



Universidade de Brasília
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e
Ciência da Informação e Documentação.
Departamento de Economia

MESTRADO EM GESTÃO ECONÔMICA DE NEGÓCIOS

Teoria de Opções Aplicada ao Apreçamento de Linhas de Crédito Contingentes

Angela Maciel Aranha

**Brasília - DF
2007**

Angela Maciel Aranha

**Teoria de Opções Aplicada ao Apreçamento de
Linhas de Crédito Contingentes**

Dissertação apresentada à Universidade de Brasília, Departamento de Economia, para obtenção do título de Mestre em Gestão Econômica de Negócios.

Orientador: Prof. Dr. Waldery Rodrigues Júnior

**Brasília - DF
2007**

Aranha, Angela Maciel

Teoria de Opções Aplicada ao Apreçamento de Linhas de Crédito Contingentes / Angela Maciel Aranha. Brasília: UNB / Programa de Pós Graduação em Economia, 2007.85p

Dissertação: Mestrado em Gestão Econômica de Negócios (Área: Economia), 2007

1. Teoria de Opções

2. Apreçamento de Linhas de Crédito Contingentes

I. Tese (mestrado) – Universidade de Brasília – Programa de Pós Graduação em Economia

II. Título

Cessão de Direitos

Nome da Autora: Angela Maciel Aranha

Título da Dissertação de Mestrado em Gestão Econômica de Negócios: Teoria de Opções Aplicada ao Apreçamento de Linhas de Crédito Contingentes

Grau/Ano: Programa de Pós-graduação em Economia, 2007

A autora reserva direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado poderá ser reproduzida sem autorização por escrito da autora.

Angela Maciel Aranha

**Teoria de Opções Aplicada ao Apreçamento de
Linhas de Crédito Contingentes**

Esta dissertação foi julgada aprovada para obtenção do grau de Mestre em Gestão Econômica de Negócios do Programa de Pós Graduação em Economia da Universidade de Brasília, por intermédio do Centro de Investigação em Economia e Finanças. Banca Examinadora formada pelos professores:

Professor Doutor Waldery Rodrigues Júnior
(Orientador)

Professor Doutor Daniel Oliveira Cajueiro
(Banca)

Professor Doutor Tarcísio Barroso da Graça
(Banca)

Brasília (DF), 12 de setembro de 2007

Ao Senhor de Israel, “que é poderoso para fazer infinitamente mais do que pedimos ou pensamos, conforme o seu poder que opera em nós”.

Agradecimentos

A Deus que é a fonte de todo conhecimento e sabedoria.

A meu marido, José de Goes, pela compreensão e ajuda.

A minha filha Daniela, pelo sorriso contagiante e alegria inspiradora.

A meus pais, Aurélio e Celeste, que sempre incentivaram meus estudos e a busca de aprimoramento.

Ao professor Waldery Rodrigues, pela orientação deste trabalho.

Aos amigos e companheiros de estudo Ligia, Maurício e Virgínia, pelo incentivo.

Ao Banco do Brasil – Diretoria Internacional, pelo suporte Institucional recebido.

A Márcia Nalu, pelo apoio e cortesia na secretaria do curso.

Aos colegas e professores do curso pelos momentos compartilhados nesta jornada.

Sumário

Agradecimentos	ix
Sumário	x
Sumário de Tabelas	xii
Sumário de Gráficos	xii
Sumário de Anexos	xii
Lista de Siglas e Abreviaturas	xii
Resumo	xiii
Abstract	xiii
Palavras Chaves:	xv
Key Words:	xv
I. Introdução	1
1.1 – Contexto e Relevância da Pesquisa	1
1.2 – Objetivos	2
1.3 – Estrutura do Trabalho	3
II. Linhas de Crédito Contingentes	5
2.1 Definição	5
2.2 CCL Interpretada como Opção	5
2.3 Outras Características	6
2.4 Diferenças entre CCLs e Opções	8
2.5 Acordo da Basiléia e CCLs	9
III. Revisão Bibliográfica	11
3.1 Conceitos e Ferramentas Utilizados no Apreçamento de Opções	11
3.1.1 Processo Estocástico	11
3.1.2 Processo de Markov	11
3.1.3 Processo de Wiener ou Movimento Browniano	11
3.1.4 Processo Wiener Generalizado	12
3.1.5 Processo de Itô	12
3.1.6 Lemma de Itô	13
3.1.7 Martingales	13
3.1.8 Medidas de Probabilidades Equivalentes	14
3.2 Modelos de Apreçamento de Opções	18
3.2.1 O Modelo Binomial	18
3.2.2 Modelo Black-Scholes-Merton	22
3.2.3 Modelo de Black (76)	25
3.3. Fatores que Afetam o Preço das Opções	27

IV. Derivativos de Taxas de Juros - Modelagem	29
4.1 Caps e Floors	29
4.2. Modelo de Mercado da Libor - LMM	32
4.2.1 Contexto Geral - Modelos da Estrutura a Termo de Taxas de Juros	32
4.2.2 Modelo de Mercado da Libor	35
V. Modelo Lokoianova, Neftci e Sharma para Apreçamento de Linhas de Crédito Contingentes	36
5.1 Descrição	36
5.2 Portfolio Replicador	38
5.3 Apreçamento	41
5.3.1 Método 1- Abordagem de Schönbucher	43
5.3.1 Método 2 – Emprego do LMM	47
VI. Simulações	52
6.1 Simulações apresentadas por Lokoianova, Neftci e Sharma (2007)	52
6.2 Novas Simulações – Parâmetros β e μ e o Preço das CCL	54
VII. Relação Esperada entre os Parâmetros β e μ e a Taxa livre de Risco, o Spread de Crédito e o Preço da CCL	56
VIII. Conclusões	63
IX. Referências	65
Anexo 01	66
Anexo 02	68

Sumário de Tabelas

Tabela 1: $F = g(\beta, \mu)$

Tabela 2: $c = g(\beta, \mu)$

Tabela 3: $CCL = g(\beta, \mu)$

Sumário de Gráficos

Gráfico 1: Taxa Livre de Risco F - efeito β e μ

Gráfico 2: Taxa Livre de Risco F - efeito μ

Gráfico 3: Taxa Livre de Risco F - efeito β

Gráfico 4: *Spread* de Crédito c - efeito β e μ

Gráfico 5: *Spread* de Crédito c - efeito μ

Gráfico 6: *Spread* de Crédito c - efeito β

Gráfico 7: Preço CCL - efeito β e μ

Gráfico 8: Preço CCL - efeito μ

Gráfico 9: Preço CCL F - efeito β

Sumário de Anexos

Anexo 01 – Tabela de valores encontrados de F, c, e CCL em função de β e μ

Anexo 02 – Gráficos ilustrativos das simulações de Lokoianova, Neftci e Sharma

Lista de Siglas e Abreviaturas

CCL	<i>Contingent credit lines</i> – linhas de crédito contingente
BSM	Black-Scholes-Merton
CRR	Cox-Ross-Rubinstein
DI	Depósito interfinanceiro
CP	Commercial Paper
HJM	Heath–Jarrow–Morton
LMM	<i>Libor Market Model</i> - Modelo de Mercado da <i>Libor</i>
LNS	Lokoianova-Neftci-Sharma

Resumo

As linhas de crédito contingentes começam despontar no mercado brasileiro de financiamento a empresas *corporate* como uma alternativa aos produtos tradicionais de empréstimo e *hedge*. Assim como no mercado internacional, também no Brasil já exigem maior atenção ao seu apreçamento, gerenciamento e controle. Neste trabalho, as linhas de crédito contingentes são tratadas como opções, em uma modelagem desenvolvida por Lokoianova, Neftci e Sharma (2007), aqui referidos como LNS. Testamos a resposta esperada do modelo LNS aos parâmetros adotados no modelo subjacente que é utilizado para descrever a dinâmica da taxa de juros livre de risco e modelar o *spread* de crédito do tomador da linha. O trabalho apresenta novas análises não incluídas no artigo referencial, complementando o entendimento do modelo de apreçamento de linhas de crédito contingentes. Especificamente, analisa o efeito da taxa média de longo prazo μ e da velocidade de reversão à média β do modelo adotado para a taxa livre de risco.

Abstract

Contingent Credit Lines are a promising source of funding for corporate segment in Brazilian money market as an alternative to traditional loans and hedge. Careful pricing and managing of these financial tools are in place (much the same happens in the international arena). Here, CCL are presented as options, guided by the article of Lokoianova, Neftci, and Sharma (2007), hereafter named LNS. We test LNS model response to the parameters of the mean reverting stochastic process of the risk-free rate, adding to a deeper understanding of CCL pricing, hence, to the best of my knowledge, these parameters' effects were not yet studied. In particular, two parameters were tested: the long average rate μ and the mean reverting speed β .

Palavras Chaves:

Linhas de Crédito Contingentes. Opções. Modelo de Black. Modelo de Mercado da *Libor*. Processo Estocástico de Reversão à Média. Martingales. Simulações Numéricas.

Key Words:

Contingent Credit Lines, Options, Black Formulae. Libor Market Model. Mean Reverting Stochastic Process. Martingales. Numerical Simulations.

I. Introdução

1.1 – Contexto e Relevância da Pesquisa

O papel das linhas de crédito contingentes (CCL – *contingent credit lines*), como alternativa de financiamento e de *hedge* para empresas, vem crescendo em importância ao longo dos últimos anos no mercado internacional. Nos Estados Unidos, por exemplo, o volume em ser (volume contratado, porém não utilizado) das linhas de crédito contingentes passou de US\$ 1,670 trilhão a US\$ 2,169 trilhões¹, de março de 2005 a março de 2007. Esses números representam uma elevação de cerca de 30%, em dois anos.

No Brasil, embora o Banco Central não disponibilize dados sobre os valores contratados em linhas de crédito contingentes, já é possível observar o aumento da demanda por esse produto nas mesas de operações dos grandes bancos que atuam no segmento *corporate*² ou nas páginas de finanças dos principais veículos de comunicação do país.

As características principais do produto são a garantia de liquidez e de preço, a flexibilidade de utilizar ou não a linha e a agilidade, para a empresa, de dispor dos recursos caso seja necessário.

¹ FDIC – Federal Deposit Insurance Corporation

² Existe um consenso subjetivo sobre as classificações do porte das empresas em micro, pequena, média, grande empresa e empresa *corporate*, porém não há uniformidade quanto ao montante de faturamento que caracteriza cada porte. Alguns bancos definem o ponto de corte por setor (comércio, indústria e serviços) e adotam valores em torno de R\$ 100 e R\$ 150 milhões, como limite mínimo de faturamento para o segmento *corporate*.

Sob o ponto de vista dos bancos comerciais, a incerteza do desembolso e as garantias dadas quanto ao preço e à liquidez geram riscos adicionais ao fluxo de caixa, ao balanço e ao resultado das instituições financeiras.

Vale ressaltar que, dentro do ambiente de competição entre os Bancos em relação ao segmento *corporate*, muitas vezes o custo de captação dessas grandes empresas no mercado externo é igual ou menor ao de vários bancos brasileiros, em função de sua melhor classificação de risco pelas agências internacionais de *rating*. Não há, portanto, margens para equívocos na hora de definir o preço adequado para as CCL. Seus impactos no resultado dos bancos podem ser bastante significativos se não forem adequadamente apreçadas e controladas.

Assim, cresce também a importância de entender e apreçar adequadamente esse tipo de produto bancário no Brasil, principalmente quando se constata o maior rigor por parte das autoridades monetárias em relação à gestão e ao controle de riscos, a maior exigência de retorno por parte dos acionistas e a redução das margens praticadas, pelos bancos, nos segmentos *corporate* e de grandes empresas.

1.2 – *Objetivos*

Esse trabalho de pesquisa objetiva:

- a) apresentar o modelo desenvolvido por Elena Loukoianova, Salih Neftci e Sunil Sharma, a partir de agora referidos como LNS, que utiliza a teoria de opções para o apreçamento de linhas de crédito contingentes;

- b) verificar o impacto, não avaliado por LNS, dos parâmetros do processo de reversão à média, adotado para modelar a dinâmica da taxa de juros livre de risco, no preço da CCL e complementar, dessa forma, o entendimento do modelo referencial.

1.3 – *Estrutura do Trabalho*

O restante do trabalho está estruturado em mais oito capítulos.

O capítulo II, a seguir, define as linhas de crédito contingentes, apresenta a visão das CCL como opções, e salienta as diferenças entre os dois instrumentos. Resume, ainda, o tratamento dado às CCL no Acordo da Basileia em vigor e no novo acordo da Basileia, que já está sendo implementado em vários países na abordagem padrão.

O capítulo III apresenta uma revisão bibliográfica básica dos conceitos empregados para apreçamento de opções, dos principais modelos de apreçamento e dos fatores que influenciam seus preços.

O capítulo IV introduz os derivativos de taxas de juros e cita algumas dificuldades enfrentadas para o seu apreçamento. Também apresenta os principais grupos de modelos desenvolvidos para explicar ou prever o comportamento das taxas de juros, inclusive o modelo de mercado da *Libor* (LMM), referência para os modelos de apreçamento de CCL desenvolvido por LNS (2007).

O modelo LNS de apreçamento é apresentado no capítulo V, onde descrevemos a modelagem da CCL e os dois métodos desenvolvidos para seu apreçamento.

O capítulo VI resume as simulações feitas por LNS. Também apresenta as novas simulações realizadas nesse trabalho de pesquisa a fim de avaliar o impacto dos parâmetros do modelo da taxa de juros livre de risco adotado no método de apreçamento das CCL que foi escolhido como foco nesta dissertação.

O capítulo VII descreve os resultados esperados e mostra as respostas obtidas do modelo LNS nas novas simulações realizadas.

O capítulo VIII conclui sobre a pesquisa realizada e cita alguns pontos que merecem maior análise antes da implementação do modelo LNS para apreçamento de linhas de crédito contingentes no mercado.

As referências são encontradas no capítulo IX.

A tabela resumo dos resultados obtidos nas novas simulações e os gráficos apresentados em Lokoianova, Neftci e Sharma (2007) encontram-se nos anexos um e dois, respectivamente.

II. Linhas de Crédito Contingentes

2.1 Definição

As linhas de crédito contingentes são compromissos assumidos pelos bancos comerciais, em contrato, de emprestar recursos a um determinado cliente, normalmente uma grande empresa ou empresa *corporate*. São também denominadas *Bank Loan Commitments*, *Stand by Liquidity Facilities* ou *Revolving Credit Lines*. O contrato estipula o prazo de validade para o compromisso, estabelece o montante máximo que poderá ser emprestado, o preço ou a taxa a ser cobrada sobre o montante efetivamente sacado, além de uma tarifa ou taxa pelo compromisso assumido.

2.2 CCL Interpretada como Opção

Uma CCL representa, para a empresa, um direito (não uma obrigação), válido pelo o prazo definido no contrato da linha, de sacar, sob as condições de taxas e tarifas pactuadas, até o limite máximo estabelecido entre as partes. Portanto a CCL pode ser vista como uma opção para a empresa detentora da linha de crédito.

Para os bancos, enquanto um compromisso, a CCL também pode ser interpretada como opção. Nesse caso, as instituições financeiras são lançadoras da opção detida pela empresa e, como tal, cobram um prêmio pela obrigação assumida na linha de crédito contingente.

Caso a taxa determinada em contrato seja fixa, a CCL propicia ao detentor da linha, seguro contra as variações na taxa básica de mercado assim como para o

eventual aumento seu prêmio de risco (*spread* de crédito) cobrado pelo mercado financeiro.

Para o caso de taxas flutuantes, a proteção é dada apenas para o possível aumento do prêmio de risco, cobrado como *spread*. O detentor da CCL fica exposto às variações da taxa base de mercado, por exemplo, a *Libor*.

Ambos os tipos de contrato, taxa fixa ou flutuante, garantem a disponibilidade de *funding* e, portanto, oferecem proteção contra a falta de recursos ou a redução de liquidez do mercado.

2.3 Outras Características

Alguns contratos prevêem um fluxo de utilização dos recursos, outros mantêm essa decisão a critério do tomador. O enfoque, neste estudo, será dado para os instrumentos que não apresentam cronograma de uso dos recursos e que definem os juros cobrados sobre os recursos emprestados como um *spread* sobre a taxa base (taxa flutuante: *Libor + spread*).

Segundo Loukoianova *et al* (2007), o contrato típico de uma CCL, além das condições de taxas de juros pactuadas em um empréstimo comum, inclui um ou mais tipos das tarifas abaixo:

- a) *Commitment fee*: tarifa referente à abertura da linha de crédito paga no momento da contratação.

- b) *Undrawn* ou *Facility fee*: taxa anual paga sobre o montante não utilizado da linha de crédito.
- c) *Drawn fee*: é o *spread over Libor* sobre o montante eventualmente utilizado da linha e o componente principal do seu custo³.
- d) *Term out fee*: prêmio pago pela opção de alongamento contrato.
- e) *Participation fee*: As linhas de crédito de maior valor são abertas por sindicatos de bancos. Os participantes dos sindicatos recebem uma remuneração baseada no montante comprometido.

As tarifas normalmente cobradas nos contratos negociados atualmente no Brasil, além do preço da linha (*Libor + spread*), são: a tarifa referente à abertura da linha (*commitment fee*) e a tarifa anual sobre o montante não utilizado da linha de crédito (*undrawn ou facility fee*).

A inclusão da taxa mencionada no item “d” – *term out fee*, refletiria a inserção de outra opção no contrato que dá o direito ao tomador da linha de alongar o seu prazo de vencimento por um período pré-determinado.

Os contratos podem também incluir uma cláusula⁴ que desobriga o banco de emprestar recursos nas condições contratadas, caso ocorra deterioração significativa das condições financeiras do tomador. Essa cláusula limita o risco assumido pelas instituições financeiras, porém ela não é comum no mercado brasileiro de linhas de crédito contingentes.

³ A prática de mercado (nacional e internacional) é definir o preço da linha como um spread único sobre a taxa básica (*Libor*)

⁴ *Material adverse clause* - cláusula que desobriga o banco de emprestar os recursos nas condições pactuadas em caso de mudança substancial das condições financeiras do tomador, por exemplo, um rebaixamento na sua classificação de risco de crédito – *downgrade*.

As linhas de crédito contingentes, pela sua configuração e pela flexibilidade, podem ser utilizadas pelas empresas como:

- a) Um recurso que permite adiar captações no mercado de capitais em momentos desfavoráveis.
- b) Um redutor de risco de crédito de curto prazo, por ser um indicativo ao mercado que a empresa emissora de dívida pode pagar por transações específicas. Por exemplo: a CCL pode funcionar como um seguro para os investidores do mercado de *commercial paper* (CP).
- c) Um limite máximo ou *cap* para o seu custo de *funding*.
- d) Uma fonte alternativa de financiamento caso condições externas à empresa reduzam a liquidez do mercado ou os recursos disponíveis para financiamento.
- e) Um instrumento rápido de financiamento para fazer frente a oportunidades de investimento que exijam agilidade na obtenção de recursos.

2.4 Diferenças entre CCL e Opções

Uma das diferenças entre uma CCL e uma opção padrão é que, embora a empresa detentora de uma linha de crédito possa sacar a qualquer tempo um montante até o limite estipulado em contrato, essa linha de crédito assemelha-se mais a uma opção do tipo *Bermudan* ou *Bermudan Option*⁵ do que a uma opção americana⁶ ou a uma opção europeia⁷.

⁵ *Bermudan option* – caracteriza-se pelo exercício só poder ocorrer em períodos determinados de tempo $t = 1, 2, 3, \dots, T$.

⁶ Opção americana – caracteriza-se pela possibilidade de ser exercida a qualquer tempo, até o seu vencimento.

⁷ Opção europeia – caracteriza-se pelo exercício só poder ser feito na data de seu vencimento.

A possibilidade de exercício parcial do direito de saque sob a linha é também uma diferença entre CCL e opções. Esse aspecto não foi tratado na modelagem de LNS para o apreçamento das linhas de crédito contingentes que assume a hipótese de saque total quando a linha é acionada. Entretanto, pode-se encontrar, em *Takor et al (1981)*⁸, uma análise do saque parcial da CCL considerando a elasticidade da demanda da empresa à taxa de juros dos recursos emprestados, a disponibilidade de oportunidades de investimento, a estrutura de capital desejada e o grau de poder de monopólio dos bancos. Os autores afirmam, no artigo, que o saque parcial não invalida a abordagem de opções para apreçamento da CCL.

Outra diferença importante é a não existência de um mercado secundário organizado onde cada participante, independente da vontade e do conhecimento da contraparte, pode modificar sua posição (aumentar, desfazer ou encerrar), a qualquer tempo, durante a vida da opção. Os bancos ao assumirem esse tipo de compromisso devem carregá-lo no balanço até o seu vencimento ou negociar com o cliente o encerramento ou venda do contrato do contrato.

2.5 Acordo da *Basiléia* e CCL

As CCL, da contratação até o momento da sua utilização, ficam registradas nas contas de compensação no balanço das instituições financeiras, a exemplo de outros compromissos como cartas de crédito e fianças.

⁸ Anjan Takor, Hai Hong and Stuart I Greenbaum (1981): Bank Loan Commitments and Interest Rate Volatility"- Journal of Banking and Finance 5 (1981), 497-510, North Holland Publishing Company.

Durante esse período, sob as diretrizes do Acordo da Basiléia I atualmente em vigor, o seu CCF (*credit conversion factor*), isto é, a ponderação do seu impacto na exigência de capital por parte da autoridade reguladora, é de 50%.

A partir do momento em que as CCL são utilizadas, o montante sacado passa a receber o mesmo tratamento dado aos empréstimos comuns: CCF de 100% no cálculo do patrimônio líquido exigido para fazer frente aos riscos assumidos pela instituição financeira.

Com a implantação do Novo Acordo da Basiléia⁹, os compromissos assumidos registrados nos itens de compensação passam a receber o seguinte tratamento, na abordagem padrão:

- a) compromissos com prazo até um ano: CCF de 20%;
- b) compromissos com prazo acima de um ano: CCF de 50%;
- c) compromissos canceláveis a qualquer tempo pelo Banco sem aviso prévio a contraparte ou cancelados automaticamente em função da deterioração do risco de crédito da contraparte: CCF de 0%.

A partir do momento em que são utilizadas, o CCF da operação também passa a ser de 100% na nova versão do Acordo da Basiléia.

⁹ *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards – A Revised Framework (June/2004)*

III. Revisão Bibliográfica

3.1 Conceitos e Ferramentas Utilizados no Apreçamento de Opções

3.1.1 Processo Estocástico

O processo estocástico pode ser interpretado como o processo que busca descrever o comportamento de uma variável aleatória que se desenvolve ao longo do tempo. Esse processo se dá em tempo discreto ou em tempo contínuo e, também, pode ser qualificado como estacionário, quando mantém suas propriedades estatísticas (média e variância constantes), ou não estacionário, quando apresenta tendências.

3.1.2 Processo de Markov

Um processo de Markov é o processo estocástico onde o valor presente da variável é a única informação relevante para estimar o seu valor futuro. Isso implica que a distribuição de probabilidade para o valor ou preço em qualquer ponto futuro independe do caminho seguido pela variável em termos de valor ou preço no passado.

3.1.3 Processo de Wiener ou Movimento Browniano

É um caso particular do processo de Markov. Segundo Hull (2000), uma variável z segue um processo de Wiener se apresentar as seguintes propriedades:

Propriedade 1:

A variação Δz em um pequeno intervalo de tempo Δt é: $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, onde ε é uma variável aleatória segue uma distribuição normal $N(0,1)$.

Propriedade 2:

Os valores de Δz para quaisquer dois diferentes intervalos curtos de tempo Δt são independentes.

A partir da primeira propriedade: $\Delta z \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$.

A partir da segunda propriedade: z segue um processo de Markov.

3.1.4 Processo Wiener Generalizado

O processo de Wiener generalizado para uma variável x pode se definido em termos de dz como: $dx = adt + b dz$ onde a e b são constantes. O termo adt implica que a variável x apresenta um *drift* (tendência) esperado com taxa a por unidade de tempo. O termo $b dz$ pode ser considerado como um ruído (variabilidade) acrescido ao processo seguido pela variável x . O montante do ruído é dado por b vezes o processo de Wiener dz .

3.1.5 Processo de Itô

São processos de Wiener generalizados, em tempo contínuo, onde as constantes a e b são função dos valores da variável subjacente:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz .$$

onde dz é um processo de Wiener.

Ambos o *drift* esperado como a taxa de variação dos processos de Itô tendem a mudar com o tempo.

Em um pequeno intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, as mudança na variável x é dada por:

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

A relação acima assume que o *drift* $a(x,t)$ e a taxa de variância de x $b(x,t)^2$ são constantes durante o intervalo t e $t + \Delta t$.

3.1.6 Lemma de Itô

O lemma de Itô pode ser visto como o equivalente estocástico da regra da cadeia do cálculo diferencial em ambiente determinístico.

Suponha uma variável x que segue um processo de Itô: $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$. O lema de Itô mostra que a função G de x e t segue um processo dado por

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz,$$

Onde:

$\left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right)$ corresponde ao *drift*, e

$\frac{\partial G}{\partial x} b$ corresponde à taxa de variância.

Vale registrar que o preço de uma opção, como veremos mais a frente, é função da variável estocástica subjacente e do tempo. Assim, o Lemma de Itô propicia a ferramenta para verificar a relação entre os diferenciais parciais.

3.1.7 Martingales

A teoria de Martingale classifica uma serie temporal observada pela sua tendência. Um processo se comporta como um Martingale se sua trajetória não apresenta tendência discernível ou qualquer periodicidade.

Dizemos que um processo $\{S_t, t \in [0, \infty]\}$ é um Martingale em relação ao conjunto de informação I_t e em relação à probabilidade P , se para todo $t > 0$,

- S_t é conhecido, dado I_t ;
- Esperanças não condicionais são finitas: $E|S_t| < \infty$;

- E se $E_t[S_t] = S_t$, para todo $t < T$, com probabilidade 1.

Assume-se que todas as esperanças $E[\cdot]$, $E_t[\cdot]$ são obtidas em relação à probabilidade P .

Assim, Martingales são variáveis aleatórias cujas variações futuras são totalmente imprevisíveis, dadas as informações no presente. São sempre definidas em relação a um conjunto de informações e a alguma medida de probabilidade. Se mudarmos o conjunto de informações ou a probabilidade associada, o processo em consideração poderá deixar de ser um Martingale. A recíproca também é verdadeira. Dado um processo X_t , que não se comporta como um Martingale, é possível transformá-lo em um Martingale modificando a medida de probabilidade P .

A maioria dos ativos financeiros, embora não se comportem como, podem ser transformados Martingales. Um dos métodos para fazer essa transformação é subtrair uma tendência esperada de S_t . Outro é transformar a distribuição de probabilidade do ativo tal que se $E_t^P[e^{-ru}S_{t+u}] > S_t$, $0 < u$, podemos buscar uma probabilidade equivalente \tilde{P} de maneira que a nova esperança satisfaça $E_t^{\tilde{P}}[e^{-ru}S_{t+u}] = S_t$, $0 < u$. O teorema de Girsanov propicia a ferramenta para a transformação da medida de probabilidade em processos estocásticos em tempo contínuo.

3.1.8 Medidas de Probabilidades Equivalentes

Neftici (2000) menciona dois métodos para apreçar derivativos. Um deles forma portfolios livre de risco e emprega equações diferenciais parciais. Esse foi o caminho escolhido no desenvolvimento do modelo de Black-Scholes. O outro requer a transformação dos processos subjacentes em processos de Martingales por meio de mudanças nas suas medidas de probabilidade, isto é, por meio do uso de medidas equivalentes de probabilidade.

Neste processo, transforma-se a medida de probabilidade dP , de forma a acomodar diferentes hipóteses para o *drift* de um processo de Wiener. A ferramenta propiciada pelo teorema de Girsanov relaciona o processo de Wiener a uma medida de probabilidade alternativa, alterando a média do processo, sem modificar a sua variância. Essa transformação permite, por exemplo, tratar um ativo que carrega um prêmio de risco positivo como se fosse livre de risco.

Vale ressaltar que, em princípio, ambos os métodos devem levar a mesma resposta, embora dependendo do problema em vista um método possa ser mais conveniente que outro

a) Alterando a média de uma variável normalmente distribuída

Fixando t e considerando z_t uma variável normalmente distribuída:

$z_t \sim N(0,1)$. Considere a função de densidade de z_t , dada por $f(z_t)$ e a

medida de probabilidade P , tal que: $dP(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_t)^2} dz_t$.

Define-se a função¹⁰ $\xi(z_t) = e^{z_t\mu - \frac{1}{2}\mu^2}$

Quando multiplicamos $\xi(z_t)$ por $dP(z_t)$, obtém-se uma nova medida de probabilidade:

¹⁰ A função $\xi(z_t) = e^{-\mu z_t + \frac{1}{2}\mu^2}$ subtrai uma média de z_t enquanto a função $\xi(z_t)^{-1} = e^{\mu z_t - \frac{1}{2}\mu^2}$ acrescentaria uma média à z_t cuja média original é igual a zero.

$$[dP(z_t)][\xi(z_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_t^2) + \mu z_t - \frac{1}{2}\mu^2} dz_t$$

$$d\tilde{P}(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[z_t - \mu]^2} dz_t, \text{ onde } d\tilde{P}(z_t) = dP(z_t)\xi(z_t).$$

Nessa transformação mantém-se a forma da distribuição de probabilidade, alterando-se a média e mantendo-se a variância.

b) Derivada de Random-Nikodym

Dividindo a expressão $d\tilde{P}(z_t) = dP(z_t)\xi(z_t)$, em ambos os lados por

$dP(z_t)$, temos: $\frac{d\tilde{P}(z_t)}{dP(z_t)} = \xi(z_t)$. Essa expressão pode ser vista como uma

derivada (derivada de Random-Nikodym) da medida \tilde{P} em relação à P e

$\xi(z_t)$ pode ser interpretada como a densidade da medida de probabilidade

\tilde{P} em relação à medida P .

Se a derivada de Random-Nikodym de \tilde{P} em relação à P existir, podemos utilizar a densidade $\xi(z_t)$ para transformar a média de z_t , mantendo inalterada sua variância. No caso de opções, onde o preço não depende da média, mas da volatilidade, essa transformação é muito conveniente.

c) Teorema de Girsanov

Segundo Neftici (2000), o teorema de Girsanov propicia as condições sob as quais a derivada de Random Nikodym existe para os casos onde z_t é um processo estocástico contínuo.

Em termos heurísticos, o teorema afirma que dado um processo de Wiener W_t com distribuição de probabilidade P . Multiplicando-se a distribuição de probabilidade desse processo por ξ_t , podemos obter um novo processo de Wiener \tilde{W}_t , com distribuição de probabilidade \tilde{P} . Os dois processos de Wiener estão relacionados por:

$$d\tilde{W}_t = dW_t - X_t dt$$

Isto é, \tilde{W}_t é obtido subtraindo-se um *drift* que é conhecido, dado o conjunto de informações I_t .

A principal condição para que a transformação seja possível é que ξ_t seja um processo de Martingale com $E[\xi_t] = 1$

Sendo $\xi_t = e^{\frac{1}{\sigma^2} \left(\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t X_u^2 du \right)}$, $t \in [0, T]$, onde o valor de X_t é conhecido exatamente, dado o conjunto de informações I_t .

Supondo que $X_u = \mu$, e sendo $W_0 = 0$: $\xi_t = e^{\frac{1}{\sigma^2} [\mu W_t - \frac{1}{2} \mu^2 t]}$, para os casos onde $\sigma^2 = 1$, temos $\xi(z_t) = e^{W_t \mu - \frac{1}{2} \mu^2 t}$, que é similar ao ξ_t discutido no item

“a”, acima, observando que o símbolo X_t utilizado no teorema de Girsanov desempenha o mesmo papel que μ no item “a”.

Destaca-se que embora $d\tilde{W}_t = dW_t - X_t dt$, \tilde{W}_t e W_t são processos de Wiener em relação à \tilde{P} e P , respectivamente.

Utilizando $-X_t dt$ como um erro em W_t , reduziríamos o *drift* da equação diferencial estocástica original exatamente por $-X_t dt$. Se $-X_t dt$ for interpretado como um prêmio de risco em função do tempo t , a transformação na distribuição de probabilidade faria com que os ativos arriscados crescessem a taxa livre de risco.

3.2 Modelos de Apreçamento de Opções

São dois os modelos de apreçamento de opções mais largamente utilizados: o modelo binomial de apreçamento de opções e o modelo Black-Scholes.

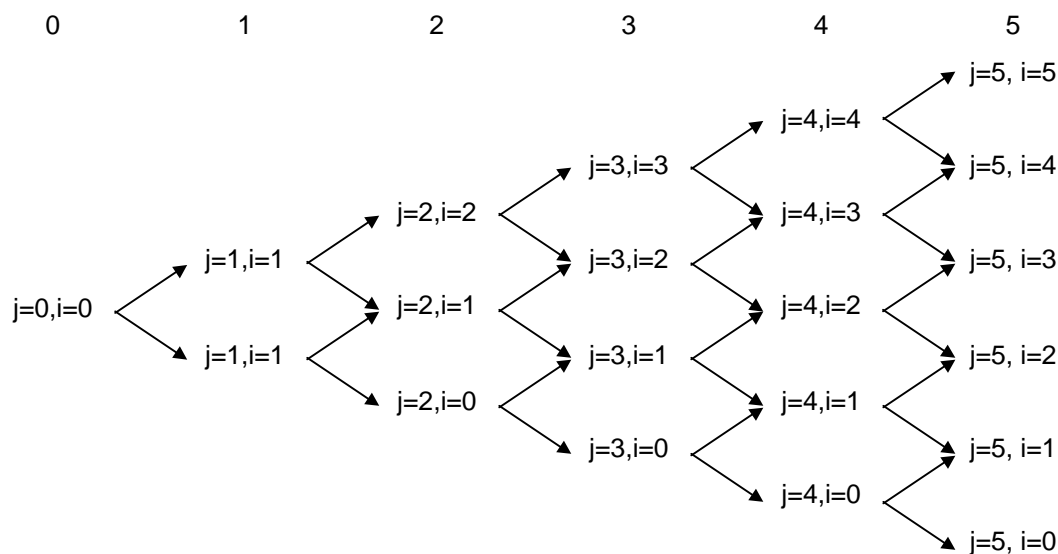
3.2.1 O Modelo Binomial

O modelo binomial de apreçamento de opções assume que a mudança percentual do valor do ativo subjacente segue uma distribuição binomial. Ele foi independentemente desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein (1979) e por Rendleman and Bartter (1979). A abordagem utilizando a distribuição binomial propicia soluções tanto para os modelos de apreçamento de opções europeias como para opções americanas, para as quais é necessário o emprego de simulações

numéricas. Os autores constroem uma árvore binomial que aproxima na forma discreta o movimento geométrico browniano¹¹.

Haug (2007) demonstra evolução do preço de um ativo utilizando o modelo de árvore binomial, considerando que o preço de um ativo, decorrido um espaço de tempo Δt , pode crescer a uma taxa fixa u com probabilidade p ou decrescer a uma taxa fixa d , com probabilidade $1 - p$.

A contagem no primeiro nó é iniciada em zero. O número de passos necessários para se chegar a um nó é dado por j e o número de vezes em que o preço do ativo subiu para chegar a esse nó é definido por i , conforme figura abaixo:



O número de passos para chegar ao nó (j, i) é igual a

$$\frac{j!}{i!(j-i)!}$$

¹¹ Segundo Hull (2000), o movimento geométrico browniano é o modelo mais usado para a descrição do comportamento dos preços de ativos e é dado por: $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ ou, no seu modo discreto, por $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon (\Delta t)^{1/2}$, onde dz é um processo de Wiener.

A probabilidade de alcançar o nó (j, i) é

$$\frac{j!}{i!(j-i)!} p^i (1-p)^{j-i}$$

Só é necessário, para apreçar opções europeias, o número de nós finais n . A função de distribuição de probabilidade binomial, então é dada por:

$$B(i | n, p) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

Portanto o preço das opções europeias, no modelo binomial, pode ser expresso por:

$$c = e^{-r_f T} \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \max(Su^i d^{n-i} - X, 0) \right]$$

$$p = e^{-r_f T} \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \max(X - Su^i d^{n-i}, 0) \right]$$

Onde T é o prazo para a opção expirar.

Em muitos nós, as opções estarão “fora do dinheiro”, isto é, com valor negativo, assim podemos começar a contagem a partir de a , que é definido como o menor inteiro não negativo, tal que

$$a \geq \frac{\ln(X / (Sd^n))}{\ln(u/d)}$$

A probabilidade binomial complementar é dada por:

$$B(i \geq a | n, p) = \sum_{i=a}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

E o preço das opções passa a ser:

$$c = e^{-r_f T} \left[\sum_{i=a}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} (Su^i d^{n-i} - X, 0) \right]$$

$$p = e^{-r_f T} \left[\sum_{i=0}^{a-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} (X - Su^i d^{n-i}) \right]$$

Em Copeland *et al* (2005), vemos outra variante do modelo utilizando a taxa de desconto em tempo discreto:

$$c = \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} \max(X - Su^i d^{n-i}, 0) \right] \frac{1}{(1+r_f)^T}$$

Os autores desenvolvem a fórmula acima, fazendo

$$p' \equiv \left[\frac{u}{(1+r_f)} \right] p \quad \text{e} \quad 1-p' = \left[\frac{d}{(1+r_f)} \right] (1-p)$$

E, portanto:

$$p^i (1-p)^{n-i} \frac{u^i d^{n-i}}{(1+r_f)^T} = (p')^i (1-p')^{n-i}$$

Assim, obtemos a expressão do preço de uma *call* europeia de forma resumida:

$$c = SB(i \geq a | n, p') - X(1+r_f)^{-n} B(i \geq a | n, p)$$

Os fatores de subida e descida do preço do ativo (u e d) e as correspondentes probabilidades são definidos de forma a igualar os dois primeiros momentos da distribuição dos preços dos ativos (média e variância) à distribuição de probabilidades teórica dos preços dos ativos. Cox, Ross e Rubinstein (1979) provaram que para a distribuição de probabilidade implícita na binomial convergir para um movimento geométrico browniano deve-se ter:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{e} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

onde: $\Delta t = T/n$.

A probabilidade do preço do ativo subir no próximo nó é dada por:

$$p = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u - d}$$

ou, utilizando a taxa discreta:

$$p = \frac{(1 + r_f) - d}{u - d}$$

3.2.2 Modelo Black-Scholes-Merton

O modelo binomial pode ser estendido para derivar o modelo equivalente em tempo contínuo: o modelo Black-Scholes-Merton (modelo BSM). No limite, uma árvore binomial, composta por um grande número de passos ou nós, é equivalente

ao modelo em tempo contínuo dado pela fórmula de BSM para apreçamento de opções européias.

Cox, Ross e Rubstein (1979) provaram que a medida o período de tempo Δt entre os movimentos de preço do ativo subjacente tende a zero e, portanto, o número de movimento n tende a infinito, a distribuição binomial tende para uma distribuição normal:

$$B(n \geq a | T, p') \rightarrow N(d_1) \quad \text{e} \quad B(n \geq a | T, p) \rightarrow N(d_2)$$

Assim obtemos um modelo que contempla variações contínuas no preço do ativo subjacente.

O modelo de BMS (1973) pode ser usado para apreçar opções européias em ações que não pagam dividendos. Também pode ser utilizado para valorar opções americanas em ações que não pagam dividendos, uma vez que, nesse caso, nunca ocorrerá o exercício ótimo da opção americana antes da data de seu vencimento.

Se S tem distribuição lognormal e c é o preço de uma opção européia:

$$c = e^{-r_f T} E^{\tilde{P}}[\max(S_T - X, 0)],$$

como $E^{\tilde{P}}(S_T) = S_0 e^{r_f T}$

$$c = e^{-r_f T} [S_0 e^{r_f T} N(d_1) - XN(d_2)]$$

$$c = S_0 N(d_1) - X e^{-r_f T} N(d_2)$$

$$p = X e^{-r_f T} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Onde:

c: valor atual da opção

$E^{\tilde{P}}$ representa a esperança em um mundo neutro ao risco;

S_T é o preço do ativo subjacente em T;

T: data de expiração

S_0 : é o preço atual do ativo subjacente

X: preço de exercício da opção

r_f : taxa contínua livre de riscos

σ : desvio padrão da taxa de retorno contínua do ativo subjacente

$N(d)$: valor cumulativo da distribuição normal avaliada em d

$\ln(S_0/X)$: logaritmo natural de (S_0/X)

As análises desenvolvidas para modelo BSM e para modelo CRR supõem que o comportamento dos preços dos ativos tem distribuição lognormal e seguem um movimento geométrico browniano. A taxa contínua de retorno dos ativos apresenta distribuição normal. Ambos os modelos são desenvolvidos com base na

construção de um portfolio livre de risco, formado por uma posição comprada na ação e uma posição vendida em uma *call* sobre a mesma ação. Assume-se que:

- o mercado não apresenta fricções e não é possível existir arbitragem;
- é possível realizar venda a descoberto e é permitido reinvestir todo recurso apurado na negociação;
- não há custos de transação;
- o ativo é perfeitamente divisível e negociado continuamente;
- a taxa livre de risco é fixa para qualquer que seja o vencimento;
- a volatilidade do ativo subjacente também é fixa;
- os investidores são neutros ao risco¹².

É importante salientar que os resultados obtidos na avaliação neutra ao risco são válidos para qualquer que seja a atitude do investidor frente ao risco.

Segundo Hull (2000), quando se passa de um mundo de investidores neutros ao risco para um mundo de investidores com aversão ao risco há uma mudança na taxa de crescimento esperada para o preço dos ativos. Também a taxa de desconto para os *pay-off* do derivativo é alterada. Essas duas mudanças se compensam exatamente.

3.2.3 Modelo de Black (76)

Fisher Black (76) apresenta um modelo para apreçamento de contratos de futuros¹³ de commodities onde se assume a hipótese os preços futuros têm a mesma propriedade lognormal assumida para os preços das ações no modelo BSM.

¹² O investidor neutro ao risco não requer prêmio para tomar risco. Em um mundo neutro ao risco o retorno médio dos ativos arriscados é a taxa livre de risco.

É importante lembrar que, em um mundo neutro ao risco, o ganho esperado para o detentor de um contrato futuro é zero, uma vez que não há custo para entrar nesse tipo de contrato. A taxa de crescimento esperada para um preço futuro (ou a termo) de um ativo ou uma *commodity* é zero e o valor esperado desse preço a termo, no futuro, é o preço a termo observado no tempo $t=0$. Segundo Hull (2000), isso se aplica para qualquer preço futuro quer seja em um ambiente onde a taxa de juros é fixa, quer seja em um ambiente onde a taxa de juros é estocástica.

Assim temos que:

$$F_0 = E^{\tilde{P}}(F_T)$$

onde

F_0 é o preço futuro no tempo $t=0$

$E^{\tilde{P}}$ denota o valor esperado em um mundo neutro ao risco

F_T é o preço futuro no vencimento do contrato.

Uma vez que $F_T = S_T$, onde S_T é o preço a vista no tempo T ,

$$F_0 = E^{\tilde{P}}(S_T)$$

O preço das opções européias pode então ser dado por:

$$c = P(0,T)E^{\tilde{P}}[\max(F_T - X, 0)]$$

Sendo que $P(0,T)$ é o preço, em $t=0$, de um bond sem cupom que paga \$1 no vencimento T , então:

¹³ O contrato de futuros é um acordo para comprar ou vender um ativo, a um preço pré-estabelecido em uma data futura determinada. São normalmente negociados em bolsas que especificam características padronizadas para os contratos.

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - XN(d_2)]$$

$$p = e^{-rT} [XN(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / X) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0 / X) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

3.3. Fatores que Afetam o Preço das Opções

O preço das opções é função de 5 parâmetros: o preço do ativo subjacente, sua variância instantânea, o preço de exercício da opção, o prazo para a expiração da opção e a taxa livre de risco. A preferência do investidor não influencia o preço de uma opção.

Em resumo temos que, sendo c o preço de uma *call* e p o preço de uma *put*:

$$c = f(S, \sigma^2, X, T, r_f)$$

$$p = f(S, \sigma^2, X, T, r_f)$$

Onde:

- S:** valor do ativo subjacente
- X:** valor do preço de exercício
- T:** prazo de expiração
- σ :** volatilidade (risco) do ativo subjacente
- r_f :** taxa livre de risco.

Hull (2000) oferece uma tabela com o resumo dos efeitos no preço das opções, americanas e européias, com o aumento de uma variável, mantendo as demais constantes:

Variável	Call Européia	Put Européia	Call Americana	Put Americana
preço da ação	+	-	+	-
preço de exercício	-	+	-	+
prazo para vencimento	?	?	+	+
volatilidade	+	+	+	+
taxa livre de risco	+	-	+	-
dividendos	-	+	-	+

De outro modo, para as opções americanas:

$$\frac{\partial C}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial X} < 0, \quad \frac{\partial C}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r_f} > 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial P}{\partial X} > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial T} > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \sigma^2} > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r_f} < 0$$

E, para as opções européias:

$$\frac{\partial c}{\partial S} > 0, \quad \frac{\partial c}{\partial X} < 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \sigma^2} > 0, \quad \frac{\partial c}{\partial r_f} > 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial X} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \sigma^2} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r_f} < 0$$

O efeito do tempo para o valor de uma opção européia, de modo geral, é indefinido.

IV. Derivativos de Taxas de Juros - Modelagem

Os derivativos de taxas de juros são instrumentos cujo rendimento ou resultado depende, de alguma forma, do nível das taxas de juros.

Segundo Hull (2000), os derivativos de taxas de juros apresentam maior dificuldade para apreçamento. Dentre os aspectos citados destacamos os três abaixo:

- para alguns derivativos, é necessário desenvolver um modelo que descreva o comportamento de toda a curva de rendimento;
- as volatilidades diferem a cada ponto da curva;
- as taxas de juros são utilizadas tanto para desconto como para definição do resultado do derivativo, assim a variação da taxa tem impacto tanto no valor intrínseco da opção como no seu valor presente.

4.1 Caps e Floors

*Caps*¹⁴ e *floors*¹⁵ estão entre os mais líquidos derivativos de taxas de juros e podem ser usados como proteção ao aumento ou redução das taxas de juros, respectivamente.

¹⁴ **Cap** é um derivativo desenhado para propiciar proteção, por um período determinado, contra o **aumento** de taxa de juros acima de um determinado nível chamado de cap rate – taxa do cap. Ao detentor de um cap, fica garantido que pagará no máximo a taxa do cap sobre um valor nocional pré-determinado. Podemos considerar um cap de taxa de juros como um conjunto formado por calls europeias - chamadas caplets, lançadas sobre uma taxa básica, por exemplo, a *Libor*, com o mesmo preço de exercício, porém com vencimentos diferentes.

¹⁵ **Floor** é um derivativo desenhado para propiciar proteção, por um período determinado, contra a **redução** de taxas de juros abaixo de um determinado nível chamado de floor rate – taxa do floor. O detentor do floor garante uma remuneração mínima igual à taxa floor, sobre um valor nocional determinado. Podemos considerar um floor como um conjunto formado por puts europeias chamadas floorlets, com o mesmo preço de exercício, porém com vencimentos diferentes, lançadas sobre uma taxa de juros, por exemplo, *Libor*.

Podemos ver um *cap* de taxa de juros como um portfolio de calls européias. Sejam t_1, t_2, \dots, t_n sejam as datas de repactuação da taxas, T o tempo de existência total da opção (*cap*) e $t_{n+1} = T$. Definindo R_k a taxa para período entre t_k e t_{k+1} , observada no tempo t_k ($1 \leq k \leq n$), o *pay off* do *caplet* referente a R_k , no tempo t_{k+1} :

$$N\delta_k \max(R_k - R_{cap}, 0)$$

Onde:

N é o valor nocional

δ_k é igual a período $t_{k+1} - t_k$

R_{cap} é a taxa do *cap* que funciona como preço de exercício da opção.

Haug (2007) afirma que a versão modificada do modelo de Black-76, abaixo, é provavelmente o mais utilizado para apreçar opções em taxa de juros. O modelo foi originalmente desenvolvido para apreçar opções em contratos de futuros de *commodities*. Quando utilizado para apreçar *caps* ou *floors*, considera-se como ativo subjacente a taxa forward implícita de cada *caplet* ou *floorlet* como o ativo subjacente. Assume-se que essas taxas a termo seguem uma distribuição lognormal, com volatilidade σ . O preço do *cap* é dado pela soma equiponderada dos preços de cada *caplet* que o compõe. Da mesma forma, o preço de um *floor* é dado pela soma equiponderada dos preços de cada *floorlet* que o compõe.

$$cap\ value = \sum_{i=1}^n caplet_i$$

Cada *caplet* é calculado por

$$caplet\ value = \frac{notional \times \frac{\tau}{basis}}{\left(1 + F \frac{\tau}{basis}\right)} \times call\ value_{Black-76\ Formula},\ \text{OU}$$

$$caplet\ value = \frac{notional \times \frac{\tau}{basis}}{\left(1 + F \frac{\tau}{basis}\right)} \times e^{-r_f T} [FN(d_1) - XN(d_2)]$$

e

$$d_1 = \frac{\ln(F / X) + \frac{1}{2} \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Onde:

- F é taxa a termo,
 $basis$ é número de dias por ano considerado pelo mercado,
 T é prazo para o vencimento da opção,
 X é preço de exercício da opção, no caso de um *cap* a taxa *cap* ou R_{cap} .

Pode-se observar ainda que, no modelo acima apresentado por Haug, a taxa de juros é considerada constante ou determinística, assim como a volatilidade. Neftici (2000) afirma que essa hipótese não pode ser mantida, principalmente quando tratamos de derivativos de taxa de juros, pois é precisamente o risco associado com os movimentos das taxas de juros que torna esse tipo de derivativo tão negociado. Porém ressalta que, mantida as duas hipóteses para derivativos de curto prazo, o resultado obtido é uma aproximação razoável.

4.2. Modelo de Mercado da Libor - LMM

4.2.1 Contexto Geral - Modelos da Estrutura a Termo de Taxas de Juros

Segundo Copeland *et al* (2005) os modelos da estrutura a termo das taxas de juros enquadram-se em, basicamente, 2 categorias: os modelos de equilíbrio geral e os modelos de não arbitragem.

Os modelos de equilíbrio especificam um processo para as taxas de juros de curto prazo com base hipóteses sobre as variáveis econômicas e, a partir desse ponto, definem a estrutura a termo das taxas de juros. Nesses modelos, a estrutura a termo atual das taxas de juros é o *out put*. Hull (2000) aponta outra característica dos modelos de equilíbrio: o *drift*¹⁶ da taxa de juros de curto prazo não é função do tempo, mas da própria taxa. Por fim, é consenso entre esses autores que os modelos de equilíbrio não se ajustam automaticamente aos dados obtidos no mercado para qualquer que seja o ponto da curva. Geralmente os modelos de equilíbrio de um fator podem ser descrito pelo seguinte processo de Ito:

$$dr = m(r)dt + w(r)dz$$

Entre os modelos de equilíbrio são citados os modelos de:

- a) Rendelman e Bartter (1980), que assumem que a taxa r segue um movimento browniano: $dr = \mu r dt + \sigma dz$;
- b) Vasieck (1977), que assume um processo de reversão à taxa média de longo prazo: $dr = v(b - r)dt + \sigma dz$, onde b é a média de longo prazo da taxa de curto prazo e v a velocidade de ajuste ou reversão à média.

¹⁶ O drift representa a esperança da taxa de juros, ou sua tendência.

- c) Cox, Ingersoll e Ross (1985), que também assumem um modelo de reversão a média, cujo desvio padrão das variações nas taxas de juros é proporcional a raiz quadrada do nível das taxas: $dr = \nu(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$.

Com isso, o modelo CIR corrige o problema existente no modelo de Vasiek, o qual permite que as taxas sejam negativas.

Os modelos de não arbitragem, por outro lado, são calibrados de forma a estarem aderentes aos dados observados no mercado. Copeland *et al* (2005) afirma que, nesses modelos, os dados de mercado das curvas de rendimento entram como input para garantir a aderência do modelo e dos valores futuros da taxa de curto prazo à estrutura a termo atual das taxas de juros. A média ou esperança da taxa de juros é uma função do tempo. Entre os modelos citados temos os desenvolvidos por:

a) Ho e Lee (1996): $dr = \theta(t)d_t + \sigma dz$,

b) Hull e White (1990): $dr = [\theta(t) - vr]d_t + \sigma dz$;

Ainda na mesma categoria de não arbitragem temos a proposta de Heath, Jarrow e Morton (HJM) que modela a evolução das taxas a termo. O modelo HJM foi originalmente desenvolvido em tempo contínuo com taxas forward instantâneas e lognormais. O artigo original mencionava a explosão do processo, com probabilidade positiva, para taxas lognormais instantâneas, no limite de tempo contínuo. Porém, segundo Rebonato (2002), quando o processo é “discretizado” e as taxas forward passam a ser finitas, a explosão lognormal desaparece.

Considerando a versão em tempo discreto do modelo HJM apresentada por Copeland *et al* (2005), a evolução das taxas a termo seria dada por:

$$\Delta f(t, T) = \alpha(t, T)\Delta + \sigma(t, T)\Delta z$$

onde $\Delta f(t, T) = f(t + \Delta, T) - f(t, T)$ e:

$f(t, T)$	é a taxa a termo na data t para o período de T a $T + \Delta$;
$\alpha(t, T)$	é o <i>drift</i> da taxa a termo;
$\sigma(t, T)$	é a volatilidade instantânea;
Δz	é variável normalmente distribuída com média zero e desvio padrão igual a $\sqrt{\Delta}$.

Para a implementação do modelo HJM, utiliza-se a abordagem de árvore binomial, entretanto ao contrário dos modelos anteriormente citados, nesse caso, a árvore não é recombinante¹⁷, portanto a técnica mais adequada para implementação do modelo são as simulações de Monte Carlo.

Segundo Hull (2000), o modelo HJM apresenta outros problemas:

- a taxa de juros *forward* instantânea não é diretamente observável no mercado;
- o ajuste do modelo para preços de ativos negociados ativamente no mercado, como os *caps* ou *floors*, apresenta dificuldades.

¹⁷ Em uma árvore não recombinante um movimento de subida seguido por um movimento de descida não resulta no mesmo valor de um movimento de descida seguido por um movimento de subida. Uma árvore não recombinante implica que o processo para r não é um processo de Markov.

4.2.2 Modelo de Mercado da Libor

O modelo de mercado da *Libor* proposto por Brace, Gatarek e Musiela (BMG), Jamshidian e Milterson, Sandmann e Sondermann, ainda segundo Hull (2000), supera os problemas apontados, pois é expresso em termos da taxas forward normalmente utilizadas pelos *traders* no mercado e, portanto, é automaticamente consistente com preços de *caps*. Abaixo replicamos o modelo apresentado.

Considerando o modelo de apenas um fator, um mundo neutro ao risco em relação à $P(t, t_{k+1})$, um *cap* com datas de reajuste t_1, t_2, \dots, t_n e um pagamento final em $t_n + 1$, define-se $t_0 = 0$, $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ ($0 \leq k \leq n$) e:

- $F_k(t)$ como a taxa forward entre o tempo t_k e t_{k+1} , observada no tempo t , com período de descaplicação de δ_k ;
- $m(t)$ índice para a próxima data de repactuação no tempo t , isso significa que $m(t)$ é o menor inteiro tal que $t \leq t_{m(t)}$;
- $\xi_k(t)$ volatilidade de $F_k(t)$, no tempo t ;
- $v_k(t)$ volatilidade do preço de um bond sem cupom $P(t, t_k)$, no tempo t ;

$F_k(t)$ é um Martingale que segue o processo abaixo:

$$dF_k(t) = \xi_k(t) F_k(t) dz,$$

onde dz é um processo de Wiener.

V. Modelo Lokoianova, Neftci e Sharma para Apreçamento de Linhas de Crédito Contingentes

5.1 Descrição

O modelo LNS supõe o caso onde uma CCL funciona como instrumento de transferência do risco associado com um evento A, de baixa probabilidade, que afeta negativamente as oportunidades de *funding* de uma empresa, por exemplo: fechamento temporário do mercado de CP ou a elevação das taxas desse mercado em função de um choque externo.

Considera uma linha de crédito contratada em t_0 , com as seguintes especificações:

T : prazo de validade do contrato

N : montante máximo disponibilizado para empréstimo

L_t : taxa referencial (*Libor*) cobrada sobre os montantes sacados em t

S_{t_0} : *spread* de crédito, definido no momento da contratação t_0 , que é cobrado somado a taxa referencial de juros, sobre os montantes sacados em t .

O contrato também contém uma cláusula de *escape* (*material adverse clause*) que desobriga o banco do contrato assinado, na ocorrência de determinadas circunstâncias, como por exemplo, a deterioração da classificação de risco de crédito do tomador.

A períodos regulares de tempo t_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$), a empresa tem que rolar uma necessidade de recursos no mercado financeiro no montante de \$ N , pagando L_{t_i} (*Libor*) mais um *spread* c_{t_i} nas datas t_{i+1} .

A CCL, nesse caso, apresenta a seguinte estrutura:

- a) O contrato é assinado em t_0 por n períodos. O vencimento é definido como T , com $T = t_n$.
- b) O valor máximo da linha é \$ N , portanto o detentor da linha poderia sacar qualquer valor até o montante \$ N . Entretanto, a modelagem de LNS assume o saque total do montante \$ N nos momentos quando a empresa aciona a CCL.
- c) A parte não utilizada da linha está sujeita a *facility fee* u_{t_0} . Loukoianova *et al* (2007) interpreta u_{t_0} como prêmio pago pela linha, no início do contrato (diferente do que é praticado no mercado, onde u_{t_0} é pago durante a vigência da linha, como uma tarifa de periodicidade definida em contrato, por exemplo, anual).
- d) Adicionalmente, sobre a parte utilizada da linha é pago o *spread* s_{t_0} sobre a taxa referencial *Libor*. Ambos u_{t_0} e s_{t_0} são definidos na contratação e permanecem inalterados durante a vigência do contrato.
- e) As CCL, em geral podem ser acionadas a qualquer tempo, entretanto é assumida a simplificação na qual o contrato só pode ser acionado em tempos predeterminados t_1, t_2, \dots, t_{n-1} . A simplificação torna-se inócua fazendo com que $t_i - t_{i-1}$ seja um número muito pequeno.

f) Quando a linha é utilizada, o tomador paga um custo anual total r_{t_i} , onde:

$$r_{t_i} = L_{t_i} + s_{t_0}$$

g) Em t_i , o tomador tem a opção de pré-pagar o montante sacado da linha e buscar, no mercado de CP, os recursos necessários. Portanto se $c_{t_i} < s_{t_0}$, a empresa escolherá pagar o banco.

h) Na ocorrência do evento B , definido como a deterioração da classificação de risco do tomador, o contrato é automaticamente cancelado. B ocorre quando o *spread* de crédito da empresa no mercado c_t ultrapassar o nível c^* , isto é:

$$s_{t_0} < c^* < c_t$$

A CCL modelada funciona como instrumento de melhoria de liquidez e de risco de crédito para as empresas tomadoras. Quando utilizadas, tem o caráter de empréstimo temporário.

5.2 Portfolio Replicador

Segundo Loukoianova *et al* (2007), o *portfolio* replicador para a CCL consiste em um *cap* sobre o *spread* de crédito c_t com datas de exercício t_i , combinado com uma opção de barreira reversa (*reverse knock-out option*¹⁸), que expira na ocorrência do evento de crédito B:

$$c^* < c_t, t_0 \leq t \leq t_n = T$$

Se o evento B ocorrer, a empresa tem seu *rating* rebaixado e cessa a obrigação do banco em emprestar os recursos.

¹⁸ *Reverse knock-out option* é um tipo de opção de barreira que expira no momento a opção está dentro do dinheiro (*in the money*), isto é, quando a opção tem um valor intrínseco positivo.

O primeiro instrumento (*caplet*) e seu respectivo *cap* é como uma *call* sobre o *spread* de crédito tal que, na data t_{i+1} a opção paga $MAX[N\delta(c_{t_i} - s_{t_0}), 0]$, onde δ é o período do empréstimo expresso em anos.

Se na data em que o *caplet* expira t_i , o *spread* c_{t_i} exceder o nível s_{t_0} , o mercado de CP se torna menos atrativo e a linha de crédito é acionada.

O valor justo de mercado no tempo t do knock-out *ith caplet* pode ser dado por:

$$(cpl)_t^i = B(t, t_{i+1}) E_t^P [N\delta \text{Max}\{(c_{t_i} - s_{t_0}), 0\}] 1_{\{ct < H, t_0 \leq t \leq t_i\}}$$

Onde:

$1_{\{ct < H, t_0 \leq t \leq t_i\}}$: função indicadora do evento em que a empresa não sofre rebaixamento de classificação de crédito antes do vencimento do *caplet*.

$E_t^P [N\delta \text{Max}\{(c_{t_i} - s_{t_0}), 0\}]$: esperança sob a medida de risco a termo em t do *pay off* do *caplet* que expira em t_i .

$B(t, t_{i+1})$: é o desconto em \$1 a ser pago em t_{i+1} , calculado a partir de um *zero cupom bond*¹⁹ com risco, utilizando a taxa a termo de risco para o tempo t_{i+1} .

¹⁹ *Zero cupom bond* é o título que não paga juro periódico. É geralmente negociado abaixo do valor de face de forma que a diferença represente a remuneração ao investidor.

O uso do *discount bond* com risco de *default*²⁰ objetiva normalizar o preço do papel. Isso requer que, em *default*, a taxa de recuperação seja diferente de zero com probabilidade igual a um.

Adicionando n *caplets* com datas de exercício t_i ($i= 1, 2, \dots, n$) em um único contrato, obtêm-se um *cap* sobre o *spread* de crédito c_t cujo valor no tempo t é dado por:

$$(cap)_t = \sum_{i=1}^n (cpl)_t^i$$

O *portfolio* replicador consiste, então, em a empresa comprar um *knock-out cap* do banco ao custo de s_{t_0} e, ao mesmo tempo, obter um empréstimo, no mercado financeiro, à taxa flutuante de $L_{t_i} + c_{t_i}$, com datas de renegociação t_i . Esse *portfolio* equivale a um empréstimo de mercado garantido por uma CCL contratada junto a um banco.

A empresa decide nas datas t_1, t_2, \dots, t_n , se utiliza ou não a CCL. Se a linha for utilizada (sacando, por hipótese, o valor total da linha) na data t_i , o vencimento se dá em t_{i+1} , quando a empresa poderá:

- a) pagar e sacar novamente da linha; ou
- b) pagar e captar no mercado financeiro.

Dessa forma, o empréstimo realizado tem prazo de $\delta = t_{i+1} - t_i$. Assim a CCL passa a ser composta por uma seqüência de opções em uma série de contratos de

²⁰ Risco de default: risco de não pagamento do valor devido ao investidor na data aprezada.

empréstimos a taxas flutuantes $L_{t_i} + s_{t_0}$ e não há a hipótese de pré-pagamento. Em t_i , caso $c_{t_i} > s_{t_0}$, a opção de utilizar a CCL será exercida pela empresa (por hipótese assumida no modelo, será sacado o valor total da linha). Essa opção expira caso $c^* < c_{t_i}$.

O preço da CCL, u_{t_0} , depende de L_{t_i}, c_{t_i} suas volatilidades e outros parâmetros como s_{t_0} e c^* .

$$u_{t_0} = f(L_{t_i}, c_{t_i}, \sigma_{L_t}, \sigma_{c_t}, s_{t_0}, c^*)$$

Vale ressaltar que c^* limita o risco máximo assumido pelo banco. Quanto mais elevado for c^* em relação ao *spread* de crédito da empresa no mercado no instante da contratação c_{t_0} , maior é o risco assumido pelo lançador da CCL e o prêmio a ser pago pelo compromisso assumido. Os bancos em geral negociam a questão observando, além de outros itens, o seu apetite de risco e os limites de risco de crédito definidos para a carteira de crédito. Por outro lado, para as empresas, quanto maior for c^* em relação à c_{t_0} , maior será o seguro de que um rebaixamento de sua classificação de risco de crédito não afetará seu custo de captação e maior será o valor percebido para esse “seguro”.

5.3 Apreçamento

Segundo Loukoianova *et al* (2007), o apreçamento de uma CCL não pode utilizar a abordagem padrão para opções de barreira (*knock out options*) em ações e câmbio porque envolve taxas de juros e *spread* de crédito. O modelo Black-Scholes

padrão tem apenas um fator e assume a taxa de juros constante. No caso da CCL temos dois fatores e não é possível assumir a taxa de juros constante.

O caminho adotado, então, foi modelar o comportamento de n taxas a termo livre de risco F e de n taxas a termo arriscada f , encontrando a dinâmica do *spread* de crédito c_t e, em seguida, o preço do *caplet* e da opção de barreira reversa associada.

Assume-se para tal, que $F(t, t_i, t_{i+1})$ é a taxa *Libor*²¹ L_t , no tempo t , para um empréstimo feito em t_i com vencimento em $t_i + 1$, onde $t < t_i < t_{i+1}$. L_t reflete a taxa para empréstimos sem risco de crédito,. De maneira semelhante, $f(t, t_i, t_{i+1})$ é a taxa arriscada, no tempo t , aplicada sobre empréstimos a uma empresa (com risco de crédito), realizados em t_i e com vencimento em t_{i+1} , sendo $i = 1, \dots, n-1$.

$$c(t, t_i, t_{i+1}) = f(t, t_i, t_{i+1}) - F(t, t_i, t_{i+1})$$

São apresentados, no artigo de LNS, dois métodos para modelar a dinâmica do *spread* de crédito c_t .

Um método utiliza a extensão do modelo de mercado da *Libor* desenvolvida por Schönbucher, o qual inclui uma medida a termo de sobrevivência da empresa²².

O outro método é baseado no modelo de mercado da *Libor*. Modela as taxas livre de risco (F_t) e arriscada (f_t), transformando a dinâmica de $f(t, t_i, t_{i+1})$ em um processo de Martingale, pela utilização do preço de um *bond* arriscado sem cupom.

²¹ *Libor* é, normalmente, o custo de *funding* para uma empresa classificada com risco AA. O modelo de mercado da *Libor* assume a hipótese de risco de crédito zero.

²² Schönbucher, Philipp J. (2000), *A Libor Market Model with Default Risk*, Working Paper, University of Bonn.

Abaixo apresentamos ambos os métodos embora o enfoque, neste trabalho, seja dado ao segundo.

5.3.1 Método 1- Abordagem de Schönbucher

O primeiro método usa a estrutura propiciada pela extensão de Schönbucher para o modelo da *Libor* a termo cujo processo é dado por:

$$F(t, t_i, t_{i+1}) = E_t^{P^{t_{i+1}}} [L_{t_i}]$$

Onde $P^{t_{i+1}}$ representa a medida, a termo, neutra ao risco, obtida por normalização, pelo uso do preço $P(t, t_{i+1})$ de um bond, sem cupom, com vencimento em t_{i+1} . O resultado é a definição de um processo para a taxa F que não apresenta tendência.

Assim, considerando como simplificação, o apreçamento de apenas um *caplet*, na estrutura da CCL e supondo que esse se aplica ao período de tempo $[t_1, t_2]$, retira-se os subscritos i e as taxas de juros ficam definidas como $F_t \equiv F(t, t_1, t_2)$ e $f_t \equiv f(t, t_1, t_2)$ e sob a medida a termo t_2 , os processos de F e de f são dados por:

$$dF_t = F_t \sigma_t^F d\omega(t)$$

$$df_t = \gamma(f_t, \lambda(t))dt + f_t \sigma_t^f d\omega(t)$$

σ_t^F é o parâmetro de volatilidade para F_t

$\omega(t)$ é o movimento browniano (processo de Wiener) sob a medida a termo t_2

$\lambda(t)$ é um vetor de preços de mercado

σ_t^f é o parâmetro de volatilidade para a taxa f

Sob a medida termo t_2 , $F(t)$ é um processo que não apresenta tendência. Porém $f(t)$ apresenta uma tendência não definida que depende dos preços de mercado para risco de taxa de juros e risco de crédito. Além disso, a dinâmica do processo $f(t)$ não é de Martingale.

Para a abordagem de Schönbucher (2000), define-se \tilde{P} como a medida em t_2 de sobrevivência da empresa que é obtida calibrando o vetor de preços do estado t_2 , pelo uso do valor de um *bond* com risco de crédito, emitido pelo tomador da linha, com vencimento em t_2 . O autor mostra que utilizando essa medida, o processo de $f(t)$ apresenta uma dinâmica de Martingale:

$$df(t) = f_t \sigma_t^f d\bar{\omega}(t),$$

onde $\bar{\omega}(t)$ é um movimento browniano sob a medida de sobrevivência em t_2 .

Segundo Lokoianova *et al* (2007), as duas medidas podem ser conectadas pelo emprego de uma medida de martingale spot (à vista)²³ obtida pela normalização dos preços dos ativos pelo uso de uma conta de depósito de poupança definida de forma apropriada. Após a troca de probabilidade sob a medida Martingale à vista, temos:

$$d\omega(t) = d\omega_Q(t) + \alpha_{t_2}(t)dt,$$

²³ A medida Martingale spot é também a medida a termo t_0 em t_1 .

onde $\omega_Q(t)$ é um movimento browniano sob a medida Martingale à vista e α é dado recursivamente por:

$$\alpha_{t_2}(t) = \alpha_{t_1}(t) + \frac{\delta F_t}{1 + \delta F_t} \sigma_t^F$$

e α_{t_1} é a volatilidade do bond livre de risco $P(t, t_1)$ com sinal negativo.

Mudando de uma medida Martingale à vista para uma medida de sobrevivência em t_2 , obtém-se

$$d\bar{\omega}(t) = d\omega_Q(t) + \bar{\alpha}_{t_2}(t)dt$$

$$\bar{\alpha}_{t_2}(t) = \bar{\alpha}_{t_1}(t) + \frac{\delta f_t}{1 + \delta f_t} \sigma_t^f$$

Onde $\bar{\alpha}_{t_1}$ é menos a volatilidade negativa do bond $B(t, t_1)$ com risco de crédito. A relação entre os processos de Wiener é utilizada para expressar a dinâmica das taxas e do *spread* de crédito sob uma única medida. Assim pelas equações (34) menos (36), sob a medida a termo de sobrevivência em t_2 obtemos a relação entre os processos de Wiener:

$$d\bar{\omega}(t) = d\omega(t) + \alpha_{t_2}^D(t)dt$$

Onde

$$\alpha_{t_2}^D(t) = \bar{\alpha}_{t_2}(t) - \alpha_{t_2}(t)$$

$$\alpha_{t_2}^D = \alpha_{t_1}^D(t) + \frac{\delta H(t)}{1 + \delta H(t)} \sigma_t^H$$

$H(t)$ é a taxa *harzard* no tempo t .

Assim é possível escrever a dinâmica dos dois Martingales sob uma única medida. Isso faz com que uma tendência seja introduzida na dinâmica de um dos processos de Martingales que pode ser calculado desde que $\alpha_{t_2}^D$ seja conhecido.

Usando a medida de sobrevivência em t_2 temos as dinâmicas abaixo sob a mesma medida:

$$dF_t = F_t \sigma_t^F (d\bar{\omega}(t) - \alpha_{t_2}^D(t)) dt$$

$$df_{\bar{t}} = f_t \sigma_t^f d\bar{\omega}(t)$$

$$dc(t) = F_t \alpha \sigma_t^F \alpha_{t_2}^D(t) dt + [f_t \sigma_t^f - F_t \sigma_t^F] d\bar{\omega}(t)$$

$$dH(t) = \frac{\delta F_t}{1 + \delta F_t} [(1 + \delta H(t)) \alpha_{t_2}^D(t) - \delta H(t) \sigma_t^H] dt + H(t) \sigma_t^H d\bar{\omega}(t)$$

Discretizando as equações (40), (41), (42) e (43) utilizando Euler, obtém-se as trajetórias Monte Carlo para c_t utilizadas para apreçar a CCL.

O preço da CCL u_{t_0} é dado pelo pay off descontado do portfolio replicador composto pelo preço do *caplet* e da opção knock out associada:

$$(CCL)_{t_0} = B(t_0, t_2) N \delta E[Max(c_{t_1} - s_{t_0}) 1_{\{c_t < H, t_0 \leq t \leq t_1\}}]$$

5.3.1 Método 2 – Emprego do LMM

Nesse caso, LNS modelaram as taxas a termo, e o *spread* de crédito resultante, utilizando a estrutura propiciada pelo modelo de mercado da *Libor* a termo:

$$F(t, t_i, t_{i+1}) = E_t^{p^{t_{i+1}}} [L_{t_i}] \quad (01)$$

onde $p^{t_{i+1}}$ representa uma medida a termo neutra ao risco em t_{i+1} , obtida por pela normalização da taxa livre de risco pelo uso de um *bond* sem risco $P(t_i, t_{i+1})$. O processo então resultante para $F(t, t_i, t_{i+1})$ não apresenta *drift*.

A dinâmica real das taxas de juros e do *spread* de crédito é dada por:

$$\begin{aligned} dF_t &= a(F_t, t)dt + \sigma_t^F F_t d\omega_t^{(1)} \\ df_t &= b(F_t, f_t, t)dt + \sigma_t^f f_t d\omega_t^{(2)} \\ dc_t &= df_t - dF_t \end{aligned} \quad (02)$$

Onde $d\omega_t^{(1)}$ e $d\omega_t^{(2)}$ são processos de Wiener padrão, possivelmente correlacionados.

O modelo dos autores, entretanto, assume a hipótese de que, em caso de default, a taxa de recuperação é diferente de zero e utiliza um *discount bond* com risco $B(t, t_{i+1})$ para a normalização da taxa a termo arriscada. Assim, $f(t, t_i, t_{i+1})$ passa a ser um Martingale e é preciso somente especificar o *drift* da taxa a termo livre de risco - $F(t, t_i, t_{i+1})$, sob a nova medida a termo $\tilde{P}^{t_{i+1}}$.

Loukoianova *et al* (2007) consideram, no passo seguinte, para simplificação e clareza da notação, o apreçamento de apenas um *caplet* na estrutura da CCL e que o *caplet* se aplica ao período $[t_1, t_2]$, retirando o subscrito i e definindo as taxas a termo como $F_t \equiv F(t, t_1, t_2)$ e $f_t \equiv f(t, t_1, t_2)$.

A partir da dinâmica real de F_t , f_t e c_t , sob a medida a termo $\tilde{P}^{t_{i+1}}$ obtida pela utilização de $B(t, t_{i+1})$ para normalização dos processos obtiveram:

$$\begin{aligned} dF_t &= a(F_t, t)dt + \sigma_t^F F_t d\omega_t^{(1)} \\ df_t &= \sigma^f f_t d\tilde{\omega}_t^{(2)} \\ dc_t &= df_t - dF_t \end{aligned} \tag{03}$$

onde $d\tilde{\omega}_t^{(2)}$ é um processo de Wiener padrão, e a volatilidade σ^f é constante.

Foi adotada a hipótese que F_t segue um modelo de reversão à média:

$$dF_t = \beta(\mu - F_t)dt + \sigma^F F_t d\omega_t^{(1)} \tag{04}$$

onde μ é a taxa média de longo prazo e β a velocidade de reversão à média. Sob normalização com $B(t, t_2)$, $E[d\omega_t^{(1)}] = \lambda_t dt \neq 0$.

Adicionando e subtraindo o termo $\lambda_t \sigma^F F_t dt$ na equação anterior temos:

$$dF_t = [\beta(\mu - F_t) + \lambda_t \sigma^F F_t]dt + \sigma^F F_t d\tilde{\omega}_t^{(1)} \tag{05}$$

onde $d\tilde{\omega}_t^{(1)}$ é um processo de Wiener tal que $d\tilde{\omega}_t^{(1)} = d\omega_t^{(1)} - \lambda_t dt$ e $E[d\tilde{\omega}_t^{(1)}] = 0$.

Como o preço de um *caplet* também pode ser calculado utilizando a fórmula de Black (76), assume-se λ_t como uma constante, definida forma a igualar o preço do caplet calculado pela simulação da fórmula (05) com o obtido pela fórmula de Black (76).

Supondo que t_0 ($t_0 < t_1 < t_2$) seja a data de início do contrato e que o contrato do *caplet* se aplica ao período de tempo futuro $[t_1, t_2]$, o rendimento, no tempo t_2 , do *caplet* com taxa de exercício de K é dado por:

$$N\delta(L_{t_1} - K)^+ \quad (06)$$

onde

N : é o valor nocional escolhido em t_0

L_{t_1} : é a taxa *Libor* observada no tempo t_1

A fórmula de Black para o *caplet* (*at the money*²⁴) é:

$$cpl(t_0, t_1, t_2, F_{t_0}) = P(t_0, t_2) N \delta F_{t_0} \left[2\Phi\left(\frac{\sigma^{cpl} \sqrt{t_1 - t_0}}{2}\right) - 1 \right] \quad (07)$$

onde

$P(t_0, t_2)$: é o valor do *bond* sem risco no tempo t_0

$\Phi(\cdot)$: é a distribuição normal padrão

σ^{cpl} : é a média anual observada da volatilidade do *caplet*.

²⁴ A condição na qual o valor do ativo subjacente é igual ao preço de exercício da opção.

O valor simulado do *caplet* é o resultado esperado de:

$$cpl(t_0, t_1, t_2, F_{t_0}) = P(t_0, t_2) N \delta E[Max(L_{t_1} - F_{t_0}, 0)] \quad (08)$$

Utilizando usando a discretização de Euler sobre a fórmula (5):

$$F_{t+1} = F_t + [\beta(\mu - F_t) + \lambda \sigma^F F_t] \Delta t + \sigma^F F_t \Delta \tilde{\omega}_t^{(1)}, \quad (09)$$

$$\tilde{\omega}_t^{(1)} \sim N(0, \sqrt{\Delta t}),$$

são simulados p ($p=3.000$) caminhos para F_t , para obter o valor esperado do resultado do *caplet*. O λ^* desejado é aquele que iguala os resultados das equações (7) e (8).

A dinâmica das taxas de juros, então, é dada por:

$$\begin{aligned} df_t &= \sigma^f f_t d\tilde{\omega}_t^{(2)} \\ dF_t &= [\beta(\mu - F_t) + \lambda^* \sigma^F F_t] dt + \sigma^F F_t d\tilde{\omega}_t^{(1)} \end{aligned} \quad (10)$$

Os autores assumem que os processos de Wiener que compõe a dinâmica das taxas a termo f_t e F_t apresentam uma correlação instantânea de ρ :

$$d\tilde{\omega}_t^{(1)} d\tilde{\omega}_t^{(2)} = \rho dt \quad (11)$$

E empregando a decomposição de Cholesky para a matriz de covariância ($d\tilde{\omega}_t^{(1)} d\tilde{\omega}_t^{(2)}$) obtém a dinâmica das taxas a termo, dada por dois processos de Wiener independentes $W_t^{(1)}$ e $W_t^{(2)}$, onde:

$$d\tilde{\omega}_t^{(1)} = dW_t^1 \quad (12)$$

$$d\tilde{\omega}_t^{(2)} = \rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)}.$$

As equações em (3) e (5) podem, então, ser reescritas em termos de $W_t^{(1)}$ e $W_t^{(2)}$:

$$df_t = \sigma^f f_t [\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)}] \quad , \quad (13)$$

$$dF_t = [\beta(\mu - F_t) + \lambda^* \sigma^F F_t] dt + \sigma^F F_t dW_t^{(1)},$$

$$dc_t = df_t - dF_t$$

$dW_t^{(1)}$ pode ser interpretado como um choque macroeconômico que afeta todas as empresas e $dW_t^{(2)}$ como um choque idiossincrático que afeta apenas a empresa específica.

Finalmente, o preço da linha de crédito contingente, u_{t_0} ou $(CCL)_{t_0}$ é dado pelo valor presente do resultado esperado do *portfolio* replicador:

$$u_{t_0} = (CCL)_{t_0} = B(t_0, t_2) N \delta E[Max(c_{t_1} - s_{t_0}, 0)] 1_{\{c_t < H, t_0 < t < t_1\}} \quad (14)$$

VI. Simulações

6.1 Simulações apresentadas por Lokoianova, Neftci e Sharma (2007)

No artigo são apresentados, os efeitos de σ^f , ρ , s_{t_0} e c^* no preço das CCL por meio de simulações onde duas variáveis são mantidas constantes enquanto os valores das duas outras são alterados.

Os valores adotados para os demais parâmetros foram:

$N = \$1$	$\mu = 6,5\%$	$F_{t_0} = 6,7\%$
$\sigma^F = \sigma^{cpl} = 15\%$	$t_1 = 1$	$f_{t_0} = 8,3\%$
$\beta = 0.05$	$t_2 = 2$	$c_{t_0} = 1,6$

Abaixo resumimos os resultados obtidos nas simulações:

- Simulação 1:** s_{t_0} e c^* são mantidos constantes enquanto são alterados os valores de σ^f e ρ . Observa-se que preço da CCL aumenta em seguida passa a reduzir, à medida que a volatilidade de f aumenta e, com ela, probabilidade do contrato expirar.
- Simulação 2:** ρ e c^* são mantidos constantes enquanto são alterados os valores de σ^f e s_{t_0} . Observa-se que o preço da CCL é função decrescente em s_{t_0} . Essa relação negativa também pode ser observada na trajetória do preço da CCL em relação às mudanças de σ^f .
- Simulação 3:** s_{t_0} e ρ são mantidos constantes enquanto são alterados os valores de σ^f e c^* . Observa-se que a relação entre σ^f e o preço da CCL é semelhante ao observado nas simulações 1 e 2. O destaque fica para o ponto de

σ^f relativo ao preço máximo da CCL, que aumenta com o aumento de c^* . A relação positiva entre c^* e o preço da CCL também é confirmada.

- **Simulação 4:** σ^f e c^* são mantidos constantes enquanto são alterados os valores de ρ e s_{t_0} . Os resultados mostraram que para valores elevados de ρ o preço da CCL é função decrescente de ρ , para pequenos valores de ρ a trajetória do preço da CCL é quase flat. Em relação a s_{t_0} , o preço da CCL é função decrescente.
- **Simulação 5:** σ^f e s_{t_0} são mantidos constantes enquanto são alterados os valores de ρ e c^* . Os resultados mostraram que para dado ρ , o preço da CCL e c^* tem relação positiva. Porém o efeito de ρ depende em quão grande é o valor de c^* . A curva de preços é quase horizontal para valores pequenos de ρ e apresenta inclinação levemente positiva para valores de ρ mais elevados.
- **Simulação 6:** σ^f e ρ são mantidos constantes enquanto são alterados os valores de s_{t_0} e c^* . Observa-se que mantido o valor de c^* , a relação entre s_{t_0} e o preço da CCL é negativa e que, mantido um valor para s_{t_0} , a relação entre c^* e o valor da CCL é positiva.

As simulações mostraram que a hipótese assumida para ρ é crítica: se for equivocada o preço resultante pode estar bem longe do preço de mercado.

Os gráficos ilustrativos das simulações encontram-se no anexo 02.

6.2 Novas Simulações – Parâmetros β e μ e o Preço das CCL

A partir das fórmulas em (12), da versão discreta das fórmulas em (13) e dos dados inicialmente utilizados nas simulações de Lokoianova *et al* (2007), foram simulados 5.000 caminhos aleatórios para as taxas arriscada e livre de risco, obtendo assim, 5000 possíveis caminhos para do *spread* de crédito c_t . Empregando, então a fórmula (14), foi obtido o valor do prêmio justo a ser cobrado pelo caplet.

As simulações foram feitas conforme as etapas abaixo descritas:

- 1) Foram gerados 5000 caminhos aleatórios para $W_t^{(1)}$, que segue uma distribuição de probabilidade normal $[0,1]$.
- 2) Foram obtidos, então, 5.000 possíveis caminhos para F_t , utilizando-se a fórmula em (13)
- 3) Com base em um preço de um caplet obtido pela fórmula de Black dada em (7), a constante λ foi calibrada, e foi encontrada a constante λ^* utilizado em (13)²⁵, recalculando-se os caminhos de F_t .
- 4) Utilizando a decomposição de Cholesk, foram gerados 5.000 caminhos aleatórios para $W_t^{(2)}$ e para f_t .
- 5) Obtivemos, dessa maneira, 5000 possíveis caminhos para de c_t dado por:

$$c(t, t_i, t_{i+1}) = f(t, t_i, t_{i+1}) - F(t, t_i, t_{i+1})$$

- 6) Finalmente calculamos u_{t_0} , dado por (14).

$$u_{t_0} = (CCL)_{t_0} = B(t_0, t_2) N \delta E [Max(c_{t_1} - s_{t_0}, 0) 1_{\{c_t < H, t_0 < t < t_1\}}],$$

²⁵ Note que essa etapa pode ser replicada em planilha Excel, utilizando-se a ferramenta de análise “atingir meta”.

As simulações foram repetidas para diversos valores de μ (taxa média de longo prazo) e β (velocidade de reversão à média), de forma a testar seus efeitos em F , em c e no preço final da CCL. Foram simulados 22 valores para β no intervalo [0.0250 ; 0.0775],. Foram adotados 21 valores de μ para cada valor de β , conforme apresentado nas tabelas 1, 2 e 3 do anexo 01.

Vale ressaltar que entre os valores adotados nas simulações encontram-se os valores originalmente adotados por LNS para β e μ . Também para os demais parâmetros e variáveis foram mantidos, para efeito comparativo, os valores originalmente assumidos por LNS. Abaixo, explicitamos esses valores:

Parâmetros	Valores	Variáveis	Valores iniciais
N	1	σ^f	0.25
t_i	1	ρ	0.5
t_{i+1}	2	s_{t_0}	0.025
F_{t_0}	0.067	c^*	0.055
f_{t_0}	0.083		
c_{t_0}	0.016		
β	0.050		
μ	0.065		
$\sigma^F = \sigma^{caplet}$	0.15		
$P(t_i, t_{i+1})$	0.9995		
$B(t_i, t_{i+1})$	0.9993		
δ	0.008		
Δt	1		

VII. Relação Esperada entre os Parâmetros β e μ e a Taxa livre de Risco, o Spread de Crédito e o Preço da CCL

Considerando a dinâmica de F_t dada em (13):

$$dF_t = [\beta(\mu - F_t) + \lambda^* \sigma^F F_t] dt + \sigma^F F_t dW_t^{(1)},$$

e sua versão discreta:

$$F_{t+1} = F_t + [\beta(\mu - F_t) + \lambda \sigma^F F_t] \Delta t + \sigma^F F_t \Delta \tilde{\omega}_t^{(1)},$$

Onde

$$\Delta \tilde{\omega}_t^{(1)} \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$$

espera-se que, mantidos os demais parâmetros constantes e avaliados os efeitos de β e μ em F_t , em c_t e no preço da CCL, os resultados obtidos indiquem que:

- quando $\mu > F_t$, F_t apresente relação positiva com β ,
- quando $\mu < F_t$, F_t apresente relação negativa com β ,
- F_t tenha uma relação positiva com μ .

Considerando que:

$$dc_t = df_t - dF_t$$

$$(CCL)_{t_0} = B(t_0, t_2) N \delta E[Max(c_{t_1} - s_{t_0}, 0)]_{\{c_t < c^*, t_0 \leq t \leq t_1\}}$$

- quando $\mu > F_t$, c_t e o preço da CCL apresentem relação negativa com β ,
- quando $\mu < F_t$, c_t e o preço da CCL apresentem relação positiva com β ,
- c_t e o preço da CCL apresentem relação negativa com μ .

Os resultados obtidos nas simulações confirmaram os efeitos inicialmente esperados.

Os gráficos 1, 2 e 3 ilustram o efeito de β e μ na taxa livre de risco F . No gráfico 3, os efeitos de β quando $\mu > F_t$ e quando $\mu < F_t$ ficam claramente evidenciados.

Os gráficos 4, 5 e 6, ilustram os efeitos, em c_t , dos parâmetros β e μ .

Os gráficos 7, 8 e 9, ilustram os efeitos no preço da CCL dos parâmetros β e μ . Nele podemos observar que os efeitos de β e μ observados no preço da CCL assemelham-se aos observados no *spread* de crédito de mercado c_t .

Gráfico 1

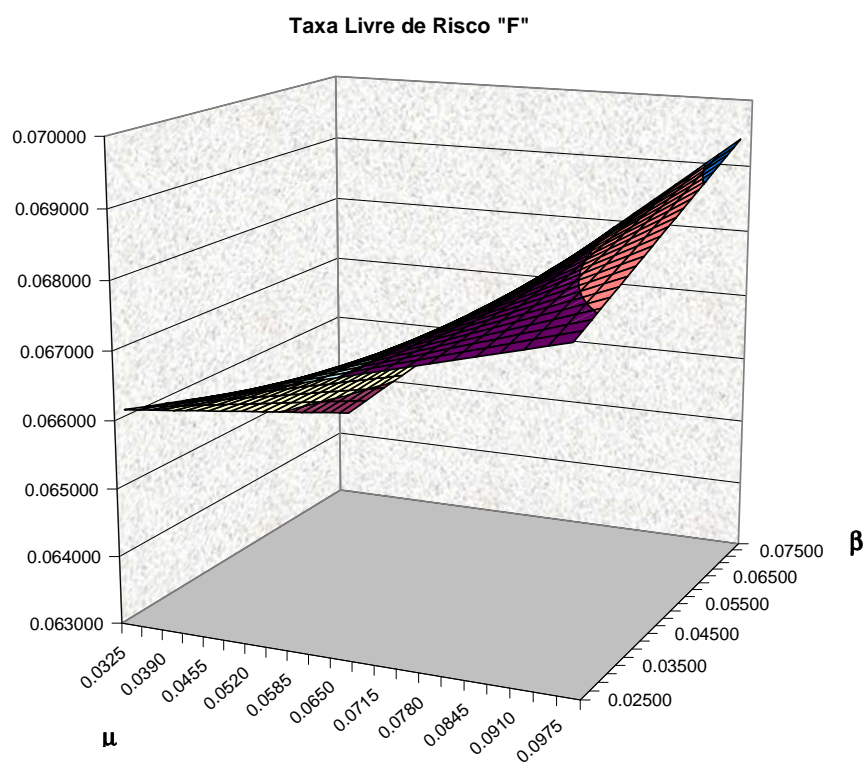


Gráfico 2

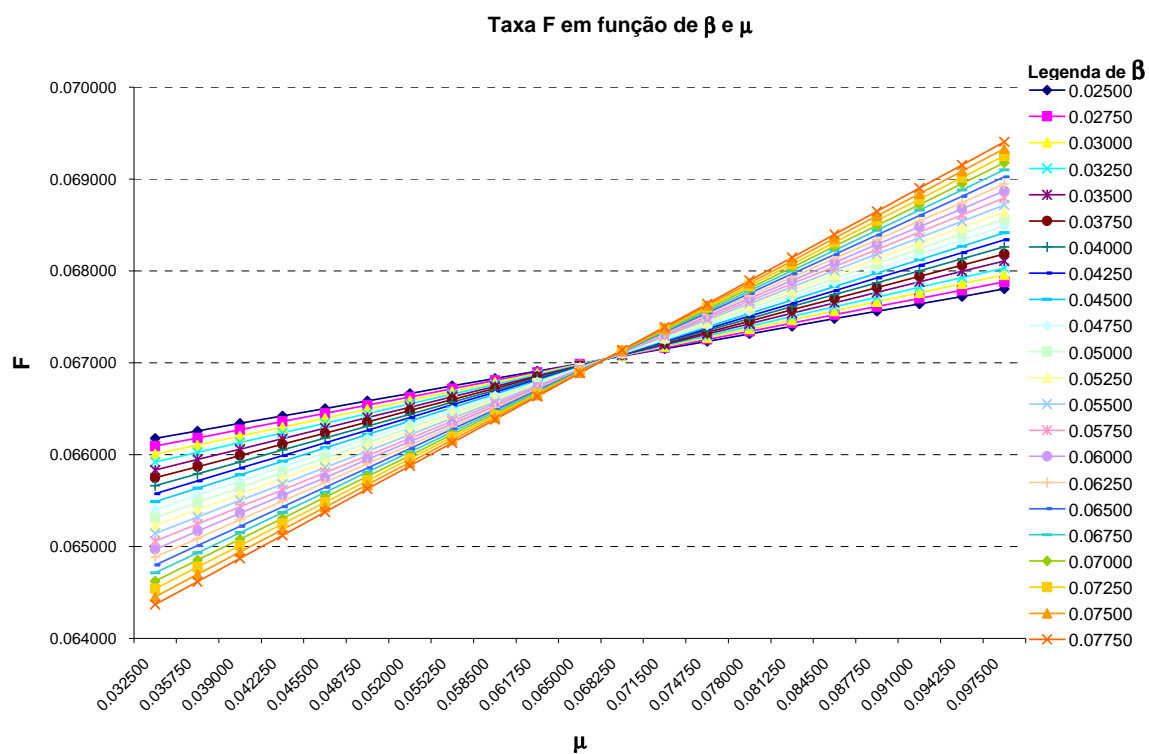


Gráfico 3

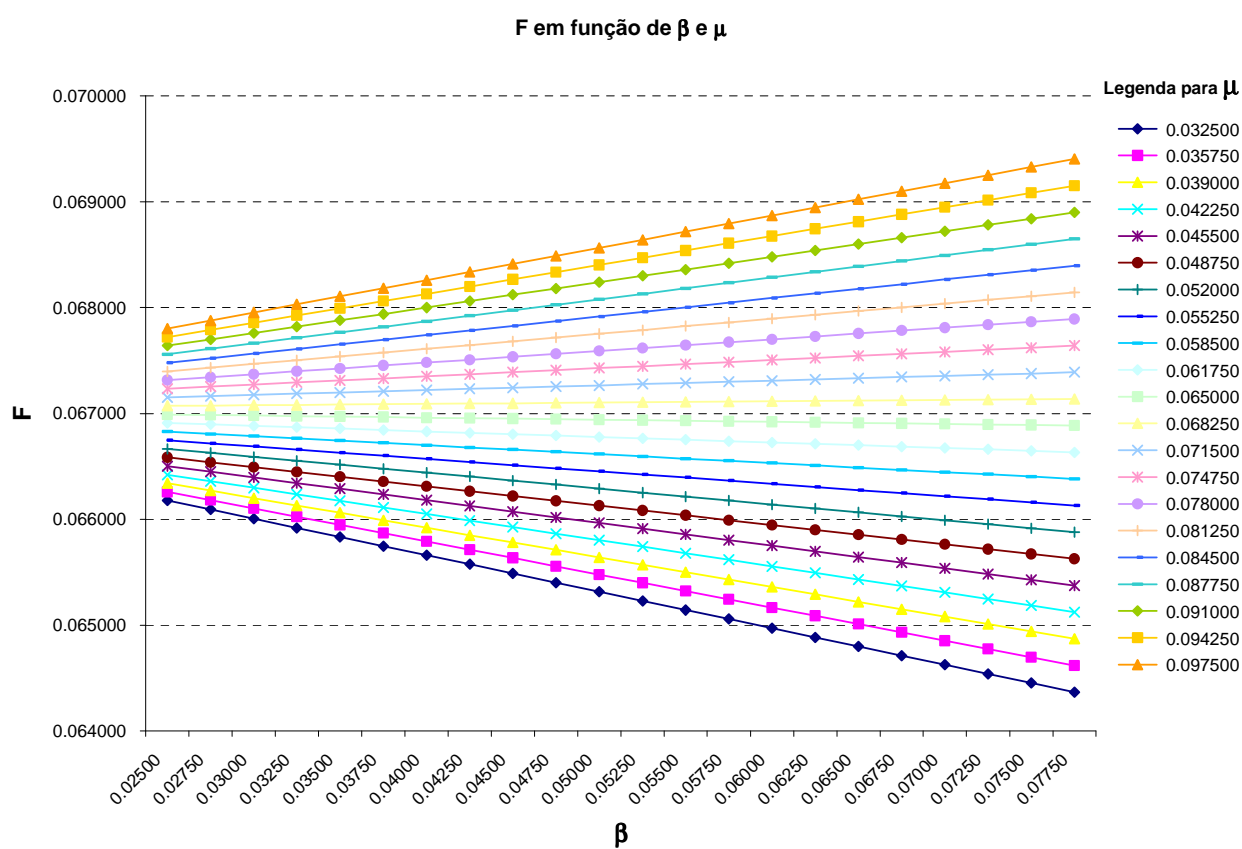


Gráfico 4

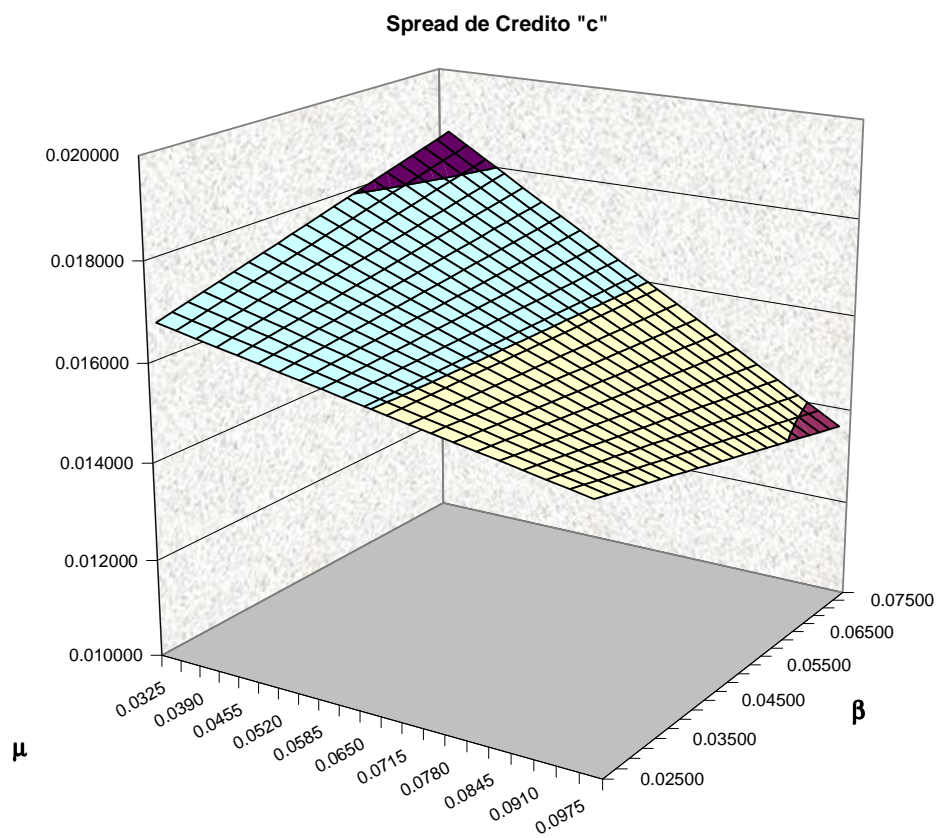


Gráfico 5

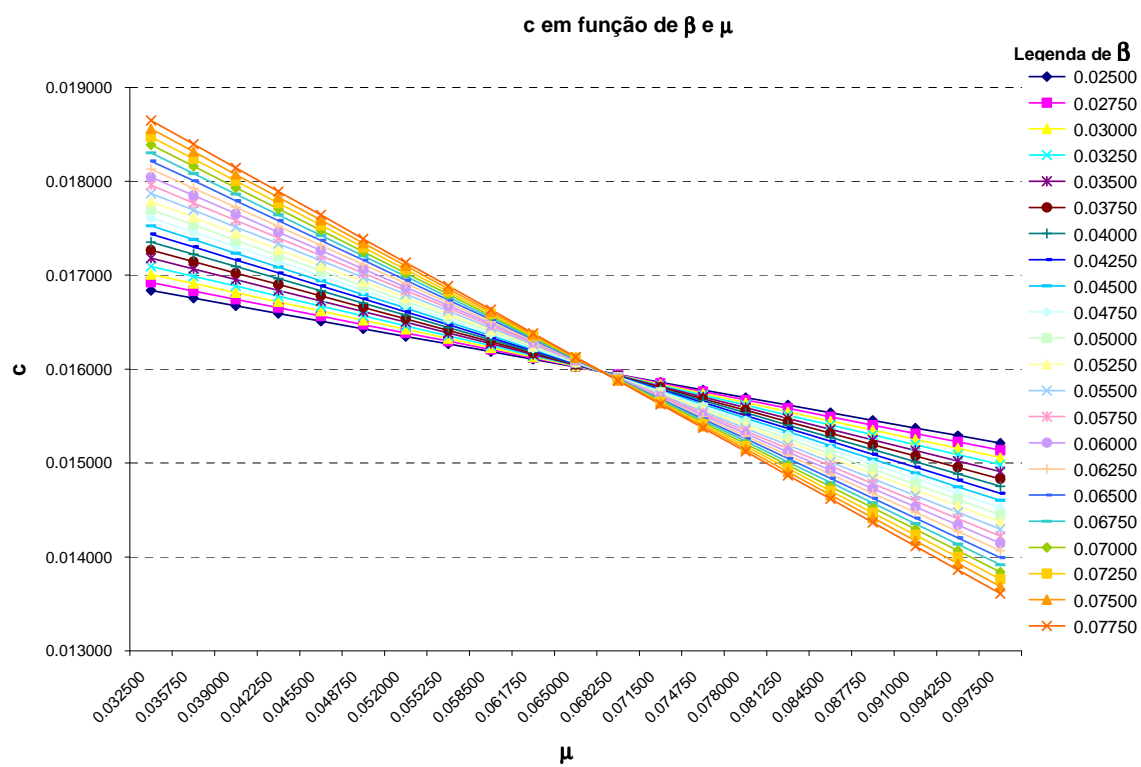


Gráfico 6

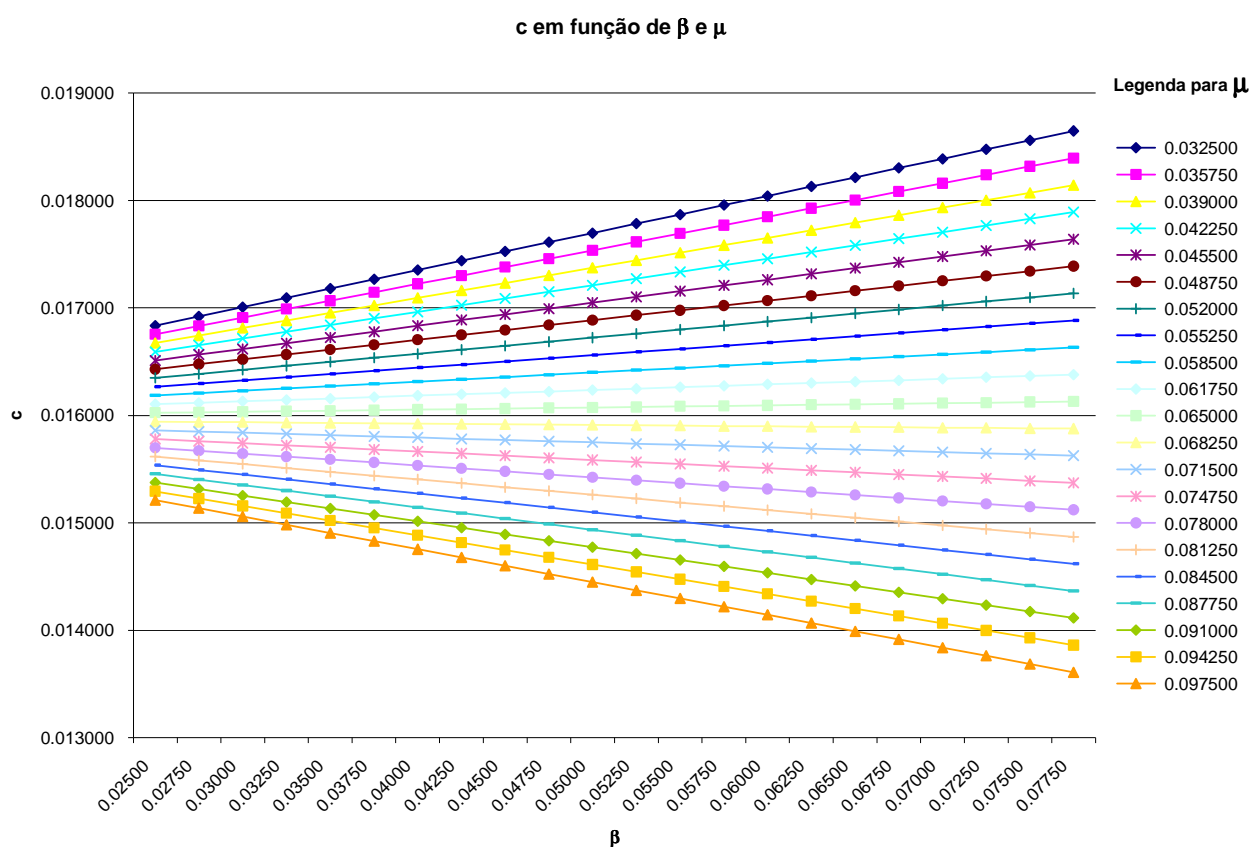


Gráfico 7

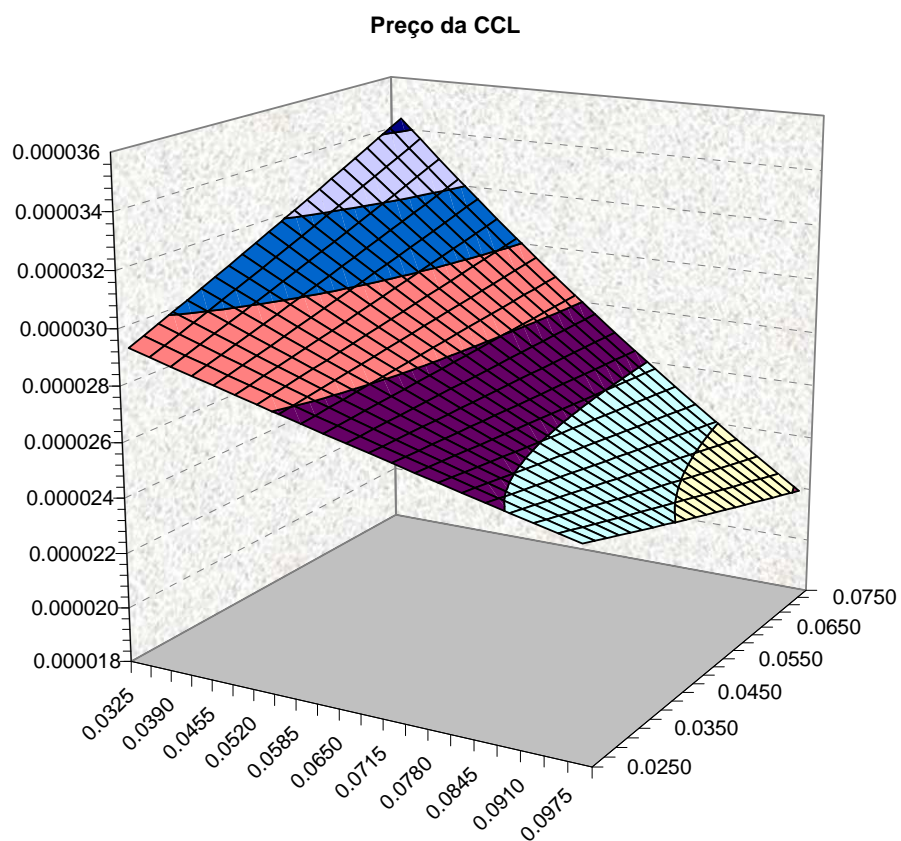


Gráfico 8

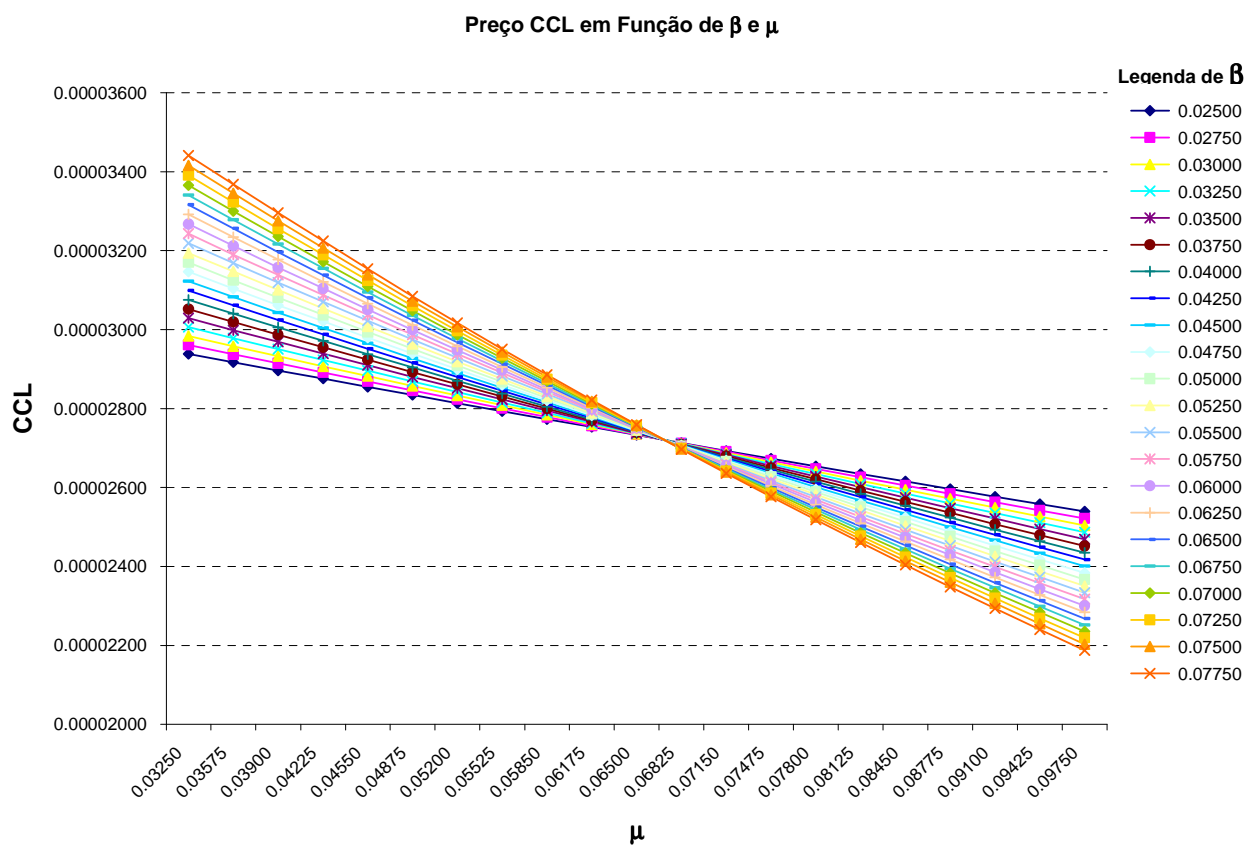
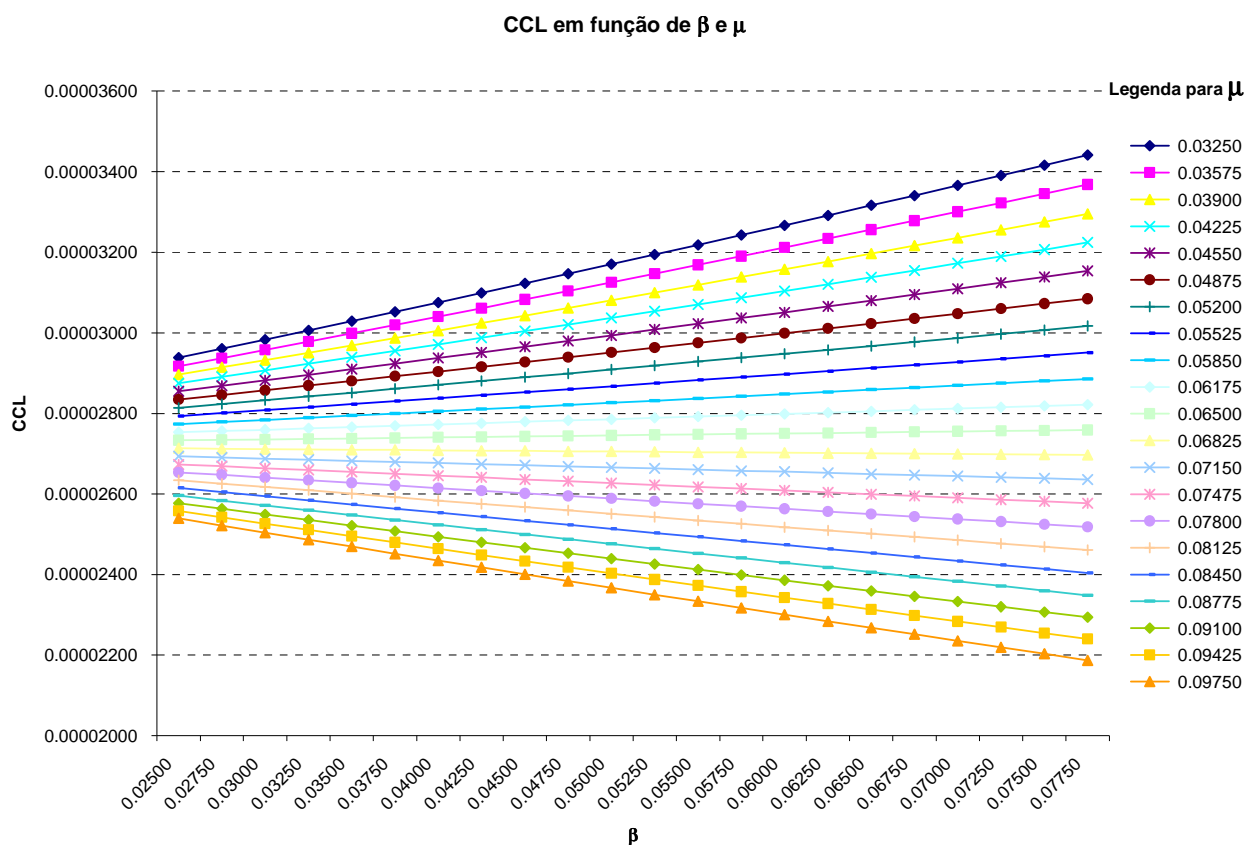


Gráfico 9



VIII. Conclusões

Foi revisado, nesse trabalho, o modelo de Lokoianova *et al* (2007) de apreçamento de linhas de crédito contingentes, incluindo entre outras contribuições, verificação dos efeitos dos parâmetros β e μ , do modelo de reversão a média utilizado para modelagem da taxa de juros livre de risco, no preço da CCL.

Uma das críticas dos modelos de reversão a média para as taxas de juros é que μ , a média de longo prazo, não é constante, mas varia ao longo do tempo. Vimos que conforme μ assuma valores maiores ou menores que F_t , o preço da CCL sofre efeitos diferenciados.

Assim, dois pontos merecem ser destacados: a importância da correta calibragem do modelo subjacente com a definição de μ e a necessidade de constante monitoramento e ajustes periódicos de μ , sob pena de observarmos os preços calculados pelo modelo ficarem fora de mercado.

Esses aspectos, aliados aos efeitos da correlação entre as taxas utilizadas na modelagem do *spread* de crédito são pontos fundamentais para aplicação apropriada do modelo LNS ao apreçamento das linhas de crédito contingentes.

Os modelos de apreçamento de opções vêm evoluindo rapidamente assim como os produtos derivativos. A cada dia surgem novos métodos, como por exemplo, o método desenvolvido por Schonbucher (2000) como uma extensão do modelo de mercado da *Libor*, usando o conceito de medida a termo de sobrevivência da empresa (survival and hazard rates).

Um das características do modelo de mercado da *Libor* salientada na literatura é sua aderência automática aos preços de mercado de derivativos de taxa de juros. As CCL, porém, não são realmente opções, visto que: não possuem liquidez, não é possível para os bancos encerrarem a qualquer tempo suas posições antes do vencimento e há a possibilidade de exercício parcial da linha. Entendemos assim, que, apesar dos resultados obtidos nas simulações, o modelo precisa ser ainda

avaliado em relação à sua aderência aos preços praticados no mercado de linhas de crédito contingentes, um mercado extremamente competitivo e de margens muito estreitas, onde a aderência e precisão na calibragem são primordiais.

IX. Referências

Black, F. (1976) – “The Pricing of Commodity Contracts”, Journal of Financial Economics, 3, 167-179.

Copeland, Thomas E., Fred J. Weston, and Kuldeep Shastri, (2005) – “Financial Theory and Corporate Policy”, 4th edition (Pearson Addison Wesley).

Cox, J.C., S.A. Ross, and M. Rubinstein (1979) – “Option Pricing: A Simplified Approach”, Journal of Financial Economics, 7, 229-264.

Elena Loukoianova, Neftci, Salih N., and Sunil Sharma, (2007) – “Pricing and Hedging of Contingent Credit Lines”, Journal of Derivatives, Spring 2007, 61-79.

Haug, Espen Gaarder (2007) – “The Complete Guide to Option Pricing Formulas”, (Macgraw –Hill Companies, Inc. – USA).

Hull, John C., (2000) – “Options, Futures & Other Derivatives”, 4th edition (Prentice-Hall International Inc. - USA).

Neftci, Salih N., (2000) – “An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives”, 2nd Edition (Academic Press –USA).

Rendleman, R.J., and B.J. Bartter (1979): “Two-state Option Pricing”, Journal of Finance, 34, 1093-1110.

Rebonato, Riccardo (2002) – “Modern Pricing of Interest Rate Derivatives The Libor Market Model and Beyond”, Princeton University Press (USA).

Anexo 01

Tabela 1: $F = g(\beta, \mu)$

β	μ																					
	0,032500	0,035750	0,039000	0,042250	0,045500	0,048750	0,052000	0,055250	0,058500	0,061750	0,065000	0,068250	0,071500	0,074750	0,078000	0,081250	0,084500	0,087750	0,091000	0,094250	0,097500	
0,025000	0,066178	0,066260	0,066341	0,066422	0,066503	0,066585	0,066666	0,066747	0,066828	0,066910	0,066991	0,067072	0,067153	0,067235	0,067316	0,067397	0,067478	0,067560	0,067641	0,067722	0,067803	0,067884
0,027500	0,066092	0,066182	0,066271	0,066360	0,066450	0,066539	0,066628	0,066718	0,066807	0,066897	0,066986	0,067075	0,067165	0,067254	0,067343	0,067433	0,067522	0,067612	0,067701	0,067790	0,067880	0,067969
0,030000	0,066006	0,066103	0,066201	0,066298	0,066396	0,066493	0,066591	0,066688	0,066786	0,066883	0,066981	0,067078	0,067176	0,067273	0,067371	0,067468	0,067566	0,067663	0,067761	0,067858	0,067956	0,068053
0,032500	0,065920	0,066025	0,066131	0,066237	0,066342	0,066448	0,066553	0,066659	0,066765	0,066870	0,066976	0,067082	0,067187	0,067293	0,067398	0,067504	0,067610	0,067715	0,067821	0,067927	0,068032	0,068138
0,035000	0,065833	0,065947	0,066061	0,066175	0,066288	0,066402	0,066516	0,066630	0,066743	0,066857	0,066971	0,067085	0,067198	0,067312	0,067426	0,067540	0,067653	0,067767	0,067881	0,067995	0,068108	0,068222
0,037500	0,065747	0,065869	0,065981	0,066113	0,066235	0,066357	0,066478	0,066600	0,066722	0,066844	0,066966	0,067088	0,067210	0,067332	0,067453	0,067575	0,067697	0,067819	0,067941	0,068063	0,068185	0,068307
0,040000	0,065661	0,065791	0,065921	0,066051	0,066181	0,066311	0,066441	0,066571	0,066701	0,066831	0,066961	0,067091	0,067221	0,067351	0,067481	0,067611	0,067741	0,067871	0,068001	0,068131	0,068261	0,068391
0,042500	0,065575	0,065713	0,065851	0,065989	0,066127	0,066265	0,066403	0,066542	0,066680	0,066818	0,066956	0,067094	0,067232	0,067370	0,067508	0,067647	0,067785	0,067923	0,068061	0,068199	0,068337	0,068475
0,045000	0,065488	0,065635	0,065781	0,065927	0,066073	0,066220	0,066366	0,066512	0,066658	0,066805	0,066951	0,067097	0,067243	0,067390	0,067536	0,067682	0,067828	0,067975	0,068121	0,068267	0,068413	0,068559
0,047500	0,065402	0,065557	0,065711	0,065865	0,066020	0,066174	0,066329	0,066483	0,066637	0,066792	0,066946	0,067100	0,067255	0,067409	0,067563	0,067718	0,067872	0,068027	0,068181	0,068335	0,068489	0,068643
0,050000	0,065316	0,065478	0,065641	0,065803	0,065966	0,066128	0,066291	0,066453	0,066616	0,066778	0,066941	0,067103	0,067266	0,067428	0,067591	0,067753	0,067916	0,068078	0,068241	0,068403	0,068566	0,068728
0,052500	0,065230	0,065400	0,065571	0,065742	0,065912	0,066083	0,066253	0,066424	0,066595	0,066765	0,066936	0,067107	0,067277	0,067448	0,067619	0,067789	0,067960	0,068130	0,068301	0,068472	0,068642	0,068813
0,055000	0,065143	0,065322	0,065501	0,065680	0,065858	0,066037	0,066216	0,066395	0,066573	0,066752	0,066931	0,067110	0,067288	0,067467	0,067646	0,067825	0,068003	0,068182	0,068361	0,068540	0,068718	0,068897
0,057500	0,065057	0,065244	0,065431	0,065618	0,065805	0,065992	0,066178	0,066365	0,066552	0,066739	0,066926	0,067113	0,067300	0,067487	0,067673	0,067860	0,068047	0,068234	0,068421	0,068608	0,068795	0,068982
0,060000	0,064971	0,065166	0,065361	0,065556	0,065751	0,065946	0,066141	0,066336	0,066531	0,066726	0,066921	0,067116	0,067311	0,067506	0,067701	0,067896	0,068091	0,068286	0,068481	0,068676	0,068871	0,069066
0,062500	0,064885	0,065088	0,065291	0,065494	0,065697	0,065900	0,066103	0,066307	0,066510	0,066713	0,066916	0,067119	0,067322	0,067525	0,067728	0,067932	0,068135	0,068338	0,068541	0,068744	0,068947	0,069150
0,065000	0,064798	0,065010	0,065221	0,065432	0,065643	0,065855	0,066066	0,066277	0,066488	0,066690	0,066901	0,067112	0,067323	0,067534	0,067745	0,067956	0,068167	0,068378	0,068589	0,068800	0,069011	0,069222
0,067500	0,064712	0,064932	0,065151	0,065370	0,065590	0,065809	0,066028	0,066247	0,066466	0,066685	0,066904	0,067123	0,067342	0,067561	0,067780	0,068000	0,068219	0,068438	0,068657	0,068876	0,069095	0,069314
0,070000	0,064626	0,064853	0,065081	0,065308	0,065536	0,065763	0,065991	0,066218	0,066446	0,066673	0,066901	0,067128	0,067356	0,067583	0,067811	0,068038	0,068266	0,068493	0,068721	0,068948	0,069176	0,069404
0,072500	0,064540	0,064775	0,065011	0,065247	0,065482	0,065718	0,065953	0,066189	0,066425	0,066660	0,066896	0,067132	0,067367	0,067603	0,067839	0,068074	0,068310	0,068545	0,068781	0,069017	0,069252	0,069487
0,075000	0,064453	0,064697	0,064941	0,065185	0,065428	0,065672	0,065916	0,066160	0,066403	0,066647	0,066891	0,067135	0,067378	0,067622	0,067866	0,068110	0,068353	0,068597	0,068841	0,069085	0,069328	0,069572
0,077500	0,064367	0,064619	0,064871	0,065123	0,065375	0,065627	0,065878	0,066130	0,066382	0,066634	0,066886	0,067138	0,067390	0,067642	0,067893	0,068145	0,068397	0,068649	0,068901	0,069153	0,069405	0,069657

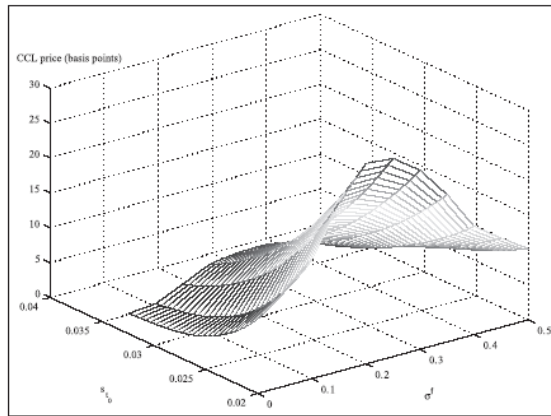
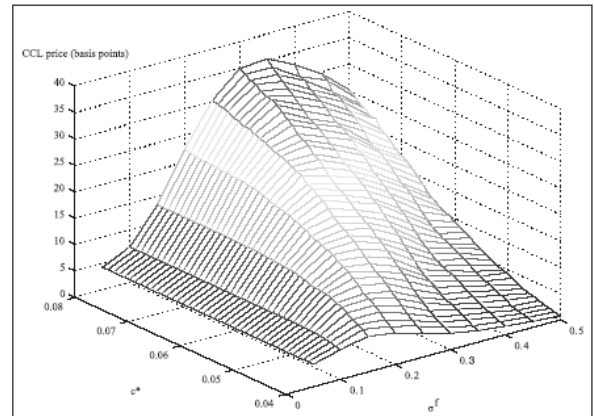
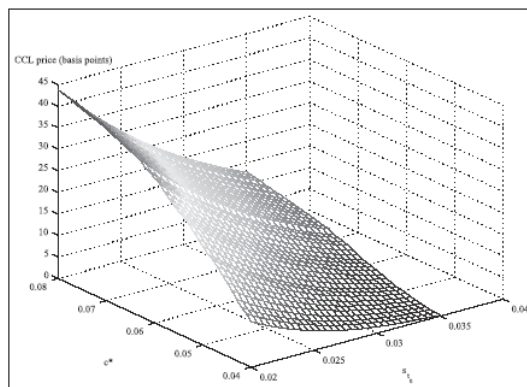
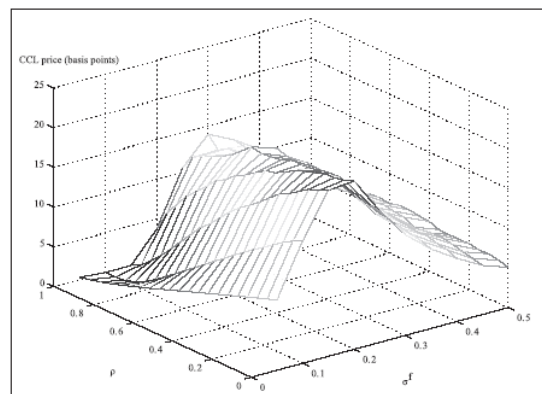
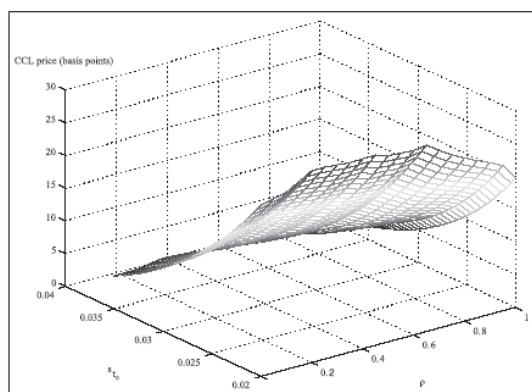
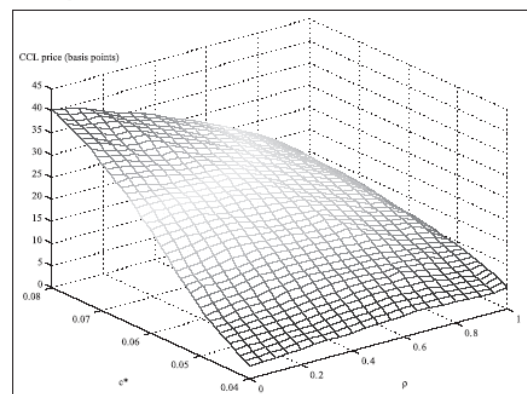
Tabela 2 : $c_t = g(\beta, \mu)$

β	μ																					
	0,032500	0,035750	0,039000	0,042250	0,045500	0,048750	0,052000	0,055250	0,058500	0,061750	0,065000	0,068250	0,071500	0,074750	0,078000	0,081250	0,084500	0,087750	0,091000	0,094250	0,097500	
0,025000	0,018836	0,016755	0,016674	0,016592	0,016511	0,016430	0,016349	0,016267	0,016186	0,016105	0,016024	0,015942	0,015861	0,015780	0,015699	0,015617	0,015536	0,015455	0,015374	0,015292	0,015211	0,015130
0,027500	0,018922	0,016833	0,016744	0,016654	0,016565	0,016476	0,016386	0,016297	0,016207	0,016118	0,016029	0,015939	0,015850	0,015761	0,015671	0,015582	0,015492	0,015403	0,015314	0,015224	0,015135	0,015046
0,030000	0,017009	0,016911	0,016814	0,016716	0,016619	0,016521	0,016424	0,016326	0,016229	0,016131	0,016034	0,015936	0,015839	0,015741	0,015644	0,015546	0,015449	0,015351	0,015254	0,015156	0,015059	0,014962
0,032500	0,017095	0,016989	0,016884	0,016778	0,016672	0,016567	0,016461	0,016356	0,016250	0,016144	0,016039	0,015933	0,015827	0,015722	0,015616	0,015511	0,015405	0,015299	0,015194	0,015088	0,014982	0,014877
0,035000	0,017181	0,017067	0,016954	0,016840	0,016726	0,016612	0,016499	0,016385	0,016271	0,016157	0,016044	0,015930	0,015816	0,015702	0,015588	0,015475	0,015361	0,015247	0,015134	0,015020	0,014906	0,014792
0,037500	0,017267	0,017146	0,017024	0,016902	0,016780	0,016658	0,016536	0,016414	0,016292	0,016171	0,016049	0,015927	0,015805	0,015683	0,015561	0,015439	0,015317	0,015196	0,015074	0,014952	0,014830	0,014708
0,040000	0,017354	0,017224	0,017094	0,016964	0,016834	0,016704	0,016574	0,016444	0,016314	0,016184	0,016054	0,015924	0,015794	0,015664	0,015534	0,015404	0,015274	0,015144	0,015014	0,014884	0,014754	0,014624
0,042500	0,017440	0,017302	0,017164	0,017026	0,016887	0,016749	0,016611	0,016473	0,016335	0,016197	0,016059	0,015921	0,015782	0,015644	0,015506	0,015368	0,015230	0,015092	0,014954	0,014816	0,014677	0,014539
0,045000	0,017526	0,017380	0,017234	0,017087	0,016941	0,016795	0,016649	0,016502	0,016356	0,016210	0,016064	0,015917	0,015771	0,015625	0,015479	0,015332	0,015186	0,015040	0,014894	0,014747	0,014601	0,014455
0,047500	0,017612	0,017458	0,017304	0,017149	0,016995	0,016841	0,016686	0,016532	0,016377	0,016223	0,016069	0,015914	0,015760	0,015606	0,015451	0,015297	0,015142	0,014988	0,014834	0,014679	0,014525	0,014371
0,050000	0,017699	0,017536	0,017374	0,017211	0,017049	0,016886	0,016724	0,016561	0,016399	0,016236	0,016074	0,015911	0,015749	0,015586	0,015424	0,015261	0,015099	0,014936	0,014774	0,014611	0,014449	0,014287
0,052500	0,017785	0,017614	0,017444	0,017273	0,017102	0,016932	0,016761	0,016591	0,016420	0,016249	0,016079	0,015908	0,015737	0,015567	0,015396	0,015226	0,015055	0,014884	0,014714	0,014543	0,014372	0,014201
0,055000	0,017871	0,017692	0,017514	0,017335	0,017156	0,016977	0,016799	0,016620	0,016441	0,016262	0,016084	0,015905	0,015726	0,015547	0,015368	0,015189	0,015011	0,014832	0,014654	0,014475	0,014296	0,014117
0,057500	0,017957	0,017771	0,017584	0,017397	0,017210	0,017023	0,016836	0,016649	0,016462	0,016276	0,016089	0,015902	0,015715	0,015528	0,015341	0,015154	0,014967	0,014781	0,014594	0,014407	0,014220	0,014033
0,060000	0,018044	0,017849	0,017654	0,017459	0,017264	0,017069	0,016874	0,016679	0,016484	0,016289	0,016094	0,015899	0,015704	0,015509	0,015314	0,015119	0,014924	0,014729	0,014534	0,014339	0,014144	0,013949
0,062500	0,018130	0,017927	0,017724	0,017521	0,017317	0,017114	0,016911	0,016708	0,016505	0,016302	0,016099	0,015896	0,015692	0,015489	0,0							

Tabela 3: CCL= g (β , μ)

β	μ																				
	0,032500	0,035750	0,039000	0,042250	0,045500	0,048750	0,052000	0,055250	0,058500	0,061750	0,065000	0,068250	0,071500	0,074750	0,078000	0,081250	0,084500	0,087750	0,091000	0,094250	0,097500
0,025000	0,0000294	0,0000292	0,0000290	0,0000288	0,0000285	0,0000283	0,0000281	0,0000279	0,0000277	0,0000275	0,0000273	0,0000271	0,0000269	0,0000267	0,0000265	0,0000263	0,0000262	0,0000260	0,0000258	0,0000256	0,0000254
0,027500	0,0000296	0,0000294	0,0000291	0,0000289	0,0000287	0,0000285	0,0000282	0,0000280	0,0000278	0,0000276	0,0000273	0,0000271	0,0000269	0,0000267	0,0000265	0,0000263	0,0000260	0,0000258	0,0000256	0,0000254	0,0000252
0,030000	0,0000298	0,0000296	0,0000293	0,0000291	0,0000288	0,0000286	0,0000283	0,0000281	0,0000278	0,0000276	0,0000274	0,0000271	0,0000269	0,0000266	0,0000264	0,0000262	0,0000259	0,0000257	0,0000255	0,0000253	0,0000250
0,032500	0,0000301	0,0000298	0,0000295	0,0000292	0,0000290	0,0000287	0,0000284	0,0000282	0,0000279	0,0000276	0,0000274	0,0000271	0,0000269	0,0000266	0,0000263	0,0000261	0,0000258	0,0000256	0,0000254	0,0000251	0,0000249
0,035000	0,0000303	0,0000300	0,0000297	0,0000294	0,0000291	0,0000288	0,0000285	0,0000282	0,0000279	0,0000277	0,0000274	0,0000271	0,0000268	0,0000265	0,0000263	0,0000260	0,0000257	0,0000255	0,0000252	0,0000250	0,0000247
0,037500	0,0000305	0,0000302	0,0000299	0,0000296	0,0000292	0,0000289	0,0000286	0,0000283	0,0000280	0,0000277	0,0000274	0,0000271	0,0000268	0,0000265	0,0000262	0,0000259	0,0000256	0,0000254	0,0000251	0,0000248	0,0000245
0,040000	0,0000308	0,0000304	0,0000301	0,0000297	0,0000294	0,0000290	0,0000287	0,0000284	0,0000281	0,0000277	0,0000274	0,0000271	0,0000268	0,0000265	0,0000261	0,0000258	0,0000255	0,0000252	0,0000249	0,0000246	0,0000243
0,042500	0,0000310	0,0000306	0,0000302	0,0000299	0,0000295	0,0000292	0,0000288	0,0000285	0,0000281	0,0000278	0,0000274	0,0000271	0,0000267	0,0000264	0,0000261	0,0000258	0,0000254	0,0000251	0,0000248	0,0000245	0,0000242
0,045000	0,0000312	0,0000308	0,0000304	0,0000300	0,0000297	0,0000293	0,0000289	0,0000285	0,0000282	0,0000278	0,0000274	0,0000271	0,0000267	0,0000264	0,0000260	0,0000257	0,0000253	0,0000250	0,0000247	0,0000243	0,0000240
0,047500	0,0000315	0,0000310	0,0000306	0,0000302	0,0000298	0,0000294	0,0000290	0,0000286	0,0000282	0,0000278	0,0000274	0,0000271	0,0000267	0,0000263	0,0000260	0,0000256	0,0000252	0,0000249	0,0000245	0,0000242	0,0000238
0,050000	0,0000317	0,0000313	0,0000308	0,0000304	0,0000299	0,0000295	0,0000291	0,0000287	0,0000283	0,0000279	0,0000275	0,0000271	0,0000267	0,0000263	0,0000259	0,0000255	0,0000251	0,0000248	0,0000244	0,0000240	0,0000237
0,052500	0,0000319	0,0000315	0,0000310	0,0000305	0,0000301	0,0000296	0,0000292	0,0000287	0,0000283	0,0000279	0,0000275	0,0000270	0,0000266	0,0000262	0,0000258	0,0000254	0,0000250	0,0000246	0,0000243	0,0000239	0,0000235
0,055000	0,0000322	0,0000317	0,0000312	0,0000307	0,0000302	0,0000298	0,0000293	0,0000288	0,0000284	0,0000279	0,0000275	0,0000270	0,0000266	0,0000262	0,0000258	0,0000253	0,0000249	0,0000245	0,0000241	0,0000237	0,0000233
0,057500	0,0000324	0,0000319	0,0000314	0,0000309	0,0000304	0,0000299	0,0000294	0,0000289	0,0000284	0,0000280	0,0000275	0,0000270	0,0000266	0,0000261	0,0000257	0,0000253	0,0000248	0,0000244	0,0000240	0,0000236	0,0000232
0,060000	0,0000327	0,0000321	0,0000316	0,0000310	0,0000305	0,0000300	0,0000295	0,0000290	0,0000285	0,0000280	0,0000275	0,0000270	0,0000266	0,0000261	0,0000256	0,0000252	0,0000247	0,0000243	0,0000239	0,0000234	0,0000230
0,062500	0,0000329	0,0000323	0,0000318	0,0000312	0,0000307	0,0000301	0,0000296	0,0000291	0,0000285	0,0000280	0,0000275	0,0000270	0,0000265	0,0000260	0,0000255	0,0000251	0,0000246	0,0000242	0,0000237	0,0000233	0,0000228
0,065000	0,0000332	0,0000326	0,0000320	0,0000314	0,0000308	0,0000302	0,0000297	0,0000291	0,0000286	0,0000281	0,0000275	0,0000270	0,0000265	0,0000260	0,0000255	0,0000250	0,0000245	0,0000241	0,0000236	0,0000231	0,0000227
0,067500	0,0000334	0,0000328	0,0000322	0,0000316	0,0000309	0,0000304	0,0000298	0,0000292	0,0000286	0,0000281	0,0000275	0,0000270	0,0000265	0,0000259	0,0000254	0,0000249	0,0000244	0,0000239	0,0000235	0,0000230	0,0000225
0,070000	0,0000337	0,0000330	0,0000324	0,0000317	0,0000311	0,0000305	0,0000299	0,0000293	0,0000287	0,0000281	0,0000276	0,0000270	0,0000264	0,0000259	0,0000254	0,0000249	0,0000243	0,0000238	0,0000233	0,0000228	0,0000224
0,072500	0,0000339	0,0000332	0,0000326	0,0000319	0,0000312	0,0000306	0,0000300	0,0000294	0,0000287	0,0000282	0,0000276	0,0000270	0,0000264	0,0000259	0,0000253	0,0000248	0,0000242	0,0000237	0,0000232	0,0000227	0,0000222
0,075000	0,0000342	0,0000335	0,0000328	0,0000321	0,0000314	0,0000307	0,0000301	0,0000294	0,0000288	0,0000282	0,0000276	0,0000270	0,0000264	0,0000258	0,0000252	0,0000247	0,0000241	0,0000236	0,0000231	0,0000225	0,0000220
0,077500	0,0000344	0,0000337	0,0000330	0,0000322	0,0000315	0,0000308	0,0000302	0,0000295	0,0000289	0,0000282	0,0000276	0,0000270	0,0000264	0,0000258	0,0000252	0,0000246	0,0000240	0,0000235	0,0000229	0,0000224	0,0000219

Anexo 02

CCL Price: $c^* = 0.0555, \rho = 0.5$ CCL Price: $s_b = 0.025, \rho = 0.5$ CCL Price: $\sigma^F = 0.25, \rho = 0.5$ CCL Price: $s_b = 0.025, c^* = 0.055$ CCL Price: $c^* = 0.055, \sigma^F = 0.25$ CCL Price: $s_b = 0.025, \sigma^F = 0.25$ 

CCL Price: $s_0 = 0.025$, $c^* = 0.055$ 