

FADIGA MULTIAXIAL POLICÍCLICA:
MODELAGEM E SIMULAÇÃO

AUTORA: CAMILLA DE ANDRADE GONÇALVES

ORIENTADOR: EDGAR NOBUO MAMIYA

CO-ORIENTADOR: JOSÉ ALEXANDER ARAÚJO

DISSERTAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

Departamento de Engenharia Mecânica

21 de setembro de 2006

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Fadiga Multiaxial Policíclica: Modelagem e Simulação

CAMILLA DE ANDRADE GONÇALVES

**ORIENTADOR: EDGAR NOBUO MAMIYA
CO-ORIENTADOR: JOSÉ ALEXANDER ARAÚJO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS**

PUBLICAÇÃO: ENM.DM-99A/06

BRASÍLIA/DF: SETEMBRO - 2006.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

FADIGA MULTIAXIAL POLICÍCLICA: MODELAGEM E
SIMULAÇÃO

CAMILLA DE ANDRADE GONÇALVES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

APROVADA POR:

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, D.Sc. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. José Alexander Araújo, Ph.D. (ENM-UnB)
(Co-orientador)

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, D.Sc. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Marcelo Amorim Savi, D.Sc. (UFRJ)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 13 DE SETEMBRO DE 2006.

FICHA CATALOGRÁFICA

GONÇALVES, CAMILLA DE ANDRADE,
Fadiga Multiaxial Policíclica: Modelagem e Simulação
[Distrito Federal] 2006.

x, 88p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2006).

Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia,
Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-------------------------|----------------------------------|
| 1. Fadiga Multiaxial | 2. Resistência à Fadiga |
| 3. Fadiga de Alto-Ciclo | 4. Carregamento Não-Proporcional |
| I. ENM/FT/UnB | II. ENM.DM-99A/06 |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Gonçalves, C. A., (2006) Fadiga Multiaxial Policíclica: Modelagem e Simulação. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM-99A/06, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 88p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Camilla de Andrade Gonçalves

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Fadiga Multiaxial Policíclica:
Modelagem e Simulação

GRAU / ANO : Mestre / 2006

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir, emprestar ou vender cópias desta dissertação de mestrado somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Camilla de Andrade Gonçalves

Rua R-12 n° 180 casa 2 Setor Oeste

74125-140 - Goiânia - GO - Brasil

Correio Eletrônico: camillaandrade@yahoo.com.br

Agradecimentos

O agradecimento verdadeiro e mais importante, eu tenho a fazer, com muito carinho a Adalberto e Neiva. Além de cumprir o irrefutável dever de educar, estes pais foram bem mais além e me transmitiram, com a propriedade que só tem quem acredita, a capacidade de sonhar. Sonhar grande, sonhar com projetos para uma vida, sonhar com o que parece impossível. Ensinar-me com suas próprias vidas que concretizar os grandes sonhos exige muito sacrifício, dedicação e perseverança. Acho que aprendi... Papai e mamãe, muito obrigada por me ensinarem a sonhar!

Ao querido orientador Edgar, minha sincera gratidão. Obrigada por todos os ensinamentos, por todo o tempo despendido, pela confiança, pela parceria, pela paciência, pela amizade. Obrigada pelo incansável entusiasmo pela pesquisa científica, transmitido a mim de forma indubitavelmente espontânea. Sua competência, que extrapola em muito os conhecimentos técnicos, me tornaram sua grande admiradora.

Ao também querido co-orientador Alex, muito obrigada pela essencial participação. Sua dedicação e a forma sempre atenciosa e prestativa com me atendeu ao longo deste trabalho tornaram esta conquista uma realidade.

Aos colegas de ontem, amigos de sempre; eternamente obrigada! Muitos de vocês foram verdadeiramente minha família durante os últimos anos e, como família, muito me ensinaram. Obrigada pela presença constante.

Finalmente, agradeço às muitas pessoas que participaram, ajudaram e torceram por esta tão sonhada conquista.

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo de critérios de resistência à fadiga multiaxial de metais em regime de alto número de ciclos. Os modelos apresentados por vários autores propõem, como medidas principais, a contribuição das tensões normais e das tensões cisalhantes para a degradação por fadiga do componente, além dos parâmetros do material. A questão que se coloca no contexto de solicitações multiaxiais é: qual é a melhor medida para caracterizar a amplitude de tensões cisalhantes e como incorporar o efeito das tensões normais? O estudo desenvolve então, uma análise destas questões relacionadas à modelagem de um critério de resistência à fadiga.

Tensões normais trativas contribuem de forma maléfica para a degradação por fadiga por agirem no processo de abertura de microtrincas; quase a totalidade dos modelos de fadiga multiaxial considera a tensão hidrostática como medida das tensões normais atuantes na solicitação à fadiga. Sabe-se que esta é basicamente uma média das tensões normais e propõe-se aqui a substituição desta, pela máxima tensão principal. A aplicação da proposta a um conjunto grande de resultados experimentais disponíveis na literatura confirmou a hipótese de que a pior situação, que corresponde à existência de uma micro-trinca ortogonalmente orientada à máxima tensão principal, deve ser considerada e fornece uma previsão de resistência à fadiga mais conservativa e portanto, a favor da segurança.

Quanto às tensões cisalhantes, primeiro apresenta-se as propostas de alguns autores, destacando-se dentre elas a abordagem do *envelope elíptico* e do *envelope prismático*. As duas aproximações fornecem as mesmas boas previsões de resistência à fadiga para dados experimentais de carregamentos senoidais com ciclos de mesma frequência. Avança-se a análise para carregamentos mais gerais cujas trajetórias se distanciam da forma de um elipsóide e verifica-se de maneira inédita que, para uma ampla faixa de histórias de carregamentos, as medidas de amplitude de tensões cisalhantes obtidas pelo máximo *envelope prismático* são equivalentes às medidas correspondentes obtidas pelo mínimo *envelope elíptico*. Tal verificação foi comprovada considerando-se trajetórias com ciclos senoidais assíncronos proporcionais e fora de fase, e ciclos não senoidais selecionadas a partir de resultados experimentais relativos a situações limites de resistência à fadiga.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Definição de fadiga, aspectos históricos | 1 |
| 1.2 | O estado da arte em fadiga multiaxial | 3 |
| 2 | Mecânica dos Sólidos: Conceitos e Definições Preliminares | 6 |
| 2.1 | Definição de algumas medidas úteis de tensão | 6 |
| 2.2 | Medidas associadas aos invariantes de tensão | 9 |
| 3 | Fadiga | 14 |
| 3.1 | Natureza física do dano por fadiga | 14 |
| 3.2 | Fadiga uniaxial (abordagem S-N) | 17 |
| 3.2.1 | Conceitos básicos | 17 |
| 3.2.2 | Curvas S-N | 18 |
| 3.2.3 | Efeito da tensão normal média | 20 |
| 3.3 | Fadiga multiaxial | 22 |
| 3.3.1 | Critério de Crossland | 25 |
| 3.3.2 | Critério de Papadopoulos | 28 |
| 3.3.3 | Critério de Mamiya e Araújo | 29 |
| 4 | O Modelo Proposto | 35 |
| 4.1 | Efeito da tensão normal | 36 |
| 4.2 | Amplitude da tensão cisalhante equivalente | 40 |
| 4.2.1 | Envelope elíptico | 42 |
| 4.2.2 | Envelope prismático | 45 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Resultados | 48 |
| 5.1 | Avaliação de resistência à fadiga: carregamentos senoidais síncronos . . . | 49 |
| 5.2 | Avaliação de resistência à fadiga: carregamentos trapezoidal e senoidais assíncronos | 58 |
| 5.2.1 | Carregamento trapezoidal | 58 |
| 5.2.2 | Carregamentos senoidais assíncronos | 62 |
| 6 | Conclusão | 68 |
| | Bibliografia | 70 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 5.1 | Resistência à fadiga de aço duro ($t_{-1}=196,2$ MPa, $f_{-1}=313,9$ MPa): dados experimentais (Nishihara e Kawamoto (1945)) e previsões. | 53 |
| 5.2 | Resistência à fadiga de 34Cr4 ($t_{-1}=256$ MPa, $f_{-1}=410$ MPa): dados experimentais (Heidenreich et al. (1983)) e previsões. | 54 |
| 5.3 | Resistência à fadiga de 42CrMo4 ($t_{-1}=260$ MPa, $f_{-1}=398$ MPa): Dados experimentais (Lempp (1977)) e previsões. | 55 |
| 5.4 | Resistência à fadiga de 30NCD16 ($t_{-1}=410$ MPa, $f_{-1}=660$ MPa): dados experimentais (Froustey e Lasserre (1989)) e previsões. | 56 |
| 5.5 | Carregamentos multiaxiais: (1) trapezoidal e (2 a 5) senoidais assíncronos | 59 |
| 5.7 | Ângulos do envelope prismático em relação ao número de rotações e valor da tensão equivalente calculada | 66 |
| 5.6 | Resultados de amplitude de tensão cisalhante $f(\tau)$, contribuição das tensões normais $g(\sigma)$ e índice de erro I para os carregamentos analisados. | 67 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Boing 737-200 da Aloha Airlines sem parte de sua fuselagem após grave acidente durante um pouso no Havaí em 1988. A perícia indicou falha por fadiga como causa do acidente. | 2 |
| 2.1 | Volume elementar V e plano material elementar Δ . (De Papadopoulos et al., (1997)) | 7 |
| 2.2 | Tensão normal \mathbf{R} e tensão cisalhante \mathbf{C} agindo no plano material Δ (De Papadopoulos et al., (1997)) | 7 |
| 2.3 | Definição da amplitude de tensão cisalhante C_a pela construção do menor círculo que circunscribe a curva Ψ . (De Papadopoulos et al., (1997)) | 9 |
| 3.1 | Sequência de nucleação de uma trinca por fadiga em um cristal de Cu para 60000 ciclos a 20°C. (Foto: De Ma e Laird, 1989. Copyright Pergamon Press plc.) | 15 |
| 3.2 | Definições de fadiga policíclica (HCF) e fadiga oligocíclica (LCF) segundo escala de deformação plástica observada ao longo do carregamento. | 16 |
| 3.3 | Carregamentos uniaxiais : (a) carregamento alternado, (c) carregamento repetido. | 18 |
| 3.4 | Curva tensão versus vida ($S-N$) de teste de corpos de prova de uma liga de alumínio não entalhados sob flexão rotativa | 19 |
| 3.5 | Curva $S-N$ de flexão rotativa para corpos de prova não-entalhados de um aço com limite de fadiga definido. | 20 |
| 3.6 | (a) Curvas amplitude de tensão versus vida para diferentes valores de tensão média. (b) Curvas de vida constante para carregamentos de fadiga com tensão média não nula. | 21 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.7 | Pressão cíclica e flexão constante combinadas em um tubo de parede fina com extremidades fechadas. | 23 |
| 3.8 | Pressão cíclica e torção constante combinadas em um tubo de parede fina com extremidades fechadas. | 24 |
| 3.9 | Menor hiperesfera que circunscribe a trajetória de tensões desviadoras . | 25 |
| 3.10 | Histórias de tensão proporcional e não-proporcional associadas à mesma amplitude $\sqrt{J_{2,a}}$ | 29 |
| 3.11 | Caracterização da sollicitação à fadiga: (a) envelope convexo, (b) elipsóide que circunscribe a trajetória | 30 |
| 3.12 | Elipsóide em \mathbb{R}^m e seu prisma retangular circunscrito com orientação arbitrária. | 31 |
| 3.13 | Amplitudes dos componentes $s_i(t)$ num espaço bidimensional. | 32 |
| 4.1 | Os três modos básicos de abertura de trincas: (a) modo I, (b) modo II e (c) modo III. | 37 |
| 4.2 | Trinca sujeita a cisalhamento (a), onde irregularidades retardam o crescimento, comparado à situação (b), onde uma tensão normal faz a trinca se abrir, acentuando seu crescimento. | 37 |
| 4.3 | Exemplos de trajetórias de carregamentos combinados de flexão e torção que não se aproximam de uma elipse. | 42 |
| 4.4 | Pelos pontos (s_1, s_3) , passam infinitas elipses com centro na origem. . . | 43 |
| 4.5 | Ilustração da metodologia de cálculo da menor elipse que circunscribe a trajetória de tensões desviadoras para carregamentos senoidais com frequência distinta. | 44 |
| 4.6 | História de tensão desviadora trapezoidal síncrona e as medidas definidas para obtenção do maior prisma retangular que a circunscribe. | 47 |
| 5.1 | Histórias de tensão senoidais síncronas ($\eta = 1$): (a) proporcional $\beta = 0$, fora de fase alternadas sem componente de tensão média (b) $\beta = 30^\circ$, (c) $\beta = 60^\circ$, (d) $\beta = 90^\circ$, e com tensão cisalhante média (e) proporcional $\beta = 0^\circ$, (f) fora de fase $\beta = 60^\circ$, | 50 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.2 | Índices de erro associados a cada dado experimental para metal duro (Nishihara e Kawamoto (1945)) | 53 |
| 5.3 | Índices de erro associados a cada dado experimental para 34Cr4 (Heidenreich et al. (1983)) | 54 |
| 5.4 | Índices de erro associados a cada dado experimental para 42CrMo4 (Lempp (1977)) | 55 |
| 5.5 | Índices de erro associados a cada dado experimental para 30NCD16 (Froustey e Lasserre (1989)) | 56 |
| 5.6 | Histograma de frequência mostrando a dispersão da diferença relativa entre previsões e valores experimentais para os critérios analisados. . . | 57 |
| 5.7 | (a) Curva $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \times \lambda_1/\lambda_3$ com ponto de mínimo que caracteriza a tensão equivalente e (b) trajetória circunscrita pela menor elipse que a contém. | 60 |
| 5.8 | Trajetoária de tensões desviadoras e o maior prisma que a circunscribe . | 61 |
| 5.9 | (a) e (c) $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}$ (MPa) $\times \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, (b) e (e): trajetórias de tensões desviadoras e menores elipses que a circunscrem | 63 |
| 5.10 | (a), (c), (e), (g): Curva $\tau_{eq} \times a_1/a_3$ com rotação do prisma de 0 a $\pi/2$ e (b), (d), (f), (h): envelope prismático cujas medidas a_1 e a_3 fornecem a tensão equivalente. | 65 |

Lista de Símbolos

| | |
|------------------------|---|
| A | razão de amplitude de tensão |
| $a_i, i = 1, \dots, 5$ | distâncias do centro do elipsóide às faces do prisma retangular com orientação arbitrária que circunscreve a história de tensão no espaço desviador |
| \mathbf{C} | vetor tensão cisalhante, i.e. projeção de \mathbf{S}_n no plano Δ |
| C_a, C_m | amplitude e valor médio da tensão cisalhante \mathbf{C} respectivamente |
| $f(\tau)$ | solicitação à fadiga devido às tensões cisalhantes |
| f_{-1} | limite de resistência à fadiga para flexão pura alternada |
| $g(\sigma)$ | solicitação à fadiga devido às tensões normais |
| I | índice de erro |
| \mathbf{I} | tensor identidade |
| $\sqrt{J_{2,a}}$ | amplitude de tensão desviadora em termos do segundo invariante do tensor tensão desviador |
| \mathbf{N}_i | base ortonormal arbitrariamente escolhida |
| \mathbf{N}_f | número de ciclos para falha por fadiga |
| \mathbf{n} | vetor normal unitário |
| P | período de um carregamento |
| p_h | tensão hidrostática |
| $p_{h_{max}}$ | valor máximo da tensão hidrostática observada ao longo da história de tensão |
| p_{h_a}, p_{h_m} | amplitude e valor médio da tensão hidrostática observada ao longo da história de tensão |
| \mathbf{R} | vetor tensão normal, i.e. projeção de \mathbf{S}_n ao longo da normal ao plano Δ |
| R | valor algébrico da tensão normal \mathbf{R} |
| R_a, R_m | amplitude e valor médio da tensão normal \mathbf{R} respectivamente |
| \mathbf{S} | tensor tensão desviador |
| \mathbf{S}_e | limite de resistência à fadiga |

| | |
|-----------------------|---|
| \mathbf{S}_n | vetor tensão atuando em Δ , equivalente ao produto interno entre $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{n} |
| s_i | componentes do tensor tensão desviador escrito em função de uma base arbitrária |
| t | instante de tempo |
| t_{-1} | limite de resistência à fadiga para torção pura alternada |
| T_a | amplitude de tensão equivalente definida no critério de fadiga de Papadopoulos (resolved shear stress amplitude) |
| \mathbf{V} | volume elementar material |
| Δ | plano material elementar |
| \mathcal{E} | elipsóide em \mathbb{R}^m |
| κ, λ | parâmetros materiais de critérios de fadiga |
| λ_i | magnitudes dos semi-eixos principais do menor elipsóide que circunscribe a trajetória de tensões desviadoras |
| Φ | curva fechada que representa a história de tensão desviadora em um espaço de cinco dimensões |
| Ψ | curva fechada que representa a história de tensão desenhada pelo vetor \mathbf{C} com o tempo, em um espaço bidimensional |
| ψ | direção de cisalhamento no critério de fadiga de Papadopoulos |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | tensor tensão de Cauchy |
| σ_a, σ_m | amplitude e valor médio, respectivamente, da tensão normal devido a flexão |
| σ_{pmax} | tensão principal máxima |
| σ_{TS} | resistência à tração |
| τ_a, τ_m | amplitude e valor médio da tensão cisalhante devido a torção, respectivamente |
| τ_{eq} | tensão cisalhante equivalente |
| φ, θ | orientações do plano material dentro do volume elementar no critério de fadiga de Papadopoulos |

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definição de fadiga, aspectos históricos

Componentes de máquinas, veículos e estruturas estão frequentemente sujeitos a carregamentos oscilatórios cujas tensões resultantes podem levar os materiais à falha. Mesmo em níveis de tensões bem abaixo do limite de resistência do material, falhas microscópicas podem evoluir até que uma trinca macroscópica se desenvolva, acarretando a falha catastrófica do componente. Este processo de degradação e falha devido a carregamentos oscilatórios é chamado *fadiga*.

O uso deste termo surgiu pela observação, nas primeiras investigações, de que as tensões cíclicas causavam uma mudança gradual e não repentina na capacidade do material de resistir a tensões. A falha mecânica por fadiga tem sido objeto de pesquisa há mais de 170 anos, sendo que um dos primeiros estudos foi realizado por volta de 1838 pelo engenheiro alemão W. A. J. Albert. Contudo, os aspectos básicos deste fenômeno foram inicialmente descritos nos trabalhos de Ewing e Rosenhain (1900) e de Ewing e Humfrey (1903). Os estudos se intensificaram principalmente após o acidente ferroviário ocorrido próximo a Versailles, França em 1842, devido à falha por fadiga do eixo dianteiro de uma locomotiva, causando a perda de muitas vidas humanas. Schütz (1996) relata diversos acidentes aéreos com causas associadas à fadiga ocorridos a partir do final da Segunda Guerra Mundial. O caso de maior impacto associado a aeronaves talvez seja o do Comet, primeiro jato comercial produzido no mundo. Aeronaves Comet desintegraram-se no ar em maio de 1953, janeiro e maio de 1954, levando a intensas

investigações sobre suas causas que se mostraram estar associadas à fadiga provocada pelos ciclos de pressurização e despressurização da estrutura da cabine de passageiros. Outro acidente grave consequente de falha por fadiga aconteceu em 1988 no Havaí quando um avião perdeu parte de sua fuselagem durante um pouso (Figura 1.1).

Hoje, a falha por fadiga é uma grande preocupação nos projetos de engenharia em todo o mundo. Segundo Dowling (1993), o custo anual que a fadiga de materiais impõe sobre a economia norte-americana é por volta de 3% do seu Produto Interno Bruto (PIB), e uma porcentagem similar é esperada para outros países industrializados. Estes custos aparecem na ocorrência ou prevenção de falha por fadiga de veículos terrestres e ferroviários, de aviões de todos os tipos, pontes, guindastes, equipamentos de plantas de potência, estruturas de plataformas marítimas e de uma grande variedade de máquinas e equipamentos, incluindo utensílios domésticos, brinquedos e equipamentos esportivos.

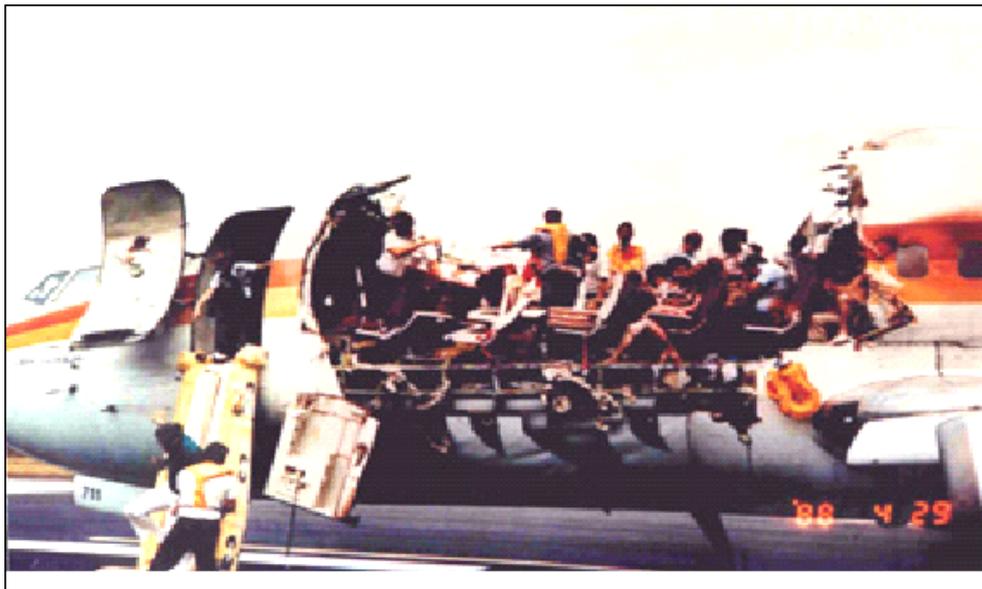


Figura 1.1: Boeing 737-200 da Aloha Airlines sem parte de sua fuselagem após grave acidente durante um pouso no Havaí em 1988. A perícia indicou falha por fadiga como causa do acidente.

Classicamente, o problema de fadiga de materiais tem sido estudada segundo três abordagens principais. A abordagem tradicional, cuja forma atual foi essencialmente desenvolvida até 1955, utiliza as tensões nominais (médias) na região do componente em análise. A tensão nominal que resiste aos carregamentos cíclicos é de

terminada considerando-se as tensões médias e fazendo-se ajustes para os efeitos de concentradores de tensão como furos, ranhuras, chanfros e rasgos de chaveta. Esta é a chamada abordagem baseada em tensões. Outra abordagem, baseada em deformações, envolve análise detalhada de plastificações ocorridas nos concentradores de tensão durante o carregamento cíclico. E finalmente, a terceira abordagem é a baseada na teoria de mecânica da fratura, que trata especificamente do crescimento de trincas. Este estudo foi desenvolvido segundo a abordagem baseada em tensões.

1.2 O estado da arte em fadiga multiaxial

Vários autores propuseram critérios de limite de fadiga em décadas de pesquisa. Apesar do grande número de propostas, não há ainda uma abordagem universalmente aceita. Os vários modelos já apresentados podem ser classificados em:

- Critérios empíricos;
- Critérios baseados nos invariantes do tensor de tensão;
- Critérios de energia;
- Critérios associados a planos críticos;
- Critérios baseados em tensões médias no interior de volumes elementares;
- Critérios baseados em nível mesoscópico.

Os primeiros critérios de fadiga multiaxial foram de natureza essencialmente empírica e amparados pelos extensos trabalhos experimentais produzidos por Gough et al. (1951) e por Nishihara e Kawamoto (1945). Sines (1955) identificou que a presença de tensões médias cisalhantes não produz efeito na vida à fadiga. Em contrapartida, identificou o efeito da amplitude limite das tensões cíclicas e a partir daí propôs um critério baseado em tensões equivalentes. Crossland (1956) desenvolveu um modelo similar ao de Sines, mas que considera como variáveis fundamentais no processo de nucleação de trincas, o valor máximo da pressão hidrostática e não o valor médio como considera Sines (1955). Mais recentemente, Deperrois (1991) e Bin Li et al. (2000) apresentaram critérios também baseados nos invariantes do tensor tensão.

Muitos modelos consideram a energia dissipada por um material quando submetido a carregamentos cíclicos como parâmetro para a quantificação do dano devido à fadiga. Propostas feitas por Harold (1996), Garud (1979) e Ellyin et al. (1991) se enquadram nesta abordagem. Ellyin e Kujawski (1993) sugeriram desta forma, que o trabalho realizado por ciclo e a pressão hidrostática eram as variáveis adequadas para se quantificar este dano.

As abordagens de plano crítico, por sua vez, consideram que as trincas de fadiga têm origem em certos planos materiais onde as combinações de tensões ou deformações cisalhantes e normais são particularmente severas. Portanto, estes critérios são capazes de prever não apenas a resistência à fadiga do material e o local de iniciação da trinca, mas também sua orientação. Modelos de plano crítico foram propostos por Findley (1959), Brown e Miller (1973), Matake (1977), Socie (1987), McDiarmid (1994), Carpentieri e Spagnoli (2001), Susmel e Lazzarin (2002), entre outros.

Há também os critérios baseados em tensões médias no interior de volumes elementares, cujos componentes básicos são quantidades médias, associadas a tensões normais e cisalhantes atuantes sobre planos específicos e calculadas no interior destes volumes elementares. Os critérios de Grubisic e Simbürger (1976) e, mais recentemente, Zenner, Liu e Simbürger (2000) se encaixam dentro desta categoria.

A descrição do fenômeno de fadiga em nível mesoscópico (nível intermediário entre as descrições microscópicas e macroscópicas) considera que as tensões ou deformações em nível do grão são as variáveis controladoras do processo de fadiga. Presume-se que a falha devido a um carregamento cíclico é precedida por uma deformação plástica localizada que ocorre em grãos cujos planos de escorregamento sejam favoravelmente orientados com a máxima tensão cisalhante. A acumulação de deformações plásticas conduz a um esgotamento da ductilidade do grão e a consequente nucleação de trincas, com eventual ruptura. Se, após esta deformação permanente localizada, o material acomodar elasticamente (“shakedown elástico”), a falha não ocorrerá. Note que a falha neste contexto não é caracterizada pela ruptura completa do componente, mas sim pela presença de trincas. Os modelos mesoscópicos de Dang Van (1973,1989) e de Papadopoulos (1994, 1997) têm recebido atenção especial de pesquisadores devido aos excelentes resultados apresentados.

Desta forma, como a plasticidade possui um papel importante no processo de iniciação de trincas, tensões cisalhantes devem ser consideradas como parâmetros dominantes no processo de fadiga.

Já a influência das tensões normais agindo nos planos materiais é contabilizada por muitos autores através de uma média: Crossland (1956), Dang Van (1989) e Mamiya e Araújo (2002) sugeriram o uso da pressão hidrostática.

Sendo assim, muitos critérios de fadiga multiaxial podem ser descritos por:

$$f(\tau) + g(\sigma) \leq \lambda, \quad (1.1)$$

onde $f(\tau)$ é uma função da tensão de cisalhamento, $g(\sigma)$ é uma função da tensão normal e λ é um parâmetro material. Os diversos critérios propostos ao longo do tempo se diferenciam pelas diferentes definições dos componentes da Equação 1.1. Nas próximas seções, alguns critérios de fadiga multiaxial são detalhados.

Capítulo 2

Mecânica dos Sólidos: Conceitos e Definições Preliminares

Para o estudo mais detalhado de alguns dos critérios de resistência à fadiga multiaxial, faz-se necessário a introdução de alguns conceitos básicos.

2.1 Definição de algumas medidas úteis de tensão

Define-se o tensor tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(t)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) & \sigma_{xz}(t) \\ \sigma_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{yz}(t) \\ \sigma_{xz}(t) & \sigma_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Considera-se um volume elementar na vizinhança de qualquer ponto no corpo de prova (Figura 2.1). A tensão $\boldsymbol{\sigma}$ atua no volume V e denota-se por Δ a intersecção do volume V com um plano que passa pelo ponto em consideração. Tal intersecção Δ é o plano material elementar definido pelo vetor normal unitário \mathbf{n} . Em Δ , atua o vetor tensão \mathbf{S}_n , Figura 2.2, dado por:

$$\mathbf{S}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.2)$$

A projeção de \mathbf{S}_n em \mathbf{n} é o vetor tensão normal \mathbf{R} , Figura 2.2, dado por:

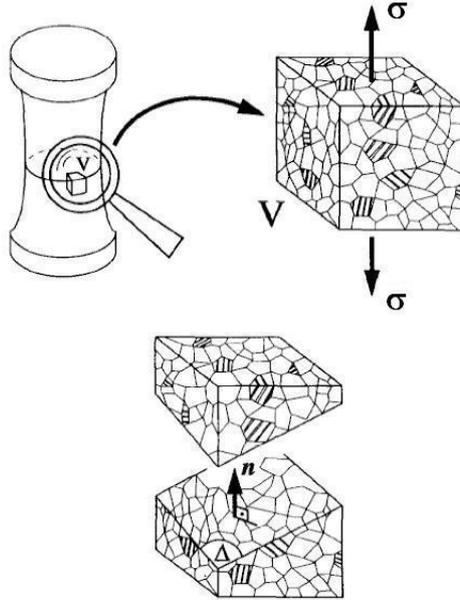


Figura 2.1: Volume elementar V e plano material elementar Δ . (De Papadopoulos et al., (1997))

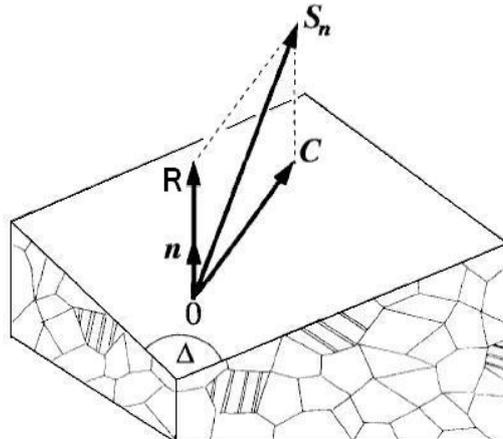


Figura 2.2: Tensão normal \mathbf{R} e tensão cisalhante \mathbf{C} agindo no plano material Δ (De Papadopoulos et al., (1997))

$$\mathbf{R} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_n)\mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (2.3)$$

Durante um carregamento cíclico, dado o plano Δ , \mathbf{R} varia em magnitude mas não em direção. Assim, \mathbf{R} pode ser totalmente descrito por seu valor algébrico R :

$$R = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_n) \quad \rightarrow \quad R = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

Para um carregamento cíclico dependente do tempo, $R = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n}$ é uma função periódica e escalar. Por conseguinte, pode-se definir sua amplitude R_a e valor médio R_m como:

$$R_a = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n}) - \min_{t \in P} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n}) \right\}; \quad (2.5)$$

$$R_m = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n}) + \min_{t \in P} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{n}) \right\}. \quad (2.6)$$

onde t é o tempo e P é o período do carregamento. O valor máximo da tensão normal é igual à soma da amplitude e da média:

$$R_{max} = R_a + R_m. \quad (2.7)$$

A projeção ortogonal de \mathbf{S}_n no plano Δ é a tensão cisalhante \mathbf{C} (Figura 2.2) dada por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_n - \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (2.8)$$

A definição da amplitude e do valor médio de \mathbf{C} é um problema delicado pois durante um carregamento cíclico, além da magnitude, a direção do vetor \mathbf{C} também varia. Durante um período P de um carregamento cíclico complexo, o vetor \mathbf{C} descreve uma curva fechada Ψ em Δ , conforme mostra a Figura 2.3.

Uma possível definição para C_a e C_m é obtida pela construção do menor círculo que circunscreve a curva Ψ . O tamanho do vetor \mathbf{C}_m que aponta o centro deste círculo, define o valor médio C_m , enquanto o raio do círculo define a amplitude C_a (Figura 2.3). Matematicamente, o problema de encontrar o centro do menor círculo que circunscreve a trajetória Ψ (i.e. encontrar o vetor \mathbf{C}_m) é formulado pelo problema de máximo e mínimo:

$$\mathbf{C}_m : \min_{\mathbf{C}'} \left\{ \max_{t \in P} \|\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}'\| \right\}. \quad (2.9)$$

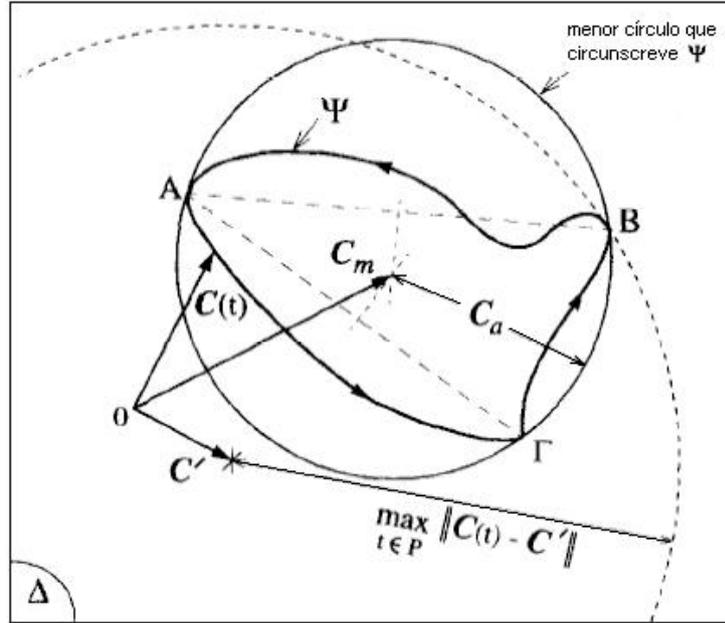


Figura 2.3: Definição da amplitude de tensão cisalhante C_a pela construção do menor círculo que circunscreve a curva Ψ . (De Papadopoulos *et al.*, (1997))

A interpretação geométrica do problema de máximo e mínimo é a seguinte: primeiro escolhe-se, arbitrariamente, um centro definido pelo vetor \mathbf{C}' e então, desenha-se o círculo que contém a curva Ψ . O raio deste círculo é $\max_{t \in P} \|\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}'\|$ - Figura 2.3. Depois, muda-se o centro \mathbf{C}' e procura-se outro círculo que contém Ψ com raio menor que o anterior e assim sucessivamente. Se a curva Ψ possui um centro de simetria, então o centro do menor círculo que a circunscreve coincide com seu centro de simetria. Uma vez encontrado o centro \mathbf{C}_m , a amplitude da tensão cisalhante é obtida por:

$$C_a = \max_{t \in P} \|\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}_m\|. \quad (2.10)$$

2.2 Medidas associadas aos invariantes de tensão

O tensor tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(t)$ que define completamente o estado de tensão no ponto material pode ser decomposto em:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{S}(t) + p_h(t)\mathbf{I}, \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{S}(t)$, $p_h(t)$ e \mathbf{I} são respectivamente, tensor tensão desviador em função do tempo, a pressão hidrostática em função do tempo e a matriz identidade. A pressão hidrostática pode ser calculada por:

$$p_h(t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)), \quad (2.12)$$

onde $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))$, denominado traço de $\boldsymbol{\sigma}(t)$ é o primeiro invariante do tensor tensão:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \sigma_{xx}(t) + \sigma_{yy}(t) + \sigma_{zz}(t). \quad (2.13)$$

Para um carregamento cíclico, $p_h(t)$ é uma função periódica e escalar do tempo com período P . A amplitude de tensão hidrostática e seu valor médio podem ser facilmente definidos como:

$$p_{h_a} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))}{3} - \min_{t \in P} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))}{3} \right\}; \quad (2.14)$$

$$p_{h_m} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t \in P} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))}{3} + \min_{t \in P} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))}{3} \right\}. \quad (2.15)$$

O valor máximo da tensão hidrostática é:

$$p_{h_{max}} = p_{h_a} + p_{h_m}. \quad (2.16)$$

Em notação matricial, o tensor tensão desviador ($\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p_h \mathbf{I}$) é:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \frac{-\sigma_{xx} + 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{-\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2\sigma_{zz}}{3} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Reescrevendo-o,

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = & S_{xx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + S_{yy} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + S_{zz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
& + S_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + S_{xz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + S_{yz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Percebe-se que as matrizes acima formam uma base simétrica mas com traço nem sempre nulo. Contudo, é interessante descrever $\mathbf{S}(t)$ como função de uma base (i) cujos elementos sejam todos desviadores (traço nulo) e (ii) ortonormais (ortogonal e com elementos de norma unitária). Nesta nova base:

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^5 s_i(t) \mathbf{N}_i. \quad (2.19)$$

Cabe ressaltar que, o tensor tensão desviador $\mathbf{S}(t)$ tem 5 dimensões ($i = 1, \dots, 5$), pois tendo traço nulo:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \text{tr}(\mathbf{S}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - \text{tr}\left(\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}\right) = 0,$$

uma de suas componentes pode ser escrita em função de outras duas:

$$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{zz} = -(S_{xx} + S_{yy}).$$

Seja escolhida, de maneira arbitrária, a base ortonormal:

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Então, as componentes s_i de \mathbf{S} nesta base podem ser escritas como:

$$s_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{xx}, \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{yy} - S_{zz}), \quad s_3 = \sqrt{2}S_{xy}, \quad s_4 = \sqrt{2}S_{xz}, \quad s_5 = \sqrt{2}S_{yz} \quad (2.21)$$

ou como:

$$s_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right), \quad (2.22)$$

$$s_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}), \quad (2.23)$$

$$s_3 = \sqrt{2}\tau_{xy}, \quad (2.24)$$

$$s_4 = \sqrt{2}\tau_{yz}, \quad (2.25)$$

$$s_5 = \sqrt{2}\tau_{xz}. \quad (2.26)$$

A raiz quadrada do segundo invariante do tensor tensão desviador, denotado por $\sqrt{J_2}$ é também uma medida de interesse. Sua definição é dada por:

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \quad (2.27)$$

As definições de sua amplitude e sua média são obtidas com auxílio das regras de transformação definidas pelas Equações 2.22 a 2.26 que descrevem o tensor desviador \mathbf{S} através de um vetor \mathbf{s} de um espaço euclidiano de cinco dimensões denominado E_5 . Desta maneira,

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}. \quad (2.28)$$

Assim, o tamanho do vetor \mathbf{S} em E_5 é igual à raiz quadrada do segundo invariante do tensor tensão desviador \mathbf{S} . O vetor \mathbf{S} obtido da transformação mostrada pela

Equação 2.19, representa completamente o estado de tensão desviador e durante um carregamento periódico, este vetor descreve em E_5 uma curva fechada Φ . A definição da amplitude de $\sqrt{J_2}$, denotada por $\sqrt{J_{2,a}}$ é feita através da construção da menor hiperesfera de cinco dimensões que circunscreve a curva Φ . O tamanho do vetor \mathbf{S}_m que aponta o centro da hiperesfera é o valor médio $\sqrt{J_{2,m}}$, enquanto $\sqrt{J_{2,a}}$ é o raio desta esfera. O centro \mathbf{S}_m é encontrado pela solução de:

$$\mathbf{S}_m : \min_{\mathbf{S}'} \{ \max_{t \in E_p} \|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}'\| \} \quad (2.29)$$

A explicação geométrica deste problema é similar ao fornecido anteriormente, quando se tratava da tensão cisalhante \mathbf{C} , com a diferença de que, agora, a história de tensão não é descrita num plano bidimensional, mas num espaço de cinco dimensões. Se a curva Φ possui um centro de simetria, a solução da Equação 2.29 está pronta pois o centro de simetria é de fato, o centro da menor hiperesfera que circunscreve Φ . Achado \mathbf{S}_m , $\sqrt{J_{2,a}}$ é obtida pela relação:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \max_{t \in E_p} \|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}_m\|. \quad (2.30)$$

Capítulo 3

Fadiga

3.1 Natureza física do dano por fadiga

Quanto à natureza física do dano por fadiga, algumas considerações são feitas para se definir o que é considerado falha. Quando visto de uma escala de tamanho suficientemente pequeno, todo material é anisotrópico e não-homogêneo. Muitos metais usados em engenharia são compostos de um agregado de pequenos grãos cristalinos, e cada grão tem comportamento anisotrópico por causa dos planos cristalinos. Não-homogeneidades existem não só pela estrutura granular, mas também por minúsculos vazios ou partículas de composição química diferente da composição principal do material. Como resultado de uma estrutura não uniforme, tensões se distribuem também não uniformemente quando vistas na escala da microestrutura. Regiões onde as tensões são mais severas caracterizam usualmente o ponto de surgimento dos danos de fadiga.

A degradação mecânica por fadiga ocorre como consequência de solicitações elastoplásticas cíclicas em nível do grão do metal: a cada ciclo de carregamento, as deformações plásticas induzem a nucleação de novas discordâncias (defeitos na rede cristalina do metal), que eventualmente se acumulam em regiões denominadas bandas de cisalhamento (ver Figura 3.1). Quando o acúmulo de tais defeitos atinge um determinado nível, formam-se trincas que podem se propagar levando, eventualmente, ao colapso do componente estrutural.

Para metais dúcteis, grãos com orientação desfavorável em relação à tensão aplicada são os primeiros a desenvolver bandas de escorregamento definidas como



Figura 3.1: Sequência de nucleação de uma trinca por fadiga em um cristal de Cu para 60000 ciclos a 20°C. (Foto: De Ma e Laird, 1989. Copyright Pergamon Press plc.)

regiões onde há intensa deformação devido ao movimento cisalhante entre os planos cristalinos. Bandas de escorregamento adicionais são formadas à medida que mais ciclos são aplicados até atingir um nível de saturação. A seguir, tais bandas se tornam mais severas e evoluem para uma trinca num grão que depois alcança outros grãos, juntando-se com outras trincas similares até que finalmente, uma grande trinca é formada e se propaga até a fratura.

Para materiais com ductilidade limitada, o dano micro-estrutural não é espalhado mas tende a se concentrar nos defeitos do material. Uma pequena trinca se desenvolve num vazio, inclusão, banda de escorregamento ou contorno de grão e cresce, geralmente em um plano normal às tensões trativas, até ocorrer a falha, às vezes unindo-se a outras trincas durante o processo.

Trincas podem estar inicialmente presentes em um componente, devido ao seu processo de fabricação ou podem nuclear-se durante o tempo de serviço deste componente. Sabendo que as trincas são ingredientes básicos neste assunto, as técnicas de projeto de componentes mecânicos que consideram a falha por fadiga são baseadas em critérios que podem ser classificados como: (i) critérios de iniciação de trincas e (ii) critérios de propagação de trincas. No primeiro grupo, a vida é estimada em termos do número de ciclos necessário para que se observe a nucleação de trincas. No segundo grupo, a existência de trincas é admitida, e a vida é estimada em termos do número de ciclos necessários para que tais trincas evoluam para situações de propagação

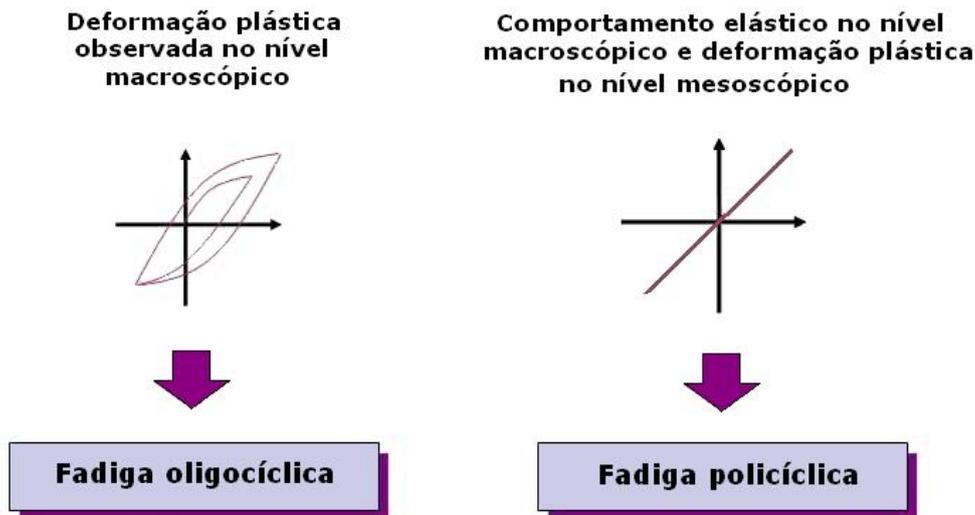


Figura 3.2: Definições de fadiga polícíclica (HCF) e fadiga oligocíclica (LCF) segundo escala de deformação plástica observada ao longo do carregamento.

catastrófica. O presente trabalho se concentra nos aspectos de iniciação de trincas, subdivididos em outras duas abordagens: (i) fadiga polícíclica ou de alto número de ciclos (HCF - *High Cycle Fatigue*) e (ii) fadiga oligocíclica ou de baixo número de ciclos (LCF - *Low Cycle Fatigue*).

Tradicionalmente, a diferença entre fadiga polícíclica e fadiga oligocíclica é definida segundo o número de ciclos de carregamento. Se o número de repetições é grande, da ordem de milhões, então tem-se fadiga polícíclica, e, ciclos da ordem de centenas ou milhares definem fadiga oligocíclica. Contudo, uma abordagem mais refinada é descrita por Sines e Oghi (1981): além da idéia de número de ciclos, considera-se primordialmente os níveis de plasticidade observados. As características referentes à fadiga polícíclica são associadas à falha (iniciação de uma microtrinca) em níveis de tensão em que não há deformação plástica macroscópica ou que pelo menos tal deformação seja muito menor que a deformação elástica observada. A razão de deformação elástica cíclica em relação à deformação plástica cíclica é, então, um dado mais aceitável para a identificação do regime de fadiga. Para enfatizar esse critério, deve-se observar que, alguns materiais como o aço inoxidável por exemplo, mostram deformação plástica contínua apesar da falha ocorrer depois de 10^5 ciclos. As características de tal comportamento assemelham-se mais à fadiga oligocíclica que polícíclica.

3.2 Fadiga uniaxial (abordagem S-N)

3.2.1 Conceitos básicos

Algumas aplicações práticas e também testes de fadiga em materiais envolvem níveis máximos e mínimos constantes de tensões cíclicas, que caracterizam os carregamentos de amplitude constante.

A variação de tensão, $\Delta\sigma$, é a diferença entre os valores máximo e mínimo. A tensão média σ_m é de fato a média entre os valores máximo e mínimo de tensão. A tensão média pode ser zero, como na Figura 3.3(a), mas geralmente não é, como em (b). A metade da variação de tensão é chamada amplitude de tensão, σ_a . São expressões matemáticas para estas definições:

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} \quad (3.1)$$

É útil notar que:

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (3.2)$$

Os sinais de σ_a e $\Delta\sigma$ são sempre positivos, pois $\sigma_{max} > \sigma_{min}$ e tração é considerada positiva. As quantidades σ_{max} , σ_{min} e σ_m podem ser tanto positivas quanto negativas.

Razões de certos pares das variáveis acima são comumente usadas:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}, \quad (3.3)$$

onde R é chamado razão de tensão e A , razão de amplitude.

Um carregamento cíclico com média zero pode ser especificado fornecendo-se a amplitude de tensão σ_a ou o valor da tensão máxima σ_{max} . Se a tensão média não é zero, dois valores independentes devem ser fornecidos para que o carregamento seja especificado. Algumas combinações que podem ser usadas: σ_a e σ_m , σ_{max} e R , σ_{max} e σ_{min} e σ_a e A . O termo carregamento alternado é usado para descrever a situação

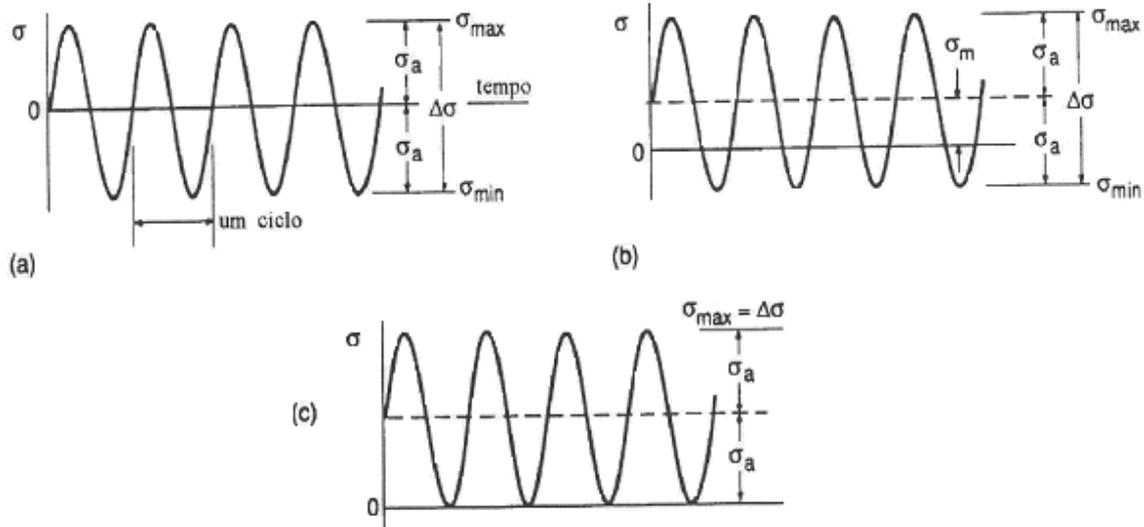


Figura 3.3: Carregamentos uniaxiais : (a) carregamento alternado, (c) carregamento repetido.

em que $\sigma_m = 0$ e, portanto, $R = -1$, como na Figura 3.3(a). Carregamento repetido refere-se aos casos em que $\sigma_{min} = 0$ e portanto $R = 0$, como na Figura 3.3(c).

3.2.2 Curvas S-N

Se o corpo de prova de um material ou um componente de engenharia está sujeito a ciclos de tensões suficientemente severas, uma trinca de fadiga ou outro dano se desenvolverá, acarretando a falha do material. Se o teste é repetido em um nível de tensão maior, o número de ciclos antes da falha será menor. Os resultados de testes para diferentes níveis de tensão podem ser plotados para se obter a curva tensão-vida, também chamada curva $S-N$ e curva de Wöhler. A amplitude da tensão nominal, σ_a ou S_a , é comumente plotada versus o número de ciclos em que ocorreu a falha por fadiga N_f , como mostrado nas Figuras 3.4 e 3.5.

O grupo destes testes de fadiga que resultam na curva $S-N$ podem ser realizado com tensão média nula, ou a uma tensão média específica não nula σ_m . São também comuns as curvas plotadas para valores constantes de razão de tensão, R . Apesar de as tensões serem plotadas usualmente como amplitudes, às vezes plota-se $\Delta\sigma$ ou σ_{max} .

O número de ciclos em que a falha por fadiga ocorre varia rapidamente com o nível de tensão e pode mudar significativamente a ordem de magnitude. Por esta razão,

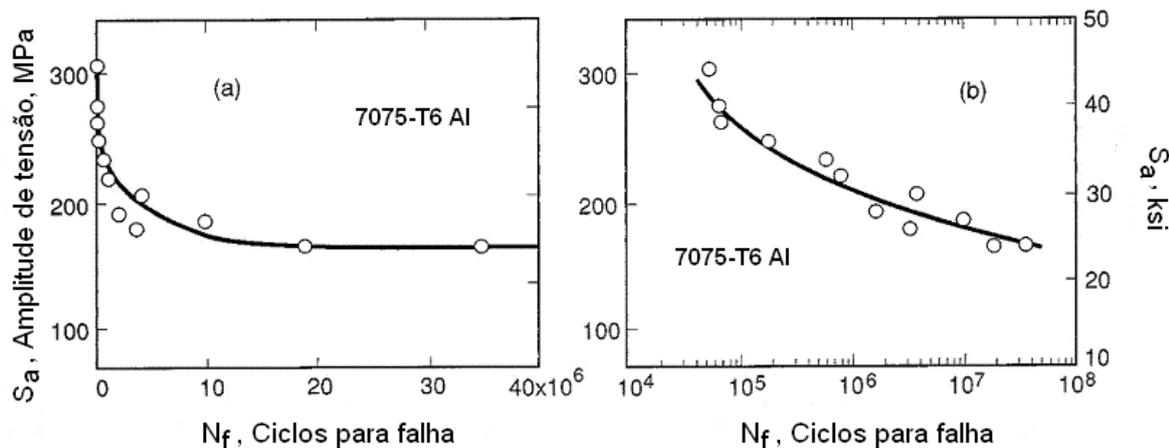


Figura 3.4: Curva tensão versus vida ($S-N$) de teste de corpos de prova de uma liga de alumínio não entalhados sob flexão rotativa

o número de ciclos é usualmente plotado em escala logarítmica. Se, em um gráfico log-linear, os dados da curva $S-N$ se aproximam de uma reta, a seguinte equação se ajusta à curva:

$$\sigma_a = C + D \log N_f, \quad (3.4)$$

onde C e D são constantes de ajuste. Em um gráfico log-log, aproximando-se os dados por uma reta, a equação de Basquin representa a curva:

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b. \quad (3.5)$$

As constantes de ajuste são associadas ao material e se relacionam da seguinte forma:

$$A = 2^b \sigma'_f, \quad B = b. \quad (3.6)$$

Em alguns materiais, notadamente em aços carbono e de baixa liga, abaixo de um determinado nível de tensão não se observa falha por fadiga em condições normais de carregamento. Isto está ilustrado na Figura 3.5, onde a curva $S-N$ apresenta um patamar respectivo a uma amplitude de tensão chamada S_e - limite de fadiga ou limite de resistência à fadiga.

Muitos aços de alta resistência, ligas de alumínio, de cobre e outros materiais não apresentam um limite de fadiga. Para estes materiais, σ_a ou $\Delta\sigma$ continuam a decrescer com o aumento do número de ciclos. Um limite de resistência para estes casos é definido como a amplitude de tensão que o corpo de prova suporta até pelo menos 10^7 ciclos.

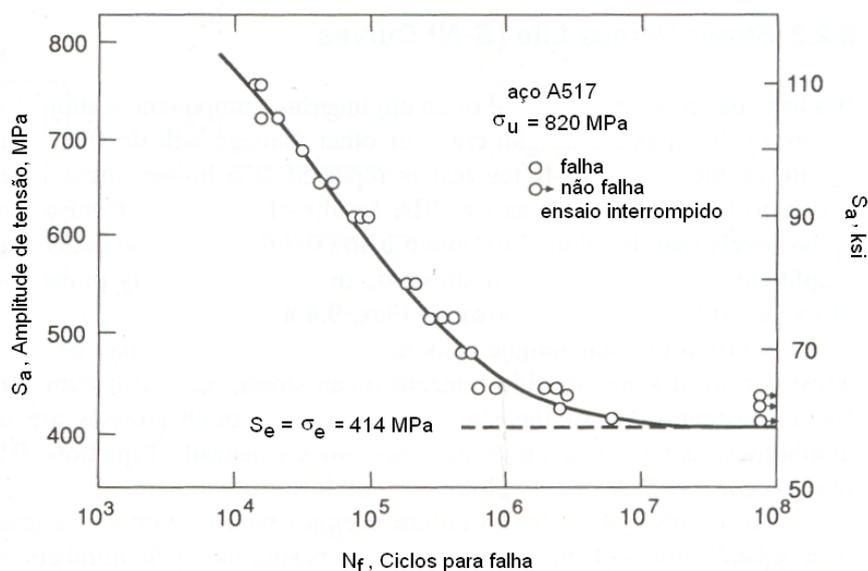


Figura 3.5: Curva $S-N$ de flexão rotativa para corpos de prova não-entalhados de um aço com limite de fadiga definido.

3.2.3 Efeito da tensão normal média

As descrições mencionadas de vida à fadiga são relativas a carregamentos cíclicos alternados onde a tensão média é zero. Contudo, carregamentos cíclicos com tensão média nula não são representativos de muitas aplicações. O valor médio da carga de fadiga imposta influencia de maneira importante o comportamento de materiais quanto à fadiga.

Quando a amplitude de tensão de um teste de fadiga uniaxial é plotado como função do número de ciclos até a falha, a curva $S-N$ resultante é, em geral, fortemente função do nível de tensão média aplicada. A Figura 3.6(a) mostra um gráfico $S-N$ típico para material metálico com quatro diferentes valores de tensão média σ_{m1} , σ_{m2} , σ_{m3} e σ_{m4} . Observa-se uma diminuição da vida a fadiga com o aumento do valor tensão

média.

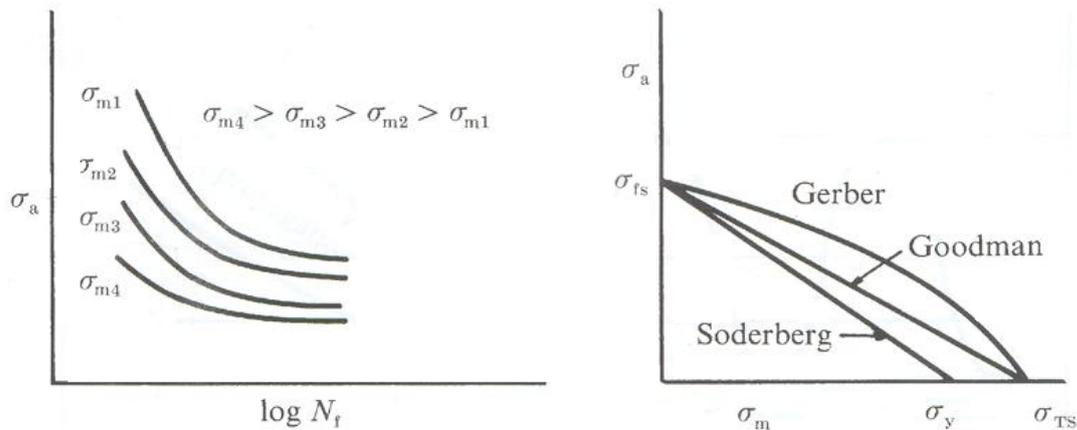


Figura 3.6: (a) Curvas amplitude de tensão versus vida para diferentes valores de tensão média. (b) Curvas de vida constante para carregamentos de fadiga com tensão média não nula.

Em geral, as tensões médias de compressão são benéficas, e as de tração, maléficas para a vida à fadiga em uma mesma amplitude de tensão. Tal observação pode ser explicada pelo fato de que as tensões médias de tração ($\sigma_m > 0$) favorecem a abertura e conseqüentemente a propagação de trincas, enquanto que as de compressão ($\sigma_m < 0$) têm o efeito contrário.

O efeito da tensão média em fadiga pode também ser representado através de diagramas de vida constante, conforme Figura 3.6 (b). Nestes gráficos, são plotadas diferentes combinações de amplitudes de tensão e tensão média conduzindo a vida a fadiga constante. Os modelos mais conhecidos destes diagramas são os propostos por Gerber em 1874, Goodman em 1899 - a equação modificada de Goodman, Equação 3.7, é geralmente considerada como a modificação do método originalmente proposto, por vários pesquisadores - e Soderberg em 1939. As curvas mostradas na Figura 3.6(b) são descritas pelas seguintes expressões:

$$\text{Goodman modificado: } \frac{\sigma_a}{\sigma_{a|\sigma_m=0}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{TS}} = 1 \quad (3.7)$$

$$\text{Soderberg: } \frac{\sigma_a}{\sigma_{a|\sigma_m=0}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_y} = 1, \quad (3.8)$$

$$\text{Gerber: } \frac{\sigma_a}{\sigma_{a|\sigma_m=0}} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{TS}}\right)^2 = 1, \quad (3.9)$$

onde σ_a é a amplitude de tensão denotando a resistência à fadiga para tensão média não nula, $\sigma_{a|\sigma_m=0}$ é a amplitude de tensão (para uma vida fixa) para carregamento alternado (σ_m e $R = -1$), e σ_y e σ_{TS} são o limite de escoamento e a resistência à tração do material, respectivamente.

3.3 Fadiga multiaxial

É bastante comum encontrar-se carregamentos cíclicos que causam estados de tensão complexos em diversos componentes de equipamentos. Alguns exemplos são as tensões biaxiais devido aos ciclos de pressurização em tubos ou tubulações, flexões e torções combinadas em eixos, flexão de placas em mais de um eixo. Aplicação de cargas constantes que causam tensões médias também podem estar combinadas com cargas cíclicas. Complexidade adicional pode ser dada por diferentes fontes de carregamentos cíclicos atuando com diferentes fases ou frequências, ou ambos.

Por exemplo, ao aplicar-se flexão constante em um tubo de parede fina sob pressão cíclica, tem-se amplitudes de tensão e tensões médias diferentes em duas direções conforme mostrado na Figura 3.7

Se ao invés de flexão, for aplicada uma torção constante, uma situação mais complexa apresenta-se, conforme Figura 3.8. No instante em que a pressão é momentaneamente zero, as direções das tensões principais são controladas pela tensão cisalhante e orientadas a 45° do eixo do tubo. Porém, para valores não nulos de pressão estas direções rotacionam-se e se tornam mais próximas das direções axial e transversal, mas nunca alcançando-a exceto na situação limite em que as tensões σ_x e σ_y devido à

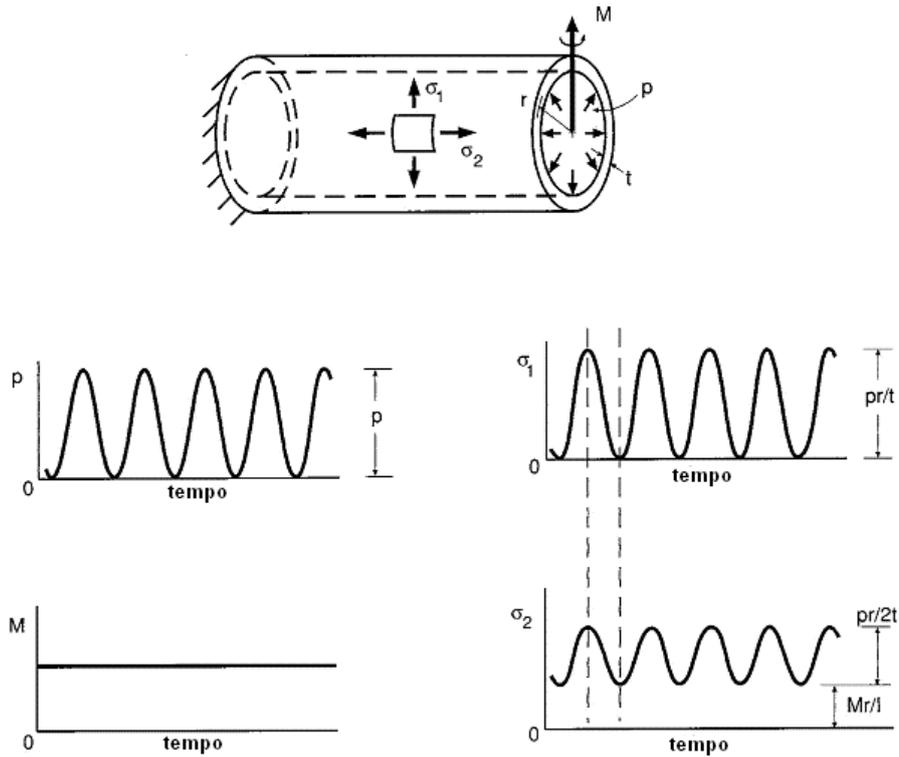


Figura 3.7: Pressão cíclica e flexão constante combinadas em um tubo de parede fina com extremidades fechadas.

pressão sejam grandes se comparadas a τ_{xy} causada pela torção. Podem existir ainda casos mais complexos. Por exemplo, o momento fletor da Figura 3.7 ou o torque da Figura 3.8 podem também ser cíclicos ao invés de constantes, e a frequência dos ciclos de flexão ou torção pode ser diferente da frequência da pressão.

Um dos grandes desafios no estudo do fenômeno em questão é estender o conhecimento sobre fadiga uniaxial para fadiga multiaxial. O limite de resistência à fadiga é definido como o nível de tensão abaixo do qual não há aparecimento de trincas macroscópicas após um grande número de ciclos de carregamento ($\geq 10^7$) e engloba o conceito da separação de duas regiões distintas: uma região segura e outra de falha. Como não existem muitos experimentos caracterizando carregamento multiaxial, necessita-se verificar a resistência de peças submetidas a carregamentos combinados a partir de dados de carregamento uniaxial e é apoiado nesta idéia que surgem os critérios de fadiga multiaxial.

Considerando um espaço de tensões apropriado, a região segura de carga-

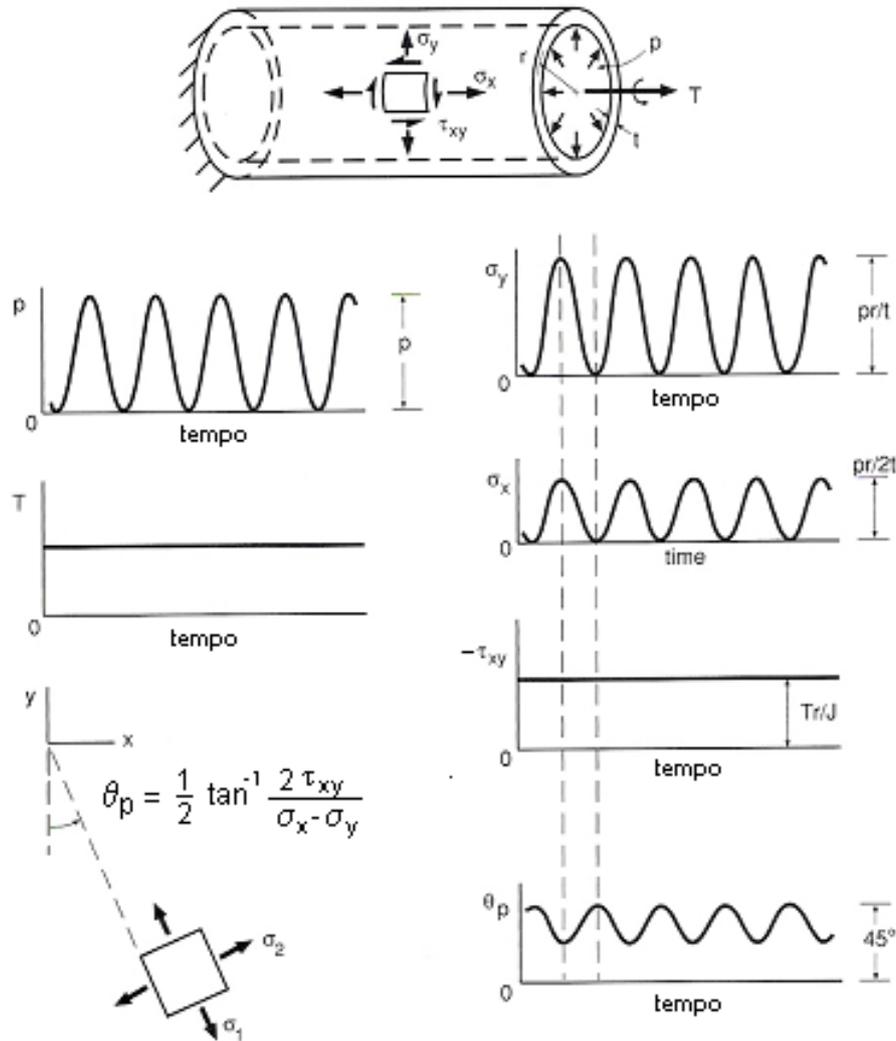


Figura 3.8: Pressão cíclica e torção constante combinadas em um tubo de parede fina com extremidades fechadas.

mento ao qual a peça pode estar submetida sem que haja falha por fadiga é composta pela origem e toda região delimitada por uma curva limite de falha definida por um critério qualquer. Este critério deve ser independente da base na qual o tensor tensão é expresso, deve reproduzir o comportamento do material submetido a um carregamento uniaxial e incorporar o efeito das tensões médias. Desta forma, um critério de fadiga pode ser expresso como uma desigualdade. A satisfação desta desigualdade implica que o estado de tensão produzido pelo carregamento cíclico externo permanece na parte segura do espaço das tensões.

Dentre os vários modelos de critério de resistência à fadiga multiaxial propostos

nos últimos anos por vários autores, três foram selecionados para o desenvolvimento deste estudo e comparação com o modelo a ser apresentado: (1) o modelo proposto por Crossland (1956) por ser um critério clássico, (2) o critério de Papadopoulos (1997) que apresenta ótimos resultados e (3) o critério de Mamiya e Araújo (2002) que além de excelentes resultados, oferece uma implementação bastante simples.

3.3.1 Critério de Crossland

O critério de resistência à fadiga proposto por Crossland pode ser representado pela desigualdade:

$$\sqrt{J_{2,a}} + \kappa p_{h_{max}} \leq \lambda, \quad (3.10)$$

onde $\sqrt{J_{2,a}}$ é a amplitude de tensão cisalhante, definida pela expressão 2.30. Tal termo significa, geometricamente, o raio da menor hiperesfera que circunscreve a história de tensões desviadoras (Figura 3.9). $p_{h_{max}}$ é a máxima pressão hidrostática (Equações 2.12 a 2.16), enquanto κ e λ são constantes de fadiga que dependem do material. Tais constantes são obtidas através de experimentos de fadiga uniaxial como, por exemplo, flexão pura alternada e torção pura alternada.

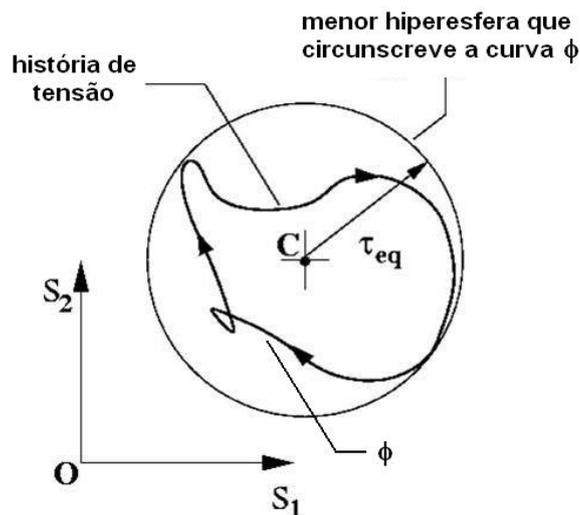


Figura 3.9: Menor hiperesfera que circunscreve a trajetória de tensões desviadoras

O teste de torção pura produz a seguinte história de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tau_a \sin(\omega t),$$

onde τ_a é a amplitude de tensão cisalhante e ω é a frequência do carregamento. Para este teste, a máxima pressão hidrostática no tempo é nula:

$$p_h(t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \max_t \{p_h(t)\} = 0. \quad (3.11)$$

A tensão equivalente é dada por:

$$\begin{aligned} \tau_{eq} &= \max_t \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{S}(t)} \\ &= \max_t \sqrt{\frac{1}{2} \times 2(\tau_a \sin(\omega t))^2} \\ &= \tau_a. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Deste modo, a desigualdade (3.10) reduz-se a:

$$\tau_a \leq \lambda, \quad (3.13)$$

e, para uma condição limite de resistência à fadiga, $\tau_a = t_{-1}$. Logo:

$$\lambda = t_{-1}, \quad (3.14)$$

onde t_{-1} é o limite de resistência à fadiga para torção pura alternada.

Para o teste de flexão pura alternada, a história de tensão pode ser representada como:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma_a \sin(\omega t),$$

onde σ_a é a amplitude de tensão normal que, em uma situação limite é igual ao limite de fadiga por flexão f_{-1} . A máxima pressão hidrostática é :

$$\max_t \{p_h(t)\} = \max_t \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \right\} = \frac{1}{3} \sigma_a. \quad (3.15)$$

O tensor tensão desviador para cada instante no tempo é dado por:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sigma_a \sin(\omega t).$$

e a tensão equivalente é calculada por:

$$\begin{aligned} \tau_{eq} &= \max_t \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{S}(t)} \\ &= \max_t \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3} \sigma_a \sin(\omega t) \right)^2 + 2 \left(-\frac{1}{3} \sigma_a \sin(\omega t) \right)^2 \right\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_a. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Substituindo os valores de λ , da máxima tensão hidrostática e da tensão equivalente, Equações (3.14), (3.15) e (3.16) respectivamente, a desigualdade $\sqrt{J_{2,a}} + \kappa p_{h_{max}} \leq \lambda$ reduz-se a:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_a + \kappa \frac{1}{3} \sigma_a \leq t_{-1}. \quad (3.17)$$

Para uma condição limite de resistência à fadiga:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} f_{-1} + \kappa \frac{1}{3} f_{-1} = t_{-1}$$

e, portanto:

$$\kappa = 3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3}. \quad (3.18)$$

As duas constantes do material κ e λ acabam de ser determinadas e o critério de Crossland pode ser reescrito por:

$$\sqrt{J_{2,a}} + \left[3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3} \right] \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \leq t_{-1}. \quad (3.19)$$

3.3.2 Critério de Papadopoulos

O critério formulado por Papadopoulos (1997) é baseado em argumentos desenvolvidos na escala mesoscópica, ou seja, na escala dos grãos cristalinos. Materiais metálicos são um agregado de grãos ou cristais e um volume elementar de material contém uma grande quantidade de grãos que possuem orientações preferenciais ao longo das quais, eventualmente, se desenvolvem deformações plásticas. Mesmo sob condições de carregamento que preservem o comportamento elástico dos componentes, alguns cristais menos resistentes podem sofrer deformação plástica. Como já foi dito, a deformação plástica localizada desenvolvida em alguns cristais é a principal causa de nucleação de trinca por fadiga. A abordagem mesoscópica almeja avaliar a deformação plástica no cristal associando-a a quantidades macroscópicas usuais. Papadopoulos (1996) mostra que, quando o número de ciclos cresce indefinidamente, a deformação plástica acumulada se torna aproximadamente proporcional a uma amplitude de tensão cisalhante $\sqrt{T_a^2}$ definida. Tal medida é fundamentada na média de deformação plástica acumulada em todos os cristais do volume elementar. Sua expressão matemática é:

$$\sqrt{\langle T_a^2 \rangle} = \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} T_a(\varphi, \theta, \psi)^2 d\psi \sin(\theta) d\theta d\varphi}. \quad (3.20)$$

O ângulo ψ cobre todas as direções de deslizamento em um plano material elementar, enquanto φ e θ varrem todas as orientações possíveis deste plano no interior do volume elementar. O critério resultante pode ser expresso como:

$$\sqrt{\langle T_a^2 \rangle} + a p_{max} \leq b, \quad (3.21)$$

onde, p_{max} é o valor máximo da tensão hidrostática observada ao longo da história de tensão, enquanto a e b são parâmetros materiais:

$$a = 3\left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3}\right) \quad e \quad b = t_{-1}. \quad (3.22)$$

3.3.3 Critério de Mamiya e Araújo

Este modelo foi proposto por Mamiya e Araújo (2002) e também considera que as variáveis controladoras do processo de fadiga são a amplitude de tensão cisalhante equivalente ($f(\tau) = \tau_{eq}$) e a máxima pressão hidrostática ($g(\sigma) = p_{h_{max}}$):

$$\tau_{eq} + \kappa p_{h_{max}} \leq \lambda. \quad (3.23)$$

Como visto anteriormente, o critério de Crossland propõe, como medida da solitação cisalhante à fadiga, o raio da hipersfera que circunscreve a trajetória de tensão projetada no espaço desviador. A Figura 3.10 ilustra o fato de que histórias de tensão proporcionais e não-proporcionais podem ser circunscritas pela mesma esfera, apesar de se esperar uma solitação à fadiga mais severa para histórias não-proporcionais. Como uma alternativa, pode-se considerar medidas associadas ao menor elipsóide que circunscreve a trajetória como previamente sugerido por Deperrois (1991) e depois por Bin Li et al. (2000): a idéia básica é considerar amplitudes de tensão cisalhante nas direções dos raios principais dos elipsóides, somando seus efeitos.

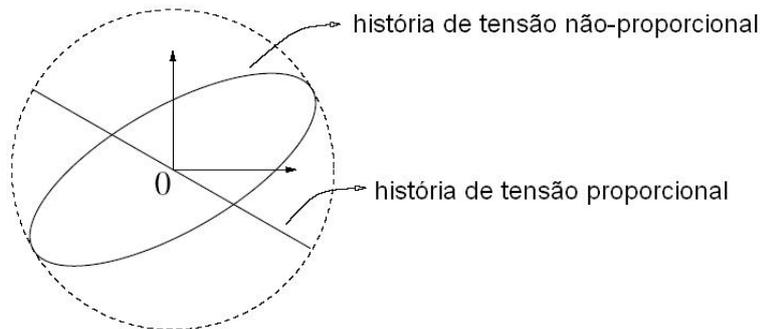


Figura 3.10: Histórias de tensão proporcional e não-proporcional associadas à mesma amplitude $\sqrt{J_{2,a}}$.

Contudo, são necessários algoritmos bastante elaborados e computacionalmente caros para calcular-se os semi-eixos do elipsóide e é justo neste ponto que se

encontra a contribuição do critério do prisma retangular. Os autores propõem uma simplificação para a determinação da medida de amplitude de tensão cisalhante associada ao elipsóide que circunscribe a trajetória de tensão. Para carregamentos cujas trajetórias desviadoras se aproximam de um elipsóide, foi provado que é possível e relativamente simples caracterizar a sollicitação cisalhante por meio de um prisma retangular circunscrito a este elipsóide (Mamiya e Araújo (2002)).

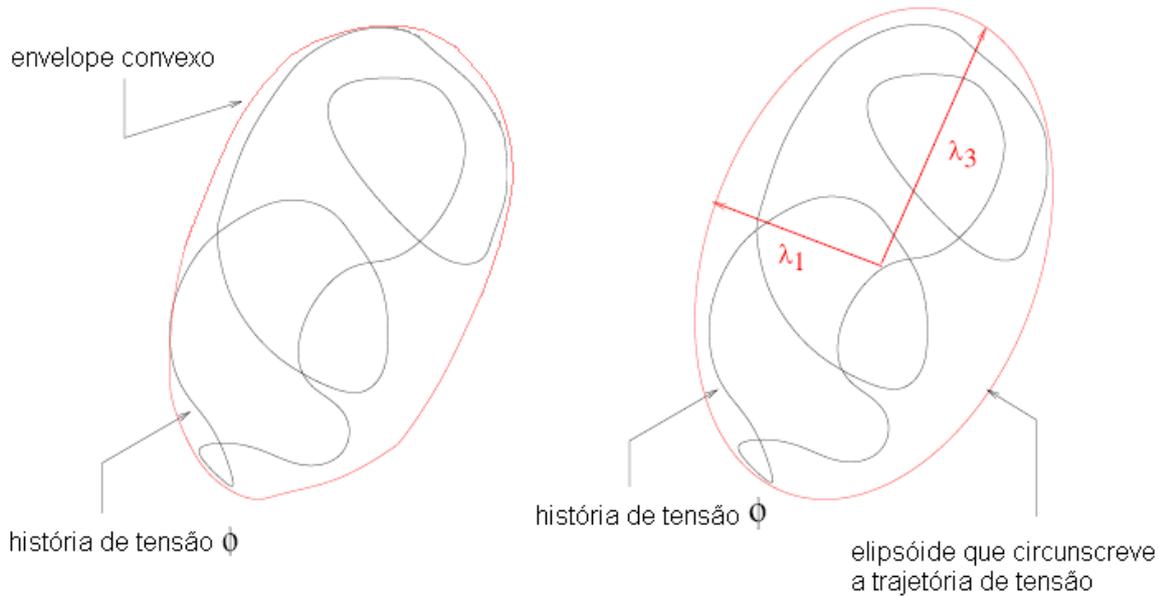


Figura 3.11: Caracterização da sollicitação à fadiga: (a) envelope convexo, (b) elipsóide que circunscribe a trajetória

Denota-se Φ o conjunto de pontos $\mathbf{S}(t)$ que descrevem a trajetória e tensões desviadoras em \mathbb{R}^5 . Estes autores assumem que nem todos os estados $\mathbf{S}(t)$ pertencentes à história de tensão Φ contribuem para o dano por fadiga. De fato, parece razoável considerar que somente os estados de Φ definidos sobre o envelope convexo ameaçam a integridade do material. Desse modo, o próprio envelope convexo e suas características geométricas podem ser consideradas na definição da sollicitação cisalhante que eventualmente leva à falha por fadiga (Figura 3.11 (a)).

De acordo com Mamiya e Araújo (2002), o uso de elipsóides como medida da contribuição da sollicitação cisalhante na falha por fadiga fornece resultados satisfatórios quando o elipsóide é uma boa aproximação para o envelope convexo de Φ (Figura 3.11 (b)). Quando este é o caso, uma definição preliminar para τ_{eq} pode ser escrita como:

$$\tau_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \lambda_i^2}, \quad (3.24)$$

onde λ_i , $i = 1, \dots, 5$ são as magnitudes dos semi-eixos principais do menor elipsóide que circunscribe a trajetória de tensões desviadoras.

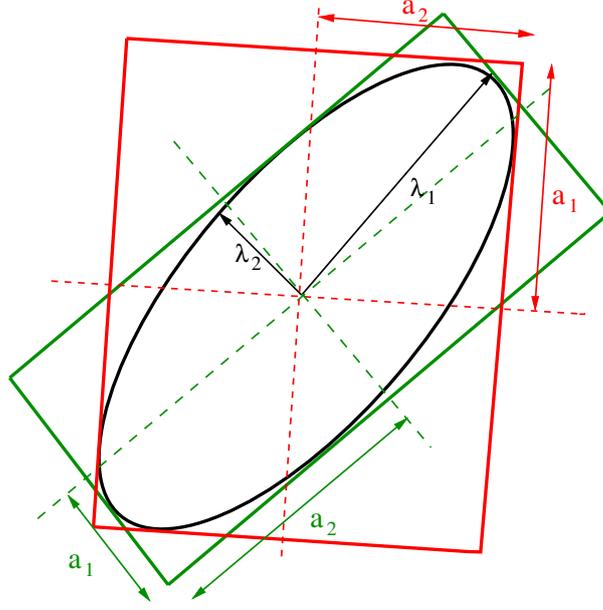


Figura 3.12: Elipsóide em \mathbb{R}^m e seu prisma retangular circunscrito com orientação arbitrária.

Porém, há uma dificuldade no uso da Equação 3.24 que está associada à determinação do elipsóide e dos seus semi-eixos e o resultado apresentado por Mamiya e Araújo permite calcular τ_{eq} de forma mais simples.

Teorema 1 *Dado um elipsóide \mathcal{E} em \mathbb{R}^m com centro na origem e uma base ortonormal arbitrária $\{\mathbf{n}_i, i = 1, \dots, m\}$ em \mathbb{R}^m , seja \mathcal{P} um prisma retangular que circunscribe \mathcal{E} , tal que suas faces sejam ortogonais à cada elemento da base. Se λ_i , $i = 1, \dots, m$ são as magnitudes dos semi-eixos principais de \mathcal{E} e a_i , $i = 1, \dots, m$ são as distâncias entre o centro do elipsóide e as faces do prisma retangular, então:*

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^5 a_i^2. \quad (3.25)$$

Tal resultado é de importância fundamental no cálculo de τ_{eq} , já que suprime

a necessidade de se determinar os semi-eixos principais do elipsóide. Mais especificamente, quando o elipsóide é uma boa aproximação para o envelope convexo da história de tensão Φ , em vez de se considerar a definição dada pela Equação 3.24, a amplitude de tensão equivalente τ_{eq} pode ser computada a partir de qualquer prisma retangular circunscrevendo a história de tensões como:

$$\tau_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2}, \quad (3.26)$$

onde, neste contexto, a_i , $i = 1, \dots, 5$ (Figura 3.13) são as amplitudes dos componentes $s_i(t)$ (Equações 2.22 a 2.26) definidas como:

$$a_i = \frac{1}{2} \{ \max_t s_i(t) - \min_t s_i(t) \}, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.27)$$

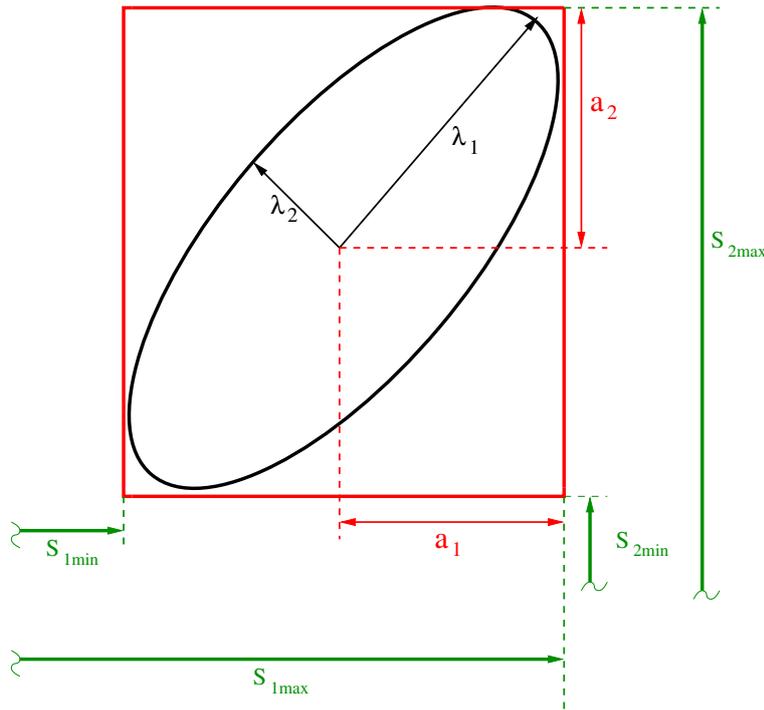


Figura 3.13: Amplitudes dos componentes $s_i(t)$ num espaço bidimensional.

Definida a amplitude de tensão equivalente e sabendo-se que estes autores consideram a máxima pressão hidrostática como medida apropriada das tensões normais, resta agora calcular os parâmetros κ e λ para a completa definição do critério.

Para teste de torção pura alternada, o estado de tensão gerado tem pressão hidrostática nula em qualquer instante e, portanto,

$$\max_t \{p_h(t)\} = 0.$$

A tensão equivalente é calculada pela Equação (3.26). Para tanto, determina-se primeiramente os valores de s_i , $i = 1, \dots, 5$ (Equações (2.22) a (2.26)):

$$s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 0 \quad e \quad s_3 = \sqrt{2} \tau_a \sin(\omega t).$$

Conseqüentemente,

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0 \quad e \quad a_3 = \frac{\max s_3(t) - \min s_3(t)}{2} = \sqrt{2} \tau_a.$$

Na condição de limite de resistência à fadiga,

$$\tau_{eq} = \sqrt{2} t_{-1}.$$

Logo, da Equação (3.23) tem-se que:

$$\lambda = \sqrt{2} t_{-1}. \quad (3.28)$$

O estado de tensão produzido por ensaio de flexão pura alternada

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma_a \sin(\omega t),$$

caracteriza como pressão hidrostática máxima:

$$\max_t \{p_h(t)\} = \max_t \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \right\} = \frac{1}{3} \sigma_a. \quad (3.29)$$

O tensor tensão desviador para cada instante no tempo é dado por:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sigma_a \sin(\omega t).$$

e as componentes s_i , $i = 1, \dots, 5$ são:

$$s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_a \sin(\omega t) \quad e \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0.$$

Consequentemente,

$$a_1 = \frac{\max s_1(t) - \min s_1(t)}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_a \quad e \quad a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

Na condição de limite de resistência à fadiga,

$$\tau_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} f_{-1}. \quad (3.30)$$

Logo, tem-se das Equações (3.23) e (3.28) que:

$$\kappa = \sqrt{2} \left(3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3} \right). \quad (3.31)$$

O critério de Mamiya e Araújo pode, então, ser escrito como:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2} + \sqrt{2} \left(3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3} \right) \max_t \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \right\} \leq \sqrt{2} t_{-1}. \quad (3.32)$$

Capítulo 4

O Modelo Proposto

Como pôde-se observar no capítulo anterior, os critérios de resistência à fadiga multiaxial formulados por vários autores levam em consideração os esforços normais e cisalhantes a que um componente está submetido, além das propriedades do material. A proposta apresentada neste estudo pode ser dividida em duas: a primeira diz respeito à contabilização das tensões normais na degradação por fadiga de metais e a segunda, trata da medida para contabilizar as tensões cisalhantes.

Muitos critérios de resistência consideram a tensão hidrostática como medida da solicitação à fadiga das tensões normais. Como observado por Papadopoulos (1997), a tensão hidrostática é basicamente uma média das tensões normais em todos os planos que passam por um ponto material. Vale lembrar que os critérios propostos por Crossland e por Mamiya e Araújo, descritos anteriormente, também utilizam tal tensão como ingrediente de seus critérios. Neste trabalho, porém, sustenta-se que a pior situação — que corresponde a considerar a existência de uma micro-trinca orientada ortogonalmente à máxima tensão principal (ao longo de toda a história de tensão) — deve ser considerada em vez da média obtida pela tensão hidrostática. Desta forma, a medida para as tensões normais passa a ser a máxima tensão principal, em vez da máxima tensão hidrostática:

$$\sigma_{pmax} = \max_t \{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t)\}, \quad (4.1)$$

onde $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ e $\sigma_3(t)$ são as tensões principais máximas obtidas pelos autovalores

do tensor tensão de Cauchy em cada instante de tempo.

Quanto à contabilização da contribuição das tensões cisalhantes, acredita-se que o envelope elíptico é uma boa medida na modelagem de critérios de resistência à fadiga multiaxial. Além disso, para carregamentos senoidais síncronos cuja história de tensão se aproxima de um elipsóide, a abordagem do prisma retangular proposta por Mamiya e Araújo (2002) oferece simplicidade nos cálculos, o que leva o modelo aqui proposto a adotar tal medida na quantificação do efeito das tensões cisalhantes para este tipo de carregamento.

O segundo objetivo é verificar se o envelope elíptico continua sendo uma boa medida para as tensões cisalhantes, e principalmente se o *envelope prismático* oferece resultados semelhantes aos do *envelope elíptico* para mais condições mais gerais de solicitação à fadiga. Trajetórias assíncronas proporcionais com diferentes fatores de frequência e não senoidal fora de fase apresentam trajetórias de tensão desviadoras que se afastam da forma de um elipsóide. A questão que se apresenta é: nestes casos, os envelopes elíptico e prismático mantêm sua equivalência?

4.1 Efeito da tensão normal

Há três tipos básicos de separação das superfícies de trincas chamados modo I, II e III esquematizados na Figura 4.1. O modo I deve-se ao carregamento de tração, com deslocamento das superfícies da trinca perpendicularmente a si mesmas. O modo II deve-se a carregamento em cisalhamento (escorregamento) com deslocamentos das superfícies da trinca paralelamente a si mesmas e perpendicularmente à frente de propagação. E, finalmente, o modo III de abertura deve-se a solicitação cisalhante (rasgamento) com deslocamentos das superfícies da trinca paralelamente a si mesmas e à frente de propagação. Tensões normais contribuem para a degradação por fadiga, por agirem no processo de abertura de microtrincas que, eventualmente existam nos materiais, essencialmente no modo I.

Trincas têm sempre formas irregulares, já que podem crescer ao longo dos contornos dos grãos da estrutura do material. Deste modo, o crescimento devido somente à tensão cisalhante é dificultado pelos efeitos de atrito envolvendo as irregularidades nas

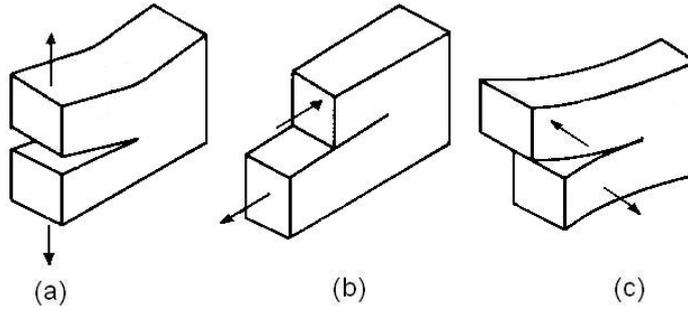


Figura 4.1: Os três modos básicos de abertura de trincas: (a) modo I, (b) modo II e (c) modo III.

faces da trinca como mostrado na Figura 4.2 (a). Tensões normais ao plano da trinca têm maior efeito neste comportamento, acelerando seu crescimento se tais tensões tenderem à abertura da trinca no modo I (Figura 4.2 (b)).

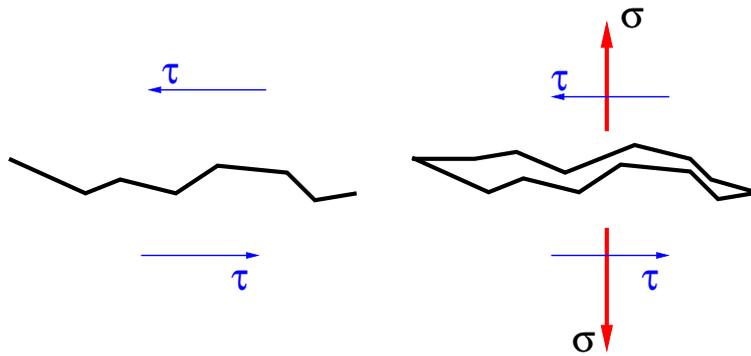


Figura 4.2: Trinca sujeita a cisalhamento (a), onde irregularidades retardam o crescimento, comparado à situação (b), onde uma tensão normal faz a trinca se abrir, acentuando seu crescimento.

A primeira novidade apresentada neste trabalho diz respeito à contabilização da influência das tensões normais agindo num componente submetido a esforços que podem levar à fadiga. Considerando a tensão principal máxima, matematicamente, o modelo pode ser escrito como:

$$\tau_{eq} + \kappa \sigma_{pmax} \leq \lambda, \quad (4.2)$$

onde τ_{eq} é a amplitude de tensão cisalhante definida por Mamiya e Araújo (2002) (Equação 3.26), σ_{pmax} é a máxima tensão principal e κ e λ são parâmetros materiais.

Estes parâmetros podem ser calculados a partir de ensaios de flexão pura alternada e torção pura alternada pelo mesmo procedimento mostrado para os modelos de Crossland e de Mamiya e Araújo.

Em um ensaio de torção pura alternada, o estado de tensão gerado e a máxima tensão principal são:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tau_a \sin(\omega t),$$

$$\max_t \{\sigma_p(t)\} = \tau_a.$$

No espaço desviador:

$$\mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tau_a \sin(\omega t),$$

Utilizando a mesma base ortonormal que foi anteriormente escolhida, os componentes s_i de \mathbf{S} são:

$$s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 0 \quad e \quad s_3 = \sqrt{2} \tau_a \sin(\omega t).$$

Consequentemente,

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0 \quad e \quad a_3 = \frac{\max s_3(t) - \min s_3(t)}{2} = \sqrt{2} \tau_a.$$

A tensão equivalente é, portanto:

$$\tau_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2} = \sqrt{2} \tau_a. \quad (4.3)$$

Na condição de limite de resistência à fadiga,

$$\tau_{eq} = \sqrt{2}t_{-1} \quad e \quad \max_t \{\sigma_p(t)\} = t_{-1}.$$

O modelo pode ser re-escrito por:

$$\sqrt{2}t_{-1} + \kappa t_{-1} = \lambda. \quad (4.4)$$

O estado de tensão produzido por ensaio de flexão pura alternada

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma_a \sin(\omega t),$$

caracteriza como tensão principal máxima:

$$\max_t \{\sigma_p(t)\} = \sigma_a.$$

O tensor tensão desviador para cada instante no tempo é dado por:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sigma_a \sin(\omega t).$$

e as componentes s_i , $i = 1, \dots, 5$ são:

$$s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_a \sin(\omega t) \quad e \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0.$$

Consequentemente,

$$a_1 = \frac{\max s_1(t) - \min s_1(t)}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_a \quad e \quad a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.$$

Na condição de limite de resistência à fadiga,

$$\tau_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} f_{-1} \quad e \quad \max_t \{\sigma_p(t)\} = f_{-1},$$

e uma nova relação é escrita para o modelo:

$$\sqrt{2}t_{-1} + \kappa t_{-1} = \lambda. \quad (4.5)$$

Resolvendo simultaneamente as equações 4.4 e 4.5, as constantes κ e λ do material são:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{f_{-1} - t_{-1}} \left(t_{-1} - \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}} \right) \quad e \quad \lambda = \sqrt{2} \frac{t_{-1} f_{-1}}{f_{-1} - t_{-1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad (4.6)$$

onde f_{-1} e t_{-1} são os limites de resistência à fadiga para flexão e torção pura alternada, respectivamente.

4.2 Amplitude da tensão cisalhante equivalente

O teorema apresentado por Mamiya e Araújo (2002), mostrado na seção 3.3.3 - Critério de Mamiya e Araújo, prova que, para carregamentos que se aproximam de uma elipse, é equivalente contabilizar a amplitude de tensão cisalhante utilizando as medidas do *envelope elíptico* ou do *envelope prismático*. Nesta etapa, avança-se a análise para carregamentos mais gerais e pretende-se avaliar se é possível estabelecer o mesmo tipo de equivalência entre as duas abordagens para estes tipos de trajetórias.

A medida da amplitude de tensão cisalhante associada ao envelope elíptico é dada por:

$$f(\mathbf{S}) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \lambda_i^2}, \quad (4.7)$$

onde λ_i , $i = 1, \dots, 5$ são os raios da elipse que circunscreve a trajetória de tensões, enquanto a medida associada ao envelope prismático será dada por:

$$f(\mathbf{S}) = \max_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta)}, \quad (4.8)$$

onde $a_i(\theta)$, $i = 1, \dots, 5$ são as distâncias dos hiperplanos dos prismas retangulares que circunscrevem a trajetória de tensões ao centro dos prismas, e θ denota simbolicamente as orientações dos prismas retangulares.

Combinando-se as propostas de envelope elíptico e envelope convexo com as propostas de pressão hidrostática e tensão principal máxima, tem-se quatro abordagens:

1. amplitude de tensão cisalhante associada ao *envelope elíptico* e tensões normais contabilizadas pela *pressão hidrostática*:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^5 \lambda_i^2} + \kappa p_{h_{max}} \leq \lambda, \quad (4.9)$$

$$\kappa = \sqrt{2} \left(3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3} \right) \quad \text{e} \quad \lambda = \sqrt{2} t_{-1};$$

2. amplitude de tensão cisalhante associada ao *envelope elíptico* e tensões normais contabilizadas pela *tensão principal máxima*:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^5 \lambda_i^2} + \kappa \sigma_{p_{max}} \leq \lambda, \quad (4.10)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{f_{-1} - t_{-1}} \left(t_{-1} - \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{e} \quad \lambda = \sqrt{2} \frac{t_{-1} f_{-1}}{f_{-1} - t_{-1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

3. amplitude de tensão cisalhante associada ao *envelope prismático* e tensões normais contabilizadas pela *pressão hidrostática*:

$$\max_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta)} + \kappa p_{h_{max}} \leq \lambda, \quad (4.11)$$

$$\kappa = \sqrt{2} \left(3 \frac{t_{-1}}{f_{-1}} - \sqrt{3} \right) \quad \text{e} \quad \lambda = \sqrt{2} t_{-1};$$

4. amplitude de tensão cisalhante associada ao *envelope prismático* e tensões normais contabilizadas pela *tensão principal máxima*:

$$\max_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta)} + \kappa \sigma_{pmax} \leq \lambda. \quad (4.12)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{f_{-1} - t_{-1}} \left(t_{-1} - \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{e} \quad \lambda = \sqrt{2} \frac{t_{-1} f_{-1}}{f_{-1} - t_{-1}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Ressalta-se aqui, que os valores calculados dos parâmetros κ e λ foram calculados nas seções anteriores.

4.2.1 Envelope elíptico

A medida de amplitude de tensão cisalhante, chamada tensão equivalente τ_{eq} , associada ao envelope elíptico é dada pela menor norma dos semi-eixos principais do elipsóide que circunscribe a trajetória de tensões, Equação 4.7. Deve-se estabelecer então, uma metodologia para obtenção destes semi-eixos λ_i . Para ilustrar tal procedimento, toma-se dois exemplos de carregamentos combinados de flexão e torção com trajetórias distintas, conforme mostra a Figura 4.3. Note-se que os desenhos das histórias de tensão não se aproximam de uma elipse.

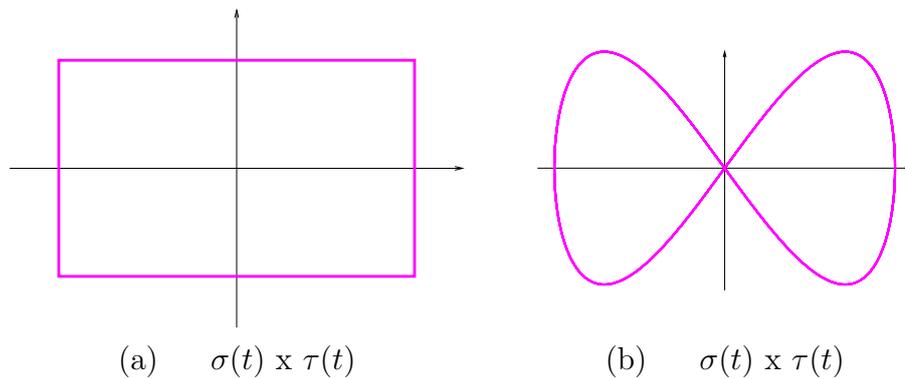


Figura 4.3: Exemplos de trajetórias de carregamentos combinados de flexão e torção que não se aproximam de uma elipse.

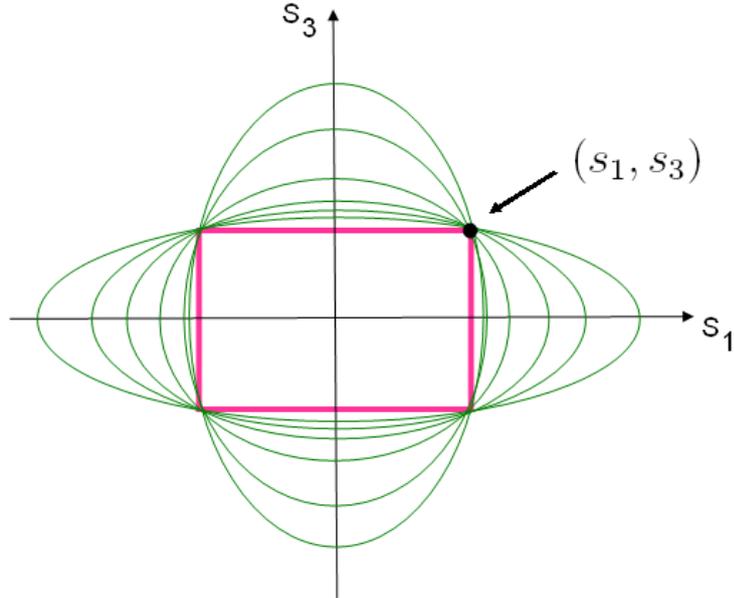


Figura 4.4: Pelos pontos (s_1, s_3) , passam infinitas elipses com centro na origem.

Para o carregamento com trajetória retangular (a) (Figura 4.3), a história de tensão pode ser totalmente representada por um único ponto no espaço das tensões (σ_a, τ_a) e, se descrita no espaço desviador também (s_1, s_3) . Por este ponto, passam infinitas elipses com centro na origem, Figura 4.4, cujas equações podem ser escritas por:

$$\left(\frac{s_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{s_3}{\lambda_3}\right)^2 = 1. \quad (4.13)$$

Ou de outra forma:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{s_1}{\sqrt{\lambda_3^2 - s_3^2}}. \quad (4.14)$$

Substituindo esta expressão na Equação 4.7 que define a tensão equivalente, tem-se tal norma escrita em função dos semi-eixos principais da elipse:

$$\tau_{eq} = \min_{\lambda_1, \lambda_3} \left(\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_3^2 + s_1^2 - s_3^2}{\lambda_3^2 - s_3^2}} \right). \quad (4.15)$$

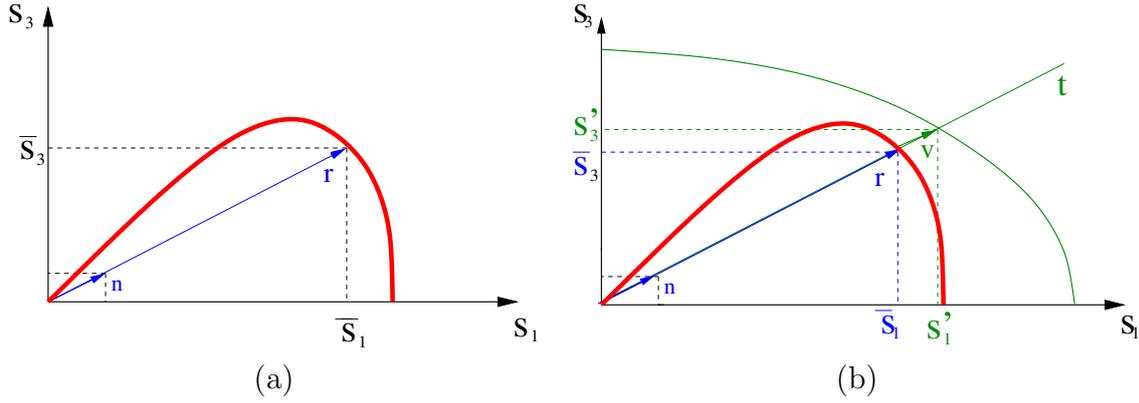


Figura 4.5: Ilustração da metodologia de cálculo da menor elipse que circunscreve a trajetória de tensões desviadoras para carregamentos senoidais com frequência distinta.

Contudo, ainda há que se encontrar qual é, das infinitas elipses possíveis, a menor, que circunscreve a trajetória de tensões desviadoras. Neste caso, o problema é de simples solução pois é sabido em qual ponto a elipse vai tangenciar a trajetória. Da Equação 4.13, s_1 e s_3 estão definidos. Determina-se um intervalo de valores para λ_1 e calcula-se o valor de λ_3 correspondente. Para cada conjunto (λ_1, λ_3) calcula-se a tensão equivalente segundo a Equação 4.15 e procura-se, entre esses valores, qual fornece a menor norma.

Já o carregamento (b) (Figura 4.3) requer um método mais elaborado para se determinar a menor elipse pois não se sabe em que ponto ela vai tangenciar a história de tensão. Como esta trajetória é simétrica em relação aos dois eixos coordenados, toma-se apenas um quadrante para análise, sem prejuízo nos resultados, Figura 4.5. Cada ponto da trajetória de tensões desviadoras discretizada (Figura 4.5 (a)) pode ser representada por um vetor \mathbf{r} cujo vetor unitário é definido por \mathbf{n} :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{1}{\sqrt{\bar{s}_1^2 + \bar{s}_3^2}} \begin{pmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_3 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Traça-se uma elipse inicial com valores arbitrários de semi-eixos principais λ_1 e λ_3 .

Define-se o vetor \mathbf{v} e a reta t :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_3 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\text{Reta } t : \frac{s'_3}{s'_1} = \frac{n_3}{n_1} \Rightarrow s'_3 = \frac{n_3}{n_1} s'_1. \quad (4.19)$$

Aplicando a Equação 4.19 na Equação 4.13, explicita-se s'_1 :

$$\left(\frac{s'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{n_1} s'_1\right)^2 \frac{1}{\lambda_3^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{n_3^2}{n_1^2 \lambda_3^2} s'^2\right) = 1 \Rightarrow s'_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{n_3^2}{n_1^2 \lambda_3^2}}} \quad (4.20)$$

Dados λ_1 e λ_3 iniciais e arbitrários, calcula-se s'_1 (Equação 4.20), s'_3 (Equação 4.19), $\|\mathbf{v}\|$ (Equação 4.18) e d , definido como $d = \|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{r}\|$ para cada ponto da trajetória. Esta medida d significa a distância ponto-a-ponto entre a história de tensão e a elipse escolhida. Toma-se, então, a menor medida de d , chamada d_{min} ; quando d_{min} for maior que zero significa que a elipse inicialmente escolhida é maior que a procurada. O próximo passo é, portanto, diminuir o valor de λ_3 . Se, ao contrário, d_{min} for menor que zero, deve-se aumentar o valor de λ_3 . Assim, é possível descobrir qual é o valor de λ_3 que, para dado valor de λ_1 , fornece a menor elipse que circunscribe a trajetória. Este procedimento é feito para um intervalo de valores de λ_1 dado. Tendo obtido as várias elipses, procura-se dentre elas qual fornece a menor medida $(\lambda_1^2 + \lambda_3^2)^{\frac{1}{2}}$. Finalmente, a menor elipse é aquela cujos semi-eixos principais λ_1 e λ_3 estão associados à esta menor norma encontrada no último passo.

Estes dois exemplos mostram apenas uma maneira simples de se chegar ao *envelope elíptico* e à medida de amplitude de tensão cisalhante proposta para esta abordagem.

4.2.2 Envelope prismático

Nesta abordagem, pretende-se determinar uma medida para a amplitude de tensão cisalhante através do máximo envelope prismático que circunscribe a trajetória

de tensões desviadoras. Para um dado carregamento, determina-se um envelope prismático inicial qualquer e procede-se a rotação deste, calculando-se, para cada ângulo, uma norma das distâncias dos hiperplanos dos prismas aos seus centros. A tensão equivalente é a maior medida obtida, definida por

$$\max_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta)}.$$

No cálculo desta norma, para carregamentos com duas componentes de tensões desviadoras, é indiferente rotacionar o prisma ou a história de tensão já que os resultados serão os mesmos. Contudo, é mais simples implementar a rotação da história de tensão: o tensor tensão desviador rotacionado é:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{Q} \times \mathbf{s}, \quad (4.21)$$

onde \mathbf{Q} é a matriz de rotação

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

e \mathbf{s} é o tensor tensão desviador descrito na nova base ortonormal arbitrariamente escolhida, Equações 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 e 2.26.

Voltando-se ao exemplo do carregamento com trajetória retangular - Figura 4.3 (a) - nota-se que é possível saber analiticamente qual é o ângulo θ que fornece a maior norma, corespondente à tensão equivalente. A Figura 4.6 mostra as medidas envolvidas:

$$u = \sqrt{(s_1)^2 + (s_3)^2}, \quad (4.23)$$

$$a_1 = u \cos(\beta - \theta), \quad (4.24)$$

$$a_3 = u \cos(\alpha - \theta). \quad (4.25)$$

a_1 e a_3 serão máximas quando $\cos(\beta - \theta)$ e $\cos(\alpha - \theta)$ assumirem valor unitário:

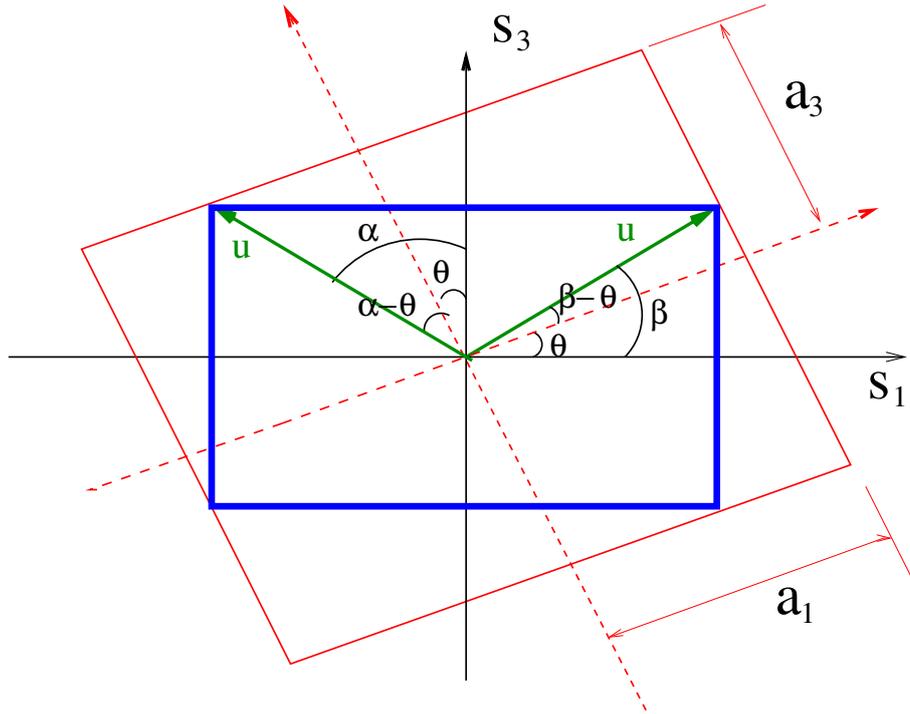


Figura 4.6: História de tensão desviadora trapezoidal síncrona e as medidas definidas para obtenção do maior prisma retangular que a circunscreve.

$$\begin{cases} \cos(\alpha - \theta) = 1 \\ \cos(\beta - \theta) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \theta = 0 \\ \beta - \theta = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Como $\alpha + \beta = \pi/2$, da Equação 4.26, $\theta = \pi/4$. Tal fato significa que a maior medida de $\sqrt{(a_1)^2 + (a_3)^2}$ é definida quando o prisma estiver rotacionado a 45° da trajetória de tensões desviadoras.

Já para o segundo exemplo de carregamento - Figura 4.3 (b), não é possível fazer esta análise prévia e a medida da amplitude de tensão deve ser calculada numericamente. Variando-se a orientação da trajetória desviadora, para cada ângulo θ com $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, calcula-se a norma $(\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta))^{1/2}$. Neste caso,

$$a_i = \frac{\max s_i^*(t) - \min s_i^*(t)}{2}, \quad (4.27)$$

onde $s_i^*(t)$ são as componentes de tensão desviadora rotacionadas e escritas segundo a base ortonormal escolhida. Busca-se, então, dentre todas, qual é a maior: esta é a medida procurada.

Capítulo 5

Resultados

Os cálculos numéricos foram realizados nos softwares Octave, versão GPL (software livre) com uma linguagem de programação essencialmente igual à do Matlab, e no Scilab que também é um software livre, em plataforma Linux.

A metodologia do estudo pode ser dividida em cinco etapas:

1. discretização da história de tensão no tempo e projeção desta no espaço das tensões e no espaço desviador;
2. cálculo da sollicitação das tensões cisalhantes à fadiga segundo a definição de cada critério e desenvolvimento da metodologia do modelo proposto;
3. cálculo da contribuição das tensões normais no processo de degradação por fadiga segundo cada modelo e abordagem através das tensões hidrostática e principal;
4. cálculo do índice de erro.

O índice de erro I mede o quanto a previsão fornecida por cada critério se afasta dos resultados experimentais. A definição de I é a seguinte: como todos os critérios foram apresentados na forma da desigualdade $f(\tau) + g(\sigma) \leq \lambda$, se, para um experimento particular, representando uma situação limite de resistência à fadiga, depois da substituição dos valores experimentais, os lados esquerdo e direito da desigualdade que expressa o critério forem iguais, então a previsão concorda exatamente com o resultado do teste. Se os lados esquerdo e direito forem diferentes, então a previsão se afasta

do valor experimental. Assim, o índice de erro I é definido para mensurar a diferença relativa entre os lados esquerdo e direito da desigualdade:

$$I = \frac{f(\tau) + g(\sigma) - \lambda}{\lambda}. \quad (5.1)$$

Um índice negativo indica uma previsão de resistência à fadiga não-conservativa pois indica que a sollicitação ainda não atingiu o valor crítico enquanto que os valores experimentais representam a situação limite. De outra forma, um índice positivo fornece uma previsão conservativa.

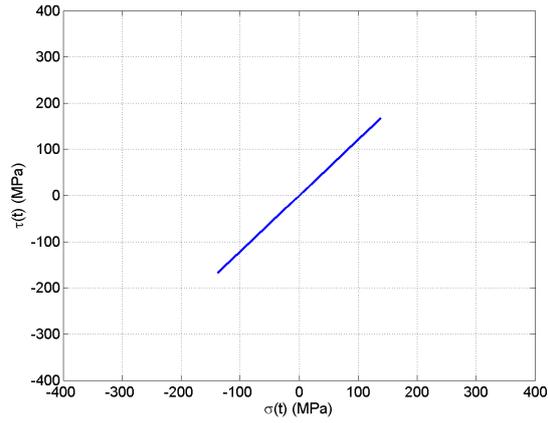
5.1 Avaliação de resistência à fadiga: carregamentos senoidais síncronos

A validação dos critérios implementados foi realizada através de um conjunto de resultados experimentais de flexão e torção em diferentes metais duros ($1.3 \leq f_{-1}/t_{-1} < \sqrt{3}$) relatados por Nishihara e Lasserre (1989). Os experimentos representam situações limites de resistência à fadiga em condições de carregamentos multiaxiais senoidais síncronos (ou com mesma frequência) proporcionais e não-proporcionais. As trajetórias senoidais são descritas pelas expressões:

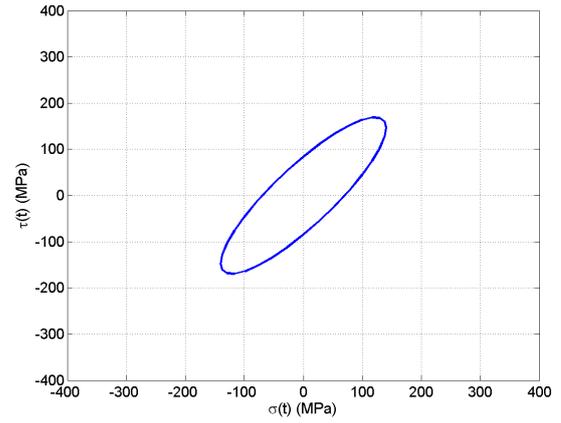
$$\sigma(t) = \sigma_a \sin(\omega t) + \sigma_m \quad (5.2)$$

$$\tau(t) = \tau_a \sin(\eta \omega t - \beta) + \tau_m \quad (5.3)$$

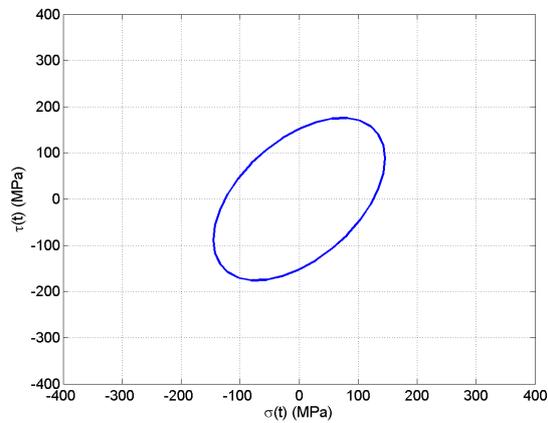
onde, $\sigma(t)$ é a tensão normal em cada instante, σ_a é a amplitude de tensão normal; σ_m é a tensão normal média, $\tau(t)$ é a tensão cisalhante em cada instante, τ_a é a amplitude de tensão cisalhante; τ_m é a tensão cisalhante média, ω é a frequência, η é o fator de frequência entre os componentes de tensão e β é o ângulo de fase. Carregamentos proporcionais ou em fase são caracterizados por $\beta = 0$ e não proporcionais ou fora de fase por $\beta \neq 0$. As sollicitações síncronas têm $\eta = 1$ e assíncronas, $\eta \neq 1$. Algumas trajetórias senoidais síncronas proporcionais e com diferentes ângulos de fase, com e sem componente de tensão média são mostradas na Figura 5.1.



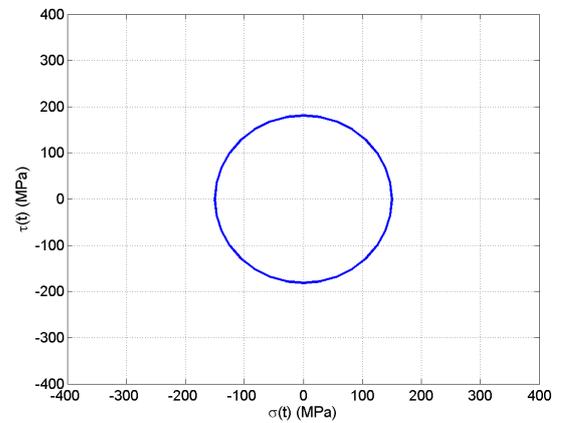
(a)



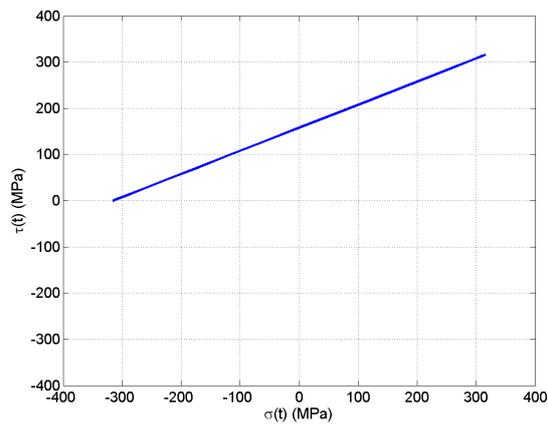
(b)



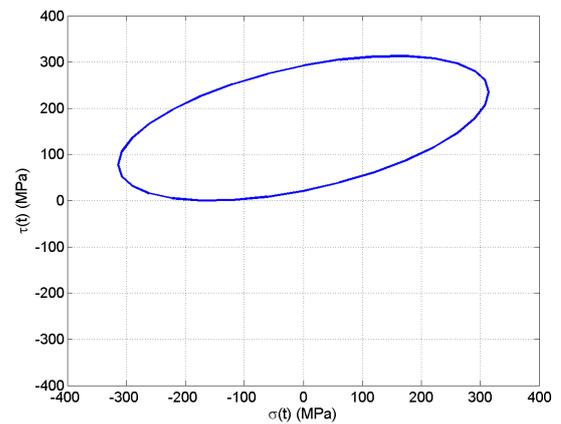
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.1: Histórias de tensão senoidais síncronas ($\eta = 1$): (a) proporcional $\beta = 0$, fora de fase alternadas sem componente de tensão média (b) $\beta = 30^\circ$, (c) $\beta = 60^\circ$, (d) $\beta = 90^\circ$, e com tensão cisalhante média (e) proporcional $\beta = 0$, (f) fora de fase $\beta = 60^\circ$,

A seguir, são mostrados nas tabelas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 os resultados da aplicação dos critérios de fadiga multiaxial a 41 carregamentos senoidais síncronos que representam situações limites de resistência à fadiga. As primeiras quatro colunas das tabelas contêm, para cada teste, a amplitude e o valor médio da tensão normal devido à flexão, e da tensão cisalhante devido à torção, respectivamente. Na quinta coluna, o ângulo de fase β entre estas duas tensões é fornecido. As próximas quatro colunas são dedicadas aos critérios de Crossland, Papadopoulos, Mamiya e Araújo e ao modelo proposto. Os valores apresentados nestas quatro últimas colunas são os índices de erro correspondentes. Além destas tabelas, as Figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 oferecem uma comparação visual dos índices de erro obtidos pela previsão de cada modelo.

A Tabela 1 e a Figura 5.2 mostram os dados experimentais e as previsões de resistência à fadiga obtidos pelos critérios de Crossland, Papadopoulos e Mamiya e Araújo junto com os resultados do modelo proposto para metal duro sob flexão e torção alternadas em fase e fora de fase. A análise destes resultados revela que todos os critérios considerados mostram, em geral, previsões satisfatórias de resistência à fadiga, independentemente do ângulo de fase. Uma exceção pode ser observada para o critério de Crossland nos experimentos 1-7 e 1-8 onde os índices de erro calculados foram, respectivamente -8,35% e -17,51%. Resultados 2-1 a 2-6 da Tabela 2 (34Cr4) e Figura 5.3 estão também associados a carregamentos alternados em fase e fora de fase que produzem tensões normais e cisalhantes. Neste conjunto de dados, o critério de Crossland fornece previsões bastante ruins para carregamentos fora de fase, enquanto que os outros critérios produziram excelentes resultados. Experimentos 2-7 a 2-9 foram realizados sob flexão alternada e torção repetida, enquanto os experimentos 2-10 a 2-12 referem-se a flexão repetida e torção alternada. Quando há presença de tensão média, o critério proposto produz resultados mais conservativos que os demais critérios. A mesma tendência pode ser observada nas Tabelas 3 e 4 (e Figuras 5.4 e 5.5, respectivamente.)

A fim de se avaliar a dispersão das previsões de resistência de cada critério, a Figura 5.6 apresenta quatro gráficos diferentes, cada um correspondendo a um diferente critério. Os gráficos mostram os histogramas de frequência construídos como explicado a seguir. A abscissa corresponde aos valores de índice de erro calculados e sua escala

varia de -40% a 40%, dividida em 16 intervalos de mesmo tamanho (5%). Para cada intervalo, foi construída uma coluna com altura igual ao número de experimentos cujo índice de erro cai neste intervalo. Para tornar mais claro, examina-se o primeiro dos gráficos da Figura 5.6. Analisando a coluna referente aos resultados do critério de Crossland das Tabelas 1 a 4, nota-se que do total de 41, há 8 experimentos cujos índices de erro se encontram no intervalo 0-5%. Portanto, a coluna correspondente a este intervalo (0-5%) tem altura igual a oito. As previsões dos critérios podem ser consideradas satisfatórias se os erros entre os valores previstos e os experimentais estiverem concentrados em torno de 0%. Claramente este não é o caso do critério de Crossland, cujos índices variam de -30% a 10%. Além disso, não há mais de nove experimentos pertencentes ao mesmo intervalo, o que indica que as previsões deste critério estão bastante dispersas. Examinando agora os histogramas (b), (c) e (d) da Figura 5.6, nota-se que os índices de erro estão confinados no intervalo de -10% a 10% para os critérios de Papadopoulos, Mamiya e Araújo e para o proposto. As exceções são os experimentos 3-5 para os critérios de Papadopoulos e Mamiya e Araújo, e 3-7 para o modelo proposto, cujos índices atingiram -15%, -15,3% e 15,34% respectivamente. Cabe também ressaltar que há uma notável concentração dos índices de erro no intervalo de -5% a 5%, onde encontram-se 30 dos 43 experimentos para os critérios de Papadopoulos e do Mamiya e Araújo e 23 dos mesmos 43 para o modelo proposto.

Em suma, a aplicação do modelo proposto aos dados experimentais fornece índices de erro que variam, nas piores situações, entre -8,74% e 15,34% para todos os carregamentos e materiais analisados. Os piores resultados obtidos pelos critérios de Papadopoulos e de Mamiya e Araújo variam entre -15,3% e 7,3%, enquanto que o critério de Crossland oferece previsões bastante ruins. Pode-se observar, na aplicação do modelo proposto, uma translação dos índices de erro para a região conservativa quando se tem a presença de tensão média na história de tensão. Esta tendência está de acordo com a hipótese de que a pior situação - que corresponde a considerar a existência de uma micro-trinca orientada ortogonalmente à máxima tensão principal - deveria ser considerada em vez da solicitação média dada pela máxima tensão hidrostática.

Tabela 5.1: Resistência à fadiga de aço duro ($t_{-1}=196,2$ MPa, $f_{-1}=313,9$ MPa): dados experimentais (Nishihara e Kawamoto (1945)) e previsões.

| | σ_a (MPa) | σ_m (MPa) | τ_a (MPa) | τ_m (MPa) | β (°) | I^a (%) | I^b (%) | I^c (%) | I^d (%) |
|------|---------------------|---------------------|-------------------|-------------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1-1 | 138,1 | 0 | 167,1 | 0 | 0 | -2,27 | -2,3 | -2,28 | -1,91 |
| 1-2 | 140,4 | 0 | 169,9 | 0 | 30 | -2,60 | -0,6 | -0,64 | -0,27 |
| 1-3 | 145,7 | 0 | 176,3 | 0 | 60 | -3,61 | 3,1 | 3,10 | 3,49 |
| 1-4 | 150,2 | 0 | 181,7 | 0 | 90 | -3,74 | 6,3 | 6,27 | 6,66 |
| 1-5 | 245,3 | 0 | 122,6 | 0 | 0 | 1,44 | 1,5 | 1,44 | 1,73 |
| 1-6 | 249,7 | 0 | 124,8 | 0 | 30 | 0,01 | 3,3 | 3,26 | 3,55 |
| 1-7 | 252,4 | 0 | 126,2 | 0 | 60 | -8,35 | 4,4 | 4,39 | 4,69 |
| 1-8 | 258,0 | 0 | 129,0 | 0 | 90 | -17,81 | 6,5 | 6,70 | 7,01 |
| 1-9 | 299,1 | 0 | 62,8 | 0 | 0 | 0,92 | 0,9 | 0,92 | 1,02 |
| 1-10 | 304,5 | 0 | 63,9 | 0 | 90 | -2,99 | 2,7 | 2,74 | 2,83 |

^a Crossland, ^b Papadopoulos, ^c Mamiya e Araújo, ^d Modelo proposto

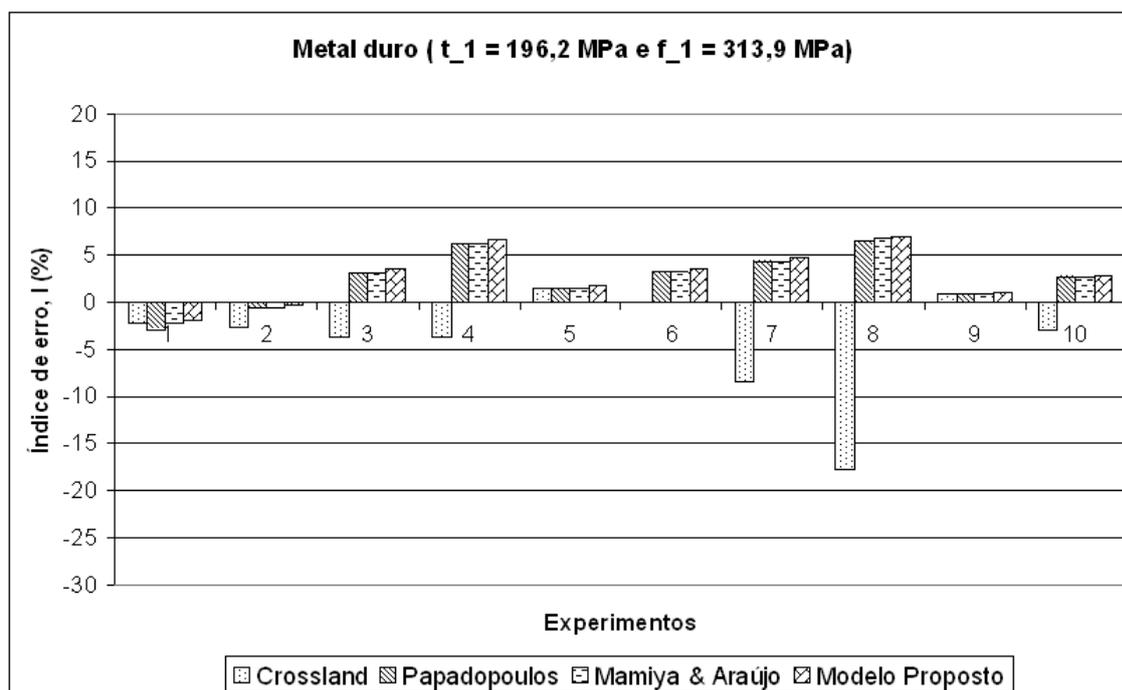


Figura 5.2: Índices de erro associados a cada dado experimental para metal duro (Nishihara e Kawamoto (1945))

Tabela 5.2: Resistência à fadiga de 34Cr4 ($t_{-1}=256$ MPa, $f_{-1}=410$ MPa): dados experimentais (Heidenreich et al. (1983)) e previsões.

| | σ_a (MPa) | σ_m (MPa) | τ_a (MPa) | τ_m (MPa) | β (°) | I^a (%) | I^b (%) | I^c (%) | I^d (%) |
|------|---------------------|---------------------|-------------------|-------------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 2-1 | 314 | 0 | 157 | 0 | 0 | -0,55 | -0,6 | -0,55 | -0,27 |
| 2-2 | 315 | 0 | 158 | 0 | 60 | -12,33 | -0,1 | -0,11 | 0,18 |
| 2-3 | 316 | 0 | 158 | 0 | 90 | -22,93 | 0,1 | 0,08 | 0,37 |
| 2-4 | 315 | 0 | 158 | 0 | 120 | -12,33 | -0,1 | -0,11 | 0,18 |
| 2-5 | 224 | 0 | 224 | 0 | 90 | -8,38 | 5,2 | 5,15 | 5,55 |
| 2-6 | 380 | 0 | 95 | 0 | 90 | -7,32 | 0,4 | 0,37 | 0,49 |
| 2-7 | 316 | 0 | 158 | 158 | 0 | 0,08 | 0,1 | 0,08 | 6,01 |
| 2-8 | 314 | 0 | 157 | 157 | 60 | -12,69 | -0,6 | -0,54 | 5,34 |
| 2-9 | 315 | 0 | 158 | 158 | 90 | -23,17 | -0,1 | -0,11 | 5,83 |
| 2-10 | 279 | 279 | 140 | 0 | 0 | -6,38 | -6,4 | -6,38 | -0,21 |
| 2-11 | 284 | 284 | 142 | 0 | 90 | -25,5 | -4,8 | -4,83 | 1,45 |
| 2-12 | 212 | 212 | 212 | 0 | 90 | -9,39 | 3,4 | 3,41 | 7,23 |

^a Crossland, ^b Papadopoulos, ^c Mamiya e Araújo, ^d Modelo proposto

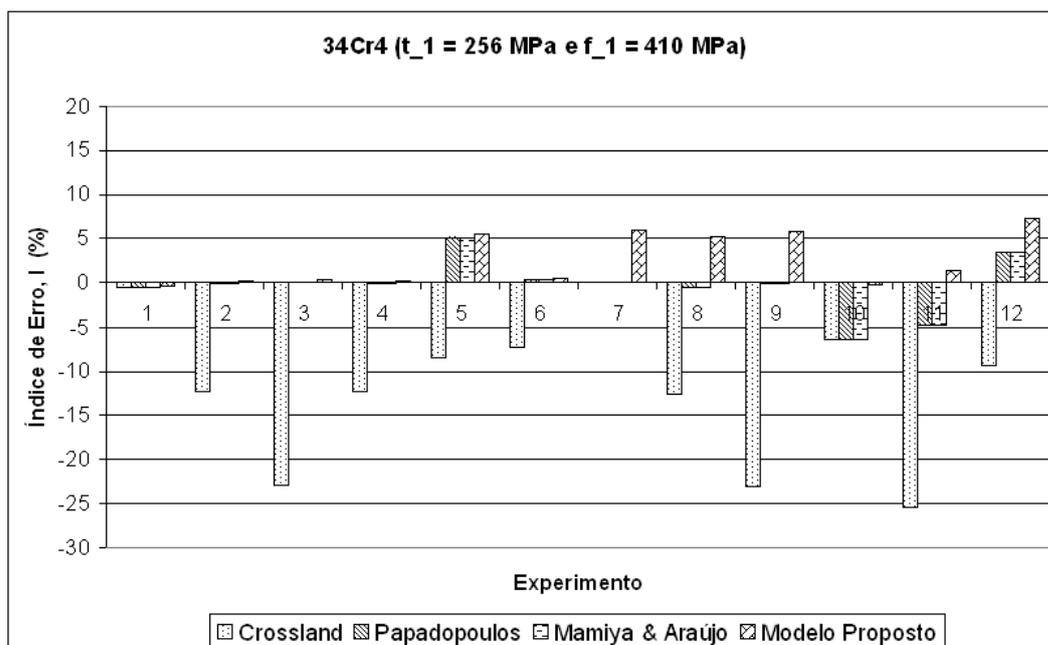


Figura 5.3: Índices de erro associados a cada dado experimental para 34Cr4 (Heidenreich et al. (1983))

Tabela 5.3: Resistência à fadiga de 42CrMo4 ($t_{-1}=260$ MPa, $f_{-1}=398$ MPa): Dados experimentais (Lempp (1977)) e previsões.

| | σ_a (MPa) | σ_m (MPa) | τ_a (MPa) | τ_m (MPa) | β (°) | I^a (%) | I^b (%) | I^c (%) | I^d (%) |
|-----|---------------------|---------------------|-------------------|-------------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 3-1 | 328 | 0 | 157 | 0 | 0 | 4,19 | 4,2 | 4,19 | 4,63 |
| 3-2 | 286 | 0 | 137 | 0 | 90 | -28,14 | -8,8 | -9,13 | -8,74 |
| 3-3 | 233 | 0 | 224 | 0 | 0 | 7,30 | 7,3 | 7,3 | 7,94 |
| 3-4 | 213 | 0 | 205 | 0 | 90 | -14,94 | -1,8 | -1,84 | -1,25 |
| 3-5 | 266 | 0 | 128 | 128 | 0 | -15,34 | -15,0 | -15,3 | -7,80 |
| 3-6 | 283 | 0 | 136 | 136 | 90 | -28,89 | -9,6 | -9,97 | -1,97 |
| 3-7 | 333 | 0 | 160 | 160 | 180 | 5,92 | 5,8 | 5,92 | 15,34 |
| 3-8 | 280 | 280 | 134 | 0 | 0 | -2,89 | -2,7 | -2,89 | 7,04 |
| 3-9 | 271 | 271 | 130 | 0 | 90 | -23,99 | -5,8 | -5,93 | 3,67 |

^a Crossland, ^b Papadopoulos, ^c Mamiya e Araújo, ^d Modelo proposto

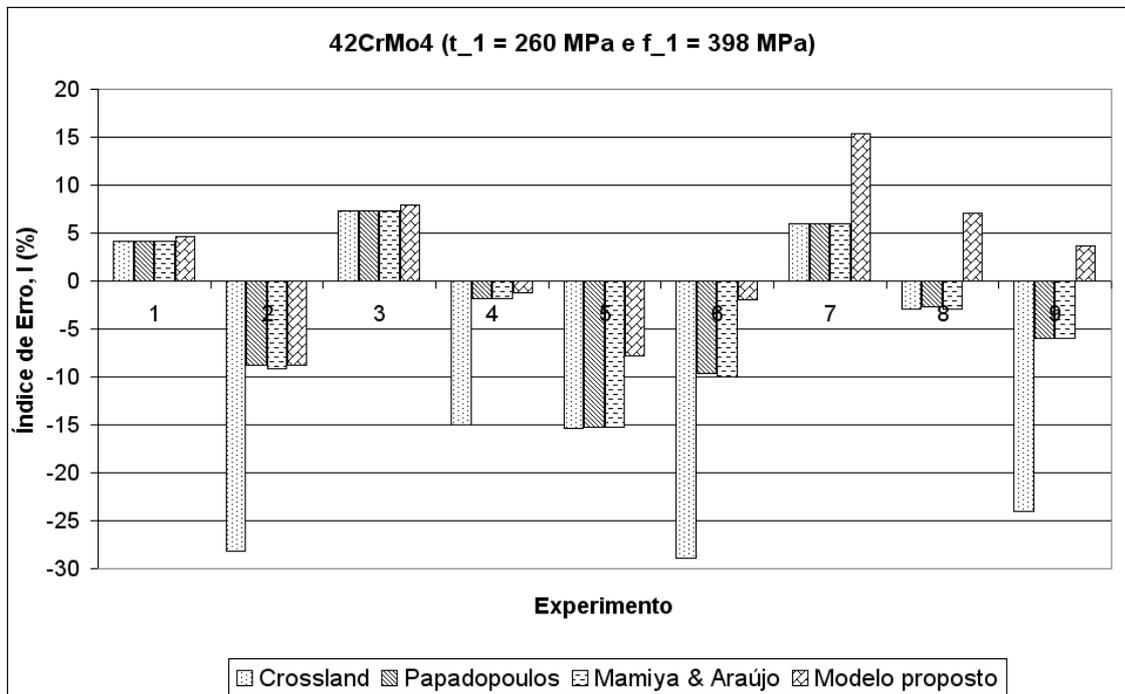


Figura 5.4: Índices de erro associados a cada dado experimental para 42CrMo4 (Lempp (1977))

Tabela 5.4: Resistência à fadiga de 30NCD16 ($t_{-1}=410$ MPa, $f_{-1}=660$ MPa): dados experimentais (Froustey e Lasserre (1989)) e previsões.

| | σ_a (MPa) | σ_m (MPa) | τ_a (MPa) | τ_m (MPa) | β (°) | I^a (%) | I^b (%) | I^c (%) | I^d (%) |
|------|---------------------|---------------------|-------------------|-------------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 4-1 | 485 | 0 | 280 | 0 | 0 | 1,77 | 1,8 | 1,77 | 2,07 |
| 4-2 | 480 | 0 | 277 | 0 | 90 | -27,27 | 0,7 | 0,70 | -2,20 |
| 4-3 | 480 | 300 | 277 | 0 | 0 | 3,91 | 3,9 | 3,91 | 7,62 |
| 4-4 | 480 | 300 | 277 | 0 | 45 | -3,36 | 3,9 | 3,91 | 6,77 |
| 4-5 | 470 | 300 | 270 | 0 | 60 | -10,93 | 1,6 | 1,60 | 3,85 |
| 4-6 | 473 | 300 | 273 | 0 | 90 | -25,12 | 2,5 | 2,45 | 3,97 |
| 4-7 | 590 | 300 | 148 | 0 | 0 | 0,11 | 0,1 | 0,11 | 4,32 |
| 4-8 | 565 | 300 | 141 | 0 | 45 | -7,23 | -4,1 | -4,07 | -0,14 |
| 4-9 | 540 | 300 | 135 | 0 | 90 | -14,97 | -8,1 | -8,15 | -4,47 |
| 4-10 | 211 | 300 | 365 | 0 | 0 | -0,68 | -0,7 | -0,68 | 1,86 |

^a Crossland, ^b Papadopoulos, ^c Mamiya e Araújo, ^d Modelo proposto

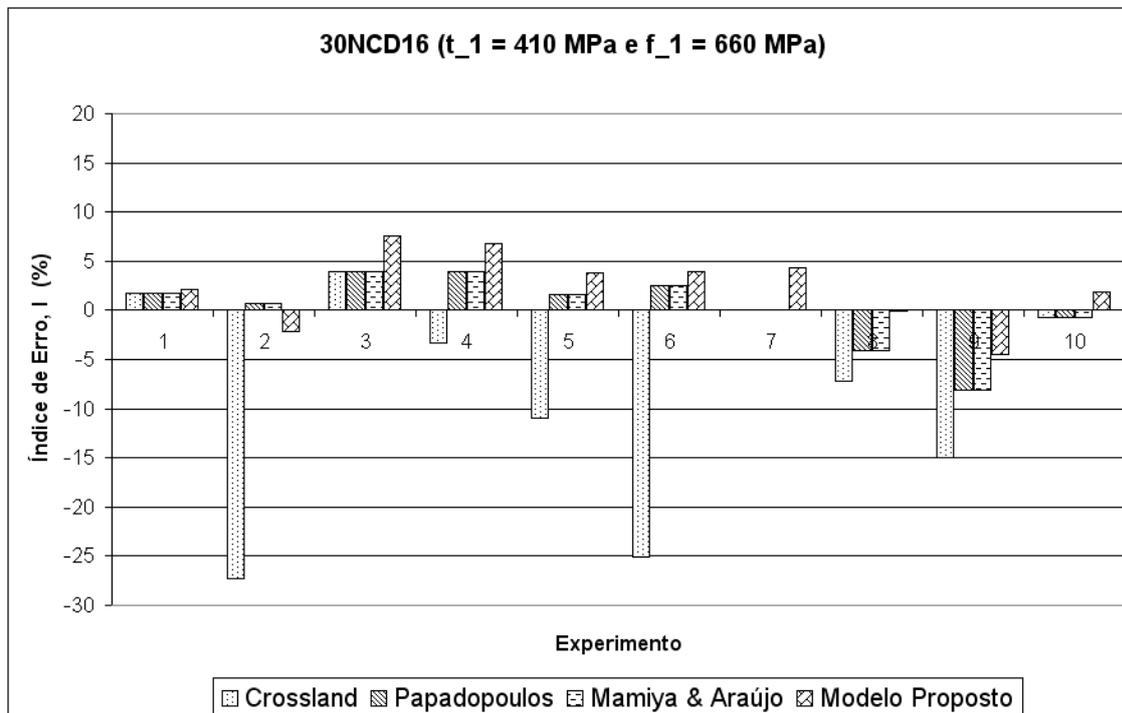


Figura 5.5: Índices de erro associados a cada dado experimental para 30NCD16 (Froustey e Lasserre (1989))

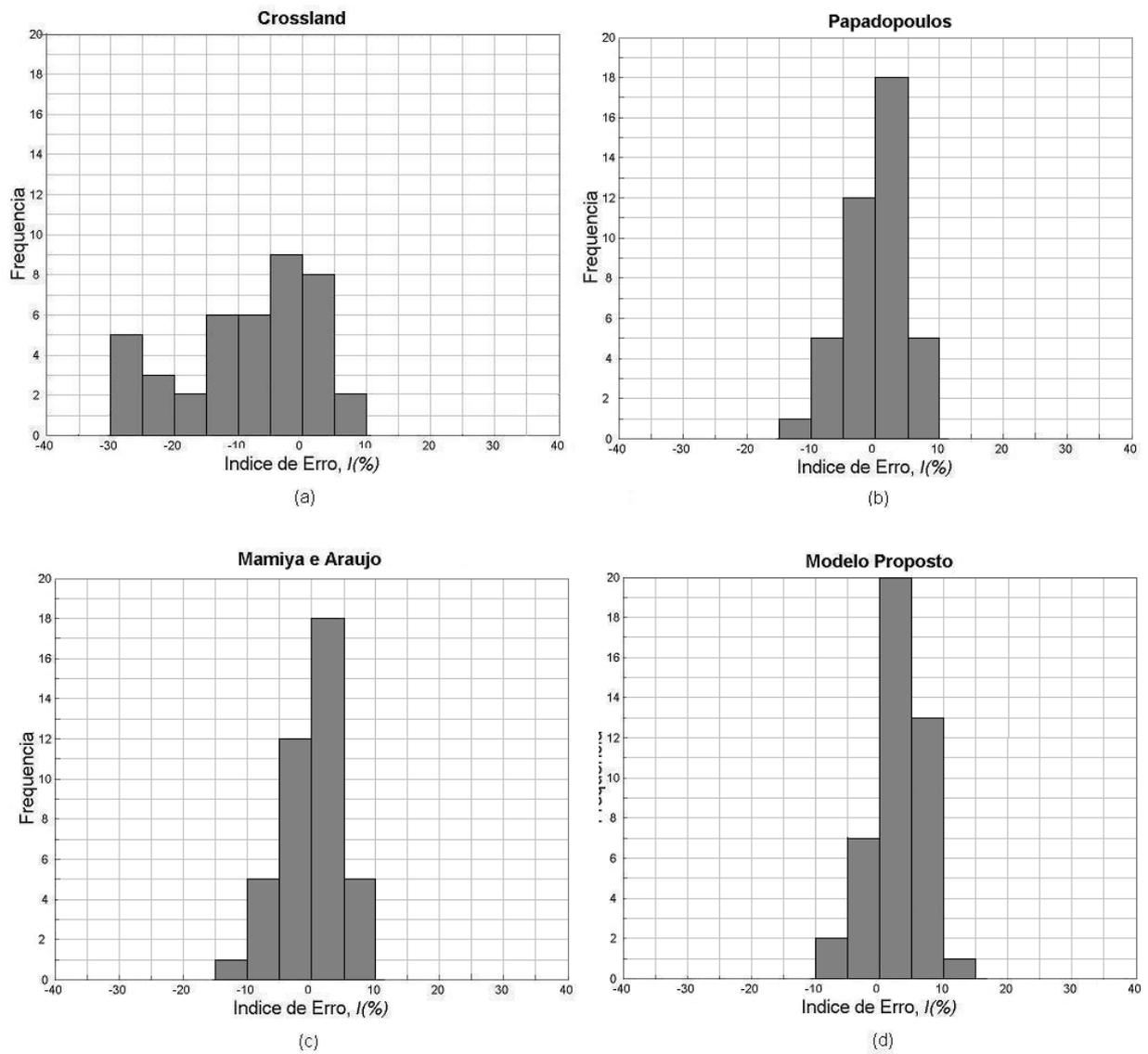


Figura 5.6: Histograma de frequência mostrando a dispersão da diferença relativa entre previsões e valores experimentais para os critérios analisados.

5.2 Avaliação de resistência à fadiga: carregamentos trapezoidal e senoidais assíncronos

5.2.1 Carregamento trapezoidal

Nesta etapa, apresenta-se resultados de resistência à fadiga obtidos na comparação entre as abordagens do *envelope elíptico* e *envelope prismático*. A aplicação destes modelos a um conjunto de resultados experimentais fornece dados numéricos para a análise pretendida. Experimentos conduzidos por Heidenreich et al. (1983) e por Kaniut, C. (1983), disponíveis na literatura, representam situações limites de resistência à fadiga em condições de carregamentos multiaxiais senoidais assíncronos e carregamento trapezoidal (não harmônico). A Tabela 5.5 mostra os valores experimentais das amplitudes de tensão normal e cisalhante, os valores de tensão média, o ângulo de fase e o fator de frequência que geram as histórias de tensões desenhadas na última coluna.

Seguindo a metodologia apresentada, as medidas consideradas importantes na contabilização dos esforços cisalhantes e normais foram calculados. Para o carregamento trapezoidal (Tabela 5.5, linha 1), a história de tensão pode ser totalmente caracterizada pelo ponto $(\sigma_a, \tau_a) = (240 \text{ MPa}, 120 \text{ MPa})$. A projeção deste ponto no espaço desviador, define suas componentes:

$$s_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \sigma_a = 195,96 \text{ MPa},$$

$$s_3 = \sqrt{2} \tau_a = 169,71 \text{ MPa},$$

$$s_2 = s_4 = s_5 = 0.$$

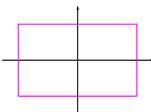
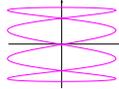
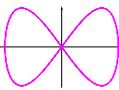
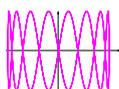
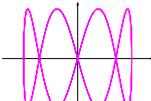
escritas na base ortonormal escolhida, Equação 2.20. Como a história de tensão no espaço desviador continua tendo duas componentes (s_1 e s_3) assim como tinha no espaço das tensões (σ_{xx} e σ_{xy}), sua forma retangular é mantida. Definida a trajetória no espaço desviador, quantifica-se a amplitude de tensão cisalhante segundo as abordagens do *envelope elíptico* e do *envelope prismático*. A menor elipse que circunscribe a trajetória é a que minimiza a quantidade:

$$\tau_{eq} = f(\lambda_3; s_1, s_3) = \sqrt{\frac{s_1^2 \lambda_3^2}{\lambda_3^2 - s_3^2} + \lambda_3^2}$$

em λ_3 . Para o carregamento em questão, temos:

$$\tau_{eq} = 365,60 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad p_{h_{max}} = 80,0 \text{ MPa}.$$

Tabela 5.5: Carregamentos multiaxiais: (1) trapezoidal e (2 a 5) senoidais assíncronos

| | σ_a (MPa) | σ_m (MPa) | τ_a (MPa) | τ_m (MPa) | β ($^\circ$) | η | $\sigma \times \tau$ |
|---|------------------|------------------|----------------|----------------|----------------------|--------|---|
| 1 | 240 | 0 | 120 | 0 | 90 | 1 |  |
| 2 | 210 | 0 | 105 | 0 | 0 | 1/4 |  |
| 3 | 220 | 0 | 110 | 0 | 0 | 2 |  |
| 4 | 196 | 0 | 98 | 0 | 0 | 8 |  |
| 5 | 263 | 0 | 132 | 0 | 0 | 4 |  |

1: 34Cr4 ($f_{-1} = 415$ MPa, $t_{-1} = 256$ MPa) Heidenreich et al. (1983)

2, 3 e 4: 25CrMo4 ($f_{-1} = 340$ MPa, $t_{-1} = 228$ MPa) Kaniut, C. (1983)

5: 34Cr4 ($f_{-1} = 415$ MPa, $t_{-1} = 256$ MPa) Heidenreich et al. (1983)

Traçando-se a curva $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1^2} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, Figura 5.7 (a), observa-se o ponto de mínimo que caracteriza a tensão equivalente, medida referente à menor elipse que circunscreve a trajetória de tensões para o carregamento em análise:

$$\left(\tau_{eq}, \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)_{min} = (365,60, 1,0754), \quad (5.4)$$

este valor de tensão equivalente está associado a:

$$(\lambda_1)_{min} = 267,79 \text{ MPa}, \quad e \quad (\lambda_3)_{min} = 249,0 \text{ MPa}.$$

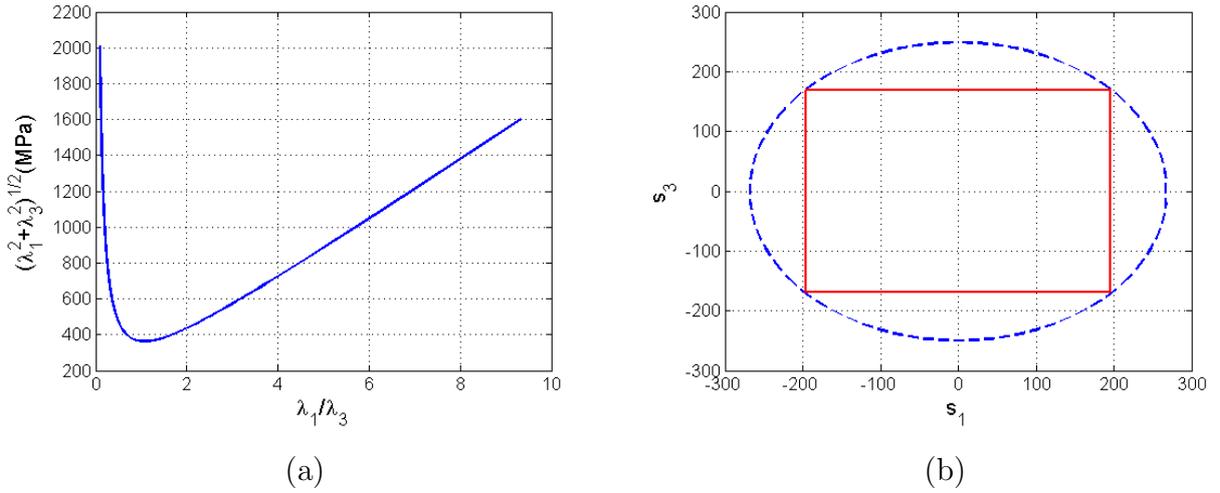


Figura 5.7: (a) Curva $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2} \times \lambda_1/\lambda_3$ com ponto de mínimo que caracteriza a tensão equivalente e (b) trajetória circunscrita pela menor elipse que a contém.

A Figura 5.7 (b) mostra a história de tensões desviadoras circunscrita pelo menor elipsóide que fornece a amplitude de tensão cisalhante adequada ao conceito do envelope elíptico.

O índice de erro - que mede a diferença relativa entre a previsão do critério e os dados experimentais que caracterizam o limite de fadiga - é:

$$I = \frac{\tau_{eq} + \kappa p_{hmax} - \lambda}{\lambda} \times 100 = 4,96\%$$

como indicado na Tabela 5.6, linha 1. Era de se esperar que o índice de erro I fosse zero, caracterizando a situação limite de resistência à fadiga. O valor positivo obtido mostra que a estimativa de resistência obtida é conservativa para este caso.

Na proposta do envelope prismático, a medida associada à amplitude de tensão cisalhante é dada pela Equação 4.8. As distâncias a_i 's são escritas em função da orientação θ do prisma retangular que circunscreve a trajetória de tensões. Variando tal orientação, obtém-se diferentes valores para $\sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta)}$. Como mostrado analiticamente, a maior medida fornecida pela norma escolhida é relativa ao prisma rotacionado 45° (em relação à origem). E, de acordo com as equações (4.24) e (4.25), nesta posição, $a_1 = a_3 = \sqrt{s_1^2 + s_3^2}$. A Figura 5.8 mostra a trajetória circunscrita pelo maior prisma.

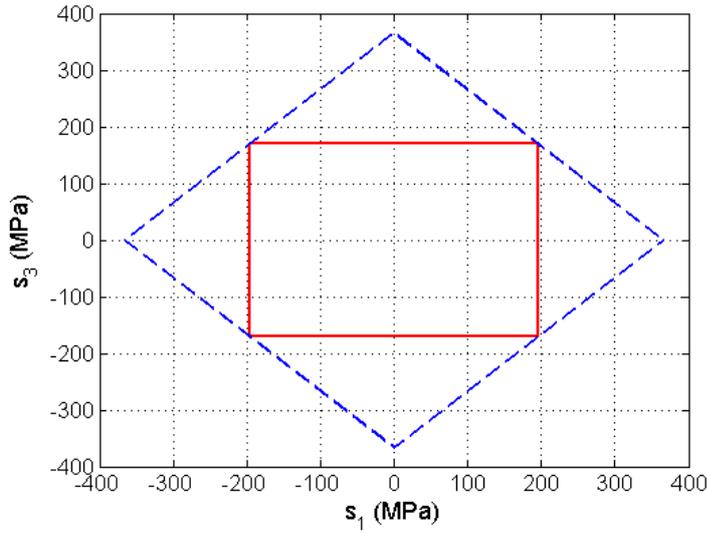


Figura 5.8: Trajetória de tensões desviadoras e o maior prisma que a circunscreve

A tensão equivalente e os valores de a_1 e a_3 são, respectivamente:

$$\tau_{eq} = 366,61 \text{ MPa}, \quad a_1 = a_3 = 259,23 \text{ MPa}.$$

A pressão hidrostática é $p_{h_{max}} = 80,0 \text{ MPa}$ e o índice de erro é:

$$I = \frac{\tau_{eq} + \kappa p_{h_{max}} - \lambda}{\lambda} \times 100 = 4,97\%,$$

como indicado na Tabela 5.6, linha 1. Deve-se notar que estes resultados são essencialmente os mesmos que os obtidos quando o menor elipsóide foi considerado.

5.2.2 Carregamentos senoidais assíncronos

Projetando-se as histórias de tensão dos carregamentos senoidais assíncronos no espaço desviador e escrevendo-as em função da base ortonormal escolhida, Equação 2.20, chega-se a somente duas componentes não nulas: s_1 e s_3 .

Na abordagem do envelope elíptico, a tensão equivalente é calculada obtendo-se a norma $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}$ dos semi-eixos principais da menor elipse que circunscribe a história de tensões desviadoras, já que λ_2 , λ_4 e λ_5 são nulos. O valor mínimo é obtido dentre o conjunto de elipses que tangenciam a história de tensão. Plotando-se $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2} \times \lambda_1/\lambda_3$ para este conjunto de elipses, Figura 5.9 (a), (c) e (e), visualiza-se um ponto de mínimo na curva, que caracteriza a menor medida procurada e a tensão equivalente. Por exemplo, para a trajetória (d) da Figura 5.9:

$$\left(\tau_{eq}, \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)_{min} = (293,28, 1,0421),$$

$$(\lambda_1)_{min} = 211,00 \text{ MPa}, \quad e \quad (\lambda_3)_{min} = 202,47 \text{ MPa}.$$

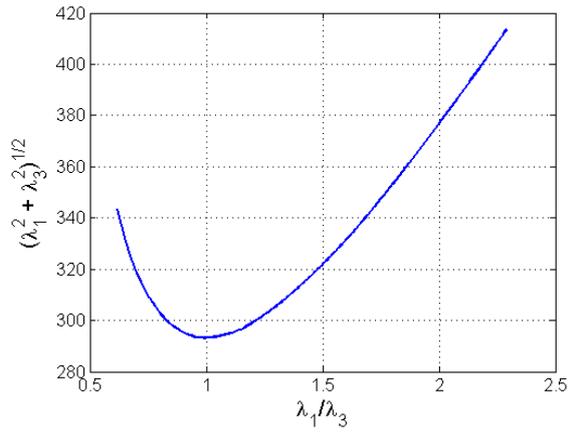
Para o carregamento em questão, temos:

$$\tau_{eq} = 293,28 \text{ MPa} \quad e \quad p_{h_{max}} = 73,33 \text{ MPa}$$

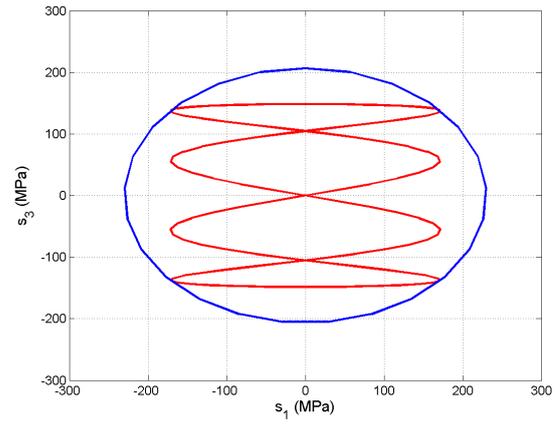
e o índice de erro é:

$$I = \frac{\tau_{eq} + \kappa p_{h_{max}} - \lambda}{\lambda} \times 100 = -0,05\%,$$

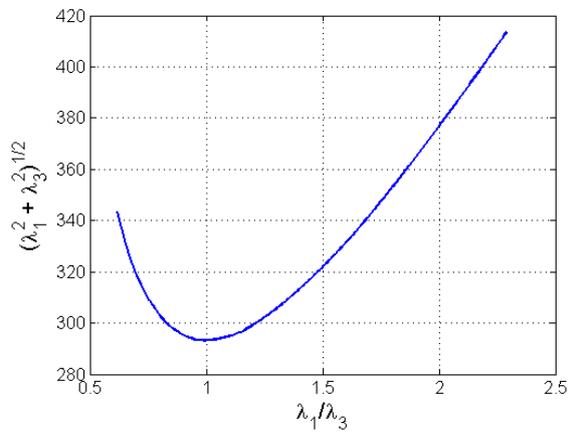
como indicado na Tabela 5.6, linha 3. O índice negativo, indica previsão de resistência à fadiga não conservativa.



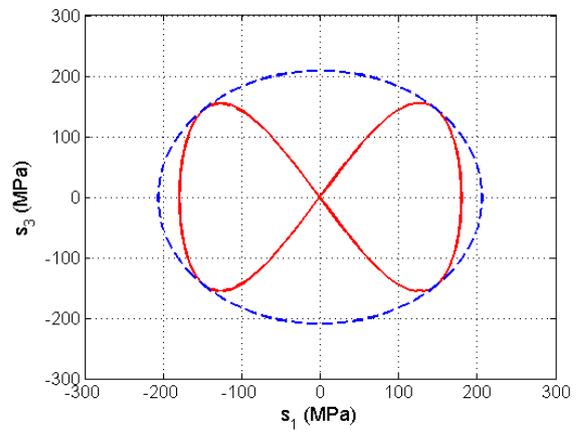
(a)



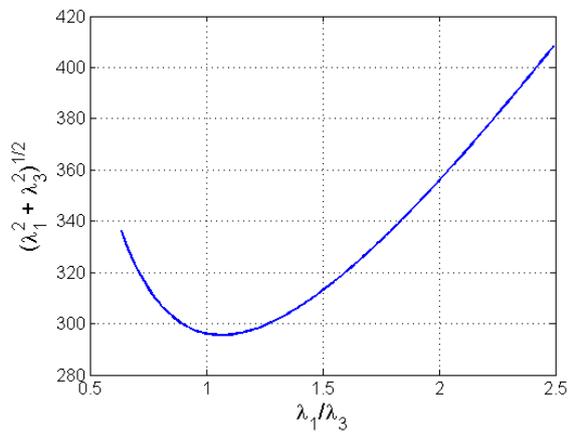
(b)



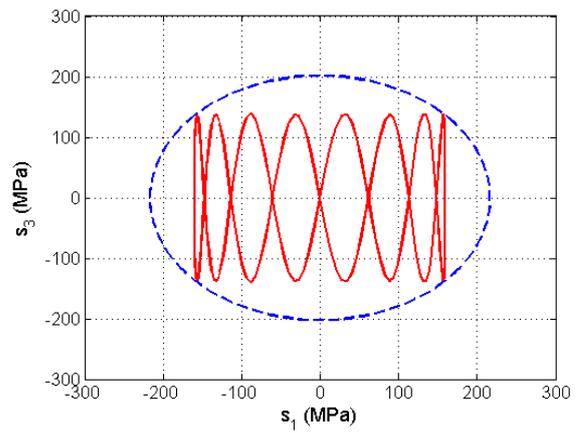
(c)



(d)



(e)

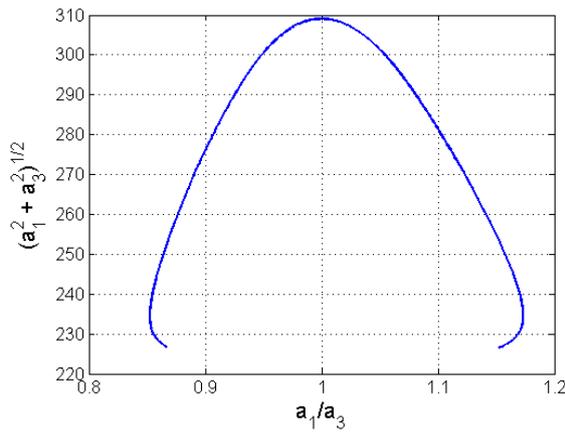


(f)

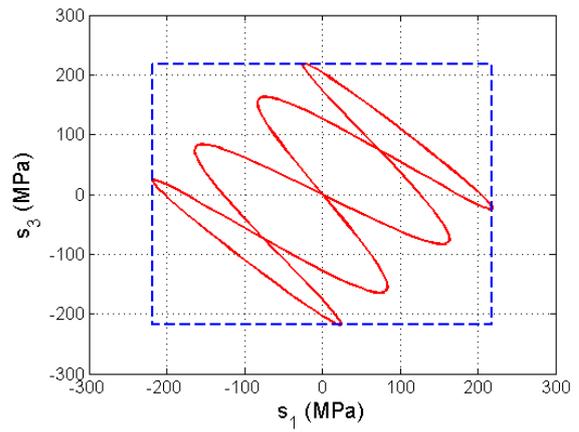
Figura 5.9: (a) e (c) $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}$ (MPa) $\times \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, (b) e (e): trajetórias de tensões desviadoras e menores elipses que a circunscrevem

Pensando no envelope prismático, a tensão equivalente é a maior medida $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$ obtida quando a trajetória de tensões desviadoras reescrita na nova base (Equação 2.20) é rotacionada. Como as trajetórias são simétricas, basta rotacionar o prisma de 0 a 90° para se obter todos os valores possíveis da medida $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$. A Figura 5.10 mostra, para cada caso, a curva que relaciona a medida $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$ à a_1/a_3 calculada para cada ângulo ($0 < \theta < \pi/2$) e o desenho da trajetória circunscrita pelo prisma na situação em que obtém-se o máximo valor de $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$.

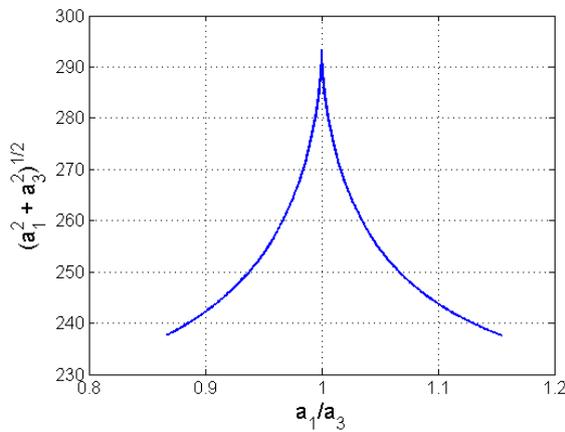
A figura 5.10 mostra as curvas (a), (c), (e) e (g) que relaciona a_1/a_3 com $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$ para os carregamentos senoidais assíncronos analisados, para $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Os gráficos (b), (b), (f) e (h) mostram as trajetórias desviadoras e o maior prisma que as circunscribe. A norma $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$ deste prisma, cujo valor numérico é a ordenada no ponto de máximo é a tensão equivalente do modelo de resistência à fadiga proposto.



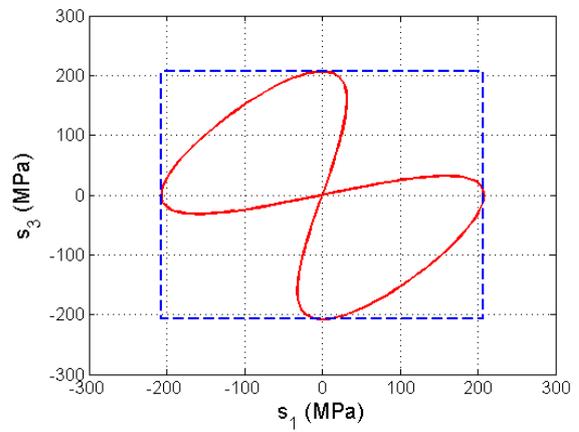
(a)



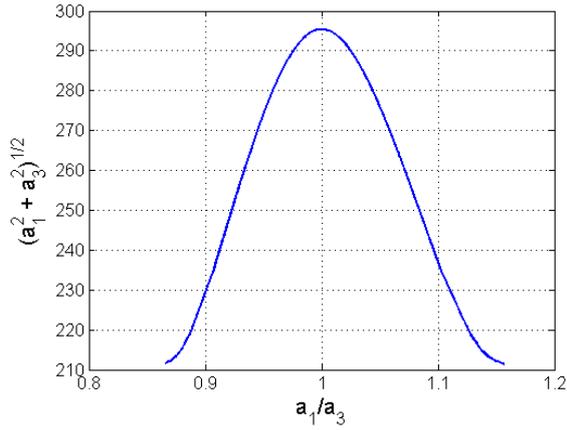
(b)



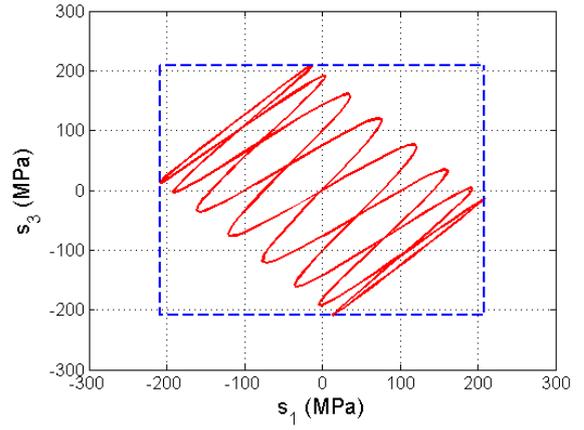
(c)



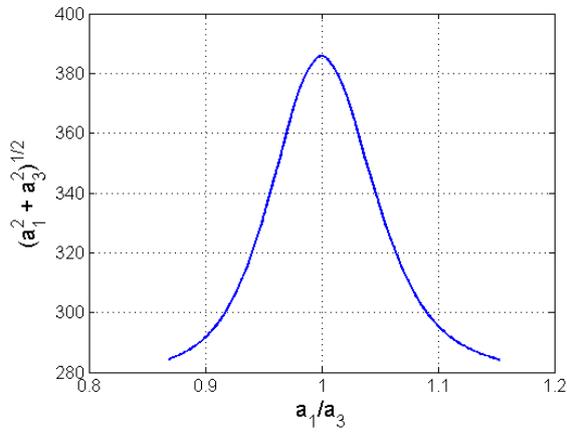
(d)



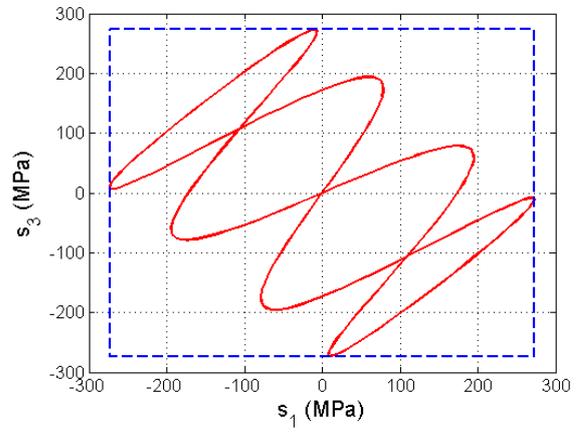
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.10: (a), (c), (e), (g): Curva $\tau_{eq} \times a_1/a_3$ com rotação do prisma de 0 a $\pi/2$ e (b), (d), (f), (h): envelope prismático cujas medidas a_1 e a_3 fornecem a tensão equivalente.

Analisando o mesmo carregamento (d) mostrado como exemplo para obtenção da tensão equivalente segundo a bordagem do envelope elíptico, a maior medida de $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$ e a máxima pressão hidrostática são:

$$\tau_{eq} = \max_{\theta} \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2(\theta)} = 293,33 \text{ MPa} \quad \text{e} \quad p_{h_{max}} = 73,19 \text{ MPa}.$$

O índice de erro é, então:

$$I = \frac{\tau_{eq} + \kappa p_{h_{max}} - \lambda}{\lambda} \times 100 = -0,03\%.$$

Novamente, a previsão é essencialmente a mesma que a obtida pela menor elipse. Também para os demais carregamentos mostrados na figura 5.6 os resultados da tensão equivalente calculada pela menor são semelhantes aos obtidos pelo maior prisma que circunscribe a história de tensão. Assim como no carregamento trapezoidal, para os carregamentos senoidais analisados, a tensão equivalente é obtida quando o prisma está defasado de 45° em relação à história de tensões desviadoras.

Tal fato leva a uma análise interessante: escreve-se o ângulo de rotação do envelope prismático em função do número de rotações deste:

$$\theta = [0 : m] \times \frac{\pi}{2m},$$

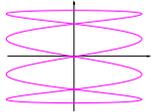
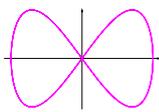
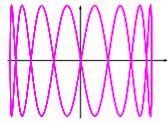
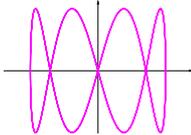
onde m é o número de rotações. Para uma rotação ($m = 1$), tem-se o envelope prismático a 0 e a 90° , para duas rotações ($m = 2$), o prisma estará a 0 , 45 e 90° , Calculando-se a medida $\sqrt{a_1^2 + a_3^2}$ para cada posição e buscando seu valor máximo em cada situação, percebe-se que quando o prisma passa por 45° , independente do número de rotações efetuadas, obtém-se o valor "correto" da tensão equivalente como mostra a Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Ângulos do envelope prismático em relação ao número de rotações e valor da tensão equivalente calculada

| θ ($^\circ$) | No. de rotações | τ_{eq} (MPa) |
|------------------------|-----------------|-------------------|
| 0 90 | 1 | 237,63 |
| 0 45 90 | 2 | 293,27 |
| 0 30 60 90 | 3 | 285,39 |
| 0 22,5 45 67,5 90 | 4 | 293,27 |
| 0 18 36 54 72 90 | 5 | 290,45 |
| 0 15 30 45 60 75 85 90 | 6 | 293,27 |

Este fato sugere a possibilidade de otimização do método; certamente não é necessário varrer todos os ângulos $0 < \theta \leq 90^\circ$ para obter-se a medida da tensão equivalente. Um número pequeno de rotações deve ser suficiente, desde que o ângulo "correto" seja incluído.

Tabela 5.6: Resultados de amplitude de tensão cisalhante $f(\tau)$, contribuição das tensões normais $g(\sigma)$ e índice de erro I para os carregamentos analisados.

| | | tensão hidrostática | | tensão principal | | |
|---|-------------------|---------------------|---------------------|-------------------|---------------------|---|
| | | envelope elíptico | envelope prismático | envelope elíptico | envelope prismático | |
| 1 | $f(\tau)$ (MPa) | 365,60 | 366,61 | 365,60 | 366,61 |  |
| | $g(\sigma)$ (MPa) | 80,0 | 80,0 | 289,71 | 289,71 | |
| | I (%) | 4,96 | 4,97 | 2,14 | 2,38 | |
| 2 | $f(\tau)$ (MPa) | 309,19 | 309,19 | 309,19 | 309,19 |  |
| | $g(\sigma)$ (MPa) | 70,0 | 69,86 | 248,01 | 248,01 | |
| | I (%) | 4,47 | 4,46 | -1,27 | -1,27 | |
| 3 | $f(\tau)$ (MPa) | 293,28 | 293,33 | 293,28 | 293,33 |  |
| | $g(\sigma)$ (MPa) | 73,33 | 73,19 | 230,26 | 230,38 | |
| | I (%) | -0,05 | -0,33 | -7,04 | -6,81 | |
| 4 | $f(\tau)$ (MPa) | 295,52 | 295,52 | 295,52 | 295,52 |  |
| | $g(\sigma)$ (MPa) | 65,33 | 65,33 | 233,50 | 233,50 | |
| | I (%) | -0,33 | -0,62 | -5,98 | -5,98 | |
| 5 | $f(\tau)$ (MPa) | 385,97 | 385,97 | 385,97 | 385,97 |  |
| | $g(\sigma)$ (MPa) | 87,67 | 87,67 | 302,27 | 302,27 | |
| | I (%) | 10,67 | 10,67 | 7,68 | 7,71 | |

1: 34Cr4 ($f_{-1} = 415$ MPa, $t_{-1} = 256$ MPa) Heidenreich et al. (1983)

2, 3, e 4: 25CrMo4 ($f_{-1} = 340$ MPa, $t_{-1} = 228$ MPa) Kaniut, C. (1983)

5: 34Cr4 ($f_{-1} = 415$ MPa, $t_{-1} = 256$ MPa) Heidenreich et al. (1983)

Capítulo 6

Conclusão

Três fatores podem ser colocados como determinantes na resistência à fadiga de materiais: (1) as tensões cisalhantes a que o componente está submetido por conta da conseqüente formação de bandas de escorregamento, (2) as tensões normais pela ação maléfica sobre as micro-trincas e (3) as características do material. Estas três questões são consideradas na definição de critérios de resistência à fadiga multiaxial por diversos autores. A pergunta que se coloca no estudo de critérios de resistência à fadiga de metais no contexto de solicitações multiaxiais é: como definir uma medida para a amplitude de tensões tanto normais quanto cisalhantes? Tendo esta questão em mente as definições de medida para quantificar as tensões normais e as tensões cisalhantes foram consideradas neste estudo.

Um novo critério de fadiga multiaxial foi proposto. A aplicação deste critério para um grande número de carregamentos senoidais síncronos proporcional e fora de fase envolvendo quatro materiais diferentes sob estados multiaxial de tensão fornece boas previsões de resistência à fadiga.

Um estudo comparativo entre os critérios de resistência propostos por Crossland (1956), Papadopoulos (1997), Mamiya e Araújo (2002) e entre o modelo aqui apresentado, mostra que os quatro apresentam excelentes previsões de resistência à fadiga para carregamentos proporcionais de flexão e torção alternadas. Contudo, somente os três últimos oferecem, em geral, previsões bastante próximas dos resultados experimentais para carregamentos fora de fase. Tal fato evidencia a superioridade do conceito do menor elipsóide em relação à menor hipersfera no cálculo da amplitude de tensão equivalente.

Contudo, a determinação do menor elipsóide não é um problema trivial. Para carregamentos senoidais síncronos, Mamiya e Araújo apresentaram uma forma bastante simples para medir a amplitude de tensão cisalhante e mostraram que os resultados são idênticos à medida obtida pelo elipsóide. O modelo aqui apresentado utiliza a proposta de amplitude de tensão equivalente do critério de Mamiya e Araújo, qual seja uma norma invariante das distâncias do centro da história de tensão projetada no espaço desviador aos hiperplanos do prisma que a circunscribe. A novidade está na forma de avaliar a contribuição das tensões normais para o fenômeno de fadiga. Tendo como motivação a possibilidade da existência de uma micro-trinca orientada ortogonalmente à máxima tensão principal, o modelo proposto utiliza então a máxima tensão principal como medida, em vez do valor médio oferecido pela pressão hidrostática.

Este modelo, como era de se esperar, fornece estimativas de resistência mais conservativas que os demais critérios analisados sempre que há tensões normais ou cisalhantes médias na história de tensão. Por outro lado, quando tais tensões médias não estão presentes, as previsões são essencialmente semelhantes aos outros critérios apresentados, com exceção de Crossland. Uma qualidade bastante interessante do modelo proposto que deve ser evidenciada é sua simplicidade de implementação.

A boa concordância alcançada entre as previsões de resistência e os dados experimentais, para os critérios de Papadopoulos, Mamiya e Araújo e o critério proposto, não significa que a discussão a respeito da seleção de um critério de fadiga multiaxial esteja encerrada. Nos casos mais gerais de histórias de tensão, nem o caráter harmônico e nem a mesma frequência de solitação são necessariamente observados e, nestes casos, a invariância da medida das tensões cisalhantes não é observada. Estendendo então a discussão, objetivou-se realizar uma comparação entre as abordagens do envelope elíptico e do envelope prismático na quantificação da amplitude de tensão cisalhante na resistência à fadiga multiaxial em carregamentos senoidais assíncronos e trapezoidal síncrono.

Quantificar a amplitude de tensão cisalhante através do envelope prismático é relativamente simples e computacionalmente barato. Já a obtenção da menor elipse é um processo complexo e computacionalmente mais caro. Contudo, para as trajetórias estudadas, constatou-se equivalência nos resultados de tensão equivalente calculada

segundo as duas abordagens em questão. Para cinco conjuntos de dados experimentais de condições limite de resistência à fadiga para carregamentos senoidais síncronos e assíncronos, e trapezoidal síncrono não harmônico, a medida obtida pelo menor elipsóide é semelhante à obtida pelo maior prisma que circunscrevem a história de tensão. Os resultados apresentados aqui sugerem uma ampliação do uso do conceito do envelope prismático para carregamentos mais gerais.

Outra observação é que, para todas as histórias de tensão estudadas, o maior prisma - aquele que contém as informações da tensão equivalente, estava sempre defasado de 45° em relação à história de tensões. Este tipo de constatação pode ser útil num estudo que preze pela eficiência dos algoritmos que calculam a amplitude de tensão cisalhante. Pois em princípio, todas as orientações em um espaço de dimensão 5 deveriam ser consideradas na rotação da trajetória. Na prática, dois procedimentos podem ser considerados: o primeiro emprega alguma técnica de otimização para a pesquisa de um máximo para norma do prisma, em função da orientação. Entretanto, a maioria dos métodos de otimização oferecem máximos locais, que podem subestimar a amplitude de tensão cisalhante - e conseqüentemente a severidade da solicitação à fadiga. Alternativamente, pode-se proceder a uma varredura intensiva (embora discretizada) de orientações na pesquisa da amplitude da tensão cisalhante. Embora este procedimento tenda a ser mais seguro, ele também pode se tornar excessivamente caro do ponto de vista computacional, à medida que o número de dimensões do menor subespaço que contém a história de tensões cresça.

Um próximo passo, portanto, para a evolução deste estudo seria mostrar que na prática, apenas um pequeno número de orientações necessita ser considerado para que se obtenha uma boa estimativa da amplitude de tensões cisalhantes. Embora o valor a ser obtido seja apenas aproximado, deve-se observar que uma pesquisa mais elaborada desta quantidade associaria um custo computacional muito mais elevado, sem um ganho de qualidade correspondente.

Bibliografia

- Albert W. A. J., 1838, “Über trebseile am Haz. Archive für Mineralogie”, Geognose, Bergbau und Hüttenkunde 10, Germany, pp. 215-34.
- Bin Li, Santos, J. L., Freitas M., 2000, “A unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation”, Mech. Struct. & Mach., Vol. 28, pp. 85–103.
- Brown M. W., Miller K. J., 1973, “A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain condition”, Proc Inst Mech Engrs, 187:745–755
- Carpentieri A., Spagnoli A., 2001, “Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals”, Int. J. Fatigue, 23:135–145.
- Castro, R. V., 2003, “Metodologia para determinação do limiar de trincas sob condições de *fretting*”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília.
- Crossland, B., 1956, “Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel”, Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals, IMechE, London, pp. 138–149.
- Dang Van, K., 1973, “Sur la résistance à la fatigue des métaux”, Sciences et techniques de l'armement, Vol. 47, pp. 429–453.
- Dang Van, K., Papadopoulos, I. V., 1987, “Multiaxial fatigue failure criterion: a new approach”, Proc. Third Int. Conf. on Fatigue and Fatigue Thresholds, Fatigue 87, Ritchie, R. O. & Starke Jr., E. A., eds., EMAS Warley, U.K., pp.997–1008.
- Deperrois, A., 1991, “Sur le calcul des limites d'endurance des aciers”, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris.
- Dowling, N.E., 1993, “Mechanical behavior of materials”, Prentice-hall, New Jersey, Chapter 9: Fatigue of materials: introduction and stress-based approach.

- Ellyin, F., Golos, K., Xia, Z., 1991, “In-phase and out-of-phase multiaxial fatigue”, ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 113, pp. 112–118.
- Ellyin, F., Kujawski, D., 1993, “A multiaxial fatigue criterion including mean stress effect”, Advances in Multiaxial Fatigue ASTM STP 1191, D. L. McDowell and R. Ellis, Eds, ASTM, Philadelphia, pp. 55–66.
- Ewing, J. A., Humfrey, J. C., 1903, “The fracture of metals under rapid alterations of stress”, Philosophical Transactions of the Royal Society, A200:241–250, London
- Ewing, J. A., Rosenhain, W., 1900, “Experiments in micro-metallurgy: effects of strain. Preliminary notice”, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Vol. A199, pp. 85–90.
- Ferro J. C. T., 2003, “Análise da resistência à fadiga via elementos finitos considerando o critério de Dang Van”, Relatório Final de Projeto de Graduação, Universidade de Brasília, Brasília.
- Findley W. N., 1959, “A theory for the effect of mean stress of fatigue under combined torsion and axial load or bending”, Trans. ASME Ser.B, 81:301–306
- Froustey, C. Lasserre, S., 1989, “Multiaxial fatigue endurance of 30NCD16 steel”, Int. J. Fatigue, Vol. 11, pp. 169–175.
- Garud, Y. S., 1979, “A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loading” Proceedings Symposium on Methods of Predicting Material Life in Fatigue, ASME, New York, pp. 247–264.
- Gonçalves, C. A., Araújo, J. A. Mamiya, E. N., 2003, “Fatigue endurance criterion for hard metals: improvement upon a model for multiaxial loading conditions”, (*COBEM 2003*).
- Gonçalves, C. A., Araújo, J. A., Mamiya, E. N., 2004, “A simple multiaxial fatigue criterion for metals”, Comptes Rendus Mecanique.
- Gonçalves, C. A., Araújo, J. A., Mamiya, E. N., 2005, “Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals”, International Journal of Fatigue, Volume 27, Issue 2, 177-187.

- Gonçalves, C. A., Araújo, J. A., Mamiya, E. N., 2005, “Measuring the stress amplitude within the context of multiaxial fatigue”, (*COBEM 2005*).
- Gough, H. J., Pollard, H. V., Cleushaw, W. J., 1951, “Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stress”, Memo 2522, Aeronautical Research Council, HMSO, London.
- Grubisic V., Simbürger A., 1976, “Fatigue under combined out of fase multiaxial stress”, Proc. Int. Conf. Fatigue Testing and Design, Society of Environmental Engineers, London, 27.1–27.8.
- Halford, G. R., 1996, “The energy required for fatigue”, *J Mater*, 1 (1), pp. 3–18.
- Heidenreich, R., Zenner, H., Richter, I., 1983, “Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung”. Forschungshefte FKM, Heft 105.
- Iha, E. K., Abreu, M. 2003, “Efeito das tensões residuais na resistência à fadiga: estudo numérico”, Relatório Final de Projeto de Graduação, Universidade de Brasília, Brasília.
- Lempp, W., 1977, “Festigkeitsverhalten von Stählen bei mehrachsiger Dauerschwingbeanspruchung durch Normalspannungen mit überlagerten phasengleichen und phasenverschobenen Schubspannungen. Diss. Uni. Stuttgart.
- Ma, B.-T., Laird, C. 1989, “Overview of fatigue behavior in copper single crystals - II. Population, size, distribution and growth kinetics of stage I cracks for tests at constant strain amplitude. *Acta Metallurgica*, Vol. 37, pp. 337–48
- Mamiya, E. N., Araújo, J. A., 2002, “Fatigue limit under multiaxial loadings: on the definition of the equivalent shear stress”, *Mech. Res. Communications*, in press.
- Matake T., 1977, “An explanation on fatigue limit under combined stress”, *Bull. JSME*, 20:257–263.
- McDiarmid, D. L., 1994, “A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 17:1475–1484.
- Nishihara, T., Kawamoto, M., 1945, “The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference”, *Memoirs of the College of*

- Engineering, Kyoto Imperial University, Vol. 11, pp. 85–112.
- Papadopoulos, I. V., Davoli, P., Gorla, C., Filippini, M., Bernasconi, A., 1997, “A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals”, *Int. J. Fatigue*, Vol. 19, pp. 219–235.
- Papadopoulos, I. V., 1996, “Exploring the high-cycle fatigue behavior of metals from the mesoscopic scale”, *Mech. Behavior Mater*, Vol. 6.
- Schütz 1993, “A history of fatigue” *Engineering fracture mechanics*, Vol 54, pp. 263–300.
- Sines, G., 1955, “Behavior of metals under complex static and alternating stresses” in: Sines, G. & Waisman, eds.: *Metal Fatigue*, McGraw-Hill, New York, pp. 145–169.
- Sines, G., Oghi, G., 1981, “Fatigue criteria under combined stress or strains” in: *Transactions of the ASME*, Vol 103, pp. 82–90.
- Socie, D. F., 1987, “Multiaxial fatigue assessment”, IN: K. T. Rie, editor. *Low-cycle fatigue and elasto-plastic behaviour of materials*. Elsevier Applied Science, U.K., 465–72
- Suresh, S., 1998, “Fatigue of materials”, Cambridge University Press , Cambridge, pp. 288.
- Susmel, L., Lazzarin, P., 2002, “A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment”, *Fatigue and Fracture Engng Mater Struct*, Vol. 25, pp. 63–78.
- Zenner, H., Liu, J., Simbürger A., 2000, “On the fatigue limits of ductile metals under complex multiaxial loading”, *International Journal of Fatigue*, Vol. 22, pp. 137–145.
- Zouain, N., Cruz, I., 2002, “A high-cycle fatigue criterion with internal variables”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 21, pp. 597–614.