crítico do elemento discreto
m	- Massa
P	- Força concentrada
P_{cr}	- Força máxima
r	- Distância da ponta da fissura até um ponto na superfície da amostra
r_f	- Metade da largura da zona plástica
R	- Energia absorvida no processo de fratura
R_f	- Fator de falha
T	- Energia cinética
U	- Energia total
U_0	- Energia elástica de uma placa sem falhas
U_a	- Variação da energia de deformação elástica
U_γ	- Variação da energia de superfície elástica
V	- Velocidade de propagação da fissura
Δt_{crit}	- Intervalo crítico de integração
β	- Parâmetro de escala da distribuição de Weibull
δ	- Deflexão
ε	- Deformação
ε_p	- Deformação associada à tensão crítica de ruptura
ε_f	- Deformação para a qual a fissura já está completamente desenvolvida
γ	- Parâmetro de forma da distribuição de Weibull
γ_e	- Energia de fratura proveniente do trabalho elástico
γ_p	- Energia de fratura proveniente do trabalho plástico
ν	- Coeficiente de Poisson
$\varphi_{i,j}$	- Constantes elásticas
φ^d	- Constantes elásticas das barras diagonais
φ^n	- Constantes elásticas das barras normais
σ	- Tensão
σ_x , σ_y	- Tensão na direção x e y, respectivamente
τ_{xy}	- Tensão cisalhante
ω	- Abertura dos lábios da fissura
ϑ	- Módulo de elasticidade transversal

ξ	- Coeficiente de amortecimento crítico
χ	- Constante geométrica adimensional

1 - INTRODUÇÃO

Vários estudos foram conduzidos na área da mecânica da fratura, especificamente no estudo do processo da propagação da fissura. No decorrer dos anos, algumas teorias foram formuladas.

O entendimento do processo de falha, bem como dos fatores capazes de desencadear a propagação da fissura, é base fundamental da teoria da Mecânica da Fratura. Através desses conhecimentos é possível prever o comportamento da estrutura e estabelecer uma série de conclusões clássicas a respeito da análise do descontínuo.

A primeira contribuição teórica na mecânica da fratura foi dada por Leonardo da Vinci no século XV. No entanto, uma das fases mais marcantes do desenvolvimento da mecânica da fratura se deu na década de 50 com Griffith e Irwin, (Kanninen e Popelar, 1985).

Kaplan, em 1961 foi o primeiro a aplicar a teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica ao concreto, (Borges et al, 2001). Uma década depois, Naus e Kesler, (Bazant, 1983), provaram que esta clássica teoria não se adequava para todas as estruturas de concreto. Com base nisto, Walsh, em 1972 e 1976, confirmou a necessidade de uma teoria não linear aplicada aos materiais quase-frágeis, (Bazant, 1983).

Desde então foram desenvolvidas formulações específicas para o concreto. Na década de 80, foram introduzidos os principais modelos de fissuração do concreto, o modelo da fissura discreta e o modelo da fissura distribuída, caracterizando deste modo um grande avanço na Mecânica da Fratura.

Existem três formulações de diagrama constitutivo elementar básicas para a simulação do comportamento do concreto perante a propagação da fissura: a linear, a bi-linear e a não linear. São chamados, também, de modelos *strain-softening* por representar o abrandamento do material através de seu trecho descendente. Vários pesquisadores utilizaram estes modelos para uma análise comparativa, dentre eles destacam-se, Petersson (1981), Rots et al (1985), Cornelissen et al (1986), Horii (1988), Jefferson e Wright (1991), Gopalaratnam e Ye (1991), Planas e Elices (1991), Guinea et al (1994), Li e Bazant (1994), Ali (1996) e Alfaiate et al (1997). Todos chegaram a uma conclusão comum: "*a solução numérica para cada tipo de problema de fratura é extremamente sensível à forma* *do diagrama strain-softening e ao valor da energia dissipada no processo da propagação da fissura*".

No entanto alguns aspectos dinâmicos ainda não foram explorados. Pretende-se, então, mostrar alguns resultados referentes ao processo dinâmico da propagação de uma fissura, avaliando as velocidades e acelerações no decorrer do desenvolvimento da fissura, bem como as energias dissipadas e a relação constitutiva do material frente ao desenvolvimento da fissura. A trajetória da fissura será acompanhada e a variação da força no ponto de aplicação da carga será analisada ao longo do tempo. Métodos para representação da heterogeneidade serão testados e comparados e a influência das formas do diagrama constitutivo será verificada também, variando-se o comprimento crítico da fissura.

Desta forma, espera-se que o presente trabalho, além de reunir várias experiências de pesquisadores renomados no campo da mecânica da fratura, se torne uma fonte importante de pesquisa e, como contribuição, acrescente uma visão melhor do comportamento do concreto perante a propagação de uma fissura.

Aqui, foram reavaliadas vigas carregadas à flexão em três pontos (three point bend test) e também, aquelas carregadas à flexão em quatro pontos (four point bend test). Tais exemplos serão analisados utilizando um programa computacional baseado no método dos elementos discretos desenvolvido por Hayashi (1982), na linguagem FORTRAN.

1.1- OBJETIVOS

O objetivo principal do presente trabalho é a análise da propagação da fissura em estruturas de concreto focando a atenção nas formas do diagrama constitutivo do material e a influência dele no que se refere aos aspectos dinâmicos do processo de ruptura, tais como, as velocidades, acelerações, variação do quadro de fissuração com o tempo e as energias gastas no processo de fratura. Para isto, a representação do abrandamento do concreto, ou seja, do ramo descendente da curva tensão-deformação que caracteriza a perda gradativa da resistência do material, é feita utilizando um modelo baseado no da fissura fictícia, (Hillerborg, 1976). Este modelo tem a vantagem de descrever o comportamento da zona de fratura de forma mais simples que os demais.

1.2- JUSTIFICATIVAS

1.2.1- Ferramenta numérica

Como já mencionado, são várias as ferramentas capazes de reproduzir satisfatoriamente o comportamento das estruturas nas mais diversas condições em que se pode encontrá-las. Porém, em se tratando de estudar o descontínuo, algumas ferramentas podem exigir um grande esforço computacional. Optou-se, aqui, por trabalhar com o Método dos Elementos Discretos, MED. Neste método, a equação de movimento é resolvida para cada nó e o meio é representado por barras formando uma treliça tri-dimensional, (Hayashi, 1982). Sua principal vantagem está na sua simplicidade e facilidade de interpretação dos resultados obtidos.

1.2.2- Objeto de estudo

O material mais largamente utilizado na construção civil é o concreto, e por este motivo ele foi escolhido como objeto de estudo para as análises da propagação de fissuras. Em muitos países, o consumo de concreto é dez vezes maior que o de aço, (Mehta e Monteiro, 1994). A sua larga procura se dá basicamente por três importantes razões: a excelente resistência à água; a facilidade com que os elementos estruturais de concreto podem ser executados, numa variedade de formas e tamanhos; e o fato de ser mais barato e mais facilmente disponível no canteiro.

Durante algum tempo o concreto foi uma incógnita no campo da Mecânica da Fratura. Isso se explica pelo fato do material apresentar uma natureza altamente heterogênea. Na propagação de uma fissura forma-se uma zona de abrandamento na extremidade da falha. Esta zona é caracterizada pela formação de várias microfissuras configurando uma perda de resistência localizada.

Hoje, dispõe-se de uma teoria não linear da fratura capaz de descrever bem esta zona de difícil entendimento. Neste contexto, alguns modelos foram criados, dentre eles, o Modelo Linear Elástico da Fratura Modificado, MLEFM, baseado no Modelo Linear Elástico da Fratura, MLEF, com a introdução de algumas hipóteses para a representação da não linearidade; e ainda, os modelos *strain-softening* que consideram o abrandamento do material através do uso de equações e diagramas constitutivos. Este último, um modelo mais difundido, é o que melhor descreve o comportamento desta zona de fratura em materiais como o concreto, (Bazant, 1983).

Dentre os modelos *strain-softening* destacam-se o modelo da fissura fictícia, (Hillerborg, 1976) e o modelo da banda de fissura, (Bazant, 1983). Neste trabalho é utilizado o modelo baseado no da fissura fictícia, por ser esta a forma mais simples de descrever o comportamento da zona de fratura.

1.2.3- Influência da forma do diagrama constitutivo

Como foi dito, os modelos *strain-softening* representam o abrandamento por meio de equações constitutivas e diagramas constitutivos. Estes últimos podem apresentar-se em três formas distintas: a Linear, que é a forma mais simplificada, a Bi-linear e a Não Linear.

Alguns estudos foram realizados anteriormente, por outros autores, no intuito de observar a influência destas formas nos resultados, tais como, Petersson (1981), Rots et al (1985), Rokugo et al (1988), Planas e Elices (1991), Jefferson e Wright (1991), Gopalaratnam e Ye (1991), Guinea et al (1994), Li e Bazant (1994), Ali (1996), Alfaiate et al (1997). No entanto, o presente trabalho faz uso do MED e das três formas do diagrama constitutivo aplicado ao concreto, para analisar aspectos que ainda não foram contemplados no quesito da análise da propagação das fissuras. Através de uma análise comparativa entre os três modelos *strain-softening* e variações dos mesmos, aspectos dinâmicos relacionados com a aceleração e velocidade de propagação, as energias gastas no processo de fratura e a variação do quadro de fissuração são avaliados e discutidos.

1.3- ESTRUTURAÇÃO DA TESE

Depois desta breve introdução ao tema da presente pesquisa, a estruturação da mesma será apresentada também de forma rápida e resumida. Deste modo, a organização deste trabalho obedece a seguinte seqüência:

O **capítulo 2** apresenta a revisão bibliográfica a respeito do desenvolvimento da teoria da mecânica da fratura elástica linear, e também alguns conceitos fundamentais que serviram de base para a formulação de novas teorias, possibilitando, assim, a análise de uma gama maior de materiais encontrados na engenharia.

O **capítulo 3** apresenta a mecânica da fratura voltada para o concreto. Nele encontra-se uma abordagem sobre o comportamento do concreto frente à propagação da fratura, bem como os métodos aproximados de fissuração, responsáveis por descrever o comportamento não linear da zona de fratura. São expostas, ainda, algumas contribuições acadêmicas que fizeram uso de modelos derivados desses métodos de fissuração, tais como os modelos da fissura fictícia e da banda de fissura.

O **capítulo 4** introduz o método dos elementos discretos, onde são apresentados, numa ordem cronológica, trabalhos relacionados com o tema e que também contribuíram para a consolidação do método dos elementos discretos da forma que é utilizada neste trabalho. É mostrada, também, toda a formulação numérica do método de maneira simples e clara, incluindo os aspectos da simulação da heterogeneidade do concreto e a estruturação do programa desenvolvido em diagrama de blocos simplificados.

No **capítulo 5** são mostrados os modelos de *strain-softening* simplificados aplicados ao concreto e algumas formulações desenvolvidas por diferentes pesquisadores. Uma série de trabalhos, relacionados com o tema, foram reunidos neste capítulo, a fim de que o leitor fosse inteirado dos estudos realizados em datas anteriores, e a partir daí, fosse capaz de avaliar a contribuição deste trabalho de pesquisa.

No **capítulo 6** são apresentadas as formulações dos modelos *strain-softening* utilizados na análise da propagação da fissura, bem como os resultados numéricos obtidos.

O **capítulo 7** reúne as conclusões obtidas a partir dos resultados dos ensaios numéricos realizados e sugestões para estudos futuros.

2 - TEORIA DA MECÂNICA DA FRATURA

2.1- UMA BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo Kanninen e Popelar (1985), a Mecânica da Fratura é uma disciplina da engenharia que quantifica as condições sob a qual um corpo sólido submetido a uma carga pode falhar devido à propagação de uma fissura dominante contida naquele corpo.

A Mecânica da Fratura é uma área relativamente nova na engenharia. Pode-se dizer que o rápido desenvolvimento desta área se deve, em grande parte, ao interesse de diversos grupos em solucionar problemas de fissuras em suas estruturas, com a finalidade de garantir o funcionamento adequado. Para o engenheiro, é de grande importância, no desenvolvimento de seus projetos, o conhecimento de todos os processos que possam assegurar, manter e monitorar a integridade de uma estrutura.

É importante lembrar que os defeitos inerentes aos materiais, tais como falhas introduzidas durante a fabricação de um componente estrutural e danos ocorridos durante o funcionamento dele são situações que fazem parte do cotidiano. Mesmo sabendo que uma estrutura nunca está isenta de falhas, tratá-la como um meio contínuo e homogêneo é uma das soluções encontradas para facilitar o entendimento de alguns aspectos estruturais na engenharia.

Contudo, a análise da propagação das fissuras tem importância vital para o entendimento de certos aspectos da engenharia, visto que a presença destas falhas é responsável por alterar o estado de tensões nas proximidades delas. No início, os estudos sobre influência destas falhas eram realizados, na sua maioria, a partir de testes laboratoriais e experimentos práticos. Existem vários métodos para se detectar um dano, tais como, técnicas de inspeção visual, raios X, métodos dinâmicos, métodos magnéticos, líquidos penetrantes, correntes parasitas, radiografias, ultra-som e emissões acústicas. A descrição de cada um deles pode ser encontrada em Souza (2001).

A primeira contribuição teórica na área da mecânica da fratura foi dada por Leonardo da Vinci que, no século XV, realizou experimentos para determinar a resistência de fios metálicos analisando a influência do tamanho da fissura nesses materiais. Ele encontrou uma relação inversa entre o comprimento de fios de mesmo diâmetro e a carga de ruptura, (Kanninen e Popelar, 1985). Na época, o autor teria dito que "*entre cordas de mesma espessura a mais longa é a menos resistente*", (McCurdy, 1945).

Galileu Galilei, em 1638, foi o primeiro a introduzir a teoria de escala, o chamado "Efeito de Escala", em barras submetidas à tensão e flexão. O estudioso defendia que este efeito era um fator que limitava o tamanho das estruturas, quando afirmou que "*nem o homem, nem a natureza podem construir estruturas exageradamente grandes, pois estas não serão capazes de suportar seu próprio peso*", (Cotterell, 2002).

Por muito tempo, os estudos relacionados com a determinação da resistência dos materiais eram todos fundamentados na teoria da elasticidade. Inglis, em 1913, tomando por base este fundamento, analisou uma placa bi-dimensional, submetida a um carregamento uniforme representado por σ e que contém um furo elíptico de raios '*a*' e '*b*', Figura 2.1, (Broek, 1988).

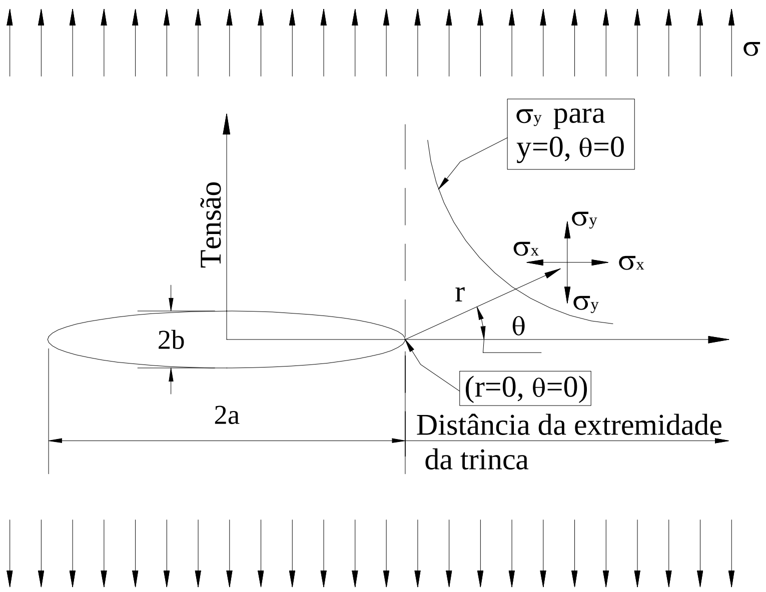


Figura 2.1: Placa bidimensional de dimensões infinitas, (Broek, 1988).

Inglis obteve uma expressão para a tensão máxima na extremidade do maior eixo da elipse, em função da geometria da falha e do carregamento aplicado.

$$\sigma_{máx} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)\sigma \tag{2.1}$$

Variando os valores de '*a*' e '*b*' o autor obteve, também, as tensões para o problema do furo na forma circular ou de uma linha. Neste último caso, para caracterizar uma linha de fissura, a maior dimensão da elipse, a, terá que ser muito maior do que sua menor dimensão, *b*. Isto faz com que a tensão, dada pela Equação (2.1), no ponto mais crítico da borda da fissura, seja infinitamente maior que a tensão aplicada na placa. Visto que, na prática, tal situação não existe, este foi o grande obstáculo encontrado por Inglis no desenvolvimento de sua teoria.

A partir das observações de Inglis, Griffith (1920) concluiu que a ocorrência da ruptura não estava diretamente relacionada com uma tensão específica num único ponto do corpo, mas sim com uma resultante de forças atuante numa pequena seção do mesmo, as chamadas forças de coesão nas faces da fissura, também chamadas de forças de superfícies.

Desta forma, Griffith relacionou a propagação da fissura, não apenas com a tensão aplicada na estrutura e com o comprimento da falha, mas também com as propriedades do material, tais como o módulo de elasticidade, *E*, e a energia elástica de superfície do material, γ_e. Com isto, o pesquisador introduziu o que veio a ser conhecido como critério energético.

Na teoria de Griffith, os sólidos, assim como os líquidos, possuem uma energia de superfície responsável pela propagação de fissuras. O sistema é conservativo e o problema de fratura é apenas uma extensão da teoria elástica da energia potencial mínima. Com este direcionamento teórico, o critério energético eliminava o problema das tensões infinitas encontrado por Inglis.

A década de 20, portanto, marcou a época em que a Mecânica das Fraturas se desvinculou, em parte, da teoria da elasticidade clássica para apresentar conceitos e formulações próprias.

Griffith (1920) foi motivado, também, pela necessidade de entender a influência dos danos sobre a resistência de uma estrutura. Ele observou que as falhas pré-existentes na superfície de um corpo tornam-no frágil. Os estudos do referido autor foram realizados a partir de observações em amostras de fios metálicos e de vidro, hastes e placas que continham várias formas de imperfeições. Em estudos anteriores foi mostrado que a resistência de um material dependia também da qualidade da superfície e do grau de polimento da superfície, (Erdogan, 2000).

Nos estudos realizados por Orowan e Irwin, em 1948, nos quais o conceito de fratura quase-frágil foi desenvolvido, apontou-se a evidência de uma deformação plástica na superfície de uma fissura em materiais menos frágeis, (Cotterell, 2002). Isto levou os autores à conclusão de que a energia de superfície do modelo de Griffith, γ_e, deveria ser acrescida da energia de fratura, γ_p, proveniente do trabalho plástico. Com isso, a teoria de Griffith foi estendida a materiais menos frágeis e dúcteis, (Cotterell, 2002).

Desta forma, Irwin, em 1948, desenvolveu o Método Linear Elástico da Fratura em termos da energia, (Cotterell, 2002). O autor definiu a taxa de energia elástica liberada no processo de fratura, *G*, em homenagem a Griffith, como sendo a energia total absorvida por unidade de espessura e comprimento da fissura. A fratura começa a se propagar quando *G* atinge um valor crítico, G_c, igual ao dobro da soma das energias elástica, γ_e, e plástica, γ_p, $G_c = 2(\gamma_e + \gamma_p)$, já que se trata das duas faces da fissura.

Além disso, Irwin, em 1948, também relacionou *G*, com o campo de tensões atuantes na borda da ponta da fissura introduzindo o fator de intensidade de tensões, *K*, em homenagem a Kies, um de seus colaboradores, (Cotterell, 2002). Sendo assim, $K = (G\ E)^{1/2}$, onde *E* é o módulo de elasticidade no estado plano de tensões, (Cotterell, 2002).

O desenvolvimento da teoria da fratura quase-frágil atraiu a atenção de muitos pesquisadores que, como Irwin e Orowan, dedicaram-se à publicação de uma série de artigos relacionados com o tema, podendo ser citados os trabalhos de Felbeck (1955); Weels (1953, 1956); Winne (1958) e Bueckner (1958), *apud* Barenblatt (1962).

A base da Mecânica da Fratura, portanto, fundamenta-se nos dois critérios abaixo:

- o critério energético de Griffith, que consiste em avaliar a energia capaz de produzir a propagação instável de uma fissura pré-existente para, assim, determinar a capacidade de carga do corpo;
- o critério do fator de intensidade de tensões de Irwin, no qual se admite que a propagação da fissura é função do estado tensional nas proximidades do extremo da trinca.

As aproximações de Grifftith e Irwin se destacam como um dos passos marcantes no desenvolvimento teórico da Mecânica das Fraturas. O entendimento destas teorias é essencial para a compreensão de conceitos básicos deste campo relevante da engenharia. Uma abordagem mais detalhada deste campo será feita a seguir.

2.2- CRITÉRIO DO BALANÇO ENERGÉTICO (TEORIA DE GRIFFITH)

A partir do exemplo da placa bi-dimensional, a priori analisada por Inglis, em 1913, Figura 2.1, Griffith formulou sua Teoria do Balanço Energético. O autor estabeleceu que a energia total deste corpo elástico será dada pela soma das energias oriundas de cada fator atuante no sistema, Equação (2.2):

$$U = U_0 + U_a + U_\gamma - F \tag{2.2}$$

onde, U_0 é a energia elástica da placa sem falhas, e portanto, seu valor é uma constante; U_a é a variação da energia de deformação elástica devido à introdução da falha; U_γ é a variação da energia de superfície elástica devido à formação de fissuras na superfície do corpo, e F é o trabalho realizado pelas forças externas.

Griffith, a partir da análise de tensões desenvolvida por Inglis para a placa de espessura unitária, mostrou, em 1924, que:

$$|U_a| = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \tag{2.3}$$

onde E é o módulo de elasticidade.

A variação da energia de superfície elástica devido à introdução da falha, U_γ, é igual ao produto da energia de superfície elástica do material, γ_e, e a nova superfície de área da fissura (duas superfícies de comprimento 2*a*):

$$U_\gamma = 2(2a\gamma_e) \tag{2.4}$$

A condição de instabilidade para o caso de tensões planas é esquematizada pela Figura 2.2, que mostra a energia total em função do comprimento da fissura.

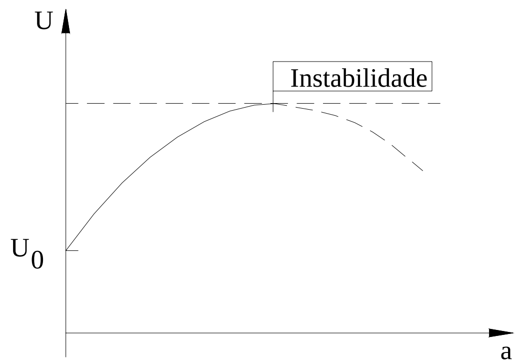


Figura 2.2: Esquema da variação da energia total, *U*, como uma função do comprimento da fissura, *a*, (Ewalds e Wanhil, 1986).

Verifica-se, então, que a instabilidade ocorre quando a tangente da função *U*, for nula ou menor do que zero, ou seja, $dU/da \leq 0$. Sendo U_0 uma constante, tem-se:

$$\frac{d}{da}\left(U_a + U_\gamma - F\right) \leq 0 \tag{2.5}$$

Rearranjando a Equação (2.5), pode-se associar a taxa de energia liberada no processo de propagação da fratura, *G*, com a energia absorvida neste mesmo instante (resultado da resistência à fissuração), *R*, da seguinte forma:

$$\frac{d}{da}\left(F - U_a\right) \geq \frac{dU_\gamma}{da}$$

$$\frac{d}{da}\underbrace{\left(F - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}\right)}_{G} \geq \frac{d}{da}\underbrace{\left(4a\gamma_e\right)}_{R} \tag{2.6}$$

A estabilidade da fissura, portanto, é analisada segundo as relações entre os valores de *R* e *G*, e de suas variações em relação à variação de incremento da fissura como descrito na Equação (2.6). Enquanto $G < R$, não ocorre o desenvolvimento da fissura, (Bueno, 1999). A condição de propagação estável acontece quando:

$$G = R \quad \text{e} \quad \frac{dG}{da} < \frac{dR}{da} \tag{2.7}$$

e, a condição de instabilidade quando:

$$G \geq R \quad \text{e} \quad \frac{dG}{da} > \frac{dR}{da} \tag{2.8}$$

Considerando uma placa contendo uma fissura de comprimento *2a* e uma condição de deslocamento fixo, ou seja, condição em que o deslocamento, *u*, não varia ao longo do processo de propagação da fissura, Figura 2.3, as forças externas representadas pela carga *P* têm seu valor diminuído. Este fato conduz à redução da rigidez da placa que significa um decréscimo no valor da energia de deformação elástica, U_a.

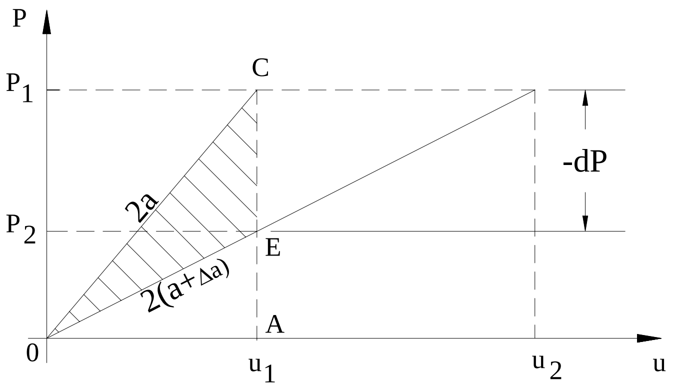


Figura 2.3: Diagrama força-deslocamento para uma condição de deslocamento fixo.

Desta forma, já que não há variação do deslocamento ao longo da propagação da fissura, o trabalho realizado, *F*, é uma constante e sua derivada é nula. Logo, a taxa de energia elástica liberada se escreve da seguinte forma:

$$G = \frac{d(-U_a)}{da} \quad \therefore \quad G = \frac{d}{da}\left[-\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}\right] = -\frac{d}{da}\left[\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}\right] \tag{2.9}$$

Fixando, agora, o valor da carga, P, a propagação da fissura resulta numa variação do deslocamento da forma como mostra a Figura 2.4.

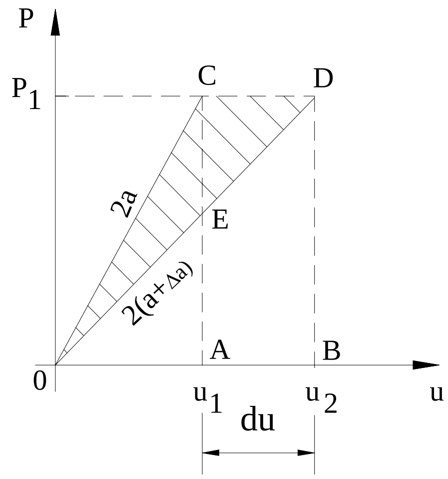


Figura 2.4: Diagrama força-deslocamento para uma condição de carregamento fixo.

A energia de deformação elástica, U_a, da placa fissurada tem seu valor aumentado, representado agora pela área $\overline{OCD}$. Sendo assim, U_a é igual à $\frac{1}{2} P_1 (u_2 - u_1)$.

Sabendo que o trabalho, *F*, é igual à $P_1(u_2 - u_1)$, então $F - U_a = U_a$, e a taxa de energia elástica liberada, *G*, é igual à:

$$G = \frac{d(F - U_a)}{da} = \frac{d(U_a)}{da} = \frac{d}{da}\left[\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}\right] \tag{2.10}$$

Considerando que a variação do comprimento da fissura, Δa, é muito pequena e próxima de zero, o valor da energia de deformação elástica se confunde para as duas condições apresentadas, Figura 2.5.

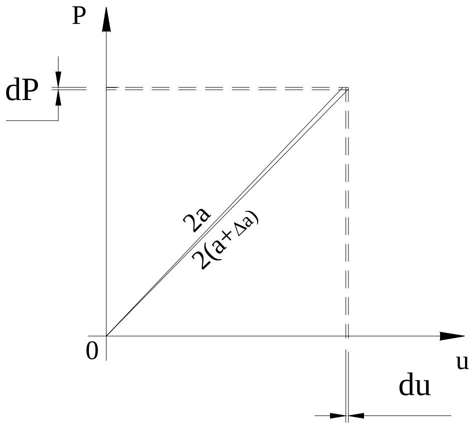


Figura 2.5: Diagrama força-deslocamento para uma variação muito pequena do comprimento da fissura.

Isto significa que, para ambas as condições, a taxa da energia elástica liberada, em magnitude, é igual à:

$$G = \frac{d(U_a)}{da} = \frac{d}{da}\left[\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}\right] \tag{2.11}$$

2.3- MODIFICAÇÃO DA TEORIA DE GRIFFITH POR IRWIN

Embora Griffith seja considerado um dos grandes contribuidores no desenvolvimento da Mecânica das Fraturas, apenas três décadas depois sua teoria foi consolidada, com os trabalhos de Irwin. Um dos principais motivos se deve ao fato de Griffith ter ignorado a presença de deformações plásticas ao redor da ponta de uma fissura, se limitando, conseqüentemente, ao estudo dos materiais frágeis.

Irwin, por sua vez, em 1948, estendeu a teoria de Griffith para materiais quase-frágeis (pouco frágeis) e dúcteis. A nova teoria estabelece que a energia de superfície reúne as parcelas referentes à deformação elástica e plástica. A Equação (2.4), sugerida por Griffith, foi modificada resultando, deste modo, na Equação (2.12):

$$U_\gamma = 2\lfloor 2a(\gamma_e + \gamma_p)\rfloor \tag{2.12}$$

2.4- CRITÉRIO APROXIMADO DO CAMPO DE TENSÕES ELÁSTICAS (TEORIA DE IRWIN)

Devido às dificuldades práticas de aplicação do critério de energia de Griffith, Irwin desenvolveu o critério aproximado da intensidade de tensões. Irwin tomou por base as observações de Inglis de 1913 que, utilizando a teoria clássica da elasticidade, detectou uma concentração de tensões de ordem infinita na extremidade de uma fissura, (Ewalds e Wanhill, 1986).

O autor correlacionou a taxa da energia de deformação dissipada com o fator de intensidade de tensões na extremidade da fissura num problema clássico da teoria da elasticidade, (Barenblatt, 1962). Para entender a base da teoria de Irwin e iniciar qualquer estudo relacionado com a fratura, é necessário identificar os possíveis modos em que uma peça pode romper-se. A Figura 2.6 ilustra os três possíveis modos de carregamento pelo qual a fratura ocorre.

O modo I é caracterizado pelo movimento de abertura da fissura e simetria em relação ao plano da mesma. Nos modos II e III verifica-se o deslizamento e rasgo, respectivamente, entre as faces da fissura. Na prática, o desenvolvimento da falha se dá pela combinação linear destes três modos. No entanto, segundo Oller (2001), na maioria dos problemas de fratura, o modo I, quando não se apresenta sozinho, tem maior predominância em todo o processo de propagação. Outros autores, analisando materiais frágeis e quase-frágeis, comprovaram a veracidade desta afirmação, dentre eles pode-se citar, Gálvez et al (1996, 1998, 2002); Mahajan et al (1989); Cendón et al (2000) *apud* Bazant e Oh (1983).

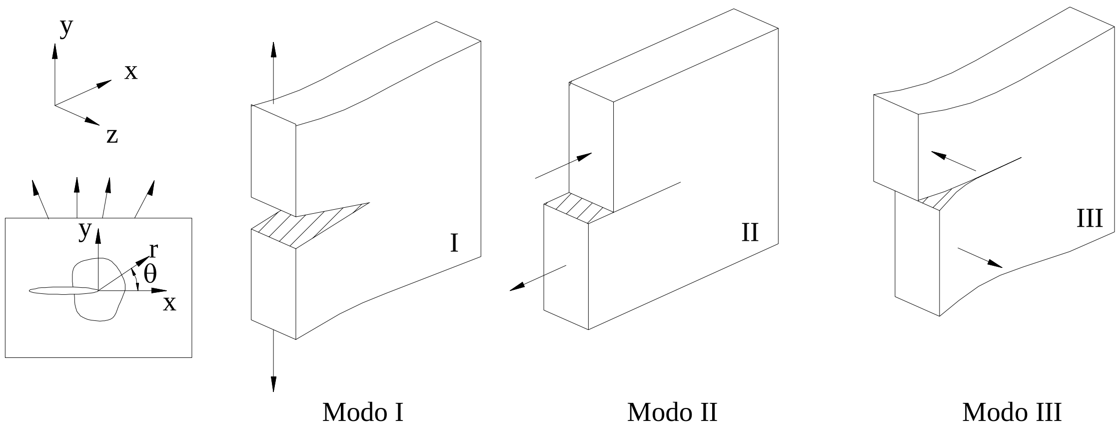


Figura 2.6: Modos de carregamento, (Oller, 2001).

Os três modos apresentados estarão, sempre, associados a um campo de tensões na extremidade da fissura. Irwin (1957), ao analisar a placa bi-dimensional ilustrada na Figura 2.1, observou que a tensão na ponta extrema da fissura, σ_y, é proporcional à tensão aplicada, σ:

$$\sigma_y \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{(Modo I)} \tag{2.13}$$

onde, *x* é a distância no eixo da coordenada x a partir da ponta da fissura.

Os fatores de intensidade de tensões são uma função da tensão externa aplicada e da geometria da fissura. Seu valor será considerado como um fator único que caracterizará a magnitude das tensões elásticas na extremidade da fissura:

$$K_I = C\sigma\sqrt{\pi a} \text{ , onde I representa o Modo I de fratura} \tag{2.14}$$

As tensões crescem à medida que a largura da placa, '*w*', diminui. Para o exemplo citado as dimensões da placa são infinitas, o que conduz ao valor de 'C' ser bem próximo da unidade. A Equação (2.15) que expressa o valor deste parâmetro foi proposta por Feddersen, em 1971, (Ewalds e Wanhill, 1986).

:

$$C = \sqrt{sec\left(\frac{\pi a}{w}\right)} \tag{2.15}$$

Logo,

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot f\left(a/w\right) \tag{2.16}$$

onde, $f\left(a/w\right)$ é um parâmetro adimensional que depende da geometria do corpo, das condições de contorno e do comprimento da fissura.

Irwin (1957) concluiu que o campo de tensões próximo à extremidade de uma fissura pode ser aproximado por dois parâmetros: a perda de energia de deformação associada com o deslocamento dos pontos de aplicação da carga, cujo valor foi desprezado pelo autor, e o fator de intensidade de tensões, sendo este último o mais importante.

Irwin, em 1960, classificou três diferentes campos de tensões de acordo com os diversos tipos de deslocamentos que caracterizam cada modo, (Rice, 1968). No entanto, apenas serão mostradas, como feito até agora, as tensões referentes ao Modo I. A Equação (2.17) descreve estes campos de tensões na sua forma completa, em função do ângulo, θ, e da distância da extremidade da fissura até um ponto na superfície da amostra, r, (ver Figura 2.1).

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (2.17)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$

As limitações das equações de Irwin que expressam as tensões são evidenciadas quando são aplicadas a diversos pontos da região onde a fissura está inserida. Por exemplo, para um ponto distante da ponta da fissura, onde 'r' é muito grande, as tensões 'σ_x' e 'σ_y' tendem a zero. Já é esperado que a tensão transversal, 'σ_x', seja igual a zero, no entanto, é incorreto afirmar que a tensão longitudinal, 'σ_y', também seja nula. No exemplo analisado por Irwin, a tensão longitudinal longe da zona de fissura é igual à tensão aplicada, σ. O fato é que a expressão que define 'σ_x' e 'σ_y' não fornece a solução completa do campo de tensões. A solução completa inclui uma série de termos e está representada na Equação (2.18).

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + D_1 r^0 + D_2 r^{1/2} + D_3 r^1 + \ldots \qquad (2.18)$$

onde D_1, D_2 e D_3 são constantes.

Percebe-se, então, que quando 'r' tende ao infinito, o primeiro termo passa a ter influência desprezível, e a soma dos termos seguintes define a tensão σ_y.

Aproximando-se da ponta extrema da fissura, ou seja, à medida que 'r' diminui, todos os termos se tornarão cada vez menores, exceto o primeiro, que aumentará tendendo a infinito.

Assim, conclui-se que as soluções elásticas apresentadas na Equação (2.17) são válidas apenas nas imediações da fissura. Nesta região, a determinação do campo de tensões depende do fator de intensidade de tensões K_I, que não deve ultrapassar a um certo valor crítico, K_c, obtido a partir das propriedades do material. Isto é o que estabelece o critério de ruptura.

Desta forma, a taxa de energia elástica liberada no processo de propagação de fratura, G, definida por Griffith e descrita pela Equação (2.11), pode ser relacionada com o campo de tensões atuante na ponta da fissura, representado pelo fator de intensidade de tensões K_I, Equação (2.14).

$$G = \frac{dU_a}{da} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} = \frac{K_I^{\ 2}}{E} \tag{2.19}$$

2.5- FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES PARA ALGUNS CASOS PRÁTICOS

Como já comentado, o fator de intensidade de tensões, assim como a energia específica de fratura, é uma propriedade do material que varia com a geometria do corpo e da fissura. Diante desta consideração, faz-se necessário apresentar algumas configurações típicas existentes. Outros casos poderão ser conferidos em outras referências bibliográficas, tais como, Kanninen e Popelar (1985), Ewalds e Wanhill (1986); Broek (1988) e Oller (2001). Os casos mostrados a seguir foram encontrados em Kanninen e Popelar (1985). A Figura 2.7 ilustra cada um deles.

a- Placa de dimensões infinitas com uma fissura interna de dimensão 2*a*, submetida à tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.20}$$

b- Tira de comprimento infinito e largura 2*h* com uma fissura interna centrada de dimensão 2*a*, submetida à tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi\, a\, sec\left(\frac{\pi a}{2h}\right)} \tag{2.21}$$

c- Placa de dimensões infinitas com uma fissura lateral de dimensão *a*, submetida à tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = 1{,}12\,\sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.22}$$

d- Tira de comprimento infinito e largura h com uma fissura lateral de dimensão *a*, submetida à tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi\, a}\left(1{,}99 - 0{,}41\left(a/h\right) + 18{,}70\left(a/h\right)^2 - 38{,}48\left(a/h\right)^3 - 53{,}85\left(a/h\right)^4\right) \tag{2.23}$$

e- Placa de dimensões infinitas com fissuras colineares de dimensão 2*a* e distâncias entre centros iguais a 2*b*, submetida à tração normal ao plano da fissura:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\sqrt{\left[\frac{2b}{\pi a}tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)\right]} \tag{2.24}$$

f- Viga simplesmente apoiada com fissura central. Flexão por três pontos:

$$K_I = \frac{P\,S}{Bh^2}\left\{\frac{3\sqrt{a}\left[1{,}99 - \frac{a}{h}\left(1-\frac{a}{h}\right)\left(2{,}15 - 3{,}93\frac{a}{h} + 2{,}7\left(\frac{a}{h}\right)^2\right)\right]}{2\left(1+2\frac{a}{h}\right)\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} \tag{2.25}$$

g- Teste “compact-tension”:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{h}}\left\{\frac{\left(2+\frac{a}{h}\right)\left[0{,}886 + 4{,}64\left(\frac{a}{h}\right) - 13{,}32\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 14{,}72\left(\frac{a}{h}\right)^3 - 5{,}6\left(\frac{a}{h}\right)^4\right]}{\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} \tag{2.26}$$

onde os parâmetros geométricos deste ensaio, tais como, *a* e *h*, são obtidos a partir do ponto de aplicação da carga.

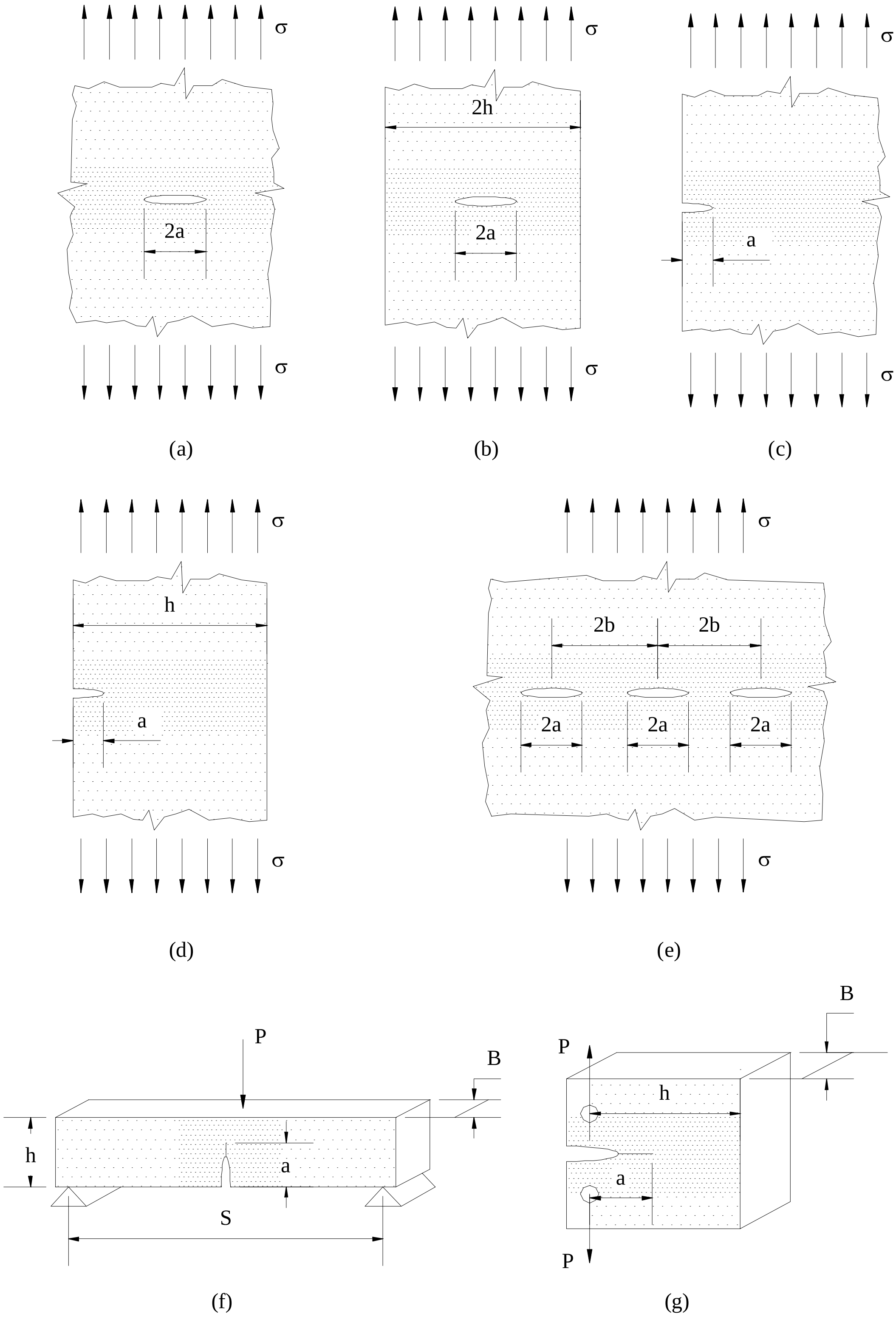


Figura 2.7: Configurações com fatores de intensidades de tensões já definidos, (Kanninen e Popelar, 1985).

2.6- LIMITE DE APLICABILIDADE

Obviamente a idéia de tensões infinitas no bordo da fissura não é verificada na prática. Irwin (1948), analisando um corpo submetido a uma tensão externa, considerou a existência de uma zona plástica na extremidade da ponta da fissura que é responsável por restringir estes valores “infinitos” a uma tensão σ_y. Nesta região as faces da fissura permanecem juntas devido à ação das forças de coesão. Ele mostrou que a zona plástica pode ser representada por um formato circular de diâmetro $2r_f$, conforme apresentado na Figura 2.8.

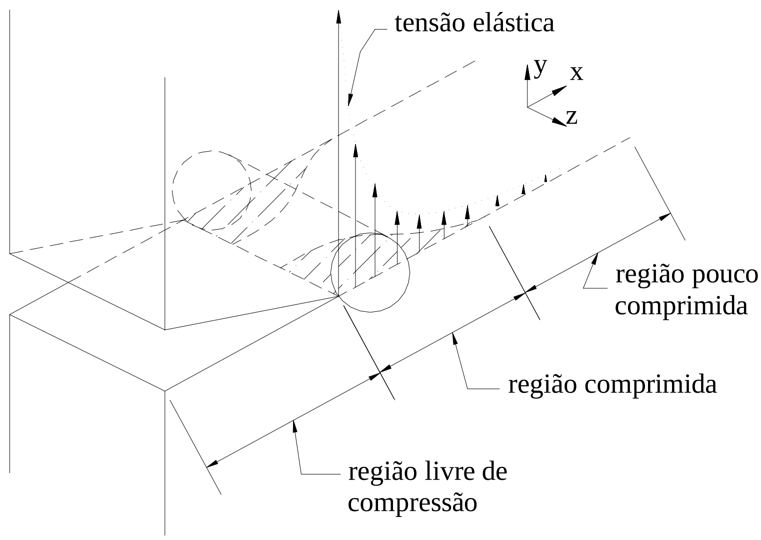


Figura 2.8: Zona plástica na ponta extrema da fissura, (Broek, 1988).

Irwin afirmou que devido à ocorrência da plasticidade numa zona localizada frente à fissura, o material nesta área sofre uma perda de resistência, ou seja, um abrandamento. Para compensar esta perda de rigidez localizada, o comprimento da fissura é considerado maior que seu comprimento físico. A Figura 2.8 ilustra esta zona plástica como uma região submetida a uma compressão onde forças coesivas atuam.

Baseado no fato de que as forças coesivas, responsáveis por manter as faces da extremidade da fissura ligadas entre si, são distribuídas quase que linearmente através da zona plástica, o comprimento da fissura equivale ao tamanho real da mesma, somado à metade da largura da zona plástica, Figura 2.9, (Bazant, 2002):

$$a_{eq} = a_0 + r_f \tag{2.27}$$

onde, a_{eq} é o comprimento equivalente da fissura, a_0 é o comprimento real da fissura e r_f é a metade da largura da zona plástica.

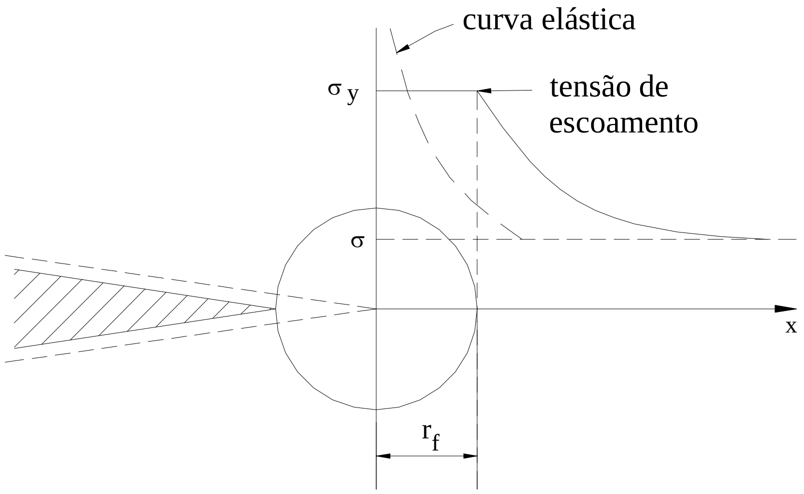


Figura 2.9: Correção do tamanho da fissura em função da plasticidade, (Ewalds e Wanhil, 1986).

O tamanho da zona plástica estimada por Irwin deriva-se da Equação (2.17) e é dada pela expressão que segue, com base na ilustração da Figura 2.9.

$$2r_f = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{K}{\sigma_y}\right)^2 \tag{2.28}$$

onde n = 1 para o estado plano de tensões e n = 3 para o estado plano de deformações.

Os princípios da Mecânica da Fratura Elástica Linear, MFEL, são aplicáveis apenas quando a zona plástica é muito pequena em relação à dimensão da seção transversal da estrutura, caso contrário, recorre-se aos métodos não lineares capazes de representar o comportamento mecânico desta significante zona plástica. No caso do concreto, esta zona é caracterizada pela formação de microfissuras onde a tensão normal decresce com o aumento da deformação. No próximo capítulo será abordado, com mais detalhes, o problema da mecânica da fratura aplicada ao concreto.

3 - MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO

3.1- INTRODUÇÃO

Até a década de 60, a teoria da Mecânica da Fratura era aplicável somente em materiais "homogêneos" e de comportamento frágil, como o vidro e alguns metais. Kaplan, em 1961, foi o primeiro a aplicar a teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica ao concreto. Ele analisou, experimentalmente, vigas sujeitas à flexão, porém seus resultados não foram encorajados, (Borges et al, 2001). Ao observar as peculiaridades dos diversos materiais é fácil entender o porquê da metodologia utilizada por Kaplan não se mostrar adequada.

Com base nisso, Naus, em 1971 e Kesler et al, em 1972, provaram que a clássica Mecânica Linear Elástica da Fratura não se adequava para todas as estruturas de concreto, (Bazant e Oh, 1983). Walsh, em 1972 e 1976, confirmou a necessidade de uma teoria não linear quando estudou vigas fissuradas de diferentes tamanhos e geometrias similares, (Bazant e Oh, 1983). Resultados de seus estudos, o diagrama logarítmico tensão nominal, σ_N, versus tamanho da estrutura mostra até quando a teoria linear das fraturas se confunde com a não linear, Figura 3.1.

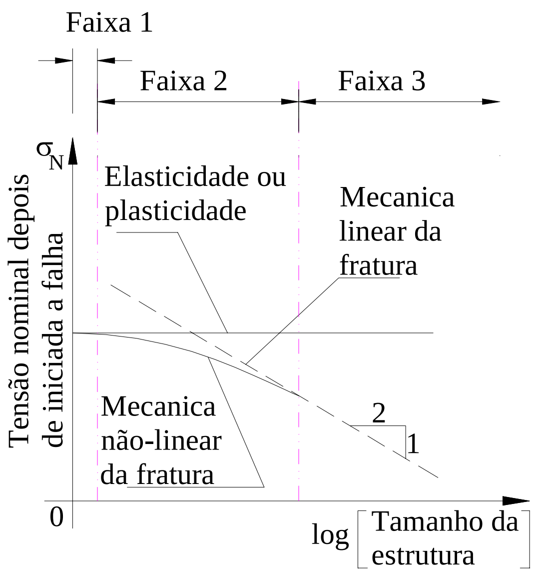


Figura 3.1: Efeito do tamanho na escolha do método de análise da propagação da fratura, (Bazant e Oh, 1983).

As estruturas de concreto em sua maioria, quase sempre estão associadas à Mecânica Não Linear das Fraturas. No entanto, de acordo com a Figura 3.1, em se tratando de tamanhos muito pequenos, faixa 1, e muito grandes, faixa 3, o problema pode ser simplificado para uma análise elasto-plástica, ou de outra forma para uma análise linear da fratura. No primeiro caso a tensão nominal no momento da propagação é sempre constante para qualquer tamanho da peça.

Esta descoberta incentivou o desenvolvimento de modelos não lineares, capazes de descreverem, de forma correta, o processo de propagação das fissuras no concreto. Na década de 80, foram, então, introduzidos os principais modelos de fraturamento do concreto, marcando mais uma vez um avanço na teoria da Mecânica das Fraturas.

Alguns destes modelos não lineares fazem uso do conceito básico do Método Linear Elástico da Fratura, MLEF, introduzindo hipóteses complementares para atingir o comportamento não linear. Estes são chamados de Modelos Linear Elástico da Fratura Modificado, MLEFM. Outros abandonam esta aproximação clássica para descreverem a propagação da fissura com base em equações constitutivas, considerando a hipótese de abrandamento do material e de deformações localizadas. Este tipo denomina-se Modelos de Abrandamento Progressivos, ou simplesmente, modelos *strain-softening*. Neste capítulo, um enfoque maior será dado a estes últimos modelos.

3.2- CARACTERÍSTICAS RELEVANTES DO CONCRETO

Para compreender a Mecânica Não Linear da Fratura, MNLF, aplicada ao concreto, faz-se necessário analisar as características de alguns materiais. Para facilitar este entendimento, é feito um paralelo entre três diferentes tipos. São eles, os materiais frágeis, dúcteis e quase-frágeis.

Corpos frágeis, como o ferro fundido, vidro e pedra se quebram com valores relativamente baixos de deformações. A zona não linear que se forma com a propagação de uma fissura é insignificante em relação à seção transversal da estrutura. Em síntese, não se considera a existência de um abrandamento localizado do material. Já os dois últimos tipos, dúcteis e quase-frágeis, apresentam uma zona não linear bem maior que interfere fortemente na escolha de métodos não-lineares de análises, Figura 3.2.

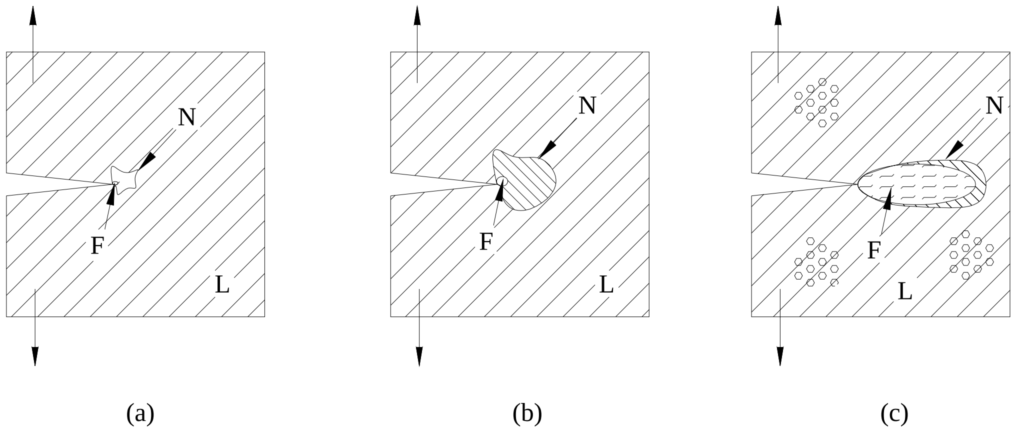
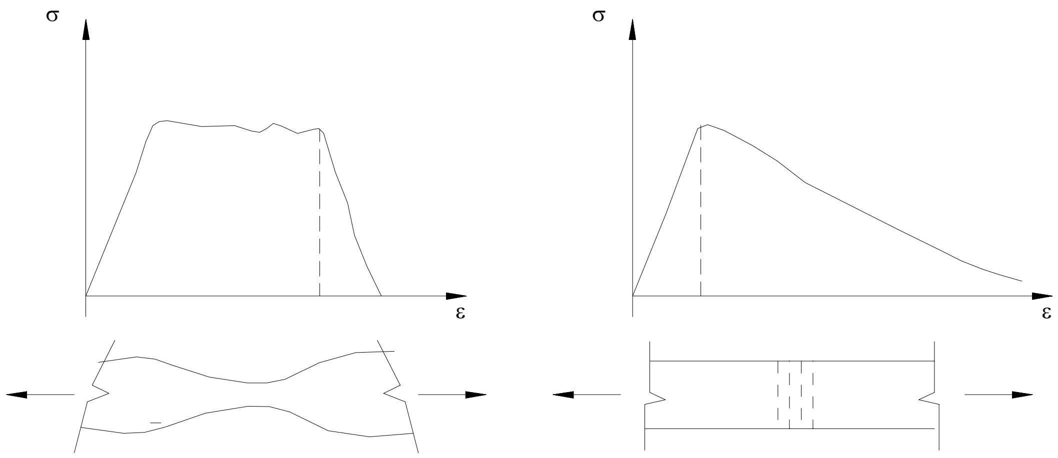


Figura 3.2: Características da zona de fratura. (a) Materiais frágeis; (b) materiais dúcteis; (c) materiais quase-frágeis. (Bazant, 2002)

No entanto, enquanto que nos materiais dúcteis a maior parte da zona não linear envolve grande plasticidade e escoamento perfeito, *N*, e ainda, uma zona de fratura muito pequena, *F*, Figura 3.2b, nos quase-frágeis, a região de plasticidade perfeita quase não existe e a zona não linear, *N*, é quase que inteiramente preenchida pela zona de fratura, *F*, caracterizada pelo abrandamento do material, resultado da presença de microfissuras, Figura 3.2c.

Focando a atenção nestes dois tipos de materiais, as diferenças citadas, no que se refere à zona de abrandamento que se forma frente à fissura, refletem no comportamento de suas curvas tensão-deformação.

Ao se fazer um teste à tração numa barra de material dúctil, observa-se uma contração lateral quando tracionada, que resulta na diminuição da área de sua seção transversal, Figura 3.3a. Isso não ocorre com os materiais quase-frágeis que, quando submetidos ao carregamento, têm alteradas as disposições das partículas que compõem sua estrutura, resultando no enfraquecimento das ligações entre os agregados na seção mais solicitada favorecendo, deste modo, o aparecimento de microfissuras, como mostra a Figura 3.3b.



Dúctil (a)

Quase-frágil (b)

Figura 3.3: Diagrama tensão-deformação. (a) Materiais dúcteis; (b) materiais quase-frágeis. (ACI COMMITE REPORT, 1989).

Neste contexto, a propagação de uma fissura, em materiais como o concreto, resulta na formação de uma zona de micro-fissuras que reduz o fluxo de energia e ao mesmo tempo aumenta a área da superfície das fissuras. Esta área, onde ocorre o abrandamento do material, pode ser chamada apenas de zona de fratura. Nela é conduzido todo o processo de propagação da fissura.

Em suma, a zona de fratura é caracterizada por uma área parcialmente destruída, mas que ainda é capaz de transferir tensões. Nela se verifica um decréscimo da tensão normal associada ao aumento da deformação, o chamado efeito *strain-softening*, trecho descendente do diagrama da Figura 3.3b. Este fato foi comprovado através de ensaios experimentais realizados por diversos pesquisadores, tais como L'Hermite (1959); Rush e Hilsdorf (1963); Hughes e Chapman (1966), e Evans e Marathe (1968) *apud* ACI COMMITE REPORT (1989).

A partir destas observações, Rashid, em 1968, foi o primeiro a aplicar o Método dos Elementos Finitos em problemas de concreto fissurado, introduzindo o chamado *strain-softening* sob a forma de uma brusca queda vertical de tensão, σ, Figura 3.4a, onde, f_t é a tensão crítica, (Bazant e Oh, 1983). Porém, esta consideração se mostrou inadequada para peças cuja seção transversal não fosse suficiente grande em relação ao tamanho do agregado. Além disso, sob o ponto de vista dinâmico, a brusca queda de tensão emite através dos elementos discretizados de uma estrutura um choque de onda de falsa natureza, (Bazant e Oh, 1983). Somente em 1977, resultados mais realísticos foram obtidos, por Scanlon, que reconheceu a necessidade de considerar uma gradual queda de tensão, Figura 3.4b.

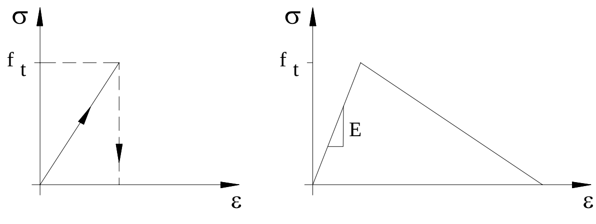


Figura 3.4: Modelos *strain-softening* (a) idealizado por Rashid, em 1968, e (b) idealizado por Scanlon, 1977. (ACI COMMITE REPORT, 1989).

Na Figura 3.4 os parâmetros σ e f_t são, respectivamente a tensão e seu valor máximo, E é o módulo de elasticidade e ε é a deformação.

Em materiais como o concreto, a deformação dentro da zona de fratura é acompanhada por uma descarga do material fora da zona de fratura, Figura 3.5c, o que significa que micro-fissuras fora da zona de fratura são contidas ou, até mesmo, fechadas, podendo, desta forma, ser desprezada a não linearidade desta área, (Rots et al, 1985). Isto explica a adoção de um comportamento linear elástico do material, como simplificação, antes de iniciada a propagação da fissura, Figura 3.4a.

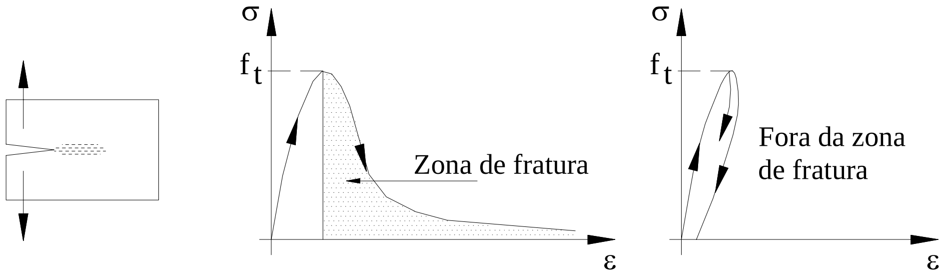


Figura 3.5: Zona de micro-fissuras. a) Tensão *strain-softening* dentro da zona de fratura; b) descarga fora da zona de fratura, (Rots et al, 1985).

Na adoção de qualquer modelo de fissura é de crucial importância a interpretação do efeito *strain-softening* dentro da zona de fratura. No entanto, quando se trata de estruturas de grandes dimensões a teoria elástica linear da fratura toma a vez, como foi mostrado no início deste capítulo, Figura 3.1. Isto só é possível porque a zona de fratura, neste caso, se torna muito pequena, podendo, assim, ser desprezível.

Esta conclusão mostra que o efeito do tamanho é um fator relevante no estudo da propagação da fissura, (Bazant, 2002). A partir da década de 80, foram produzidos vários trabalhos de pesquisas que se tornaram importantes contribuições neste campo da engenharia. No âmbito internacional pode-se destacar, Petersson (1981), Planas e Elices (1991), Bazant (2002), Carpinteri et al (2003). Dentre os trabalhos Sul Ameriacano (Brasil - Argentina), tem-se, Rocha (1989), Borges et al (2001), Rios (2002), Rios e Riera (2002), Rios et al (2002a) e Morquio (2003). Bazant (2002) cita outros trabalhos relevantes neste campo, tais como, Bazant (1976), Mihashi et al (1991, 1994), Bazant (1998), dentre outros. Pitangueira e Silva (2000) apresentam também, uma série de referências bibliográficas a respeito do assunto.

3.3- MODELOS APROXIMADOS PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR DA ZONA DE FRATURA

O Modelo Linear Elástico da Fratura, MLEF, obviamente, não pode ser diretamente aplicado ao estudo da fratura de materiais que apresentam uma significante zona de micro-fissuras. Portanto, a aplicação numérica no campo da mecânica da fratura se faz, basicamente, com a utilização de dois modelos de fissuração de enfoques distintos, são eles o Modelo da Fissura Discreta e o Modelo da Fissura Distribuída. Estes modelos são utilizados para modelar a propagação de fissuras em geral.

O primeiro baseia-se na idéia de se trabalhar com a parte do sólido que é contínua. No momento que se detecta a aparição de uma fissura, seus lábios se incorporam ao contorno do sólido analisado. Este método, pelo fato de representar a falha através de uma única linha de fissura, é aplicado em casos de propagação de uma ou de poucas fissuras. No segundo, a fissura é incluída no meio contínuo e modelada utilizando campos de deslocamentos contínuos. Além disso, as fissuras são distribuídas dentro de uma banda de elementos, possibilitando a análise de casos que apresentam várias fissuras paralelas entre si, (Oliver,1990).

Enquanto o Modelo da Fissura Discreta trata o problema através de uma descontinuidade física, o Modelo da Fissura Distribuída utiliza a teoria do contínuo, na qual uma concentração de deformações localizada representa o fenômeno de propagação de várias fissuras inseridas numa área pré-determinada.

A seguir uma explanação mais elaborada destes dois métodos será dada, na qual serão destacados os principais pesquisadores que contribuíram para a consolidação e aprimoramento teórico dos modelos não lineares. Desta forma, cada metodologia será facilmente assimilada, o que facilitará o entendimento da aplicação da Mecânica da Fratura Não Linear.

3.3.1- Aproximação da Fissura Discreta (Modelo Coesivo)

No modelo coesivo, o sólido é considerado homogêneo e o comportamento em qualquer ponto é isotrópico linear (material com o mesmo comportamento mecânico em qualquer direção) até o momento em que a tensão principal atinge seu valor crítico. A partir deste instante, começa-se a produzir a descontinuidade, e a consideração dos mecanismos coesivos entre os lábios da fissura estabelece uma diminuição progressiva das tensões com a abertura da fissura durante um certo período. A não linearidade é, desta forma, descrita em termos da relação entre as tensões coesivas e a abertura da fissura.

Nesta forma de aproximação, a fissura é considerada como uma falha localizada numa superfície, onde há uma descontinuidade de deslocamento. Frente a esta superfície descontínua, se desenvolve uma linha de fissura sobre a qual atuam forças que agem no sentido oposto a sua abertura. Estas forças são denominadas forças coesivas e a essência deste modelo consiste em considerar a presença delas sobre uma área localizada.

Existem várias versões deste modelo. Dugdale, em 1960, estudando a fratura dúctil, propôs um modelo matemático com uma tensão coesiva constante, Figura 3.6, afirmando, ainda, que a tensão na extremidade da fissura nunca excede a tensão plástica do material, (Planas e Elices, 1993).

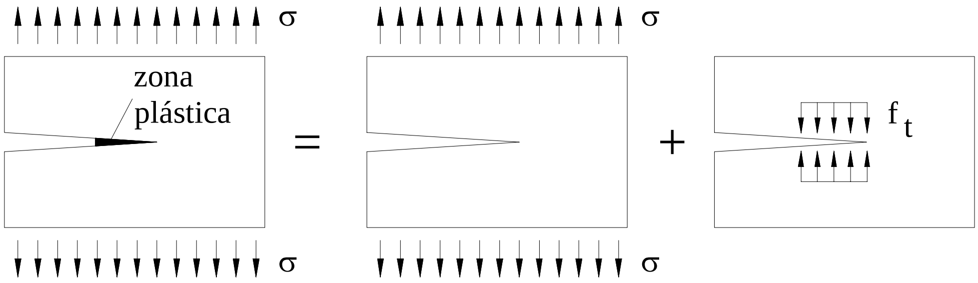


Figura 3.6: Modelo de Dugdale, 1960, (Petersson, 1981).

Barenblatt (1962), analisando materiais frágeis, usou o modelo coesivo em uma pequena região próxima à extremidade da fissura, onde afirmou existirem forças coesivas agindo entre as faces da fissura, Figura 3.7. Em sua formulação, estas forças coesivas, variáveis com a deformação, são responsáveis por eliminar a singularidade observada por Inglis, em 1913. O autor limita suas análises para casos onde o tamanho da zona coesiva é muito pequeno em relação ao comprimento da fissura, (Planas e Elices, 1993).

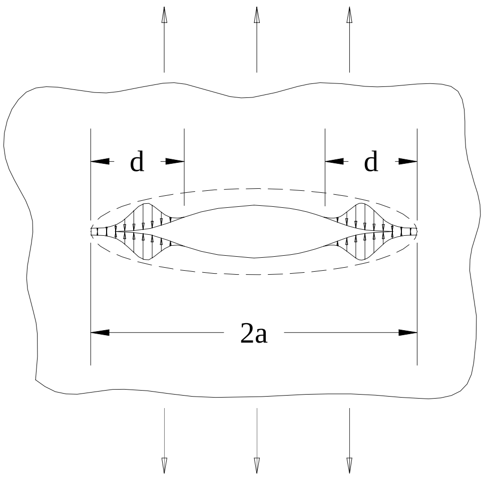


Figura 3.7: Forças de coesão na extremidade da fissura, (Petersson, 1981).

A aplicação do modelo coesivo voltado para o concreto foi introduzida por Hillerborg et al (1976). Na sua teoria é considerado um abrandamento progressivo do material depois que as tensões coesivas atingem seu valor máximo. No item 3.4.1, encontrar-se-á mais detalhes a respeito desta versão do modelo coesivo.

Há ainda, o Método das Faces Coesivas cuja teoria está baseada nos trabalhos de Dugdale de 1960 e Barenblatt de 1962. As interfaces coesivas podem ser consideradas elementos virtuais que apresentam uma relação constitutiva simulando as forças coesivas na região da ponta da fissura. Sua aplicação está voltada para o conceito da fratura discreta na qual as trincas são modeladas pela separação entre elementos nas suas faces.

Fedrigo et al, (2001), Needleman (1987 e 1990), Xu e Needleman (1993) e Tvergaard e Hutchinson (1993 e 1996) utilizaram este método, juntamente com a análise de elementos finitos, para o mapeamento da trajetória da fissura. Este modelo discreto é composto de elementos finitos volumétricos, contornados por elementos de interfaces coesivas. A criação de interfaces é feita ao longo do contorno dos elementos, sendo que não há limitação quanto a sua localização. Com esta abordagem, a trinca pode se propagar pelo contorno dos elementos através do rompimento das interfaces, sem que se tenha que determinar o caminho assumido pela trinca.

3.3.2- Aproximação da Fissura Distribuída

Esta aproximação se baseia na idéia de se utilizar equações da mecânica do contínuo durante todo o processo. A fissura e a zona de fratura são modeladas por um campo de deformações localizado dentro de uma pequena área, a qual é chamada de Banda de Fissura. A não linearidade, neste caso, é descrita em termos da relação entre as tensões e as deformações.

A concentração de deformações produzida no interior da banda de fissura apresenta valor muito alto (teoricamente infinito) em comparação com seu exterior. A diferença de deslocamentos de um lado ao outro da banda de fissura representa a descontinuidade dos deslocamentos nos lábios da fissura.

O Modelo da Fissura Distribuída foi primeiramente utilizado por Rashid, em 1968. Ele representou o concreto fissurado como um material ortotrópico (material de mesmo comportamento mecânico qualquer que seja a rotação dos eixos cartesianos, x, y e z), cujo módulo de elasticidade foi reduzido na direção normal ao plano da fissura. Na sua aproximação, a tensão no elemento é limitada pela resistência do material. O abrandamento progressivo do material não é considerado, ou seja, depois que a tensão atinge seu valor máximo, ela cai bruscamente para zero, (Carpinteri et al, 2003).

Seguindo o princípio da Aproximação da Fissura Distribuída, Bazant e Oh, em 1983 desenvolveram um método não linear considerando, agora, o abrandamento do material. Foi chamado de Modelo da Banda de Fissura. O objetivo era suprir as desvantagens oferecidas pelo Método Coesivo de Hillerborg, principalmente no que se refere ao custo computacional quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos. O bom desempenho do método foi atestado ao longo do tempo com algumas análises comparativas. O detalhamento deste método, bem como o de Hillerborg, será descrito a seguir.

3.4 - MODELOS *STRAIN-SOFTENING* PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DO CONCRETO

3.4.1 - Modelo de Hillerborg, 1976

A análise da propagação de fissura no concreto e materiais similares foi iniciada por Hillerborg et al (1976) que propuseram o chamado 'Modelo da Fissura Fictícia'. O modelo se fundamenta nos conceitos de Barenblatt (1962) e de Dugdale, (1960).

Neste modelo, a zona de fratura é modelada por uma fissura fictícia capaz de transferir tensões. São tensões coesivas que atuam na direção normal às faces da fissura. Elas são dadas como uma função da abertura da fissura. Quando a tensão atinge seu valor máximo, dá-se início ao processo de propagação da fissura. A partir deste momento, as tensões decrescem gradualmente com o aumento da abertura da fissura. Quando as faces da fissura se afastam a uma distância ω_f , as forças de coesão deixam de agir, Figura 3.8.

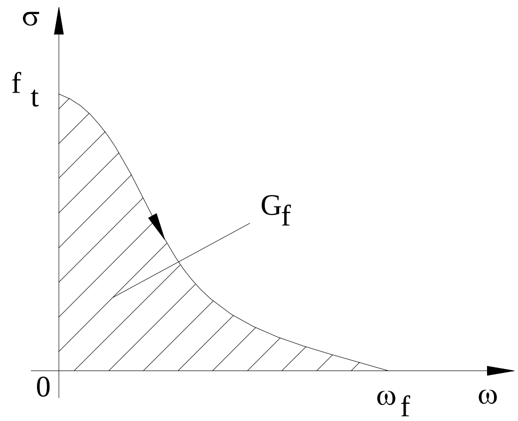


Figura 3.8: Curva de abrandamento do concreto. Modelo da Fissura Fictícia, (Hillerborg et al, 1976).

Neste intervalo descrito, a quantidade de energia absorvida por unidade de área fissurada, em função da abertura da fissura, corresponde à área sob a curva da Figura 3.8:

$$G_f = \int_0^{\omega_f} \sigma \cdot d(\omega) \tag{3.1}$$

Desta forma, apenas dois parâmetros são essenciais para a análise do processo de fratura, a energia de fratura, G_f e a tensão, σ.

Conceitualmente, o modelo de Hillerborg é o método mais simples de caracterizar o comportamento da zona de fratura, por isso, também é o mais utilizado para modelar a propagação de fissuras nos materiais quase-frágeis.

3.4.2 - Modelo de Bazant e Oh, 1983

Bazant e Oh, (1983), desenvolveram um método não linear baseado nos conceitos da aproximação da fissura distribuída, cujos resultados se aproximaram bastante daqueles conduzidos pela metodologia de Hillerborg et al (1976). Desta forma, foi atestada a eficácia do Modelo da Banda de Fissura de Bazant e Oh (1983).

A zona de fratura, neste caso, é modelada num meio contínuo considerando uma concentração de deformações no interior de uma banda de fissuras pré-estabelecida. O abrandamento do material é representado por meio de uma relação tensão-deformação. Quando a tensão atinge seu valor máximo, dá-se início ao processo de propagação da fissura. A partir deste momento, as tensões decrescem gradualmente com o aumento da deformação. Portanto, a separação das faces da fissura é modelada pela diferença de deformação de um lado a outro da fissura, Figura 3.9.

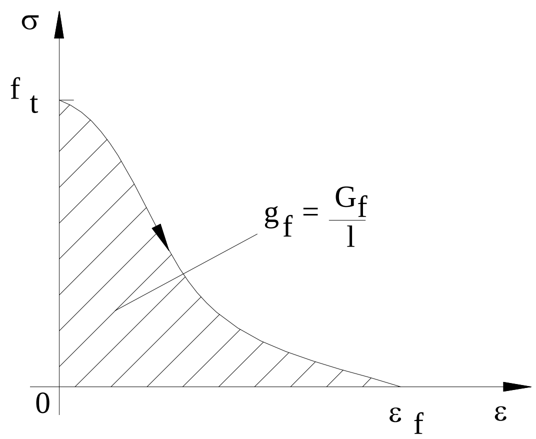


Figura 3.9: Curva de abrandamento do concreto. Modelo da Banda de Fissura, (Bazant, 2002).

Neste intervalo descrito, a quantidade de energia absorvida por unidade de área fissurada, em função da abertura da fissura, corresponde ao produto entre a largura da banda, *l*, e a integral da curva da Figura 3.9:

$$G_f = l \cdot \int_0^{\varepsilon_f} \sigma \cdot d(\varepsilon) \tag{3.2}$$

Desta forma, três parâmetros são essenciais para a análise da fratura, a energia de fratura, G_f, a tensão, σ e a largura da banda de fissura, *l*.

O abrandamento por deformação é um mecanismo artificial, visto que, na prática não existe abrandamento por deformação em um meio contínuo. Este artifício é utilizado para produzir uma concentração de deformações no interior da banda de fissura, sem afetar a parte do meio que permanece contínua.

Sua principal vantagem sobre o Modelo de Hillerborg é a capacidade de levar em consideração tensões triaxiais na zona de fratura. Além disso, o Modelo da Banda de Fissura se adequa melhor para caso de fissuras distribuídas paralelamente, (Bazant, 2002).

O Modelo da Banda de Fissura, assim como o da Fissura Fictícia de Hillerborg tem melhor desempenho se o caminho da fissura for conhecido previamente, ou se a linha de malha coincidir com o seu caminho. Se o caminho não é conhecido de antemão, repete-se a solução numérica atualizando o esboço da malha, ou usa-se uma orientação dependente do fator de correção da largura de banda. Este fator ajusta o valor efetivo da altura do elemento, h_{eq}, em função do ângulo da banda de fissura com a linha da malha e toma-se uma largura diferente a partir da média da propagação oblíqua em zig-zag da banda de fissura, Figura 3.10, (Bazant, 2002).

A largura da banda da fissura, l, é considerada igual à relação entre a área do elemento, ${h_{eq}}^2$, e a variação do comprimento de fissura, Δa, quando ela avança o correspondente a um elemento, Figura 3.10:

$$l = \frac{{h_{eq}}^2}{\Delta a}, \text{ onde: } \quad \Delta a = h_{eq} \cos \alpha_{cr} \tag{3.3}$$

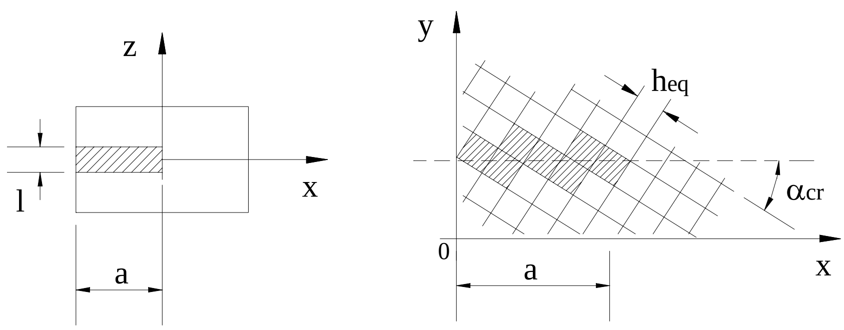


Figura 3.10: Desenvolvimento da fissura no modelo de Bazant, (Bazant e Oh, 1983).

3.5 – DIFICULDADES MATEMÁTICAS ENCONTRADAS NOS MODELOS *STRAIN-SOFTENING*

O efeito strain-softening introduz uma dificuldade matemática, uma vez que os resultados são fortemente influenciados pelo tamanho da malha, no que diz respeito à energia dissipada no processo de fratura, (Carpinteri et al, 2003).

A influência do comprimento do elemento de discretização, *l*, é esquematizada pela Figura 3.11, onde *a* é um comprimento definido para *l*. Neste caso, o ramo descendente da relação constitutiva $\sigma - \varepsilon$ que representa o abrandamento do material sofre alterações de acordo com o refinamento da malha. Observa-se que uma maior discretização da estrutura conduz a uma diminuição do abrandamento do material conforme mostra a Figura 3.11, na qual a curva é deslocada para uma posição horizontal. Tal situação desconfigura o comportamento real do material fazendo-o parecer dúctil.

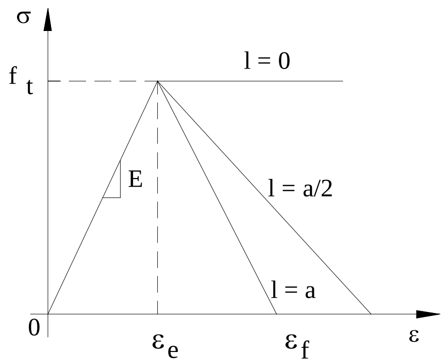


Figura 3.11: Influência do comprimento do elemento no ramo descendente da lei $\sigma(\varepsilon)$, (Oliver, 1990)

A variação do tamanho do elemento a valores cada vez menores impossibilita a convergência uniforme dos resultados. Isto se conhece na literatura como falta de objetividade dos resultados com relação ao tamanho da malha. O comportamento ilustrado na Figura 3.11 é típico de qualquer análise que considere o abrandamento do concreto por deformação, (Oliver, 1990).

3.6 - RECENTES CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS NA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS NÃO LINEARES

Além das contribuições de Hillerborg, em 1976, e Bazant, em 1983, para o desenvolvimento e aplicação da mecânica da fratura voltada para materiais quase-frágeis, vários outros trabalhos de pesquisa podem ser encontrados com diferentes enfoques. O concreto, devido a seu papel relevante na construção civil, ainda desperta grande interesse. Em virtude disto, inúmeros trabalhos podem ser citados tendo o concreto como objeto de estudo. Alguns deles que chamaram mais a atenção para a confecção do presente trabalho serão citados a seguir.

Seguindo uma ordem cronológica, começa-se por citar Gambarova e Valente (1990). Utilizando um código de elementos finitos, introduziram o Modelo da Banda de Fissura para analisar uma viga protendida de concreto armado, antes estudada por Leonhardt, em 1973. Eles reproduziram as curvas carga-deslocamento e tensão-deformação do aço. Os autores obtiveram resultados compatíveis com os já existentes.

Ulfkjaer at al (1995), analisaram a falha de uma viga de concreto simplesmente apoiada, submetida à flexão em três pontos, pela representação de uma fissura fictícia no meio da peça. Seu modelo analítico assumiu que uma fissura fictícia se desenvolve no meio da peça sobre uma camada elástica de espessura proporcional à profundidade da viga, quando a tensão atinge seu valor último. Uma representação linear para a curva *strain-softening* foi considerada. Os autores compararam os resultados, tais como curva momento-rotação, tamanho da fissura fictícia e carga crítica, com os de um modelo numérico mais detalhado e obtiveram uma boa concordância entre eles. Observaram ainda, que as equações analíticas contradizem a teoria quando aplicadas em materiais de grande fragilidade, indicando, desta forma, sua restrição de uso. Verificaram também que a fissura fictícia e a real começam a se desenvolver no mesmo instante, na curva carga-deformação.

Jiang e Mirza (1997), desenvolveram um modelo não-linear para a análise de uma laje de concreto armado simplesmente apoiada ao longo dos quatros lados, e submetida a uma carga uniformemente distribuída. Os autores utilizaram o modelo da Aproximação da Fissura Distribuída. O estudo se baseou na representação de elementos discretos para o concreto e o aço. O elemento resultante é obtido pela soma das contribuições de todos os elementos envolvidos. Os pesquisadores utilizaram diferentes malhas de elementos finitos e de incrementos de carga para testar a sensibilidade dos resultados. Os resultados apresentaram uma boa concordância com dados experimentais já existentes.

Raghu Prasad et al (2000), fazendo uso do MATLAB e de um pacote computacional de elementos finitos, realizaram um estudo paramétrico em vigas de compostos laminados de grafite e epoxy para analisar o modo II de fratura. A curva carga-deslocamento foi analisada em diferentes comprimentos e profundidades da amostra, e diferentes comprimentos de fissura. Os autores aplicaram o Método da Fissura Fictícia de Hillerborg, (1976) com uma curva *strain-softening* linear. Os resultados encontrados para o modo II de fratura foram semelhantes aos do modo I de fratura. Nos dois casos as curvas tensões-deformações apresentaram o fenômeno de instabilidade *snap-back,* em que os deslocamentos diminuem num certo instante do processo de propagação da fissura.

Cervenka et al (2002), avaliaram o desempenho de um pacote computacional de elementos finitos para estudar o comportamento do aço e da ligação entre aço e concreto. O pacote computacional é baseado no Método dos Elementos Finitos e se mostrou bastante eficaz para as análises feitas. Os autores também fizeram uso do Modelo da Banda de Fissura (Bazant,1983).

Oliver et al (2002), utilizando um modelo coesivo, analisaram uma viga submetida à flexão de três pontos, *three points bending test*, outra à flexão de quatro pontos, *four points bending test*, e uma barragem de gravidade construída em concreto. Todas as estruturas citadas foram submetidas a forças posicionadas de tal maneira a induzir um modo misto de fratura. Os resultados obtidos, no que diz respeito ao diagrama força-deslocamento das faces da fissura e à trajetória da fissura, apresentaram uma boa concordância com os obtidos experimentalmente.

Prado e van Mier (2003), fizeram uma série de análises numéricas utilizando um modelo para simular e avaliar a influência dos agregados no processo de fratura em amostras de concreto sujeitas a tensões uniaxiais. O modelo consistiu de barras cruzadas, com características das vigas de Bernoulli-Euler, formando triângulos regulares. Os autores utilizaram o Modelo da Fissura Fictícia de Hillerborg, 1976, para representar o comportamento não-linear do concreto. O estudo teve uma boa concordância com os resultados experimentais, além de indicar que a densidade de agregados tem efeito significativo na fase de pré-pico.

Carpinteri et al (2003) fizeram um apanhado de vários trabalhos desenvolvidos a partir de métodos não lineares de fratura que se fundamentam no princípio de uma fissura coesiva. O trabalho abrange aspectos numéricos, experimentais e teóricos do Modelo da Fissura Coesiva aplicado aos materiais quase-frágeis.

Como foi visto, várias foram as pesquisas realizadas com materiais quase-frágeis que devido a sua complexidade estrutural e seu comportamento não linear, exigiram esforços no desenvolvimento de formulações adequadas. Hoje são encontradas várias ramificações dos métodos não lineares apresentados.

Porém, quando se trata de estudar o descontínuo, algumas ferramentas podem exigir um alto custo computacional. O Método dos Elementos Discretos, MED, apresenta algumas vantagens em relação aos métodos clássicos, tais como o Método dos Elementos Finitos, MEF, e o Método dos Elementos de Contorno, MEC, principalmente no que diz respeito à facilidade da representação da ruptura e da interpretação dos resultados dinâmicos. O fundamento desta metodologia será abordado com mais detalhes a seguir. Este método será utilizado nas análises dos casos que serão apresentados, pela sua simplicidade e eficácia já comprovada em pesquisas passadas.

4 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

4.1 – INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico trouxe consigo o desenvolvimento de métodos numéricos para facilitar a análise de problemas diversos da engenharia de forma rápida e segura. Na área da Mecânica das Fraturas, vários estudos foram realizados e, em sua maioria, os métodos numéricos tradicionais, tais como os Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno, conduziram a análise do problema. Neste contexto podem ser citados trabalhos como os de Bazant e Oh, (1983), Gambarova e Valente, (1990), Leonhardt (1973), Planas e Elices (1990), Ulfkjaer at al (1995), Jiang e Mirza, (1997), Raghu Prasad et al, (2000), Sundara Raja Iyengar et al (2002), Cervenka et al, (2002), Oliver et al (2002), entre outros. No entanto, estes métodos clássicos partem do princípio de que o meio é contínuo, o que demanda um esforço maior para a análise da fratura.

Diante dos obstáculos encontrados com a utilização da mecânica do contínuo na análise de um corpo com falhas, a busca de métodos numéricos mais simplificados resultou na escolha do Método dos Elementos Discretos, MED. Este método consiste em representar o contínuo mediante partículas onde se concentram as massas que interagem entre si por meio de elementos unidirecionais com uma lei constitutiva definida em função de vários parâmetros. Tais parâmetros dependerão das características do material a modelar, da disposição das barras e da separação das massas a serem unidas. Cuidados em relação à energia que é retirada junto com o elemento fraturado devem ser levados em consideração.

Um dos pioneiros na apresentação do Método dos Elementos Discretos foi Hrennikoff (1941) que propôs a representação do contínuo mediante arranjos de bielas de rigidez equivalente. Absi, em 1971, aplicou a mesma idéia em fundações de base elástica e na representação de muros em prédios altos através de arranjos de barras com rigidez equivalente.

Grande mérito é atribuído à Cundall, em 1971 e 1974, que desenvolveu um modelo numérico capaz de representar partículas de qualquer forma, a este deu o nome de método dos elementos distintos, (Cundall, 1979). Cundall (1979) aplicou seu método para realizar estudos mecânicos geotécnicos com materiais granulares. O método é baseado no uso de um esquema numérico explícito das equações de movimento de uma estrutura formada por partículas rígidas com massas conectadas entre si, mediante molas e amortecedores.

O MED foi se desenvolvendo e se apresentando de diferentes formas de acordo com a representação almejada. Uma contribuição bastante significativa é atribuída a Nayfeh e Hefzy (1978) na análise de arranjos de barras cúbicas e octaédricas; no entanto, o interesse destes pesquisadores era representar painéis empregados na indústria aeronáutica, cuja geometria se apresentava sob a forma de treliças espaciais, através de um meio contínuo equivalente. A partir desta idéia foram desenvolvidas formulações para a obtenção das propriedades mecânicas equivalentes do sólido fictício.

Modelar estruturas de materiais altamente heterogêneos é uma tarefa difícil. O Método da Homogeneização é uma ferramenta que vem para facilitar esta tarefa. Sigmund (1994) discretizou um sólido de material elástico linear através de um modelo de treliça e, também por discos de espessura variável. O sólido com propriedades arbitrárias foi representado utilizando uma aproximação inversa, o chamado Método da Homogeneização Inversa. O autor observou que o modelo de treliça foi capaz de representar com satisfação e simplicidade uma gama maior de materiais.

Passando para o âmbito Sul-americano, Hayashi (1982) percorreu um caminho inverso àquele traçado por Nayfeh e Hefzy (1978). O autor representou um sólido elástico ortotrópico mediante um sistema tridimensional de barras reticuladas e rigidez equivalente ao contínuo.

Rocha (1989) aplicou a metodologia de Hayashi (1982) no estudo de materiais não dúcteis e não homogêneos, como é o caso do concreto, para a representação do fenômeno de ruptura. No modelo, as massas se concentram nos nós e a lei constitutiva das barras é uniaxial, de forma a simular a fratura desativando as barras que estão nas regiões danificadas. O autor analisou o comportamento de modelos submetidos a solicitações uniaxiais. Iturrioz (1995) estendeu a análise para o concreto armado e concreto simples submetido a um estado biaxial de tensões. O método numérico também foi utilizado para analisar um bloco de solo arenoso cimentado artificialmente sobre uma camada de areia fofa, (Iturrioz el al, 2000a) e um bloco de estacas de concreto armado, (Iturrioz el al, 2000b).

Iturrioz et al (2001), analisando uma peça retangular com furo, realizaram um estudo comparativo entre dois modelos numéricos, o Método dos Elementos Finitos com interface coesiva e o Método dos Elementos Discretos, apontando suas vantagens e desvantagens. Em 2002, junto com outros autores, apresentou o Método dos Elementos Discretos na simulação numérica de ensaios de impacto sobre compostos poliméricos. Os resultados obtidos foram comparados com dados experimentais encontrados na literatura e uma boa correlação entre os valores de ruptura reais e numéricos foi verificada, (Iturrioz et al, 2002).

Doz (1995), aplicou o Método dos Elementos Discretos na simulação numérica de sismos, estudando a propagação de ondas produzidas pelo deslizamento de dois blocos modelados com este método e determinando uma lei que define o atrito entre eles.

Souza (2001), estudou o fenômeno de fissuras em vigas de concreto com falhas pré-existentes, observando os aspectos dinâmicos. O autor utilizou o Método dos Elementos Discretos e comparou seus resultados com os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, pelo Método dos Elementos de Contorno, e por experimentos laboratoriais.

Rios (2002), aplicou o Método dos Elementos Discretos na análise da propagação de fissuras em estruturas de concreto, fazendo uso da representação espectral de Monte Carlo para simular a heterogeneidade do material. Uma análise comparativa com resultados já existentes na literatura comprovou a eficácia do método. O autor verificou a capacidade do método em predizer o efeito de escala em elementos de concreto e concreto armado, também em parceria com outros pesquisadores (Rios, 2002; Rios e Riera, 2002 e Rios et al, 2002a). Por meio de ensaios experimentais e numéricos observou, ainda, o efeito da deterioração do material devido à aplicação seqüencial de cargas medidas através de parâmetros dinâmicos, tais como freqüência e amortecimento. Rios, também, aplicou sua metodologia em problemas de impacto com a aplicação de cargas crescente sobre placas e cascas cilíndricas e no caso do impacto de um navio na estrutura de defesa de um cais de porto, (Rios, 2002 e Rios et al, 2002b).

Spellmeyer et al (2002) estudaram o processo de propagação de fissuras em uma placa com uma fissura central, submetida a uma ação dinâmica. Foram analisadas a velocidade de propagação e a influência da forma da extremidade da fissura sobre a trajetória da mesma.

D'Ambra et al (2002) apresentaram o Método dos Elementos Discretos na simulação numérica de ensaios de impacto sobre compostos poliméricos. Os resultados foram comparados com dados experimentais obtidos por outros autores e uma boa correlação entre eles foi verificada.

A formação de novas fissuras e de como elas atingem a superfície livre durante um terremoto foi investigada numericamente por Dalguer et al (2003). Eles foram os primeiros a realizar uma simulação numérica com o MED para descrever a propagação da fissura, em três dimensões, em consequência de uma espontânea ruptura cisalhante dinâmica ao longo de uma falha pré-existente.

d'Ávila et al (2003) desenvolveram um estudo sobre a objetividade da malha na análise numérica de tirantes de concreto simples fraturados. Eles empregaram quatro metodologias diferentes de análise, das quais três delas se basearam o Método dos Elementos Finitos e a outra, no Método dos Elementos Discretos. Desta forma, através da comparação das diferentes metodologias, puderam identificar as vantagens e desvantagens de cada método.

Schmall (2003) aplicou o Método dos Elementos Discretos para analisar a propagação de fissuras em placas pré-fissuradas submetidas à flexão.

Rios e d'Ávila (2004) analisaram as mudanças da norma de concreto NBR 6118/80 que resultaram na nova norma NBR 6118/03. Os pesquisadores utilizaram o Método dos Elementos Discretos para analisar o comportamento no centro de vigas antes ensaiadas experimentalmente. Os resultados experimentais, referentes aos valores da abertura de fissuras, flechas, e à questão da ductilidade, foram comparados com os obtidos pelas normas nova e antiga, NBR 6118/03 e NBR 6118/80, e por meio de análises numéricas de elementos finitos e elementos discretos.

4.2 - DESCRIÇÃO DO MODELO UTILIZADO

O Método dos Elementos Discretos, utilizado aqui, consiste em representar o contínuo através de um conjunto de massas discretas concentradas que interagem entre si por meio de elementos reticulados espaciais que funcionam como molas axiais, cujas rigidezes equivalem à porção representada do contínuo.

O elemento utilizado tem a forma cúbica, Figura 4.1, onde as arestas e barras paralelas aos eixos coordenados possuem comprimento L_c e as barras inclinadas, diagonais do cubo, possuem comprimento $\sqrt{3}L_c / 2$. Todas as barras que compõem a treliça são rotuladas de modo que não há ocorrência de momento fletor localizado.

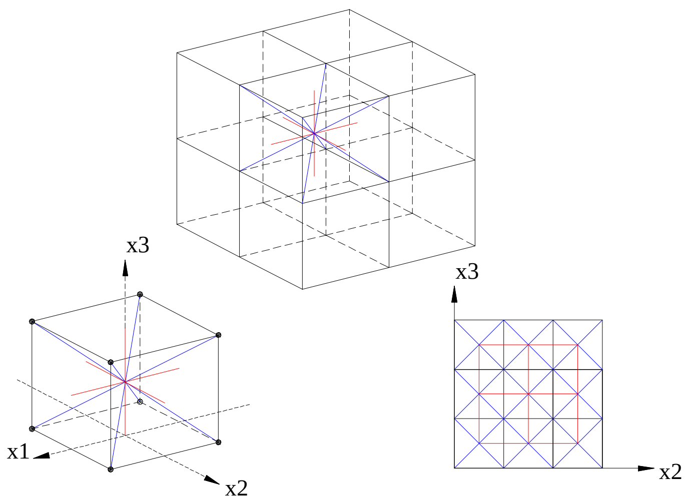


Figura 4.1: Modelo cúbico apresentado por Nayfeh e Hefzy (1978).

O modelo em treliça apresenta uma série de vantagens e, como todos os outros, algumas desvantagens. Ao enfatizar o lado positivo do método começa-se por citar a possibilidade de definir uma relação constitutiva não linear e um critério de ruptura a partir da forma mais simples: a uniaxial. A representação do comportamento dinâmico do meio contínuo a partir da concentração de massa nos nós, também é uma característica positiva do método. E também, a possibilidade de utilização dos métodos explícitos de integração, por tornarem o problema dinâmico de fácil resolução, eliminando a necessidade de montagem e armazenagem de matrizes de rigidez. Isto é especialmente conveniente para análises dinâmicas não lineares, onde a cada passo de integração no tempo a matriz de rigidez deveria ser modificada. Por serem as coordenadas nodais atualizadas em cada intervalo de tempo e os elementos utilizados serem de treliça, este método permite considerar grandes deslocamentos em forma natural.

Por outro lado, no caso em que seja empregado um método explícito de integração, o intervalo de tempo é severamente restringido por condições de estabilidade numérica. Isto pode resultar em um tempo computacional elevado para análises em que se deseje simular fenômenos de duração relativamente longos (modos de vibração de baixa freqüência, aplicação lenta dos carregamentos, etc.).

Um código computacional baseado no Método dos Elementos Discretos foi elaborado por Rocha, (1989), em que a fratura do material é modelada desativando as barras na região afetada pela descontinuidade. O seu algoritmo apresenta uma formulação toda voltada para a análise de estruturas de materiais quase-frágeis, como o concreto. Esta ferramenta servirá de base para o desenvolvimento deste trabalho.

4.3 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

A relação constitutiva para um corpo elástico arbitrário pode ser escrita, em notação indicial, da seguinte forma:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \qquad (i, j = 1,..6) \tag{4.1}$$

Para um corpo anisotrópico elástico, a matriz das constantes elásticas, C_{ij}, apresenta 21 parâmetros independentes. Porém, considerando que o material apresenta as mesmas propriedades físicas em todas as direções (isotrópico) o número de constantes elásticas da matriz, C_{ij}, é reduzido.

Observando o modelo cúbico da Figura 4.1 é perceptível que a inversão da orientação dos eixos coordenados não altera o comportamento mecânico do elemento o que caracteriza um meio ortotrópico. Neste caso, a matriz das constantes elásticas irá conter três parâmetros distintos:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde C_{11}, C_{12} e C_{44} são funções do modulo de elasticidade longitudinal, *E*, e do coeficiente de Poisson, ν. Uma explicação mais detalhada da construção de uma matriz constitutiva é encontrada no livro de Lekhnitskii (1963).

As constantes elásticas, C_{ij}, para qualquer corpo anisotrópico, podem ser transformadas de um sistema de coordenadas ortogonais cartesianas x_i para outro $\bar{x}_i$, (*i*=1,2,3), através da equação:

$$\bar{\varphi}_{ij} = f\left(\varphi_{ij}, \alpha_{kl}\right) \quad (k,l = 1,..3)\, e\, (i,j = 1,..6) \quad (4.3)$$

onde α são os cossenos diretores entre os sistemas de referência x_i e $\bar{x}_i$; φ_{ij} e $\bar{\varphi}_{ij}$ são as constantes elásticas referidas aos sistemas de referências x_i e $\bar{x}_i$, respectivamente.

Como todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade, *E*, cada conjunto de barras definirá um contínuo com uma propriedade unidirecional efetiva, que será referida como φ_{11}. Como φ_{11} é tomado como um valor médio ponderado com relação à área de influência da barra em um determinado conjunto de barras paralelas, seu valor dependerá do espaçamento entre estas barras.

O elemento cúbico da Figura 4.1 possui dois valores diferentes para φ_{11}, um correspondente às colunas normais às faces do cubo, ${\varphi_{11}}^{n}$, e o outro correspondente às barras diagonais, ${\varphi_{11}}^{d}$.

4.4 - PROPRIEDADES UNIDIRECIONAIS DO ELEMENTO CÚBICO

Para uma estrutura cúbica o valor do parâmetro $\varphi_{11}{}^{n}$ pode ser facilmente determinado projetando a área das barras numa face do cubo, Figura 4.2. Nesta área tem-se a contribuição de duas barras inteiras do cubo, ou seja, $(1/4)$das barras do vértice do cubo mais a barra do meio, como mostra a Figura 4.2. Dessa forma cada elemento tem uma área efetiva de contribuição igual à metade da área indicada na Figura 4.2, $\left(L_c{}^2/2\right)$. A relação entre a rigidez EA_n da barra e a área efetiva de contribuição dessa barra fornece o valor médio $\varphi_{11}{}^{n}$.

$$\varphi_{11}{}^{n} = \frac{EA_n}{L_c{}^2/2} = \frac{2EA_n}{L_c{}^2} \tag{4.4}$$

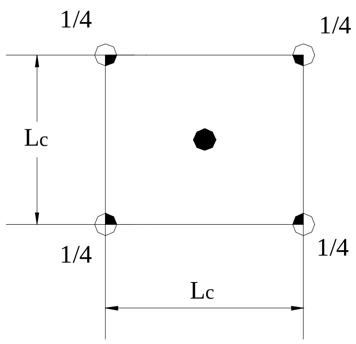


Figura 4.2: Área efetiva de contribuição dos membros normais paralelos entre si, (Iturrioz, 1995).

A área de contribuição de cada barra diagonal é também obtida em função da distância entre as barras e da projeção delas numa das faces do cubo, como se procedeu anteriormente. A distância, *d*, entre duas barras diagonais consecutivas situadas em um mesmo plano, pode ser obtida examinando-se a Figura 4.3, e é igual a $\left(\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)L_c$. A distância entre a projeção de duas diagonais paralelas é igual à metade do comprimento da diagonal da face do cubo.

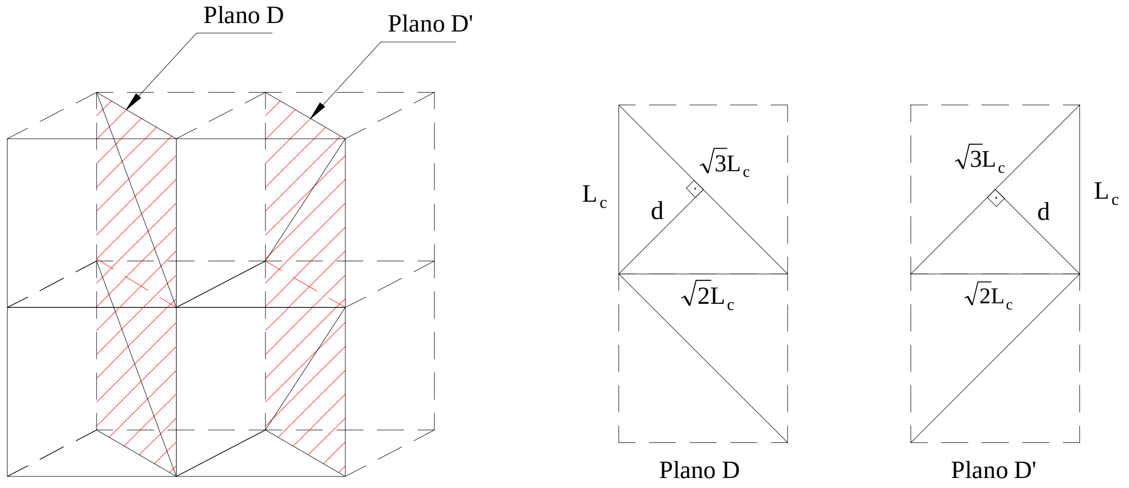


Figura 4.3: Plano que contém um conjunto de diagonais paralelas.

Logo, cada elemento tem uma área efetiva de contribuição igual à área hachurada ilustrada na Figura 4.4, correspondente à $L_c^{\,2}/\sqrt{3}$.

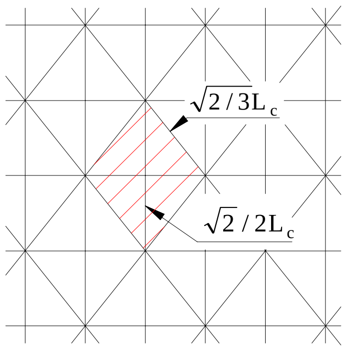


Figura 4.4: Área efetiva de contribuição das barras diagonais, (Nayfeh e Hefzy, 1979).

Então, o valor médio da propriedade unidirecional efetiva na direção das barras diagonais, $\varphi_{11}{}^{d}$, é dado pela expressão:

$$\varphi_{11}{}^{d} = \frac{EA_n}{L_c^{\,2}/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}EA_d}{L_c^{\,2}} \tag{4.5}$$

A partir de $\varphi_{11}{}^{n}$ e $\varphi_{11}{}^{d}$, é possível obter $\overline{\varphi}_{ij}$, que é a matriz de rigidez de um sólido equivalente a um arranjo de módulos cúbicos. Levando em conta que a cada nó genérico concorrem 7 barras (3 normais e 4 diagonais), como ilustrado na Figura 4.1, a matriz $\overline{\varphi}_{ij}$ será expressa da seguinte forma:

$$\overline{\varphi}_{ij} = \sum_{I-1}^{3} f_I\left(\varphi_{11}{}^n, \alpha_{kl}{}^n\right) + \sum_{J-1}^{4} f_J\left(\varphi_{11}{}^d, \alpha_{kl}{}^d\right) \quad (k,l = 1,..3) \tag{4.6}$$

onde $\alpha_{Ikl}{}^n$ e $\alpha_{Jkl}{}^d$ são co-senos diretores dos sistemas cartesianos $\overline{x}, x_I{}^n$ e $\overline{x}, x_J{}^d$, respectivamente.

Na sua forma expandida a Equação (4.6) poder ser escrita como:

$$\overline{\varphi}_{ij} = \varphi_{11}\begin{bmatrix} \alpha_1{}^2 & \alpha_1{}^2\alpha_2{}^2 & \alpha_1{}^2\alpha_3{}^2 & \alpha_1{}^2\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1{}^3\alpha_3 & \alpha_1{}^3\alpha_2 \\ \alpha_1{}^2\alpha_2{}^2 & \alpha_2{}^2 & \alpha_2{}^2\alpha_3{}^2 & \alpha_2{}^3\alpha_3 & \alpha_2{}^2\alpha_1\alpha_3 & \alpha_2{}^3\alpha_1 \\ \alpha_1{}^2\alpha_3{}^2 & \alpha_2{}^2\alpha_3{}^2 & \alpha_3{}^2 & \alpha_2\alpha_3{}^3 & \alpha_1\alpha_3{}^3 & \alpha_3{}^2\alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_1{}^2\alpha_2\alpha_3 & \alpha_2{}^3\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3{}^3 & \alpha_2{}^2\alpha_3{}^2 & \alpha_3{}^2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2{}^2\alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1{}^3\alpha_3 & \alpha_2{}^2\alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3{}^3 & \alpha_3{}^2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1{}^2\alpha_3{}^2 & \alpha_1{}^2\alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_1{}^3\alpha_2 & \alpha_2{}^3\alpha_1 & \alpha_3{}^2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2{}^2\alpha_1\alpha_3 & \alpha_1{}^2\alpha_2\alpha_3 & \alpha_2{}^2\alpha_1{}^2 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Cada barra do elemento discreto corresponde a um contínuo homogeneizado com uma propriedade unidirecional $\varphi_{11}{}^n$ ou $\varphi_{11}{}^d$. Os cossenos diretores que estão indicados abaixo se referem às barras de 1 a 7, respectivamente, como ilustra a Figura 4.5.

$$\begin{gathered}(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right), \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\right), \\ \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right), \left(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)\end{gathered} \tag{4.8}$$

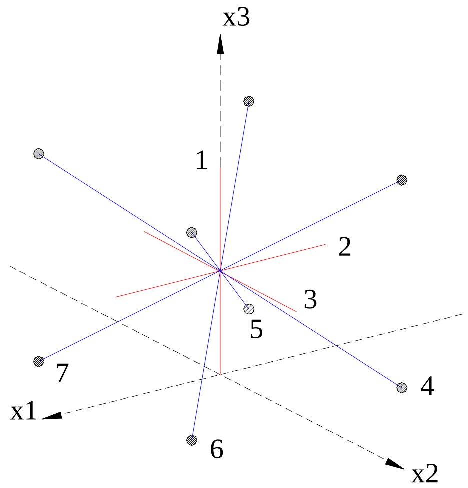


Figura 4.5: Barras internas do elemento cúbico.

Desta forma, adotando:

$$\Delta = \frac{\varphi_{11}{}^{d}}{\varphi_{11}{}^{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A_d}{A_n} \tag{4.9}$$

tem-se,

$$C_{11} = \varphi_{11}{}^{n}(1)^4 + 4\varphi_{11}{}^{d}\left(1/\sqrt{3}\right)^4 = \varphi_{11}{}^{n}\left(1 + \frac{4}{9}\Delta\right) \tag{4.10}$$

$$C_{12} = 4\varphi_{11}{}^{d}\left(1/\sqrt{3}\right)^2\left(1/\sqrt{3}\right)^2 = \varphi_{11}{}^{n}\left(\frac{4}{9}\Delta\right) \tag{4.11}$$

$$C_{44} = 4\varphi_{11}{}^{d}\left(1/\sqrt{3}\right)^2\left(1/\sqrt{3}\right)^2 = \varphi_{11}{}^{n}\left(\frac{4}{9}\Delta\right) \tag{4.12}$$

Substituindo os valores de C_{ij} na matriz obtém-se:

$$C_{ij} = \frac{2EA_n}{L_c^{\ 2}} \begin{bmatrix} 1+\frac{4}{9}\Delta & \frac{4}{9}\Delta & \frac{4}{9}\Delta & 0 & 0 & 0 \\ & 1+\frac{4}{9}\Delta & \frac{4}{9}\Delta & 0 & 0 & 0 \\ & & 1+\frac{4}{9}\Delta & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4}{9}\Delta & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4}{9}\Delta & 0 \\ & & & & & \frac{4}{9}\Delta \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Esta expressão foi proposta por Nayfeh & Helzy (1978), onde A_n e A_d são dados do problema. No trabalho de Nayfeh e Heftzy (1978) se esclarece que a Equação (4.13) é equivalente à matriz de rigidez de um material isótropo e homogêneo só no caso em que $\Delta = 9/8$ (o que implica $\nu = 0{,}25$). Para outros valores de ν, a equivalência não é perfeita e diferenças se concentram nos termos de corte. Alguns testes realizados para $\nu = 0{,}2$ e $\nu = 0{,}33$ mostraram erro na avaliação dos termos de corte de até 50%. Isto indica que certos cuidados devem ser levados em conta na utilização do Método dos Elementos Discretos no domínio elástico, (Iturrioz, 1995).

As constantes elásticas E, ν e ϑ podem ser obtidas para o contínuo equivalente a partir dos correspondentes C_{ij} da expressão anterior como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_1 + \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 &= \frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 + \frac{1}{E}\sigma_3 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{\vartheta}\sigma_4$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{\vartheta}\sigma_5 \qquad (4.15)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{\vartheta}\sigma_6$$

As expressões anteriores podem ser escritas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = A_{ij}\sigma_j \qquad (4.16)$$

de onde se obtém que:

$$a_{11} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}; \quad a_{44} = \frac{1}{\vartheta} \qquad (4.17)$$

Comparando a Equação (4.1) com a Equação (4.16) se conclui que:

$$A_{ij} = C_{ij}^{-1} \qquad (4.18)$$

Realizando esta inversão, é possível obter os coeficientes $a_{11}, a_{12}\ e\ a_{44}$ em termos de $C_{11}, C_{12}\ e\ C_{44}$ e a partir das Equações (4.17) e (4.13).

$$E = \frac{2EA_n\left(1+\frac{12}{9}\Delta\right)}{L_c^{\,2}\left(1+\frac{8}{9}\Delta\right)}$$

$$\nu = \frac{4\Delta}{9+8\Delta} \qquad (4.19)$$

$$\vartheta = \frac{2EA_n}{L_c^{\,2}}\frac{4}{9}\Delta$$

O que interessa no Método dos Elementos Discretos é obter as rigidezes axiais das barras, $E_{A,}$ em função das propriedades elásticas do sólido definidas por por E e ν. Sendo que as rigidezes axiais das barras normais são indicadas aqui por EA_n, e as das barras diagonais por EA_d. Desta forma os valores de E e ν são isolados da Equação (4.19), obtendo:

$$\Delta = \frac{9\nu}{(4-8\nu)}$$

$$EA_n = \frac{L_c^{\,2}}{2}\frac{(9+8\Delta)}{(9+12\Delta)}E \quad \therefore \quad \alpha = \frac{1}{2}\frac{(9+8\Delta)}{(9+12\Delta)} \tag{4.20}$$

$$E_n = EA_n = L_c^{\,2}E\alpha$$

$$E_d = EA_d = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta\, EA_n$$

As Equações (4.20) são válidas para o módulo cúbico mostrado na Figura 4.1. Para uma célula básica de forma diferente, deverão ser obtidas novas relações. Bush et al, em 1977, e Noor & Mikulas, em 1988, apresentam estas relações para tetraedros, os quais podem ser utilizados para a discretização de estruturas de formas geométricas mais variadas, (Iturrioz, 1995). Schlangen, em 1993, faz uma revisão bibliográfica de vários tipos de arranjos utilizados na modelagem de estruturas de concreto, (Iturrioz, 1995). Ostoja & Starzenski, em 1995, também apresentam o cálculo de propriedades equivalentes de barras para o caso em que existe ortotropia utilizando células tetraédricas, (Iturrioz, 1995).

4.5 - CRITÉRIO DE RUPTURA E RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELEMENTAR

Observando as expressões que definem o fator crítico de intensidade de tensões, $K_{I,}$ para vários casos listados no capítulo 2, item 2.5, fixando-se as proporções entre as diversas dimensões envolvidas em cada configuração, a tensão crítica pode ser escrita da seguinte forma:

$$f_t = \frac{K_{IC}}{\chi\sqrt{a}} \tag{4.21}$$

onde K_{IC} é o fator crítico da intensidade de tensões; χ é uma constante geométrica adimensional diferente para cada configuração, e a é o tamanho da fissura.

Empregando-se a Equação (4.21) e a relação que define a energia liberada no processo de propagação, $G_f = K_{IC}{}^2 / E'$, e fazendo-se $f_t = \varepsilon_p E'$ (segundo a hipótese de comportamento linear até a ruptura), chega-se a uma expressão para a deformação crítica, ε_p, no estado plano de deformações, onde $E' = E\left(1-\nu^2\right)$:

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\chi\sqrt{a}}\left[\frac{G_f}{E\left(1-\nu^2\right)}\right]^{1/2} \tag{4.22}$$

onde a primeira fração da Equação (4.22) pode ser definida, segundo Rocha (1989), como um fator de falha, R_f:

$$R_f = \frac{1}{\chi\sqrt{a}} \tag{4.23}$$

O fator de falha é um parâmetro que incorpora todas as características da microfissura que dá origem ao processo de ruptura no elemento.

O modelo constitutivo, adotado no presente trabalho, foi inspirado no modelo coesivo de Hillerborg (1976) e despreza o efeito de dissipação de energia que ocorre devido ao escorregamento entre as faces da fissura, uma vez que o valor deste efeito é desprezível em comparação à contribuição da dissipação de energia necessária para provocar o afastamento entre as faces. Ou seja, todas as análises serão feitas para o modo I de fratura, cujas forças normais às faces da fissura prevalecem e as tangenciais são ignoradas.

Considerando estas definições, as formulações relativas ao modelo de abrandamento do concreto podem ser inseridas. Para o concreto, três modelos de abrandamento, ou *strain-*

softening, podem ser aplicados. Eles podem ser encontrados na forma linear, bi-linear ou exponencial. No capítulo seguinte será detalhado cada um deles.

4.6 - CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ENERGIA

É importante observar que quando uma barra se rompe, nem toda a energia elástica é consumida no processo de ruptura, pois parte dela se preserva sob a forma de energia cinética e energia elástica presentes nas duas porções em que o elemento se divide. Porém, não é possível levar em conta esta subdivisão para um elemento isolado, visto que as massas estão concentradas nos nós e não distribuídas ao longo do comprimento da barra. Como conseqüência disto, deve-se escolher um modelo de representação, no qual a energia elástica seja totalmente consumida no processo de fratura.

Exemplificando com um diagrama *strain-softening* linear, Figura 4.6, a área sob o diagrama deve indicar um consumo de energia proporcional à área de influência da barra, conforme mostra a Equação (4.24).

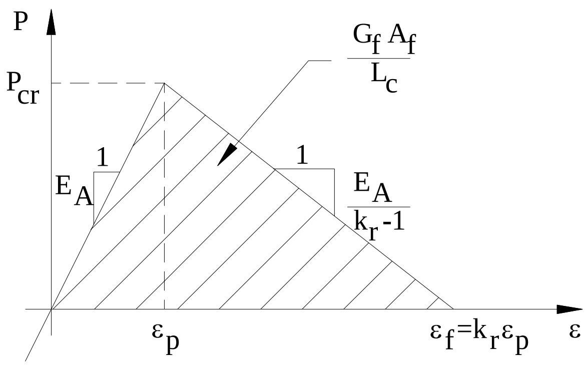


Figura 4.6: Diagrama constitutivo elementar.

$$\int_0^{\varepsilon_f} P(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{G_f A_f}{L_c} = \frac{P_{cr}\varepsilon_f}{2} = \frac{\varepsilon_p{}^2 k_r E_A}{2} \tag{4.24}$$

Tendo em vista que k_r é um valor adimensional, ao isola-lo deduz-se uma expressão em unidade de comprimento, denominada de L_{cr}.

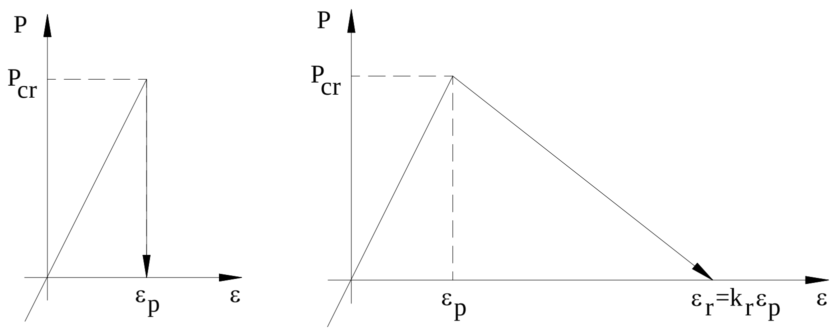
$$k_r = \frac{G_f A_f}{L_c} \frac{2}{\varepsilon_p{}^2 E_A} \qquad \therefore \qquad L_{cr} = \frac{2 G_f A_f}{\varepsilon_p{}^2 E_A} \tag{4.25}$$

Ao substituir os valores de E_A e G_f descritos pelas Equações (4.20) e (4.22), respectivamente na expressão que define L_{cr} , e ainda, o valor da área de influência da barra, ou melhor, a área de fratura formada com sua ruptura, $A_f = c_A L_c{}^2$, tem-se:

$$L_{cr} = \frac{2 c_A (1-\nu^2)}{\alpha R_f{}^2} \tag{4.26}$$

onde, c_A é um coeficiente geométrico próprio do modelo, com valor calculado em 0,1385 para as barras normais.

Para que a energia seja totalmente consumida no processo de fratura, k_r deve ser maior do que a unidade, Figura 4.7.



$k_r = 1$ $\qquad\qquad$ $k_r > 1$

$L_{cr} = L_c$ $\qquad\qquad$ $L_{cr} > L_c$

Figura 4.7: Diagrama constitutivo elementar variando-se o valor de k_r.

Desta forma, k_r é um fator que relaciona o comprimento do elemento, L_c, com o comprimento do elemento crítico, L_{cr}. Este último representa um limite para a malha de discretização a fim de que o modelo computacional funcione corretamente. Para k_r dá-se o nome de fator de ductilidade.

4.7 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A equação de movimento é resolvida para cada nó, a cada passo de integração. Ela é integrada no tempo mediante um esquema explícito em que os deslocamentos e suas derivadas são expressos em termos de valores obtidos em passos anteriores:

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i = f_i \tag{4.27}$$

onde, x_i representa as coordenadas em relação aos três eixos de referência; m a massa nodal; c é o amortecimento, e f_i representa os três componentes da resultante das forças que atuam sobre os nós do modelo.

A determinação do valor de uma constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico, D_f, é um aspecto delicado do modelo, que deve ser mais estudado por diversas razões. Apesar de não existir uma correspondência física clara para o emprego do amortecimento proporcional, o mesmo é bastante conveniente para aliviar o excesso de vibrações que surgem durante as simulações e suavizar uma frente da onda de choque no caso de problemas de impacto, (Rocha, 1989).

O amortecimento é proporcional à massa de tal forma que:

$$c = mD_f \tag{4.28}$$

onde, $\mathrm{D_f}$ é uma constante vinculada ao coeficiente de amortecimento crítico, ξ_n, como segue:

$$D_f = \xi_n 2\pi f_n \tag{4.29}$$

onde, f_n representa a freqüência natural de vibração do modo n expressada em [Hz].

Uma vantagem da metodologia aplicada é que a equação de movimento é desacoplada, o que simplifica a obtenção dos resultados.

4.8 – FUNDAMENTOS TEÓRICOS

4.8.1 - Métodos de integração no tempo

Na análise de problemas lineares, os deslocamentos para cada instante de tempo podem ser obtidos por superposição modal ou por integração direta das equações de movimento. Porém, ao se tratar de problemas não lineares a solução é dada apenas por integração direta.

Destacam-se dois métodos de integração direta no tempo, os implícitos e os explícitos. No primeiro, os deslocamentos e suas derivadas são expressos em função dos valores a serem obtidos no passo seguinte, enquanto que no segundo, são expressos em função dos valores obtidos em passos anteriores.

Em se tratando da análise não linear, os métodos implícitos oferecem a desvantagem de ter que gerar ou atualizar a matriz de rigidez a cada passo. Os métodos explícitos, apesar de serem também condicionalmente estáveis, apresentam a vantagem de ter, em problemas lineares, um intervalo de integração bem menor quando comparado com os dos métodos implícitos. Isto facilita a análise de problemas dinâmicos.

Para a análise do comportamento local de estruturas submetidas a cargas de impacto, devido à natureza da carga atuante, há a necessidade de se trabalhar com intervalos pequenos de integração para que não se percam componentes de alta freqüência presentes na resposta. Portanto, para este tipo de problema o processo de integração explícita torna-se viável, (Hayashi, 1982). Entretanto, deve-se ressaltar que para a obtenção da resposta global das estruturas, onde geralmente o comportamento é linear e há predominância de componentes de baixa freqüência, isto é, dos primeiros modos de vibração, o algoritmo torna-se anti-econômico por exigir um tempo computacional elevado, já que trabalha com pequenos intervalos de tempo. A mesma observação é válida para a análise de problemas com carga estática.

A grande vantagem do método explícito de integração é a facilidade de implementação computacional para a consideração de problemas com não linearidade física e geométrica.

Krieg (1973) analisou vários métodos explícitos com o objetivo de encontrar um que apresentasse um intervalo de integração menor. Em seus estudos, além de comprovar a inexistência de um método explícito incondicionalmente estável, o autor concluiu que não existe nenhum método explícito em que o passo de tempo crítico seja maior do que aquele que governa a equação do Método das Diferenças Finitas. Desta forma, Krieg (1973) sugeriu que o método de integração no tempo das diferenças centrais é o melhor método dentre todos os métodos explícitos.

Com base no que foi dito, a análise dinâmica empregada no presente trabalho é feita pelo emprego de um método explícito, com integração numérica por diferenças finitas centrais. A expressão obtida para o intervalo crítico, a fim de garantir as condições de estabilidade numérica, foi construída com base no trabalho de Flanagan e Belytschko (1984). Ela é expressa em função do comprimento de discretização, L_c, e da velocidade de propagação da onda de compressão C_ρ.

$$\Delta t_{crit} \leq 0{,}6 \frac{L_c}{C_\rho} \quad \therefore \quad C_\rho = \sqrt{E/\rho} \tag{4.30}$$

onde, E é o módulo de elasticidade do material e ρ, a sua massa específica.

4.8.2 - Aspectos da heterogeneidade

O concreto é um material, cujo comportamento micro-estrutural deve ser evidenciado e a natureza de sua heterogeneidade explorada. Dois métodos para a representação desta característica aleatória do material são apresentados e comparados neste trabalho. O primeiro foi utilizado por Rocha em 1989, o método utiliza uma função de probabilidade de Weibull; já o segundo, foi testado por Rios em 2002, e trata-se de um método de representação espectral. Detalhes destas duas metodologias estão expostos a seguir.

4.8.2.1 – Função de distribuição de probabilidade de Weibull

Rocha (1989) introduziu a aleatoriedade através de G_f, parâmetro que define a resistência local à propagação da fratura. A aleatorização deste parâmetro implica em uma resistência variável através do volume. O autor utilizou fundamentos básicos da estatística aplicando uma função de distribuição de probabilidade de Weibull de 2 parâmetros.

A função de probabilidade para G_f é uma propriedade do material vinculada a um comprimento de correlação que, para simplificar a implementação numérica, foi adotado igual ao comprimento crítico do módulo de discretização, L_{cr}. O comprimento de correlação representa uma dimensão dentro da qual as propriedades podem ser consideradas uniformes. No caso do concreto, adotou-se este comprimento como de aproximadamente o dobro do tamanho máximo do agregado.

A função de Weibull de dois parâmetros é escrita conforme a Equação 4.31

$$F(G_f) = 1 - \exp\left[-\left(G_f / \beta\right)^{\gamma}\right] \tag{4.31}$$

onde β e γ são respectivamente os parâmetros de escala e de forma. A média, μ, e o desvio padrão, *s*, são descritos pelas Equações 4.32 e 4.33, respectivamente:

$$\mu = \beta\left[\Gamma\left(1 + 1/\gamma\right)\right] \tag{4.32}$$

$$s = \beta\left[\Gamma\left(1 + 2/\gamma\right) - \Gamma^2\left(1 + 1/\gamma\right)\right]^{1/2} \tag{4.33}$$

onde $\Gamma(x)$ é a função Gama.

Para gerar valores de G_f conforme a função escolhida, faz uso da seguinte expressão:

$$G_f = \beta\left[-\ln(1-u)\right]^{1/\gamma} \tag{4.34}$$

onde u é um número aleatório com densidade de probabilidade uniforme entre 0 e 1.

Por outro lado, é conveniente representar o parâmetro G_f como uma função de sua média $\overline{G}_f$, e um parâmetro de aleatorização φ:

$$G_f = \varphi\overline{G}_f \tag{4.35}$$

$$\varphi = \frac{\left[-\ln(1-u)\right]^{1/\gamma}}{\Gamma\left(1+1/\gamma\right)} \tag{4.36}$$

Nota-se que φ é um número aleatório com uma distribuição Weibull dois parâmetros e média 1. O parâmetro de forma γ define portanto o coeficiente de variação. Assim, a deformação crítica, ε_p, passa a ser dada por :

$$\varepsilon_p = R_f\left[\frac{\varphi\overline{G}_f}{E\left(1-\nu^2\right)}\right]^{1/2} = \varphi^{1/2}\overline{\varepsilon}_p \tag{4.37}$$

Ou seja, a deformação crítica terá uma função de distribuição de probabilidade Weibull-2, porém com um coeficiente de variação diferente, que pode ser determinado como apresentado a seguir.

A partir da Equação 4.22 pode-se escrever G_f como uma função de ε_p:

$$G_f = c\,\varepsilon_p^{\,2} \quad \therefore \quad c = \frac{E\left(1-\nu^2\right)}{R_f^{\,2}} \tag{4.38}$$

A função de densidade de probabilidade de G_f, por sua vez, é dada pela derivada da Equação 4.31 com relação ao próprio G_f, que resulta:

$$f_0(G_f) = \gamma\beta^{-\gamma} G_f^{\,\gamma-1} \exp\left[-\left(G_f \big/ \beta\right)^{\gamma}\right] \tag{4.39}$$

A função de densidade de probabilidade de ε_p é dada então pela seguinte expressão geral:

$$f_\varepsilon(\varepsilon_p) = f_0\left[G_f\left(\varepsilon_p\right)\right]\frac{d}{d\varepsilon_p}\left[G_f\left(\varepsilon_p\right)\right] \tag{4.40}$$

Substituindo a Equação 4.38 em 4.40 chega-se a:

$$f_\varepsilon(\varepsilon_p) = \gamma'\,\beta'^{-\gamma'}\,\varepsilon_p^{\,\gamma'-1} \exp\left[-\left(\varepsilon_p / \beta'\right)^{\gamma'}\right] \tag{4.41}$$

onde:

$$\beta' = \left(\beta \big/ c\right)^{1/2} \tag{4.42}$$

$$\gamma' = 2\gamma \tag{4.43}$$

Conhecida a relação entre os parâmetros de forma das duas funções de densidade, pode-se avaliar a relação entre os respectivos coeficientes de variação implícitos:

$$\frac{CV_\varepsilon}{CV_0} = \frac{\Gamma(1+1/\gamma)}{\Gamma(1+1/\gamma')}\frac{\left[\Gamma(1+2/\gamma') - \Gamma^2(1+1/\gamma')\right]^{1/2}}{\left[\Gamma(1+2/\gamma) - \Gamma^2(1+1/\gamma)\right]^{1/2}} \tag{4.44}$$

Calculando o lado direito para diferentes valores de γ', conclui-se que a relação é aproximadamente uma constante, com valor em torno de 0,53.

Lembra-se, finalmente, que a função Weibull-2 é arbitrária, e o desenvolvimento acima tem apenas a finalidade de mostrar o procedimento a ser seguido caso a função de distribuição correta seja conhecida.

4.8.2.2 – Representação espectral

Rios (2002) propôs tornar independentes o tamanho dos elementos e o comprimento de correlação de G_f, cuja dependência limitava a possibilidade de modelar determinados problemas. Com isso, o autor introduziu a aleatoriedade mediante o método de representação espectral, através da simulação de Monte Carlo para a simulação de um campo aleatório gaussiano. A principal vantagem deste método é que soluções precisas podem ser obtidas para qualquer problema, cujas soluções determinísticas (analítica ou numérica) sejam conhecidas. É importante salientar que embora as soluções encontradas sejam mais precisas, esta metodologia exige um alto custo computacional. A formulação empregada foi apresentada por Shinosuka e Deodatis, (1996), e é descrita a seguir:

Seja $f(x_1, x_2)$ um campo aleatório bidimensional, homogêneo com média igual a zero (sem perda de generalidade), função de autocorrelação $R_{f0f0}(\xi_1, \xi_2)$ e função de densidade espectral de potência $S_{f0f0}(\kappa_1, \kappa_2)$. Assim, as seguintes relações podem ser estabelecidas:

$$E\left[f_0(x_1, x_2)\right] = 0 \tag{4.45}$$

$$E\left[f_0(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2) f_0(x_1, x_2)\right] = R_{f0f0}(\xi_1, \xi_2) \tag{4.46}$$

$$S_{f0f0}(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{f0f0}(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\kappa_1\xi_1 + \kappa_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \tag{4.47}$$

Onde E indica a esperança matemática; ξ_1 e ξ_2 a distância de separação ao longo das direções x_1 e x_2, respectivamente; e κ_1 e k_2, são os respectivos números de onda. A equação anterior corresponde a uma versão do par transformado de Wiener-Khintchine, sendo $S_{f0f0}(\kappa_1, \kappa_2)$ uma função real e positiva além de ser simétrica com respeito à origem. Shinozuka e Deodatis, (1996) chega à seguinte expressão para um campo bidimensional:

$$f_0(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[\begin{array}{l} A_{n_1 n_2} \cos\left(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \Phi^{(1)}_{n_1 n_2}\right) + \\ \qquad + \hat{A}_{n_1 n_2} \cos\left(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \Phi^{(2)}_{n_1 n_2}\right) \end{array} \right] \tag{4.48}$$

A Equação (4.8), $\Phi^{(1)}_{n_1 n_2}$ e $\Phi^{(2)}_{n_1 n_2}$ com $n_1 = 0,1,\ldots,N_1 - 1$ e $n_2 = 0,1,\ldots,N_2 - 1$, são dois ângulos de fase aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo $[0,2\pi]$. $A_{n_1 n_2}$ e $\hat{A}_{n_1 n_2}$ estão definidos pelas seguintes equações:

$$A_{n_1 n_2} = \sqrt{2 S_{f_0 f_0}\left(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2}\right) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \tag{4.49}$$

$$\hat{A}_{n_1 n_2} = \sqrt{2 S_{f_0 f_0}\left(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2}\right) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \tag{4.50}$$

onde:

$$\kappa_{1n_1} = \Delta\kappa_{1n_1} n_1 \quad , \quad \kappa_{2n_2} = \Delta\kappa_{2n_2} n_2 \tag{4.51}$$

$$\Delta\kappa_1 = \frac{\kappa_{1u}}{N_1} \quad , \quad \Delta\kappa_2 = \frac{\kappa_{2u}}{N_2} \tag{4.52}$$

$$A_{0n_2} = A_{n_1 0} = 0 \quad \text{para} \quad n_1 = 0,1,\ldots,N_1 - 1 \ \text{ e } \ n_2 = 0,1,\ldots,N_2 - 1 \tag{4.53}$$

$$\hat{A}_{0n_2} = \hat{A}_{n_1 0} = 0 \quad \text{para} \quad n_1 = 0,1,\ldots,N_1 - 1 \ \text{ e } \ n_2 = 0,1,\ldots,N_2 - 1 \tag{4.54}$$

$$S_{f0f0}(0,\kappa_2) = S_{f0f0}(\kappa_1,0) \ \text{ para } -\infty < \kappa_1 < \infty \ \text{ e } -\infty < \kappa_2 < \infty \tag{4.55}$$

Os valores de κ_{1u} e κ_{2u} são os limites de corte de onda correspondentes aos eixos x_1 e x_2 no domínio do espaço, respectivamente. Isto implica que a função densidade espectral de potência é considerada nula por razões matemáticas ou físicas, fora da região definida por:

$$-\kappa_{1u} \le \kappa_1 \le \kappa_{1u} \quad ; \quad -\kappa_{2u} \le \kappa_2 \le \kappa_{2u} \tag{4.56}$$

Como a função densidade espectral de potência é simétrica, as Equações (4.49) e (4.50) tem o mesmo valor, podendo-se então simplificar a Equação (4.48). As condições indicadas nas Equações (4.53) e (4.54) são necessárias, e devem ser forçadas em caso de não se cumprir, para garantir que a média espacial e a função de correlação da função simulada e a real sejam as mesmas.

Os pontos onde a função pode ser simulada deverão estar separados segundo os eixos x_1 e x_2, respectivamente, pelos incrementos Δx_1 e Δx_2, onde ditos incrementos devem satisfazer o critério indicado na Equação (4.57), com o objetivo de evitar o efeito de dobra de freqüência.

$$\Delta x_1 \leq \frac{2\pi}{2\kappa_{1u}} \quad ; \quad \Delta x_1 \leq \frac{2\pi}{2\kappa_{2u}} \tag{4.57}$$

Já para o caso tridimensional, a expressão anterior assume a forma indicada na Equação (4.58). Nela, assim como na Equação (4.48), os valores $\Phi^{(1)}_{n_1 n_2 n_3}, \ldots, \Phi^{(4)}_{n_1 n_2 n_3}$ são ângulos de fase com valores distribuídos uniformemente no intervalo $[0,2\pi]$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} A_{n_1 n_2 n_3} \begin{bmatrix} \cos\left(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi^{(1)}_{n_1 n_2 n_3}\right) + \\ + \cos\left(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 - \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi^{(2)}_{n_1 n_2 n_3}\right) + \\ + \cos\left(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi^{(3)}_{n_1 n_2 n_3}\right) + \\ + \cos\left(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 - \kappa_{3n_3} x_3 + \Phi^{(2)}_{n_1 n_2 n_3}\right) \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

Pode-se apreciar nas Equações (4.49) e (4.50), que para determinar o valor da função em um ponto dado do campo aleatório é necessário o conhecimento dos valores da função densidade espectral de potência do processo que está sendo modelado. Assim, surge a necessidade de escolher uma expressão para tal distribuição, sendo escolhida no presente trabalho uma função que pode ser expressa em função da Equação (4.59). A mesma foi escolhida baseada na consideração da forma da função densidade de probabilidade de potência para a energia específica de fratura do concreto considerado como processo aleatório.

$$S_{f_0}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{8 a_0^{\,2} \eta}{\pi \eta^2 + \kappa_1^{\,2} + \kappa_2^{\,2} + \kappa_3^{\,2}} \tag{4.59}$$

onde:

$$\eta = \frac{1}{2L_c} \tag{4.60}$$

Sendo L_c a longitude de correlação do campo aleatório a ser simulado.

$$a_0{}^2 = E\left[G_f\right]^2 x\left[1 + CV^2\right] \tag{4.61}$$

A função $f(x_1,x_2,x_3)$ que define o valor do campo aleatório em cada ponto do espaço que está sendo simulado, pode tomar valores que variam entre os limites calculados com a Equação (4.58), tendo um valor médio nulo, mas é necessário fazer uma transformação para que a mesma tenha valor médio unitário para depois multiplicar pelo valor esperado mantendo o correspondente desvio padrão, além de não ser permitido que assuma valores negativos, pois isto implicaria propriedades negativas dos materiais. Assim, foi necessária a abordagem da Teoria de Valores Extremos, (Nanni e Riera, 1986).

Os valores esperados do máximo e mínimo podem ser determinados, respectivamente, pelas expressões (4.62) e (4.63).

$$E\left\lfloor X_{(N)} \right\rfloor = X + \xi_N \sigma_x \tag{4.62}$$

$$E\left\lfloor X_{(1)} \right\rfloor = X - \xi_N \sigma_x \tag{4.63}$$

onde ξ_N é o valor esperado da primeira estatística de ordem, e pode ser calculado pela seguinte expressão, (Nanni e Riera, 1986):

$$\xi_N = \left[\ln\left(N - 0{,}918 \ln N\right)\right]^{0{,}604} \tag{4.64}$$

na qual N é o número de elementos não correlacionados (barras do modelo). A partir das Equações (4.62), (4.63) e (4.64) chega-se a seguinte expressão para o coeficiente de variação de origem:

$$\sigma_x = E\lfloor X_{(N)} \rfloor - E\lfloor X_{(1)} \rfloor / 2\xi_N \tag{4.65}$$

Assim escolhendo para a nova variável a Equação (4.66), seu valor esperado é o indicado na Equação (4.67), a sua variância pela Equação (4.68), o que permite determinar um valor para o coeficiente “a” determinado de acordo à Equação (4.69).

$$\Phi = \left(1 - X(i)/a\right) \tag{4.66}$$

$$E[\Phi] = 1 - 1/a\, E[X] = 1 \tag{4.67}$$

$$\sigma_{\Phi}{}^{2} = 1/a^{2} \sigma_{x}{}^{2} \tag{4.68}$$

$$a = \xi_N \sigma_{\Phi} / E\lfloor X_{(N)} \rfloor - E\lfloor X_{(1)} \rfloor \tag{4.69}$$

Neste trabalho, em todas as análises conduzidas, utilizou-se a representação espectral para simular a heterogeneidade da peça, por ser esta uma metodologia desvinculada de um comprimento de correlação. No entanto, foram testados os dois casos para a representação da heterogeneidade no objetivo de compará-los entre si.

4.8.3 - Importância da consideração dos aspectos dinâmicos na fratura

Os aspectos dinâmicos da propagação das fissuras não devem ser ignorados, visto que eles são de fundamental importância para uma análise mais completa do fenômeno abordado. Sabe-se que a Mecânica da Fratura Dinâmica apresenta alguns fatores que tornam sua análise mais complexa, dentre eles, podem ser citados:

- As forças de inércia que tem sua importância no momento que a carga muda bruscamente ou uma fissura cresce rapidamente;

- O comportamento do material, como por exemplo, um aumento do fluxo de tensão devido ao grande crescimento da deformação;

- Propagação de ondas de tensão, devido a uma mudança brusca do carregamento ou rápida propagação da fissura. Estas ondas influenciam nas tensões da extremidade da fissura e no campo de deformação afetando, desta forma, o comportamento da fissura.

Se todos estes efeitos são ignorados o problema reduz-se a um caso quase-estático.

No geral, quando a força numa estrutura qualquer excede à resistência do material, ocorre uma rápida propagação da fissura, caracterizando uma propagação instável. Observando a Figura 4.8, entende-se que a taxa de energia elástica quase-estática liberada no processo de fratura, *G*, cresce linearmente com o comprimento da fissura, enquanto que a energia absorvida neste processo, R, permanece constante. No entanto, para que a lei da termodinâmica seja obedecida, também para um sistema instável, o excesso de energia representada pela área hachurada da Figura 4.8 terá que ser convertida em energia cinética, (Ewalds e Wanhill, 1986).

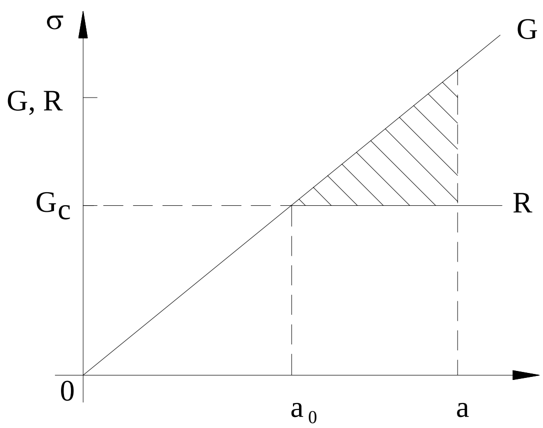


Figura 4.8: Propagação instável da fissura que resulta na geração da energia cinética, (Anderson, 1994).

A necessidade de incorporar o efeito da energia cinética na análise da propagação foi primeiramente defendida por Mott, em 1948, Ewalds e Wanhill (1986). Anos depois sua afirmação foi confirmada experimentalmente por Hahn et al (1973) *aput* Ewalds e Wanhill (1986). Desta forma, Mott foi responsável por incluir a contribuição da energia cinética na teoria de Griffith:

$$G = \frac{d}{da}\left(F - U_a - T\right) \tag{4.70}$$

onde, F é o trabalho realizado pelas forças externas, U_a é a variação da energia de deformação elástica devido à introdução da falha e T é a energia cinética.

Segundo Ewalds e Wanhill (1986), Dulaney e Brace, em 1960, e Berry, neste mesmo ano, seguindo este raciocínio e corrigindo alguns erros cometidos por Mott, estabeleceram que:

$$V = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \tag{4.71}$$

onde V é a velocidade com que a fissura se propaga, k é uma constante, E é o módulo de elasticidade, ρ é a massa específica, $\sqrt{E/\rho}$ é a velocidade de propagação longitudinal da onda no material, a_0 é o comprimento da fissura inicial, e a é o comprimento instantâneo de fissura. Mais detalhes a respeito do desenvolvimento da Equação (4.71) podem ser vistos em Anderson (1994).

Para uma longa propagação de fissura com $a >> a_0$, o quociente entre a velocidade de propagação da fissura e a velocidade de propagação da onda se resume a $\sqrt{2\pi/k}$. Para os materiais frágeis, a velocidade de propagação da fratura tende ao valor da velocidade da onda no material, independente da tensão aplicada, logo o valor de $\sqrt{2\pi/k}$ será igual a 1. No entanto, nos materiais dúcteis, este valor tem que ser menor que a unidade, tendo em vista que a velocidade da propagação da fissura é muito pequena comparada com a velocidade da onda no sólido, (Rocha, 1989).

Vários estudos foram realizados neste campo até que Roberts e Wells, em 1954, obtiveram uma fórmula simplificada para a velocidade de propagação de fissuras que ficou conhecida como fórmula da Mott modificada, (Kanninen e Popelar, 1985).

$$v = 0{,}38\sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \tag{4.72}$$

4.8.4 – Particularidades do programa computacional

O programa “Fractur” foi inicialmente desenvolvido por Rocha (1989) para a análise da propagação da fratura com base no algoritmo utilizado por Hayashi (1982). O programa foi elaborado na linguagem FORTRAN e ao longo do tempo vem sofrendo inúmeras alterações que são feitas no intuito de adequar o programa para as necessidades do momento. Rocha (1989) utilizou apenas o modelo *strain-softening* linear nas suas análises.

Apresentando uma visão geral do programa segue então as etapas principais do algoritmo sob a forma de um diagrama de bloco simplificado:

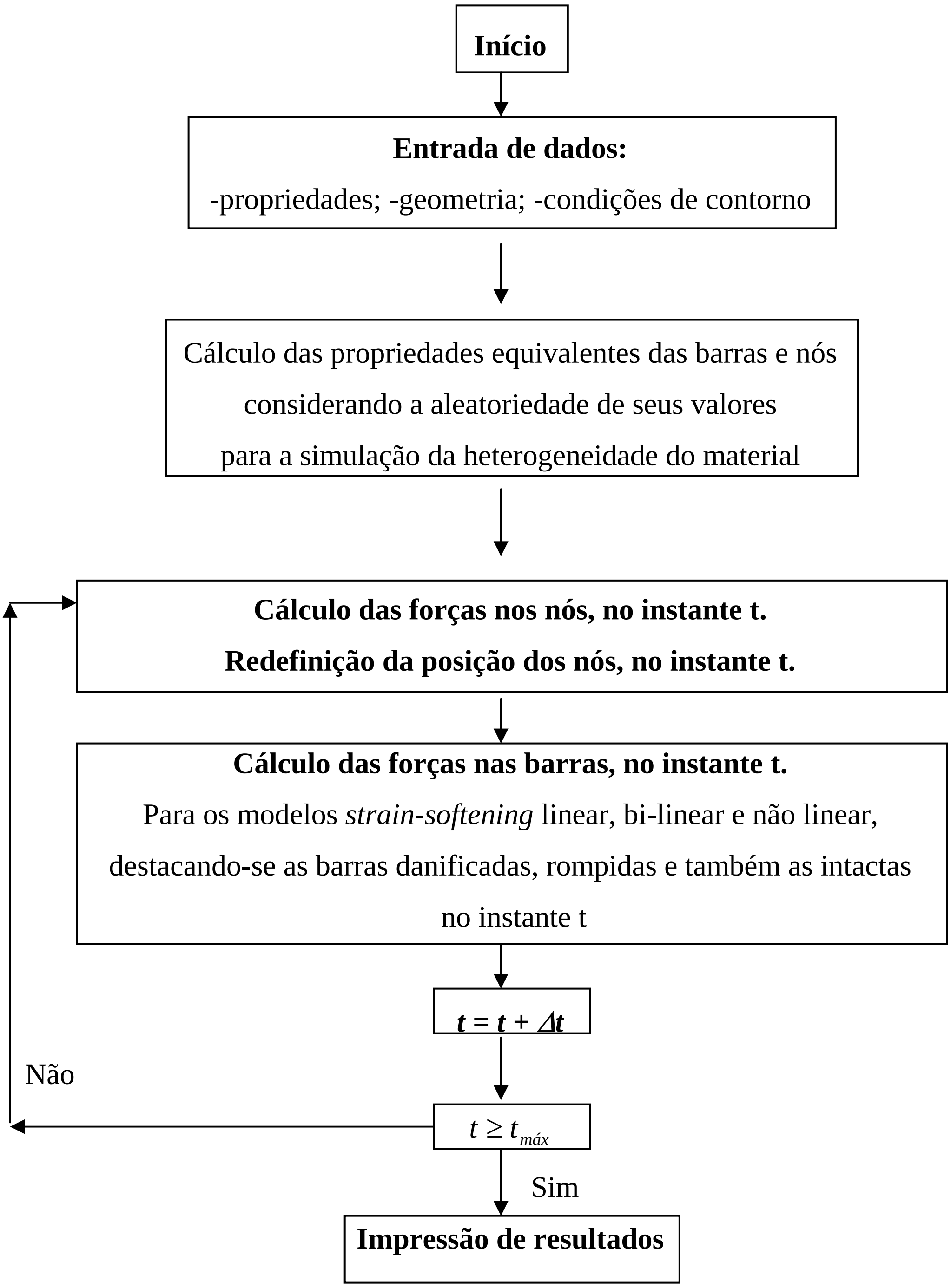


Figura 4.9: Diagrama de blocos simplificado.

5 – MODELOS CONSTITUTIVOS

5.1 – INTRODUÇÃO

No problema da mecânica da fratura, a propagação de fissuras é um fenômeno que está ligado diretamente com a descontinuidade e com um campo de tensões que atua nas proximidades da fissura. A resposta do concreto é controlada pela formação de micro-fissuras que se desenvolvem, a princípio, em algum lugar da amostra. Se numa determinada região a tensão atinge seu valor máximo, f_t, as deformações seguintes estarão dentro desta área, a qual é chamada de *zona de fratura*, caracterizada pelo abrandamento do material.

Dentro desta zona, a tensão decresce gradualmente à medida que a descontinuidade cresce. Este fenômeno é conhecido como *strain-softening*, ou simplesmente abrandamento do material. A representação adequada deste fenômeno garantirá resultados confiáveis na descrição da propagação das fissuras.

Muitos modelos de curvas *strain-softening* foram desenvolvidos para modelar o comportamento da fratura. No caso do concreto, são basicamente três curvas: as curvas lineares, bi-lineares e não lineares (exponenciais e quase-exponenciais). A Figura 5.1 ilustra cada uma delas para um modelo não linear coesivo.

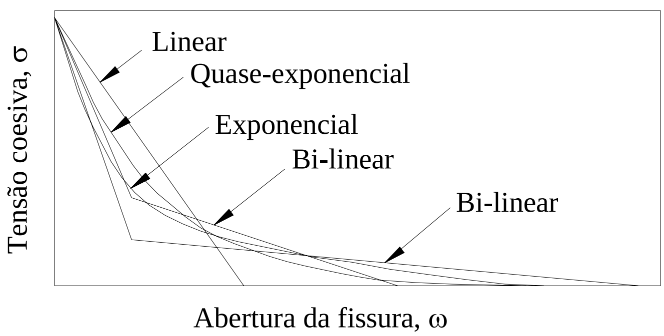


Figura 5.1: Curvas *strain-softening* para o concreto, (Gálvez et al, 2002).

5.2 –MODELOS *STRAIN-SOFTENING* APLICADOS AO CONCRETO

Existem vários formatos de curva *strain-softening* que podem ser utilizados para a análise da propagação da fissura. Como será visto mais adiante, a forma destas curvas afeta consideravelmente os resultados do problema da mecânica da fratura. Isto significa que ela é um importante parâmetro que tem que ser considerado quando se analisa o problema de ruptura do material.

Petersson (1981) apresentou os resultados da análise de uma viga de concreto simples submetida à flexão em três pontos, utilizando, como ferramenta numérica, o método dos elementos finitos. O autor aplicou quatro tipos de curvas *strain-softening*, como ilustradas na Figura 5.2

.

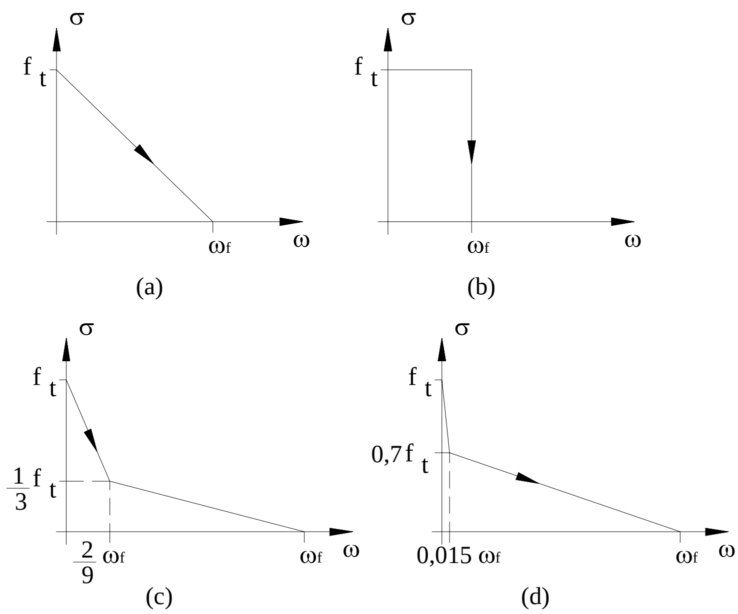


Figura 5.2: Modelos simplificados da curva $\sigma - \omega$. (a) Curva linear; (b) aproximação de Dugdale (1960); (c) curva bi-linear para o concreto e (d) curva bi-linear para um material de fibra armada, (Petersson, 1981).

É importante lembrar que, a curva ascendente que representa o comportamento do material antes de ser iniciada a propagação da fissura, é sempre aproximada por uma curva linear ascendente.

Seguindo a ordem dos modelos traçados na Figura 5.2 e de acordo com as conclusões de Petersson (1981), a primeira aproximação oferece resultados satisfatórios quando se trabalha com o concreto. A segunda, proposta por Dugdale, é mais adequada para materiais plásticos. Em alguns casos especiais a curva pode ser usada como uma aproximação grotesca para materiais de fibra de concreto armado. A terceira trata-se de uma aproximação bi-linear padrão, utilizada para a maioria dos tipos de concreto. E a última, representa, adequadamente, os materiais de fibra armada e é altamente dependente do tipo de fibra do material, (Petersson, 1981).

As curvas "carga versus deslocamento devido à flexão", referentes às quatro aproximações citadas, apresentam a forma que se segue, Figura 5.3. Elas foram obtidas numericamente através de uma análise de elementos finitos em vigas pré-fissuradas submetidas a um ensaio de flexão em três pontos, (Petersson, 1981).

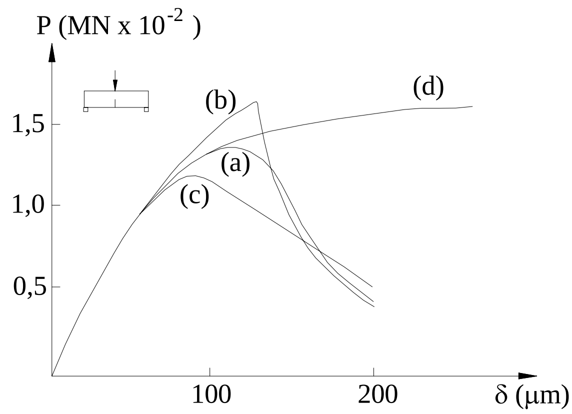


Figura 5.3: Curvas carga-deslocamento para os quatro modelos *strain-softening* apresentados por Petersson (1981). (a) Curva linear; (b) aproximação de Dugdale; (c) curva bi-linear para o concreto; (d) curva bi-linear para um material de fibra armada.

Observando a Figura 5.3, percebe-se que as curvas (a) e (c) são as que mais se aproximam do comportamento real do concreto, pelo que foi exposto no capítulo 3. Diante disto, dentre os quatro modelos apresentados por Petersson (1981), convém destacar as curvas *strain-softening* lineares e bi-lineares, representadas pelas Figuras 5.2a e c, para a análise do concreto normal. Como se sabe, os materiais quase-frágeis ainda dispõem de mais um modelo *strain-softening* simplificado que é o modelo não-linear.

Neste trabalho serão utilizados três modelos *strain-softening*, o linear, o bi-linear e o não linear, nos quais será desprezado o efeito de dissipação de energia que ocorre devido ao escorregamento entre as faces da fissura. Portanto, todas as análises serão feitas para o modo I de fratura, cujas forças normais às faces da fissura prevalecem e as tangenciais são ignoradas.

Uma descrição mais detalhada da estruturação dos modelos *strain-softening* linear, bi-linear e não linear será descrita a seguir. Visto que a representação do comportamento mecânico na zona de abrandamento do concreto, nesta pesquisa, segue uma lei inspirada no modelo coesivo de Hillerborg (1976), os três modelos serão apresentados sob a hipótese do modelo da fissura coesiva.

5.2.1 –Modelo *strain-softening* linear

Este modelo, da forma que se apresenta aqui, foi descrito por Petersson, em 1981. O modelo constitutivo linear, no trecho de pós-pico da curva $\sigma - \omega$, Figura 5.2a, é a forma mais simplificada da representação do abrandamento do material. Sua forma pode ser dada em função da abertura da fissura, conforme a equação a seguir.

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t\left(1 - \omega / \omega_f\right) & se\ 0 \le \omega \le \omega_f \\ 0 & se\ \omega > \omega_f \end{cases} \tag{5.1}$$

onde,

$$\omega_f = \frac{2 \cdot G_f}{f_t} \tag{5.2}$$

Para o concreto ordinário, G_f / f_t é da ordem de 0,005 e 0,01mm. Conseqüentemente, ω_f está na ordem de 0,01 e 0,002mm, (Hillerborg et al, 1976).

Um parâmetro importante do comportamento da estrutura é o comprimento característico:

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{f_t^{\,2}} \tag{5.3}$$

O comprimento característico é uma medida inversa da fragilidade do material. Ele é comumente usado para caracterizar a fragilidade do concreto, ou seja, o material é mais frágil quanto menor for o valor de l_{ch} (Elices et al, 2002).

O modelo *strain-softening* linear embora seja o mais simplificado, oferece resultados satisfatórios, Petersson (1981). Por outro lado, Petersson (1981) defende que a aproximação *strain-softening* bi-linear, dentre as apresentadas pela Figura 5.2, é a que melhor representa o comportamento real da estrutura. Ela descreve de forma mais realística as propriedades da zona de fratura do concreto superando, deste modo, o modelo *strain-softening* linear.

5.2.2 - Modelo *strain-softening* bi-linear

Nesta aproximação, o efeito *strain-softening* é modelado por uma curva bi-linear de declividade negativa, conforme ilustra a Figura 5.4. A mudança de declividade ocorre para um valor de tensão, $f_t^{'}$, variando entre $0{,}15 \cdot f_t$ e $0{,}33 \cdot f_t$, segundo o CEB-FIP, 1990. Petersson (1981) adotou $0{,}33 \cdot f_t$ para o valor desta tensão, conforme mostra a Figura 5.4b.

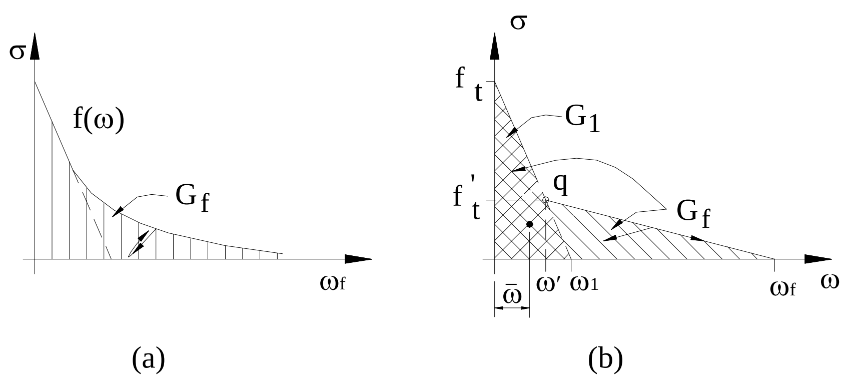


Figura 5.4: Relação tensão-deslocamento para materiais quase-frágeis, modelo de Hillerborg. (a) Modelo real aproximado e, (b) modelo bi-linear, (Petersson, 1981).

Existem várias alterações do modelo *strain-softening* bi-linear, nas quais o valor da tensão no ponto "*q*" e o comprimento crítico da abertura da fissura variam, (Guinea et al, 1994). A forma da curva definida por Petersson (1981) é:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t\left(1 - \omega/\omega_1\right) & se\ 0 \le \omega \le \omega' \\ f_t'\left(1 - \omega/\omega_f\right) & se\ \omega' \le \omega \le \omega_f \\ 0 & se\ \omega > \omega_f \end{cases} \tag{5.4}$$

Petersson (1981) estimou a abertura da fissura no ponto "q" como sendo $\omega' \approx 2/9\,\omega_f$. Também definiu o valor da abertura da fissura no centro de gravidade da geometria formada pela curva *strain-softening* (ver Figura 5.4), em função da energia de fratura, G_f, e da tensão resistente, f_t, (Guinea et al, 1994), como sendo:

$$\omega' = \lambda \frac{G_f}{f_t} \tag{5.5}$$

onde $\lambda = 0{,}987$.

Para o modelo linear o centro de gravidade da figura é obtido rapidamente, sendo, portanto, $\lambda = 2/3$. E para o modelo exponencial, Petersson (1981), define $\lambda = 1$.

Se a tensão no ponto em que há a mudança de declividade é conhecida, Figura 5.4b, o valor de G_f é suficiente para determinar a forma da curva *strain-softening* bi-linear do modelo da fissura fictícia, (Bazant, 2002). Assumindo que a mudança de declividade ocorre a uma tensão ψf_t, tem-se que:

$$\omega_f = \frac{2}{\psi f_t}\left(G_f - (1-\psi)G_1\right) \tag{5.6}$$

Desta forma, a abertura da fissura crítica concebida por Petersson (1981) é:

$$\omega_f = \frac{18}{5}\frac{G_f}{f_t} \tag{5.7}$$

Guinea et al (1994), por sua vez, propuseram uma curva *strain-softening* obtida através de quatro parâmetros, associados com o modelo da fissura fictícia: a tensão resistente, f_t, a energia de fratura, G_f, a abscissa do centróide correspondente à área sob a curva *strain-softening*, $\overline{\omega}$, e a medida onde a primeira declividade intercepta o eixo horizontal do gráfico, ω_1. Estes parâmetros estão esquematizados na Figura 5.4b. Cada um deles foi extraído por meio de diferentes metodologias, fazendo uso de ensaios experimentais. A forma da curva *strain-softening* bi-linear adotada foi descrita como se segue:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t\left(1 - \omega/\omega_1\right) & se\ 0 \le \omega \le \omega' \\ f_t'\left(\dfrac{\omega - \omega_f}{\omega' - \omega_f}\right) & se\ \omega' \le \omega \le \omega_f \\ 0 & se\ \omega > \omega_f \end{cases} \tag{5.8}$$

onde, $\left(f_t', \omega'\right)$ são as coordenadas do ponto onde a declividade da curva *strain-softening* bi-linear muda, Figura 5.4b. Estes parâmetros foram definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega_1\left(\frac{\omega_f - 2G_f/f_t}{\omega_f - \omega_1}\right) \\ f_t' &= f_t\left(\frac{2G_f/f_t - \omega_1}{\omega_f - \omega_1}\right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

O valor da abertura crítica é obtido por uma equação quadrática desenvolvida pelos autores que vincula os quatro parâmetros citados:

$$\omega_f^{\,2} - \omega_f\left(\frac{6\overline{\omega}\left(G_f/f_t\right) - 2\omega_1\left(G_f/f_t\right)}{2\left(G_f/f_t\right) - \omega_1}\right) + \frac{6\overline{\omega}\omega_1\left(G_f/f_t\right) - 4\omega_1\left(G_f/f_t\right)^2}{2\left(G_f/f_t\right) - \omega_1} = 0 \tag{5.10}$$

$$\omega_f^{\ 2} - \omega_f \left(\frac{6\overline{\omega}\left(G_f / f_t\right) - 2\omega_1\left(G_f / f_t\right)}{2\left(G_f / f_t\right) - \omega_1} \right) + \frac{6\overline{\omega}\omega_1\left(G_f / f_t\right) - 4\omega_1\left(G_f / f_t\right)^2}{2\left(G_f / f_t\right) - \omega_1} = 0 \tag{5.11}$$

O modelo *strain-softening* bi-linear é caracterizado por duas energias: G_f, a energia total dissipada pela fratura por unidade de área, que corresponde à área sob a curva inteira, esquematizada na Figura 5.4, e G_1, energia que corresponde a área sob o primeiro segmento até o eixo ω, conforme a Figura 5.4b:

$$G_f = \int_0^\infty f(\omega)d\omega; \qquad G_1 = \frac{f_t \omega_1}{2} \tag{5.12}$$

Devido às pequenas variações da forma da curva $\sigma - \omega$ de diferentes qualidades de concreto, as propriedades da fratura podem ser expressas em função dos comprimentos característicos de fissura:

$$l_1 = \frac{EG_1}{f_t^{\ 2}} \quad e \quad l_{ch} = \frac{EG_f}{f_t^{\ 2}} \tag{5.13}$$

O parâmetro l_1 foi introduzido por Hillerborg et al (1976) quando observaram que a resistência estrutural das amostras, nas quais a zona de fratura tem tamanho significante, foi completamente determinada pela primeira parte linear da curva *strain-softening* da Figura 5.4b, ou seja, pelos valores de f_t e ω_1, (Planas et al, 2003).

A expressão de l_{ch}, no sentido do comprimento da zona de fratura, foi introduzida por Irwin (1958), no entanto, seu uso sistemático em concretos foi iniciado por Hillerborg (1976). Tempos depois, Planas et al (1992) e Guinea et al (1993,1994) encontraram uma relação entre G_f e G_1, onde, $G_f \approx 2{,}5G_1$ e $l_{ch} \approx 2{,}5l_1$, as quais foram confirmadas por Bazant e Becq-Giraudon, (Bazant, 2002).

5.2.3 - Modelo *strain-softening* não linear

No modelo não linear, o efeito *strain-softening* é representado por uma curva exponencial ou quase-exponencial, na qual a resistência decresce gradualmente em relação à abertura da fissura, Figura 5.5.

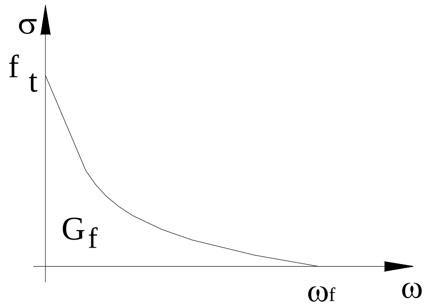


Figura 5.5: Modelo *strain-softening* não linear, (Bueno,1999).

Existem várias propostas encontradas na literatura. A curva apresentada por Bueno (1999) e, posteriormente, por Prasad e Krishnamoorthy (2002), exibe a seguinte forma:

$$\sigma(\omega) = f_t e^{-\theta\omega} \tag{5.14}$$

onde θ é a relação entre a tensão máxima e a energia de fratura, $\theta = f_t / G_f$.

Porém outras formulações podem ser encontradas, tais como:

- A curva exponencial de Gopalaratnam e Shah (1985):

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t e^{-\kappa\omega^{\lambda}} & se\ 0 \leq \omega \leq \omega_f \\ 0 & se\ \omega > \omega_f \end{cases} \tag{5.15}$$

onde, κ e λ são constantes empíricas.

- A curva quase-exponencial de Planas e Elices (1990, 1991):

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t(1+A)e^{-B\theta\omega} - A & se \quad 0 \le \omega \le \dfrac{5G_f}{f_t} \\ 0 & se \quad \dfrac{5G_f}{f_t} \le \omega \end{cases} \tag{5.16}$$

onde, $\theta = \dfrac{f_t}{G_f}$, $A = 0{,}0082896$ e $B = 0{,}9602$.

- A curva quase-exponencial de Reinhardt (1984):

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} f_t\left(1 - \left(\omega / \omega_f\right)^n\right) & se\ 0 \le \omega \le \omega_f \\ 0 & se\ \omega > \omega_f \end{cases} \tag{5.17}$$

onde, $0 < n < 1$.

Nesta última formulação, Reinhardt (1984) sugere para o concreto:

$$0{,}29 < n < 0{,}40 \quad \text{e} \quad 0{,}12 < \omega_f < 0{,}20 \tag{5.18}$$

O comprimento crítico da abertura da fissura, ω_f, pode ser escrito como se segue:

$$\omega_f = \frac{(n+1) \cdot G_f}{n f_t} \tag{5.19}$$

Como pode ser observada, a função exponencial representada pela Equação (5.17) deriva-se da equação da reta *strain-softening* linear. Se for considerado n = 1, o modelo transforma-se no modelo *strain-softening* linear, (Iyengar, 2002).

5.3 - CONTRIBUIÇÕES ACADÊMICAS UTILIZANDO MODELOS *STRAIN-SOFTENING* APLICADOS AO CONCRETO

Embora o modelo *strain-softening* linear seja o mais procurado devido a sua simplicidade, a forma bi-linear e a exponencial são as que melhor representam o abrandamento nos materiais quase-frágeis, como o concreto, Petersson (1981). Tal afirmação foi construída depois de uma série de análises numéricas e experimentais, conduzidas por diversos pesquisadores, visando entender a influência da forma da curva *strain-softening* nos estudos relacionados com a mecânica da fratura. A seguir serão mostradas algumas destas contribuições que ajudarão no desenvolvimento deste trabalho.

Petersson (1981) analisou uma viga de concreto em um teste de flexão em três pontos, sob os aspectos numérico e experimental, utilizando o modelo da fissura fictícia via elementos finitos. O autor verificou as formas lineares e bi-lineares do ramo descendente da curva $\sigma - \omega$, assumindo um valor para a energia de fratura intermediário àqueles definidos para os ensaios experimentais. Sendo assim, nas análises numéricas foi atribuído um valor 124 N/m para a energia de fratura, e as amostras de concreto foram ensaiadas em laboratório para uma energia de fratura de 137 e 115 N/m, conforme especificado no gráfico da Figura 5.6. Os resultados provenientes destas análises foram comparados entre si, obtendo-se uma melhor aproximação do modelo *strain-softening* bi-linear com os valores médios dos resultados experimentais.

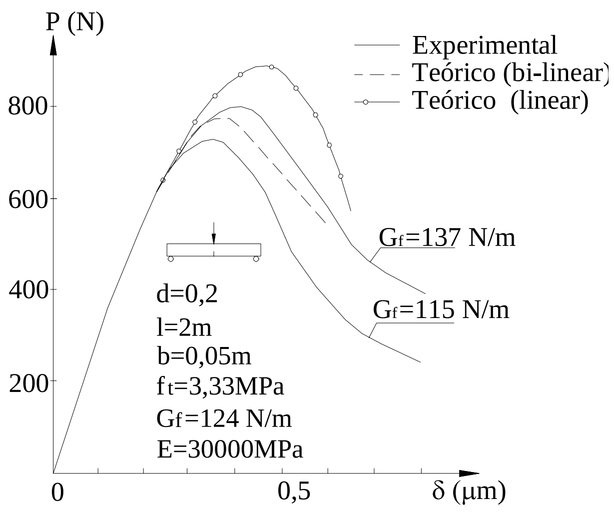


Figura 5.6: Curva carga-deformação (ou deslocamento devido à flexão) experimental e teórica para uma viga à flexão em três pontos, (Petersson, 1981).

Um trabalho semelhante foi conduzido por Rots et al (1985), utilizando o método da banda de fissura para simular a propagação de fissura no concreto simples. A viga de Petersson (1981) foi utilizada e resultados semelhantes foram encontrados. Um mesmo valor da energia de fratura, G_f, foi estimado para as diferentes formas do diagrama *strain-softening*, bem como para o ensaio experimental. Os resultados obtidos estão esquematizados na Figura 5.7, onde se pode ver claramente a diferença entre as duas relações constitutivas empregadas, apontando mais uma vez a eficácia do modelo *strain-softening* bi-linear, cuja resposta pós-pico foi satisfatoriamente simulada.

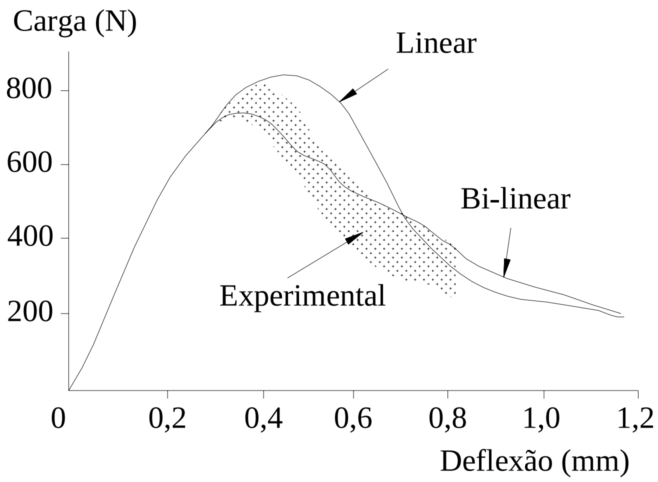


Figura 5.7: Resposta carga-deslocamento à flexão para o modo I de fratura, (Rots et al, 1985).

Um ensaio de viga de duplo console (*Double-cantilever beam*), também foi apresentado por Rots et al (1985). A espessura da amostra foi reduzida no meio da sua seção transversal para forçar um caminho de fissura quase que linear. Os valores da energia de fratura foram obtidos experimentalmente para o modelo *strain-softening* linear e bi-linear. Estes foram comparados com os resultados experimentais obtidos a partir de um diagrama carga-abertura dos lábios da fissura (*CMOD, "Crack Mouth Opening Displacement"*), conforme ilustra a Figura 5.8.

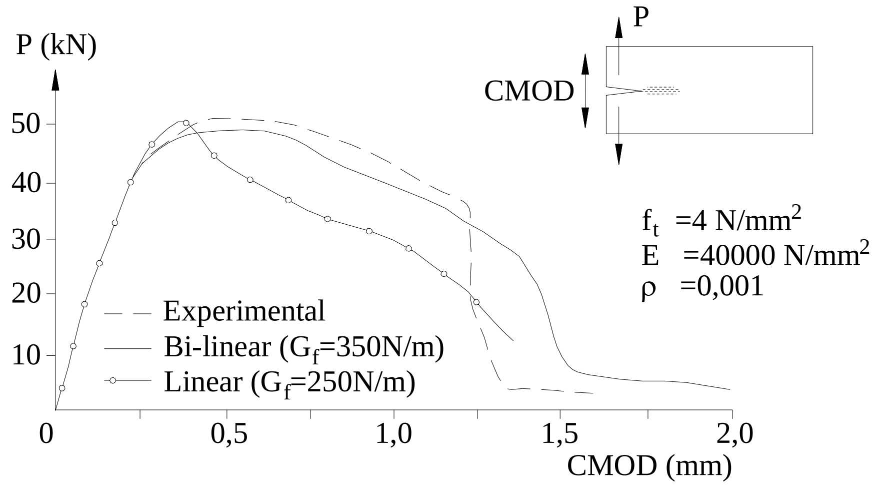


Figura 5.8: Resposta carga-abertura da fissura para uma viga de duplo console, (Rots et al, 1985).

Verifica-se que, para ambos os casos, *strain-softening* linear e bi-linear, o valor de G_f foi muito bem determinado e que seus pontos de carga máxima corresponderam com o obtido experimentalmente. Esta análise foi conduzida para mostrar que o modelo *strain-softening* bi-linear se aproxima do experimental com uma energia de fratura maior que a apresentada pelo modelo linear.

Em 1991, Planas e Elices analisaram a influência da forma da curva *strain-softening* sobre os resultados obtidos no estudo da propagação da fratura de uma viga submetida à flexão em três pontos. A influência da forma da curva é investigada pela consideração dos modelos strain-softening retangular de Dugdale (1960), um modelo de abrandamento linear e quase-exponencial. A estrutura foi discretizada por elementos finitos. Foi observado que as funções de maior abertura crítica da fissura, apresentam rápidas variações nos valores do tamanho da zona de fratura, r_f, e nos da abertura da fissura, ω, medidos quando a carga atinge seu valor máximo. A Figura 5.9 ilustra bem esta observação no formato adimensional, onde l_{ch} é o comprimento característico, ω_f é a abertura crítica da fissura, e D, o tamanho da estrutura.

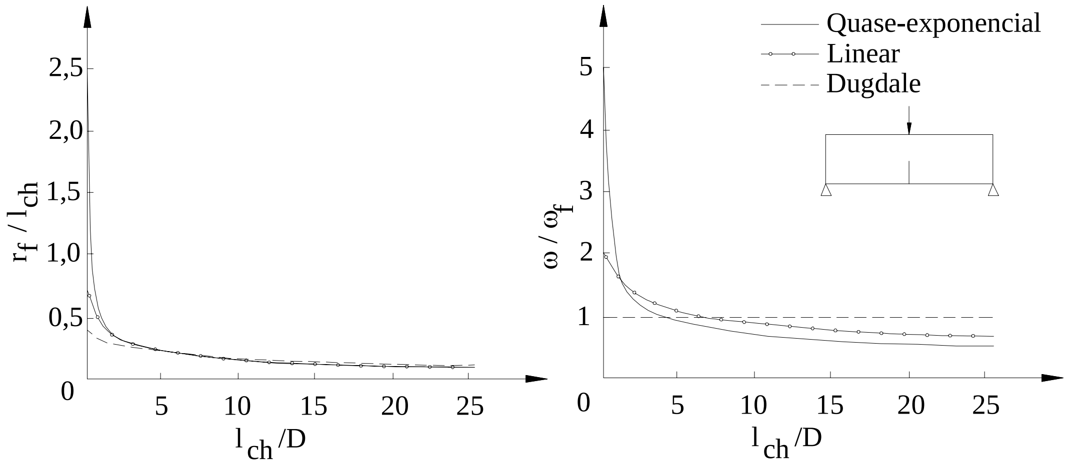


Figura 5.9: Variações do comprimento da zona de fratura e abertura da fissura medidos no momento de carga máxima, respectivamente, em relação ao tamanho da amostra, (Planas e Elices, 1991).

Jefferson e Wright (1991) testaram o desempenho de diferentes funções *strain-softening* de degraus na análise da fratura em peças de concreto simples e armado, Figura 5.10a-c, utilizando o método dos elementos finitos e o modelo da fissura distribuída. Os autores compararam com os resultados do modelo padrão *strain-softening* bi-linear, Figura 5.10d, proposto por Petersson (1981) e também com resultados experimentais.

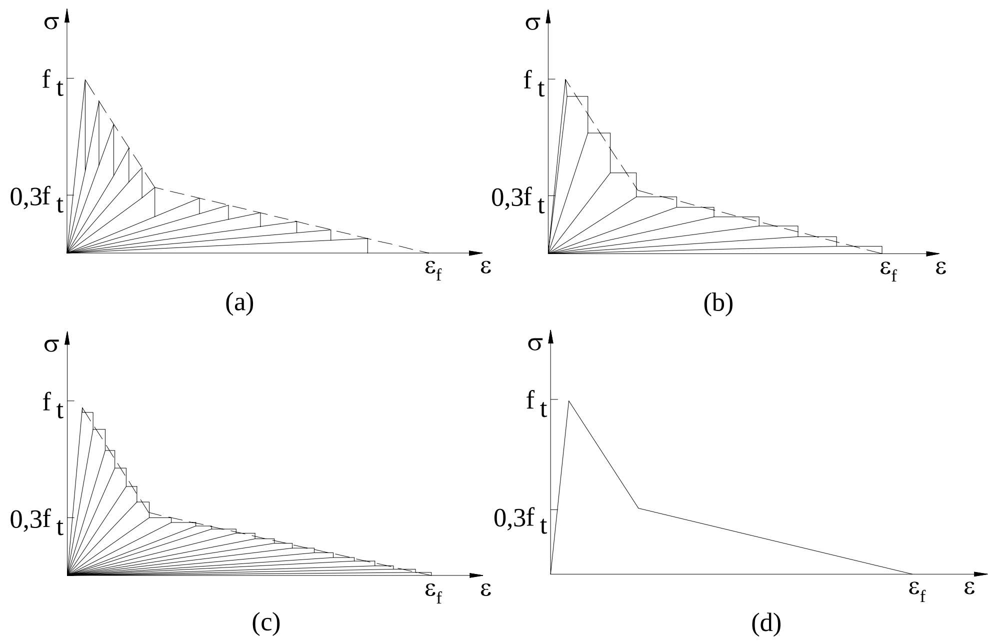


Figura 5.10: Modelos de curvas *strain-sof*tening, (Jefferson e Wright, 1991). (a) Curva degrau secante; (b) curva degrau plano; (c) curva fina degrau plano, e (d) curva bi-linear padrão proposta por Petersson, (1981).

Nas suas análises, o segundo modelo, Figura 5.10b, apresentou melhores resultados quanto à estabilidade numérica e uma boa concordância com os resultados experimentais, no que se refere ao diagrama força-deslocamento, além de apresentar uma boa convergência para diferentes tipos de malha de discretização, superando todos os outros três.

Gopalaratnam e Ye (1991) investigaram a propagação da fissura no concreto utilizando um modelo coesivo e um programa de elementos finitos contendo uma lei *strain-softening* linear e exponencial. Através de um estudo paramétrico, verificaram a influência do tamanho da fissura e geometria da amostra sobre a propagação da fissura. Para o modelo linear foi também analisada a influência da tensão e abertura crítica da fissura no processo da propagação.

Duas curvas exponenciais foram propostas por Gopalaratnam e Ye (1991), uma delas apresentando um grande valor de abertura crítica da fissura, Figura 5.11.

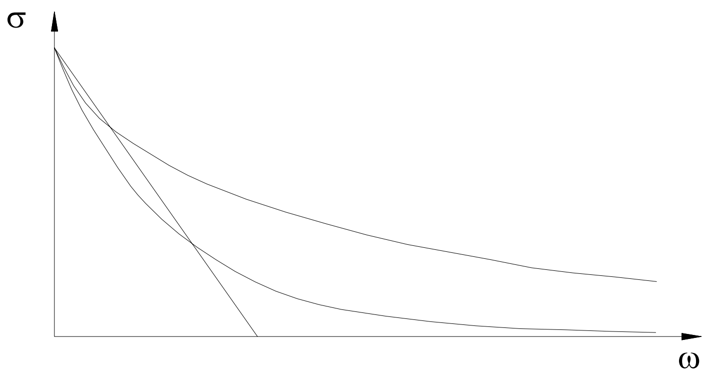


Figura 5.11: Curvas *strain-softening* linear e exponenciais, (Gopalaratnam e Ye, 1991).

Foram simulados numericamente dois tipos de amostras, uma viga de um ensaio de flexão em três pontos (*three point bending test*), e uma amostra de um ensaio de tensão compacta (*compact tension test*), em diversos tamanhos.

Para uma lei *strain-softening* linear, foi observado que grandes amostras apresentam um trecho pós-pico mais inclinado podendo até exibir um comportamento *snap-back*. Observação semelhante foi feita por Carpinteri, em 1989. Foi constatado também que elas apresentam maior carga crítica, o que condiz com a teoria da lei do efeito de escala, (Bazant, 1999). Foi verificado, ainda, que quanto maior for a fissura inicial, a estrutura tem sua carga última reduzida, confirmando a mesma conclusão reportada por Carpinteri, em 1989.

Gopalaratnam e Ye (1991) compararam os resultados obtidos com curva *strain-softening* linear e não linear, no que se refere às curvas carga-deslocamento. Para todas as amostras, foi observado que o modelo linear apresentou uma carga crítica levemente maior. Além disso, o modelo exponencial apresentou uma resposta pós-pico, na curva carga-deflexão mais estável, Figura 5.12.

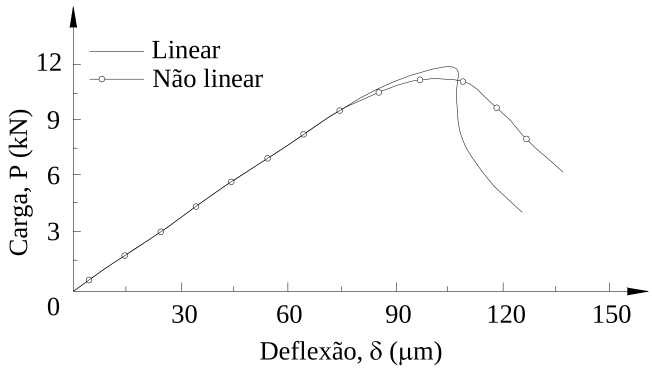


Figura 5.12: Curva carga-deflexão para os modelos *strain-softening* linear e não linear. Viga do ensaio de flexão em três pontos, (Gopalaratnam e Ye, 1991).

Gopalaratnam e Ye (1991) observaram, também, utilizando um modelo *strain-softening* exponencial, que amostras de pequeno porte absorvem mais energia na propagação da fissura. Esta energia cresce quase que linearmente com o crescimento da fissura até se estabilizar. Esta condição estável é atingida mais rapidamente por amostras de pequeno tamanho, Figura 5.13.

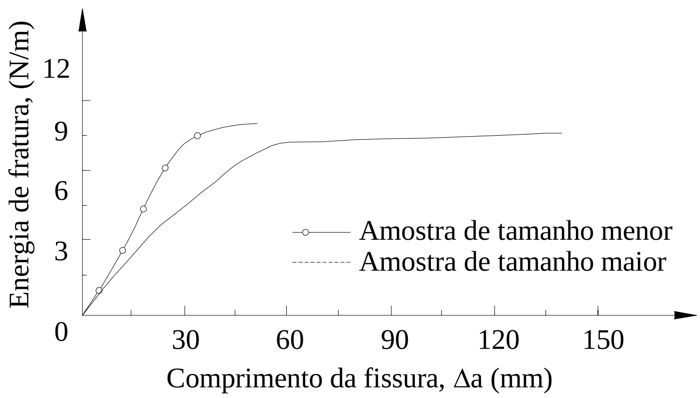


Figura 5.13: Energia de absorção versus comprimento da fissura para diferentes tamanhos de vigas, (Gopalaratnam e Ye, 1991).

A pesquisa de Gopalaratnam e Ye (1991) mais uma vez confirma a influência da lei *strain-softening* na resposta do abrandamento do material.

Guinea et al (1994) formularam seu próprio modelo *strain-softening* bi-linear, descrito na seção anterior. Foram analisadas vigas de diversos tamanhos do ensaio de flexão em três pontos. Os autores compararam o resultado com os conseguidos por Petersson (1981) e Rokugo et al (1988), cujas curvas *strain-softening* bi-lineares dependem apenas da tensão resistente, f_t, e da energia de fratura, G_f, Figura 5.14.

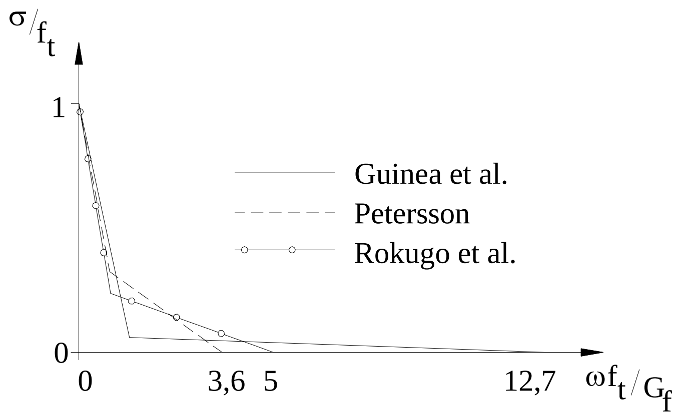


Figura 5.14: Funções *strain-softening* bi-linear, (Guinea et al, 1994).

O valor da abertura crítica adotado é maior do que aquele proposto por Petersson, $\omega_f = 3{,}6\left(\omega f_t / G_f\right)$. Seu alto valor foi defendido anteriormente por outros pesquisadores, tais como, van Mier (1992); Rokugo et al (1988), e Liaw et al (1990) que obtiveram melhores resultados numéricos, no que se refere à região de pós-pico, quando comparados com os modelos que apresentam menores aberturas críticas da fissura.

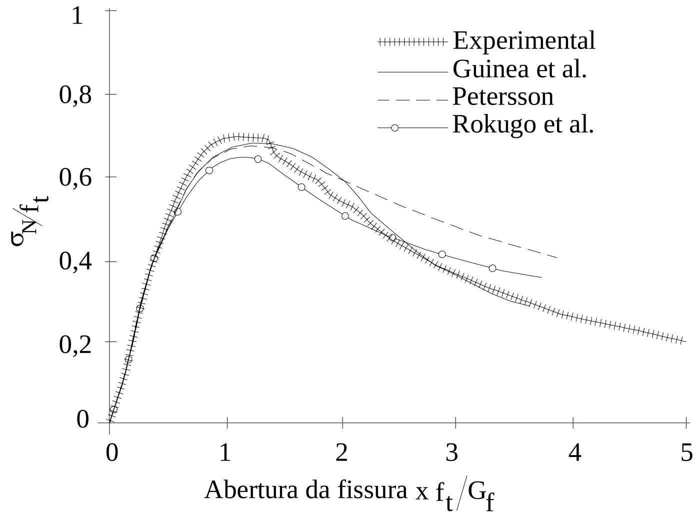


Figura 5.15: Curva carga – abertura da fissura, onde σ_N é a tensão nominal. Vigas do ensaio à flexão em três pontos, (Guinea et al, 1994).

Como pode ser observado na Figura 5.15, a curva proposta por Guinea et al (1994) mostrou-se uma ferramenta adequada para reproduzir não apenas o valor de pico, mas também o pós-pico com admirável concordância com os resultados experimentais.

Li e Bazant (1994) analisaram, dentre outras coisas, a curva do efeito de escala para o modelo *strain-softening* linear e bi-linear de Petersson (1981), fundamentado no modelo da fissura fictícia, e na lei do efeito de escala formulada por Bazant em 1983. Nesta lei as tensões são calculadas também em função do tamanho da estrutura que são escritas da forma que se segue, $\sigma_N = \left[\beta^{-2r} + \left(F^2 D\right)^r\right]^{-1/2r}$. Para o modelo bi-linear admitiu-se *r=0,4383* e para o modelo linear, *r=0,5092*. Nesta formulação β é uma constante relacionada com o tamanho da falha, para a qual foi adotada um valor igual à *1,92*; *F* está relacionada com as forças nodais e *D* é a altura da viga.

O estudo foi realizado em materiais heterogêneos como o concreto, para uma viga de um ensaio de flexão em três pontos, discretizadas em elementos finitos, constatando-se uma diferença insignificante entre eles, Figura 5.16.

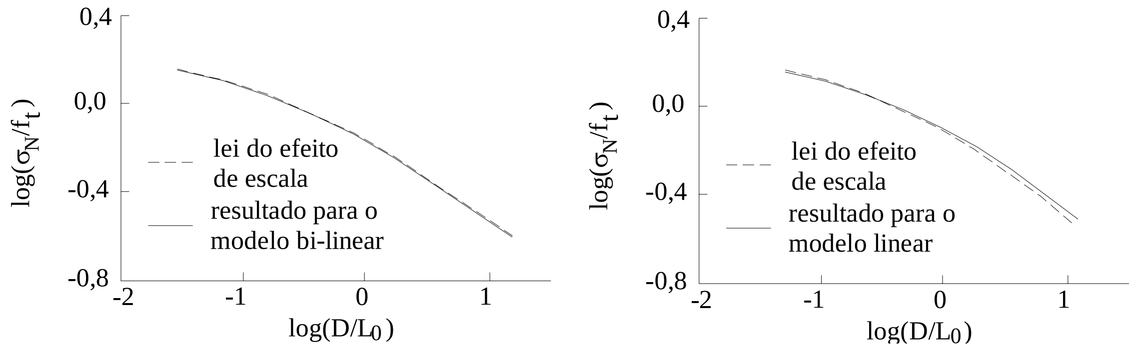


Figura 5.16: Curva do efeito de escala calculada para os modelos *strain-softening* linear, bi-linear, e pela lei do efeito de escala, onde *D* é a altura da viga e L_0 é o comprimento característico, (Li e Bazant, 1994).

Ali (1996) também afirma que o modelo *strain-softening* linear é capaz de fornecer com precisão o pico de carga da relação constitutiva, no entanto, apenas o modelo *strain-softening* bi-linear oferece uma resposta pós-pico mais realista, descrevendo com satisfação o comportamento pré e pós-pico do material. O gráfico da Figura 5.17 foi obtido por Ali (1995), analisando uma viga isenta de falhas em um teste de flexão em três pontos, para o modo I da fratura. O autor fez uso do método da fissura discreta e do método dos elementos finitos. Através da ilustração, Figura 5.17, pode-se verificar que a diferença entre os dois modelos se encontra, justamente, na região pós-pico. Outros autores chegaram a esta mesma conclusão no desenvolvimento de suas pesquisas, além de Petersson(1981) e Rots et al (1985), destacam-se também Horii (1988) e Cornelissen et al (1986). O autor, comparando os dois modelos *strain-softening*, constatou, também, uma pequeníssima diferença no comprimento da fissura. Esta diferença foi atribuída, pelo autor, ao trecho de mudança de declividade do ramo bi-linear. Além disso, observou-se que o modelo bi-linear apresentou uma resposta mais dúctil comparada com a obtida no modelo *strain-softening* linear, Figura 5.17.

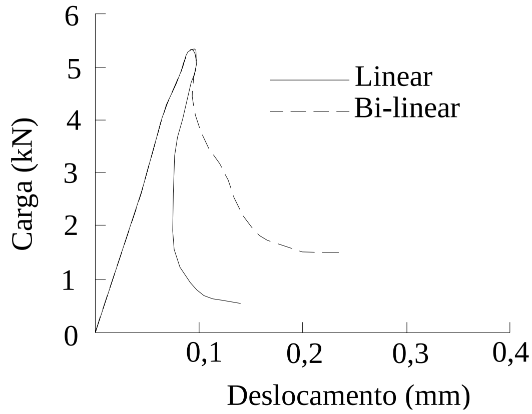


Figura 5.17: Resposta carga-deslocamento, (Ali, 1996).

Alfaiate et al (1997) utilizaram diferentes tipos de malha de elementos finitos para estudar a propagação de fissuras em vigas de concreto, adotando uma relação *strain-softening* bi-linear. Dois tipos de testes foram realizados, um teste de cisalhamento em quatro pontos de uma viga (*four points shear beam*) e um teste de arrancamento de um disco de aço encravado numa amostra de concreto. Os resultados foram comparados com resultados numéricos e experimentais de outros pesquisadores apresentando uma boa concordância entre eles, no que se refere as curvas cargas-deslocamentos. Além disso, foi verificado que a trajetória da fissura se desenvolve suavemente e independe do tipo de malha, assim como a energia de fratura.

Levando em consideração os diferentes enfoques apresentados por vários pesquisadores, no que diz respeito às formas *strain-softening* encontradas na literatura, uma conclusão pode ser tirada em comum: a solução numérica para cada tipo de problema de fratura é extremamente sensível à forma do diagrama *strain-sof*tening e ao valor da energia dissipada no processo da propagação da fissura.

6 – ANÁLISES NUMÉRICAS

6.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são analisados numericamente o fenômeno de propagação de fissuras e a influência da forma da curva *strain-softening* do concreto utilizando o método dos elementos discretos. Os modelos *strain-softening* utilizados aqui se apresentam na forma linear, bi-linear e não linear. São comparados os resultados entre si, bem como com os obtidos em ensaios experimentais e análises numéricas realizadas por outros autores.

É empregado, nas fases pré-processamento e processamento, um programa na linguagem "*FORTRAN*" que utiliza o modelo numérico de discretização de Hayashi (1982). O algoritmo foi desenvolvido inicialmente por Rocha (1989) e aqui foram implementados os modelos *strain-softening* bi-linear e não linear, bem como a formulação para a discretização da peça inteira. Foi inserida também, a subrotina referente à simulação da heterogeneidade do material proposta por Rios (2002).

Apesar das acelerações induzidas no meio durante o processo de ruptura serem parâmetros difíceis de serem medidos experimentalmente, numericamente é possível ao menos ter uma idéia da sua evolução no tempo. Mais adiante, são mostrados gráficos que esclarecem um pouco este processo.

Quanto à representação da heterogeneidade da peça, o trabalho está focado na proposta de Rios (2002) que introduziu a aleatoriedade mediante o método de representação espectral para a simulação de um campo aleatório gaussiano (simulação de Monte Carlo). No entanto, aplicar-se-á, também, a representação da heterogeneidade de Rocha (1989), que utiliza uma função de distribuição de probabilidade de Weibull de 2 parâmetros, numa análise comparativa.

Por último, dois valores de deformações crítica, ε_f, são adotados para os modelos *strain-softening* com o objetivo de avaliar sua influência sobre os resultados obtidos pelo MED.

6.2 – MODELOS CONSTITUTIVOS ADOTADOS

Os modelos constitutivos são descritos por diagramas força–deformação. Os modelos *strain-softening* linear, bi-linear e exponencial estão ilustrados na Figura 6.1.

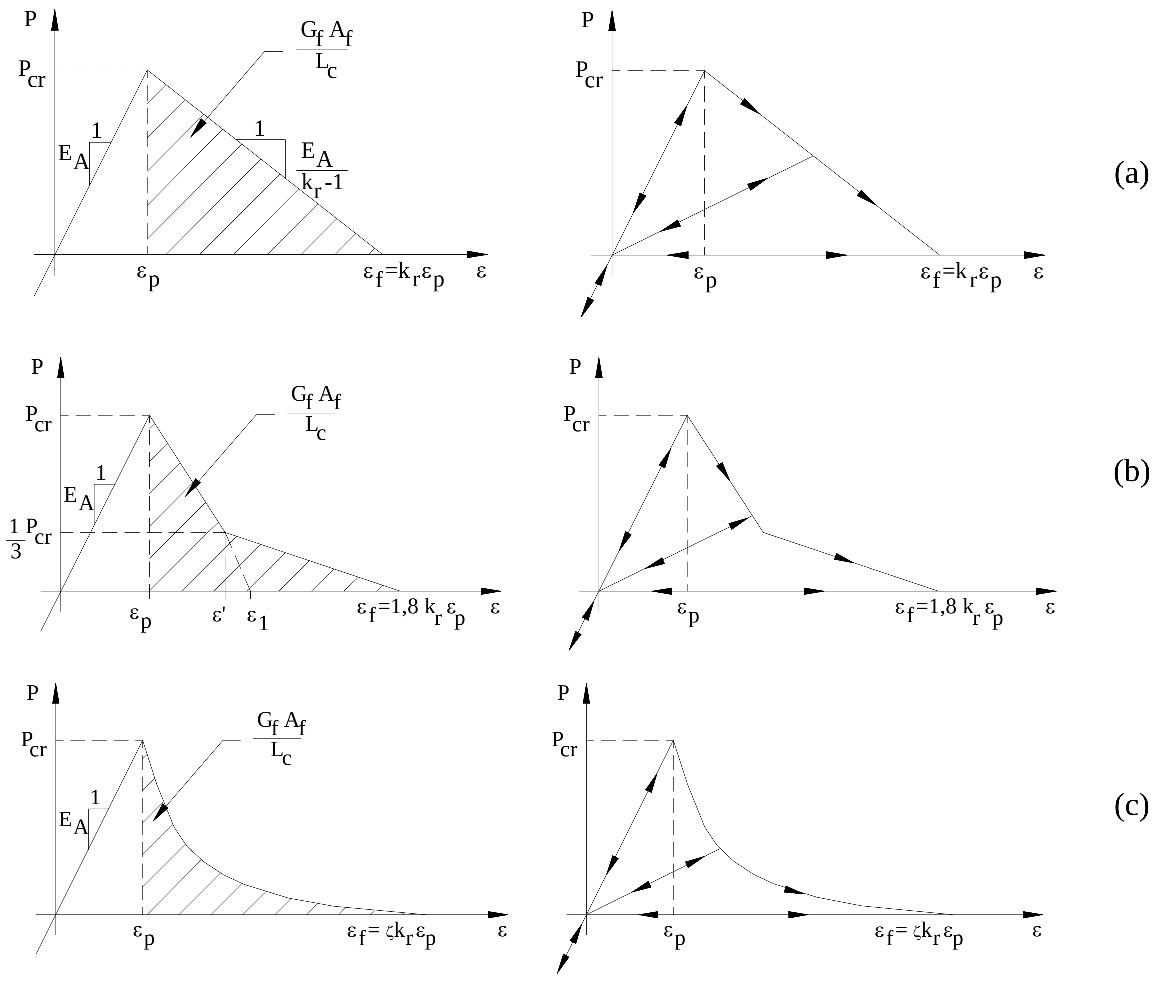


Figura 6.1: Modelos constitutivos. *Strain-softening*: (a) Linear (Petersson, 1981); (b) bi-linear (Petersson, 1981) e (c) não linear (Reinhardt, 1984).

onde, P é a força axial resultante da barra e P_{cr}, seu valor crítico associado a ε_p; E_A é a rigidez axial das barras ($\varphi_{11}{}^{n}$ ou $\varphi_{11}{}^{d}$, a depender da disposição da barra); ε_p, deformação crítica de ruptura, que é a deformação para o qual uma microfissura se instabiliza e se propaga, $\varepsilon_p = f_t / E_A$; ε' é a deformação no ponto de mudança da declividade no diagrama *strain-softening* bi-linear, $\varepsilon' = (2/9)\varepsilon_f$; k_r é a ductilidade (trata-se de um parâmetro que permite calcular a deformação para a qual a barra não transmite mais esforços de tração; ς é a relação $(n+1)/2n$, e n é um valor definido por Reinhardt (1984) para a formulação *strain-softening* não linear, Equação 6.6; L_c é o comprimento da barra do elemento; A_f, a área de influência da barra, ou seja, a área de fratura formada com a sua ruptura (pode ser expressa na forma $A_f = c_A L_c^2$, onde c_A é um coeficiente geométrico próprio do modelo, com valor calculado em 0,1385, para as barras normais); G_f é a energia consumida por área de fratura formada após a instabilização; ε_f é a abertura axial crítica de uma fissura, ω_f, diluída no comprimento da barra, L_c.

São consideradas propriedades exclusivas do material os parâmetros $G_f, \varepsilon_p, E, f_t \; e \; R_f$. As propriedades que se restringem apenas ao modelo são $A_f \; e \; L_c$. As que dependem tanto do modelo como do material são os parâmetros $k_r \; e \; E_A$.

Aqui, são utilizadas as formulações usadas por Petersson (1981) para a descrição das curvas *strain-softening* linear, Equação (6.1), e bi-linear, Equação (6.2), e a formulação usada por Reinhardt (1984) para a representação da não linear, Equação (6.3). As funções abaixo descrevem o trecho descendente da Figura 6.1.

Linear:

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} P_{cr}\left(1 - \varepsilon/\varepsilon_f\right) & se \; \varepsilon_p \le \varepsilon \le \varepsilon_f \\ 0 & se \; \varepsilon > \varepsilon_f \end{cases} \tag{6.1}$$

Bi-linear:

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} P_{cr}\left(1 - \varepsilon/\varepsilon_1\right) & se \; \varepsilon_p \le \varepsilon \le \varepsilon' \\ P_{cr}'\left(1 - \varepsilon/\varepsilon_f\right) & se \; \varepsilon' \le \varepsilon \le \varepsilon_f \\ 0 & se \; \varepsilon > \varepsilon_f \end{cases} \tag{6.2}$$

Não linear:

$$P\varepsilon) = \begin{cases} P_{cr}\left(1-\left(\varepsilon/\varepsilon_f\right)^n\right) & se\ \varepsilon_p \le \varepsilon \le \varepsilon_f \\ 0 & se\ \varepsilon > \varepsilon_f \end{cases} \tag{6.3}$$

onde $0 < n < 1$

No modelo de ruptura empregado por Rocha (1989), para o modelo *strain-softening* linear, a deformação crítica, ε_f, é definida em função da deformação crítica para a qual a força atinge seu valor máximo, ε_p, e do fator de ductilidade, k_r, assim como representa a Equação 6.4. Para o modelo bi-linear, Petersson (1981) adota uma deformação crítica, ε_f, 1,8 vezes maior que a do modelo linear, Equação 6.5, e o coeficiente ς, no modelo não linear, é adotado por Reinhardt (1984) conforme mostra a Equação 6.6. Nota-se que para *n=1* o modelo não linear toma a forma linear.

Linear:

$$\varepsilon_f = k_r \varepsilon_p \tag{6.4}$$

Bi-linear:

$$\varepsilon_f = \varsigma\, k_r \varepsilon_p \quad \therefore \quad \varsigma = 1{,}8 \qquad \varepsilon_f = 1{,}8\, k_r \varepsilon_p \tag{6.5}$$

Não linear:

$$\varepsilon_f = \varsigma\, k_r \varepsilon_p \qquad \varsigma = \frac{(n+1)}{2n} \qquad \varepsilon_f = \frac{(n+1)}{2n} k_r \varepsilon_p$$
$$\text{sendo} \quad n = 0{,}31; \qquad \varepsilon_f = 2{,}113\, k_r \varepsilon_p \tag{6.6}$$

As deformações críticas, ε_f, podem ser obtidas também em função da área abaixo das curvas descendentes de cada modelo *strain-softening*:

Linear:

(6.7)

$$\frac{\varepsilon_f P_{cr}}{2} = \frac{G_f A_f}{L_c} \quad \therefore \quad \varepsilon_f = 2 \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}}$$

Bi-linear:

$$\left(P_{cr} + \frac{1}{3} P_{cr} \right) \cdot \frac{\varepsilon_f}{9} + \left(\varepsilon_f - \frac{2}{9} \varepsilon_f \right) \cdot \frac{P_{cr}}{6} = \frac{G_f A_f}{L_c}$$

$$\varepsilon_f = \frac{18}{5} \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}} = 3{,}6 \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}} \tag{6.8}$$

Não linear:

$$\frac{\varepsilon_f P_{cr}}{2} = \frac{(n+1)}{2n} \cdot \frac{G_f A_f}{L_c}$$

$$\varepsilon_f = \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}} \qquad \text{com} \qquad n = 0{,}31; \qquad \varepsilon_f = 4{,}226 \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}} \tag{6.9}$$

Neste capítulo, alguns exemplos numéricos são reavaliados utilizando as formulações descritas acima, no intuito de se compreender a propagação da fissura sob uma abordagem dinâmica.

6.3 – ANÁLISES NUMÉRICAS

Alguns exemplos numéricos encontrados na literatura, tais como vigas submetidas à flexão em três pontos (three point bending test) e também aquelas submetidas à flexão em quatro pontos (four point bending test), são aqui reavaliadas utilizando o MED. As análises são realizadas com o objetivo de avaliar o desempenho da ferramenta utilizada e das formulações empregadas e entender o processo de propagação da fratura nessas estruturas de concreto.

6.3.1 – Análise comparativa das metodologias de Rios (2002) e de Rocha (1989) para a representação da heterogeneidade do concreto

Inicialmente, é mostrada uma comparação entre os resultados obtidos por duas metodologias empregadas para representar a heterogeneidade da peça. A primeira metodologia utilizando uma representação espectral, (Rios, 2002), e a segunda, fazendo-se uso de uma função de distribuição de probabilidade de Weibull, (Rocha, 1989).

Para isto, foi escolhida uma viga de concreto sem armaduras e com uma fissura pré-estabelecida. Em 1981, Petersson realizou análises experimentais e numéricas nesta peça com a finalidade de investigar a propagação de fissuras no Modo I através de ensaios de flexão em três pontos. Na análise experimental foram ensaiadas seis vigas com as mesmas geometrias e propriedades, a fim de determinar a energia específica de fratura, G_f. As dimensões da peça, extraídas do trabalho de Petersson (1981), são apresentadas na Figura 6.2, onde todas as medidas são dadas em metros.

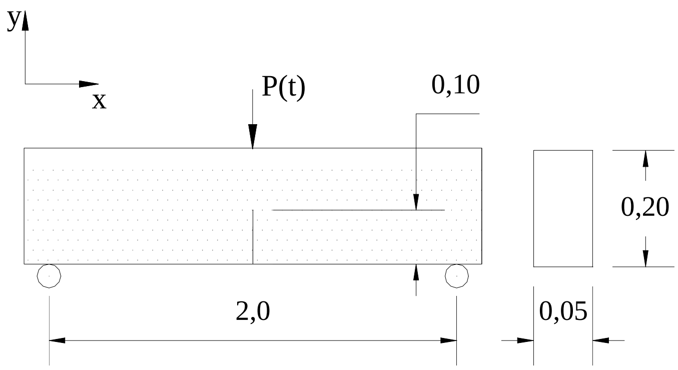


Figura 6.2: Esquema da viga 1 ensaiada por Petersson (1981).

A viga foi submetida a uma carga crescente com o tempo. A velocidade de aplicação da carga foi escolhida por Petersson, (1981) de forma que a carga última fosse alcançada em aproximadamente 30 s após o início do ensaio.

Na Figura 6.3 estão representadas as curvas força–deslocamento obtidas experimentalmente em dois ensaios. Os valores da energia crítica de fratura, G_f, obtidos experimentalmente, encontram-se na faixa de 115 N/m a 137 N/m. São apresentados também, os resultados numéricos obtidos por Petersson (1981), através do método dos elementos finitos, para um modelo *strain-softening* linear e bi-linear.

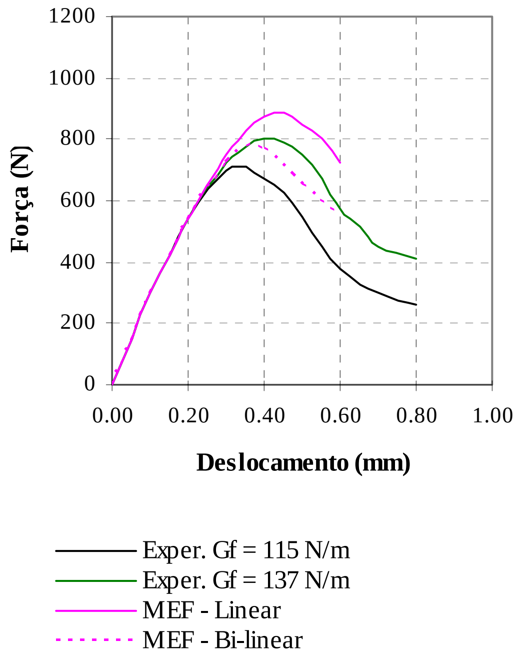


Figura 6.3: Curva força–deslocamento no centro do vão da viga 1, (Petersson, 1981)

Vale ressaltar que Petersson (1981) utilizou o modelo da fissura fictícia para simular numericamente a fratura do material.

6.3.1.1 – Simulação numérica utilizando o MED

A Figura 6.4 ilustra a malha de elementos discretos, com 46 x 10 x 2 módulos de arestas de comprimentos iguais a 0,022 m nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente. Por ser uma peça simétrica apenas metade da viga é discretizada, Figura 6.4. Claro, convém ressaltar que se está forçando um comportamento simétrico da peça, uma vez que as propriedades do material são aleatórias e na prática a simetria não é real.

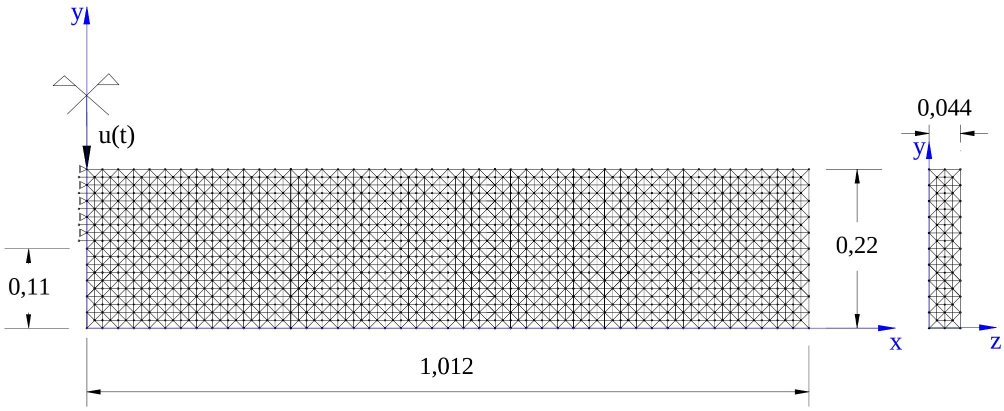


Figura 6.4: Malha de discretização de elementos discretos, viga 1.

São aplicados incrementos de deslocamento na parte superior central da viga segundo a função de velocidade, $\dot{u}(t)$, dada por:

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_f \left(1 - e^{-(t/t_0)^2}\right) \tag{6.10}$$

onde adota-se $\dot{u}_f = 0{,}01 \quad m/s$ como a velocidade final de aplicação do deslocamento. O tempo t_0 indica o instante em que a velocidade atinge aproximadamente 63% do seu valor máximo. A utilização da Equação (6.10) tem por finalidade evitar os efeitos de uma imposição súbita da velocidade final de aplicação do deslocamento.

É considerado um valor médio das energias específicas de fratura obtidas por Petersson (1981), ou seja, 124 N/m. O módulo de elasticidade utilizado por Petersson foi de 3,0 10^{10} N/m^2.

Na Tabela 6.1 são encontrados os valores das propriedades físicas adotadas para simular numericamente o ensaio.

Tabela 6.1: Propriedades físicas do material e parâmetros adotados para gerar o modelo teórico.

Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade, E	3,0 10^{10} N/m^2
Resistência à tração, f_t	3,3 10^6 N/m^2
Energia específica de fratura, G_f	124 N/m
Massa Específica, ρ	2400 kg/m^3
Coeficiente de Poisson, ν	0,2
Razão de Amortecimento, ξ	5% (D_f = 25 s^{-1})
Coeficiente de Variação, *CVA* *	0,10

* Para o caso de se representar a heterogeneidade do material pelo uso de uma função de probabilidade de Weibull, assim como fez Rocha em 1989, o coeficiente de variação, *CVA*, indica a variação imposta no parâmetro da energia de fratura, G_f , que neste caso, está associado a um comprimento de correlação. Quando a heterogeneidade é simulada por uma representação espectral, os parâmetros que variam são a energia de fratura, G_f, o módulo de elasticidade, E, e a massa específica, ρ, Rios (2002).

6.3.1.2 – Resultados e discussões

O gráfico a seguir mostra os resultados referentes às curvas força-deslocamento obtidos com o emprego da representação espectral e da função de probabilidade de Weibull, no que diz respeito à heterogeneidade do material. Foram executadas computacionalmente cinco simulações, mas apenas a primeira está sendo mostrada, "*Sim.1*". Foi utilizada a curva *strain-softening* linear para representar o abrandamento do material.

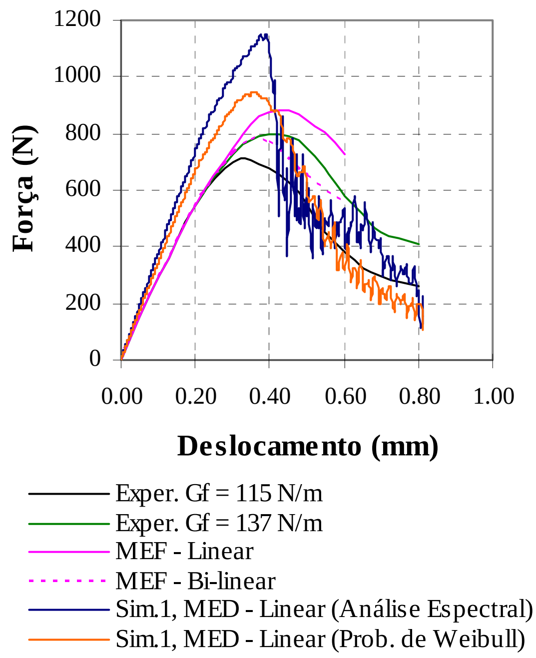


Figura 6.5: Curvas força–deslocamento da viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear considerando para a representação da heterogeneidade os métodos da análise espectral e da probabilidade de Weibull.

Observa-se que os resultados são semelhantes e que os dois métodos utilizados para a representação da heterogeneidade são adequados para o estudo da propagação de fissura.

O resultado obtido usando a probabilidade de Weibull apresentou uma aproximação melhor, no entanto, as análises a seguir foram todas feitas utilizando o método de representação espectral para a simulação da heterogeneidade do material. Ele foi introduzido por Rios (2002) com o intuito de tornar a energia específica de fratura, G_f, independentes do tamanho da malha e do comprimento de correlação (comprimento este que representa alguma medida, a "textura" do material, ou ainda, uma dimensão dentro da qual as propriedades podem ser consideradas uniformes), Rios (2002). Assim, os parâmetros que variam devido à heterogeneidade da peça são apenas propriedades do material, tornando mais real a concepção do problema. Esta é uma das vantagens do MED e da forma de simular a heterogeneidade.

6.4 – ANÁLISE DO PROCESSO DE PROPAGAÇÃO DA FISSURA

As vigas a seguir foram discretizadas ao longo de seu comprimento total. São apresentadas, além da curva força-deformação, resultados referentes à variação da força ao longo do tempo, as energias gastas no processo de fratura, a trajetória da fissura e a velocidade de sua propagação. Não será apresentada uma análise minunciosa referente à aceleração induzida no processo da propagação da fissura, por não se dispor de parâmetros experimentais comparativos. No entanto, o comportamento da variação das acelerações com o tempo pode ser útil, no sentido de ajudar no entendimento de todo o processo de propagação da fissura.

6.4.1 – Viga de Petersson (1981) - Viga 1

O primeiro exemplo apresentado representa a viga estudada por Petersson em 1981, já mostrada no item 6.3.1. Agora, a peça é discretizada ao longo de todo o seu comprimento. A Figura 6.6 ilustra a malha de elementos discretos, com 92 x 10 x 2 módulos de arestas de comprimento 0,022 m nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente. As propriedades do material se encontram na Tabela 6.1.

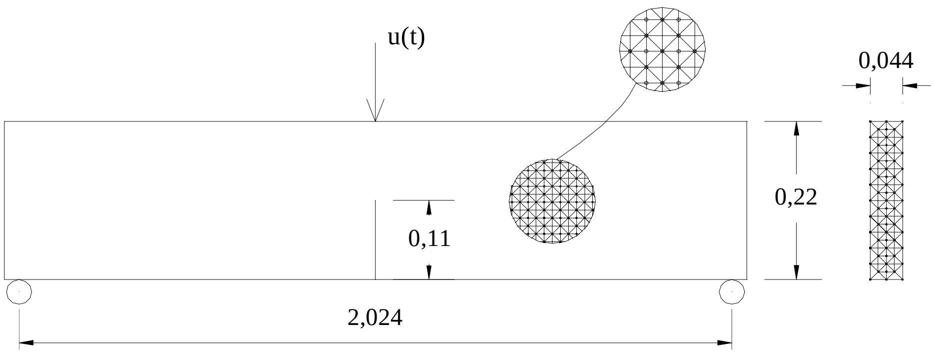


Figura 6.6: Malha de discretização de elementos discretos ao longo de todo o comprimento da viga. Viga 1.

Deve-se lembrar que daqui para frente todos os exemplos utilizam a representação espectral para simular a heterogeneidade do material.

6.4.1.1 – Influência da variação da malha de discretização sobre os resultados obtidos com a simulação espectral.

Como já foi dito, a principal vantagem da representação espectral é desvincular a energia específica de fratura, G_f, do tamanho da malha e do comprimento de correlação, como já defendia Rios (2002). Considerando um mesmo comprimento de correlação, as Figuras 6.7(a) e (b) apresentam os resultados da viga, ilustrada na Figura 6.6, para dois tamanhos distintos de malha.

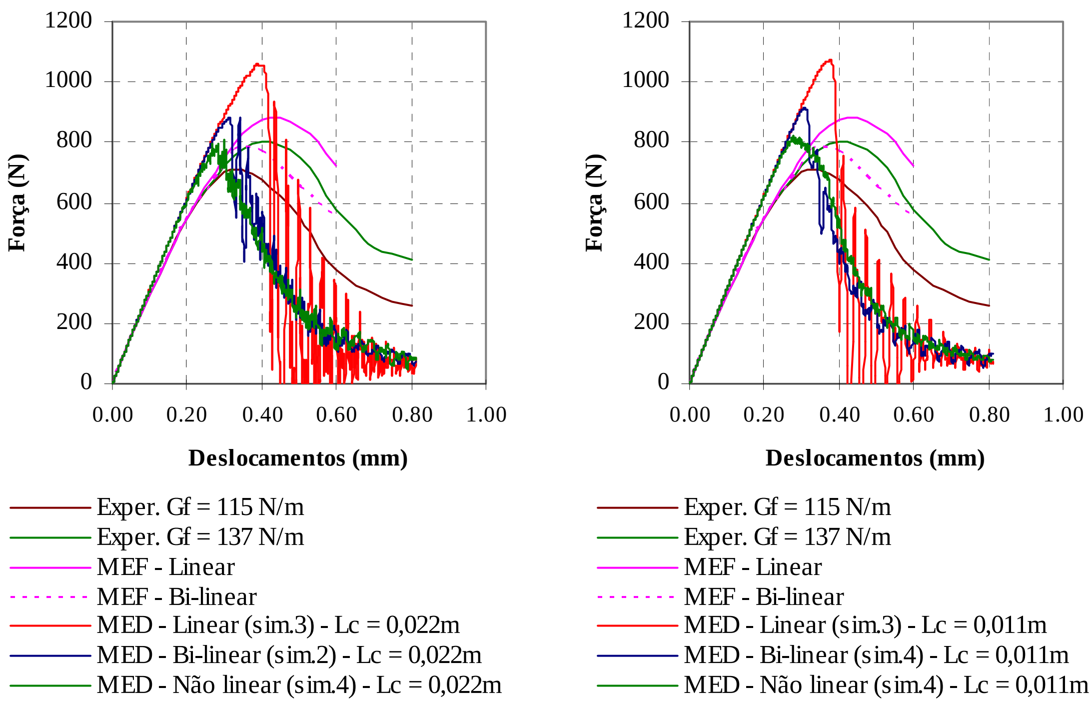


Figura 6.7: Curvas força–deslocamento, Petersson (1981) *versus* MED. (a) Resultados do MED para uma malha de 0,022m, e (b) Resultados do MED para uma malha de 0,011m.

Considerando que os resultados são obtidos por métodos estatísticos, foram realizadas cinco simulações de cada modelo. Percebe-se, desta forma, que, de fato, pode-se dizer que as curvas não apresentam mudanças significativas para os dois tipos de discretização.

6.4.1.2 – Curvas força-deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga e curvas da variação da força ao longo do tempo.

As Figuras 6.8, 6.9 e 6.10 mostram os resultados das curvas força–deslocamento no centro do vão, obtidos pelo método dos elementos discretos, MED, para os três modelos *strain-*

softening proposto. Estes resultados são comparados com os de Petersson (1981). Foram realizadas cinco simulações com o MED. O primeiro gráfico de cada figura reúne todas as simulações reproduzidas numericamente, e o segundo, apresenta apenas uma delas.

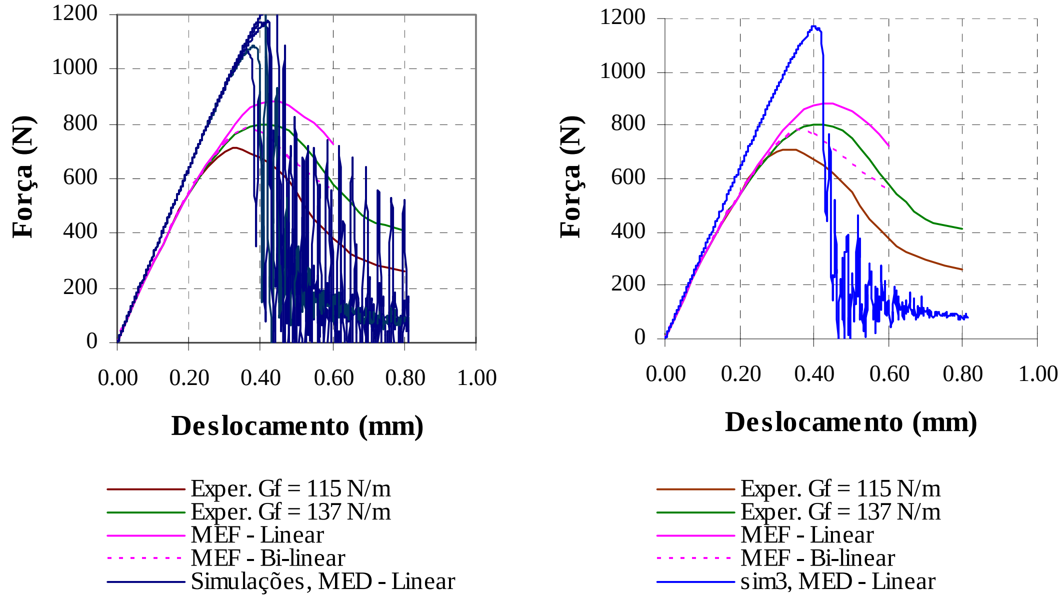


Figura 6.8: Curvas força–deslocamento da viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear.

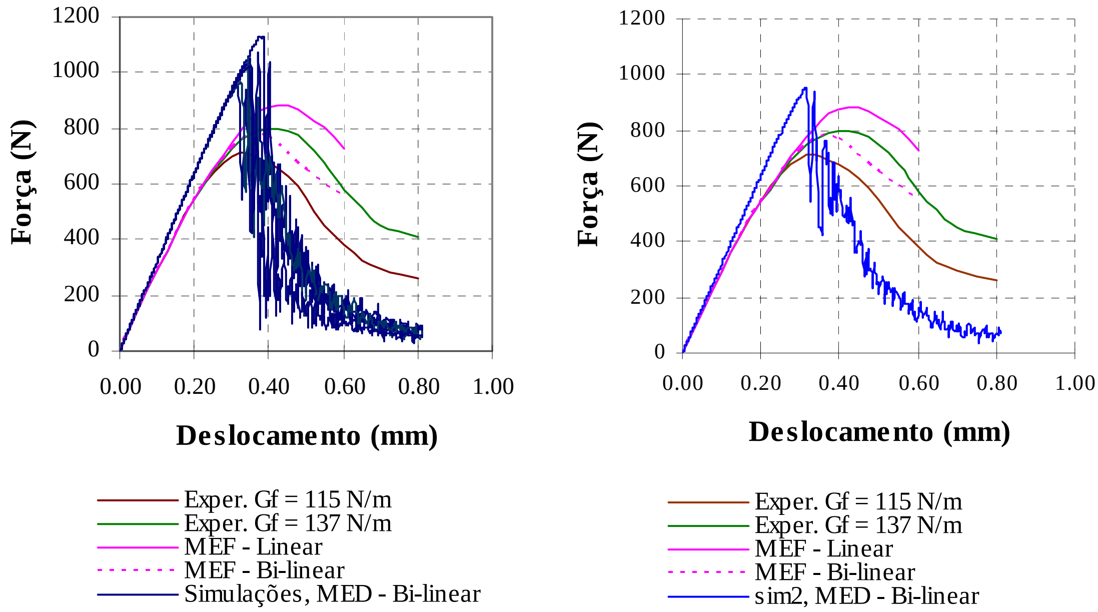


Figura 6.9: Curvas força–deslocamento da viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* bi-linear.

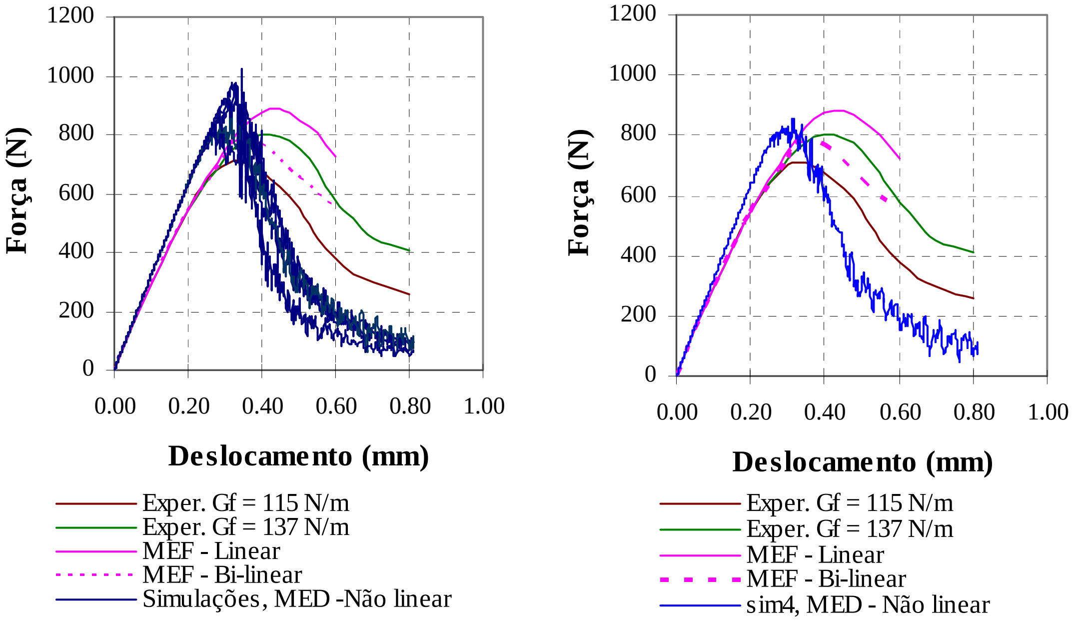


Figura 6.10: Curvas força–deslocamento da viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* não linear.

Observa-se que o modelo caracterizado pela maior deformação crítica, ε_f, o modelo *strain-softening* não linear, apresenta um trecho pós-pico mais suave e, portanto, mais condizente com os resultados experimentais.

A Figura 6.11 apresenta o diagrama força-tempo, permitindo visualizar o aspecto dinâmico do problema. É apresentada apenas uma simulação para cada modelo *strain-softening* empregado, são elas, a terceira "*sim.3*", a segunda "*sim.2*" e a quarta "*sim.4*", para os modelos linear, bi-linear e não linear, respectivamente, como mostra a figura.

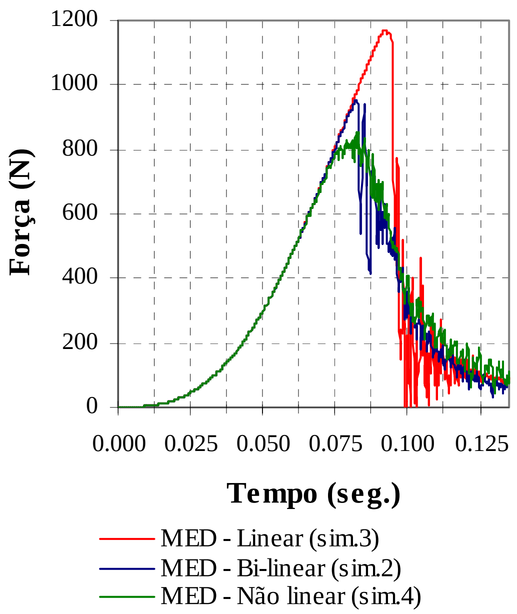


Figura 6.11: Curva força–tempo da viga 1. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening*.

Verifica-se, na Figura 6.11, que os três modelos apresentam instantes de propagação instável da fissura bastante próximos entre si. No modelo strain-softening linear a fissura começa a se propagar num instante de aproximadamente 0,09 segundos e para os demais modelos, no instante próximo à 0,08 segundos.

Um pequeno desajuste é notado no trecho quase linear dos gráficos força-deslocamento. Desta forma, com o intuito de encontrar um melhor ajuste dos resultados, antes e após o início da propagação, duas situações são experimentadas:

- Situação 1: diminuição do módulo de elasticidade, E, para 2,5 . 10^{10} N/m^2. Esta alteração reflete diretamente na mudança de inclinação do trecho pré-pico dos gráficos força-deslocamento.

- Situação 2: aumento da deformação crítica, ε_f, das curvas *strain-softening* em aproximadamente três vezes, visto que anteriormente alguns pesquisadores obtiveram resultados mais satisfatórios seguindo este caminho, principalmente no que diz respeito a região pós-pico, em materiais como o concreto, Guinea et al (1994). A Figura 6.12 ilustra as curvas *strain-softening* com as deformações críticas, ε_f, concebidas por Petersson (1981) e Reinhardt (1984), conforme apresenta o item 6.2, e com as deformações críticas, ε_f, alteradas.

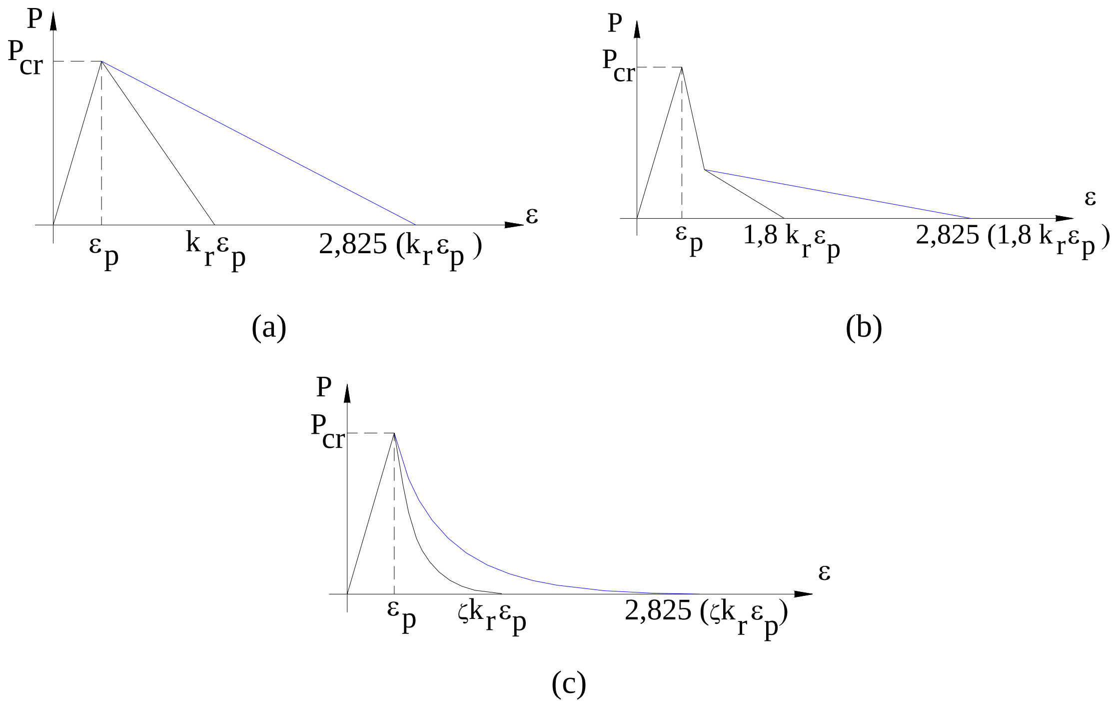


Figura 6.12: Curvas *strain-softening* com diferentes valores de deformação crítica, ε_f. (a) curva *strain-softening* linear; (b) curva *strain-softening* bi-linear e (c) curva *strain-softening* não linear

As Figuras 6.13, 6.14 e 6.15 ilustram os resultados da primeira situação testada, no que se refere às curvas força-deslocamento. O primeiro gráfico de cada figura apresenta as cinco simulações feitas pelo MED e o segundo, mostra apenas uma delas.

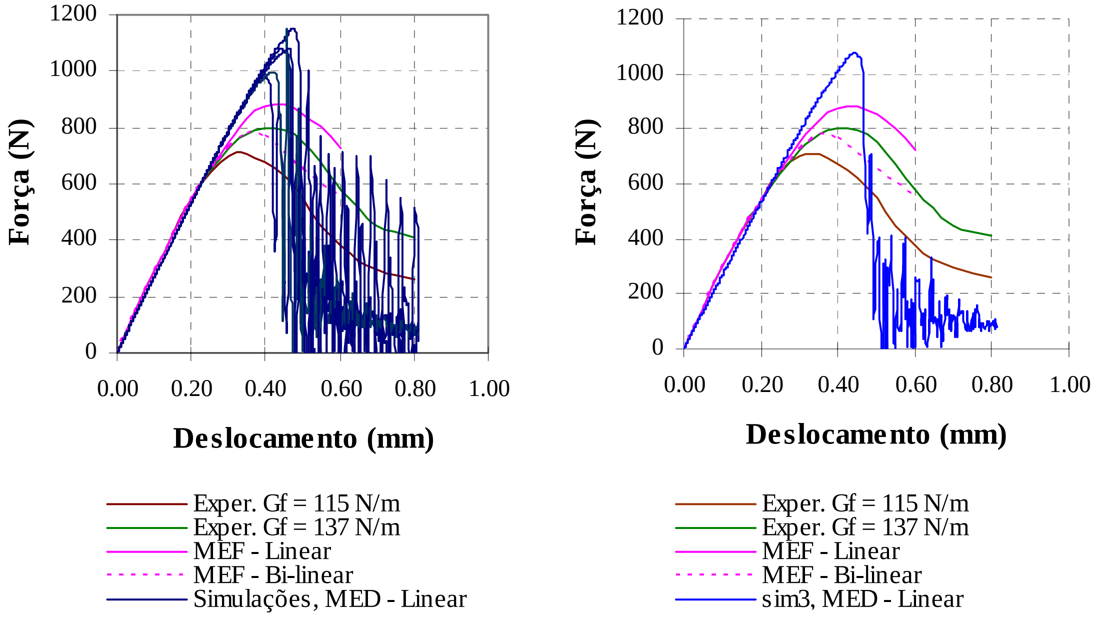


Figura 6.13: Curvas força–deslocamento - viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para o modelo *strain-softening* linear – Situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2).

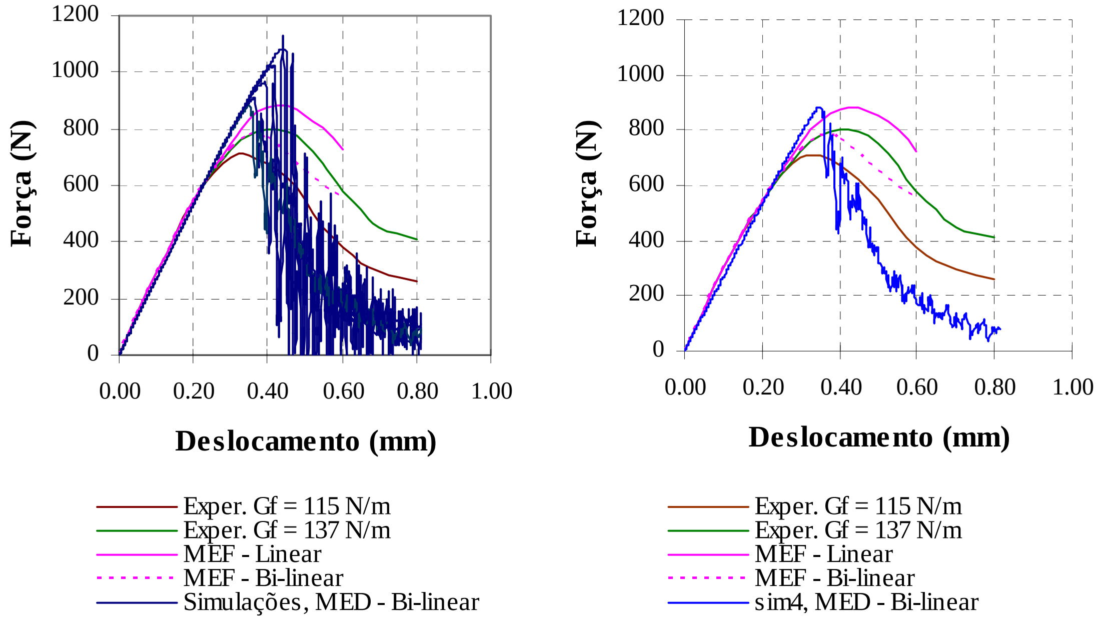


Figura 6.14: Curvas força–deslocamento - viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para o modelo *strain-softening* bi-linear – Situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2).

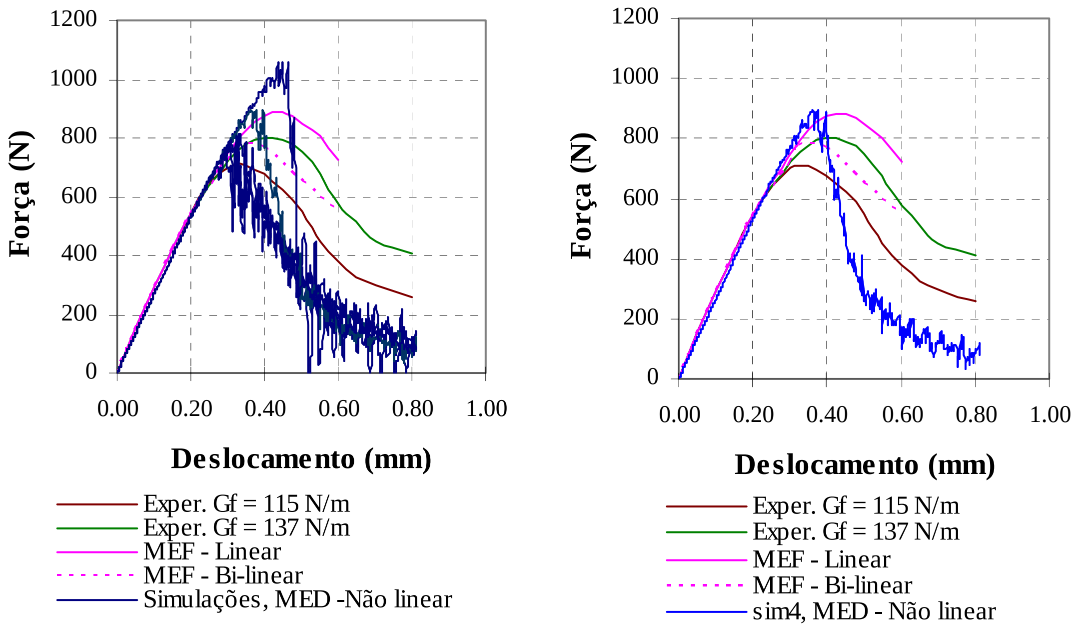


Figura 6.15: Curvas força–deslocamento - viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para o modelo *strain-softening* não linear – Situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2).

Como se percebe, o trecho quase-linear das curvas coincide com os resultados apresentados por Petersson, embora poucas mudanças tenham acontecidos no trecho pós-pico.

Da mesma forma como observado anteriormente, os três modelos apresentam instantes de propagação instável da fissura bastante próximos um do outro, como mostra a Figura 6.16. Sendo que o modelo strain-softening linear a propagação é iniciada no instante próximo de 0,1 segundos, enquanto os demais, no instante de 0,087 segundos.

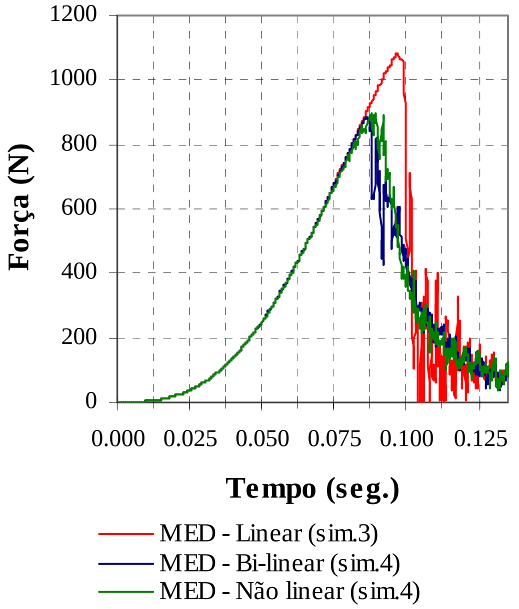


Figura 6.16: Curvas força–tempo - viga 1. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening* – situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2).

O tempo em que se inicia o processo de ruptura ocorre ligeiramente depois, quando se compara com a situação na qual são preservadas as propriedades físicas concebidas por Petersson (1981), (comparar Figura 6.16 com 6.11). Este fato é de se esperar, visto que o valor do módulo de elasticidade, *E*, é inversamente proporcional à deformação crítica para a qual a força atinge seu valor máximo, ε_p.

Apresentam-se, agora, os resultados obtidos pela segunda situação, na qual se mantém o módulo de elasticidade, *E*, sugerido por Petersson (1981), aumentando apenas o comprimento crítico das curvas *strain-softening*, ε_f, de aproximadamente três vezes o considerado nas análises anteriores.

As Figuras 6.17, 6.18 e 6.19 ilustram as curvas força-deslocamento obtidos pelo MED, para a situação 2 descrita, numa análise comparativa com os resultados de Petersson (1981). Novamente o primeiro gráfico de cada figura apresenta as cinco simulações realizadas pelo MED, enquanto o segundo, apenas uma das simulações.

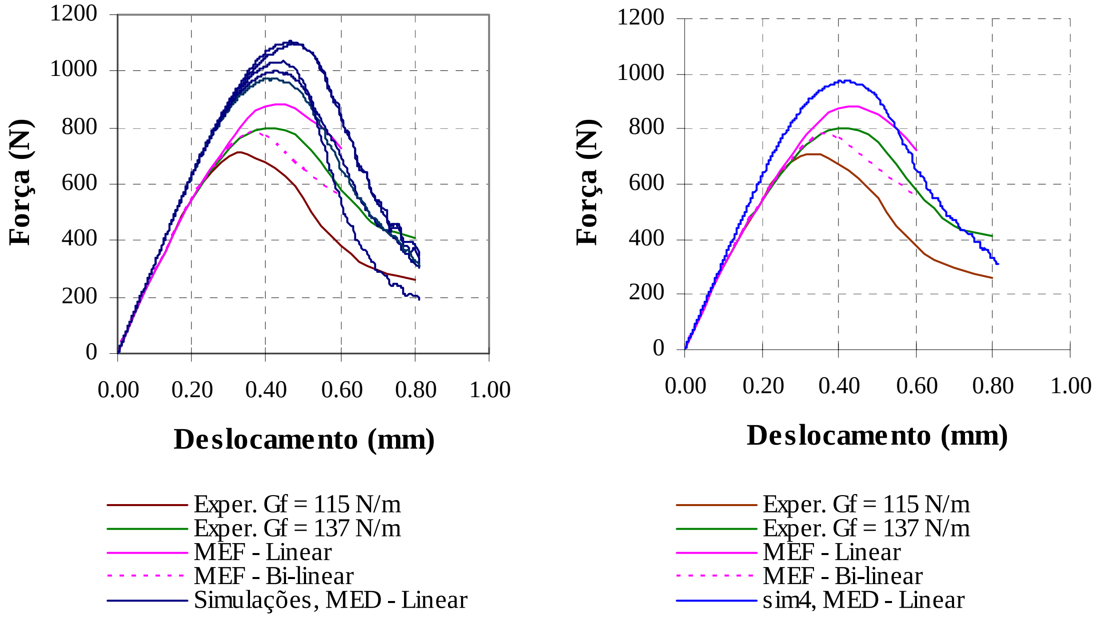


Figura 6.17: Curvas força–deslocamento - viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear - situação 2 (ε_f três vezes maior).

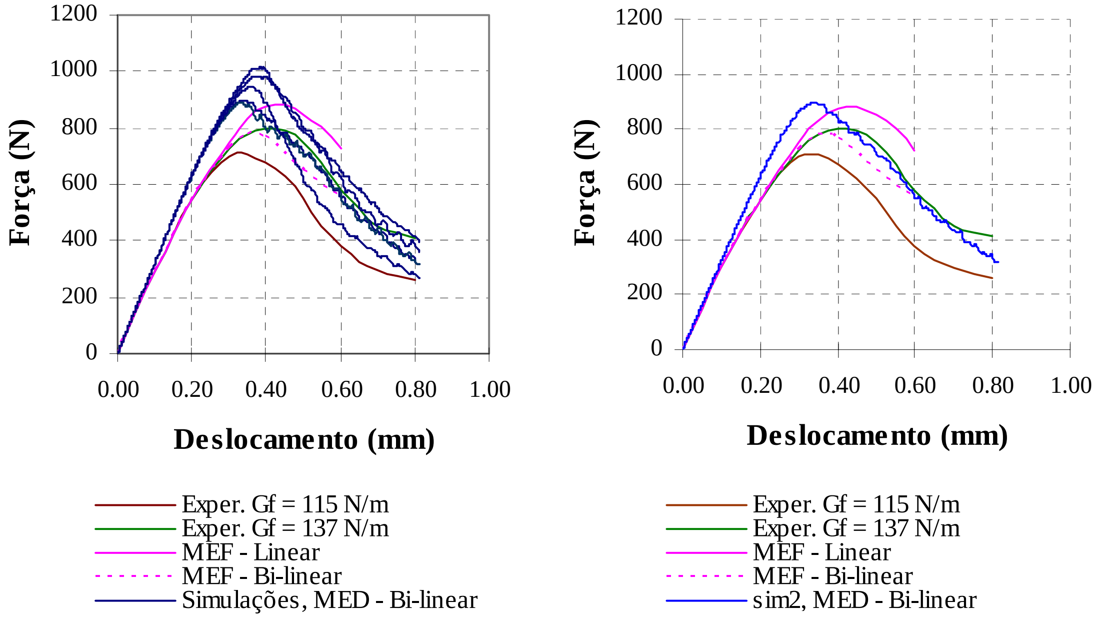


Figura 6.18: Curvas força–deslocamento - viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* bi-linear - situação 2 (ε_f três vezes maior).

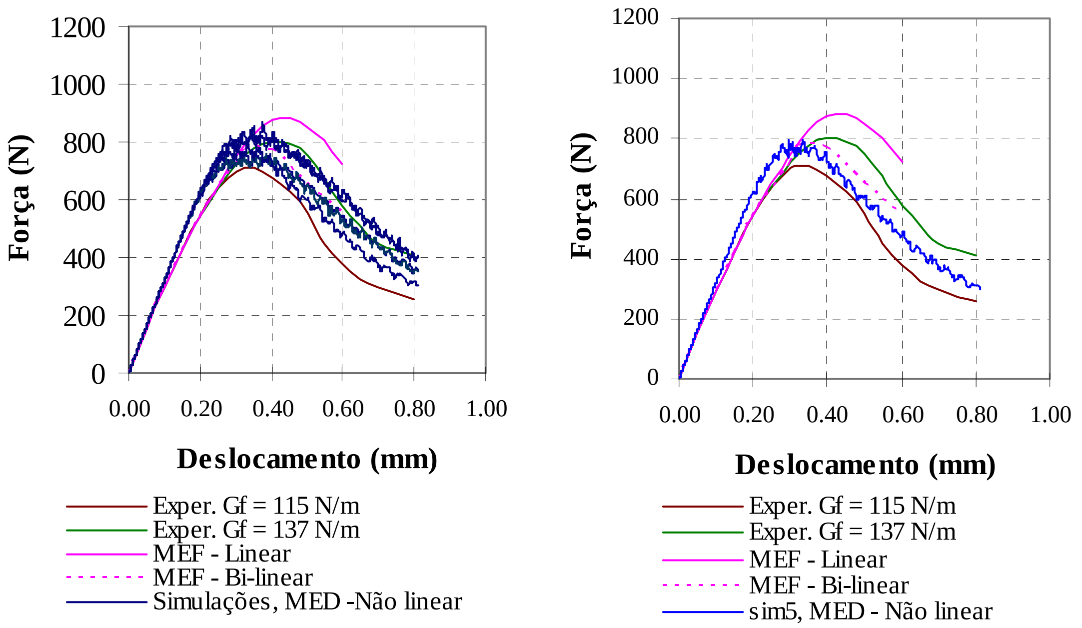


Figura 6.19: Curvas força–deslocamento - viga 1. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* não linear - situação 2 (ε_f três vezes maior).

Observa-se que, apesar dos trechos pré-pico não coincidirem com os de Petersson (1981), no geral, os resultados são bem mais satisfatórios, principalmente no que se refere ao modelo *strain-softening* não linear, o modelo que dentre todos apresenta um valor de deformação crítica, ε_f, maior.

Verifica-se que o modelo não linear apresenta uma curva pós-pico mais suave em todas as situações testadas. No entanto o modelo não linear da situação dois, que apresenta maior deformação crítica, ε_f, Figura 6.19, é o que mais se aproxima dos resultados obtidos experimentalmente por Petersson (1981) e, conseqüentemente, do comportamento real do concreto. Alguns pesquisadores já tinham verificado que modelos que apresentam maior deformação crítica fornecem melhores resultados quando se trata de materiais quase-frágeis, como o concreto. Dentre estes pesquisadores destacam-se Rots et al, (1985), e Ali, (1996), que utilizaram os modelos *strain-softening* linear e bi-linear no estudo de vigas à flexão de três pontos; e Gopalaratnam e Ye, (1991), que fizeram uso dos modelos *strain-softening* linear e exponencial, ver capítulo 5.

Guinea et al (1994) fizeram uma análise semelhante quando compararam seus resultados com os conseguidos por outros pesquisadores. Os autores analisaram vigas à flexão em três pontos utilizando modelos *strain-softening* bi-lineares de diferentes aberturas críticas da fissura. Eles obtiveram melhores resultados, no que se refere à região pós-pico dos diagramas força-deformação, com o modelo de maior abertura crítica da fissura, ver capítulo 5.

Esta observação se confirma com os resultados apresentados aqui. Os três modelos *strain-softening* foram testados para duas medidas de deformação crítica, ε_f, no qual a de valor maior apresentou melhores ajustes com os resultados experimentais.

A Figura 6.20 indica as forças no ponto de aplicação da carga variando com o tempo para cada modelo *strain-softening*. Foram escolhidas, para os modelos linear, bi-linear e não linear, a quarta, "*sim.4*", a segunda, "*sim.2*", e a quinta simulação, "*sim5*", respectivamente.

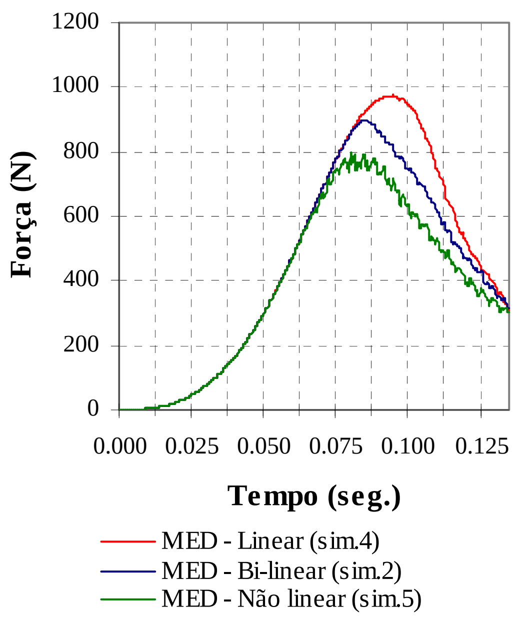


Figura 6.20: Curvas força–tempo - viga 1. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening* - situação 2 (ε_f três vezes maior).

Observa-se, também, que os três modelos apresentam instantes de propagação instável da fissura bastante próximos um do outro. Os picos das três curvas são mais suaves e de intensidade menor, e seus trechos pós-pico variam de forma mais lenta e suave quando comparados com as demais situações avaliadas. O início de propagação da fissura, no modelo linear se dá no tempo próximo a 0,095 segundos, e nos demais modelos, no tempo de 0,085 segundos.

Verifica-se que a média das cargas máximas das simulações, no ponto de aplicação do deslocamento controlado, referente ao resultado da curva *strain-softening* linear, é maior que a do modelo bi-linear, que por sua vez apresenta um pico maior quando comparado com o obtido pela curva não linear, reforçando a idéia de que o primeiro modelo consome mais energia que os demais. Este fato é melhor compreendido quando são traçados os diagramas que representam a variação das energias com o tempo para os três modelos *strain-softening* estudados.

6.4.1.3 – Curvas das energias gastas no processo de propagação da fissura

As Figuras 6.21, 6.22 e 6.23 ilustram as energias gastas em todo o processo de fratura. Elas são graficadas para os três modelos *strain-softening* propostos e para as três situações apresentadas anteriormente. A primeira em que são conservadas as propriedades utilizadas por Petersson (1981); a segunda, na qual se diminui o módulo de elasticidade para um melhor ajuste do trecho elástico da curva força-deslocamento de elasticidade, e a terceira que mantém as características físicas e geométricas concebidas por Pertersson (1981) aumentando apenas o valor da deformação crítica, ε_f, da curva *strain-softening*.

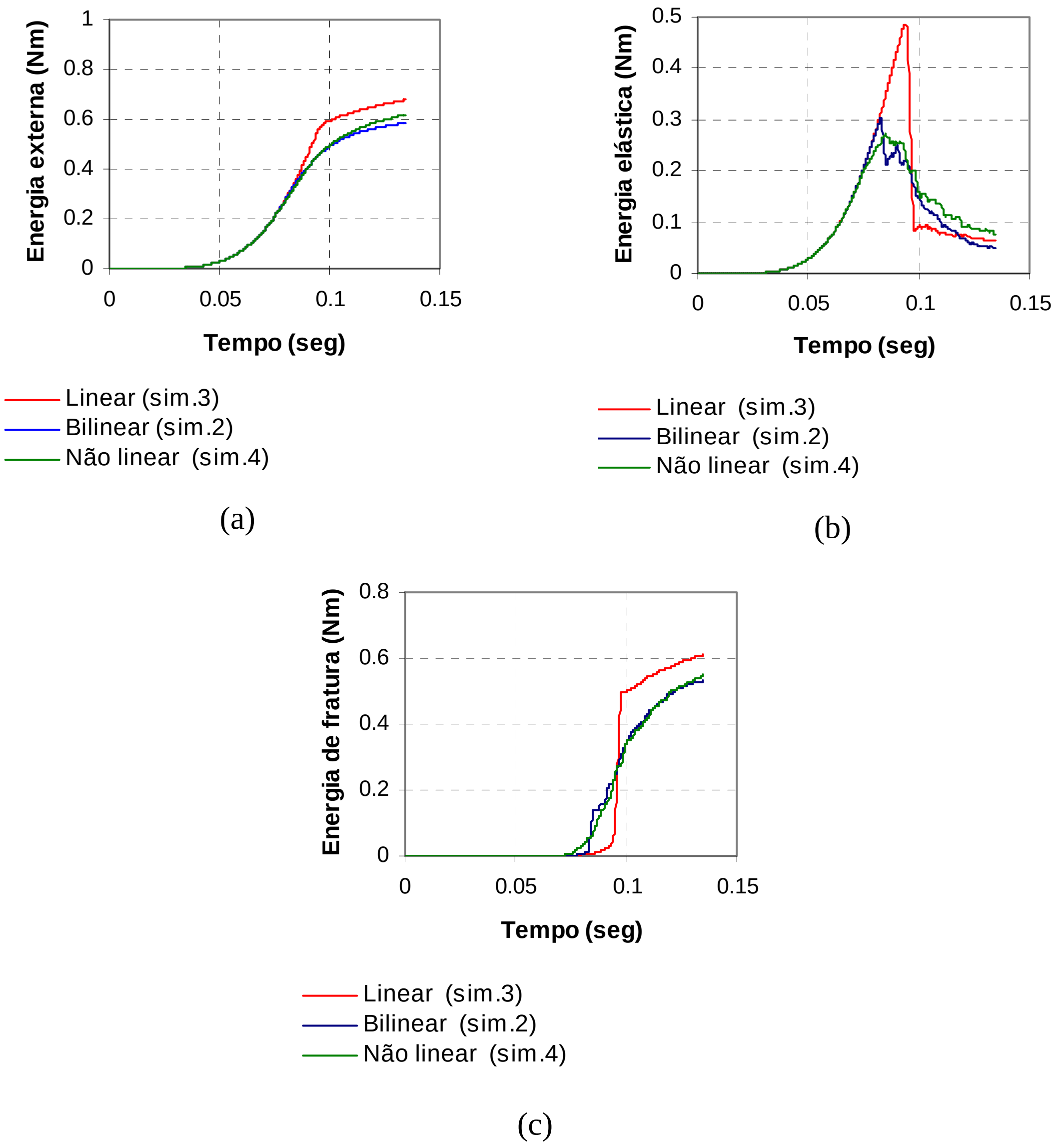
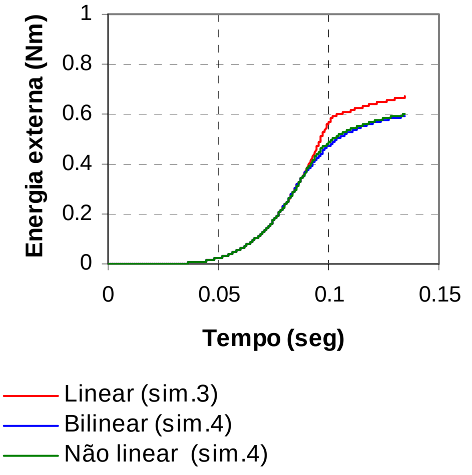
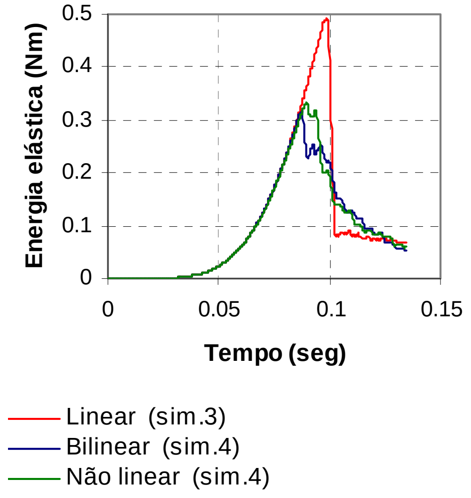


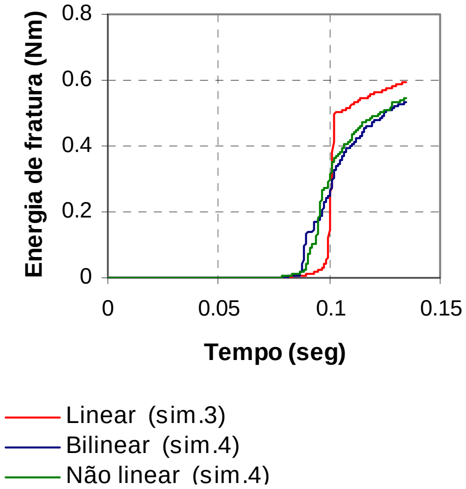
Figura 6.21 – Variação das energias em função do tempo. (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.22 – Variação das energias em função do tempo – situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2). (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.

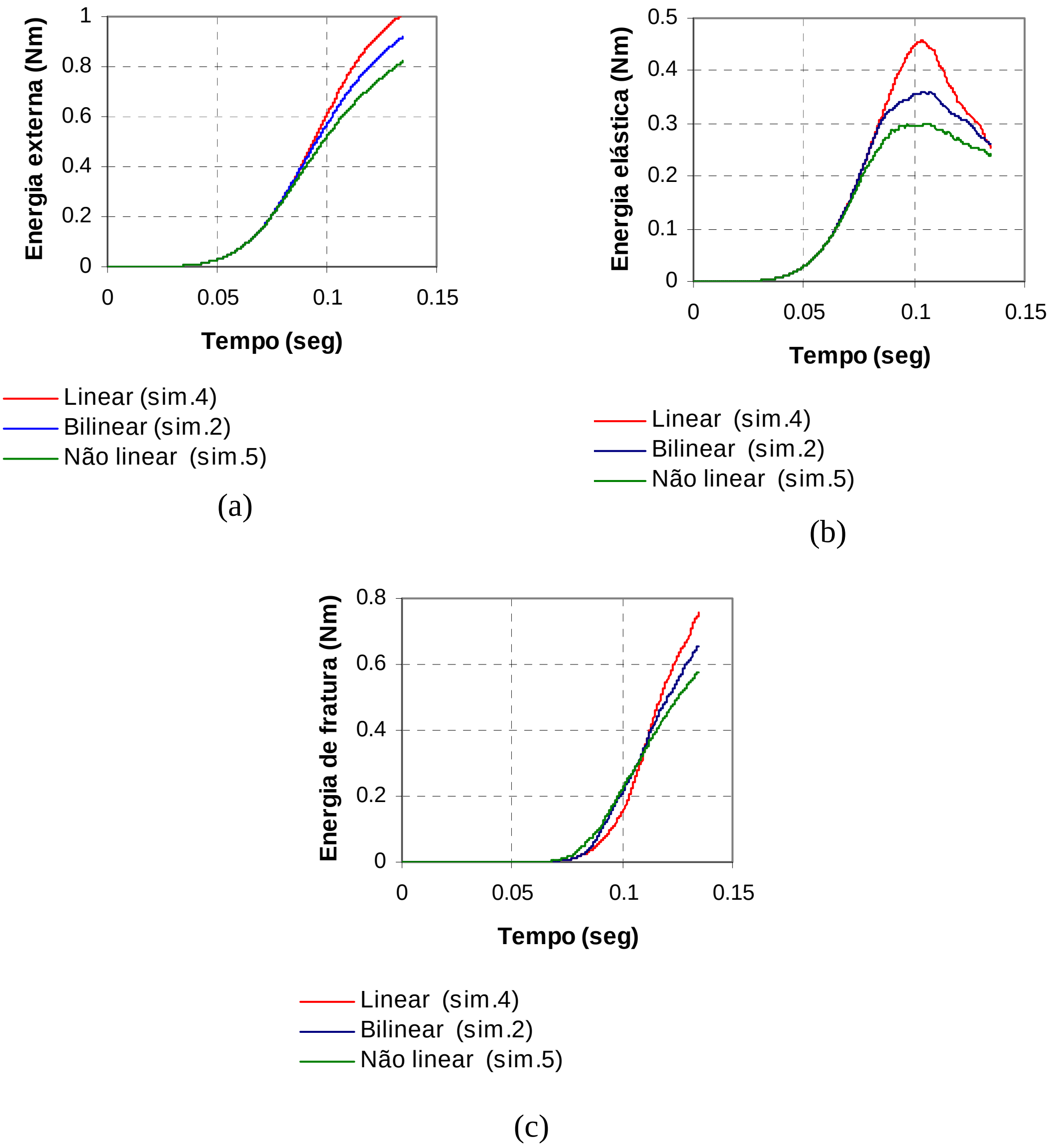


Figura 6.23 – Variação das energias em função do tempo - situação 2 (ε_f três vezes maior). (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.

Como se observa, as energias obtidas pelos três modelos apresentaram uma boa concordância entre si.

Ao focar a atenção na Figura 6.21 (b), 6.22 (b) e 6.23 (b), verifica-se que o modelo linear consome mais energia elástica a partir do momento que se inicia a propagação instável da fissura. A energia de fratura gasta para este modelo é maior, como ilustra a Figura 6.21 (c), 6.22 (c) e 6.23 (c). O modelo *strain-softening* linear também apresenta um processo de propagação mais acelerado, quando comparado com os outros modelos apresentados. Isto é possível de se afirmar devido à maior inclinação do trecho pós-pico do gráfico que plota a variação da energia elástica com o tempo.

As curvas energéticas das simulações de maior deformação crítica, ε_f, são mais suaves e estáveis, Figura 6.23 (a), (b) e (c).

6.4.1.4 – Trajetória da fissura

O algoritmo utilizado possibilita também a visualização de toda a trajetória da fissura em qualquer intervalo de tempo, para os três modelos *strain-softening*. As Figuras 6.24(a), (b) e (c) mostram o quadro de fissuração do modelo *strain-softening* linear analisado para as três situações mostradas nos resultados anteriores, em três estágios de tempo diferentes, um bem próximo do início do processo de fissuração, outro num tempo intermediário da propagação e, por último, em seu estágio final. A pré-fissura é representada pela eliminação de barras ao longo de seu comprimento. As barras rompidas no processo de fissuração são eliminadas do modelo, enquanto as barras danificadas, ou seja, as que apresentam perda na resistência ao longo do tempo, estão destacadas na cor vermelha. As figuras abaixo mostram apenas a região próxima à pré-fissura, onde ocorre todo o processo de propagação.

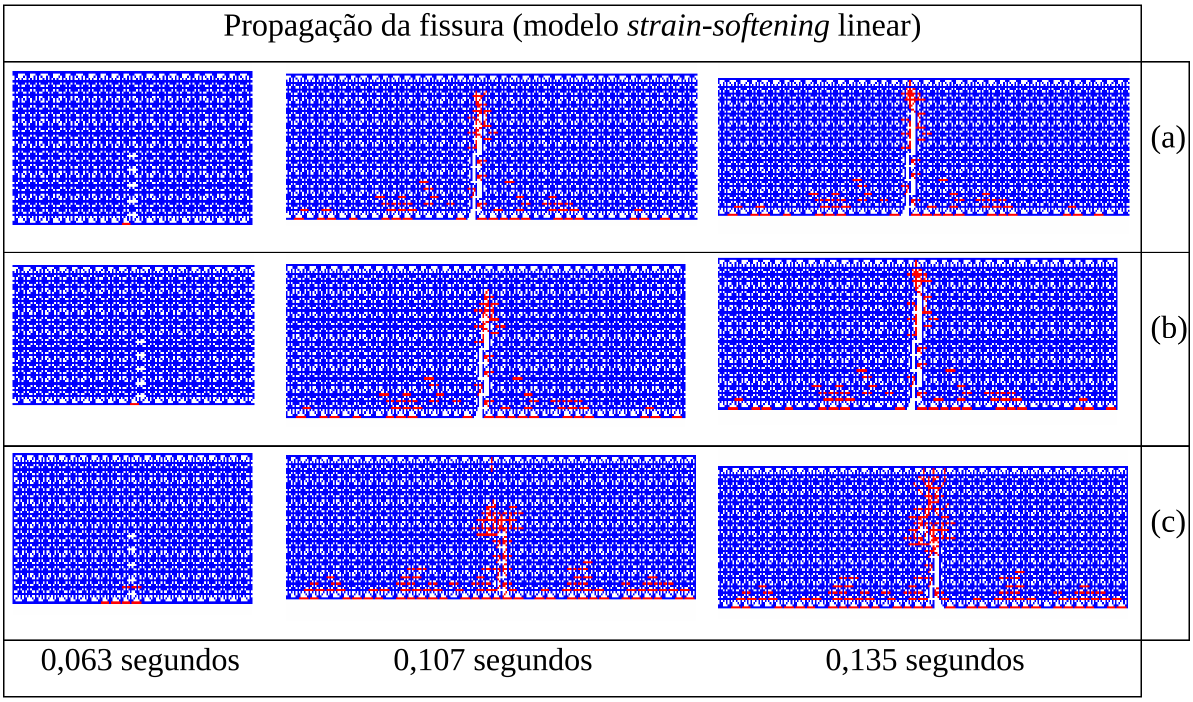


Figura 6.24: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* linear. (a) Viga 1 que mantém as propriedades definidas por Petersson (1981); (b) situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2), e (c) situação 2 (ε_f três vezes maior).

A pequena alteração feita no valor do módulo de elasticidade do concreto pouco altera a configuração da trajetória da fissura. Apenas os gráficos força-deslocamento, força-tempo e energia-tempo têm um trecho pós-ruptura levemente deslocado para a direita devido a pequena diminuição do módulo de elasticidade que é responsável por aumentar a deformação crítica da peça para a qual a força atinge seu valor máximo, ε_p.

Na Figura 6.24(c), percebe-se que o aumento da deformação crítica, ε_f, faz com que a propagação da fissura seja menor, reproduzindo um comportamento mais dúctil do concreto. A zona de abrandamento do concreto é maior, e a ruptura da peça, menor, ou seja, têm-se mais barras danificadas e menos barras rompidas.

A seguir as Figuras 6.25 (a), (b) e (c) ilustram a trajetória da fissura obtida pelo modelo bi-linear, para as três situações criadas, em três distintos intervalos de tempo.

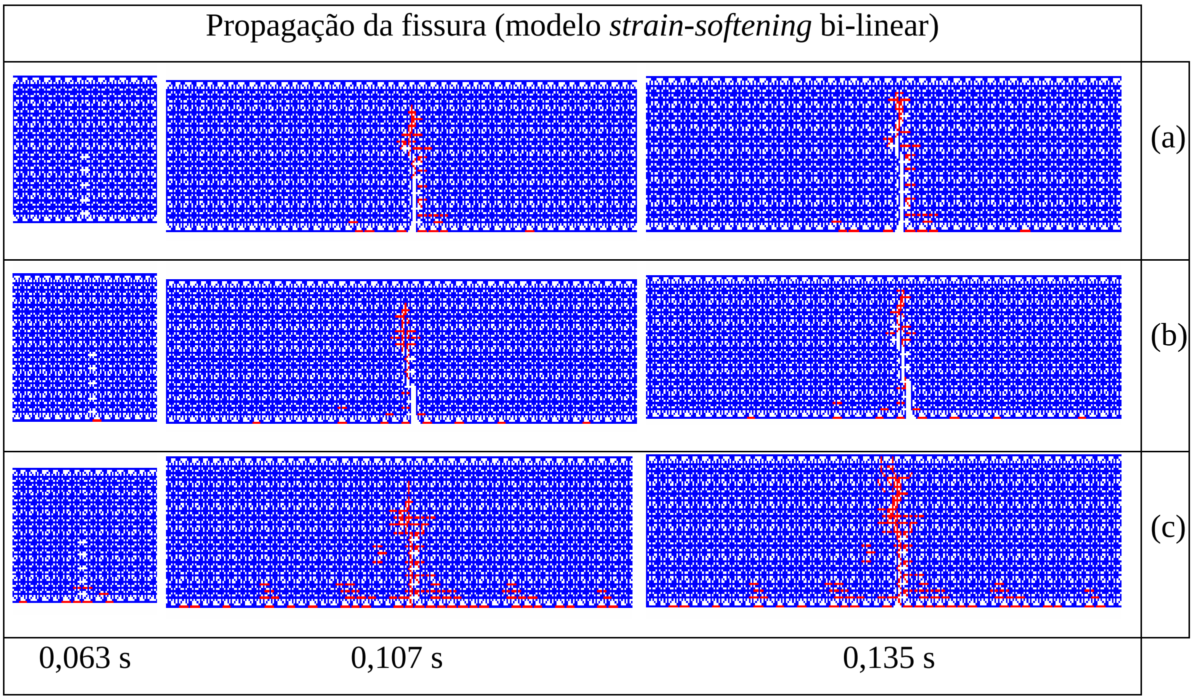


Figura 6.25: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* bi-linear. (a) Viga 1 que mantém as propriedades definidas por Petersson (1981); (b) situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2), e (c) situação 2 (ε_f três vezes maior).

Variando-se o valor do módulo de elasticidade nota-se pouca diferença na trajetória da fissura, Figura 6.25(b), assim como já foi observado nos resultados anteriores, no que se refere às curvas força-deslocamento, força-tempo e energia-tempo.

Uma diferença mais notável aparece quando se compara a Figura 6.25(c) com as demais. Nesta última situação, Figura 6.25(c), nota-se um menor número de barras rompidas e uma maior área de abrandamento do concreto, caracterizando um comportamento de maior ductilidade do material.

Comparando o modelo bi-linear com o linear para as três situações citadas, observa-se que a propagação da fissura se desenvolve menos. O valor maior da deformação crítica, ε_f, contribui bastante para a reprodução de um comportamento mais dúctil do material.

As Figuras 6.26(a), (b) e (c) ilustram a trajetória da fissura do último modelo *strain-softening* proposto analisados para três situações indicadas, em três intervalos de tempo.

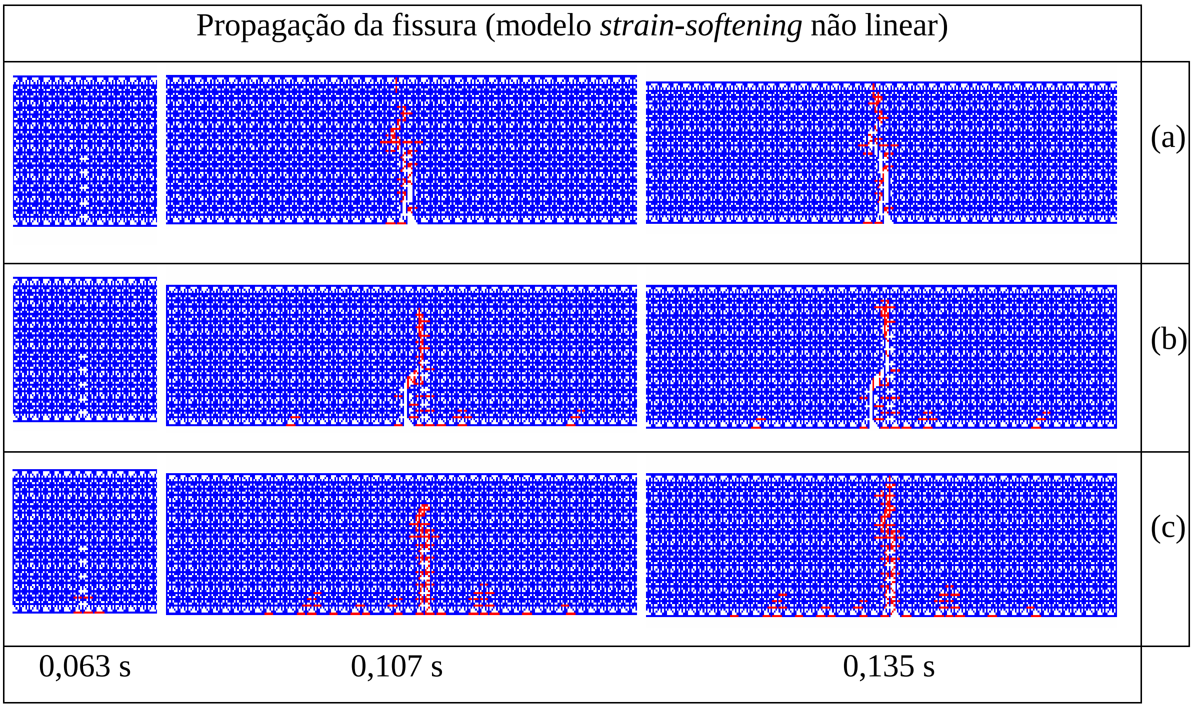


Figura 6.26: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* não linear. (a) Viga 1 que mantém as propriedades definidas por Petersson (1981); (b) situação 1 (E = 2,5 10^{10} N/m^2), e (c) situação 2 (ε_f três vezes maior).

O modelo não linear da Figura 6.26(a) apresenta poucas barras danificadas e rompidas quando comparadas com os outros modelos, Figura 6.24(a) e 6.25(a), ou seja, a peça sofre menos danos e a ruptura é menor para o modelo não linear, cuja deformação crítica, ε_f , é naturalmente maior.

Comparando a Figura 6.26(c) com os modelos linear e bi-linear na mesma situação proposta, Figura 6.24(c) e 6.25(c), constata-se que a ruptura é menor e o dano também.

Em todos os casos mostrados, observa-se uma zona de fragilidade que começa a se formar no banzo inferior da peça, próximo à pré-fissura, a fim de quebrar qualquer resistência que houver no seu prolongamento. Esta zona frágil se desenvolve em direção à parte superior central da viga, onde está sendo aplicado o carregamento favorecendo, assim, a propagação da fissura. Esta observação condiz com a teoria da mecânica da fratura aplicada ao concreto no modo I de fissuração.

6.4.1.5 – Curvas da variação da velocidade com o tempo

É interessante saber os casos e situações em que o processo de propagação ocorre de forma mais suave ou mais brusca ao longo do tempo. A visualização da trajetória da fissura, por si só não é o melhor caminho para se conseguir tal informação. O estudo da velocidade de propagação da fissura é capaz de acrescentar uma melhor compreensão deste processo dinâmico.

Para o caso em que se utilizam as propriedades físicas e geométricas concebidas por Petersson (1981), preservando o valor do módulo de elasticidade, *E*, no valor de 3,0 10^{10} N/m^2, a Figura 6.27 ilustra a variação da velocidade de propagação da fissura com o tempo para os três modelos *strain-softening* propostos.

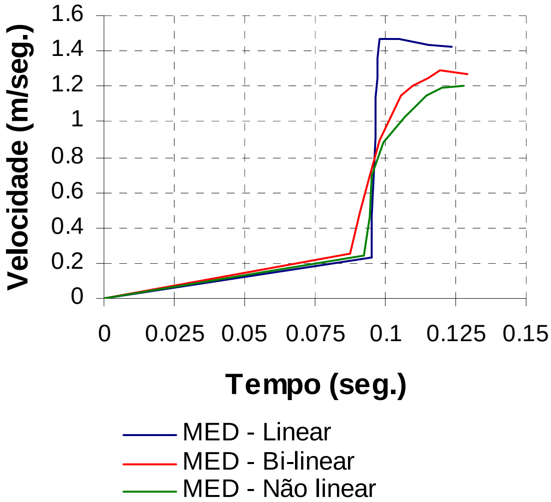


Figura 6.27: Variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo.

Observa-se que a fissura se propaga mais rapidamente no modelo *strain-softening* linear. Em intervalos muito pequenos e próximos do tempo de ruptura, a velocidade varia bruscamente atingindo valores mais altos quando comparados com os demais modelos *strain-softening*. Já nos modelos bi-linear e não linear observa-se uma variação da velocidade, após o tempo de ruptura, mais suave, caracterizando uma propagação mais lenta. Vale lembrar que estes últimos modelos possuem um valor de deformação crítica, ε_f, maior que o linear.

A Figura 6.28 mostra a variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo para a situação 2, na qual apenas é aumentado o valor da deformação crítica, ε_f , da curva *strain-softening* dos três modelos proposto, o linear, o bi-linear e o não linear.

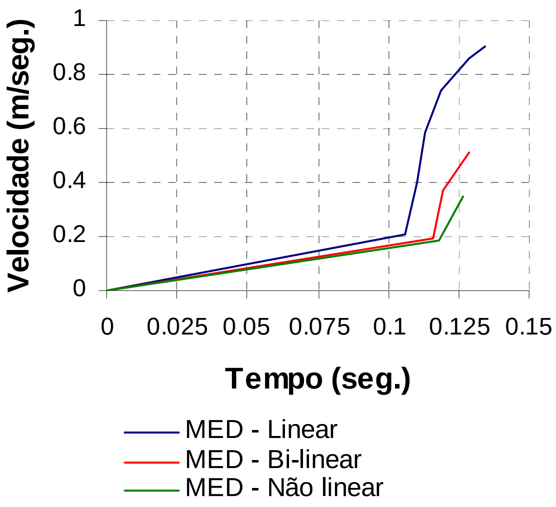


Figura 6.28: Variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo - situação 2 (ε_f três vezes maior).

Nota-se que o aumento da deformação crítica, ε_f, contribui para suavizar a variação da velocidade do modelo *strain-softening* linear. No entanto, este modelo ainda apresenta, em intervalos muito pequenos e próximos do tempo de ruptura, um aumento mais rápido da velocidade quando comparados com os outros mostrados na Figura 6.28.

O aumento da deformação crítica, ε_f, faz, portanto, com que a propagação da fissura se desenvolva de forma mais suave, sendo responsável por transformar o comportamento do concreto, de frágil por um mais dúctil.

6.4.1.6 – Curvas da variação da aceleração com o tempo

As acelerações induzidas durante o processo de propagação da fissura são parâmetros muito difíceis de serem medidos experimentalmente. Desta forma, estes resultados quando obtidos numericamente ficam sem referências para comparação. Mesmo assim é interessante grafica-los, pois através deles pode-se entender com mais clareza o processo dinâmico da propagação.

As acelerações obtidas correspondem ao nó situado na face frontal de maior comprimento da peça e na extremidade inferior da fissura pré-existente, indicado na Figura 6.29 com a letra “*A*”.

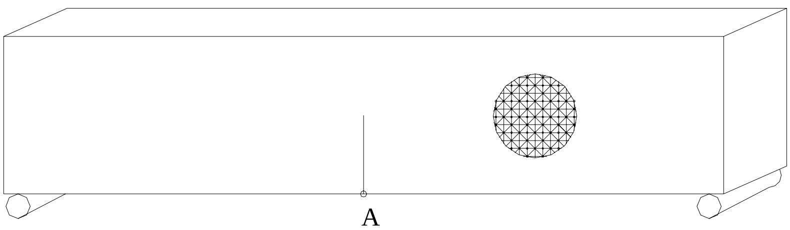
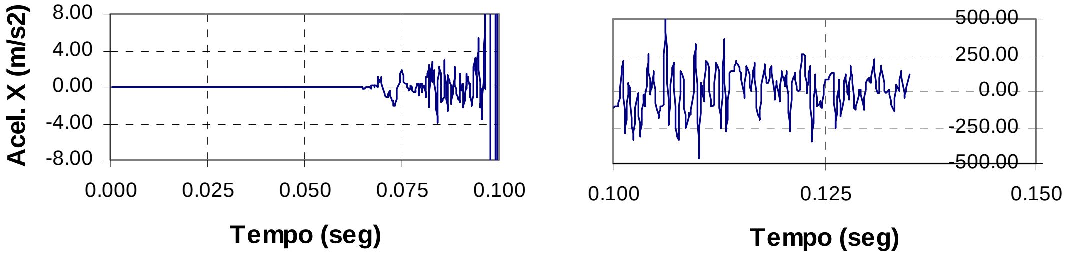
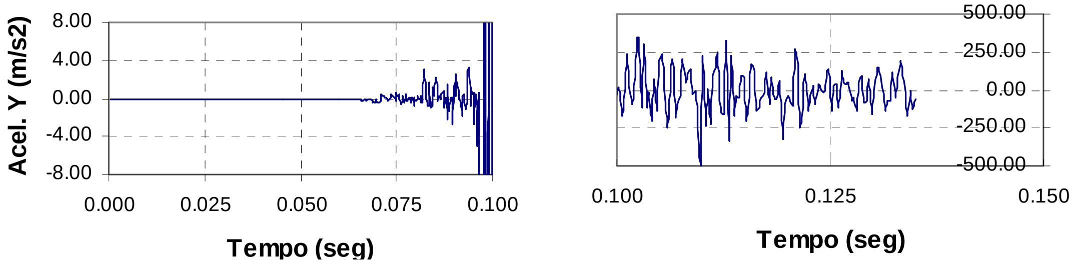


Figura 6.29: Nó de controle. Ponto de referência para medir as acelerações da propagação da fissura.

A Figura 6.30 mostra os gráficos de acelerações obtidos na direção perpendicular, *x*, e paralela, *y*, ao eixo da fissura, utilizando o método de representação espectral. O modelo *strain-softening* utilizado foi o linear, mantendo-se preservadas as propriedades físicas e geométricas indicadas por Petersson (1981).



(a)



(b)

Figura 6.30: Variação da aceleração com o tempo. (a) na direção x do eixo cartesiano, e (b) na direção y do eixo cartesiano.

Observa-se que as acelerações são nulas até o instante em que se aproxima o início do processo de ruptura, ou seja, surgem pequenas acelerações antes de ser atingido a carga máxima e se inicie o processo de propagação instável da fissura. No tempo de aproximadamente 0,075 segundos a propagação da fissura começa com valores pequenos de acelerações. No decorrer da propagação instável, as acelerações atingem valores mais altos que diminuem no final de todo o processo de propagação da fissura.

Os resultados mostrados na Figura 6.30 condizem com o diagrama força-tempo ilustrado na Figura 6.11, cujo pico da curva traçada indica o início do processo de ruptura no mesmo instante em que surgem os primeiros picos de acelerações.

6.4.2 – Viga de Petersson (1981) - Viga 2

Esta segunda amostra foi ensaiada apenas numericamente por Petersson, em 1981. O autor utilizou o método dos elementos finitos para simular o ensaio de flexão em três pontos e investigar a propagação de fissuras no Modo I. Petersson (1981) utilizou um valor de 100 N/m para a energia específica de fratura, G_f. As dimensões da peça, da forma como foi concebida por Petersson (1981), são apresentadas na Figura 6.31, onde todas as medidas são dadas em metros.

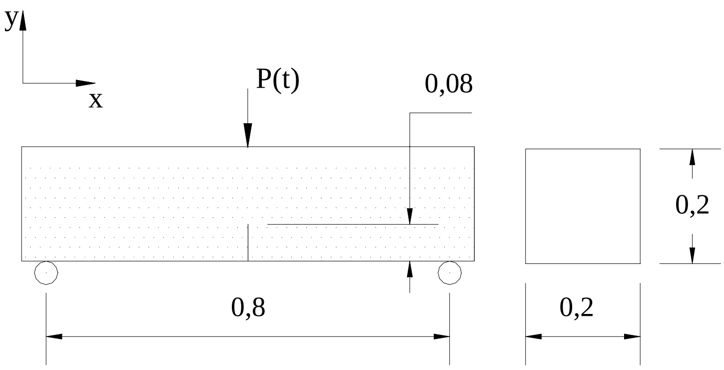


Figura 6.31: Esquema da viga 2 ensaiada por Petersson (1981).

Petersson (1981) utilizou o modelo da fissura fictícia para a obtenção das curvas força–deslocamentos. O módulo de elasticidade, *E*, adotado por Petersson, (1981), foi de 4,0 10^{10} N / m^2. A Figura 6.32 apresenta duas curvas, uma referente ao modelo *strain-softening* linear e outra ao bi-linear.

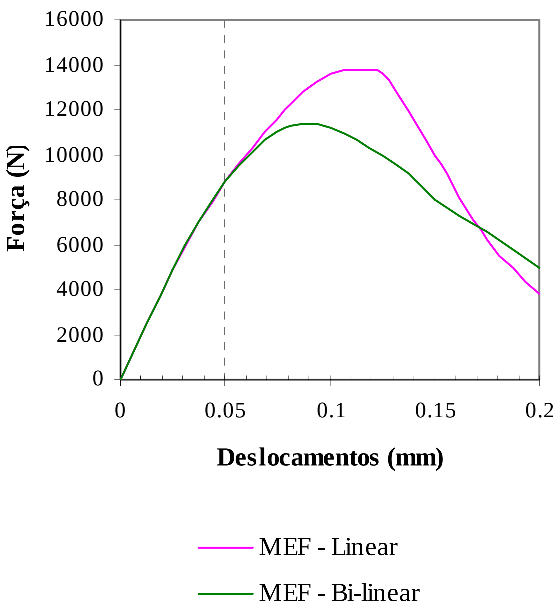


Figura 6.32: Curva força–deslocamento no centro do vão da viga 2, (Petersson, 1981)

6.4.2.1 – Simulação numérica utilizando o MED

A Figura 6.33 mostra a malha de elementos discretos, com 26 x 7 x 7 módulos de arestas iguais a 0,03 m nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente.

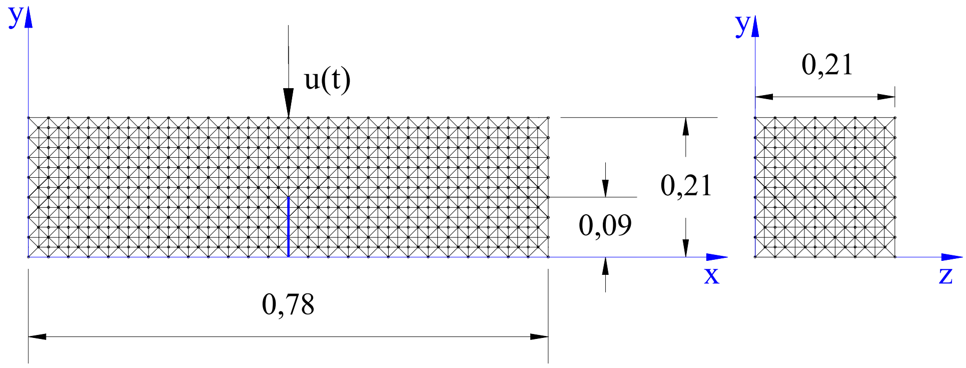


Figura 6.33: Malha de discretização de elementos discretos, viga 2.

Foram aplicados incrementos de deslocamento, conforme mostra a Figura 6.33, com uma velocidade final de $\dot{u}_f = 0{,}005 \quad m/s$.

A fissura é representada por uma quebra das barras de discretização, na tentativa de simular uma fraca ligação dos elementos discretos ao longo de seu comprimento.

Na Tabela 6.2 são encontrados os valores das propriedades físicas adotadas para simular numericamente o ensaio utilizando o MED.

Tabela 6.2: Propriedades físicas do material e parâmetros adotados para gerar o modelo teórico da viga 2 de Petersson (1981).

Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade, E	$4{,}0\ 10^{10}$ N/m^2
Resistência à tração, f_t	$3{,}33\ 10^{6}$ N/m^2
Energia específica de fratura, G_f	120 N/m
Massa Específica, ρ	2400 kg/m^3
Coeficiente de Poisson, ν	0,2
Razão de Amortecimento, ξ	5% (D_f = 157 s^{-1})
Coeficiente de Variação, CVA *	0,10

* O coeficiente de variação, CVA, é considerado para representar a heterogeneidade do material. Os parâmetros que variam são a energia de fratura, G_f, o módulo de elasticidade, E, e a massa específica, ρ. Esta consideração se baseia no trabalho de Rios (2002).

6.4.2.2 – Curvas força-deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga e curvas da variação da força ao longo do tempo.

Os resultados referentes à curva força–deslocamento no centro do vão, obtida pelo método dos elementos discretos, MED, para os três modelos *strain-softening* proposto, são comparados com os encontrados por Petersson (1981). As Figuras 6.34, 6.35 e 6.36 mostram estas curvas. Foram realizadas cinco simulações para as análises feitas com o método dos elementos discretos, MED. O primeiro gráfico de cada figura apresenta as cinco simulações e o segundo apenas uma delas.

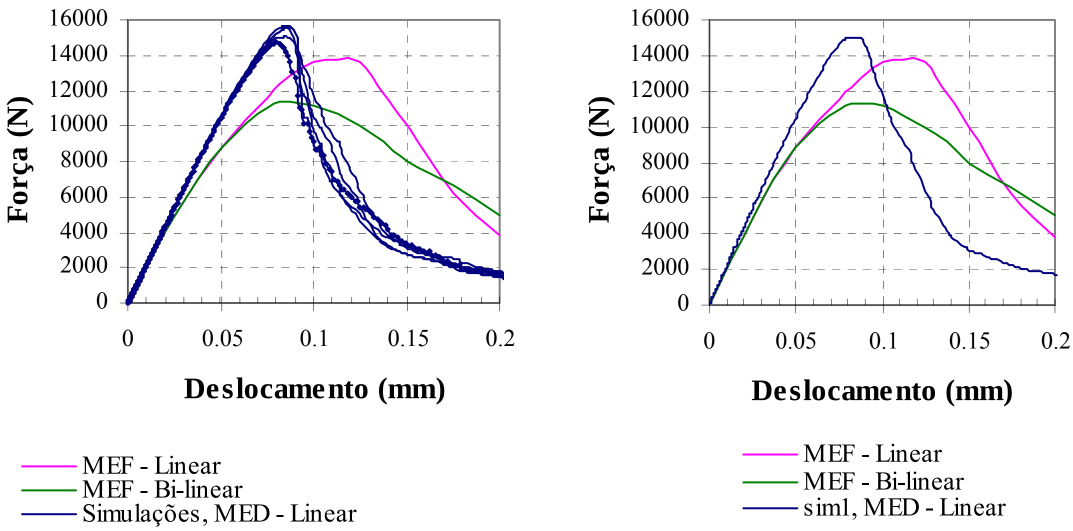


Figura 6.34: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear.

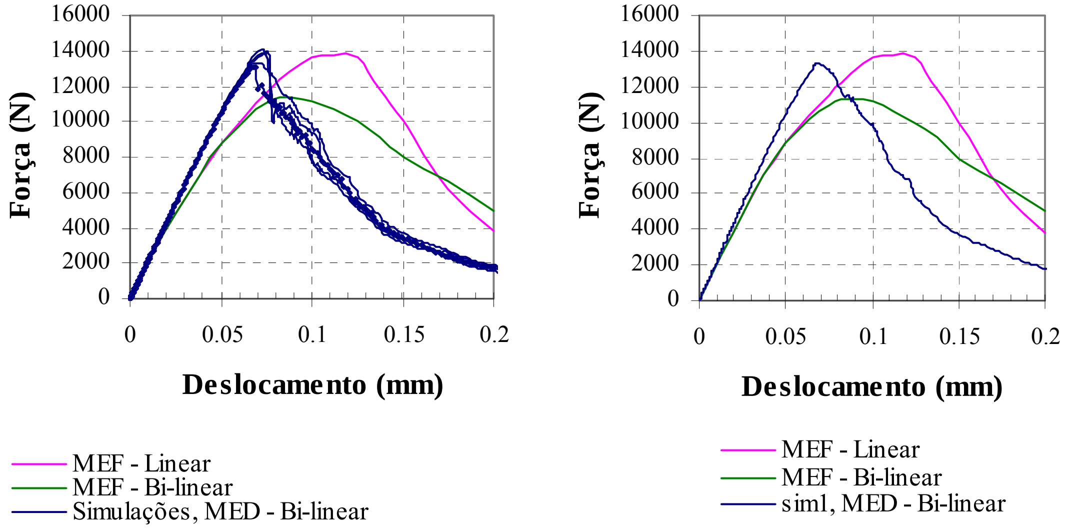


Figura 6.35: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* bi-linear.

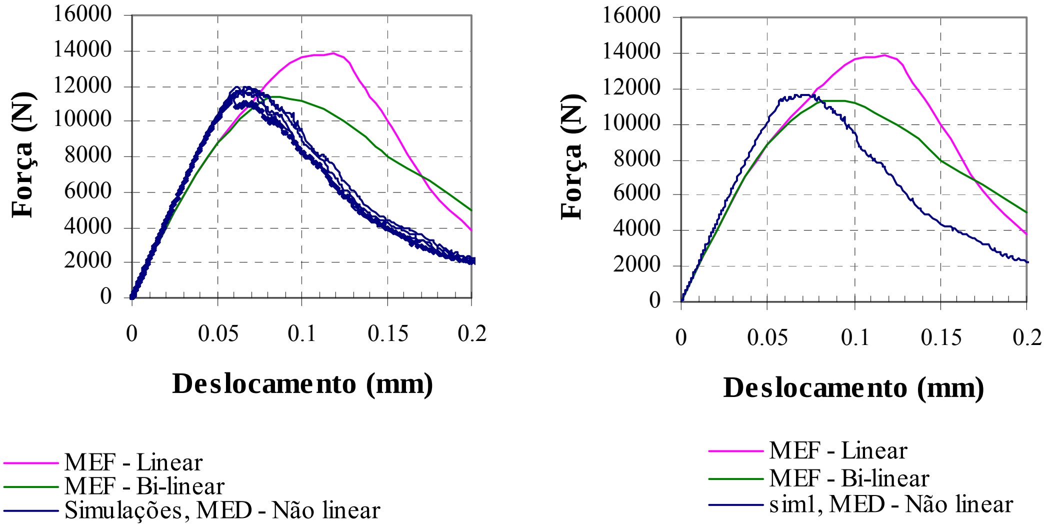


Figura 6.36: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* não linear.

Observa-se que o modelo não linear se aproxima dos resultados de Petersson (1981) principalmente porque apresenta um trecho pós-pico mais suave, reproduzindo um comportamento mais dúctil. O modelo linear apresenta uma característica de comportamento de um material mais frágil, devido a queda mais rápida do trecho pós-pico, Figura 6.34.

A Figura 6.37 permite a visualização do aspecto dinâmico do processo. Nela são mostradas as primeiras simulações, "*sim.1*", da variação da força ao longo do tempo para três modelos *strain-softening*.

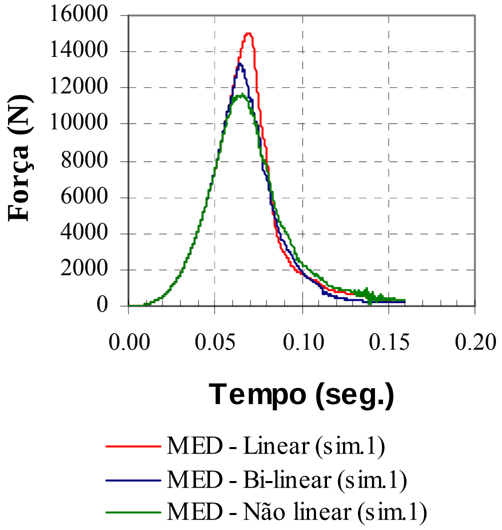


Figura 6.37: Curva força – tempo da viga 2. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening*.

Analisando a Figura 6.37, verifica-se que os três modelos apresentam instantes de propagação instável da fissura bastante próximos entre si.

O pequeno desajuste no trecho quase linear dos gráficos força-deslocamento, Figura 6.34, 6.35 e 6.36 pode ser corrigido alterando o valor do módulo de elasticidade, *E*, assim como foi feito anteriormente. Desta forma, novamente são expostas duas situações:

- Situação 1: o módulo de elasticidade é reduzido, E, para 3,0 . 10^{10} N/m^2, influenciando na inclinação do trecho pré-pico dos gráficos força-deslocamento.

-Situação 2: a deformação crítica, ε_f, das curvas *strain-softening* é aumentada em aproximadamente três vezes.

As curvas *strain-softening* com os valores das deformações críticas, ε_f, utilizadas para as análises são mostradas pela Figura 6.11.

As Figuras 6.38, 6.39 e 6.40 ilustram os resultados referentes à primeira situação, na qual se varia apenas o módulo de elasticidade. Os resultados mostrados são as curvas força-deslocamento.

O primeiro gráfico de cada figura expõe os resultados das cinco simulações reproduzidas pelo MED, enquanto que o segundo, apresenta apenas uma simulação para os três modelos *strain-softening*. Como se observa, estes resultados são comparados com os de Petersson (1981).

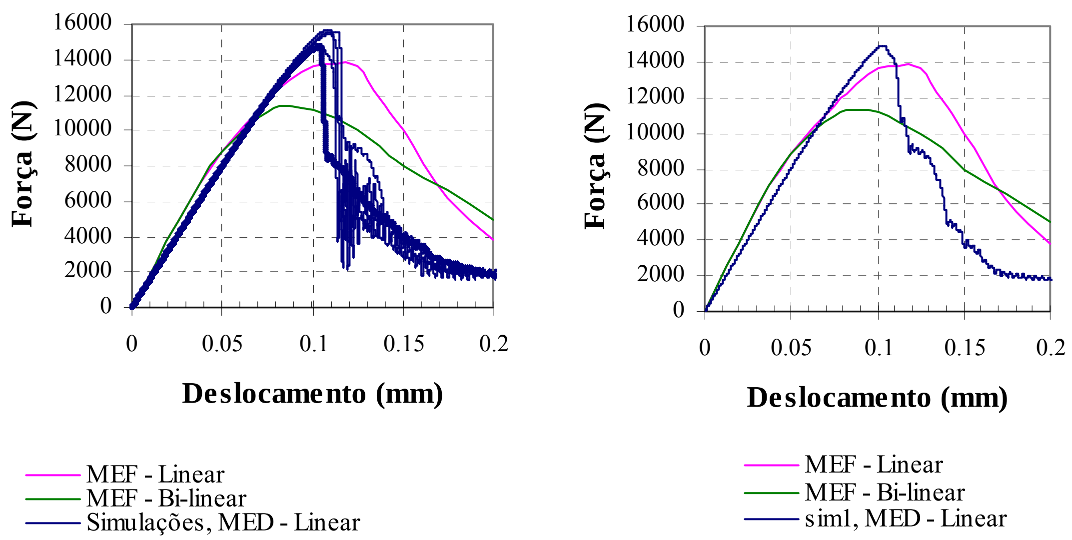


Figura 6.38: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para o modelo *strain-softening* linear – Situação 1 (E = 3,0 10^{10} N/m^2).

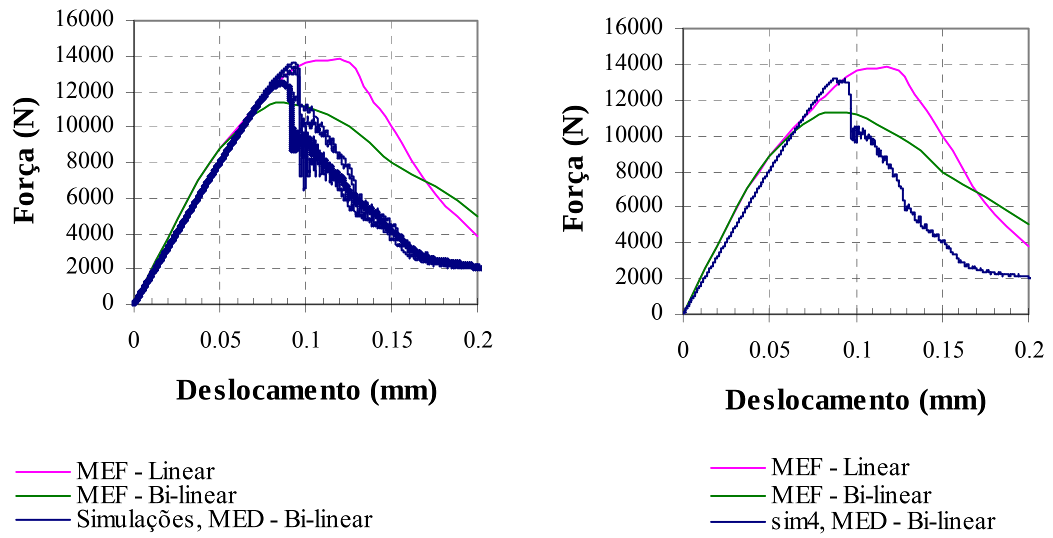


Figura 6.39: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para o modelo *strain-softening* bi-linear – Situação 1 (E = 3,0 10^{10} N/m^2).

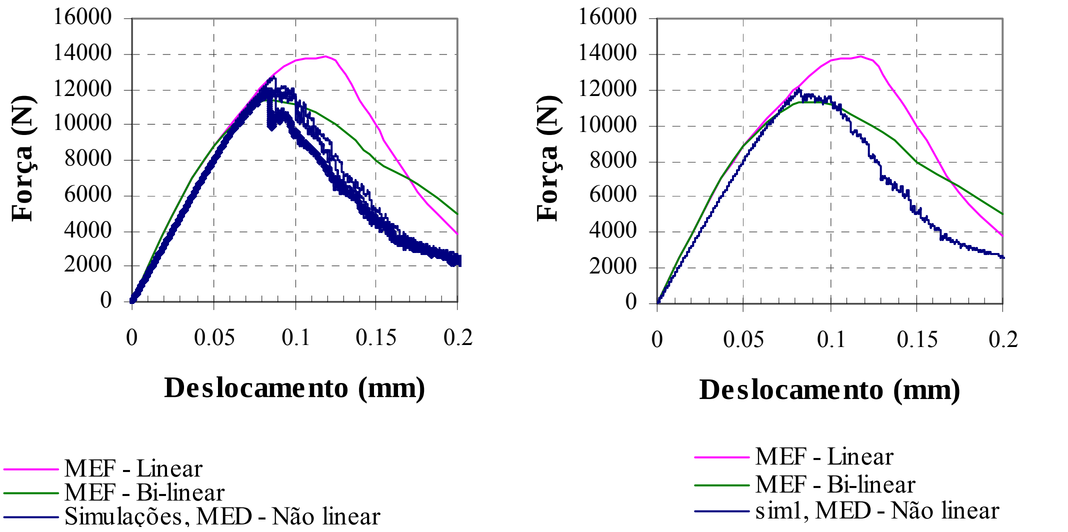


Figura 6.40: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para o modelo *strain-softening* não linear – Situação 1 (E = 3,0 10^{10} N/m^2).

Como se vê, a alteração do módulo de elasticidade contribui para um melhor ajuste com os resultados de Petersson (1981), no que se refere ao trecho quase-linear das curvas. Quanto à inclinação do trecho pós-pico, praticamente não há mudanças significativas.

A Figura 6.41 mostra a variação da intensidade da força no ponto de aplicação da carga ao longo do tempo, para os três modelos strain-softening.

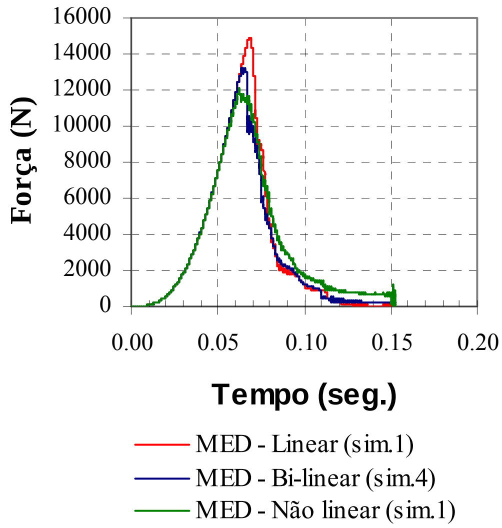


Figura 6.41: Curvas força – tempo - viga 2. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening* – situação 1 (E = 3,0 10^{10} N/m^2).

Apenas uma simulação é ilustrada para cada modelo *strain-softening* apresentado. Os resultados indicam instantes de propagação instável da fissura bastante próximos um do outro, na ordem de 0,07 segundos.

A seguir são mostrados os resultados obtidos pela segunda situação, na qual se mantém o módulo de elasticidade, E, sugerido por Petersson (1981), aumentando apenas o comprimento crítico das curvas *strain-softening*, ε_f, de aproximadamente três vezes o considerado nas análises anteriores.

As Figuras 6.42, 6.43 e 6.44 mostram os resultados referentes às curvas força-deslocamento. Além dos resultados extraídos pelo MED, têm-se os de Petersson (1981), possibilitando, assim, uma análise comparativa entre eles.

São cinco simulações realizadas pelo MED, ilustrada no primeiro gráfico de cada figura, e apenas uma simulação no segundo gráfico.

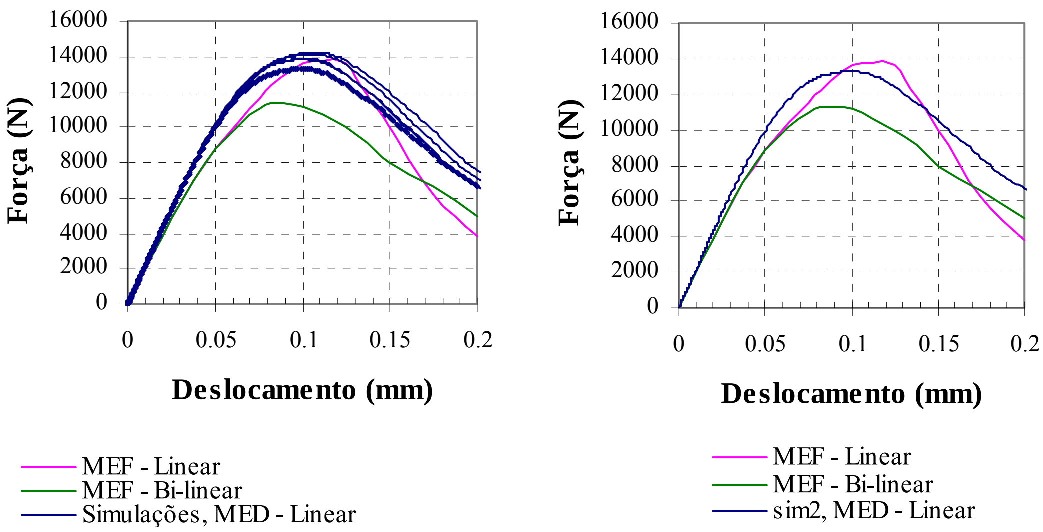


Figura 6.42: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear - situação 2 (ε_f três vezes maior).

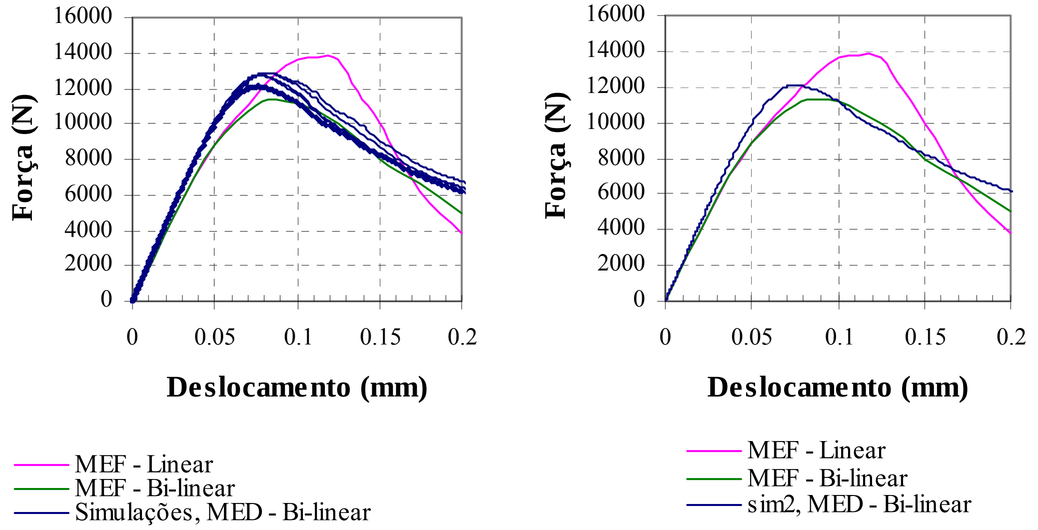


Figura 6.43: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* bi-linear - situação 2 (ε_f três vezes maior).

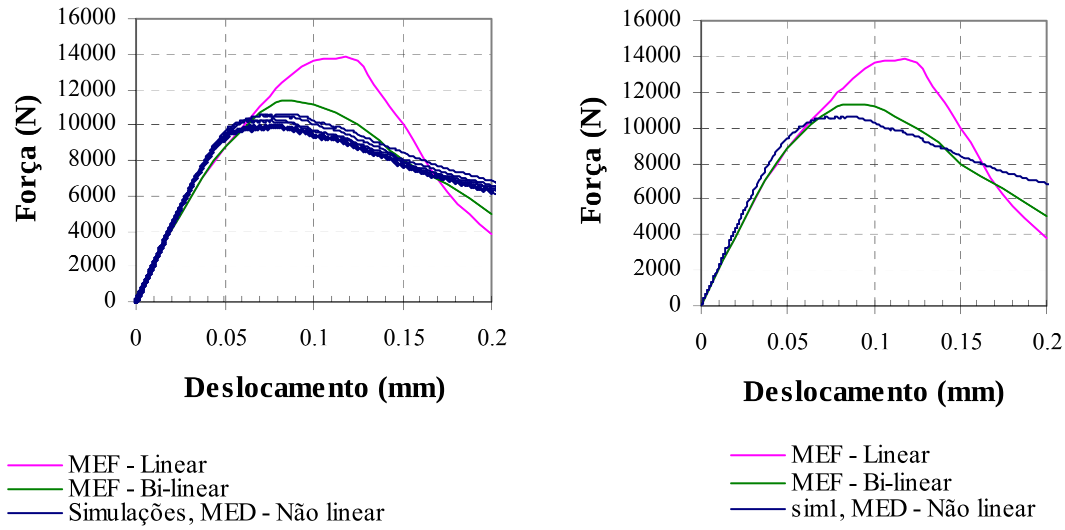


Figura 6.44: Curvas força–deslocamento - viga 2. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* não linear - situação 2 (ε_f três vezes maior).

Analisando os resultados de Petersson (1981) obtidos pelo MEF, percebe-se que a configuração das curvas dos modelos *strain-softening* segue o mesmo padrão dos obtidos utilizando o MED, ou seja, o modelo *strain-softening* linear apresenta uma curva de pico maior e trecho pós-pico mais inclinado, caracterizando um processo de ruptura mais rápido que o modelo bi-linear. O modelo não linear obtido pelo MED apresenta um trecho pós-pico bem mais suave comparado com os outros modelos, isto se explica pelo fato dele apresentar um valor de deformação crítica, ε_f, bem maior. Isto reforça mais uma vez as conclusões obtidas por Rots et al, (1985); Ali, (1996); Gopalaratnam e Ye, (1991) e Guinea et al (1994) no que se refere ao assunto, ver capítulo 5.

A Figura 6.45 mostra as curvas força-tempo dos três modelos *strain-softening* aplicados. Conforme indica a legenda do gráfico, apenas uma simulação de cada caso é mostrada.

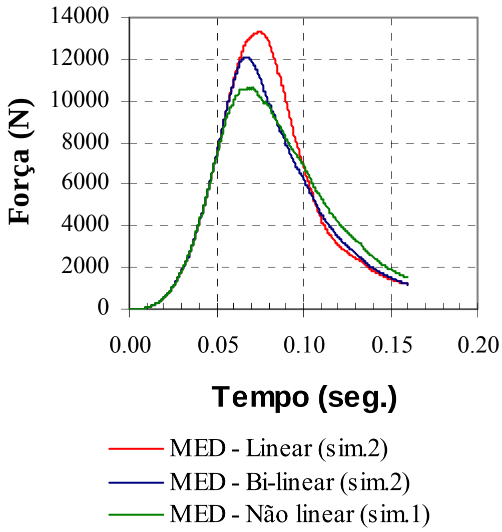


Figura 6.45: Curvas força – tempo - viga 2. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening* - situação 2 (ε_f três vezes maior).

Verifica-se, novamente, que os instantes em que se inicia a propagação instável da fissura apresentam valores bastante próximos para os três modelos analisados, na ordem de 0,07 segundos.

Fazendo uma análise geral, a média das cargas máximas das simulações, referentes ao resultado da curva *strain-softening* linear, é maior que a do modelo bi-linear, que por sua vez apresenta um pico maior quando comparado com o obtido pela curva não linear.

Analisando a Figura 6.45, constata-se que o modelo linear consome mais energia que os demais. Através dos diagramas que representam a variação das energias com o tempo também pode se chegar a esta mesma conclusão.

6.4.2.3 – Curvas das energias gastas no processo de propagação da fissura

Os diagramas que indicam as variações das energias gastas ao longo do tempo são mostrados pelas Figuras 6.46, 6.47 e 6.48. Nelas são encontrados os resultados para as três situações apresentadas anteriormente e para os três modelos *strain-softening* proposto.

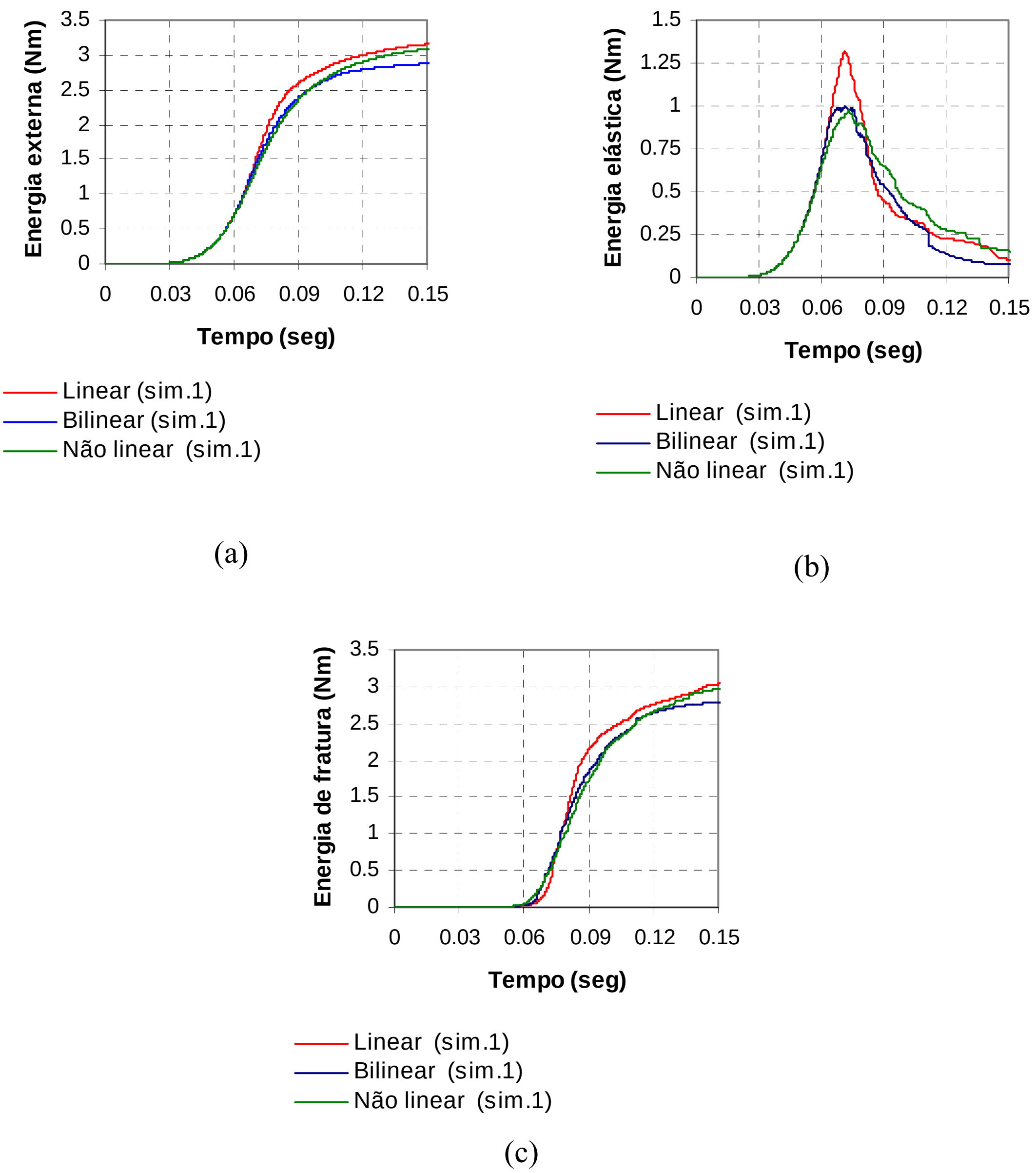
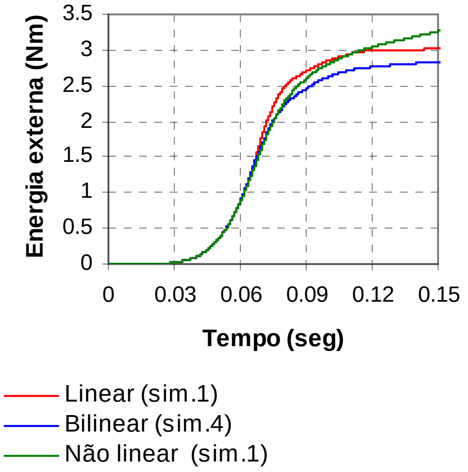
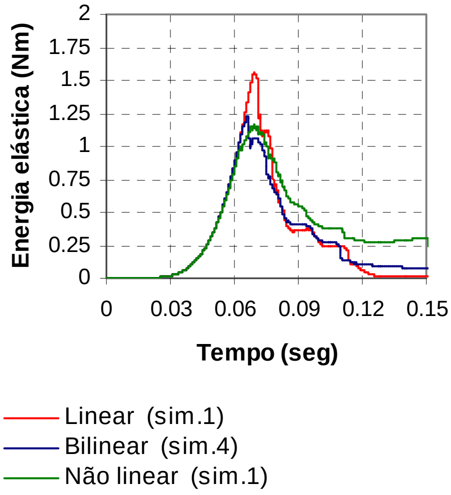


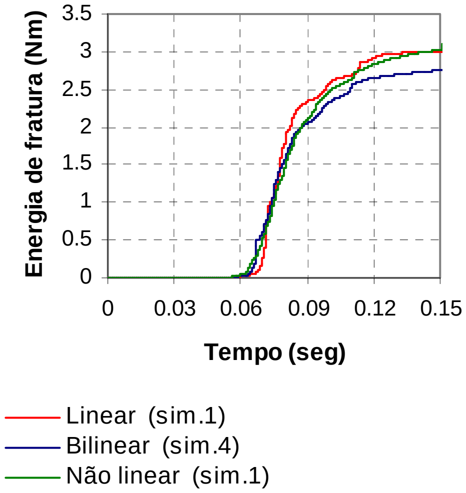
Figura 6.46 – Variação das energias em função do tempo. (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.



(a)

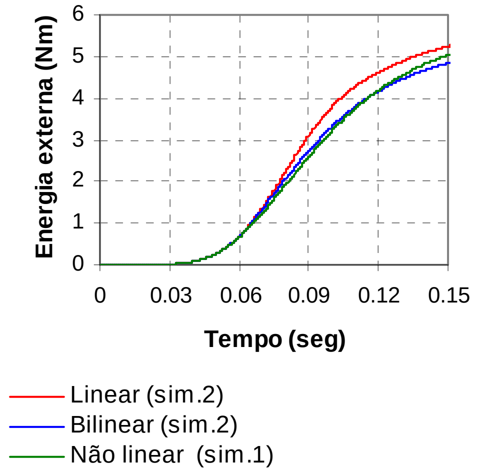


(b)

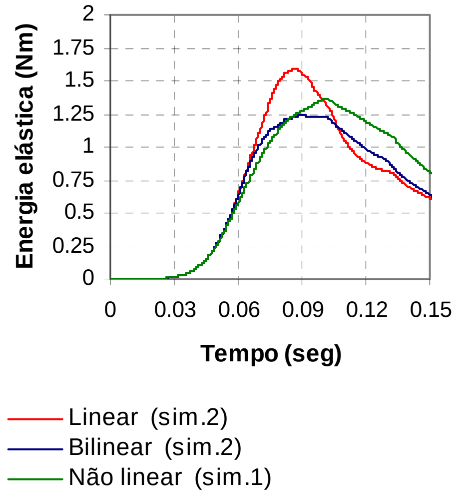


(c)

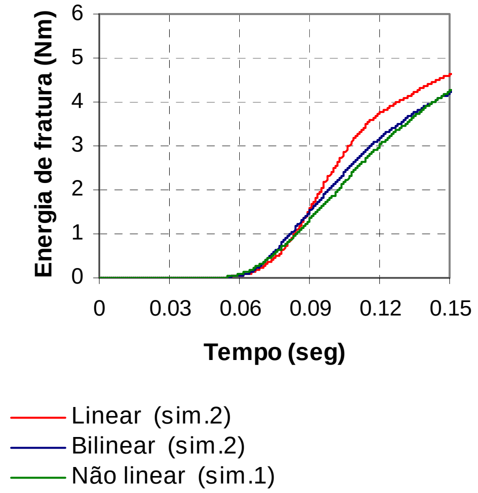
Figura 6.47 – Variação das energias em função do tempo – situação 1 (E = 3,0 10^{10} N/m^2). (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.48 – Variação das energias em função do tempo - situação 2 (ε_f três vezes maior). (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.

Para cada situação, observa-se uma boa concordância entre as energias obtidas pelos três modelos.

Verifica-se que o maior consumo de energia elástica e de fratura é atribuída ao modelo linear a partir do instante em que se inicia a propagação instável da fissura, Figura 6.46(b), (c); 6.47(b), (c) e 6.48(b), (c). Um comportamento de material mais frágil é observado neste modelo quando se dirige a atenção ao trecho pós-pico das Figuras 6.46 (b), 6.47 (b) e 6.48 (b).

A situação em que a deformação crítica, ε_f, é aumentada em aproximadamente 3 vezes daquela proposta inicialmente no item 6.2, apresenta curvas energéticas mais suaves e estáveis, Figura 6.48.

6.4.2.4 – Trajetória da fissura

A trajetória da fissura, também pode ser acompanhada em qualquer intervalo de tempo. As Figuras 6.49(a), (b) e (c) mostram o quadro de fissuração do modelo *strain-softening* linear analisado para as três situações mostradas nos resultados anteriores, em três estágios de tempo diferentes, um bem próximo do início do processo de fissuração, outro num tempo intermediário da propagação e, por último, em seu estágio final, respectivamente. A pré-fissura é modelada eliminando barras ao longo de seu comprimento. Ao longo do processo de propagação as barras rompidas são eliminadas do modelo e as barras danificadas são destacadas na cor vermelha.

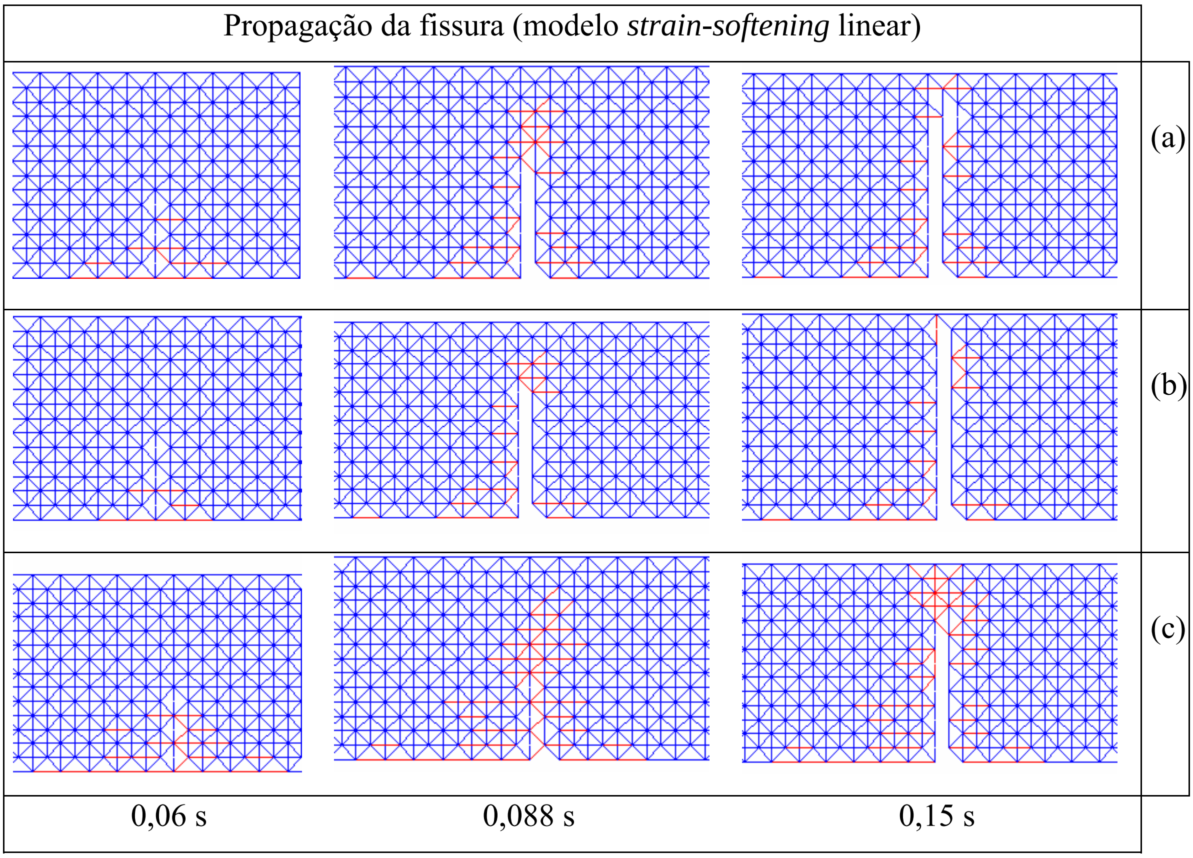


Figura 6.49: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* linear. (a) Viga 2 que mantém as propriedades definidas por Petersson (1981); (b) situação 1 ($E = 3{,}0\ 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$), e (c) situação 2 ($\varepsilon_f$ três vezes maior).

A alteração feita no valor do módulo de elasticidade do concreto pouco influenciou na trajetória da fissura, quando se comparam as Figuras 6.49(a) e 6.49(b). Uma pequena diferença no valor da deformação critica para a qual a força atinge seu valor máximo, ε_p, tinha sido verificada nos resultados anteriores, visto que este módulo, E, é inversamente proporcional a ε_p, ou seja, $E = f_t/\varepsilon_p$, onde f_t é a tensão de resistência à tração.

Comparando a Figura 6.49(c) com as demais, verifica-se que o aumento da deformação crítica, ε_f, retarda um pouco o processo de propagação da fissura. Observando a Figura 6.49(c), no tempo igual a 0,088 segundos, por exemplo, quase não se percebe a ruptura da peça, enquanto que nas outras situações a ruptura está bem definida.

As Figuras 6.50(a), (b) e (c) correspondem à esquematização da trajetória da fissura para o modelo *strain-softening* bi-linear, analisada para as três situações criadas, em três intervalos diferentes de tempo.

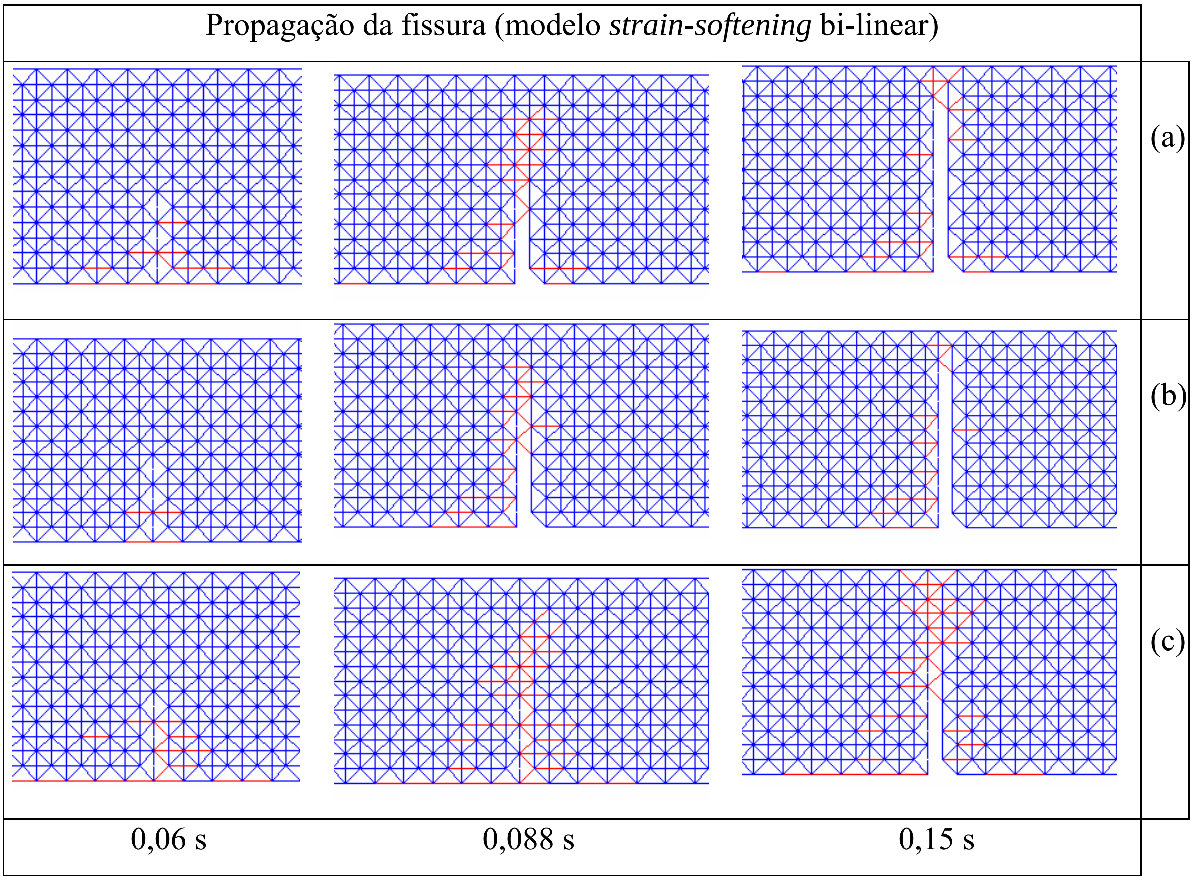


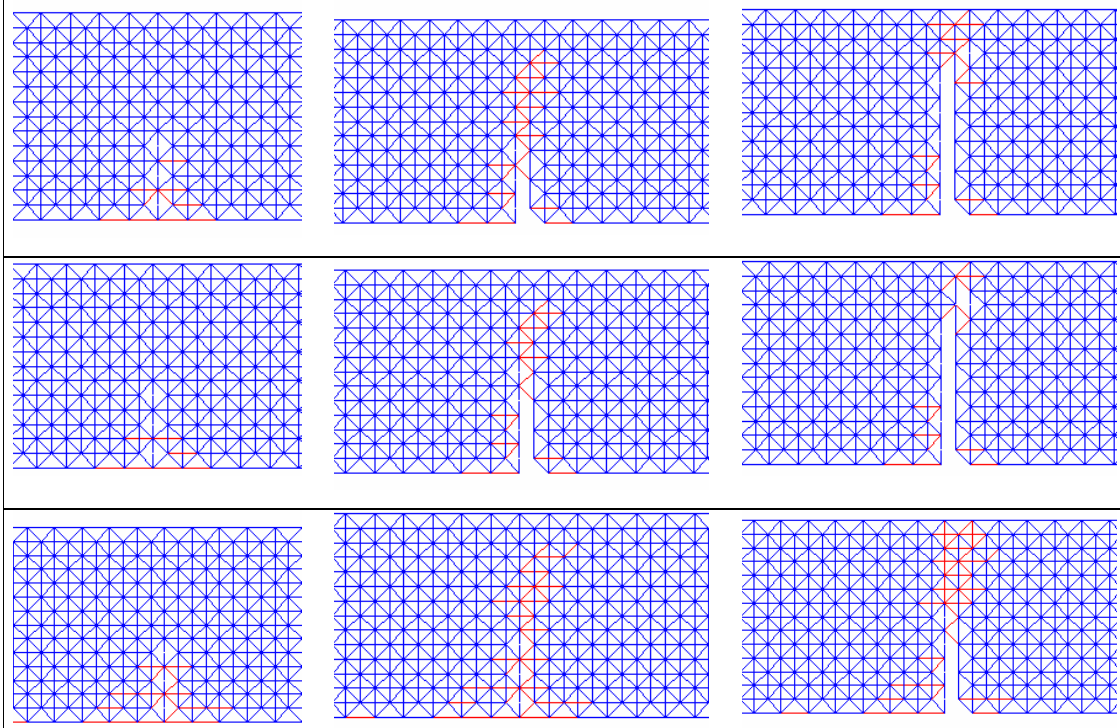
Figura 6.50: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* bi-linear. (a) Viga 2 que mantém as propriedades definidas por Petersson (1981); (b) situação 1 ($E = 3{,}0\ 10^{10}$ N/m^2), e (c) situação 2 (ε_f três vezes maior).

Novamente, as trajetórias da fissura observadas nas Figuras 6.50(a) e 6.50(b) são bastante parecidas. O modelo bi-linear, por possuir uma deformação crítica, ε_f, naturalmente maior que o modelo linear, item 6.2, apresenta, no instante 0,088 segundos, fissuras menores, quando comparada com as Figuras 6.49(a) e 6.49(b) no mesmo tempo avaliado.

A Figura 6.50(c) mostra uma fissura menor e uma zona de abrandamento do material maior quando se compara com os demais resultados. Como se verifica, o valor da deformação crítica, ε_f, influencia bastante na reprodução de um comportamento mais dúctil compatível com o material avaliado que é o concreto.

As Figuras 6.51(a), (b) e (c) mostram a trajetória da fissura do modelo *strain-softening* não linear, avaliado para as três situações criadas, em três intervalos de tempo distintos.

Propagação da fissura (modelo *strain-softening* não linear)



(a) (b) (c)

0,06 s — 0,088 s — 0,15 s

Figura 6.51: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* não linear. (a) Viga 2 que mantém as propriedades definidas por Petersson (1981); (b) situação 1 (E = 3,0 10^{10} N/m^2), e (c) situação 2 (ε_f três vezes maior).

Poucas diferenças se observam entre as Figuras 6.50(a) e 6.50(b), assim como foi verificado nos modelos anteriores.

A Figura 6.51(c), que ilustra a trajetória da fissura para o modelo *strain-softening* não linear, apresenta uma ruptura menor quando se compara com os outros modelos avaliados na mesma situação proposta, Figuras 6.49(c) e 6.50(c).

Verifica-se também, em todos os casos apresentados, a formação de uma zona de abrandamento na peça que começa a se formar próximo à pré-fissura na sua base inferior, no sentido de eliminar qualquer resistência de contato entre as faces da mesma. Ela se desenvolve em direção ao ponto de aplicação da carga e um prolongamento da fissura é observado no final. Este sentido de propagação é característico do modo I de fratura.

6.4.2.5 – Curvas da variação da velocidade com o tempo

Os gráficos a seguir acrescentam ao enfoque dinâmico do presente trabalho a variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo. A Figura 6.52 mostra estes resultados, para os três modelos *strain-softening* proposto, referentes à situação, na qual são mantidas as propriedades físicas e geométricas concebidas por Petersson (1981).

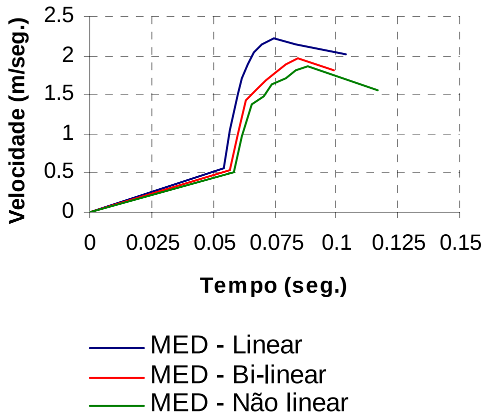


Figura 6.52: Variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo.

Observa-se uma propagação mais rápida da fissura quando se trata do modelo strain-softening linear, ao contrário do que ocorre no modelo não linear, cuja propagação se dá à velocidades menores. Novamente, os modelos que apresentam um valor de deformação crítica, ε_f, maior são os que apresentam menor velocidade de propagação da fissura.

Agora, para confirmar a influência do valor da deformação crítica, ε_f, nos resultados da velocidade, a situação 2 é analisada. Nesta situação, é aumentado o valor da deformação crítica, ε_f, da curva *strain-softening* dos três modelos propostos, o linear, o bi-linear e o não linear. A Figura 6.53 mostra os resultados referentes à variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo.

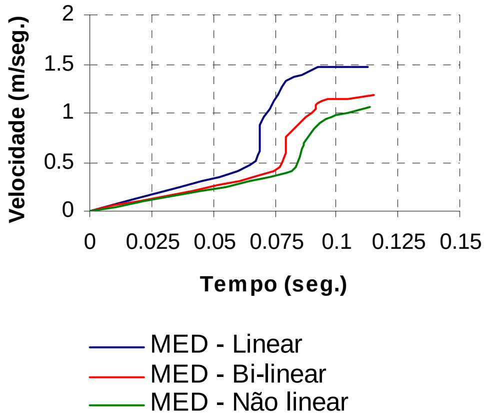


Figura 6.53: Variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo - situação 2 (ε_f três vezes maior).

Como se observa na Figura 6.53, o aumento da deformação crítica, ε_f, contribui para suavizar a variação da velocidade dos modelos *strain-softening*. O gráfico da velocidade apresenta a mesma configuração obtida anteriormente, na qual o modelo *strain-softening* linear alcança valores mais altos de velocidade, quando comparados com os demais modelos.

6.4.3 – Viga de Elice et al (2002)

A peça, aqui analisada, foi utilizada por Elices et al (2002) para analisar o modo misto de fratura do concreto, o modo I e II. Os autores usaram um modelo coesivo para realizar uma simulação numérica, além de realizar experimentos laboratoriais. Dois testes foram realizados na peça, um deles chamado de modo misto de carregamento proporcional, e o outro, não proporcional. O teste tipo 1 corresponde a uma condição de deslocamento livre no ponto B (K = 0), onde nenhuma carga é aplicada, Figura 6.54. No tipo 2, o deslocamento no ponto B é impedido (K (∞), resultando numa aplicação de um carregamento não proporcional neste ponto. “K” indica a rigidez elástica do apoio fixado no ponto B. As vigas são assimetricamente carregadas para forçar que a fissura se propague sob o modo misto de fratura.

A Figura 6.54 especifica as dimensões da peça, bem como suas condições de contorno e forças aplicadas, da forma em que se encontra no trabalho de Elices et al (2002). Vale ressaltar que todas as medidas são dadas em metros.

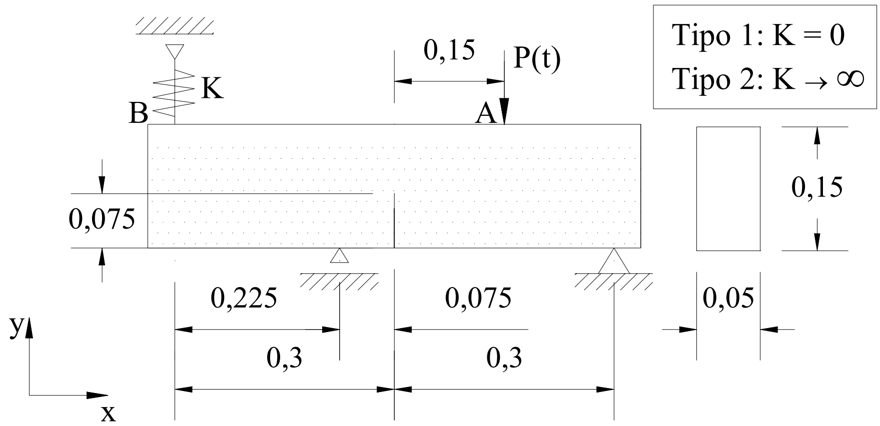


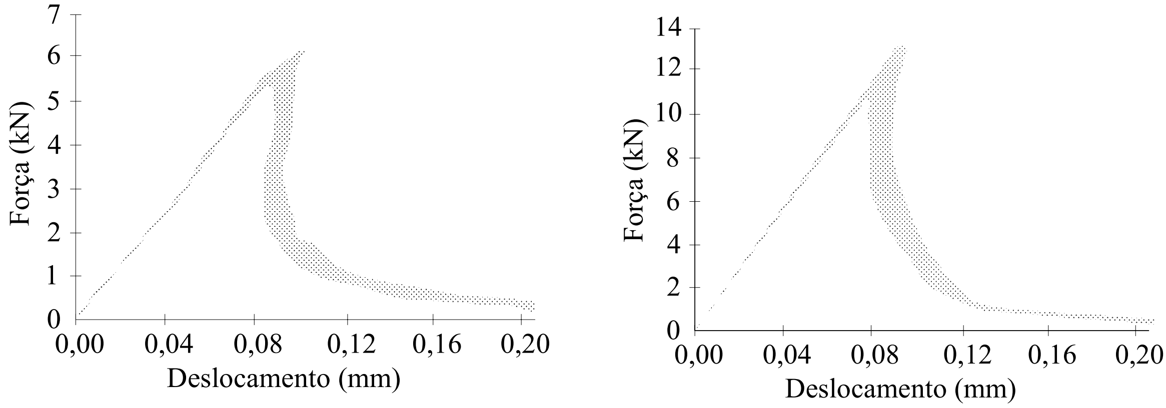
Figura 6.54: Esquema da viga ensaiada por Elices et al (2002).

Valores da resistência à tração, f_t, da energia de fratura, G_f, e das aberturas da fissura, necessários para compor a curva bi-linear *strain-softening*, foram independentemente medidos por Elices et al (2002), através de ensaios de flexão em três pontos e ensaios de corte de cilindros e estão listados na Tabela 6.3. A formulação utilizada foi aquela desenvolvida por Guinea et al (1994) mostrada no capítulo 5, item 5.2.2.

Tabela 6.3: Propriedades físicas do material e parâmetros adotados por Elices et al (2002).

Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade, E	$3{,}84 \cdot 10^{10}$ N/m^2 $\pm 0{,}05 \cdot 10^{10}$ N/m^2
Resistência à tração, f_t	$3{,}0 \cdot 10^{6}$ N/m^2 $\pm 0{,}1 \cdot 10^{6}$ N/m^2
Energia específica de fratura, G_f	69 N/m $\pm$ 4 N/m
Coeficiente de Poisson, ν	0,18

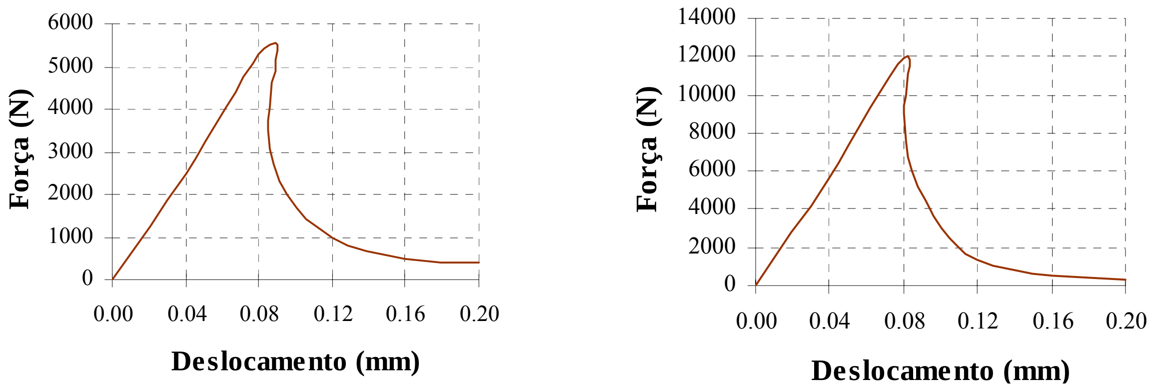
A Figura 6.55 mostra os resultados experimentais encontrados por Elices et al (2002). A Figura 6.55(a) ilustra os resultados correspondentes ao teste tipo 1, e a Figura 6.55(b) gráfica os resultados do teste tipo 2.



(a) (b)

Figura 6.55: Curva força–deslocamento no ponto de aplicação da carga. Resultados experimentais de Elices et al, 2002. (a) Teste tipo 1 e (b) Teste tipo 2.

Uma média dos resultados experimentais de Elices et al (2002) foi tirada com o objetivo de reproduzir um gráfico simplificado para, assim, conduzir com facilidade e clareza, um estudo comparativo com os resultados obtidos pelo MED. Desta forma, as Figuras 6.56 (a) e (b) apresentam os gráficos simplificados dos resultados experimentais de Elices et al (2002) correspondente ao teste do tipo 1 e 2, respectivamente.



(a) (b)

Figura 6.56: Curva força–deslocamento no ponto de aplicação da carga. Média dos resultados experimentais de Elices et al, 2002. (a) Teste tipo 1 e (b) Teste tipo 2.

6.4.3.1 – Simulação numérica utilizando o MED

A Figura 6.57 mostra a malha de elementos discretos, com 48 x 12 x 4 módulos de arestas iguais a 0,0125 m nas direções *x*, *y* e *z*, respectivamente.

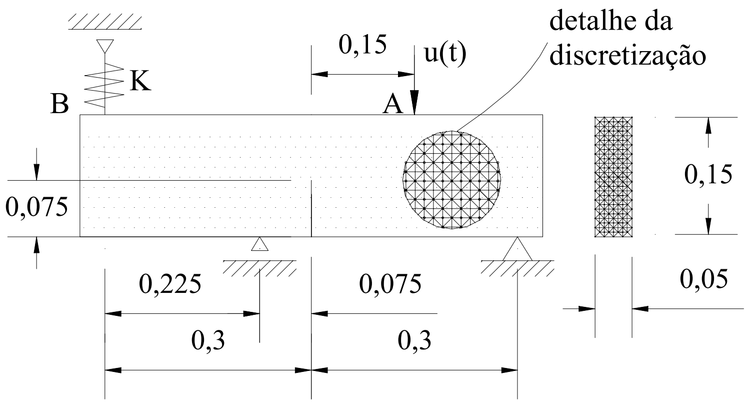
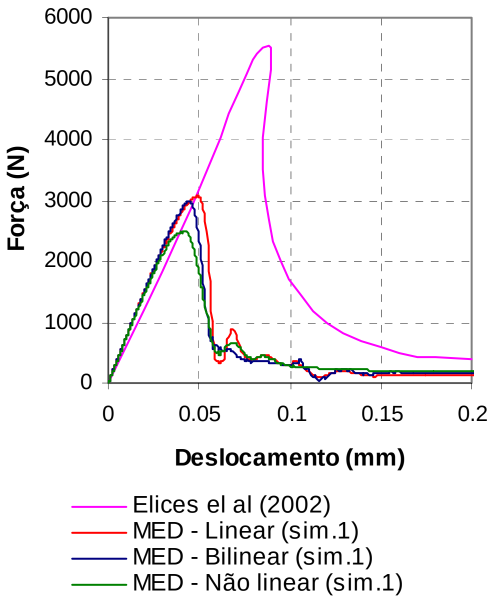


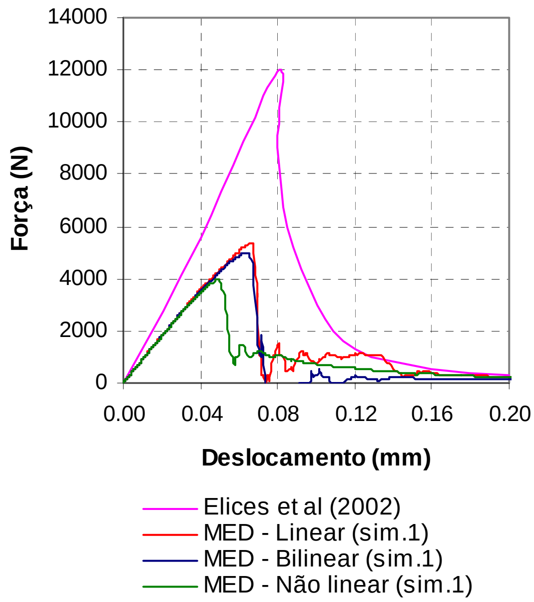
Figura 6.57: Malha de discretização de elementos discretos.

Foram aplicados incrementos de deslocamento, conforme mostra a Figura 6.57, com uma velocidade final de $\dot{u}_f = 0{,}01 \quad m/s$.

As propriedades físicas indicadas por Elices et al (2002) foram inicialmente aplicadas para os dois tipos de teste, ao se utilizar o MED. No entanto, os resultados não se ajustaram como deveriam. A Figura 6.58 ilustra os resultados obtidos referentes à primeira simulação das cinco simulações realizadas. A Figura 6.58(a) corresponde ao teste tipo 1, no qual o ponto B da Figura 6.57 é livre, e a Figura 6.58(b), ao teste tipo 2, no qual o ponto B é impedido. As curvas obtidas pelo MED se referem aos três modelos *strain-softening* aplicados ao concreto.



(a)



(b)

Figura 6.58: Curva força-deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear. (a) teste tipo 1 e (b) teste tipo 2.

Observa-se, na Figura 6.58(a), que os resultados obtidos pelo MED, apesar de apresentar o trecho quase linear da curva coincidente com o de Elices et al (2002), a energia gasta no processo de fratura é consideravelmente menor, além do trecho pós-pico ser extremamente diferentes entre si. Os resultados referentes ao teste tipo 2, obtidos pelo MED, não se parecem nada com os obtidos por Elices et al (2002), Figura 6.58(b). A quantidade desta energia de fratura pode ser estimada pela área abaixo das curvas plotadas na Figura 6.58.

Desta forma, opta-se por adotar um valor para a energia de fratura, G_f, diferente do utilizado por Elices et al (2002), de valor igual a 200 N/m no intuito de se conseguir um melhor ajuste dos resultados. Para se fazer o estudo da influência do valor da deformação crítica, ε_f, sobre os resultados, escolhe-se uma energia fratura, G_f, de 150 N/m e uma deformação crítica de quase 3 vezes a proposta no item 6.2.

Na Tabela 6.4 são encontrados os valores das propriedades físicas adotadas aqui para simular numericamente o ensaio.

Tabela 6.4: Propriedades físicas do material e parâmetros adotados para gerar o modelo teórico da viga de Elices et al (2002).

Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade, *E*	3,8 10^{10} N/m^2
Resistência à tração, f_t	3,0 10^6 N/m^2
Energia específica de fratura, G_f	150 e 200 N/m
Massa Específica, ρ	2400 kg/m^3
Coeficiente de Poisson, ν	0,18
Razão de Amortecimento, ξ	5%
Coeficiente de Variação, CVA *	0,10

* O coeficiente de variação, CVA, é considerado para representar a heterogeneidade do material. Os parâmetros que variam são a energia de fratura, G_f, o módulo de elasticidade, *E*, e a massa específica, ρ. Esta consideração se baseia no trabalho de Rios (2002).

Toma-se a liberdade de adotar uma energia de fratura, G_f, diferente da utilizada por Elices et al (2002), por ser este um parâmetro difícil de ser medido e, portanto, sujeito a erros. O valor de 69 N/m fornece resultados distantes do conseguido por Elices et al (2002), como se observou na Figura 6.58.

Assim, os itens 6.4.3.2 e 6.4.3.3 apresentam os resultados do teste tipo 1 e 2, respectivamente, no qual se adota as energias de fratura, G_f, especificadas na Tabela 6.4.

6.4.3.2 – Teste Tipo 1 (K = 0). Viga de Elices et al (2002)

O teste tipo 1 corresponde à viga esquematizada na Figura 6.54, cujo ponto B tem a condição de deslocamento livre, ou seja, a rigidez elástica do apoio fixado no ponto B é nula (K = 0).

- *Curvas força-deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga e curvas da variação da força ao longo do tempo:*

Os resultados referentes à curva força–deslocamento no ponto de aplicação da carga, obtidos pelo método dos elementos discretos, MED, para os três modelos *strain-softening* propostos, são comparados com a média dos resultados experimentais encontrados pelo referido autor.

As Figuras 6.59, 6.60 e 6.61 mostram as curvas força– deslocamento no ponto de aplicação da carga. Todas as simulações realizadas pelo MED se encontram no primeiro gráfico das figuras, enquanto que no segundo, apenas a primeira é utilizada para a análise comparativa. A energia de fratura, G_f, adotada foi de 200 N/m.

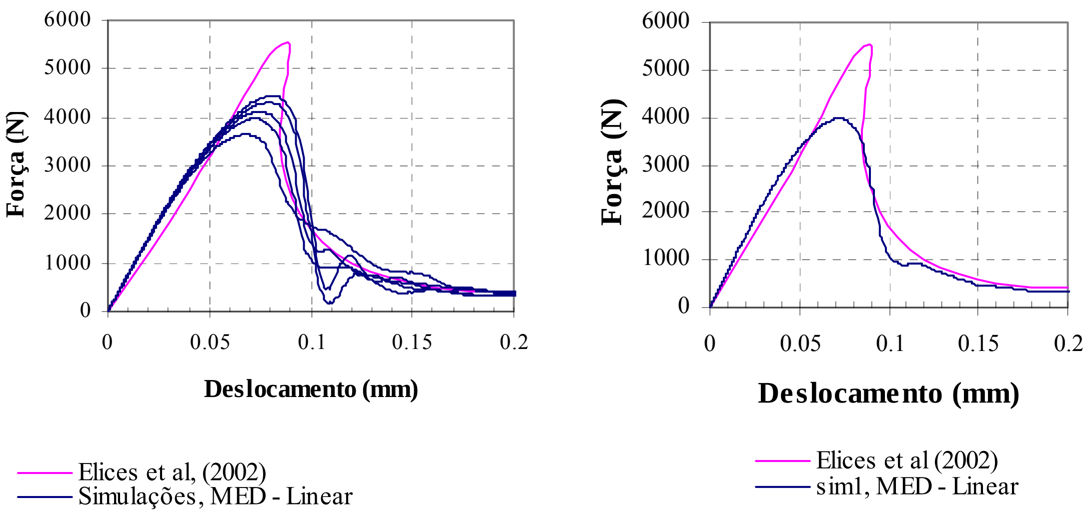


Figura 6.59: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear. Teste tipo 1. (G_f = 200 N/m).

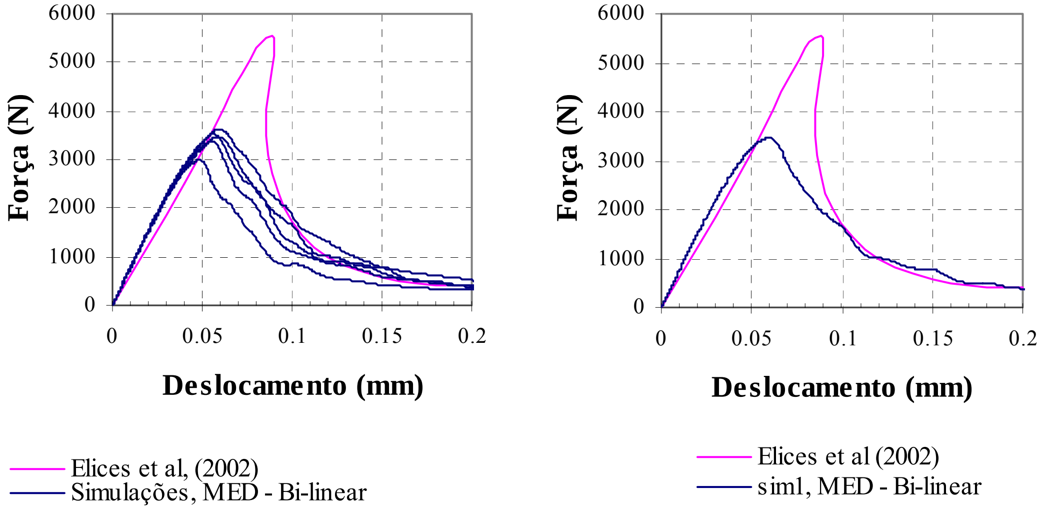


Figura 6.60: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* bi-linear. Teste tipo 1. (G_f = 200 N/m).

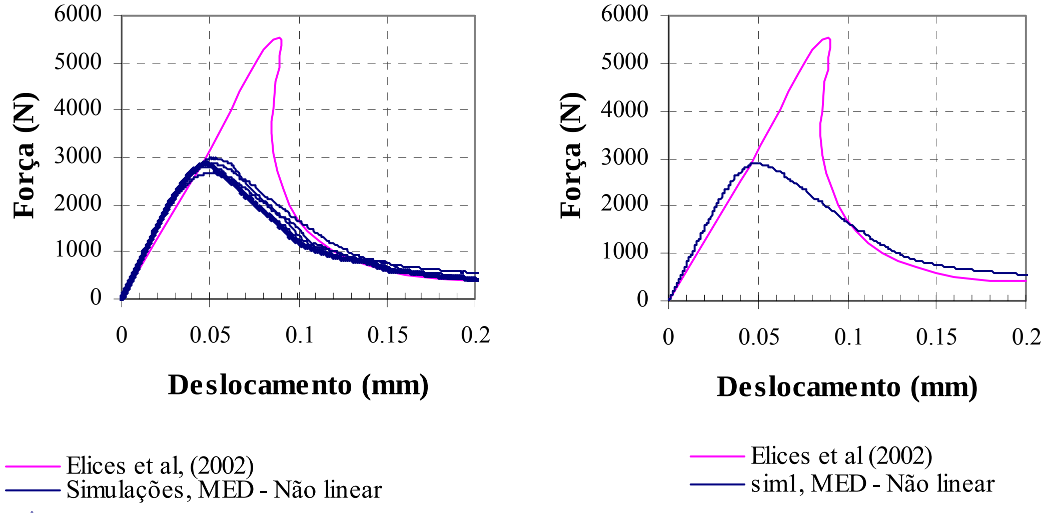


Figura 6.61: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* não linear. Teste tipo 1. (G_f = 200 N/m).

De acordo com as figuras mostradas, o modelo *strain-softening* linear apresenta resultados que melhor se aproximam dos resultados de Elices et al (2002). Nos modelos mais elaborados, tais como o modelo bi-linear e não linear, não se obtém um bom ajuste dos resultados, como se observa nos casos das vigas de Petersson (1981) ensaiadas à flexão em três pontos (item 6.3.2 e 6.3.3). Neste caso, o aumento da deformação crítica, ε_f, não colaborou para uma melhor representação do comportamento do material.

Observando-se a configuração da peça, o apoio entre as extremidades da peça, torna-a mais rígida e menos dúctil comparada com uma viga simplesmente apoiada de mesma geometria e características físicas. A capacidade de fletir da peça é menor, e por isso os resultados experimentais obtidos por Elices et al (2002), no que diz respeito à curva força-deslocamento, apresentam um trecho pós-pico mais inclinado. Levando isto em consideração, uma representação mais dúctil da peça, foge do comportamento real da viga na situação em que se encontra. Portanto, as conclusões tiradas por Rots et al, (1985); Ali, (1996); Gopalaratnam e Ye, (1991) e Guinea et al (1994), para uma peça à flexão em três pontos, no que se refere ao melhor ajuste do modelo *strain-softening* de maior abertura crítica da fissura, não se aplicam às vigas que apresentam as condições de contorno semelhantes a este caso apresentado.

A Figura 6.62 apresenta o gráfico que ilustra a variação da força no ponto de aplicação da carga ao longo do tempo. É um resultado que ajuda a entender um pouco mais o processo de propagação da fissura. São mostradas as primeiras simulações de cada modelo *strain-softening* proposto aqui.

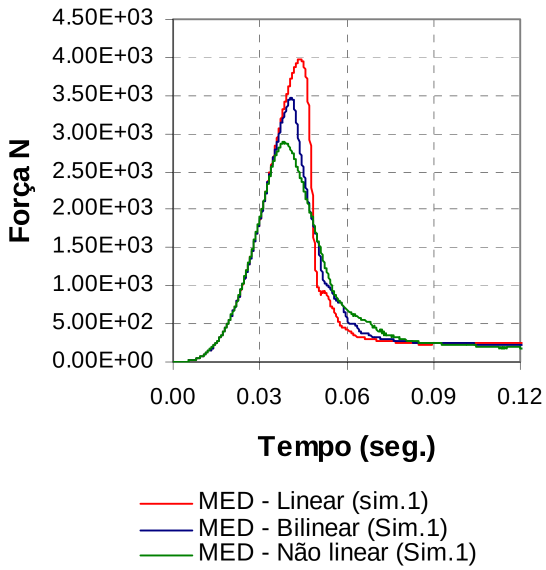
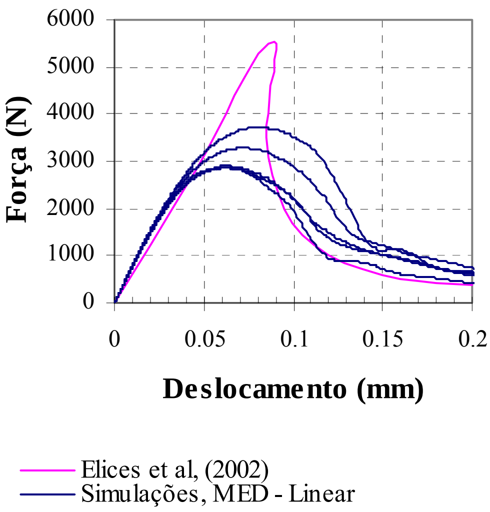


Figura 6.62: Curva força – tempo. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening*. Teste tipo 1. (G_f = 200 N/m).

Nota-se que os três modelos *strain-softening* apresentam curvas bem próximas uma das outras e o instante inicial da propagação de fissura se confundem num tempo de aproximadamente 0,04 segundos.

Foi visto que o modelo que apresenta uma maior deformação crítica, ε_f, ou seja, o modelo *strain-softening* não linear, apresenta resultados mais distantes dos obtidos por Elices et al (2002). Apesar disto, experimentou-se, numericamente, uma segunda situação, cuja deformação crítica, ε_f, é três vezes maior que a proposta para os modelos *strain-softening* descritos no item 6.2. Neste caso utiliza-se uma energia de fratura, G_f, de 150 N/m.

As Figuras 6.63, 6.64 e 6.65 mostram as curvas força–deslocamento no ponto de aplicação da carga para essa situação. Foram, também, realizadas cinco simulações para as análises feitas com o método dos elementos discretos, MED, que estão ilustradas no primeiro gráfico de cada figura. Apenas uma das simulações é escolhida para efeito de comparação com os resultados de Elices et al (2002) e está sendo mostrada no segundo gráfico das Figuras 6.63, 6.64 e 6.65.



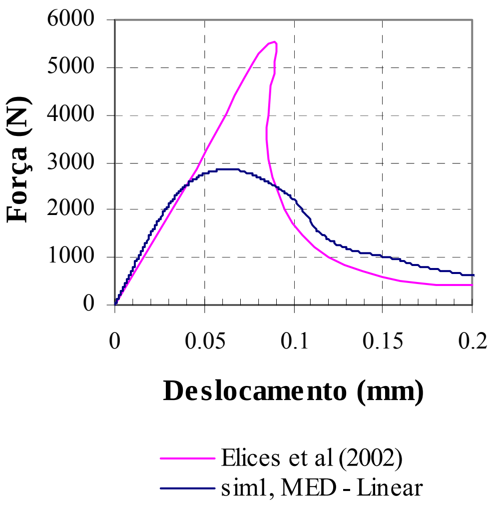


Figura 6.63: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear. Teste tipo 1. (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

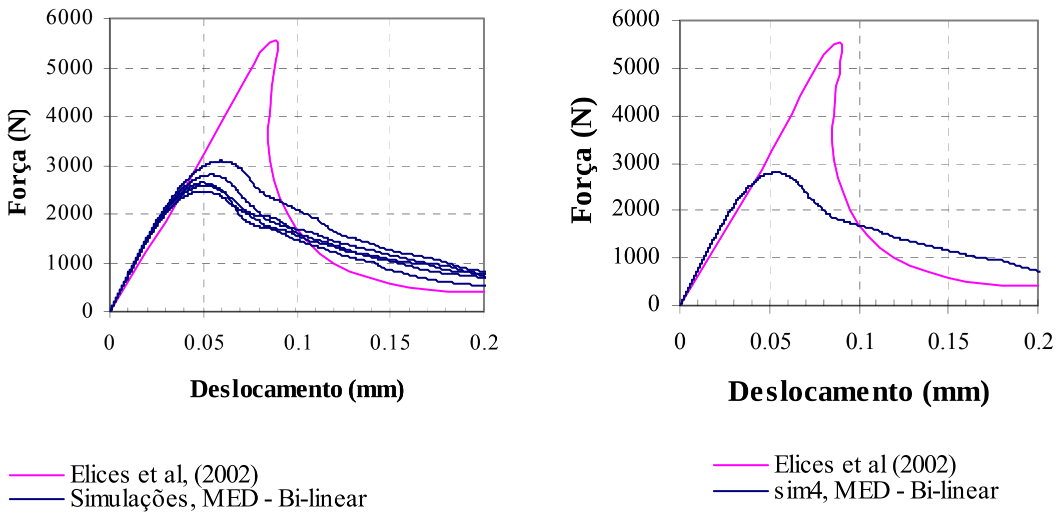


Figura 6.64: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* bi-linear. Teste tipo 1. (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

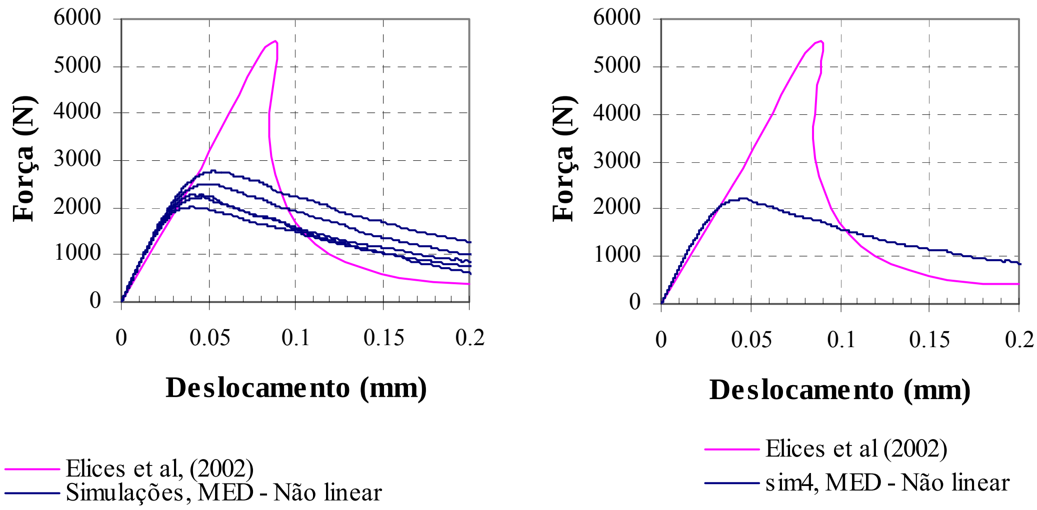


Figura 6.65: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* não linear. Teste tipo 1. (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

Observa-se que, os resultados obtidos pelo MED apresentam trechos pós-pico bem mais suaves, como se a peça tivesse um comportamento mais dúctil. O recurso de se aumentar a deformação crítica, ε_f, é válido quando a viga tem comportamento mais flexível como é o caso de uma viga simplesmente apoiada nas suas extremidades. Não é o caso das vigas de Elices et al (2002), cuja capacidade de fletir é menor devido à configuração geométrica, ou seja, as condições de contorno destas peças determina um comportamento menos dúctil, e por isso, escolher um modelo *strain-softening* de maior deformação crítica não é aconselhável.

Logo, para o teste tipo 1, o modelo *strain-softening* linear de menor deformação crítica, ε_f, cuja energia de fratura, G_f, considerada foi de 200 N/m, apresentou resultados que melhor se aproximam dos de Elices et al (2002).

A Figura 6.66 mostra uma configuração semelhante às conseguidas até agora, cujos instantes de início de propagação instável da fissura apresentam valores bastante próximos para os três modelos analisados, neste caso, na ordem de 0,04 segundos.

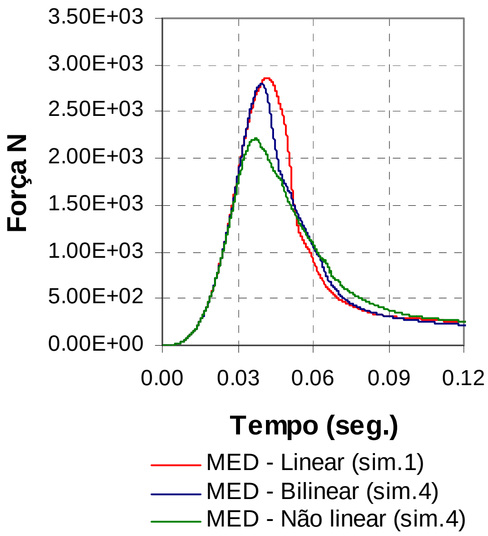


Figura 6.66: Curvas força–tempo. Resultados da análise do MED para os três modelos *strain-softening*. Teste tipo 1. (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

Como visto até agora, o modelo *strain-softening* linear apresenta um consumo maior de energia, isto se observa na Figura 6.66 e nos resultados anteriormente mostrados. A maior área medida abaixo das curvas, referente ao modelo *strain-softening* linear, indica esse consumo maior de energia. No entanto, através dos diagramas que representam a variação das energias com o tempo, esta conclusão pode ser tomada de forma mais segura e clara.

– *Curvas das energias gastas no processo de propagação da fissura:*

Abaixo são ilustradas as variações das energias gastas ao longo do tempo. A Figura 6.67 mostra os resultados para a situação em que se utilizou uma energia de fratura, G_f, igual a 200 N/m. A Figura 6.68 se refere à situação em que a deformação crítica, ε_f, é aumentada em quase três vezes daquela proposta no item 6.2 e a energia de fratura, G_f, é de 150 N/m. Ambas as figuras ilustram os resultados dos três modelos *strain-softening* aplicados aqui ao concreto.

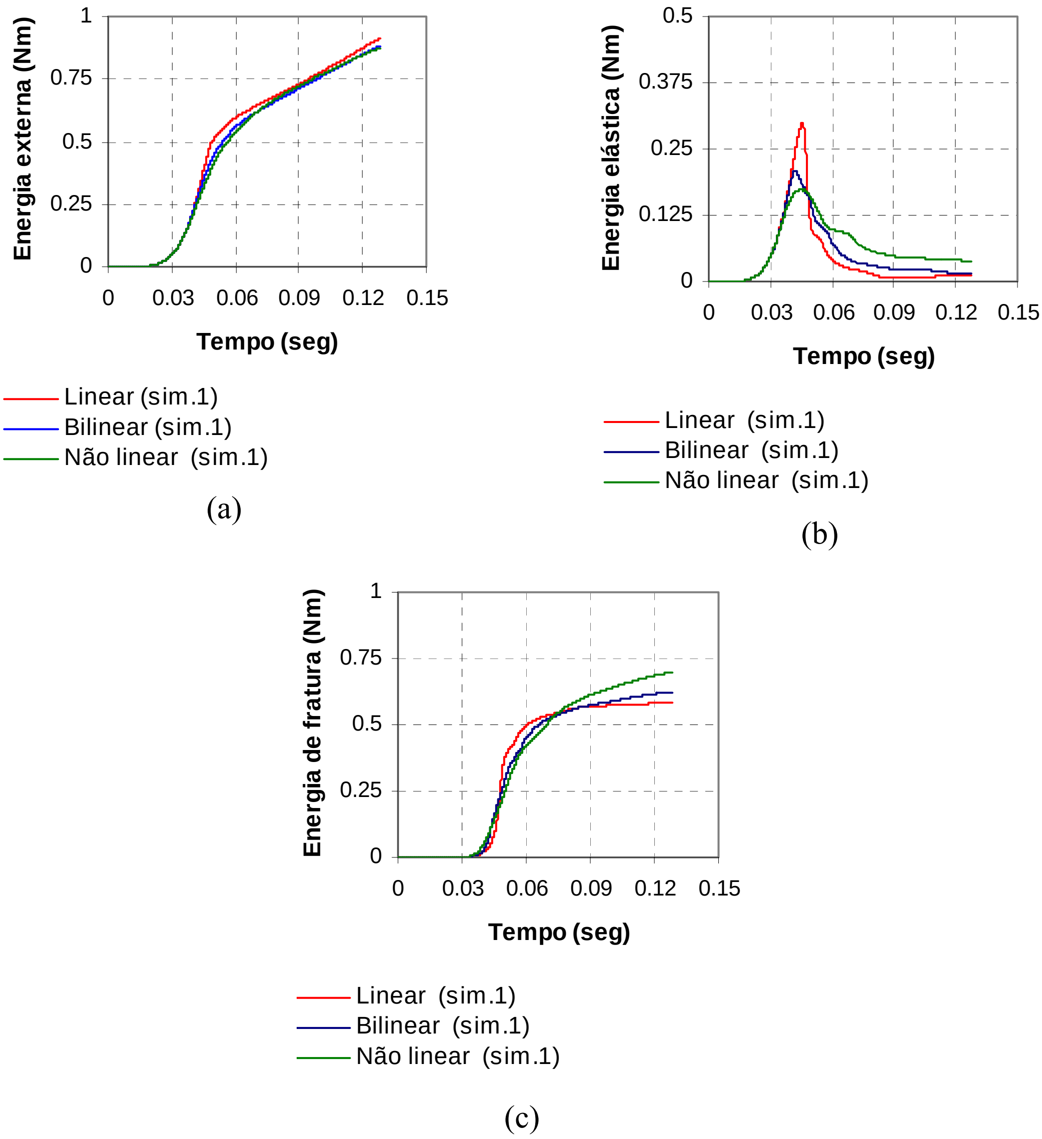
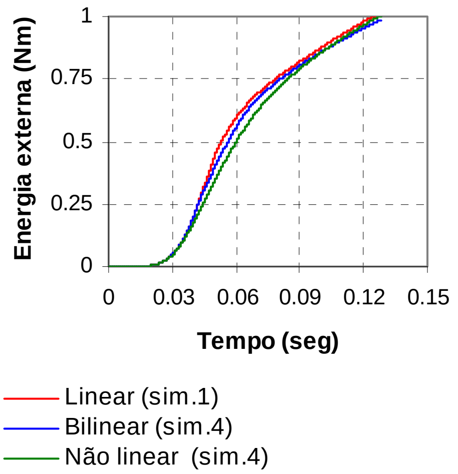
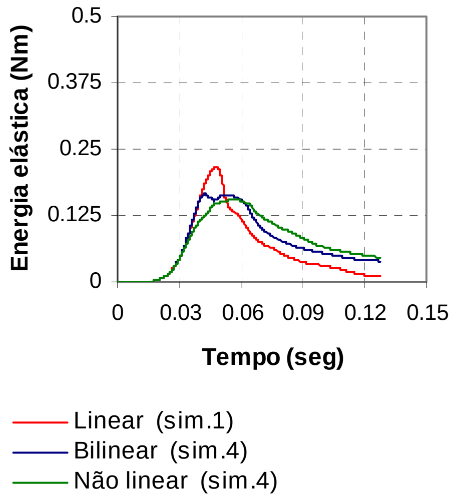


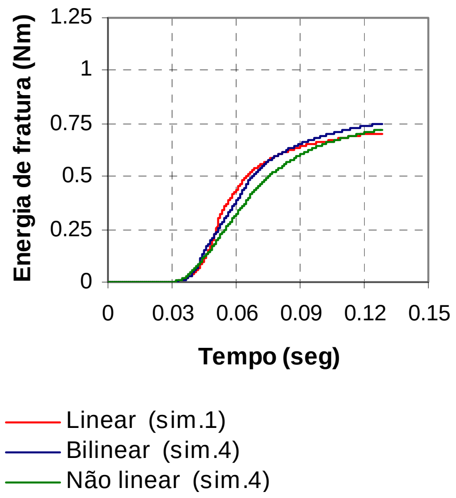
Figura 6.67 – Variação das energias em função do tempo – Teste tipo 1 (G_f = 200 N/m). (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.68 – Variação das energias em função do tempo – Teste tipo 1. (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior). (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.

Os gráficos apresentados representam satisfatoriamente a variação das energias em função do tempo para cada modelo *strain-softening* utilizado.

As análises realizadas a partir dos três diagramas constitutivos indicam o mesmo consumo de energia antes de ser iniciado o processo de propagação da fissura, a partir deste momento, a análise com o modelo linear indica um gasto maior de energia, Figura 6.67 e 6.68. Isto acontece porque a propagação da fissura ocorre mais rapidamente, como se o material tivesse um comportamento mais frágil que aqueles apresentados pelos demais modelos *strain-softening* aqui proposto.

Mas uma vez, as curvas energéticas das simulações de maior deformação crítica, ε_f, se apresentam mais suaves. No entanto, ao contrário do que ocorre nos exemplos anteriores, estas simulações não são as que melhor reproduzem os resultados de Elices et al (2002), devido à configuração da peça, como foi comentado anteriormente. Neste caso, a consideração de uma menor deformação crítica na curva *strain-softening* favorece resultados mais satisfatórios, como é o caso do modelo *strain-softening* linear.

- *Trajetória da fissura:*

As Figuras 6.69(a) e (b) esquematizam a trajetória da fissura para o modelo *strain-softening* linear, para as duas situações adotadas. Na primeira, a energia de fratura, G_f, considerada é de 200 N/m, na segunda, a energia de fratura, G_f, é de 150 N/m e a deformação crítica, ε_f, é três vezes maior que a proposta no item 6.2. A trajetória é descrita em quatro estágios de tempo diferentes, retratando o processo do início ao fim da propagação. As figuras a seguir mostram a região entre os dois apoios.

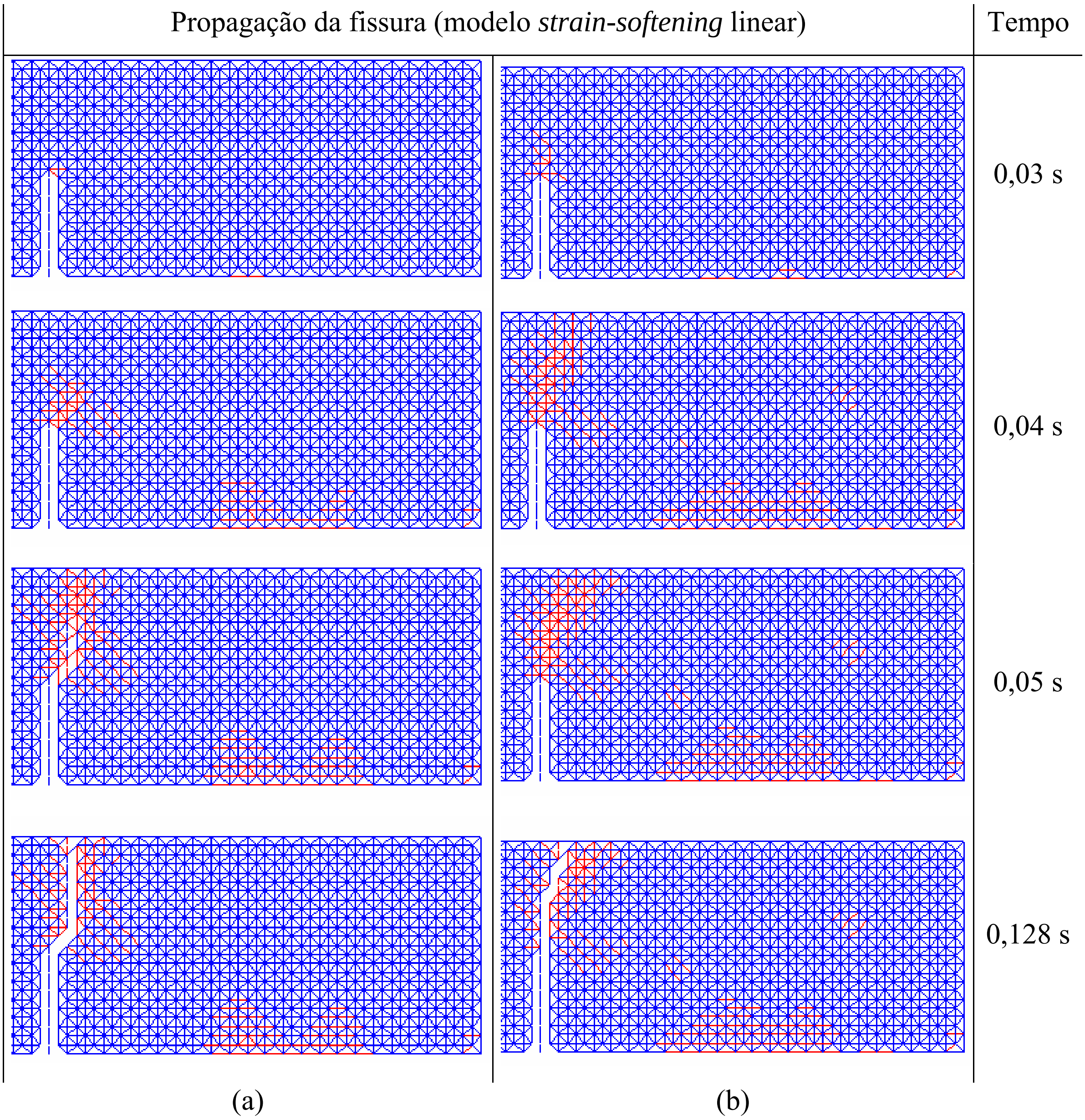
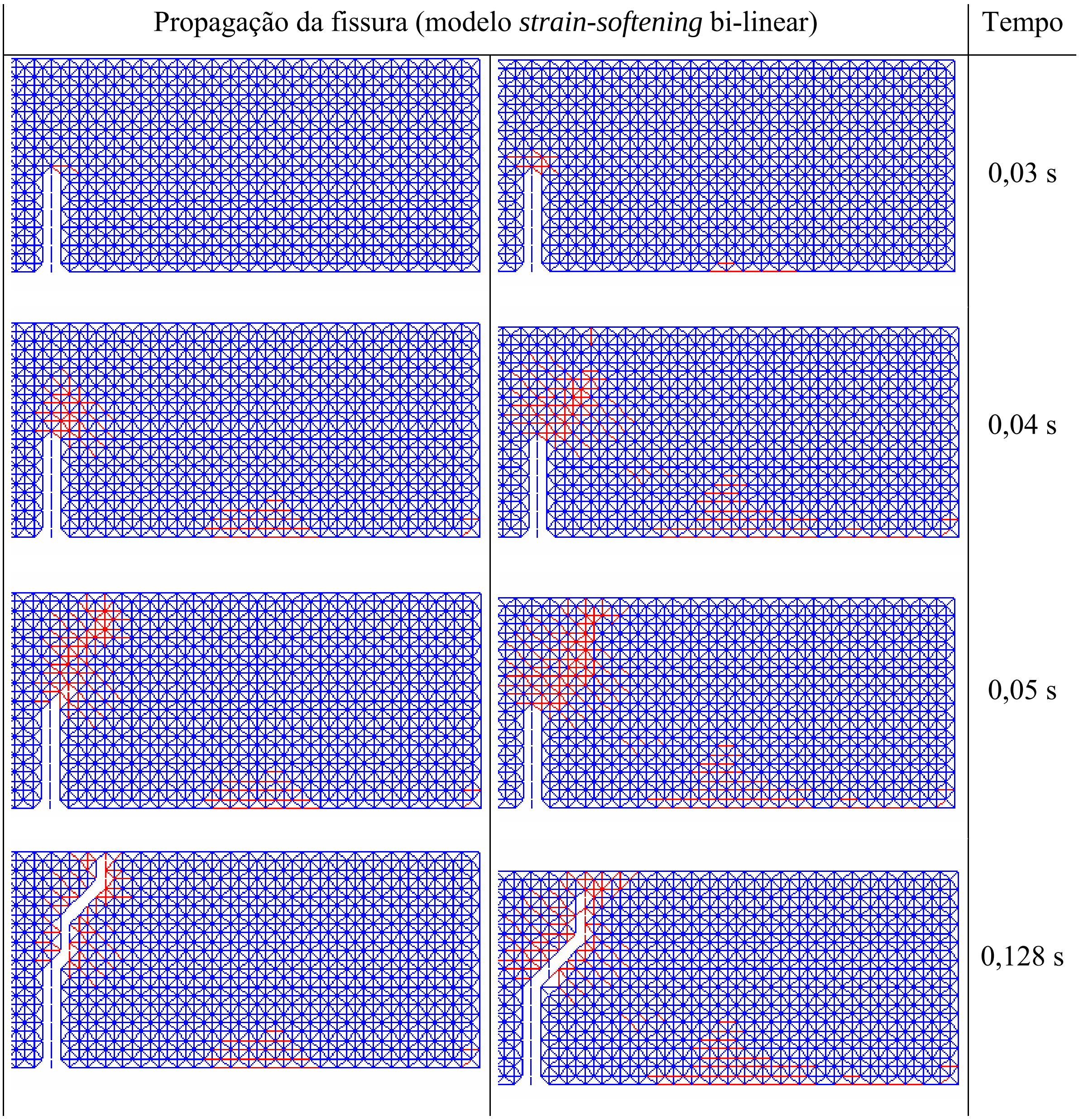


Figura 6.69: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* linear – Teste tipo1. (a) situação 1 - (G_f = 200 N/m); (b) situação 2 - (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

Analisando a Figura 6.69(a), nota-se que no primeiro instante exposto (0,03 segundos), uma certa fragilidade começa a se formar no banzo inferior da peça, na linha de aplicação da carga, e na extremidade da pré-fissura, e se estende na vertical. No segundo instante, ou seja, no tempo de 0,04 segundos, já é possível se verificar uma fragilidade na região do apoio da extremidade da peça. No tempo de 0,05 segundos, percebe-se a propagação da fissura com uma leve inclinação na direção da aplicação da carga, enquanto a zona frágil entre a pré-fissura e o apoio praticamente se estabiliza.

A situação mostrada na Figura 6.69(b) é semelhante a anterior. No entanto, como o comportamento do material é mais dúctil nos casos em que o modelo *strain-softening* apresenta uma deformação crítica, ε_f, maior, percebe-se que a propagação da fissura demora a acontecer.

As Figuras 6.70(a) e (b) mostram a trajetória da fissura quando se utiliza o modelo *strain-softening* bi-linear para as duas situações criadas.



(a) (b)

Figura 6.70: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* bi-linear – Teste tipo1. (a) situação 1 - (G_f = 200 N/m); (b) situação 2 - (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

Comparando-se os resultados obtidos com o modelo bi-linear, Figuras 6.70(a) e 6.70(b), e o linear, Figuras 6.69(a) e 6.69(b), observa-se que no modelo bi-linear, cuja deformação crítica, ε_f, é maior, o processo de ruptura é mais lento e o comprimento final da fissura formada é menor.

Novamente, percebe-se uma zona fragilizada na Figura 6.70(b) entre a pré-fissura e o apoio da extremidade da peça.

Finalmente, as Figuras 6.71(a) e (b) desenham a trajetória da fissura para o modelo *strain-softening* não linear.

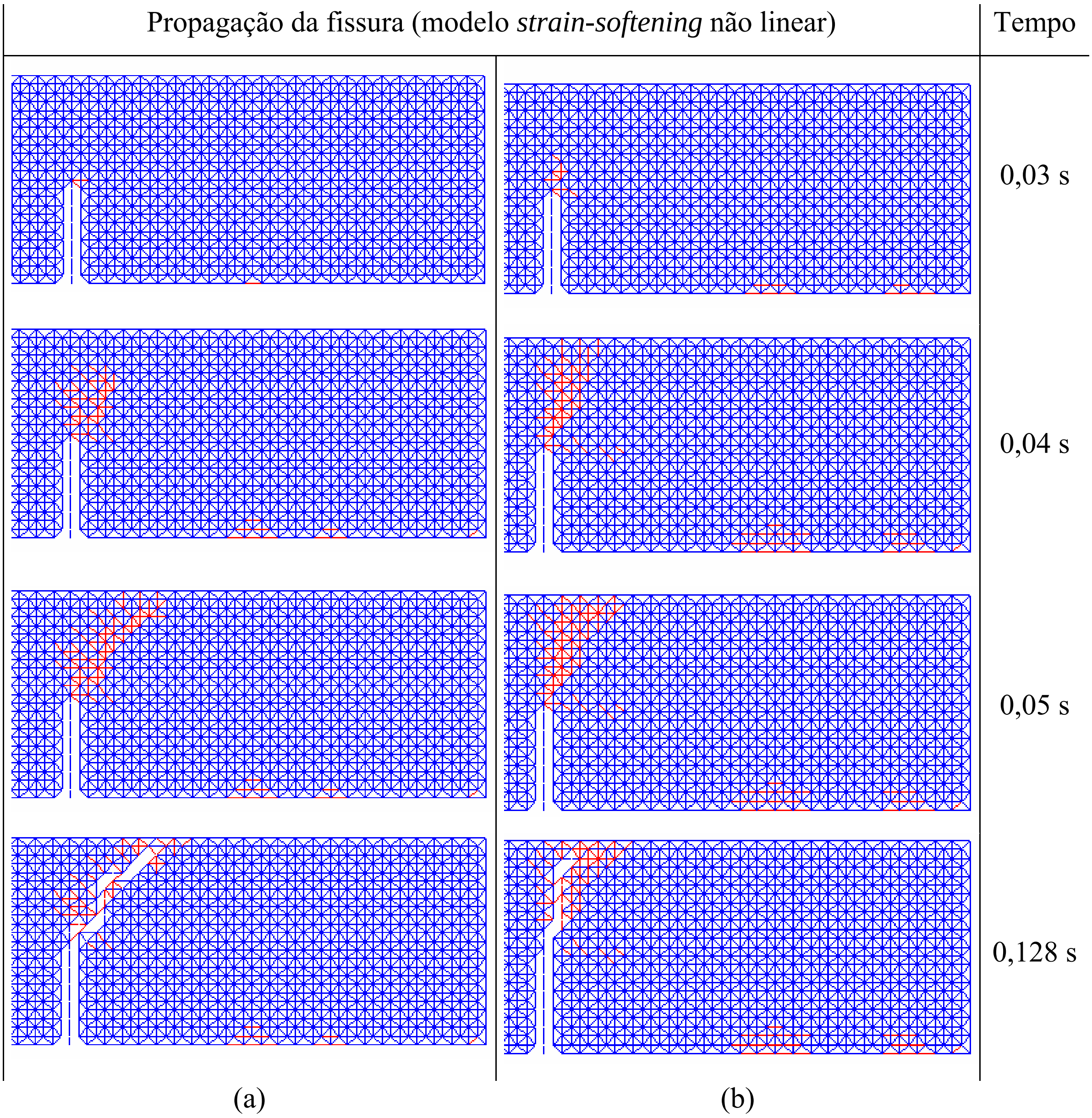


Figura 6.71: Propagação da fissura. Modelo *strain-softening* não linear – Teste tipo1. (a) situação 1 - (G_f = 200 N/m); (b) situação 2 - (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

A ruptura do último caso mostrado, Figura 6.71(b), ocorre de forma mais lenta e atinge comprimento menor quando comparado com os demais casos. Isto se deve ao comportamento mais dúctil reproduzido pelo modelo que apresenta maior valor da deformação crítica, ε_f,.

Em todos os casos, a zona de fragilidade se inicia na extremidade da fissura e se prolonga na vertical com uma leve inclinação na direção de aplicação da carga. A trajetória é predominantemente vertical, o que caracteriza uma propagação no modo I de fissuração.

– Curvas da variação da velocidade com o tempo:

A variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo complementa o estudo da trajetória da fissura no sentido de se compreender melhor esse processo dinâmico. Os resultados, para os três modelos *strain-softening* proposto, referente ao caso, no qual se utiliza um valor de 200 N/m para energia de fratura estão ilustrados na Figura 6.72.

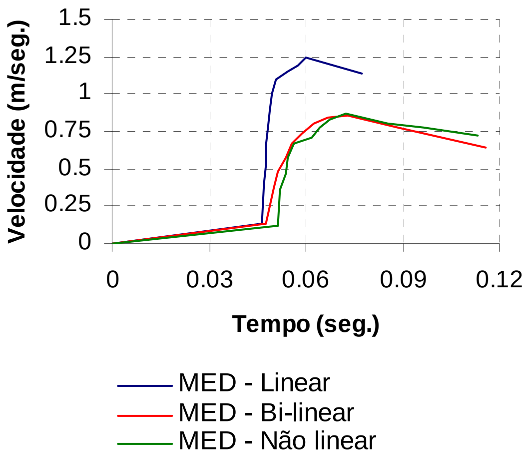


Figura 6.72: Variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo. Teste tipo 1 (G_f = 200 N/m).

O modelo *strain-softening* linear, novamente apresenta velocidades de propagação da fissura maior que os demais modelos por apresentar um valor deformação crítica, ε_f, menor. Neste caso o material se comporta de forma mais frágil, como já foi discutido anteriormente.

O objetivo de se aumentar a deformação crítica, ε_f, é poder avaliar sua influência nos resultados obtidos. Desta forma, a Figura 6.73 mostra os resultados referentes a variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo para o caso em que se considera uma energia de fratura, G_f, igual a 150 N/m e uma deformação crítica, ε_f, três vezes maior que a proposta.

.

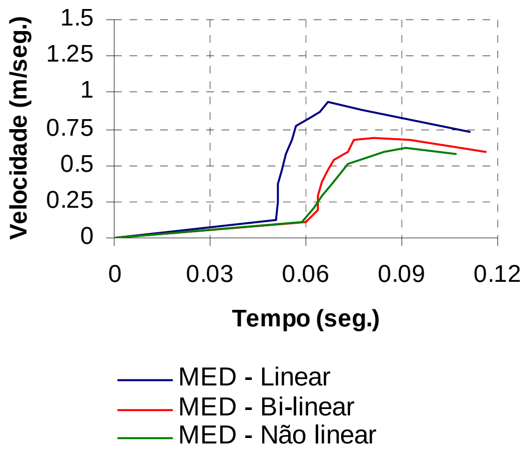


Figura 6.73: Variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo - Teste tipo 1 (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

Comparando-se a Figura 6.73 com a Figura 6.72, nota-se que para todos os modelos *strain-softening* analisados, a velocidade de propagação da fissura diminui. Isto se deve ao aumento da deformação crítica, ε_f, imposto.

6.4.3.3 –Teste tipo 2 (K $\rightarrow \infty$). Viga de Elices et al (2002).

O teste tipo 2 corresponde à viga esquematizada na Figura 6.54, cujo deslocamento vertical no ponto B é impedido, ou seja, a rigidez elástica do apoio fixado no ponto B tende ao infinito (K $\rightarrow \infty$). Todas as características físicas e geométricas foram apresentadas no item 6.3.4 e 6.3.4.1.

- *Curvas força-deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga e curvas da variação da força ao longo do tempo:*

As Figuras 6.74, 6.75 e 6.76 mostram as curvas força–deslocamento no ponto de aplicação da carga. No primeiro gráfico de cada figura se encontram, além da média dos resultados experimentais de Elices et al (2002), cinco simulações realizadas pelo MED, enquanto que no segundo, apenas uma simulação é plotada. A energia de fratura adotada foi de 200 N/m.

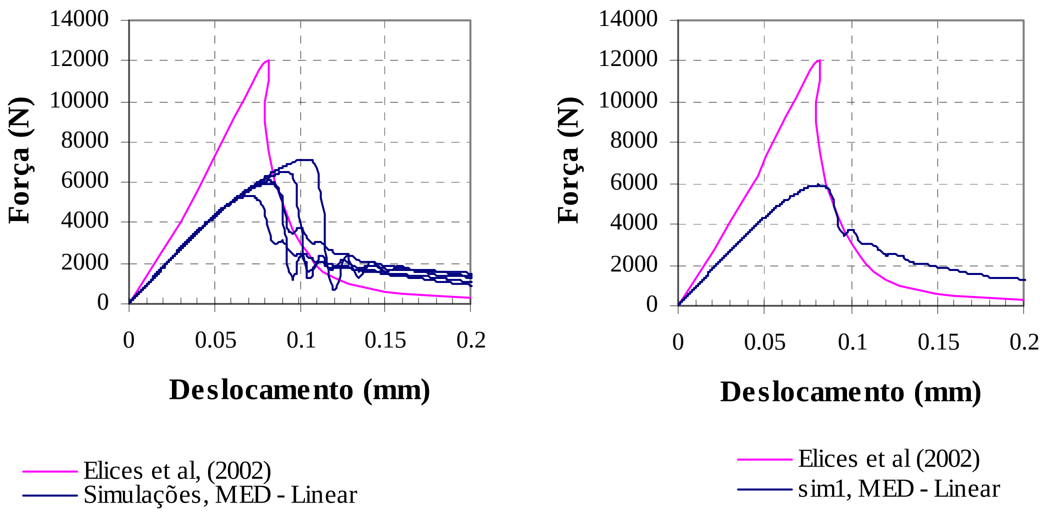


Figura 6.74: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear. Teste tipo 2. (G_f = 200 N/m).

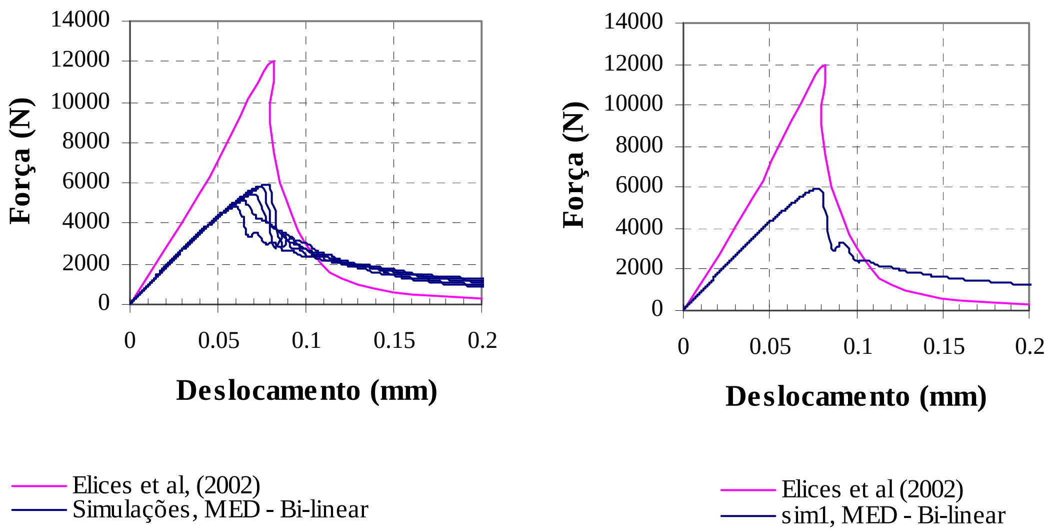


Figura 6.75: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* bi-linear. Teste tipo 2. (G_f = 200 N/m).

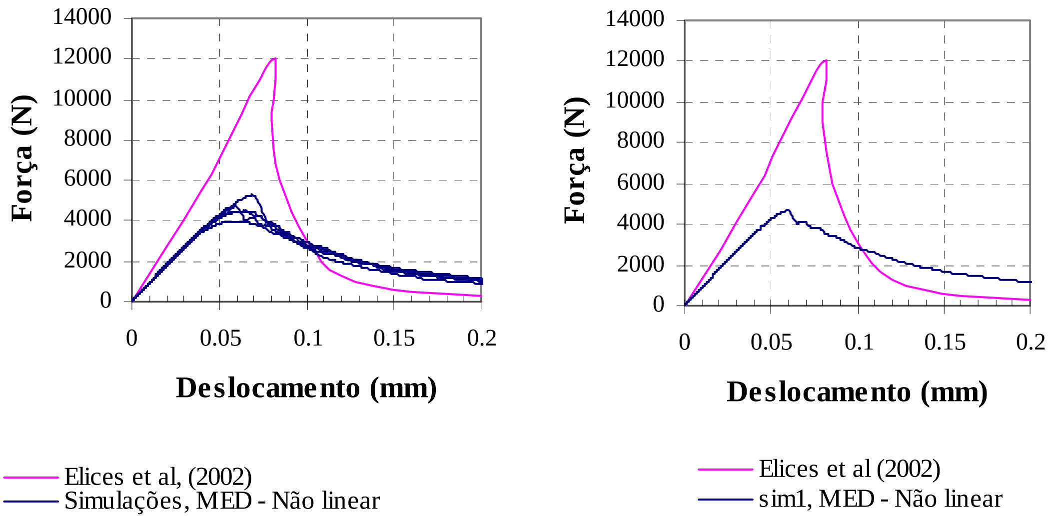


Figura 6.76: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* não linear. Teste tipo 2. (G_f = 200 N/m).

Ao contrário do que aconteceu no exemplo anterior, a mudança no valor da energia de fratura, G_f, não ajudou no melhor ajuste dos resultados. Nenhum modelo *strain-softening* atendeu às expectativas na obtenção de um resultado satisfatório. Desconfia-se do fato de não se levar em consideração, na análise numérica, o atrito nos apoios ou qualquer outras interferências que possam ocorrer na prática. Além disso é válido afirmar que o problema é muito complexo devido às condições de contorno que apresenta.

Doz e Riera (1992), analisando os apoios de uma viga à flexão em três pontos, verificaram que o atrito nos apoios tem influência no valor da intensidade de tensões. Este valor está relacionado com o tamanho da fissura, as dimensões da peça e com a carga aplicada, como discutido no capítulo 2. Desta forma, desconfia-se que o apoio fixado no ponto B possa ser uma condição desfavorável para uma boa reprodução numérica dos resultados.

A situação, na qual se adota uma deformação crítica três vezes maior que a proposta para os modelos *strain-softening*, no início deste capítulo, não convém apresentar neste caso, pois os resultados distanciarão ainda mais dos obtidos por Elices et al (2002). A Figura 6.77 confirma esta justificativa. Além disto, foi visto no exemplo anterior que a configuração da viga de Elices et al (2002) resulta num comportamento mais frágil do material. Os resultados obtidos pelos autores por si só já mostram esta fragilidade através do trecho descendente da curva força-deslocamento, cuja inclinação é bastante acentuada. Desta forma não faz sentido trabalhar com um modelo de grande deformação crítica.

De qualquer forma, para justificar o que foi dito, a Figura 6.77 ilustra as curvas força-deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga para os três modelos *strain-softening* proposto para se conduzir um estudo comparativo com os resultados de Elices et al (2002). Na situação mostrada, adotou-se um valor da energia de fratura, G_f, de 150 N/m e uma deformação crítica aumentada em quase três vezes daquela proposta no item 6.2.

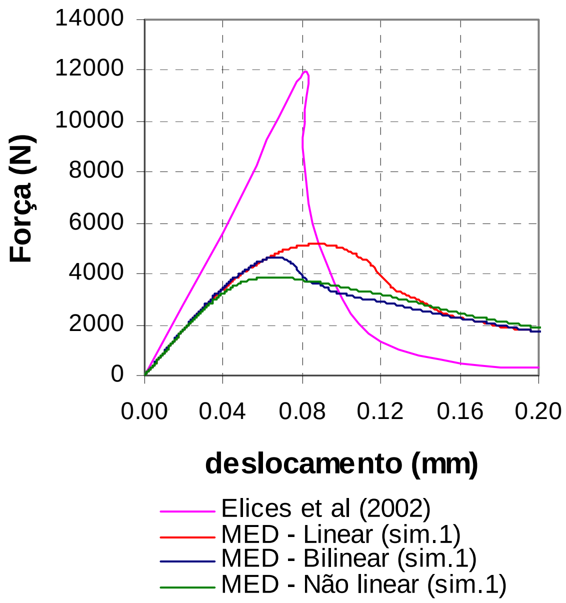


Figura 6.77: Curvas força–deslocamento. Resultados de Elices et al (2002) e da análise do MED para um modelo *strain-softening* linear, bi-linear e não linear. Teste tipo 2. (G_f = 150 N/m e ε_f três vezes maior).

Como se verifica na Figura 6.77, os resultados se distanciam ainda mais quando se aumenta o valor da deformação crítica. Portanto, não é interessante, nem nada acrescentará prosseguir com tal análise.

7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O estudo da propagação da fissura, em materiais quase-frágeis como o concreto, sob uma abordagem dinâmica foi o compromisso deste trabalho. O método dos elementos discretos, MED tem a grande vantagem de fornecer resultados, cuja interpretação é simples e fácil. Desta forma, das análises apresentadas no capítulo anterior, algumas conclusões podem ser tiradas:

7.1 – CONCLUSÕES GERAIS

As metodologias que utilizaram a representação espectral, através da simulação de Monte Carlo e a função de distribuição de probabilidade de Weibull, para a representação da heterogeneidade do material, apresentam resultados satisfatórios. Porém, aquela na qual se utiliza a representação espectral tem desassociado da energia específica de fratura, G_f, o comprimento de correlação, tornando a concepção do problema mais realística, visto que a heterogeneidade é uma característica física e não geométrica do material. Vale salientar que a simulação de Monte Carlo apresenta soluções precisas que podem ser obtidas para qualquer problema em que se conheçam as soluções determinísticas;

A variação da malha de discretização ao manter-se o comprimento de correlação constante, teve influência pouco significativa nos resultados obtidos com o método da representação espectral.

Em geral, a média das cargas máximas no ponto de aplicação do deslocamento controlado, nos diferentes casos estudados referente ao resultado da curva *strain-softening* linear, foi maior que a do modelo bi-linear, que por sua vez apresentou um pico maior quando comparado com a obtida pela curva não linear, reforçando a idéia de que o primeiro modelo consome mais energia que os demais;

O modelo *strain-softening* linear apresentou um trecho pós-pico com descida mais brusca, caracterizando um processo de fissuração mais rápido que os demais modelos;

A variação do módulo de elasticidade, *E*, influenciou quase que somente ao trecho quase linear dos gráficos força-deslocamento;

Os diagramas força-tempo permitem visualizar os aspectos dinâmicos do problema apontando o instante em que a fissura começa a se propagar;

As análises com o modelo *strain-softening* linear indicaram um processo de propagação mais acelerado, quando comparado com os resultados dos modelos bi-linear e não linear;

O aumento da deformação crítica, ε_f, provocou um desenvolvimento mais suave da fissura e um comprimento final menor. Este recurso foi utilizado para reproduzir um comportamento mais dúctil da estrutura;

O uso do modelo *strain-softening* não linear, para todas as situações analisadas, permite reproduzir uma trajetória mais curta da fissura. Isto se explica pelo fato deste modelo apresentar um valor de deformação crítica, ε_f, maior que os demais;

A fissura se propagou com uma velocidade maior nos modelos *strain-softenig* linear. Em intervalos muito pequenos e próximos do tempo de ruptura, a velocidade variou bruscamente atingindo valores mais altos que os demais modelos. A velocidade máxima diminuiu e ocorreu de forma mais lenta e suave, na medida que o valor da deformação crítica, ε_f, dos modelos *strain-softening* aplicados ao concreto aumentou;

Na análise dinâmica do problema, as acelerações permaneceram nulas até ser iniciado o processo de propagação da fissura. No decorrer da propagação instável, as acelerações atingiram valores mais altos que diminuíram no final de todo o processo.

7.2 – CONCLUSÕES PARCIAIS

7.2.1 - Vigas do ensaio à flexão em três pontos, Petersson, (1981):

O modelo *strain-softening* não linear gerou resultados força-deslocamento vertical, no ponto de aplicação da carga, mais próximos dos obtidos por Petersson (1981). Este modelo apresentou um trecho pós-pico mais suave que os demais;

O aumento da deformação crítica, ε_f, favoreceu na produção de resultados que melhor se aproximaram dos resultados de Petersson (1981), reproduzindo de forma mais realista o comportamento quase-frágil do concreto. As curvas força-deslocamento, força-tempo e as das energias foram mais suaves e estáveis;

Nas vigas submetidas à flexão em três pontos, a formação de uma zona de fragilidade começou no banzo inferior da peça, próximo à pré-fissura, enfraquecendo a resistência de contato entre as faces da mesma, e se desenvolveu em direção à parte superior central da viga, onde foi aplicado o carregamento. Desta forma a propagação da fissura seguiu o sentido de seu comprimento, caracterizando, assim, o modo I de fissuração.

7.2.2 - Viga de Elices et al (2002) – Teste tipo 1:

A adoção de uma energia de fratura, G_f, diferente da que foi utilizada por Elices et al (2002), ajudou no sentido de aproximar os resultados obtidos pelo MED aos do referido autor;

Ao contrário do que ocorreu nos caso das vigas submetidas à flexão em três pontos, o modelo *strain-softening* linear apresentou resultados que se ajustaram melhor aos obtidos experimentalmente;

Apesar do material analisado em todos os casos apresentados ser o concreto, a configuração da peça, para o teste 1 contribuiu por torná-la mais frágil quando comparada com uma viga simplesmente apoiada de mesma geometria e características físicas. Isto explica o porquê do modelo *strain-softening* linear ter sido aplicado tão bem a este caso;

As conclusões tiradas, em relação ao aumento da deformação crítica, ε_f, para o caso de vigas submetidas à flexão em três pontos, no que se refere ao melhor ajuste dos resultados, não se aplicaram para vigas de configuração semelhante ao teste do tipo 1;

Ao analisar a trajetória da fissura, observou-se uma certa fragilidade a se formar no banzo inferior da peça, na linha de aplicação da carga, e na extremidade da pré-fissura, e se estende na vertical. Esta fragilidade, em determinado momento, é notada a região sobre o apoio da extremidade da peça. A propagação da fissura começa a se desenvolver na ponta da pré-fissura, na direção de seu comprimento, apresentando uma leve inclinação no sentido da carga aplicada, enquanto que a zona frágil entre a pré-fissura e o apoio da extremidade da peça se estabiliza. A propagação se dá predominantemente paralela à direção do comprimento da pré-fissura, o que caracteriza o modo I de fissuração.

7.2.3 - Viga de elices et al (2002) – Teste tipo 2:

Não se conseguiu reproduzir com satisfação os resultados referentes a esta configuração de viga. Desconfia-se do fato de não ter sido levado em consideração, na análise numérica, o atrito nos apoios ou qualquer outra interferência que pode ocorrer na prática, e também pelo fato do problema ser bastante complexo devido às condições de contorno que apresenta.

7.3 – RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Analisar numericamente e experimentalmente a propagação da fissura em vigas de concreto armado analisando a influência do aço dentro do concreto aplicando diversas variações da forma do diagrama constitutivo elementar;

Aplicar outras variações dos modelos constitutivo elementar linear, bi-linear e não linear para estudar a propagação da fissura sob uma abordagem dinâmica em diversas estruturas de concreto;

Analisar a propagação de fissuras em cascas e placas de concreto, e ou concreto armado utilizando diferentes modelos *strain-softening*.

REFERÊNCIAS

ACI committee 446, Fracture Mechanics, (1992). Fracture mechanics of concrete: concepts, models and determination of material properties.

Ali, A., (1996). "FEM analysis of concrete structures subjected to mode-I and mixed mode loading conditions." In: *Computers and strutures*. 61(6), 1043-1055.

Alfaiate, J.; Pires, E.B. e Martins, J.A.C., (1997). "A finite element analysis of non-prescribed crack propagation in concrete." In: *Computers and strutures*. 63(1), 17-26.

Anderson, T.L., (1994). "Fracture mechanics, Fundamentals and aplications." CRC press. Boston.

Barenblatt, G.I., (1962). "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture." Institute of mechanics. Moscow State University. Institute of geology and development of combustible minerals of the USSR. Academy of Sciences, Moscow, USSR.

Bazant, Z., (1993). "Scaling laws in mechanics of failure." In: *Journal engineering mechanics, ASCE*. 119 (9), 1828-1844.

Bazant, Z., (1999). "Size effect on structural strength: a review." In: *Archive of applied mechanics*. 69, 703-725.

Bazant, Z., (2002). "Concrete fracture models: testing and practice." In: *Engineering fracture mechanics*. 69, 165-205.

Bazant, Z. e Oh, B., (1983). "Crack band theory for fracture of concrete." In: *Matériaux et constructions.* 16(93), 55-177.

Borges, J.; Bittencourt, T.; Souza, R. e Souza, J. (2001). "Aplicações Práticas da Mecânica da Fratura às Estruturas de Concreto." In: 43º *Congresso Brasileiro do Concreto,(Instituto Brasileiro do Concreto).* 1-14.

Broek, D., (1988). "The Practical Use of Fracture Mechanics." Kluwer Academic Publishers.

Bueno, E.M.R., (1999). *Simulação bidimensional de fraturamento coesivo por meio do método dos elementos finitos,* Dissertação de mestrado, Escola politécnica da universidade de São Paulo, 162p.

Carpinteri, A.; Cornetti, A.; Barpi, F. e Valente, S., (2003). "Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory." In: *Engineering fracture mechanics.* 70, 1809-1839.

Cervenka, V.; Cervenka, J. e Pukl, R., (2002). “ATENA – A tool for engineering analysis of fracture in concrete.” In: Sãdhanã, 27(4), 485-492.

CEB-FIP Model Code 1990. “Bulletin d’information”, nº 203, cap. 2, 1-16.

Clough, R.W. e Penzien, J., (1993). “Dynamics of Structures.” McGraw-hill international editions.Second edition.

Cornelissen, H., Hordijk, D., Reinhardt, H, (1986). “Experimental Determination of Crack Softening Characteristics of Normal Weight and Lightweight Concrete.” In: *Heron.* 31(2), 45-56.

Cotterell, B., (2002). “The past, present, and future of fracture mechanics.” In: *Engineering fracture mechanics.* 69, 533-553.

Cundall, P.A. e Strack, O.D.L., (1979). “A discrete numerical model for granular assemblies”. In: *Géotechnique.* 29(1), 47-65.

Dalguer, L.A.; Irikura, K. e Riera, J.D., (2003). “Simulation of Tensile Crack Generation by Three-dimensional Dynamic Shear Rupture Propagation During an Earthquake”. In: *Journal of Geophysical Research.* 108(B3), 1-21.

D’Ambra, R.B.; Fasce, L.A.; Iturrioz, I.; Frontini, P.M. e Cisilino, A.P., (2002). “Utilización del método de los elementos discretos em la simulación numérica de ensayos de impacto para caracterización de materiales compuestos poliméricos.” In: *Mecânica computacional.* XXI, 1121-1134.

Doz, G.N., (1995). *Simulació numérica de la excitació sísmica a partir Del deslizamiento de la falla de origen*, Tese de Doutorado, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

Dugdale, D.S., (1960). “Yielding of Steel Sheets Containing Slits”. In: *Journal of Mechanics and Physics of Solids.* V. 8, 100-104.

Elices, M.; Guinea, G.V.; Gómez, F.J. e Planas, J., (2002). “The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges.” In: *Engineering fracture mechanics.* 69, 137-163.

Erdogan, F., (2000). “Fracture mechanics”. In: *Internacional jornal of solids and structures*.” 37, 171-183.

Ewalds, H.L. e Wanhill, R.J.H., (1986). “Fracture mechanics.” Edward Arnold. London.

Gálvez, J.C.; Cervenka, J.; Cendón, D.A. e Saouma, V., (2002). “A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete.” In: *Cement and concrete research.* 32, 1567-1585.

Gambarova, P.G. e Valente, G., (1990). “Smeared crack analysis for fracture and aggregate interlock in concrete.” In: *Engineering fracture mechanics.* 35(4/5), 651-663.

Gopalaratnam, V.S. e Ye, B.S., (1991). “Numerical caracterization of the nonlinear fracture process in concrete.” In: *Engineering fracture mechanics.* 40(6), 991-1006.

Griffith, A., (1920). “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids.” In: *Philosophical Transactions of the Royal Society*. London, A221, 162-198.

Guinea, G.V.; Planas J. e Elices, M., (1994). “A general bilinear fit for the softening curve of concrete.” In: *Materials and structures.* 27, 99-105.

Guinea, G.V.; El-Sayed, K.; Rocco, C.G.; Elices, M. e Planas J., (2002). “The effect of the bond between the matrix and the aggregates on the craking mechanism and fracture parameters of concrete.” In: *Cement and concrete research.* 32, 1961-1970.

Guo, X.H.; Tin-Loi, F. e Li, H., (1999). “Determination of quasibrittle fracture law for cohesive crack models.” In: *Cement and concrete research.* 29, 1055-1059.

Hayashi, Y., (1982). *Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não-linear,* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 94p.

Hrennikoff, A., (1941). “Solution of problems of elasticity by the framework method.” In: *Journal of applied mechanics.* 12, 169-175.

Hillerborg, A; Modéer, M. e Petersson, P-E., (1976). “Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements.” In: *Cement and Concrete Research.* 6, 773-782.

Horii, H. (1988). “Models of Fracture Process Zone and a System of Fracture Mechanics for Concrete and Rock.” In: *International Workshop on Fracture Toughness and Fracture Energy; Test Methods for Concrete and Rock, Tohoku University, Sendai, 12-14*.

Iturrioz, I., (1995). *Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 176p.

Iturrioz, I.; D’Avila, V.M.R.; Raush, A. e D’Ambra, R.B. (2000b). “Análise experimental-computacional de um bloco de estacas de concreto armado.” In: *XXIX jornadas sudamericanas de ingenieria estructural*. Punta Del leste. Uruguay.

Iturrioz, I.; Reckziegel, G.; Fedrigo, F. Bitencourt, E. e Morsch, I.B. (2001). “Comparación entre modelos numéricos para simular la propagación inestable de fisuras.” UFRGS. On-line, 12/2003.

Iturrioz, I.; Spinelli, L. e Schnaid, F., (2000a). “Aplicaión del método de los elementos discretos en la determinación de la capacidad de carga de la base de asiento de suelos cementados.” In: *XXIX jornadas sudamericanas de ingenieria estructural.* Punta Del leste. Uruguay.

Irwin, G.R. e Washington, D.C., (1957). “Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.” In: *Journal of Applied Mechanics.* 24, 361-364.

Iyengar, S.R.K.T.; Raviraj, S. e Jayaram, T.N., (2002). “Analysis of crack propagation in strain-softening beams.” In: *Engineering Fracture Mechanics.* 69, 761-778.

Jiang, J. e Mirza, F.A., (1997). “Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs by a Discrete Finite Element Approach.” In: *Computers & Structures.*.65(4), 585-592.

Jefferson A.D. e Wright, H.D., (1991). “Stepped softening functions for concrete fracture in finite element analysis.” In: *Computers and Structures.*.41(2), 331-344.

Kanninen, M.F. e Popelar, C.H., (1985). “Advanced fracture mechanics.” Oxford University press – NY. Clarendon press. Oxford.

Krieg, R.D., (1973). “Uncondicional Stability in numerical time integration methods.” In: *Journal of Applied Mechanics.* Transactions ASME, 361-364.

Lekhnitskii, S.G., (1963). “Theory of elasticity of an anisotropic elastic body.” San Francisco, Holden-Day.

Li, V.C.; Chan, C.M. e Leung, C.K.Y., (1987). “Experimental determination of the tension-softening relations for cementitious composites.” In: *Cement and concrete research.* 17, 441-452.

Li, Y. e Bazant, Z.P., (1994). “Eigenvalue analysis of size effect for cohesive crack model.” In: *International Journal of fracture.* 66, 213-226.

Metha, P.K., Monteiro, J.M., (1994). “Concreto: estrutura, propriedades e materiais.” São Paulo, Editora PINI.

Morquio, A.A., (2003). *Estudo teórico-experimental dos efeitos de tamanho e de velocidade de deformação em estruturas de aço*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.

Nayfeh, A.H. e Mohamed, S.H., (1978). “Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures.” In: *AIAA Journal.* 16(8), 779-787.

Oliver, J., (1990). “Modelado de la fisuracion en estructuras de hormigón.” Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

Oliver, J.; Huespe, A.E.; Pulido, M.D.G. e Chaves, E., (2002). "From continuum mechanics to frature mechanics: the strong discontinuity approach." In: *Engineering fracture mechanics.* 69, 113-136.

Oller, S., (2001). "Fractura mecánica, un enfoque global." Centro Internacional de Métodos Numéricos En Ingeniería. Barcelona.

Petersson, P-E, (1981). "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials." Report TVBM-1006, Div. of Building Materials, Lund Inst. of Tech., Lund, Sweden.

Pitangueira, R.L. e Silva, R.R., (2000). "Efeito de escala: de Galileo Galilei às estruturas de concreto." In: *XXIX Jornadas sudamericanas de ingenieria estructural,* Punta del Este, Uruguai.

Planas, J. e Elices, M., (1990). "Fracture criteria for concrete mathematical approximations and experimental validation." In: *Engineering fracture mechanics.* 35(1/2/3), 87-94.

Planas, J. e Elices, M., (1991). "Nonlinear fracture cohesive materials." In: *International journal of fracture.* 51, 139-157.

Planas, J. e Elices, M., (1992). "Asymptotic analysis of a cohesive crack: 1. theoretical background." In: *International journal of fracture.* 55, 153-177.

Planas, J.; Elices, M. e Guinea, G.V., (1993). "Cohesive cracks versus nonlocal models: closing the gap." In: *International journal of fracture.* 63, 173-187.

Planas, J.; Elices, M.; Guinea, G.V.; Gómez, F.J.; Cendón, D.A. e Arbilla, I., (2003). "Generalizations and specializations of cohesive crack models." In: *Engineering fracture mechanics.* 70, 759-1776.

Prado, E.P. e van Mier, J.G.M., (2003) "Effect of particle structure on mode I fracture process in concrete." In: *Engineering fracture mechanics.* 70, 1793-1807.

Prasad, M.V.K.V. e Krishnamoorthy, C.S., (2002). "Computacional model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete." In: *Computer methods in applied mechanics and engineering.* 40(6), 991-1006.

Raghu Prasad, B.K.; Mishra A. e Pavan Kumar D.V.T.G., (2000). "Fictiotious crack model for mode-II fracture of laminated composites." On-line. Indian Institute of Science, India.

Rice, J.R., (1968). "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks." In: *Journal of applied mechanics.* 35, 379-386.

Rios, R.D., (2002). *Aplicações do método dos elementos discretos em estruturas de concreto*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 181p.

Rios, R.D. e d'Ávila, V.M.R., (2004). "NBR 6118/2003 – Alguns comentários sobre a ductilidade e deformação." In: *Jornadas Sud-Americanas de Ingenieria Estrutural*, maio, Mendonça, Argentina.

Rios, R.D. e Riera, J.D., (2002). "Consideração do Efeito de Escala em estruturas de Concreto." In: *Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, UnB.

Rios, R.D.; Riera, J.D. e Iturrioz, I., (2002a). "Uma contribuição ao Entendimento do Efeito de Escala em estruturas de Concreto." In: *Mecânica computacional*. XXI, 979-991.

Rios, R.D.; Riera, J.D. e Iturrioz, I., (2002b). "Puncionamento de estruturas laminares de concreto sob ação de cargas de impacto." In: *Mecânica computacional.* XXI, 968-978.

Rocha, M.M., (1989). *Ruptura e efeito de escala em materiais não-homogêneos.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Rokugo, K.; Iwasa, M.; Suzuki, K. e Koyanagi, W., (1985). "Testing Methods to determine Tensile Strain-softening Curve and Fracture Energy of Concrete. In: Mihashi, H.; Takahashi, H.; Wittman, F.H.; editors. Fracture Toughness and Fracture Energy: Test Methods for Concrete and Rock. Rotterdam: Balkema. 153-163.

Rots, J.G.; Nauta, P.; Kusters, G.M.A. e Blaauwendraad, J., (1985). "Smeared crack approach and fracture localization in concrete." In: *Heron.* 3(1), 1-48.

Schmall, L.O.S., (2003). Propagação de fissuras em placas: Uma abordagem utilizando o método dos elementos discretos. Dissertação de Mestrado, UnB.

Shinozuka, M. e Deodatis, G., (1996). "Simulation of Multi-dimensional Gaussian Stochastic Fields by Spectral Representation." In: *Applied Mechanics Review.* 49(1), 29-53.

Souza, W.R.M., (2001). Propagação de fissuras em vigas submetidas a diferentes estados de carregamento. Dissertação de Mestrado, UnB.

Spellmeyer, T.B.; D'Ambra, R.B. e Iturrioz, I., (2002). "Estúdio del comportamiento de la propagacion dinâmica de la fisura utilizando el método de los elementos discretos." In: *Mecânica computacional.* XXI, 1135-1150.

Szilard, R., (1974). "Theory and analysis of plates: Classical and numerical methods." Civil engineering and engineering mechanics series.

Ulfkjaer, J.P.; Krenk, S. e Brincker, R., (1995). “Analytical model for fictitious crack propagation in concrete beams.” In: *Journal of Engineering Mechanics.* 121(1), 7-15.

Wittmann, F.H., (2002). “Crack formation and fracture energy of normal and high strength concrete.” In: *Sãndhanã.* 27(4), August, 413-423.

Zimmermann, (1986). “Failure and fracturing analysis of concrete structures.” In: *Nuclear engineering and Design.* 92, 389-410.