Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Superlineares e não Quadráticos no infinito via Teorema do Passo da Montanha

por

César Klayson Soares dos Santos

Brasília
Março/2008

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Superlineares e não Quadráticos no infinito via Teorema do Passo da Montanha

por

César Klayson Soares dos Santos*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Comissão Examinadora:

Prof. Marcelo Fernandes Furtado-MAT/UnB(Orientador)

Prof.ª Liliane de Almeida Maia-MAT/UNB

Prof. Uberlandio Batista Severo-UFPB

Brasília, 14 de março de 2008

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação

Agradecimentos

A Deus, que nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuiram para realização deste trabalho. De forma especial agradeço ao meu orientador professor Marcelo Fernandes Furtado a quem muito admiro como pessoa e como profissional.

Aos prefessores Alexei Krassilnikov, Ary Vasconcelos Medino, Carlos Alberto Pereira dos Santos, Carlos Maber Carrion Rivero, Cátia Regina Gonçalves, José Valdo Abreu Gonçalves e Marcelo Fernandes Furtado nos quais tive o prazer de ser aluno.

Sou grato aos que compuseram minha banca, professores ...

Aos colegas de mestrado, em especial, meus amigos Michael Marcondes de Freitas e Paulo Ângelo Alves Resende.

Ao meu pai Nelson Nunes dos Santos a quem me espelho e admiro, a minha mãe Nilda Soares dos Santos que muito amo e nunca me deixou faltar carinho e atenção e ao meu irmão Wanderson Cleiber Soares dos Santos que sempre me apoiou.

A minha esposa por estar sempre ao meu lado durante esta etapa de minha vida e por nunca ter deixado que palavras de ânimo e incentivo faltassem.

“Até o mais sábio dos sábios
não vê o quadro todo.”

Dedicatória

A minha querida esposa
Tatiane Ribeiro Morel.

Resumo

Neste trabalho, mostramos a existência de solução para o problema de Dirichlet não linear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u & = & f(x,u)\,, & x \in \Omega \\ u & = & 0\,, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$.

Consideramos os casos de superlinearidade para a função f e não quadraticidade no infinito para sua primitiva F. A principal ferramenta utilizada é o Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this work, we show the existence of solution to the Dirichlet problem of nonlinear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u)\,, \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0\,, \qquad\quad\; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

considering the cases of superlinearidade for the function f and nonquadraticidade at infinity to his primitive F. The primary tool used is the Mountain Pass Theorem.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência de solução para o problema de Dirichlet

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\,, & x \in \Omega \\ \quad u = 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ e f satisfaz
(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(f_1) existem constantes $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ e $p \in [2, 2^*)$ tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R};$$

(f_2) existe $\delta > 0$ tal que

$$2F(x,s) \leq \lambda_1 s^2, \ \forall \ x \in \Omega, |s| < \delta,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u\,, & x \in \Omega \\ \quad u = 0\,, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que soluções fracas do problema (P) são pontos críticos $u \in H_0^1(\Omega)$ do funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$. Assumindo que f seja uma função Hölder contínua, mostraremos que tais soluções fracas podem ser regularizadas de modo a obtermos soluções clássicas, isto é, funções $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisfazem as equações de (P) no sentido pontual.

Vamos utilizar Métodos Variacionais para obter as soluções fracas. Em especial, utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha como ferramenta principal para obtenção de tais pontos críticos.

No **Capítulo 1** demonstramos o Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, no **Capítulo 2**, demonstramos três teoremas relacionados ao problema (P) em que as condições sobre f são:

Condição de Ambrosetti-Rabinowitz

(AR) existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq sf(x,s) \ , \forall \ x \in \Omega \ , |s| \geq r.$$

Condições de Schechter-Zou

$(SZ1)$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ vale

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \infty;$$

$(SZ2)$ existem $\mu > 2$ e $c \geq 0$ tais que

$$\mu F(x,s) - sf(x,s) \leq c(s^2+1), \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R};$$

$(SZ3)$ existe $m > N/2$ e uma função $g \in L^m(\Omega)$ tal que

$$g(x) \leq \frac{F(x,s)}{s^2}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Condições de Costa-Magalhães

$(CM1)$ existe $\beta > \lambda_1$ tal que

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \geq \beta, \ \forall \ x \in \Omega;$$

$(CM2)$ existem $\overline{\mu} > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \geq a > 0, \ \forall \ x \in \Omega;$$

$(CM3)$ existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b < \infty, \ \forall \ x \in \Omega.$$

Conforme veremos a condição (AR) nos diz que F é superlinear, isto é, para alguma constante $k > 0$,

$$(AR)' \qquad F(x,s) \geq k|s|^{\mu},\ \forall\ x \in \overline{\Omega}, |s| \geq r.$$

Note que, dividindo-se $(AR)'$ por s^2 e aplicando-se o limite com $|s| \to \infty$, pode-se concluir que (AR) implica $(SZ1)$. Observe também que em (AR), o termo $\mu F(x,s) - sf(x,s)$ é estritamente positivo, enquanto que o mesmo em $(SZ2)$ pode assumir valores negativos, nulos ou positivos. Logo $(SZ2)$ é mais geral que (AR).

Continuando nossa análise com respeito às hipótese, observe que a condição de superlinearidade $(SZ1)$ é mais forte que $(CM1)$. Agora vejamos que usando $(AR)'$, temos que

$$\frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\mu}} \geq (\overline{\mu} - 2)\frac{F(x,s)}{|s|^{\mu}} \geq (\overline{\mu} - 2)k|s|^{\overline{\mu} - \mu},$$

mostrando que (AR) implica $(CM2)$ com $\overline{\mu} \leq \mu$. Note também que $(CM2)$ é um condição de não quadraticidade no infinito. Para ilustrar isso, vamos supor que para s suficientemente grande, f seja do tipo $f(x,s) = \gamma s$ com $\gamma \neq 0$. Desse modo, teremos que $2F(x,s) = \gamma s^2$. Logo o termo $sf(x,s) - 2F(x,s)$ é nulo, o que não pode ocorrer.

O primeiro teorema que apresentamos (Capítulo 2) pode ser encontrado em [AmbRab] em sua versão original em que f é uma função satisfazendo (f_0), (f_1), (AR) e

$$(f_0)' \qquad f(x,s) = o(|s|) \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Note que nós a substituimos por (f_2), que é menos restritiva. Sobre o terceiro teorema, sua versão original encontra-se em [CosMag], f e sua primitiva F cumpre as condições (f_0), (f_1), $(CM1) - (CM3)$ e

$$(F_3)' \qquad \limsup_{s \to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda < \lambda_1,$$

que é uma condição mais fraca que $(f_0)'$, porém mais forte que (f_2). As hipóteses $(SZ3)$ e $(CM3)$ têm sua importância técnica.

Com o objetivo de obter pontos críticos para o funcional I, precisamos verificar uma condição de compacidade para I. Veremos que com as hipóteses (AR) e $(SZ1)-(SZ3)$ o funcional I satisfaz uma condição de compacidade introduzida por Palais e Smale, enquanto que I satisfaz, usando as hipóteses $(CM2)$ e $(CM3)$, uma outra introduzida por Cerami, que é mais geral que do que a condição de Palais e Smale.

Capítulo 1

Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo vamos demonstrar o Teorema do Passo da Montanha [AmbRab] , um dos mais úteis teoremas de minimax. A demonstração tem por ingrediente básico um lema de deformação, que apresentaremos na seção 1.1. A seção 1.2 é dedicada à prova do Teorema do Passo da Montanha.

Em todo o capítulo, vamos denotar por X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{X'}$ a norma no dual de X e por $|\cdot|_p$ a norma no espaço $L^p(\Omega)$. Vamos também denotar, para todo número real d e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $I^d = \{u \in X : I(u) \leq d\}$.

1.1 Lema da Deformação Quantitativo

O lema da deformação trata-se basicamente em garantir a existência de uma aplicação $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, dado $\epsilon > 0$ pequeno, se possa deformar o conjunto $I^{c+\epsilon}$ no conjunto $I^{c-\epsilon}$ onde c é um valor regular de I, isto é, não há pontos críticos do funcional I no nível c. Num certo sentido, os conjuntos $I^{c+\epsilon}$ e $I^{c-\epsilon}$ são iguais do pontos de vista topológico.

O lema da deformação original é devido a Clark [Cla]. Nós iremos apresentar um lema de deformação devido a Willem [Wil2] (veja também [Wil1]).

Lema 1.1 (Lema da Deformação Quantitativo) *Sejam X um espaço de Banach, $S \subseteq X$, $\delta > 0$ e defina*

$$S_\delta = \{u \in X : dist(u, S) \leq \delta\}.$$

Sejam $I \in C^1(X,\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$\|I'(u)\|_{X'} \geq \frac{4\epsilon}{\delta}, \ \forall \ u \in I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{1.1}$$

Então existe uma função $\eta \in C([0,1]\times X, X)$ de tal forma que:
(i) $\eta(0,u) = u, \ \forall \ u \in X$;
(ii) $\eta(t,u) = u, \ \forall \ (t,u) \notin [0,1] \times I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;
(iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subseteq I^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

Demonstração: Seja $\widetilde{X} = \{u \in X : I'(u) \neq 0\}$. Pelo Lema A.1 temos que existe um campo pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$, isto é, uma aplicação

$$v : \widetilde{X} \longrightarrow X$$

tal que, para todo $u \in \widetilde{X}$,
$(PG1)$ $\|v(u)\|_X \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$;
$(PG2)$ $I'(u)v(u) \geq \|I'(u)\|^2_{X'}$.

Defina

$$A = I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

e $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) = \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(u,B)}.$$

Observe que

$$0 \leq \psi \leq 1 \ , \psi \equiv 0 \text{ em } X\backslash A \text{ e } \psi \equiv 1 \text{ em } B.$$

Verifiquemos agora que ψ é localmente Lipschitziana. Para tanto, tome $u_1, u_2 \in X$ e denotemos, para $i = 1,2$,

$$d^i_{u,X,A} = d(u_i, X\backslash A) \text{ e } \ d^i_{u,B} = d(u_i, B).$$

Temos

$$\begin{aligned} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| &= \left| \frac{(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})d^1_{u,X,A} - (d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})d^2_{u,X,A}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} \right| \\ &= \left| \frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^2_{u,B} + d^2_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} \right|$$

$$= \left| \frac{d^2_{u,B}(d^1_{u,X,A} - d^2_{u,X,A}) + d^2_{u,X,A}(d^2_{u,B} - d^1_{u,B})}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} \right|$$

Como a função distância é uma contração fraca (cf. [Elo, Ex.3,pg.31]) temos que

$$|d^1_{u,X,A} - d^2_{u,X,A}|, |d^2_{u,B} - d^1_{u,B}| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Logo,

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq \frac{\|u_1 - u_2\|d^2_{u,B} + \|u_1 - u_2\|d^2_{u,X,A}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} = \frac{\|u_1 - u_2\|}{d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B}}.$$

Vamos agora utilizar o fato de que a função distância é localmente Lipschitziana. Note que, para qualquer que seja $w \in X$,

$$d^1_{w,X,A} + d^1_{w,B} > 0.$$

Assim, existe uma constante $k > 0$ e uma vizinhança W de w tal que

$$d^1_{\overline{w},X,A} + d^1_{\overline{w},B} \geq \frac{1}{k} > 0 \text{ para todo } \overline{w} \in W.$$

Daí,

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq k\|u_1 - u_2\| \tag{1.2}$$

mostrando que ψ é localmente Lipschitziana.

Considere agora a função $\Phi : X \longrightarrow X$ definida por

$$\Phi(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{v(u)}{\|v(u)\|^2}, & u \in A; \\ 0, & u \in \overline{X \backslash A}. \end{cases}$$

Note que por $(PG2)$ e por (1.1) temos

$$\|\Phi(u)\| \leq \frac{1}{\|v(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|} \leq \frac{\delta}{4\epsilon}. \tag{1.3}$$

Dado $u \in X$ existe uma vizinhança B_u tal que ψ e v são localmente Lipschitzianas em B_u. Tome $u_1, u_2 \in B_u$ e sejam

$$f(u_i) = \frac{v(u_i)}{\|v(u_i)\|^2} \text{ e } f_i(u_j) = \frac{v(u_i)}{\|v(u_j)\|^2} \text{ para } i, j = 1, 2.$$

Então, se $u_1, u_2 \in \overline{X \backslash A}$, temos,

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| = 0 \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in \overline{X \backslash A}$, segue que,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| &= \| - \psi(u_1) f(u_1)\| \\
&= \| - \psi(u_1) f(u_1) + \psi(u_2) f(u_1)\| \\
&\overset{(1.3)}{\leq} \frac{\delta}{4\epsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\overset{(1.2)}{\leq} \frac{k\delta}{4\epsilon} \|u_1 - u_2\| \\
&= k_1 \|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, se $u_1, u_2 \in A$, então

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| &= \| - \psi(u_1) f(u_1) + \psi(u_2) f(u_2)\| \\
&= \| - \psi(u_1) f(u_1) + \psi(u_1) f(u_2) - \psi(u_1) f(u_2) + \psi(u_2) f(u_2)\| \\
&\leq \|f(u_1) - f(u_2)\| + \frac{\delta}{4\epsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\leq \|f(u_1) - f_1(u_2)\| + \|f_1(u_2) - f(u_2)\| + \frac{\delta}{4\epsilon} |\psi(u_1) - \psi(u_2)|.
\end{aligned}$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f_1(u_2)\| &\leq \|v(u_1)\| \left| \frac{\|v(u_2)\|^2 - \|v(u_1)\|^2}{\|v(u_1)\|^2 \|v(u_2)\|^2} \right| \\
&= \frac{|\langle v(u_2) - v(u_1), v(u_2) + v(u_1) \rangle|}{\|v(u_1)\| \|v(u_2)\|^2} \\
&\leq \frac{\|v(u_1) + v(u_2)\|}{\|v(u_1)\| \|v(u_2)\|^2} \|v(u_1) - v(u_2)\| \\
&\leq k_2 \|u_1 - u_2\|,
\end{aligned}$$

visto que v é localmente Lipschitziana. Observe agora que

$$\begin{aligned}\|f_1(u_2) - f(u_2)\| &= \left\| \frac{v(u_1)}{\|v(u_2)\|^2} - \frac{v(u_2)}{\|v(u_2)\|^2} \right\| \\ &\leq \frac{\delta^2}{16\epsilon^2}\|v(u_1) - v(u_2)\| \\ &\leq k_3\|u_1 - u_2\|\end{aligned}$$

e, como

$$\frac{\delta}{4\epsilon}|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq k_1\|u_1 - u_2\|$$

podemos concluir que

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| \leq \overline{k}\|u_1 - u_2\|$$

onde $\overline{k} = k_1 + k_2 + k_3$. Logo Φ é localmente Lipschitziana.

Considere agora o seguinte problema de Cauchy em espaços de Banach,

$$(PC)_u \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= \Phi(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) &= u. \end{aligned} \right.$$

Uma vez que Φ é localmente Lipschitziana, temos que, para cada $u \in X$, o problema acima tem uma única solução contínua $\sigma(\cdot, u)$ definida para t em um intervalo maximal (t_u^-, t_u^+).

Afirmação: $t_u^{\pm} = \pm\infty$.

De fato, seja σ a solução de $(PC)_u$ e suponha que $t_u^+ < \infty$. Seja ainda $(t_n) \subset (-\infty, t_u^+)$ uma sequência tal que $t_n \to t_u^+$. Então, usando a limitação de Φ, temos que

$$\|\sigma(t_m,u) - \sigma(t_n,u)\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} \frac{d}{d\xi}\sigma(\xi,u)d\xi \right\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} \Phi(\sigma(\xi,u))d\xi \right\| \leq K|t_m - t_n|.$$

Como $(t_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy, então $(\sigma(t_n,u))$ também o é. Daí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(t_n,u) = \widetilde{u} \in X.$$

Considerando o problema de Cauchy em espaços de Banach

$$(PC)_{\widetilde{u}} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= \Phi(\sigma(t,u)) \\ \sigma(t_u^+,u) &= \widetilde{u} \end{aligned} \right.$$

podemos usar o Teorema de Picard para estender σ em um intervalo do tipo $(t_u^+ - k_1, t_u^+ + k_1)$, contradizendo a maximalidade de t_u^+. A prova para t_u^- é análoga.

A dependência contínua de soluções de $(PC)_u$ com relação aos dados iniciais implica que $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$. Desse modo, podemos definir a deformação

$$\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X \ , \ \eta(t,u) = \sigma(\delta t, u).$$

Verifiquemos $(i) - (iii)$. Pela própria definição da função η temos que $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in X$. Logo η satisfaz (i). Para verificar (ii), observe que $\Phi \equiv 0$ em $X \backslash A$ e portanto $\sigma(t,u) = u$ é solução de $(PC)_u$. Logo pela existência e unicidade de soluções do problema $(PC)_u$, segue que $\eta(t,u) = u$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Afim de verificar (iii) seja $t > 0$ e $u \in X$. Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned}
\|\sigma(\delta t, u) - u\| &= \left\| \int_0^{\delta t} \frac{d}{ds}\sigma(s,u) ds \right\| \\
&\leq \int_0^{\delta t} \left\| \frac{d}{ds}\sigma(s,u) \right\| ds \\
&= \int_0^{\delta t} \|\Phi(\sigma(s,u))\| ds \\
&\leq \delta t.
\end{aligned}$$

Assim, para todo $t \in [0,1]$ vale

$$\|\sigma(\delta t, u) - u\| \leq \delta.$$

Logo,

$$\inf_{t \in [0,1]} \|\sigma(\delta t, u) - u\| \leq \delta,$$

mostrando que, para todo $u \in S$,

$$\sigma(\delta t, u) \in S_\delta.$$

Desse modo

$$\sigma(\delta, S) \subseteq S_\delta.$$

Note que se $\sigma(t,u) \notin A$, $\psi(\sigma(t,u)) = 0$ e consequentemente $\dfrac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = 0$. Caso contrário,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\
&= I'(\sigma(t,u))\Phi(\sigma(t,u)) \\
&= -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|v(\sigma(t,u))\|}I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u)).
\end{aligned}$$

Como ψ é não negativa e de $(PG2)$,

$$I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u)) \geq 0,$$

segue que

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq 0.$$

Donde se conclui que $I(\eta(\cdot,u))$ é não-crescente para todo $u \in X$. Tomando agora $u \in I^{c+\epsilon} \cap S$, vamos dividir a prova em dois casos:

Caso 1: Existe $t_0 \in [0,\delta)$ tal que $I(\eta(t_0,u)) < c - \epsilon$.

Como $I(\eta(\cdot,u))$ é não-crescente, tem-se que

$$I(\eta(t,u)) < c - \epsilon \; , \forall \; t \geq t_0$$

e portanto

$$\eta(1,u) = \sigma(\delta,u) \in I^{c-\epsilon}.$$

Como $\sigma(\delta,S) \subseteq S_\delta$ obtemos que

$$\eta(1,u) = \sigma(\delta,u) \in I^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Caso 2: Para todo $t \in [0,\delta)$ vale,

$$c - \epsilon \leq I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(0,u)) = I(u) \leq c + \epsilon.$$

Temos que

$$\sigma(t,u) \in B.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
I(\sigma(\delta,u)) &= I(\sigma(0,u)) + \int_0^\delta \frac{d}{ds} I(\sigma(s,u))ds \\
&= I(u) + \int_0^\delta I'(\sigma(s,u))\Phi(\sigma(s,u))ds \\
&= I(u) - \int_0^\delta I'(\sigma(s,u))\psi(\sigma(s,u))\frac{v(\sigma(s,u))}{\|v(\sigma(s,u))\|}ds \\
&\overset{\psi\equiv 1 \ em \ B}{=} I(u) - \int_0^\delta \frac{I'(\sigma(s,u))v(\sigma(s,u))}{\|v(\sigma(s,u))\|}ds \\
&\overset{(PG2)}{\leq} I(u) - \int_0^\delta \frac{\|I'(\sigma(s,u))\|^2}{\|v(\sigma(s,u))\|}ds \\
&\overset{(PG1)}{\leq} I(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \|I'(\sigma(s,u))\|ds \\
&\overset{(1.1)}{\leq} I(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{4\epsilon}{\delta}ds \\
&= I(u) - 2\epsilon \\
&\leq c - \epsilon
\end{aligned}
$$

provando (iii). ■

1.2 O Teorema do Passo da Montanha

O Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz [AmbRab], é uma importante ferramenta para obtenção de pontos críticos para funcionais $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Conforme veremos no Capítulo 2, é possível escolher I de tal forma que seus pontos críticos sejam soluções de certas equações diferenciais parciais.

Como estamos interessados em obter pontos críticos para um dado funcioanl $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, precisamos provar alguma propriedade de compacidade para o mesmo.

Dizemos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$

denotada por $(PS)_c$ se toda sequência $(u_n) \subseteq H$ satisfazendo,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'} = 0, \tag{1.4}$$

possui subsequência convergente. A uma sequência (u_n) cumprindo (1.4), chamamos de sequência de Palais-Smale no nível c.

A condição de compacidade que usaremos, a apresentada acima, se deve a Brezis e Nirenberg (ver [BreNir]). Sua versão original foi introduzida por Palais e Smale e pode ser encontrada nas referências [Pal1, PalSma, Sma].

Proposição 1.2 *Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e,*
(I_1) existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;
(I_2) existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.
Seja

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que
(i) $u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
(ii) $\|I'(u)\|_{X'} \leq 2\epsilon$.

Demonstração: Seja $e \in X$ dado por (I_2) e $\gamma \in \Gamma$. Então $e \notin B_\rho(0)$ e, como $\gamma \in \Gamma$, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial B_\rho(0)$. Assim $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$. Logo, por (I_1), temos que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \inf_{w\in\partial B_\rho(0)} I(w) \geq \alpha.$$

Tomando o ínfimo para $\gamma \in \Gamma$, concluímos que $c \geq \alpha > 0$.

Suponha, por contradição, que a proposição seja falsa. Então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|I'(u)\|_{X'} > 2\epsilon \text{ para todo } u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Observe que a afirmação acima permanece válida se substituirmos ϵ por ϵ_0 tal que $0 < \epsilon_0 < \epsilon$. Logo, podemos supor que ϵ é pequeno de modo que $c - 2\epsilon > 0$. Estamos então nas hipóteses do Lema 1.1, considerando $S = X$ e $\delta = 2$. Assim, existe uma função contínua $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$ satisfazendo:

(i) $\eta(1, u) = u, \forall\ u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subseteq I^{c-\epsilon}$.

Pela definição de c, existe $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{\gamma}(t)) \leq c + \epsilon. \tag{1.5}$$

Defina agora $h : [0, 1] \longrightarrow X$ por

$$h(t) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(t)).$$

Observe que $h \in C([0, 1], X)$ pois $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$. Como $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$, temos que, $\widetilde{\gamma}(0) = 0, \widetilde{\gamma}(1) = e$ e além disso, como $I(e) < c - 2\epsilon$, segue de (i) que

$$h(0) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$h(1) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(1)) = \eta(1, e) = e,$$

donde se conclui que $h \in \Gamma$. Assim, temos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)). \tag{1.6}$$

Usando (ii) e (1.5) obtemos

$$h(t) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon},$$

para todo $t \in [0, 1]$. Desta forma

$$\max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon. \tag{1.7}$$

Logo, de (1.6) e (1.7), concluímos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma absurdo. ∎

Corolário 1.3 *Sob as hipóteses da Proposição 1.2, existe uma sequência de Palais-Smale no nível c para I.*

Demonstração: Observe que pela Proposição 1.2, para cada $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, existe $u_n \in X$ de modo que
(i) $u_n \in I^{-1}([c-2/n, c+2/n])$;
(ii) $\|I'(u_n)\|_{X'} \leq 2/n$.
Então,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'} = 0,$$

e portanto existe uma sequência de Palais-Smale no nível c. ∎

Agora, estamos em condições de demonstrar o

Teorema 1.4 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e*
(I_1) existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;
(I_2) existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.
Suponha que I satisfaça $(PS)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$. Então existe $u \not\equiv 0$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Demonstração: Pelo Corolário 1.3 existe uma sequência de Palais-Smale $(u_n) \subseteq X$ no nível c. Como I satisfaz $(PS)_c$, a menos de subseqüência, $u_n \to u \in X$. Como $I \in C^1(X,\mathbb{R})$(ver Apêndice A.2), devemos necessariamente ter $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. Logo c é um valor crítico de I. Além disso, como $I(0) = 0$ e $I(u) = c > 0$, devemos ter $u \not\equiv 0$. ∎

Vejamos agora, o Teorema do Passo da Montanha com uma condição de compacidade mais fraca que a condição de Palais-Smale.

Dizemos que I satisfaz a condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ denotada por $(Cer)_c$ se toda sequência $(u_n) \subseteq H$ satisfazendo,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|) = 0, \tag{1.8}$$

possui subsequência convergente. Uma sequência (u_n), satisfazendo (1.8), recebe o nome de sequência de Cerami no nível c.

A condição de Cerami é devida a Cerami [Cer]. Observe que ela é mais fraca que Palais-Smale. De fato, suponha que I satisfaz $(PS)_c$ e seja $(u_n) \subseteq X$ uma sequência Cerami do nível c. Como

$$\lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|) = 0,$$

então $\|I'(u_n)\|_{X'} \to 0$. Logo $(u_n) \subseteq X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c. Como I satisfaz $(PS)_c$ então (u_n) possui subsequência convergente. Portanto o funcional I satisfaz $(Cer)_c$.

De posse destes conceitos, pode-se demonstrar o teorema a seguir que na verdade diferecia-se do Teorema 1.4 apenas com respeito a condição de compacidade. A demonstração é devida a Bartolo, Benci e Fortunato [BarBenFor].

Teorema 1.5 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e*
(I_1) existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;
(I_2) existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.
Suponha que I satisfaça $(Cer)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$. Então existe $u \not\equiv 0$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Capítulo 2

Problemas Superlineares

Este capítulo é dedicado a aplicações do Teorema do Passo da Montanha para obtenção de solução para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u)\,, \quad x \in \Omega \\ u &= 0\,, \qquad\quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$.

Seja $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito a norma usual de $H^1(\Omega)$. Utilizando a desigualdade de Poincaré pode-se mostrar que

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ que é equivalente a norma usual. No que segue, H denota $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma definida acima.

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução clássica de (P), podemos usar o Teorema da Divergência e a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em H para mostrar que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H.$$

Observe que para a expressão acima fazer sentido, não precisamos das derivadas de ordem 2 da função u. De fato, se $u, v \in H$ então segue de (f_1) e da desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p-1}{p}$ e p que

$$\int_\Omega |f(x,u)||v| \;\; \leq \;\; \int_\Omega (c_1 + c_2|u|^{p-1})|v|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c_1\int_\Omega |v| + c_2\int_\Omega |u|^{p-1}|v| \\
&= c_1|v|_1 + c_2\int_\Omega |u|^{p-1}|v| \\
&\leq c_1|v|_1 + c_2\left\{\int_\Omega |u|^p\right\}^{\frac{p-1}{p}}\left\{\int_\Omega |v|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= c_1|v|_1 + c_2|u|_p^{p-1}|v|_p < \infty,
\end{aligned}
$$

visto que $H \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2^*]$. Motivados pela expressão acima, definimos por solução fraca de (P) como uma função $u \in H$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H.$$

Note que toda solução clássica é solução fraca, mas o contrário pode não ser verdadeiro. Assim, a pergunta natural a se fazer é a seguinte: Quando uma solução fraca é solução clássica? Para responder a esta pergunta precisamos do seguinte conceito de continuidade. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\gamma \in (0,1]$, dizemos que uma função $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente γ, se existir uma constante $k > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in \Omega$,

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x-y|^\gamma.$$

De acordo com a Proposição A.6 (ver Apêndice A.3), se f é Hölder contínua e u é solução fraca então u é solução clássica. Logo é suficiente obter soluções fracas. Considerando o funcional $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

pode-se mostrar que I está bem definido e além disso pela Proposição A.5 (ver Apêndice A.2), temos que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ com derivada

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H.$$

Logo as soluções fracas do problema (P) são precisamente os pontos críticos de I.

Observação 2.1 *A condição (f_0) poderia ser substituída por uma condição mais fraca, chamada de condição de Carathéodory. Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de Carathéodory se $f(\cdot, s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável para cada $x \in \Omega$ e $f(x, \cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua para quase todo $s \in \mathbb{R}$. Para simplificar as passagens e não entrarmos em questões técnicas, a condição envolvendo a regularidade de f neste trabalho será sempre (f_0).*

O lema que demonstraremos abaixo, será utilizado em todas as aplicações deste capítulo. Ele está relacionado com a condição (I_1) do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.2 *Se f satisfaz $(f_0) - (f_2)$, então pelo menos uma das alternativas abaixo ocorre:*
(i) (P) possui uma solução $u \not\equiv 0$;
(ii) para cada $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ tal que

$$I(u) \geq \alpha \ , \ \forall \ u \in H, \|u\| = \rho.$$

Demonstração: Seja $V = \ker(-\Delta - \lambda_1 Id)$ em que $Id : X \longrightarrow X$ é o operador identidade o autoespaço associado ao autovalor λ_1. Então $H = V \oplus W$ onde $W = V^{\perp}$. Como V tem dimensão finita, todas as possíveis normas em V são equivalentes. Logo, dado $\rho > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| \leq \rho \Longrightarrow |v(x)| < \delta/2, \ \forall \ v \in V. \tag{2.1}$$

Seja $u \in H$, tal que $\|u\| \leq \rho$ e suponha que para algum $x \in \Omega$,

$$|u(x)| \geq \delta. \tag{2.2}$$

Escrevendo $u \in H$ como $u = v + w$, com $v \in V$ e $w \in W$, segue de (2.1) e (2.2) que

$$\delta \leq |u(x)| \leq |v(x)| + |w(x)| \leq \delta/2 + |w(x)|.$$

Assim,

$$|v(x)| \leq \delta/2 \leq |w(x)|, \tag{2.3}$$

e consequentemente

$$|u(x)| \leq 2|w(x)|. \tag{2.4}$$

Usando (f_1) e a continuidade de F em $\overline{\Omega}\times[-\delta,\delta]$, temos que para todo $(x,s)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|F(x,s)| &\leq \int_0^s |c_1 + c_2|\xi|^{p-1}|d\xi \\
&= c_1|s| + c_2\int_0^s |\xi|^{p-1}d\xi \\
&= c_1|s| + c_2\frac{1}{p}|s|^p \\
&= c_1|s| + c_3|s|^p \\
&\leq c_1|s| + c_3|s|^p.
\end{aligned}$$

Tomando $c_4 = \max\limits_{|s|\geq\delta} c_1|s|^{1-p}$, podemos concluir que

$$|F(x,s)| \leq c_5|s|^p, \tag{2.5}$$

onde $c_5 = c_3 + c_4$.

Daí

$$-\int_{\{|u|\geq\delta\}} F(x,u) \geq -c_5\int_{\{|u|\geq\delta\}} |u|^p. \tag{2.6}$$

Por outro lado, segue de (f_2) que

$$-\int_{\{|u|<\delta\}} F(x,u) \geq -\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u^2. \tag{2.7}$$

Logo, de (2.6) e (2.7), temos que

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\{|u|<\delta\}} F(x,u) - \int_{\{|u|\geq\delta\}} F(x,u) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|_2^2 - c_5\int_{\{|u|\geq\delta\}} |u|^p \\
&\overset{(2.4)}{\geq} \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|_2^2 - c_6\int_\Omega |w|^p \\
&\overset{H\hookrightarrow L^p(\Omega)}{\geq} \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|_2^2 - c_7\|w\|^p. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Lembrando agora que $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ e $|u|^2 = |v|^2 + |w|^2$. Como $v \in V$, então $\|v\|^2 - \lambda_1|u|^2 = 0$. Desse modo, (2.8) se reduz a

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\bigg(\|w\|^2 - \lambda_1|w|_2^2\bigg) - c_7\|w\|^p. \tag{2.9}$$

Pela desigualdade variacional em W, temos que

$$-\lambda_1|w|_2^2 \geq -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\|w\|^2$$

e portanto

$$I(u) \quad \geq \quad \frac{1}{2}\bigg(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\bigg)\|w\|^2 - c_7\|w\|^p. \tag{2.10}$$

Agora, fazendo $0 < M = 1/2(1 - \lambda_1/\lambda_2)$ e lembrando que $\|w\| \leq \rho$, (2.10) se expressa como segue,

$$I(u) \geq M_\rho\|w\|^2 \tag{2.11}$$

onde $M_\rho = M - \rho^{p-2}$ e estamos supondo que $\rho > 0$ é pequeno o suficiente para que $M_\rho > 0$.

Suponha agora que (ii) não ocorre. Então existe $\rho > 0$ pequeno e $(u_n) \subseteq H$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = 0 \;\text{ e }\; \|u_n\| = \rho.$$

Escrevendo $u_n = v_n + w_n$, segue da expressão acima e de (2.11) que

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\| = 0 \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \rho.$$

Observe que pela finitude da dimensão de V, passando a subsequência se necessário for, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v_0\| = 0.$$

Logo, $\|v_0\| = \rho$ e $|v_0(x)| \leq \delta/2,\; x \in \Omega$.

Afirmação 1: $I(v_0) = 0$.

Como $w_n \to 0$ em H, segue da imersão de Sobolev $H \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com $p \in [1, 2^*]$ que $w_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, então pela continuidade de F, a menos de subsequência

$$G_n(x) = F(x, v_n(x) + w_n(x)) - F(x, v_n(x)) \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega \tag{2.12}$$

e $|w_n(x)| \leq \psi(x) \in L^p(\Omega)$ (cf. [Bre, Teorema IV.9, pg. 58]).
Assim, por (f_1), obtemos uma constante positiva k_1 tal que

$$\begin{aligned} |G_n(x)| &\leq k_1\Big(|v_n(x)| + |v_n(x)|^p + |w_n(x)| + |w_n(x)|^p\Big) \\ &\leq k\Big(|v_n(x)| + |v_n(x)|^p + |\psi_n(x)| + |\psi_n(x)|^p\Big). \end{aligned}$$

Como $\|v_n\| \to \rho$ quando $n \to \infty$ e $\dim V < \infty$ então existe uma constante $k_2 > 0$ tal que $|v_n(x)| \leq k_2$ para todo $x \in \Omega$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$|G_n(x)| \leq k_1\Big(k_2 + k_2^p + |\psi_n(x)| + |\psi_n(x)|^p\Big) = h(x).$$

Observando que $|\psi(x)| \in L^1(\Omega)$, pois $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e que $|\psi(x)|^p \in L^1(\Omega)$, concluimos que

$$|G_n(x)| \leq h(x) \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver [Bre, Teorema VI.1, pg. 54]) e por (2.12)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(F(x, v_n(x) + w_n(x)) - F(x, v_n(x))\Big) = 0. \tag{2.13}$$

Como $I(u_n) \to 0$ e $\|w_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$, podemos usar a continuidade de I e (2.13) para concluir que

$$I(v_n) = I(u_n) - \frac{1}{2}\|w_n\|^2 + \int_\Omega \Big(F(x, v_n(x) + w_n(x)) - F(x, v_n(x))\Big) \to 0 = I(v_0),$$

e a afirmação está provada.

Lembrando que $|v_0(x)| \leq \delta/2$, segue de (f_2) que

$$2F(x, v_0(x)) \leq \lambda_1 v_0(x)^2, \ \forall\ x \in \Omega. \tag{2.14}$$

Note que,

$$\begin{aligned} I(v_0) &= \frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \int_\Omega F(x, v_0(x)) \\ &= \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega v_0(x)^2 - \int_\Omega F(x, v_0(x)) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega\Big(\lambda_1 v_0(x)^2 - 2F(x, v_0(x))\Big) = 0. \end{aligned}$$

Como (2.14) nos diz que o integrando da expressão acima é não negativo para quase todo $x \in \Omega$, segue que

$$2F(x, v_0(x)) \equiv \lambda_1 v_0(x)^2, \ \forall \ x \in \Omega. \tag{2.15}$$

Seja φ uma função qualquer de $C_c^\infty(\Omega)$. Como φ é limitada, então para $t > 0$ suficientemente pequeno,

$$|v_0(x) + t\varphi(x)| \leq \delta, \ \forall \ x \in \Omega.$$

Assim, pela desigualdade acima e por (f_2),

$$2F(x, v_0 + t\varphi(x)) - \lambda_1(v_0 + t\varphi(x))^2 \leq 0 \tag{2.16}$$

e, por (2.15),

$$-2F(x, v_0(x)) + \lambda_1 v_0(x)^2 = 0, \ \forall \ x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Combinando as expressões (2.16) e (2.17), obtemos que

$$2F(x, v_0 + t\varphi(x)) - 2F(x, v_0) - \lambda_1(v_0 + t\varphi(x))^2 + \lambda_1 v_0^2 \leq 0.$$

Agora, dividindo a expressão acima por t e passando ao limite, segue que

$$2 \lim_{t \to 0} \frac{F(x, v_0(x) + t\varphi(x)) - F(x, v_0(x))}{t} - 2\lambda_1 v_0(x)\varphi(x) \leq 0,$$

ou seja,

$$2(f(x, v_0(x)) - \lambda_1 v_0(x))\varphi(x) \leq 0$$

para todo $x \in \Omega$ e toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Afirmação 2: $h(x) = f(x, v_0(x)) - \lambda_1 v_0(x) = 0, \ \forall \ x \in \Omega.$

De fato, suponha que a afirmação seja falsa. Então existe $x_0 \in \Omega$ de tal forma que $h(x_0) \neq 0$, digamos $h(x_0) > 0$. Tome agora $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) > 0$ e, para $r > 0$ pequeno, tenhamos $supp(\varphi) \subseteq \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Desse modo $h(x_0)\varphi(x_0) > 0$, o que é um absurdo. Por outro lado, se $h(x_0) < 0$, argumentos análogos nos levam novamente a um absurdo. Portanto $h(x) \equiv 0$, ou seja,

$$f(x, v_0(x)) = \lambda_1 v_0(x), \ \forall \ x \in \Omega.$$

Sendo v_0 uma autofunção associada ao autovalor λ_1, segue da expressão acima o que desejávamos, isto é, (i) ocorre e desta forma a demonstração está completa. ■

2.1 Ambrosetti-Rabinowitz

Nesta seção vamos resolver o problema (P) supondo que f satisfaz, além de $(f_0)-(f_2)$, a seguinte condição de superlinearidade:

(AR) existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq sf(x,s) \ , \forall \ x \in \Omega \ , |s| \geq r.$$

O resultado principal desta seção é devido a Ambrosetti e Rabinowitz [AmbRab] e pode ser enunciado como segue:

Teorema 2.3 *Se f satisfaz $(f_0)-(f_2)$ e (AR) então o problema (P) tem solução fraca $u \not\equiv 0$.*

A prova será feita via Teorema 1.4. Os dois lemas a seguir estão relacionados com a condição (I_2) e com a condição de Palais-Smale.

Lema 2.4 *Se f satisfaz (AR) então, para todo $\rho > 0$ dado, existe $e \in H$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Demonstração: Observe que de (AR), para $s \geq r$, temos,

$$\frac{f(x,s)}{F(x,s)} \geq \frac{\mu}{s}.$$

Assim

$$\int_r^s \frac{d}{d\xi} lnF(x,\xi)d\xi = \int_r^s \frac{f(x,\xi)}{F(x,\xi)}d\xi \geq \mu \int_r^s \frac{1}{\xi}d\xi,$$

implicando que

$$ln\frac{F(x,s)}{F(x,r)} \geq ln\left(\frac{s}{r}\right)^{\mu}.$$

Logo

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,r)}{r^{\mu}}s^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega} \ , s \geq r.$$

Fazendo $a_1 = \dfrac{F(x,r)}{r^{\mu}}$ obtemos que

$$F(x,s) \geq a_1 s^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega} \ , s \geq r.$$

Por outro lado, para $s \leq -r$, segue de (AR) que

$$\frac{f(x,s)}{F(x,s)} \leq \frac{\mu}{s},$$

assim

$$\int_s^{-r} \frac{f(x,\xi)}{F(x,\xi)} d\xi \leq \int_s^{-r} \frac{\mu}{\xi} d\xi$$

e desta forma

$$ln \frac{F(x,-r)}{F(x,s)} \leq ln \left| \frac{r}{s} \right|^{\mu},$$

donde segue que

$$\frac{F(x,-r)}{F(x,s)} \leq \left| \frac{r}{s} \right|^{\mu},$$

ou seja

$$|F(x,s)| \geq a_2 |s|^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, s \leq -r$$

onde $a_2 = \dfrac{F(x,-r)}{r^{\mu}}$. Considerando $c_3 = \min\{a_1, a_2\}$, podemos concluir que

$$F(x,s) \geq c_3 |s|^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, |s| \geq r.$$

Além disso, como $F \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\overline{\Omega} \times [-r,r]$ é compacto, podemos tomar $c_4 = \max_{x \in \overline{\Omega} \times [-r,r]} F(x,s)$ e usar a desigualdade acima para obter

$$F(x,s) \geq c_3 |s|^{\mu} - c_4, \ \forall \ (x,s) \in (\overline{\Omega}, \mathbb{R}). \tag{2.18}$$

Dado $u \in C_c^{\infty}(\Omega) \backslash \{0\}$, segue da a expressão acima que

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x,tu) \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - c_3 |t|^{\mu} |u|_{\mu}^{\mu} + c_4 |\Omega|. \end{aligned}$$

Lembrando que $\mu > 2$, concluímos que $I(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Logo, dado $\rho > 0$ existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $e = t_0 u$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. Isto conclui a prova do lema. ∎

Lema 2.5 *Se f satisfaz (AR), então o funcional I satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subseteq H$ uma sequêcia de Palais-Smale no nível c, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{H'} = 0.$$

Afirmação: $(u_n) \subseteq H$ é limitada.
De fato, note inicialmente que existe $M > 0$ tal que

$$|I(u_n)| < M.$$

Além disso, como $\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'(u_n)\|_{H'} < \epsilon, \ \forall\ n > n_0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)\ u_n &\leq \left| I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)\ u_n \right| \\ &\leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu}\|I'(u_n)\|_{H'}\|u_n\| \\ &\leq M + \frac{\epsilon}{\mu}\|u_n\|, \ \forall\ n > n_0. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)\ u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)\ u_n - F(x,u_n)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_{\{|u_n|\geq r\}} T(x,u_n) + \int_{\{|u_n|<r\}} T(x,u_n) \end{aligned}$$

onde

$$T(x,u_n) = \frac{1}{\mu} f(x,u_n)\ u_n - F(x,u_n).$$

Note que de (AR) temos que

$$\int_{\{|u_n|\geq r\}} T(x,u_n) \geq 0.$$

Defina agora a função $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x,u) = |T(x,u)|.$$

De (f_0), as funções f e F são contínuas, e então h também o é. Desse modo $h|_{\overline{\Omega}\times[-r,r]}$ é limitada, digamos por uma constante k. Logo,

$$\int_{\{|u_n|<r\}} T(x,u_n) \geq -\int_\Omega |T(x,u_n)| \geq -\int_\Omega k.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)\ u_n &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_{\{|u|\geq r\}} T(x,u_n) - k|\Omega| \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - k|\Omega|. \end{aligned}$$

Então

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - k|\Omega| \leq I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n) \leq M + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|,$$

ou seja

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - k|\Omega| \leq M + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|. \tag{2.19}$$

Como $\|u_n\| \to \infty$, podemos supor sem perda de generalidade que $\|u_n\| > 0$. Daí ao dividirmos (2.19) por $\|u_n\|$ e usando que $2^{-1} - \mu^{-1} > 0$ obtemos um absurdo quando $n \to \infty$. Logo (u_n) é limitada.

Mostremos agora que a limitação de (u_n) implica na existência de subsequência convergente. Definindo $J_0, J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$J_0(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\ ,\ J(u) = \int_\Omega F(x,s),$$

temos que $I = \frac{1}{2}J_0(u) - J(u)$. Assim, segue do Apêndice A.2 que $I'(u) : H \longrightarrow H'$ é dado por

$$I'(u)v = < u, v >_H - \int_\Omega f(x,u)v,\ \forall\ v \in H,$$

onde $< \cdot, \cdot >_H$ denota o produto interno em H e

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v.$$

Além disso o operador J' é compacto (ver Apêndice A.2). Então e a menos de subsequência

$$\lim_{n\to\infty} J'(u_n) = v$$

e como $I'(u) = u - J'(u)$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(I'(u_n) + J'(u_n)) = v$$

Portanto u_n converge e consequentemente I satisfaz $(PS)_c$. ∎

Demonstração do Teorema 2.3: De acordo com o Lema 2.2 uma das possibilidades abaixo ocorre:
(i) (P) possui uma solução $u \not\equiv 0$;
(ii) para cada $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ tal que

$$I(u) \geq \alpha\ ,\ \forall\ u \in H, \|u\| = \rho.$$

Podemos supor que (ii) ocorre pois, caso contrário, o item (i) acima nos fornece uma solução não nula para (P). Então I satisfaz (I_1). Observe que $I(0) = 0$ e pelos lemas 2.4 e 2.5 o funcional I satisfaz (I_2) e $(PS)_c$. Portanto podemos aplicar o Teorema 1.4 para obtermos um ponto crítico não nulo de I, isto é, uma solução não trivial do problema (P). ∎

2.2 Schechter-Zou

Nesta seção vamos supor que f satisfaz

$(SZ1)$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ vale

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \infty;$$

$(SZ2)$ existem $\mu > 2$ e $c \geq 0$ tais que

$$\mu F(x,s) - sf(x,s) \leq c(s^2 + 1),\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R};$$

$(SZ3)$ existe $m > N/2$ e uma função $g \in L^m(\Omega)$ tal que

$$g(x) \leq \frac{F(x,s)}{s^2},\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

No que segue vamos provar o seguinte resultado devido a Schechter e Zou [SchZou2]:

Teorema 2.6 *Se f satisfaz $(f_0) - (f_2)$ e $(SZ1) - (SZ3)$, então o problema (P) tem solução fraca $u \not\equiv 0$.*

Como na seção anterior, faremos uso dos lemas abaixo.

Lema 2.7 *Se f satisfaz $(SZ1)$ e $(SZ3)$ então para todo $\rho > 0$ dado, existe $e \in H$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Demonstração: Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada ao primeiro autovalor do problema (PA) definido na introdução. Note que

$$\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} = \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2.$$

Observe que por $(SZ3)$,

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 \geq g(x)\varphi_1^2 \geq h(x) \in L^1(\Omega),$$

pois $g(x) \in L^m(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$. Daí, segue do Lema de Fatou que

$$\liminf_{t\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 \geq \int_\Omega \liminf_{t\to\infty} \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2.$$

Como $\varphi_1 > 0$, então $t\varphi_1(x) \to \infty$ q.t.p em Ω. Assim, de $(SZ1)$ obtemos que

$$\liminf_{t\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 \geq \int_\Omega \liminf_{t\to\infty} \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 = \infty.$$

Portanto, dado $\rho > 0$, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $e = t_0\varphi_1$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. ■

Lema 2.8 *Se f satisfaz $(SZ1) - (SZ3)$ então o funcional I satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subseteq H$ uma sequência de Palais-Smale no nível c. Como no Lema 2.5, é suficiente mostrar que $(u_n) \subseteq H$ é limitada. Suponha, por absurdo que (u_n) não seja limitada. Então, passando a subsequência se necessário, temos que $\rho_n = \|u_n\| \to \infty$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\rho_n > 0$. Logo podemos definir $(\widetilde{u}_n) \subseteq H$ por

$$\widetilde{u}_n(x) = \frac{u_n(x)}{\rho_n}.$$

Então $\|\widetilde{u}_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a menos de subsequência,

$$\begin{cases} \widetilde{u}_n & \rightharpoonup \quad \widetilde{u} \text{ fracamente em } H; \\ \widetilde{u}_n & \to \quad \widetilde{u} \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq s < 2^*; \\ \widetilde{u}_n(x) & \to \quad \widetilde{u}(x) \text{ q.t.p em } \Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Uma vez que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\rho_n^2 - \int_\Omega F(x, u_n),$$

temos

$$\int_\Omega \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{1}{2} - \frac{I(u_n)}{\rho_n^2}.$$

Como $\rho_n \to \infty$ e $I(u_n) \to c$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{1}{2}. \tag{2.21}$$

Seja $\widetilde{\Omega} = \{x \in \Omega : \widetilde{u}(x) \neq 0\}$ e observe que, como $u_n(x) = \rho_n \widetilde{u}_n(x)$ e $\rho_n \to \infty$, segue de (2.20) que

$$|u_n(x)| \to \infty \text{ q.t.p em } \widetilde{\Omega}.$$

Logo, usando $(SZ1)$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \infty, \text{ q.t.p em } \widetilde{\Omega}. \tag{2.22}$$

Afirmação: O conjunto $\widetilde{\Omega}$ é vazio.

Suponha o contrário. Então de $(SZ3)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 &= \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 + \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \\ &\geq \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 + \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2. \end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2 = 0.$$

Seja $m > N/2 > 1$ dado por $(SZ3)$ e considere $m' = m/(m-1)$ seu expoente conjugado. Note que $2m' < 2^*$. De fato,

$$m > \frac{N}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{N} < -\frac{1}{2m} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{N} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \Leftrightarrow 2m' < 2^*.$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2 \leq \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} |g|\widetilde{u}_n^2 \;\leq\; \left\{\int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} |g|^m\right\}^{\frac{1}{m}} \left\{\int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} |\widetilde{u}_n|^{2m'}\right\}^{\frac{2}{2m'}}$$

$$= \|g\|_m \|\widetilde{u}_n\|^2_{L^{2m'}(\Omega\setminus\widetilde{\Omega})}\,.$$

Como $\widetilde{u}_n \to 0$ em $L^{2m'}(\Omega\setminus\widetilde{\Omega})$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2 = 0. \tag{2.23}$$

Note que existe uma função $\widetilde{h} \in L^1(\Omega)$ tal que $\dfrac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \geq \widetilde{h}(x)$. De fato, observando que

$$\frac{1}{N/2} + \frac{1}{2^*} + \frac{1}{2^*} = 1$$

e lembrando que $m > N/2$ então existe $m'' < 2^*$ tal que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2^*} + \frac{1}{m''} = 1.$$

Daí, segue da desigualdade de Hölder com expoentes m, m'' e 2^* que

$$\int_\Omega \left| g\widetilde{u}_n^2 - g\widetilde{u}^2 \right| \;\leq\; \int_\Omega |g||\widetilde{u}_n + \widetilde{u}||\widetilde{u}_n - \widetilde{u}|$$

$$\leq\; |g|_m \|\widetilde{u}_n + \widetilde{u}\|_{2^*} \|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}\|_{m''}.$$

Assim, por $(SZ3)$ e (2.20) temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| g\widetilde{u}_n^2 - g\widetilde{u}^2 \right| = 0.$$

Logo, existe $\psi \in L^1(\Omega)$ tal que $|g(x)\widetilde{u}_n^2| \leq \psi(x)$. Assim, usando novamente $(SZ3)$ e a última desigualdade, temos

$$\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \geq g(x)\widetilde{u}_n^2 \geq -\psi(x) = \widetilde{h}(x).$$

Então, pela desigualdade acima, podemos aplicar o Lema de Fatou que juntamente com (2.22) nos fornece

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \geq \int_{\widetilde{\Omega}} \liminf_{n\to\infty} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 + \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \infty,$$

contradizendo (2.21). Portanto, $\widetilde{\Omega} = \emptyset$ e segue de (2.20) que

$$\widetilde{u} \equiv 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Dividindo $I'(u_n)u_n$ por ρ_n^2 obtemos

$$\frac{I'(u_n)u_n}{\rho_n^2} = 1 - \int_\Omega \frac{u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2. \tag{2.24}$$

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|I'(u_n)u_n|}{\rho_n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\|I'(u_n)\|_{H'}}{\rho_n} = 0, \tag{2.25}$$

visto que (u_n) é uma sequência de Palais-Smale e $\rho_n = \|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Assim, usando (2.25) e passando (2.24) ao limite, obtemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = 1. \tag{2.26}$$

Segue de (2.21) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\mu F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{\mu}{2}. \tag{2.27}$$

Então, combinando (2.21) com (2.26) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{\mu}{2} - 1 > 0. \tag{2.28}$$

Pela hipótese $(SZ2)$

$$\frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq c\frac{(u_n^2+1)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 &\leq \limsup_{n\to\infty} c\frac{(u_n^2+1)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \\ &= \limsup_{n\to\infty} c\left(\widetilde{u}_n^2 + \frac{1}{\rho_n^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq 0. \tag{2.29}$$

Como $\widetilde{u}_n^2 \to \widetilde{u}^2$ em $L^1(\Omega)$ e podemos supor que $\rho_n > 1$ temos

$$\frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq c\frac{u_n^2+1}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \widetilde{u}_n^2 + \frac{1}{\rho_n} \leq \overline{h},$$

onde $\overline{h} \in L^1(\Omega)$. Daí, por (2.29) e pelo Lema de Fatou segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq 0,$$

o que contradiz (2.28). Portanto a sequência (u_n) é limitada. ∎

Demonstração do Teorema 2.6: A prova é inteiramente análoga a apresentada no Teorema 2.3, utilizando-se agora os Lemas 2.7 e 2.8. ∎

2.3 Costa-Magalhães

Por fim, nesta seção vamos supor que f satisfaz

$(CM1)$ existe $\beta > \lambda_1$ tal que

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \geq \beta, \ \forall\ x \in \Omega;$$

$(CM2)$ existem $\overline{\mu} > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \geq a > 0, \ \forall\ x \in \Omega;$$

$(CM3)$ existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b < \infty, \ \forall\ x \in \Omega.$$

O teorema abaixo é devido a Costa e Magalhães [CosMag].

Teorema 2.9 *Se f satisfaz $(f_0)-(f_2)$, $(CM1)$, $(CM2)$ e $(CM3)$ com $\overline{\mu} > N/2(q-2)$ então o problema (P) tem solução fraca $u \not\equiv 0$.*

Façamos agora a prova dos lemas necessários para provar o teorema acima.

Lema 2.10 *Se f satisfaz $(CM1)$ então, para todo $\rho > 0$ dado, existe $e \in H$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Demonstração: Note que, dado $\epsilon > 0$, por $(CM1)$ existe $M > 0$ tal que

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2, \ \forall\ x \in \overline{\Omega}, |s| \geq M. \tag{2.30}$$

Pela continuidade de F em $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, existe uma constante positiva k, tal que

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - k, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Daí,

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)|u|_2^2 + k|\Omega|. \tag{2.31}$$

Seja $\varphi_1 \in H$ uma autofunção associada ao autovalor λ_1 e normalizada de modo que $\|\varphi_1\|^2 = 1 = \lambda_1 |\varphi_1|_2^2$. Assim,

$$\frac{1}{\lambda_1} = |\varphi_1|_2^2.$$

Substituindo a igualdade acima em (2.22) e avaliando I em $t\varphi_1$, temos,

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &\leq \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}(\beta - \epsilon)|\varphi_1|_2^2 + k|\Omega| \\ &= \left(1 - \frac{\beta - \epsilon}{\lambda_1}\right)\frac{t^2}{2} + k|\Omega|. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Diminuindo ϵ se necessário for, podemos supor que $\lambda_1 < \beta - \epsilon$, ou seja, $1 - (\beta - \epsilon)/\lambda_1 < 0$. Logo, dado $\rho > 0$, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $e = t_0\varphi_1$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. ∎

Lema 2.11 *Se f satisfaz $(CM2)$ e $(CM3)$ com $\overline{\mu} > (N/2)(q-2)$, então o funcional I satisfaz $(Cer)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: De $(CM2)$, dado $0 < \epsilon < a$, existe $M > 0$ tal que,

$$a_1 |s|^{\overline{\mu}} \leq sf(x,s) - 2F(x,s), \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, |s| \geq M.$$

onde $a_1 = a - \epsilon$. A continuidade de f e F em $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ nos garante que existe uma constante $a_2 > 0$ tal que

$$a_1 |s|^{\overline{\mu}} - a_2 \leq sf(x,s) - 2F(x,s), \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

Seja agora $(u_n) \subseteq H$ uma seqüência de Cerami no nível c, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} I(u_n) = c \ , \ \lim_{n \to \infty} \|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) = 0,$$

mostremos que $(u_n) \subseteq H$ é limitada. Suponha o contrário. Então, passando a uma subsequência se necessário, temos que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. De (2.33) temos que

$$\begin{aligned} a_1|u_n|_{\overline{\mu}}^{\overline{\mu}} - a_2|\Omega| &\leq \int_\Omega (u_n f(x,u_n) - 2F(x,u_n)) \\ &= 2I(u_n) - I'(u_n)u_n \\ &\leq 2|I(u_n)| + \|I'(u_n)\|_{H'}\|u_n\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_1|u_n|_{\overline{\mu}}^{\overline{\mu}} - a_2|\Omega| \leq 2|I(u_n)| + \|I'(u_n)\|_{H'}\|u_n\| \tag{2.34}$$

Como (u_n) é sequência de Cerami no nível c, o lado direito da expressão acima é limitado. Logo $u_n \in L^{\overline{\mu}}(\Omega)$ e, além disso, a seqüência (u_n) é limitada em $L^{\overline{\mu}}(\Omega)$, isto é, $|u_n|_{\overline{\mu}} \leq k_1$ para alguma constante $k_1 > 0$.

A hipótese $(CM3)$ e a continuidade F nos fornecem constantes positivas d_1 e d_2, tais que

$$F(x,s) \leq d_1|s|^q + d_2, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.35}$$

Assim, por (2.35) temos que,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - I(u_n) = \int_\Omega F(x,u_n) \leq d_1|u_n|_q^q + d_2|\Omega|. \tag{2.36}$$

Como $u_n \in L^{\overline{\mu}}(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega)$ então, para algum $t \in (0,1)$, segue da desigualdade de interpolação (ver [Bre, pg. 194]) que,

$$|u_n|_q^q \leq |u_n|_{2^*}^{tq} |u_n|_{\overline{\mu}}^{(1-t)q}. \tag{2.37}$$

Temos também que $H \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Então,

$$|u_n|_{2^*}^{tq} \leq k_2\|u_n\|^{tq}. \tag{2.38}$$

Observe que,

$$|u_n|_{\overline{\mu}}^{(1-t)q} \leq k_3 \ , \ I(u_n) \leq k_4. \tag{2.39}$$

Portanto, segue de (2.36)-(2.39) que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n\|^2 &\leq a_1|u_n|_q^q + a_2|\Omega| + I(u_n)\\ &\leq a_1|u_n|_{2^*}^{tq}|u_n|_{\overline{\mu}}^{(1-t)q} + a_2|\Omega| + k_4\\ &\leq a_1k_2k_3\|u_n\|^{tq} + a_2|\Omega| + k_4,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 \leq a_1k_2k_3\|u_n\|^{tq} + a_2|\Omega| + k_4. \tag{2.40}$$

Afirmação: $tq < 2$.
De fato, observe inicialmente que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\overline{\mu}} + \frac{t}{2^*},$$

e portanto

$$tq = \frac{2^*(q-\overline{\mu})}{2^*-\overline{\mu}}.$$

Por hipótese, $\overline{\mu} > N/2(q-1)$. Então

$$\begin{aligned}\frac{4\overline{\mu}}{N-2} > \frac{2N(q-2)}{(N-2)} &\iff \overline{\mu}(2^*-2) > 2^*(q-2)\\ &\iff \overline{\mu}(2-2^*) < 2^*(2-q)\\ &\iff 2^*(q-\overline{\mu}) < 2(2^*-\overline{\mu})\\ &\iff tq < 2.\end{aligned}$$

Como $tq < 2$, podemos usar (2.40) para obter uma contradição, como feito no Lema 2.5. Logo $(u_n) \subseteq H$ é limitada.

Observe agora que, como, $\|I'(u_n)\|_{H'}(1+\|u_n\|) \to 0$, então $\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$. Assim, podemos usar a limitação de (u_n) e o mesmo argumento da prova do Lema 2.5 para concluir que (u_n) possui subsequência convergente. ■

Demonstração do Teorema 2.9: Basta argumentar como no Teorema 2.3, usando os Lemas 2.10 e 2.11. ■

Observação 2.12 *Analisando a prova do Lema 2.11 percebe-se que o Teorema 2.9 continua válido se substituirmos a condição* $(CM2)$ *por*
$(\widetilde{CM}2)$ *existem constantes* $a > 0$ *e* $\overline{\mu} > 0$ *tais que*

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \leq -a < 0.$$

Apêndice A

Neste apêndice apresentamos alguns resultados utilizado durante este trabalho, bem como suas respectivas demonstrações.

A.1 Campo Pseudo-Gradiente

Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Dizemos que $v \in X$ é um vetor pseudo-gradiente para I em $u \in \widetilde{X}$ se

$$\|v\| \leq 2\|I'(u)\|_{X'} \quad \text{e} \quad I'(u)v \geq \|I'(u)\|_{X'}^2.$$

Um campo pseudo-gradiente para I em X é uma aplicação $V : \widetilde{X} \longrightarrow X$ tal que
(a) V é localmente Lipschitziana;
(b) para cada $u \in \widetilde{X}$, $V(u)$ é um vetor pseudo gradiente para I.

Lema A.1 *Se $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ então existe um campo pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$.*

Demonstração: Dado $u \in \widetilde{X}$ existe, por definição, $w \in X$ tal que $\|w\|_X = 1$ e

$$I'(u)w > \frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'}.$$

Então $z = \frac{3}{2}\|I'(u)\|w$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u. De fato,

$$\|z\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\|w\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'} < 2\|I'(u)\|_{X'}$$

e

$$I'(u)z = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}I'(u)w > \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'} = \|I'(u)\|_{X'}^2.$$

Pela continuidade de I', existe uma vizinhaça N_u de u tal que para todo $v \in N_u$

$$I'(v)z \geq \|I'(v)\|_{X'}^2 \quad \text{e} \quad \|z\| \leq 2\|I'(v)\|_{X'} \tag{A.1.1}$$

Note que a família $\mathcal{N}=\{N_u\}_{u\in\widetilde{X}}$ é uma cobertura aberta de $\widetilde{X}$. Como $\widetilde{X}$ é um espaço métrico, então é paracompacto (cf. [Elo]). Logo, existe uma cobertura $\mathcal{M}=\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $\widetilde{X}$, aberta e localmente finita que refina $\mathcal{N}$, isto é, para cada $u \in \widetilde{X}$ existem índices $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \Lambda$ e uma vizinhança W_u de u tal que $W_u \cap M_\lambda \neq \emptyset$ com $\lambda \in \Lambda_n = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, ou seja, a intersecção citada é não vazia apenas para um número finito de índices λ. Além disso, para cada $M_\lambda \in \mathcal{M}$ existe $N_u \in \mathcal{N}$ tal que $M_\lambda \subset N_u$. Seja z_λ um vetor pseudo-gradiente para I em M_λ. Então $z_\lambda = z$ satisfaz (A.1.1) para cada $u \in M_\lambda$.

Seja agora $d_\lambda(u)$ a distância de u ao complemento de M_λ. Então a função d_λ é Lipschitiziana e além disso $supp(d_\lambda) \subseteq M_\lambda$. Defina

$$f_\lambda(u) = \frac{d_\lambda(u)}{\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u)}.$$

Observe que f_λ está bem definida, pois para cada $u \in \widetilde{X}$, $\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u) < \infty$ e não nulo. Além disso como o refinamento é localmente finito, tem-se que, $0 \leq f_\lambda \leq 1$ e para cada $u \in \widetilde{X}$,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{d_\lambda(u)}{\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u)} = 1. \tag{A.1.2}$$

Veriquemos agora que

$$V(u) := \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u) z_\lambda$$

é um campo pseudo-gradiente para I um $\widetilde{X}$. Temos por (A.1.1) e (A.1.2) que

$$\|V(u)\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \left| d_\lambda(u) \Big/ \sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u) \right| \|z\| < 2\|I'(u)\|_{X'}, \tag{A.1.3}$$

e novamente de (A.1.1) segue que

$$\begin{aligned} I'(u)V(u) &= I'(u)\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u) z_\lambda \\ &= \frac{3}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u)\|I'(u)\|_{X'} I'(u)w \\ &> \|I'(u)\|_{X'}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I'(u)V(u) > \|I'(u)\|^2_{X'}. \tag{A.1.4}$$

Portando segue de (A.1.3) e (A.1.4) que V é um vetor pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$. Resta mostrarmos que V é localmente Lipschitziana. Para isso, basta observar que V é uma soma finita de funções localmente Lipschitzianas, visto que a cobertura $\mathcal{M}$ de $\widetilde{X}$ é um refinamento localmente finito de $\mathcal{N}$ e as funções d_λ são localmente Lipschitzianas. Portanto V é um campo pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$. ■

A.2 Funcionais Diferenciáveis

O foco desta seção é provar a regularidade $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ do funcional $I = J_0 - J$ onde $J_0, J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidos respectivamente por

$$J_0(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \;\text{ e }\; J(u) = \int_\Omega F(x,u),$$

com $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ e a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo propriedades que serão introduzidas no decorrer do texto. Além disso, veremos que J tem por diferencial o operador

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v, \;\forall\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Em se tratando de norma, é fácil ver que na verdade $J_0 \in C^\infty(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Então, com respeito a regularidade de I, iremos apenas nos atentar ao operador J definido acima.

No que segue, temos como referência o livro [Sch].

Lema A.2 *Sejam Ω um domínio limitado, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r, q \geq 1$, $a \geq 0$ e $b > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a + b|s|^{\frac{r}{q}} \;,\; \forall\; (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então o operador $B : L^r(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ dado por

$$B(u) = f(x, u(x))$$

é contínuo e limitado.

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência em $L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in L^r(\Omega)$. Então a menos de subseqüência,

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, como $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ e Ω é limitado,

$$|u_n(x)| \leq h(x) \in L^r(\Omega) \subseteq L^1(\Omega).$$

Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned}
|f(x,u_n) - f(x,u)|^q &\leq (|f(x,u_n)| + |f(x,u)|)^q \\
&\leq 2^{q-1}(|f(x,u_n)|^q + |f(x,u)|^q) \\
&\leq 2^{q-1}\left\{\left(a + b|u_n|^{\frac{r}{q}}\right)^q + \left(a + b|u|^{\frac{r}{q}}\right)^q\right\} \\
&\leq 2^{q-1}[2^{q-1}(a^q + b^q|u_n|^r) + 2^{q-1}(a^q + b^q|u|^r)] \\
&\leq c_1 + c_2(|u_n|^r + |u|^r),
\end{aligned}$$

onde $c_1 = 2b^{2(q-1)}a^q$ e $c_2 = 2^{2(q-1)}b^q$.

Observando que $u, u_n \in L^1(\Omega)$ e que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para obtermos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |B(u_n) - B(u)|_q^q &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |B(u_n) - B(u)|^q \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^q = 0,
\end{aligned}$$

mostrando que B é um operador contínuo.

Tomando $u \in L^r(\Omega)$ com $|u|_r = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|B(u)|_q^q &= \int_\Omega |f(x,u(x))|^q \\
&\leq \int_\Omega \left(a + b|u(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q
\end{aligned}$$

$$\leq \quad 2^{q-1}\int_\Omega (a^q + b^q|u(x)|^r)$$

$$= \quad 2^{q-1}a^q|\Omega| + 2^{q-1}b^q|u|_r^r = 2^{q-1}a^q|\Omega| + 2^{q-1}b^q.$$

Portando B é limitado e a demonstração está completa. ■

Dados $r_1, r_2, q_1, q_2 \geq 1$, sejam

$$\Sigma_1 = L^{r_1}(\Omega) \cap L^{r_2}(\Omega) \ \text{ e } \ \Sigma_2 = L^{q_1}(\Omega) + L^{q_2}(\Omega).$$

Pode-se mostrar (cf. [Ada]) que Σ_2 é um espaço vetorial com norma

$$\|u_0\|_{\Sigma_2} = \inf\{\|u_1\|_{q_1} + \|u_2\|_{q_2} : u = u_1 + u_2,\ u_1 \in L^{q_1}(\Omega),\ u_2 \in L^{q_2}(\Omega)\}.$$

Lema A.3 *Sejam Ω um domínio limitado, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $a, b \geq 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|s|^{\frac{r_2}{q_2}}\ ,\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

e defina o operador $B : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ por

$$B(u) = f(x, u(x)).$$

Então $B = B_1 + B_2$ onde B_i é uma aplicação contínua e limitada de L^{r_i} em L^{q_i} para $i = 1, 2$. Em particular, B é uma aplicação contínua e limitada de Σ_1 em Σ_2.

Demonstração: Seja $\xi \in C(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que

$$\xi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & \mathbb{R}\backslash(-2,2), \end{cases}$$

e defina $g : \Omega \times [-1/2, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x,s) = \xi(s)f(x,s),$$

e ainda $h : \Omega \times (\mathbb{R}\backslash(-2,2)) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x,s) = (1 - \xi(s))f(x,s).$$

Sem perda de generalidade, suponha que $r_1/q_1 \leq r_2/q_2$. Usando a definição de ξ, temos que

$$\begin{aligned} |g(x,s)| &= |f(x,s)| \\ &\leq a|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|s|^{\frac{r_2}{q_2}} \\ &\leq c_3\left(|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + |s|^{\frac{r_2}{q_2}}\right) \\ &\leq c_4|s|^{\frac{r_1}{q_1}}, \end{aligned}$$

onde $c_4 = 2c_3 = 2\max\{a,b\}$. Analogamente temos que

$$|h(x,s)| \leq c_4|s|^{\frac{r_2}{q_2}}.$$

Definindo as aplicações

$$B_1 : L^{r_1}(\Omega) \longrightarrow L^{q_1}(\Omega)\ ,\ B_1(u) = g(x,u(x))$$

e

$$B_2 : L^{r_2}(\Omega) \longrightarrow L^{q_2}(\Omega)\ ,\ B_2(u) = h(x,u(x)),$$

segue do Lema A.2 que B_1 e B_2 são aplicações contínuas e limitadas. Além disso, como

$$u_0 = (B_1 + B_2)(u) = B_1(u) + B_2(u) = u_1 + u_2,$$

onde $u_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ e $u_2 \in L^{q_2}(\Omega)$, então $B = B_1 + B_2$. ∎

Teorema A.4 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suponha que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e que existam constantes $r, q > 0$ e $a, b \geq 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a|s|^r + b|s|^q\ ,\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

e que as imersões abaixo sejam contínuas

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega),\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega).$$

Então o funcional

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u),$$

onde $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ *satisfaz*

$$J \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}) \ , \ J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v \ , \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, se as imersões acima forem compactas, então $J' : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)'$ *é compacto.*

Demonstração: Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|u|_{r+1} \leq c_1\|u\| \ , \ |u|_{q+1} \leq c_2\|u\| \ , \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega). \tag{A.2.1}$$

Para $u, v \in X$ fixos, considere $\gamma \in C(\mathbb{R},[0,1])$ e defina a função

$$g(\gamma(s)) = f(x, u + \gamma(s)v)v.$$

Por hipótese e pela Desigualdade de Young com $\frac{r+1}{r}$, $r+1$ e $\frac{q+1}{q}$, $q+1$, temos

$$\begin{aligned} |g(\gamma)| &\leq \{a|u+\gamma v|^r + b|u+\gamma v|^q\}|v| \\ &\leq \frac{a}{r+1}\{r|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\} + \frac{b}{q+1}\{q|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|g(\gamma)| \leq \frac{a}{r+1}\{r|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\} + \frac{b}{q+1}\{q|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\}. \tag{A.2.2}$$

Observe que

$$\frac{a}{r+1}\{r|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\} \leq a2^r\frac{r}{r+1}\Big\{|u|^{r+1} + |\gamma|^{r+1}|v|^{r+1}\Big\} + \frac{a}{r+1}|v|^{r+1} \tag{A.2.3}$$

e

$$\frac{b}{q+1}\{q|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\} \leq b2^q\frac{q}{q+1}\Big\{|u|^{q+1} + |\gamma|^{q+1}|v|^{q+1}\Big\} + \frac{b}{q+1}|v|^{q+1}. \tag{A.2.4}$$

Agora, usando que $\gamma(s) \in [0,1]$ em (A.2.3) e (A.2.4), tomando

$$c_3 = \max\Big\{a2^r\frac{r}{r+1}, b2^q\frac{q}{q+1}\Big\},$$

e substituindo em (A.2.2), obtemos

$$|g(\gamma)| \leq c_3\Big(|u|^{r+1} + |v|^{r+1} + |u|^{q+1} + |v|^{q+1}\Big).$$

Como Ω é limitado, então $L^{r+1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$. Assim, pela desigualdade acima, $g(\gamma)$ é limitada por uma função integrável, o que nos permitirá utilizar mais adiante o Teorema da Convergência Dominada.

Fixando $x \in \Omega$, podemos supor sem perda de generalidade, que $u(x) < u(x)+tv(x)$. Defina a função $\xi : [u, u+tv] \longrightarrow \mathbb{R}$ por,

$$\xi(s) = F(x,s).$$

Note que ξ é contínua e derivável em $(u, u+tv)$ com $\xi'(s) = f(x,s)$. Então, pelo Teorema Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que,

$$\xi(u+tv) - \xi(u) = \xi'(u+\theta tv)(tv),$$

ou seja,

$$\frac{F(x,u+tv) - F(u)}{t} = f(x, u+\theta tv)v.$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(x,u+tv) - F(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(x,u+\theta tv)v \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega g(\theta t) \\
&= \int_\Omega f(x,u)v.
\end{aligned}$$

Consideremos o funcional

$$\begin{aligned}
T_u : \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto \int_\Omega f(x,u)v
\end{aligned}$$

e mostremos que $T_u \in H_0^1(\Omega)'$. Para tanto, tome $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$T_u(v_1+v_2) = \int_\Omega f(x,u)(v_1+v_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega (f(x,u)v_1 + f(x,u)v_2) \\
&= \int_\Omega f(x,u)v_1 + \int_\Omega f(x,u)v_2 \\
&= T_u(v_1) + T_u(v_2).
\end{aligned}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
|T_u(v)| &\leq \int_\Omega |f(x,u)||v| \\
&\leq \int_\Omega \Big(a|u|^r + b|u|^q\Big)|v| \\
&= a\int_\Omega |u|^r|v| + b\int_\Omega |u|^q|v|,
\end{aligned}
$$

isto é

$$|T_u(v)| \leq a\int_\Omega |u|^r|v| + b\int_\Omega |u|^q|v| \tag{A.2.5}$$

Note também que, pela Desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{r+1}{r}$, $r+1$ e $\frac{q+1}{q}$, $q+1$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\int_\Omega |u|^r|v| \leq \left\{\int_\Omega |u|^{r+1}\right\}^{\frac{r}{r+1}} \left\{\int_\Omega |v|^{r+1}\right\}^{\frac{1}{r+1}} = |u|_{r+1}^r |v|_{r+1} \tag{A.2.6}$$

e

$$\int_\Omega |u|^q|v| \leq \left\{\int_\Omega |u|^{q+1}\right\}^{\frac{q}{q+1}} \left\{\int_\Omega |v|^{q+1}\right\}^{\frac{1}{q+1}} = |u|_{q+1}^q |v|_{q+1}. \tag{A.2.7}$$

Por (A.2.1), existem constantes positivas c_3 e c_4 de modo a fazer com que as desigualdades (A.2.6) e (A.2.7) se expressem como segue,

$$\int_\Omega |u|^r|v| \leq c_3\|u\|^r\|v\|, \tag{A.2.8}$$

e

$$\int_\Omega |u|^q|v| \leq c_4\|u\|^q\|v\|, \tag{A.2.9}$$

mostrando que

$$|T_u(v)| \leq c_5 \|v\|, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo T_u é contínuo. Desse modo, concluímos que $T \in H_0^1(\Omega)'$ e $J'(u) = T_u$. Portanto existe a derivada de Gateaux.

Mostremos agora que $J'(u)$ é contínua em u. Para isso, considere a sequência $(u_n) \subseteq X \subseteq L^{r+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in X$ e defina a aplicação

$$B : L^{r+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) + L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

por, $B(u) := f(x,u)$. Segue do Lema A.3 que $B = B_1 + B_2$, onde

$$B_1 : L^{r+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega), \ B_2 : L^{q+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

são aplicações contínuas e limitadas. Note que,

$$\begin{aligned}
|(DJ(u_n) - DJ(u))v| &= \left| \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))v \right| \\
&= \left| \int_\Omega (B(u_n) - B(u))v \right| \\
&\leq \int_\Omega |B_1(u_n) - B_1(u)||v| + \int_\Omega |B_2(u_n) - B_2(u)|.
\end{aligned}$$

Usando (A.2.1) e a Desigualdade de Hölder como anteriormente, obtemos da desigualdade acima que

$$\begin{aligned}
|(J'(u_n) - J'(u))v| &\leq |B_1(u_n) - B_1(u)|_{\frac{r+1}{r}} |v|_{r+1} + |B_2(u_n) - |B_2(u)|_{\frac{q+1}{q}} |v|_{q+1} \\
&\leq c\|v\| \left\{ |B_1(u_n) - B_1(u)|_{\frac{r+1}{r}} + |B_2(u_n) - |B_2(u)|_{\frac{q+1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} |(J'(u_n) - J'(u))v| = 0,$$

pois

$$B_1(u_n) \to B_1(u) \ , \ B_2(u_n) \to B_2(u)$$

em $L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$ e $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ respectivamente. Como

$$\lim_{n\to\infty} \|J'(u_n) - J'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{|(J'(u_n) - J'(u))v|}{\|v\|} = 0,$$

podemos concluir que $J'(u)$ é de fato contínua em u. Portanto $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Resta mostrarmos que se as imersões do enunciado são compactas, então J' é compacto. Suponha que tais imersões sejam compactas. Então, se $(u_n) \subseteq H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, a menos de uma subsequência, $u_n \to u$ em $L^{r+1}(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$. Então,

$$B_1(u_n) \to B_1(u) \text{ em } L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) \text{ e } B_2(u_n) \to B_2(u) \text{ em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega). \tag{A.2.10}$$

Como $J'(u) = DJ(u)$, podemos usar (A.2.10) e concluir com um argumento análogo ao feito anteriormente que $J'(u_n) \to J'(u)$. ■

Finalizamos esta seção com a seguinte proposição.

Proposição A.5 *Suponha que* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz*
(f_0) $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$;
(f_1) *existem constantes* $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ *e* $p \in [2, 2^*)$ *tais que*

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então o funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u)$$

é de classe C^1.

Demonstração: Considerando o funcional

$$\begin{array}{rccl} J_0 : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2, \end{array}$$

temos que $I' = J_0' - J'$. Como $J_0 \in C^\infty(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Daí pelo Teorema A.4 podemos concluir que o funcional I, é tal que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ u, v \in H.$$

■

A.3 Regularidade de Solução

Nesta seção vamos provar que sob certas condições as soluções fracas do problema (P) abaixo são clássicas. Mais especificamente provaremos a

Proposição A.6 *Suponha que* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz*

$(\widetilde{f}_0)$ f *é Hölder contínua;*
$(\widetilde{f}_1)$ *existem constantes* $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ *tais que*

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{2^*-1}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Suponha ainda que $u \in H_0^1(\Omega)$ *é solução fraca de*

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\,, & x \in \Omega \\ u = 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Então u *é solução clássica, ou seja,* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Para provar a Proposição acima vamos usar o seguinte resultado devido a Brezis e Kato [Brekat].

Lema A.7 (Brezis-Kato) *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ *um domínio limitado e suave e* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que*

$$|f(x,u(x))| \leq a(x)(1 + |u(x)|)$$

com $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é solução fraca do problema*

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\,, & x \in \Omega \\ u = 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in L^q(\Omega)$ *para todo* $q \geq 1$.

Assumindo o lema acima como verdadeiro, podemos provar a Proposição A.6 como segue.

Demonstração da Proposição A.6: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (P). Então u é solução fraca do problema

$$(P)_a \qquad \begin{cases} -\Delta u = a(x)(1 + |u|)\,, & x \in \Omega \\ u = 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $a(x) = f(x, u(x))/(1 + |u(x)|)$. Observe que de $(\widetilde{f_1})$

$$|a(x)| = \frac{|f(x, u(x))|}{1 + |u(x)|} \leq \frac{c_1 + c_2|u(x)|^{2^*-1}}{1 + |u(x)|} \leq c_1 + c_2|u(x)|^{2^*-2}.$$

Assim

$$\int_\Omega |a|^{\frac{N}{2}} \leq \int_\Omega \Big(c_1 + c_2|u|^{2^*-2}\Big) \leq \int_\Omega \Big(c_3 + c_4|u|^{2^*}\Big) \leq c_3|\Omega| + c_4 \int_\Omega |u|^{2^*}.$$

Daí, podemos usar imersão de Sobolev para concluir que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Logo, segue do Lema A.7 que $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$.

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{1}{2^*-1}$ e seu conjugado, digamos r, obtemos de $(\widetilde{f_1})$ que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x, u)|^q &\leq 2^{q-1} \int_\Omega \Big(c_1^q + c_2^q |u|^{q(2^*-1)}\Big) \\
&= k_1|\Omega| + k_2 \int_\Omega |u|^{q(2^*-1)} \\
&\leq k_3 + k_2|\Omega|^r |u|_q^{q(2^*-1)} \\
&= k_3 + k_4|u|_q^{q(2^*-1)} < \infty,
\end{aligned}$$

mostrando que $f \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. Daí, pela Desigualdade de Calderon-Zygmund (ver [GilTru] Teoremas 9.11 e 9.13), segue que $u \in W^{2,q}(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. Como $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,m}(\overline{\Omega})$, para $q > N$ e $0 \leq m < 1 - N/q$, concluímos que $u \in C^{1,m}(\overline{\Omega})$.

Para $x, y \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned}
|f(x, u(x)) - f(y, u(y))| &\leq k_1|(x, u(x)) - (y, u(y))|^\beta \\
&\leq k_1(|x - y| + |u(x) - u(y)|)^\beta \\
&\leq k_2\Big(|x - y|^\beta + |u(x) - u(y)|^\beta\Big) \\
&\leq k_2\Big(|x - y|^\beta + k_3|x - y|^{m\beta}\Big).
\end{aligned}$$

Assim, se $x \neq y$,

$$\frac{|f(x, u(x)) - f(y, u(y))|}{|x - y|^{m\beta}} \leq k_2\Big(|x - y|^{\beta(1-m)} + k_3\Big)$$

$$\leq \; k_2\Big(\sup_{x\neq y}|x-y|\Big)^{\beta(1-m)} + k_4$$
$$\leq \; k_2\Big(diam(\Omega)\Big)^{\beta(1-m)} + k_4 = k_5 < \infty,$$

visto que Ω é limitado. Portanto $f \in C^{0,m\beta}(\Omega)$. Segue então pelas estimativas de Schauder (cf. [GilTru] Teoremas 6.2 e 6.6) que $u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, conforme queríamos.

■

Façamos agora a prova do Lema A.7. A demonstração apresentada pode ser encontrada no livro [Brekat].

Demonstração do Lema A.7: Como u é solução fraca do problema (P), temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \; \forall \; v \in H_0^1(\Omega).$$

Dados $s \geq 0$ e $R > 1$ e sejam

$$m_{s,R} = \min\{|u(x)|^s, R\} \;\; \text{e} \;\; m_{2s,R^2} = \min\{|u(x)|^{2s}, R^2\},$$

e defina $v = v_{s,R}$ por,

$$v(x) = u(x)m_{2s,R^2}.$$

Como $u \in H_0^1(\Omega)$ e m_{2s,R^2} é limitada, podemos utilizar a regra da derivada do produto e obter,

$$\nabla v(x) = m_{2s,R^2}\nabla u(x) + z(x)$$

onde

$$z(x) = \begin{cases} 2s|u(x)|^{2s}\nabla u(x), & 0 \leq |u(x)|^s < R \\ 0, & |u(x)|^s \geq R. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla v &= \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2s\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 \\ &\leq \int_\Omega a(1+|u|)|u|m_{2s,R^2}, \end{aligned}$$

isto é

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \leq \int_\Omega a(1+|u|)|u|m_{2s,R^2} \tag{A.3.1}$$

Observe agora que,

$$\begin{aligned}\nabla(m_{s,R}u(x)) &= m_{s,R}\nabla u(x) + su(x)^2|u(x)|^{s-2}\nabla u(x)\chi_{\{|u|^s<R\}}\\ &= m_{s,R}\nabla u(x) + s|u(x)|^s\nabla u(x)\chi_{\{|u|^s<R\}},\end{aligned}$$

ou seja

$$\nabla(m_{s,L}u(x)) = m_{s,R}\nabla u(x) + s|u(x)|^s\nabla u(x)\chi_{\{|u|^s<R\}}, \tag{A.3.2}$$

em que χ_A denota a função característica do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$, isto é,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A. \end{cases}$$

Portanto, fazendo $c_1 = c_1(s) = 1 + s/2$, segue de (A.3.2) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + s^2\int_{\{|u|^s<R\}}|u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &\leq \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2s\int_{\{|u|^s<R\}}|u|^{2s}|\nabla u|^2 + s^2\int_{\{|u|^s<R\}}|u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &= \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2sc_1\int_{\{|u|^s<R\}}|u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &\leq \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + \frac{s}{2}\int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2sc_1\int_{\{|u|^s<R\}}|u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &= c_1\int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2sc_1\int_{\{|u|^s<R\}}|u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &= c_1\left\{\int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2s\int_{\{|u|^s<R\}}|u|^{2s}|\nabla u|^2\right\}\\ &\overset{(A.3.1)}{\leq} c_1\int_\Omega a(x)(1+|u|)|u|m_{2s,R^2}.\end{aligned}$$

Afirmação 1: $(1+|u(x)|)|u(x)|m_{2s,R^2} \leq 2 + 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2}$.
De fato, se $|u(x)| \leq 1$, então, $|u(x)| \leq |u(x)|^2$ e

$$(1+|u(x)|)|u(x)|m_{2s,R^2} \leq 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2} \leq 2 + 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2}.$$

Por outro lado, se $|u(x)| > 1$, então $m_{2s,R^2} = |u(x)|^{2s}$ $(R > 1)$ e

$$\begin{aligned}(1+|u(x)|)|u(x)|m_{2s,R^2} &= |u(x)|^{2s+1} + |u(x)|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq 1 + |u(x)|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq 2 + 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2}.\end{aligned}$$

Usando a afirmação acima, a hipótese de que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{N}{2}$ e $\frac{N}{N-2}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq c_1 \int_\Omega a(2 + 2|u|^2 m_{2s,R^2}) \\ &= 2c_1 \int_\Omega a + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq 2c_1 |\Omega|^{\frac{N-2}{N}} |a|_{\frac{N}{2}} + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &= c_2 + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2},\end{aligned}$$

ou ainda

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_2 + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2}, \tag{A.3.3}$$

onde $c_2 = c_2(s, |a|_{\frac{N}{2}}, N, \Omega)$.

Suponha que $u \in L^{2(s+1)}(\Omega)$. Para $M > 0$, temos de (A.3.3) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq c_2 + 2c_1 \int_{\{a<M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2} + 2c_1 \int_{\{a\geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq c_2 + 2c_1 M \int_{\{a<M\}} |u|^2 m_{2s,R^2} + 2c_1 \int_{\{a\geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2}.\end{aligned}$$

Note que, se $m_{2s,R^2} = |u(x)|^{2s}$, então

$$\int_{\{a<M\}} |u|^2 m_{2s,R^2} \leq \int_\Omega |u|^{2(s+1)} < \infty,$$

caso contrário,

$$\int_{\{a<M\}} |u|^2 m_{2s,R^2} \leq R^2 \int_\Omega |u|^2 < \infty,$$

pois

$$0 \leq s \Longrightarrow 1 \leq s+1 \Longrightarrow 2 \leq 2(s+1) \Longrightarrow |u|^2 \leq |u|^{2(s+1)} \Longrightarrow \int_\Omega |u|^2 \leq \int_\Omega |u|^{2(s+1)} < \infty.$$

Logo, existe uma constante $c_3 = c_3(|u|_{2(s+1)}, M)$, tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq c_2 + 2Mc_1c_3 + 2c_1 \int_{\{a \geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq c_4 + 2c_1 \int_{\{a \geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_4 + 2c_1 \int_{\{a \geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2}, \tag{A.3.4}$$

onde $c_4 = c_4(s, N, |a|_{\frac{N}{2}}, \Omega, |u|_{2(s+1)}, M)$. Agora, fazendo

$$\epsilon(M) = \left\{ \int_{\{a \geq M\}} |a|^{\frac{N}{2}} \right\}^{\frac{2}{N}}$$

e usando novamente a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{N}{2}$ e $\frac{N}{N-2}$, (A.3.4) nos fornece a desigualdade abaixo,

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_4 + 2c_1\epsilon(M) \left\{ \int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*} \right\}^{\frac{N-2}{N}}. \tag{A.3.5}$$

Afirmação 2: Existe uma constante c_6 dependendo apenas de N e Ω tal que,

$$\left\{ \int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*} \right\}^{\frac{N-2}{N}} \leq c_6 \int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2.$$

Para verificarmos isso, observemos inicialmente que sendo Ω um domínio limitado, a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, garante a existência de uma constante positiva $c_5 = c_5(N, \Omega)$ de modo que

$$\left\{ \int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*} \right\}^{\frac{1}{2^*}} \leq c_5 \left\{ \int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

ou ainda,

$$\left\{ \int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*} \right\}^{\frac{N-2}{N}} \leq c_6 \int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2,$$

onde $c_6 = c_5^2$. Logo, usando a Afirmação 2 em (A.3.5), obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_4 + 2c_1c_6\epsilon(M)\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2.$$

Como $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, então $\epsilon(M) \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, podemos escolher $M > 0$ suficientemente grande de modo que $2c_1c_6\epsilon(M) < 1/2$. Daí, segue da desigualdade acima que

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq 2c_4.$$

Agora, usando a Afirmação 2 e a desigualdade acima, temos que

$$\left\{\int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*}\right\}^{\frac{N-2}{N}} \leq c_6\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq 2c_2c_4 = c_7 = c_7(s, N, |a|_{\frac{N}{2}}, \Omega, |u|_{2(s+1)}, M).$$

Observe que c_7 não depende de L, então podemos fazer $L \to \infty$ e usar o Teorema da Convergência Dominada para obter,

$$\int_\Omega (|u|^{s+1})^{2^*} \leq c_8,$$

mostrando que $u \in L^{2(s+1)\frac{N}{N-2}}(\Omega)$.

Desse modo

$$u \in L^{2(s+1)}(\Omega) \Longrightarrow u \in L^{2(s+1)\frac{N}{N-2}}(\Omega)$$

com $\frac{N}{N-2} > 1$. Fazendo o passo inicial $s = s_0 = 0$ e iterando o processo, obtemos que $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. ■

Referências Bibliográficas

[Ada] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[AmbRab] Ambrosetti, A. e Rabinowitz, P.H., *Dual variational in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal **1560**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[BarBenFor] Bartolo, P., Benci, V. and Fortunato, D., *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity,* Nonlinear Anal **7** (1983), 981-1012.

[Brekat] Brézis, Haïm. e Kato, Tosio., *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials* J. Math. Pures Appl. (9) **58** (1979), 137-151.

[BreNir] Brézis, H. e Nirenberg, L., *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math **44** (1991), 939-963.

[Bre] Brézis, H., *Analyse fonctionelle*, Masson, 1987.

[Cer] Cerami, G., *Un criterio di essistenza per i punti critici su varietà illimitate*, Rend. Accad. Sc. Lett. Inst. Lombrado **112** (1978), 332-336.

[Cla] Clark, D., *A variant of the Ljusternik-Schnirelman theory*, Indiana J. Math **22** (1973), 65-74.

[CosMag] Costa, D.G. e Magalhães, C.A., *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Anal **23** (1994), 1401-1412.

[Elo] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[Eva] Evans, L.C.,*Partial Differential Equations*, American Math. Soc. 1998.

[GilTru] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Pal1] Palais, R.S., *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology **2** (1963), 229-340.

[Pal2] Palais, R.S., *Critical point theory and the minimax principle*, Nonlinear Funct. Anal. App **15** (1970), 185-212.

[PalSma] Palais, R.S. e Smale, S., *A generalized Morse theory*, Bull. Am. Math. Soc. **70** (1964), 165-171.

[Rab] Rabinowitz, P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C.B.M.S. Regional conference series in mathematics., American mathematical society **65**, 1986.

[Sch] Schechter, M., *Linking methods in Critical Point Theory*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[SchZou1] Schechter, M. and Zou, W., *Critical point theory and its applications*, Springer, New York, 2006.

[SchZou2] Schechter, M. and Zou, W., *Superlinear problems*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 214, No. 1, 2004.

[Sma] Smale, S., *Morse theory and nonlinear gerenalization of the Dirichlet problem*, Ann. Math. **17** (1964), 307-315.

[Str] Struwe, M., *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltoniam*, Springer-Verlag, Berlim, 1990.

[Wil1] Willem, M., *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[Wil2] Willem, M., *Lectures on critical point theory*, Trabalho de Matemática **199** (1983), Universidade de Brasília.