



**DETERMINAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DINÂMICA DE
UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI ATRAVÉS DA
SFRF PELO MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL.**

Thiago Pereira e Silva

**Dissertação de Mestrado
Integridade Estrutural e Materiais**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DETERMINAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DINÂMICA DE
UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI ATRAVÉS DA SFRF
PELO MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL.

Thiago Pereira e Silva

Orientadora: Dra. Marcela Rodrigues Machado, Univ (ENM/ UnB)

Coorientadora: Dra. Leila Khalij, INSA de Rouen

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PUBLICAÇÃO: FGA.DM - 078A/2019

BRASÍLIA/DF, 18 de março de 2019

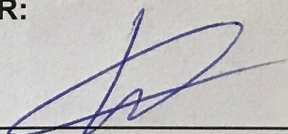
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DO GAMA / FACULDADE DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INTEGRIDADE DE
MATERIAIS DA ENGENHARIA

"DETERMINAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DINÂMICA DE UMA VIGA DE
EULER-BERNOULLI ATRAVÉS DA SFRF PELO MÉTODO DO ELEMENTO
ESPECTRAL."

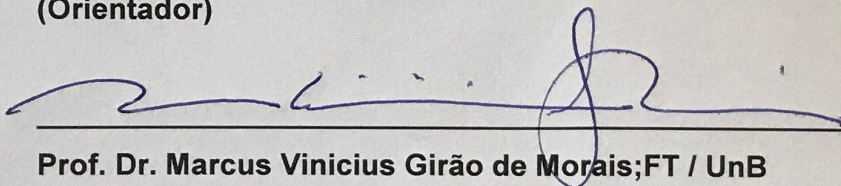
THIAGO PEREIRA E SILVA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA DA FACULDADE DO GAMA E
FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
INTEGRIDADE DE MATERIAIS DA ENGENHARIA.

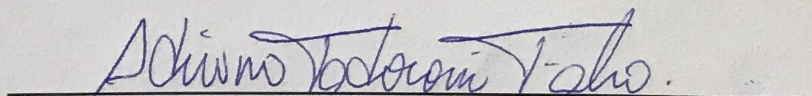
APROVADA POR:



Prof. Dra. Marcela Rodrigues Machado; FT / UnB
(Orientador)



Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes; FT / UnB
(Membro Interno)



Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro FT / UnB
(Membro Externo)

Brasília / DF, 18 de março de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, T. P.

Determinação da deformação dinâmica de uma viga de Euler-Bernoulli através da SFRF pelo método do elemento e [Distrito Federal] 2019.

xviii, 63p. (FGA/FT/UnB, Mestre, Integridade Estrutural e Materiais, 2019.

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

Palavras-chave:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. Deformação dinâmica | 2. Método do elemento espectral |
| 3. Análise Modal da Deformação | 4. Srain FRF |
| I. FGA/FT/UnB | II. Mestre |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Silva, T. P.(2019). Determinação da deformação dinâmica de uma viga de Euler-Bernoulli através da SFRF pelo método do elemento espectral.. Dissertação de Mestrado, Publicação ENM.DM - 078A/2019, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, xviii, 63p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Thiago Pereira e Silva.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Determinação da deformação dinâmica de uma viga de Euler-Bernoulli através da SFRF pelo método do elemento espectral..

GRAU / ANO: MESTRE / 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Thiago Pereira e Silva

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me guiou durante os períodos difíceis e me deu forças para seguir firme durante toda caminhada.

A minha esposa Leila que foi essencial para que esse sonho acontecesse, me apoiando nos momentos difíceis e comemorando a cada vitória.

Ao meu/minha filho(a) (sexo ainda desconhecido) que me agraciou com seu surgimento neste período tão importante em minha vida.

A meus pais João Neto e Terezinha por serem exemplos de pessoas e mostrarem sempre confiança em minhas batalhas.

Aos meus irmãos Lethícia e Lucas, os quais trabalho para servir de exemplo a ser seguido.

A minha família do coração, Preta e Ricardo que me deram todo apoio, sempre me incentivando, colaborando e comemorando a cada passo dado.

A minha orientadora Marcela Machado por me acolher e contribuir para meu crescimento, profissional e pessoal.

A toda minha família e amigos, que são suporte emocional para vencermos nossas lutas diárias.

Resumo

Determinação da deformação dinâmica de uma viga de Euler-Bernoulli através da SFRF pelo método do elemento espectral.

Autor: Thiago Pereira e Silva

Orientadora: Dra. Marcela Rodrigues Machado, Univ (ENM/ UnB)

Programa de Pós Graduação em Integridade Estrutural e Materiais

Brasília, 18 de março de 2019

No desenvolvimento de produtos, estruturas e máquinas o conhecimento do comportamento dinâmico é primordial. Na tentativa de verificar as propriedades dinâmicas do sistema são realizados testes numéricos ou experimentais. Nos experimentos e simulações, a avaliação da resposta do elemento estrutural é realizada em função da frequência de excitação. Em alguns casos, como no fenômeno da fadiga, a deformação dinâmica está diretamente ligada à falha, criando a necessidade de se ter uma resposta direta em deformação. A análise modal teórica e experimental de deformação é a técnica mais utilizada para a obtenção da deformação, porém para tal é necessário a estimação tanto do modos de deslocamentos quanto da deformação. Neste trabalho, a deformação dinâmica de uma viga de Euler-Bernoulli é obtida diretamente através do método do elemento espectral (SEM). Os resultados são gerados através de uma função resposta em frequência da deformação (SFRF) onde as propriedades dinâmicas são verificadas. As características mecânicas da viga são utilizadas para correlacionar o deslocamento com a deformação, sendo implementada dentro da solução da equação da onda do elemento na montagem da matriz de rigidez dinâmica. Os resultados obtidos são validados comparando-os com um estudo presente na literatura e com dados experimentais. Um elemento com trinca é avaliado para verificar a variação da resposta em deformação em função do tamanho e da posição da trinca. A teoria apresentada se mostrou eficiente tanto na baixa quanto em altas frequências.

Palavras chave: Deformação dinâmica; Método do elemento espectral; Análise Modal da Deformação; Srain FRF.

Abstract

DYNAMIC STRAIN OF A EULER-BERNOULLI BEAM STRAIN USING THE SPECTRAL ELEMENT METHOD

Author: Thiago Pereira e Silva

Supervisor: Dra. Marcela Rodrigues Machado, Univ (ENM/ UnB)

Master in Mechanical Sciences

Brasília, 2019

In the structures, machines and products designed, the dynamic behaviour knowledge is fundamental. Thus, computational simulations and/experimental tests are realised in an attempt to verify the dynamic properties of the system. In the experimental and simulations tests, the dynamic analyses are performed in function of the excitation frequency, and the displacements. In some cases, i.e. in fatigue tests, the dynamic strain is an essential parameter to be estimated. In the literature, the obtention of the dynamic strain is based on the theoretical and experimental modal analysis. In this work, the dynamic deformation of a Euler-Bernoulli beam is obtained directly through the spectral element (SEM) method. The results are generated by the strain frequency response function (SFRF) where the dynamic properties are verified. The mechanical beam characteristics are used to correlate the displacement and the strain, being implemented inner of an element wave solution in the dynamic stiffness matrix assemble. The obtained results are validated by comparing them with a study present in the literature and with experimental data. A cracked element is evaluated to verify the strain response in function of the crack size and position. The theory presented was efficient in both low and high frequencies.

Key-words: Dynamic Strain; Spectral Element Method; Strain Modal Analysis; Strain FRF.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | Objetivos | 2 |
| 1.2 | Organização do trabalho | 2 |
| 1.3 | Metodologia | 3 |
| 1.4 | Contribuições | 4 |
| 1.4.1 | Proposição da resposta dinâmica diretamente em deformação através da SFRF | 4 |
| 1.4.2 | Análise através da deformação dinâmica de um elemento de viga de Euler-Bernoulli com a presença de trinca | 4 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 6 |
| 3 | ELEMENTO ESPECTRAL APLICADO À VIGAS | 11 |
| 3.1 | Deformação e curvatura | 11 |
| 3.2 | Equilíbrio | 13 |
| 3.3 | Análise espectral em viga | 14 |
| 3.4 | Formulação geral do elemento espectral | 17 |
| 3.4.1 | Elemento espectral de viga - relação entre força e deslocamento | 19 |
| 3.4.2 | Elemento espectral de viga - relação entre força e deformação | 21 |
| 3.4.3 | Elemento espectral de viga com uma trinca não propagante para o deslocamento-força | 23 |
| 3.4.3.1 | Flexibilidade no local da trinca | 26 |
| 3.4.4 | Elemento espectral de viga com uma trinca não propagante para a deformação-força | 27 |
| 4 | ANÁLISE MODAL DE DEFORMAÇÃO | 30 |
| 4.1 | Análise modal de uma viga | 31 |
| 4.1.1 | Ortogonalidade dos modos | 34 |
| 4.1.2 | Vibração forçada | 36 |
| 4.1.3 | Função de resposta em frequência | 37 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.2 | Análise modal de deformação e obtenção da função de resposta em frequência da deformação (SFRF) | 38 |
| 4.2.1 | Função de resposta em frequência de deformação | 38 |
| 5 | RESULTADOS NUMÉRICOS E EXPERIMENTAIS | 40 |
| 5.1 | Análise da viga através da FRF de deslocamento | 40 |
| 5.2 | Análise da viga através da FRF de deformação (SFRF) | 43 |
| 5.3 | Validação numérica e experimental | 46 |
| 5.3.1 | Validação numérica | 47 |
| 5.3.2 | Validação experimental | 49 |
| 5.4 | Análise da deformação dinâmica da viga trincada | 56 |
| 5.5 | Considerações finais | 59 |
| 6 | CONCLUSÃO | 61 |
| 6.1 | Trabalhos Futuros | 62 |
| 6.2 | Publicações | 62 |
| | REFERÊNCIAS | 63 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1.1 – Esquema mostrando a formulação da FRF e da SFRF via SEM | 4 |
| Figura 3.1 – Deflexão e rotação de viga bi-apoiada com cargas pontuais | 12 |
| Figura 3.2 – Viga delgada em flexão e diagrama de corpo livre | 13 |
| Figura 3.3 – Relação do espectro: Número de ondas (k) versus frequência para raízes reais e imaginárias | 16 |
| Figura 3.4 – Relação de dispersão: Velocidade de fase (c) e de grupo (c_g) versus frequência. | 16 |
| Figura 3.5 – Elemento espectral de viga de dois nós como dois GDLs relacionados ao deslocamento e duas forças por nó. | 20 |
| Figura 3.6 – Elemento espectral de viga de dois nós como dois GDLs relacionados à deformação e duas forças por nó. | 22 |
| Figura 3.7 – Elemento espectral de viga trincado de dois nós como dois GDLs relacionados ao deslocamento e duas forças por nó. | 24 |
| Figura 3.8 – Secção transversal da viga trincada na posição da trinca. | 27 |
| Figura 3.9 – Elemento espectral de viga trincado de dois nós como dois GDLs relacionados à deformação e duas forças por nó. | 27 |
| Figura 5.1 – Verificação de reciprocidade nas extremidades do elemento através da FRF e fase. | 41 |
| Figura 5.2 – Esquema gráfico da fase, parte real e a parte imaginária da FRF (GAN-GULY; SCHMITZ, 2014)] | 41 |
| Figura 5.3 – Discretização do elemento de viga em 3 elementos e 4 nós, sendo que cada nó contém dois graus de liberdade, $\hat{\phi}$ rotação e \hat{v} deslocamento transversal. A medição e excitação se dá nos pontos P3 e P8. | 42 |
| Figura 5.4 – Verificação de reciprocidade nos pontos P3 e P8 através do uso da FRF e sua fase. | 43 |
| Figura 5.5 – Discretização do elemento de viga com a medição e excitação nos pontos P3 e P8. | 43 |
| Figura 5.6 – Verificação de reciprocidade nos pontos P3 e P5 através do uso da FRF e sua fase. | 44 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.7 – Verificação de reciprocidade da SFRF e fase com excitação e medição nas extremidades da viga. | 45 |
| Figura 5.8 – Verificação de reciprocidade da SFRF e fase nos pontos P3 e P8 (a), P3 e P5 (b). As mudanças de fases são identificadas com as linhas tracejadas que ligam os de picos de ressonância ou anti-ressonância . . . | 45 |
| Figura 5.9 – Comparação entre a FRF e a SFRF com pontos de medida e excitação em: (a) P3 e P8 (a); (b) P3 e P5. | 47 |
| Figura 5.10 – Viga com os pontos de posicionamento dos extensômetros e acelerômetros. | 47 |
| Figura 5.11 – Representação do primeiro ao sexto modo de vibração e suas respectivas frequências naturais. Deformação ϕ_ϵ e deslocamento ϕ | 48 |
| Figura 5.12 – Comparação das SFRFs geradas através do SEM e da análise modal, considerando os pontos de excitação e medição sendo P3 e P8, (a) e P3 e P5, (b) | 49 |
| Figura 5.13 – Comparação das FRFs geradas através do SEM e da análise modal, considerando os pontos de excitação e medição sendo P3 e P8, (a) e P3 e P5, (b) | 49 |
| Figura 5.14 – Comparação das SFRFs obtidas nos pontos P3 e P8 através do SEM, análise modal e experimental (experimento realizado por Santos et al. (2015)). | 50 |
| Figura 5.15 – Comparação das SFRFs obtidas nos pontos P3 e P5 através do SEM, análise modal e experimental (experimento realizado por Santos et al. (2015)). | 50 |
| Figura 5.16 – Geometria e dimensões do corpo de prova (mm). | 52 |
| Figura 5.17 – Configuração real e esquemática da bancada experimental. | 53 |
| Figura 5.18 – Medida da deformação no domínio do tempo (esquerda) e da SFRF (direta) no ponto B. | 53 |
| Figura 5.19 – Medida da deformação no domínio do tempo (esquerda) e da SFRF (direta) no ponto M. | 53 |
| Figura 5.20 – Medida da deformação no domínio do tempo (esquerda) e da SFRF (direta) no ponto H. | 54 |
| Figura 5.21 – Modelo da amostra com a conexão do shaker. | 54 |
| Figura 5.22 – Comparação das SFRFs experimental e numérica gerada com o SEM medidas no ponto B. | 55 |
| Figura 5.23 – Comparação das SFRFs experimental e numérica gerada com o SEM medidas no ponto M. | 55 |
| Figura 5.24 – Comparação das SFRFs experimental e numérica gerada com o SEM medidas no ponto H. | 55 |
| Figura 5.25 – Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 10% de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura. | 56 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.26–Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 30%de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura. | 57 |
| Figura 5.27–Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 50% de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura. | 58 |
| Figura 5.28–Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 70% de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura. | 59 |

Lista de Tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 1 – Modos de vibração e suas respectivas frequências naturais utilizando a SFRF gerada através do SEM. | 46 |
| Tabela 2 – Comparação entre as frequências de ressonância encontradas através dos métodos SEM e experimento com a indicação de erro percentual. | 51 |
| Tabela 3 – Comparação entre as frequências de ressonância encontradas através dos métodos SEM e AME com a indicação de erro percentual. | 51 |

Lista de Abreviaturas e Siglas

| | |
|-------------|---|
| <i>SEM</i> | Método do elemento espectral (<i>Spectral Element Method</i>) |
| <i>SFRF</i> | Função resposta em frequência da deformação (<i>Strain Frequency Response Function</i>) |
| <i>SFRF</i> | Função resposta em frequência do deslocamento (<i>Displacement Frequency Response Function</i>) |
| <i>FRF</i> | Função resposta em frequência da deformação (<i>Strain Frequency Response Function</i>) |
| <i>DFT</i> | Transformada Discreta de Fourier (<i>Discret Fourier Transform</i>) |
| <i>FFT</i> | Transformada Rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>) |
| <i>FEM</i> | Método dos Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>) |
| <i>BEM</i> | Método dos Elementos de Contorno (<i>Boundary Element Method</i>) |
| <i>DFRF</i> | Função resposta em frequência do deslocamento (<i>Displacement Frequency Response Function</i>) |
| <i>GLL</i> | Pontos de Gauss-Lobatto-Legendre |
| <i>KL</i> | Decomposição espectral de Karhunen-Loève |
| <i>PC</i> | Cristais fotônicos (<i>crystal phononic</i>) |
| <i>AME</i> | Análise modal experimental |
| <i>AMO</i> | Análise modal operacional |

Lista de Símbolos

| | |
|-----------------|--|
| A | Área [N/m^2] |
| ρ | Densidade [kg/m^3] |
| M | Momento fletor [$N.m$] |
| V | Esforço cortante [$N.m$] |
| κ | Raio de curvatura [m] |
| ε_m | Deformação estática de um elemento |
| σ_m | Tensão normal estática de um elemento [Pa] |
| σ_x | Tensão normal no eixo x de uma viga [Pa] |
| E | Módulo de elasticidade [Pa] |
| c | Distância entre a linha neutra e a superfície da viga [Pa] |
| I | Momento de inércia [m^4] |
| v | Deslocamento vertical da viga [m] |
| ϕ | Rotação em um ponto qualquer da viga [rad] |
| q | Carga externa [N] |
| \hat{v} | Coefficiente de Fourier aplicado ao deslocamento |
| ω_n | Frequência natural [Hz] |
| β | Modos de propagação |
| k | Número de ondas |
| c_g | Velocidade de grupo [m/s] |
| \mathcal{L} | Operador diferencial linear |
| \mathcal{M} | Operador Inercial |

| | |
|-----------------------|--|
| \mathbf{u} | Vetor de deslocamento [m] |
| \mathbf{p} | Vetor de cargas externas [N] |
| \mathbf{P} | Componentes espectrais das forças externas [N] |
| \mathbf{U} | Componentes espectrais dos campos de deslocamentos [N] |
| ϕ_i | Vetor de modo normalizado |
| L_{GB} | Operador diferencial linear para as condições de contorno |
| N | Função de forma dinâmica |
| \mathbf{d} | Vetor de graus de liberdade nodais |
| \mathbf{a} | Vetor de constantes |
| L_{NB} | Operador diferencial linear para as condições naturais |
| f | forças nodais [N] |
| S | Matriz de rigidez dinâmica |
| S_ϵ | Matriz de rigidez dinâmica da deformação |
| S_c | Matriz de rigidez dinâmica da viga trincada |
| L | Comprimento total da viga [m] |
| L_1 | Comprimento parcial da viga do lado esquerdo [m] |
| L_2 | Comprimento parcial da viga do lado direito [m] |
| U | Deformação no local da trinca |
| K_I | Fator de intensividade de tensão |
| M_g | Momento de flexão no local da trinca [$N.m$] |
| b | Base da seção transversal da viga [m] |
| h | Altura da seção transversal da viga [m] |
| α | profundidade da trinca [m] |
| $\hat{\epsilon}$ | Deformação transversal na viga trincada |
| $\hat{\phi}^\epsilon$ | Rotação da seção transversal na viga trincada [rad] |
| $\hat{\epsilon}$ | Deformação transversal na viga trincada |
| $\hat{\epsilon}^l$ | Deformação transversal do lado esquerdo da viga trincada |

| | |
|-------------------------|--|
| $\tilde{\epsilon}^r$ | Deformação transversal do lado direito da viga trincada |
| y | Distância entre a linha neutra e um ponto qualquer no eixo transversal da viga [m] |
| \mathbf{S}_c^ϵ | Distância entre a linha neutra e um ponto qualquer no eixo transversal da viga |
| T | Solução harmônica no tempo |
| C_n | Constantes determinadas pelas condições de contorno |
| Φ | Vetor de modos normais |
| Φ^ϵ | Vetor de modos normais da deformação |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| α | Matriz da FRF |
| α^ϵ | Matriz da SFRF |
| Y | Matriz da mobilidade |
| A | Matriz da aceleração |

1 Introdução

No desenvolvimento de um projeto mecânico devem ser consideradas além das cargas estáticas, as solicitações dinâmicas em que o produto, máquina ou estrutura estará exposta. O comportamento dinâmico de cada elemento é dependente das cargas, condições de contorno, de suas propriedades geométricas e mecânicas. Assim, é imprescindível um estudo dinâmico na fase de projeto para evitar que vibrações excessivas gerem problemas estruturais e a redução da vida útil do sistema.

Estudos desenvolvidos visando a análise do comportamento dinâmico estrutural, abordando desde de elementos estruturais simples, tais como viga, barra e eixo (DOYLE, 1997)(KRAWCZUK et al., 2006), à elementos mais elaborados, como vigas de materiais compósitos, materiais inteligentes (*smart materials*)(LEE, 2004)(GOPALAKRISHNAN et al., 2005), estruturas, máquinas, dentre outros. Com o conhecimento do comportamento dinâmico, é possível verificar alterações de resposta ao se inserir ou identificar um dano no elemento, inclusive propriedades relacionadas ao fenômeno da fadiga. Tais variações são estudadas com o intuito de se entender o comportamento de um elemento com a presença de um dano (KRAWCZUK et al., 2003), levando assim a ações rotineiras como a o monitoramento da estrutura ou sistema, minimizando falhas repentinas ou colapsos estruturais repentinos.

Métodos matemáticos tem sido desenvolvidos para se realizar o estudo da resposta dinâmica dos elementos, permitindo estudar o comportamento sem a necessidade de testes experimentais destrutivos ou não destrutivos (GOPALAKRISHNAN et al., 2005). Como o estudo analítico se torna dispendioso com o aumento da complexidade da análise, métodos de aproximação são implementados e melhorados, tais como, o método dos elementos finitos (FEM), método dos elementos de contorno (BEM).

Dentre os métodos citados, o FEM e análise modal, vêm sendo utilizados comumente para estudos voltados à análise dinâmica, em alguns casos, um em junção com o outro. Tais métodos são utilizados por sua eficiência e assertividade nas respostas.

Existem algumas limitações quanto ao uso do FEM em estudos vibracionais, um deles é a perda de precisão em alta frequência. Neste caso, o SEM, que é um método oriundo do estudo da propagação de ondas, se destaca dos demais com uma alta precisão nas respostas em altas frequências de trabalho.

O SEM possibilita a análise do comportamento dinâmico do elemento estudado através da função de resposta em frequência-FRF, que pode ser entendida como a razão de amplitude e atraso de fase da resposta de um sistema para uma dada excitação harmônica. A partir da FRF podem ser extraídas as frequências de ressonância e naturais e amortecimento. Com proveito à estas qualidades, o presente trabalho objetiva-se em formular uma função de resposta em frequência da deformação (SFRF- strain FRF), onde as propriedades dinâmicas são extraídas diretamente da resposta em deformação. Tal proposição se deve à necessidade de se verificar o comportamento dinâmico em estudos diretamente ligados a deformação, por exemplo, o estudo vibracional da fadiga nos materiais.

O estudo do comportamento da deformação dinâmica de materiais através de sua formulação matemática, neste caso via SEM, é complementado com a realização de experimentos com extração de dados diretamente em deformação. O strain gauge é o principal sensor utilizado na medida de deformação, seja ela estática ou dinâmica. Sua utilização tem como vantagem o seu baixo peso em função dos demais sensores, permitindo medidas em frequências relativamente (acima de 20kHz) altas sem a necessidade de incorporar sua massa ao estudo (ROVŠČEK et al., 2013). Assim, a medida direta da deformação dinâmica utilizando o SEM pode ser uma ferramenta de auxílio, servindo como parâmetro à realização de experimentos.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é propor um método de estimação da deformação dinâmica de uma viga de Euler-Bernoulli através das SFRF utilizando o elemento espectral. Dentro deste podemos salientar os objetivos específicos tais quais:

- Formular a deformação dinâmica de um viga sem dano através do elemento espectral.
- Formular a resposta dinâmica da viga e validar a teoria proposta com trabalhos presentes na literatura e experimentalmente.
- Implementar a deformação dinâmica de um elemento espectral de viga com uma trinca não propagante;

1.2 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. No **capítulo 2** é realizada uma revisão bibliográfica, abordando os principais trabalhos e os campos trabalhados na área do tema abordado. Inicialmente abordando um contexto histórico, passando pelos principais trabalhos e por fim as atualidades. No **capítulo 3** é feita a formulação do método do elemento espectral (SEM) para um elemento estrutural geral inicialmente,

depois é formulado o elemento espectral para uma viga de Euler-Bernoulli, e por fim uma viga com trinca não propagante e tratada. A análise modal teórica é fundamentada no **capítulo 4**, com o intuito de demonstrar a base teórica utilizada pelo método que é usado como validação da formulação proposta via SEM. Já no **capítulo 5** são demonstrados os resultados obtidos com a simulação numérica da deformação de uma viga via SEM. Os resultados obtidos são comparados com um trabalho encontrado na bibliografia, com mesmos parâmetros e características. No final do capítulo 5 é feita uma comparação dos resultados numéricos com um experimento realizado. Finalizando, o **capítulo 6** contém as conclusões do trabalho e as sugestões para a continuidade do tema tratado nessa dissertação.

1.3 Metodologia

A formulação da deformação dinâmica da viga de Euler-Bernoulli é realizada via SEM, iniciando-se pela modelagem do elemento estrutural a ser estudado Fig.[1.1]. O primeiro passo realizado é o equacionamento matemático da resposta em função de uma solicitação externa variante no tempo, chegando à equação da onda da estrutura. A partir da equação da onda, é possível utilizar os vários métodos citados anteriormente para realizar a análise dinâmica do elemento. O segundo passo é fazer a transição do domínio do tempo para o domínio da frequência, chegando ao final desta etapa na análise espectral. Com as propriedades espectrais já definidas, a terceira parte é formular a matriz de rigidez global a partir dos graus de liberdade, cargas externas, esforços internos e condições de contorno. Com a matriz de rigidez global, é possível gerar a FRF do elemento a ser estudado através da relação energética entre a força e o deslocamento.

Para realizar a transferência da resposta em deslocamento para a deformação é necessário buscar parâmetros na mecânica dos materiais, onde são correlacionados o deslocamento e a deformação. Tais parâmetros são aplicados na segunda parte da formulação do SEM para deslocamento. A partir deste ponto, a montagem da matriz de rigidez se dá já com a análise em função da deformação, chegando assim a função resposta em frequência da deformação, ou em inglês, SFRF. A esquematização da formulação é dada na (Figura 1.1)

Dada a teoria, é realizada a validação experimental utilizando respostas encontradas no trabalho do (SANTOS et al., 2015) e através de dados oriundos de experimentos realizados no Laboratory of Mechanic of Normandy (LMN) - INSA de Rouen. Para correlacionar o estudo ao estudo de elementos danificados é feita uma análise de uma viga com uma trinca não propagante.

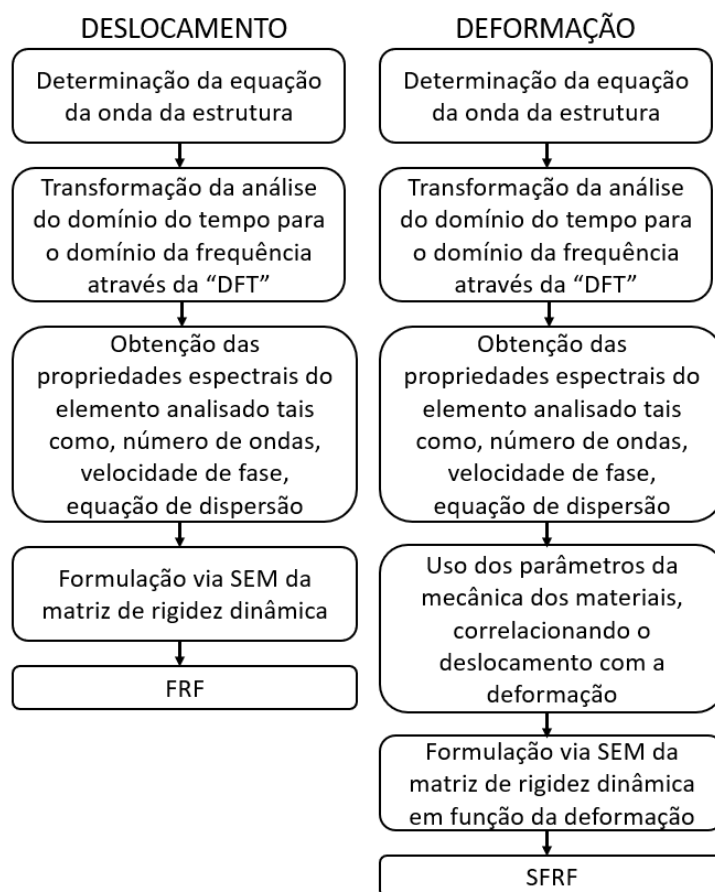


Figura 1.1 – Esquema mostrando a formulação da FRF e da SFRF via SEM

1.4 Contribuições

1.4.1 Proposição da resposta dinâmica diretamente em deformação através da SFRF

O presente trabalho propõe a determinação da deformação dinâmica utilizando o SEM. Tal abordagem poderá ser utilizada como uma ferramenta para estudos voltados à integridade estrutural, com proveito à determinação direta da deformação dinâmica via SEM através da SFRF. O método também será útil em estudos do comportamento dinâmico da deformação.

1.4.2 Análise através da deformação dinâmica de um elemento de viga de Euler-Bernoulli com a presença de trinca

Realização da análise de uma viga com a presença de trinca utilizando o SEM através da SFRF. Verificação do comportamento dinâmico do elemento com a presença de uma trinca, observando a resposta em função do tamanho e da posição da trinca. Tal análise pode ser aproveitada em estudos correlacionados à fadiga, utilizando as SFRFs.

A abordagem ao elemento trincado neste trabalho é somente com referência a uma trinca de tamanho e posição conhecidas, não sendo utilizados quaisquer métodos de detecção ou identificação de trincas. Assim, fica em aberto para trabalhos futuros o uso da formulação realizada neste trabalho como ferramenta para abordagens mais específicas envolvendo um elemento trincado.

2 Revisão Bibliográfica

A história da análise espectral, que também é conhecida como análise de Fourier ou análise no domínio da frequência, começou como o trabalho pioneiro "*Theorie analytique de la chaleur*" traduzida como "A teoria analítica do calor" publicada em 1822 por Joseph Fourier. Ele mostrou como uma infinita série de funções senos e cossenos podem ser usadas para analisar a condução de calor em sólidos. Devido à desconfiança no uso de séries, o método de Fourier não ganhou aceitação durante sua vida. Desde então, Dirichlet, Riemann e outros matemáticos publicaram trabalhos resolvendo algumas dúvidas sobre a validade das séries de Fourier e a análise espectral seguiu duas vias principais: A transformada contínua de Fourier e a transformada discreta de Fourier (DFT) (LEE, 2004).

Um dos problemas no uso da DFT é o seu elevado custo computacional. Através de algumas técnicas e ideias de reduzir o tempo computacional, apareceram no meio do século XX, em 1965, James W. Cooley (Pesquisador da IBM) e John W. Turkey (membro da faculdade de Princeton) desenvolveram um algoritmo computacional que é conhecido como *Fast Fourier transform*(FFT), traduzido como transformada rápida de Fourier. A FFT reduz o número de operações aritméticas para computação da DFT da ordem de N^2 para $N \log_2 N$, onde N é o número de amostras. A FFT fez a análise espectral altamente eficiente, com aplicações difundidas para o processamento de sinal digital e certas áreas de análises da engenharia (LEE, 2004).

V.Kolousek (1973) foi um dos primeiros a derivar a matriz de rigidez dinâmica para uma viga de Euler-Bernoulli. Przemieniecki (1985) introduziu a formulação das matrizes de massa e rigidez dependentes da frequência para os elementos de barra e viga em seu livro. O método do elemento espectral (SEM) foi proposto pela primeira vez em 1978, por Beskos e Narayanan (1978). A matriz de rigidez dinâmica foi formulada para elemento de viga de Euler-Bernoulli uniformes de dois nós no domínio da frequência usando a teoria (Discrete Fourier Transform - DFT) traduzido como transformada discreta de Fourier. Posteriormente, diferentes abordagens utilizando o SEM vem sendo realizadas desde sua formulação. De uma maneira geral, destacam-se a formulação de elementos básicos, tais como, barra, viga, eixo e placa;

Doyle (1997) publicou seu primeiro trabalho sobre o SEM utilizado a propagação de ondas longitudinais em barras. Ele foi o primeiro a chamar o método de '*spectral element method*'. Posteriormente, ele apresentou outros trabalhos até 1997. Os trabalhos compõem

o livro *Wave Propagation in Structures* que conta com várias abordagens de propagação de ondas utilizando o SEM, com teorias e aplicações, em elementos estruturais. Lee (2004) publicou um livro sobre o SEM, contendo um extenso estudo das teorias e da variação de novas aplicações, tais como, compósitos laminados, detecção de dano, não tratadas em Doyle (1997). Gopalakrishnan et al. (2005) publicou um livro com foco principal no comportamento das ondas em materiais compósitos, meios não homogêneos e controle de vibração ativa. Recentemente, Ostachowicz (2008) apresenta uma abordagem sobre o monitoramento de integridade estrutural em estruturas utilizando o SEM.

Com foco no estudo de estruturas danificadas, Krawczuk (2002) e Krawczuk et al. (2004) demonstram o uso da abordagem de propagação de ondas combinada com um algoritmo genético e a técnica do gradiente para detecção de danos em estruturas do tipo de viga e de placa. Krawczuk et al. (2003) apresenta um novo elemento espectral para uma viga de Timoshenko trincada para análise de propagação de ondas elásticas e modais. A influência dos parâmetros da trinca, especialmente a mudança de localização, na propagação de ondas é avaliada. Uma análise adequada das respostas obtidas permite a indicação da localização da trinca de uma maneira precisa. Palacz e Krawczuk (2002) introduz um novo elemento espectral de barra para detecção de dano. A abordagem proposta trata o método do elemento espectral como um principal meio de solucionar problemas de propagação de ondas em estruturas. A influência do crescimento da trinca para a propagação de ondas também é avaliado. Uma outra vertente do elemento espectral é o método do elemento espectral no domínio do tempo (SFEM) proposto por Pantera (1984). Peng et al. (2009) apresenta uma aplicação tridimensional do SFEM para problemas de propagação de ondas em estruturas de placas para detecção de danos. A excelente característica do SFEM é que a matriz de massa é diagonal devido a escolha da função de interpolação de Lagrange, suportada nos pontos de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) em conjunção com a regra da integração. Sendo assim, o cálculo numérico pode ser significativamente eficiente em comparação com o método dos elementos finitos clássicos (FEM).

O uso do SEM em estudos do comportamento dinâmico de materiais compósitos pode ser verificado em Kudela et al. (2007) que demonstra resultados da simulação numérica da propagação de ondas elásticas transversais correspondentes ao modo A0 de ondas Lamb em um material compósito utilizando o método do elemento espectral. As velocidades das ondas transversais em materiais compósitos dependem da orientação e da fração de volume relativo de reforço. Park e Lee (2012) deriva as equações de movimentos axial-flexional assim como as condições de contorno para uma viga de compósito inteligente pelo uso dos princípios de Hamilton com multiplicadores de Lagrange. Um modelo de elemento espectral é formulado no domínio da frequência. Através de alguns exemplos, a exatidão do modelo de elemento espectral é verificado por comparação com soluções encontradas com modelo convencional de elementos finitos. Lee et al. (2013) formulam a contração axial-flexional-cisalhante-lateral acopladas as equações diferenciais e movimento. A viga compósito utilizando material inteligente é representada por um modelo de viga

de Timoshenko adotando a teoria de deformação de primeira ordem (FSDT) para a viga base de compósito laminado. A deformação axial é formulada levando em conta os efeitos da contração lateral pela adoção do conceito de barra de Mindlin-Herrmann. O método do elemento espectral é então formulado pela abordagem variada das equações de movimento acopladas transformadas para o domínio da frequência via transformada discreta de Fourier. A alta exatidão do SEM é verificada comparando com métodos de alta ordem: métodos dos elementos finitos e o pacote de FEA do *software* comercial ANSYS. Assim, as características dinâmicas e de ondas das vigas de compósito inteligente são investigadas através de estudos numéricos. [Park e Lee \(2015\)](#) Apresenta um modelo de elemento espectral no domínio da frequência para placa de compósito laminado simétrica que tem dimensões finitas nas duas direções ortogonais x e y. A exatidão do modelo de elemento espectral apresentado é verificado se comparando com resultados obtidos por dois métodos distintos: a teoria exata disponível na literatura e pelo método dos elementos finitos padrão.

O tratamento probabilístico de incertezas usando o SEM é recente e dentre o primeiros trabalhos nesta abordagem foram proposto por [Adhikari e Friswell \(2010\)](#) e [Ajith e Gopalakrishnan \(2010\)](#). [Fabro et al. \(2010\)](#) modela um elemento de barra com uma trinca realizando uma abordagem relacionada à incertezas em parâmetros através do uso do SEM. É construído um modelo estocástico pela abordagem probabilística paramétrica. O modelo probabilístico é construído diretamente para a variável de interesse. No estudo são realizadas simulações de Monte Carlo para estimar os envelopes da FRF. [Machado e Santos \(2015\)](#) examinam a influência dos parâmetros na resposta da propagação de ondas em altas frequências para uma estrutura de viga danificada no contexto de confiabilidade estrutural. No trabalho é mostrado os efeitos dos parâmetros de incertezas da resposta dinâmica da viga devido a uma carga impulsiva. São realizados exemplos numéricos em uma viga em vibração de flexão com parâmetros aleatórios para verificar a eficiência computacional do estudo. [Machado et al. \(2017\)](#) abordam o problema de detecção de danos sob a presença de parâmetros aleatórios distribuídos espacialmente. São propostas equações explícitas para localizar e avaliar o dano baseadas na formulação do SEM. São analisados exemplos numéricos em uma estrutura não danificada e uma estrutura danificada sob vibração axial com parâmetros distribuídos. [Machado et al. \(2018\)](#) consideram as características distribuídas e não homogêneas para realização de um ajuste de modelo. Os parâmetros são considerados como campos aleatórios correlacionados espacialmente e expandidos em uma decomposição espectral de Karhunen-Loève (KL). Usando a expansão KL, a matriz de rigidez dinâmica espectral da viga é expandida como uma série em termos de parâmetros discretizados, que pode ser estimada usando técnicas ajuste de modelos baseados na sensibilidade. [Machado et al. \(2018\)](#) unifica o SEM aos métodos estocásticos, utilizando o SEM com aleatoriedades distribuídas visando modelar danos estruturais. Uma matriz massa e uma de rigidez estocástica dependente da frequência é formulada para vibração de flexão. As expressões de forma fechada são derivadas pela expansão de KL,

exemplos numéricos são usados para abordar a metodologia proposta.

Pode-se observar também a formulação do SEM para problemas diversos relacionados à dinâmica estrutural e propagação de ondas. Fang et al. (2017) realiza uma investigação teórica e experimental dos *band-gap* e propriedades de transmissão de uma viga de cristal phononic (PC) imersa em água, utilizando o SEM para a análise teórica onde as características de cargas hidrodinâmicas são consideradas. Lee (2018) propõe o uso do SEM para análises de vibração em placas finas sujeitas a uma força de ponto móvel. A alta exatidão e a eficiência computacional da técnica de análise de vibração baseada no SEM é verificada pela comparação com outros métodos bem estabelecidos, tal como, solução analítica, método da transformada integral, método dos elementos finitos e o pacote de elementos finitos do *software* comercial ANSYS. Zhu et al. (2018) aborda o problema de vibração tridimensional em tubos transportando fluidos, propondo um método do elemento espectral para demonstrar as características dinâmicas do elemento estudado. O método é validado pela comparação com resultados numéricos encontrados na literatura de um tubo ramificado em T, através do uso de um software de elementos finitos. Em seu estudo é verificada as vantagens em eficiência e exatidão do SEM sobre FEM. Kiryu e Gan (2018) investiga as características vibracionais de uma pista pavimentada rígida que é modelada como uma placa fina retangular isotrópica. O SEM é utilizado para formular os problemas de vibração livre da placa. Exemplos numéricos realizados para demonstrar a efetividade, eficiência e exatidão do SEM usando um elemento, que ao contrário do FEM, o SEM extrai soluções exatas das frequências naturais das placas sem a necessidade do procedimento de discretização do elemento.

Além de ser uma ferramenta eficiente na análise estrutural o SEM se dissemina à outras áreas, como por exemplo a sismologia. Seriani e Priolo (2011) apresentam o SEM como ferramenta para estudo da propagação de ondas acústicas em meios heterogêneos realizando uma simulação numérica para uma estrutura geológica típica. Tsuboi (2014) apresenta as principais propriedades do SEM relacionadas à cálculos numéricos de sismogramas sintéticos para modelos tridimensionais da terra. No trabalho são apresentadas duas simulações em grande escala de um modelo realista da terra.

Os estudos citados utilizam o SEM tendo suas formulações em função do deslocamento. Para este trabalho é proposta uma abordagem em função da deformação. Sendo assim, pesquisas foram realizadas e não se encontrou trabalhos que abordavam a deformação dinâmica estrutural utilizando o SEM. A deformação dinâmica é formulada utilizando-se de outros métodos, como por exemplo a análise modal teórica e experimental.

Como exemplo de estudos da deformação dinâmica utilizando a análise modal teórica e experimental tem-se, Bernasconi e Ewins (1989a) mostram como o teste modal utiliza ambos elementos, *strain gauges* e transdutores de deslocamento para determinar os campos de deslocamentos modais. Okubo e Yamagushi (1995) previram a distribuição da deformação dinâmica sob condições de operação, usando o deslocamento para a matriz de transformação de deformação. Neste caso, a matriz de transformação foi obtida pelos

modos de deslocamento e deformação, que foram identificados com o uso de acelerômetros e *strain gauges*, respectivamente. Yam et al. (1996) realizou um estudo derivando a relação entre os modos de vibrar considerando o deslocamento e a deformação, para uma estrutura sujeita à vibração. O estudo foi baseado na ideia que quando uma estrutura está sujeita a carga dinâmica, sua resposta em deformação pode ser expressa pela superposição das contribuições dos "modos de deformação naturais". O FEM foi utilizado para relacionar o *Strain Frequency Response Function* (SFRF), traduzido como função resposta em frequência da deformação, com o *Displacement Frequency Response Function* (DFRF). Attilio et al. (1995) apresentou um procedimento para determinação de deslocamentos em qualquer ponto dado em um corpo em vibração baseado no uso de *strain gauges*. Em seu trabalho, a simulação numérica foi validada com a realização de um experimento, onde foi utilizada uma viga engastada que foi instrumentada e testada em diferentes condições de carga. Santos et al. (2015) realiza o estudo da SFRF de uma viga utilizando a Análise Modal Experimental (AME). É realizado um experimento onde se é verificado a reciprocidade através da SFRF, bem como a identificação dos modos de vibração e frequências naturais do elemento testado. Assim, na literatura são demonstradas pesquisas voltadas à SFRF utilizando a análise modal como base teórica, porém não se encontrou pesquisas relacionadas ao SEM.

3 Elemento Espectral aplicado à vigas

O método do elemento espectral se assemelha ao método de elementos finitos, porém com duas importantes ressalvas: a formulação do método do elemento espectral (SEM) é escrita no domínio da frequência; e a função de interpolação do elemento é a solução analítica da equação da onda. Baseado na última característica o número de elementos requerido para um modelo espectral coincidirá com o número de descontinuidades na estrutura. Assim, o SEM provê soluções exatas no domínio da frequência utilizando poucos elementos (LEE, 2004). O método do elemento espectral foi formulado para elementos tais como, barra, viga, placa (DOYLE, 1997), tubos, rotores, estruturas com multicamadas, materiais inteligentes (LEE, 2004), materiais compósitos (GOPALAKRISHNAN et al., 2005). Neste trabalho, o foco é vigas de material homogêneo. Inicialmente abordando a teoria de viga sem dano e com um dano do tipo de trinca, ambas para obtenção do deslocamento e deformação.

3.1 Deformação e curvatura

Na literatura se destacam duas teorias que abordam o elemento de viga, as teorias de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko. Em 1744 Leonard Euler abordou pela primeira vez a vibração em vigas delgadas, com vários tipos de condições de contorno. Daniel Bernoulli deu continuidade em seu trabalho, surgindo assim a abordagem conhecida como a teoria de Euler-Bernoulli. Stephen Timoshenko (1878-1972) realiza a abordagem ao elemento de viga considerando a inércia de rotação e a deformação por cisalhamento, teoria conhecida também como viga grossa (RAO, 2008b). Neste trabalho a teoria de Euler-Bernoulli será utilizada.

De acordo com Beer e Russell (2012) a teoria de viga de Euler-Bernoulli é válida realizando duas hipóteses, quando o material esteja dentro do regime linear elástico de acordo com a lei de Hooke e quando os planos das seções transversais permanecem planos e perpendiculares ao eixo neutro. Segundo os autores a deformação da viga provocada pelo momento fletor M é medida pela *curvatura* da superfície neutra. A curvatura é definida

como o inverso do raio de curvatura κ , e pode ser obtida como,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\epsilon_m}{c}, \quad (3.1)$$

Adotando a lei de Hooke para o regime elástico temos que $\epsilon_m = \sigma_m/E$, e seguindo a equação de tensão normal para vigas onde $\sigma_x = -M(x)c/I$. Incluindo os termos de tensão e deformação na Eq.[3.1] temos

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{M(x)c}{I}, \quad (3.2)$$

onde E é o módulo de Young, I o momento de inércia e c a maior distância da superfície neutra a extremidade da viga analisada. Reescrevendo a Eq.[3.2] tem-se,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{M(x)}{EI}, \quad (3.3)$$

Da teoria das curvas planas (VEBLEN, 1905), adota-se que um ponto $Q(x, y)$, vide Fig.[3.1], o inverso do raio de curvatura pode ser expresso como,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\frac{d^2v(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.4)$$

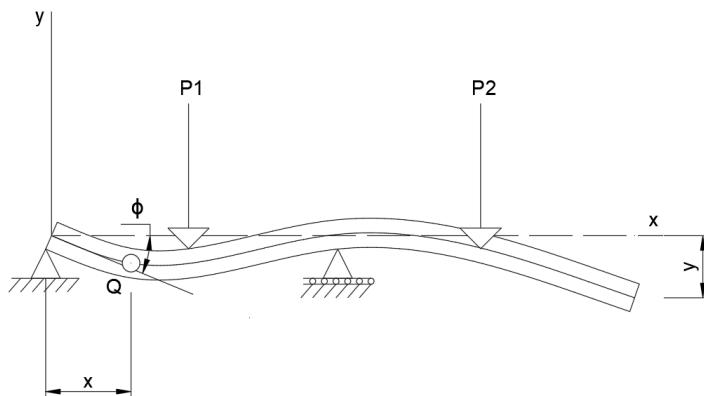


Figura 3.1 – Deflexão e rotação de viga bi-apoiada com cargas pontuais

No caso da linha elástica de uma viga, a inclinação $dv(x)/dx$ é muito pequena, e seu quadrado desprezível comparado com uma unidade. Sendo assim o inverso do raio de curvatura será

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{d^2v(x)}{dx^2}. \quad (3.5)$$

substituindo $1/\kappa$ da Eq.[3.5] em Eq.[3.1], sendo esta a equação que governa a linha elástica, a equação diferencial linear de segunda ordem é obtida como

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (3.6)$$

3.2 Equilíbrio

Para estabelecer o equilíbrio da viga, considera-se um elemento infinitesimal com todos os esforços atuantes Fig.[3.2]. Os esforços em questão são as resultantes das tensões e um carregamento por unidade de comprimento (SAVI; PAULA, 2017). Segundo Rao (2008b) as equações de equilíbrio são obtidas considerando o equilíbrio na direção x para um elemento infinitesimal de viga delgada, ver Fig.[3.2]. Considere uma carga externa por

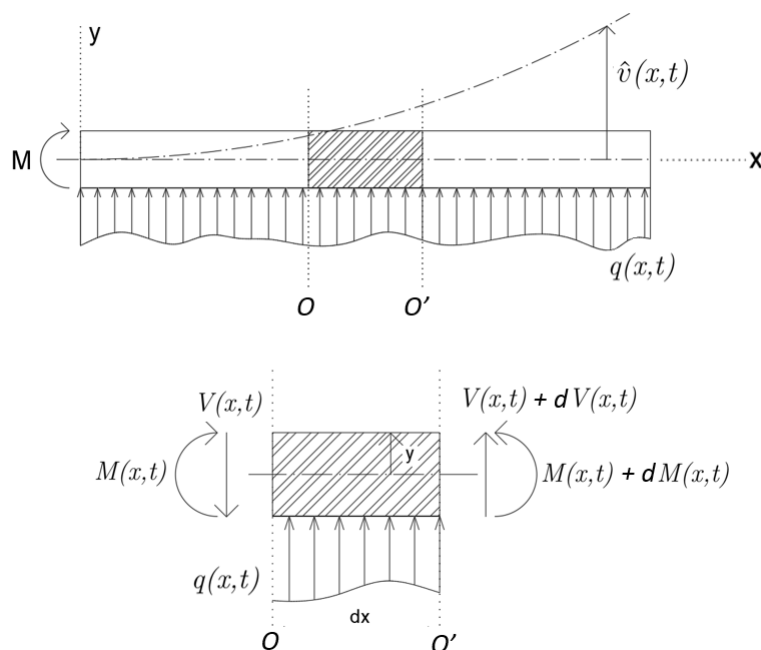


Figura 3.2 – Viga delgada em flexão e diagrama de corpo livre

unidade de comprimento $q(x, t)$ agindo na direção positiva de y em função do espaço x e do tempo t , o momento fletor ($M(x, t)$), e a força de cisalhamento ($V(x, t)$) também serão representados em função de x e t . A força de inércia que age no elemento é escrita como,

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t). \quad (3.7)$$

onde $v(x, t)$ a deflexão na direção y , ρ a densidade da massa e A a área da seção transversal da viga. Realizando a somatória de todas as forças internas e externas atuantes no elemento infinitesimal tem-se o equilíbrio das forças na direção y será

$$-(V + dV) + q(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t), \quad (3.8)$$

e a equação de equilíbrio em relação ao eixo z que passa pelo ponto O da Fig.[3.2] será expresso como,

$$(M + dM) - (V + dV)dx + q(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0, \quad (3.9)$$

onde

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \text{e} \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

Dividindo ambos os lados por dx , pode-se reescrever as equações 3.8 e 3.9 como,

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + q(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t), \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0, \quad (3.11)$$

Observando a Eq.[3.9], verifica-se a relação entre o momento fletor e o esforço de cisalhamento, utilizando tal relação reescreve-se a Eq.[3.10] da seguinte forma

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + q(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t), \quad (3.12)$$

onde a relação entre o momento fletor e a deflexão é dada pela Eq.[3.6], então a Eq.[3.12] pode ser escrita como,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = q(x, t). \quad (3.13)$$

Para uma viga uniforme a equação que governa o movimento dinâmico da vibração da viga é reescrita como

$$\frac{EI \partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = q(x, t). \quad (3.14)$$

Caso nenhuma força externa for aplicada, ou seja $q(x, t) = 0$, EI e ρA sejam assumidos constantes a Eq.[3.14] pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) + c^2 \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (3.15)$$

onde c é a velocidade da onda.

3.3 Análise espectral em viga

O objetivo fundamental da análise de propagação de onda em qualquer guia de onda é entender seu fenômeno físico. Para isso é requerido a solução da equação governante da viga (guia de onda que está sendo estudado), para que assim, possa ser usado para obter os parâmetros de onda, como o número de onda, a velocidades e outras características como a existência de frequências de corte, intervalos de banda, etc (GOPALAKRISHNAN et al., 2005). Para a obtenção dos parâmetros da onda, é necessário realizar uma análise espectral derivando a equação do movimento. A análise espectral produz duas relações distintas chamadas de relação do espectro e relação de dispersão, a primeira relaciona o número de onda versus a frequência e a segunda a velocidade de grupo com a frequência.

Considerando uma viga com propriedades constantes ao longo do comprimento, cuja equação do movimento é descrita pela Eq.[3.14]. Assumindo a solução espectral da forma

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^N \hat{v}(x, \omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad (3.16)$$

onde $v(x, t)$ o deslocamento transversal, $\hat{v}(x, \omega_n)$ é o coeficiente de Fourier limitado para $n = 0$ até o número de amostras N , ω_n é a frequência fundamental e t é o tempo. Substituindo a Eq.[3.16] na equação 3.14, considerando vibração livre e sem amortecimento e transformando a equação parcial em uma equação diferencial ordinária, chega-se a

$$EI \frac{d^4 \hat{v}(x, \omega_n)}{dx^4} - \omega_n^2 \rho A \hat{v}(x, \omega_n) = 0.$$

ou de forma simplificada como

$$\frac{d^4 \hat{v}(x, \omega_n)}{dx^4} - \beta^4 \hat{v}(x, \omega_n) = 0, \quad \beta^2 = \sqrt{\omega_n^2 \rho A / EI}. \quad (3.17)$$

A solução para a equação de quarta ordem pode ser obtida através de uma solução particular tal que

$$\frac{d^2 \hat{v}(x, \omega_n)}{dx^2} + \beta^2 \hat{v}(x, \omega_n) = 0, \quad \frac{d^2 \hat{v}(x, \omega_n)}{dx^2} - \beta^2 \hat{v}(x, \omega_n) = 0$$

Esta solução demonstra que a viga tem dois modos fundamentais. Desde que a equação tenha coeficientes constantes e a a solução geral do tipo $\hat{v}(x, \omega_n) = a e^{-ik(\omega_n)x}$, teremos a equação característica do numero de ondas dado como

$$k = \pm\beta, \quad \text{ou} \quad k = \pm i\beta. \quad (3.18)$$

onde

$$\beta = \sqrt{\omega_n} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4}.$$

As duas soluções encontradas para o número de ondas são também chamadas de modos propagantes e não-propagantes da viga. As duas raízes puramente reais (modo 1) são os modos propagantes. Enquanto que, as duas raízes puramente imaginárias (modo 2) são os modos evanescentes. De acordo com Doyle (1997) o comportamento do modo 2 é inteiramente imaginário para o caso não amortecido. Consequentemente não há comportamento de propagação para esse modo. Considerando somente o movimento da onda no modo 1, as velocidades de fase c e grupo c_g são dadas por,

$$c = \frac{\omega_n}{k} = \sqrt{\omega_n} \left[\frac{EI}{\rho A} \right]^{1/4}, \quad c_g = \frac{d\omega_n}{dk} = 2\sqrt{\omega_n} \left[\frac{EI}{\rho A} \right]^{1/4}. \quad (3.19)$$

A relação do espectro para a viga está representada nas Fig.[3.3]. O modo propagante (modo 1) mostra a viga com um comportamento dispersivo. Enquanto o modo 2 não é propagante pois é inteiramente imaginário em toda a banda de frequência. Uma vez

que não há a propagação no modo 2 a relação de dispersão da viga pode ser estimada considerando apenas o modo 1. Tanto a relação entre velocidade de grupo e frequência, quanto a relação da velocidade de fase com a frequência estão apresentados na Fig.[3.4]. Note que a velocidade de grupo é duas vezes a velocidade de fase e ambas as velocidades também apresentam um comportamento dispersivo.

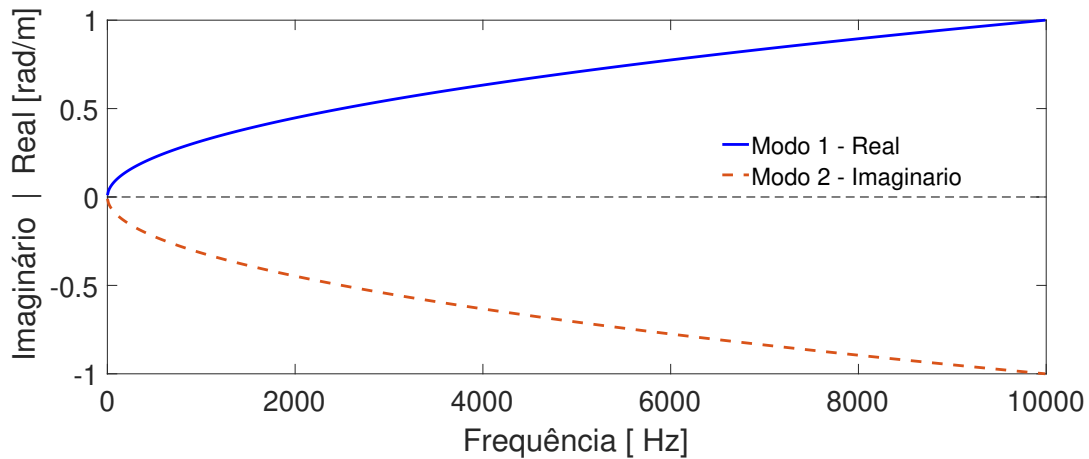


Figura 3.3 – Relação do espectro: Número de ondas (k) versus frequência para raízes reais e imaginárias

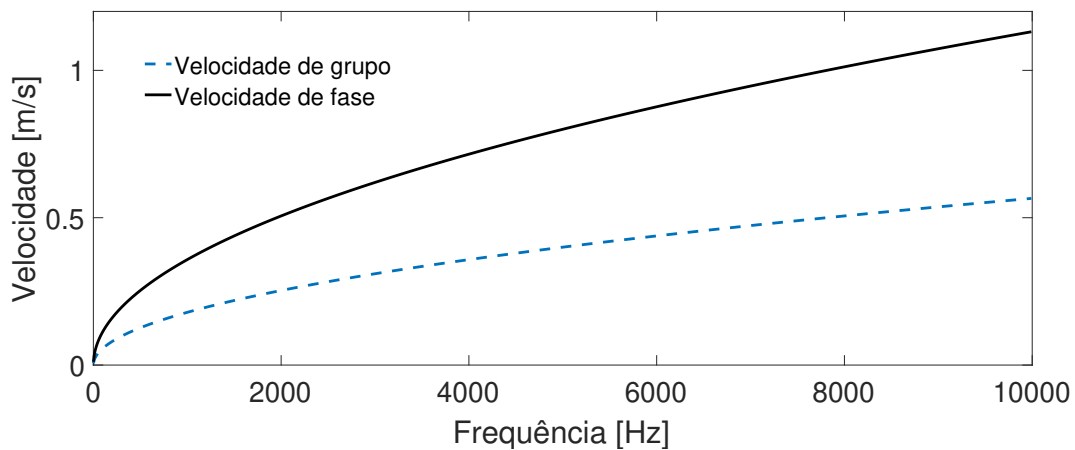


Figura 3.4 – Relação de dispersão: Velocidade de fase (c) e de grupo (c_g) versus frequência.

No comportamento dispersivo a velocidade de fase é uma função da frequência, $c = \frac{\omega_n}{k}$, tal comportamento é característico das ondas de flexão. É em casos como este que a abordagem espectral é mais benéfica. Assim, o tratamento no domínio da frequência é o cenário mais indicado para discutir as propriedades e comportamento de sistemas dispersivos.

Os números de ondas para a viga são quatro no total Eq.[3.18] permitindo assim

escrever a solução da propagação completa da onda de uma viga de comprimento L , como

$$\hat{v}(x) = a_1 e^{-ikx} + a_2 e^{-kx} + a_3 e^{-ik(L-x)} + a_4 e^{-k(L-x)}. \quad (3.20)$$

os coeficientes a_1 e a_2 são os coeficientes da onda incidente e a_3 e a_4 são os coeficientes de onda refletida. Estes podem ser determinados usando as condições de contorno do problema.

3.4 Formulação geral do elemento espectral

Doyle (1997) e Lee (2000) formularam o elemento espectral para uma estrutura utilizando os conceitos de equilíbrio e a compatibilidade com as soluções exatas da equação governante do movimento, que são diretamente relacionadas com as forças e os deslocamentos nodais. As equações governantes de movimento de uma estrutura podem ser representadas simbolicamente como,

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(x, t) + \mathcal{M}\ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \mathbf{p}(x, t), \quad (3.21)$$

sendo \mathcal{L} o operador estrutural diferencial linear no domínio do tempo t e coordenada espacial x , e \mathcal{M} o operador inercial. Os pontos (\cdot) denotam as derivadas em relação ao tempo, $\mathbf{u}(x, t)$ e $\mathbf{p}(x, t)$ são os vetores dos campos de deslocamento e de forças externas, respectivamente. Assumindo que as forças externas podem ser representadas na forma espectral por,

$$\mathbf{p}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.22)$$

onde $\mathbf{P}_n(x, \omega_n)$ são os componentes espectrais das forças externas $\mathbf{p}(x, t)$. A solução da Eq.[3.21] é representada da seguinte forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{U}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (3.23)$$

onde, $\mathbf{U}_n(x, \omega_n)$ os componentes espectrais dos campos de deslocamentos $\mathbf{u}(x, t)$. Substituindo as equações 3.23 e 3.22 na Eq.[3.21] e assumindo que os componentes espectrais $\mathbf{U}_n(x, \omega_n)$ e $\mathbf{P}_n(x, \omega_n)$ satisfaçam a Eq.[3.21] em cada frequência discreta ω_n , obtém-se

$$\mathcal{L}\mathbf{U}_n(x, \omega_n) - \omega_n^2 \mathcal{M}\mathbf{U}_n(x, \omega_n) = \mathbf{P}_n(x, \omega_n) \quad (3.24)$$

As funções de forma dependentes da frequência, que são denominadas de funções de forma dinâmica e são usadas para formular a matriz do elemento espectral, são obtidas da equação homogênea

$$\mathcal{L}\mathbf{U}_n(x) - \omega_n^2 \mathcal{M}\mathbf{U}_n(x) = 0 \quad (3.25)$$

A Eq.[3.25] vale para todas as frequências discretas e cada frequência discreta ω_n então se torna um parâmetro. Para brevidade, os subscritos n na Eq.[3.25] são omitidos,

$$\mathcal{L}\mathbf{U}(x) - \omega_n^2 \mathcal{M}\mathbf{U}(x) = 0 \quad (3.26)$$

Utilizando solução geral da Eq.[3.26] na forma,

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{c}e^{-ikx} \quad (3.27)$$

onde \mathbf{c} é um vetor de constantes e k é o número de onda. Substituindo a Eq.[3.27] em Eq.[3.26] temos um problema de autovalor,

$$\mathbf{A}(k, \omega)\mathbf{c} = 0 \quad (3.28)$$

que produz uma equação característica para o número de ondas na forma

$$k^p + \alpha_{(p-1)}(\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(\omega)k^{(p-2)} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (3.29)$$

A Eq.[3.29] é chamada de relação de dispersão ou relação do espectro. Assumindo que k_1, k_2, \dots, k_p são as raízes distintas da Eq.[3.29] em uma frequência discreta ω , vide secção 3.3. A associação do autovetor \mathbf{c}_i pode ser computada a partir da Eq.[3.28] como,

$$\mathbf{c}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = a_i \boldsymbol{\phi}_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3.30)$$

onde o autovetor \mathbf{c}_i é normalizado para que um componente do vetor normalizado $\boldsymbol{\phi}$ se torne unitário e os outros componentes são coletados como um vetor $\boldsymbol{\varphi}_i$. As constantes a_i são determinadas para satisfazer a associação das condições de contorno. Uma vez que as soluções próprias k_i e \mathbf{c}_i são obtidas para satisfazer o problema de autovalor na Eq.[3.28] a solução geral para Eq.[3.26] pode ser escrita como

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\phi}_i e^{-ik_i(\omega)x} a_i = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{a} \quad (3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(x, \omega) &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \dots \quad \phi_p] \boldsymbol{\Lambda}(x, \omega) \\ \boldsymbol{\Lambda}(x, \omega) &= \text{diag}[e^{-ik_i(\omega)x}] \\ \mathbf{a} &= \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_p\} \end{aligned}$$

Para um elemento finito de comprimento L , a Eq.[3.31] deve satisfazer as condições de contorno nos dois nós das extremidades $x = 0$ e $x = L$ dadas pelos deslocamentos, inclinações nodais e as forças espectrais nodais. Os deslocamentos e as inclinações são chamados geralmente de variáveis primárias e suas especificações no contorno constituem as condições geométricas de contorno. As variáveis primárias podem ser relacionadas ao campo de deslocamento na forma

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{L}_{GB}\mathbf{U}(X) \quad (3.32)$$

onde \mathbf{L}_{GB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno. Substituindo a Eq.[3.31] na Eq.[3.32] e considerando os graus de liberdade (GDL) nodais \mathbf{d} especificados nos dois nós finais do elemento finito dado, tem-se

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} D(x=0) \\ D(x=L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{GB}\mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \\ \mathbf{L}_{GB}\mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ x=L}} \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{a} \quad (3.33)$$

assim,

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega)^{-1} \mathbf{d} \quad (3.34)$$

Substituindo a Eq.[3.34] na Eq.[3.31] chega-se à

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(x, \omega) \mathbf{d} \quad (3.35)$$

onde $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \omega)$ é a função de forma dinâmica dada por

$$\mathbf{N}(x, \omega) = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (3.36)$$

As forças e momentos internos são geralmente chamadas de variáveis secundárias e suas especificações no contorno constitui as condições de contorno naturais. A resistência dos materiais provê a relação entre as variáveis secundárias e os campos de deslocamento na forma,

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{L}_{NB} \mathbf{U}(x) \quad (3.37)$$

As condições de contorno naturais são determinadas pelo operador diferencial linear \mathbf{L}_{NB} . Pela substituição da Eq.[3.35] na Eq.[3.37] e então considerando as forças nodais como f , pontuadas nas extremidades do elemento finito de dois nós, sendo assim tem-se

$$f = \begin{Bmatrix} -F(0) \\ +F(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega) \Big|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega) \Big|_{x=L} \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{S}(\omega) \mathbf{d} \quad (3.38)$$

onde,

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega) \Big|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB} \mathbf{N}(x, \omega) \Big|_{x=L} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (3.39)$$

com

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{NB} e(x, \omega) \Big|_{x=0} \\ +\mathbf{L}_{NB} e(x, \omega) \Big|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A matriz $\mathbf{S}(\omega)$ é a matriz de rigidez dinâmica exata dependente da frequência, que é denominada na literatura como matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral.

3.4.1 Elemento espectral de viga - relação entre força e deslocamento

O elemento estrutural de viga suporta dois movimentos, ou seja, os deslocamentos transversais \hat{v} e a rotação da seção transversal $\hat{\phi}$, onde a rotação é derivada da deformação transversal como $\hat{\phi} = \partial \hat{v} / \partial x$. As forças resultantes na viga são o cisalhamento \hat{V} e momento fletor \hat{M} , que também podem ser expresso em termos de deslocamento espectral transversal (DOYLE, 1997)

$$\hat{M} = EI \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} = EI \hat{v}''(x), \quad \hat{V} = -EI \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial x^3} = -EI \hat{v}'''(x) \quad (3.41)$$

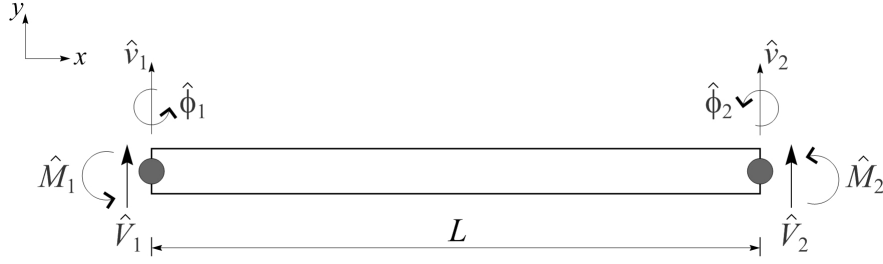


Figura 3.5 – Elemento espectral de viga de dois nós como dois GDLs relacionados ao deslocamento e duas forças por nó.

Os deslocamentos nodais \hat{v} e $\hat{\phi}$ e a forças nodais presentes na viga de comprimento L são apresentados na Fig.[3.5], esta possui dois nós com dois graus de liberdade e duas cargas nodais em cada nó.

A equação do movimento para este elemento é a apresentado na Eq.[3.17] e a solução no domínio da frequência como a função de interpolação é dado pela Eq.[3.20]. Separando os componentes da a solução como na Eq.[3.31] teremos

$$\hat{v}(x, \omega) = a_1 e^{-ikx} + a_2 e^{-kx} + a_3 e^{-ik(L-x)} + a_4 e^{-k(L-x)} = \mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{a} \quad (3.42)$$

onde

$$\mathbf{e}(x, \omega) = [e^{-ikx}, e^{-kx}, e^{-ik(L-x)}, e^{-k(L-x)}]$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

Os deslocamentos nodais espectrais e inclinações do elemento de viga finito podem ser relacionados ao campo de deslocamento como

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{v}(0) \\ \hat{v}'(0) \\ \hat{v}(L) \\ \hat{v}'(L) \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Substituindo a Eq.[3.20] no lado direito da Eq.[3.43] tem-se

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} e(0, \omega) \\ e'(0, \omega) \\ e(L, \omega) \\ e'(L, \omega) \end{Bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{H}_B(\omega) \mathbf{a} \quad (3.44)$$

onde

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}_B(\omega)^{-1} \mathbf{d} \quad (3.45)$$

sendo

$$\mathbf{H}_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^{-ikL} & e^{-kL} \\ -ik & -k & ie^{-ikL}k & e^{-kL}k \\ e^{-ikL} & e^{-kL} & 1 & 1 \\ -ie^{-ikL}k & -e^{-kL}k & ik & k \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

O campo de deslocamentos nodais do elemento de viga pode ser então representado em termos dos seus graus de liberdade, representados pelo vetor \mathbf{d} , e pela eliminação do vetor de constantes \mathbf{a} da Eq.[3.20] usando na Eq.[3.43], então

$$\hat{v}(x) = \underbrace{\mathbf{e}(x, \omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega)}_{\mathbf{N}_B} \mathbf{d} \quad (3.47)$$

onde \mathbf{N}_B é a função de forma do elemento espectral de viga (DOYLE, 1997; LEE, 2004). As forças e os momentos de flexão nodais espectrais definidos para a viga podem também ser relacionados às forças e momentos definidas pela na Eq.[3.41], por

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V(0) \\ -M(0) \\ V(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\hat{v}(0)''' \\ -\hat{v}(0)'' \\ \hat{v}(L)''' \\ \hat{v}(L)'' \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

As forças espectrais nodais (força de cisalhamento e momento fletor) para o lado esquerdo da viga teremos que $x = 0$ e para o direito $x = L$. Aplicando as condições de contorno na Eq.[3.48] isso será

$$\mathbf{f} = EI \begin{Bmatrix} -ik^3 & k^3 & ie^{-ikL}k^3 & -e^{-kL}k^3 \\ k^2 & -k^2 & e^{-ikL}k^2 & -e^{-kL}k^2 \\ ie^{-ikL}k^3 & -e^{-kL}k^3 & -ik^3 & k^3 \\ -e^{-ikL}k^2 & e^{-kL}k^2 & -k^2 & k^2 \end{Bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{a} \quad (3.49)$$

Substituindo Eq.[3.45] na Eq.[3.49] podemos relacionar a força com o deslocamento da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{G}(\omega) \mathbf{H}_B^{-1}(\omega) \mathbf{d} \\ &= \mathbf{S}_B(\omega) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde, $\mathbf{S}_B(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{H}_B^{-1}$ é a matriz de rigidez dinâmica da viga de Euler-Bernoulli. Os termos da matriz de rigidez dinâmica para a viga são extensos e computacionalmente custoso de obter analiticamente. A partir deste ponto recomenda-se trabalhar com as matrizes $\mathbf{G}(\omega)$ e \mathbf{H}_B e seguir com a análise de uma forma numérica.

3.4.2 Elemento espectral de viga - relação entre força e deformação

A medição da deformação é comumente usada para testes de carga estática e de fadiga, análise de durabilidade e previsão de vida útil de produtos mecânicos na indústria aeronáutica, automotiva, indústria mecânica, etc. Os sensores utilizados para obtenção da deformação, os strain gauges, são mais acessíveis e de baixo custo comparados por exemplo com acelerômetros. Assim, recentes pesquisas (KOSS; KARZUB, 1995; GEVINSKI, 2014; SANTOS et al., 2014; PEETERS, 2015; LI et al., 2015; CUI et al., 2018) têm focado

em análise dinâmica utilizando esse tipo de sensor. Nesta seção, o desenvolvimento da formulação do elemento espectral de viga para obtenção direta da deformação é proposta.

Para uma viga de Euler-Bernoulli submetida à flexão pura, a relação entre a deformação e a curvatura da mesma é dada por,

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\kappa} \quad (3.51)$$

onde y é a distância de um ponto qualquer à linha neutra e κ é o raio de curvatura da viga submetida à flexão pura. Sabendo que κ pode ser representado pela Eq.[3.5] então a deformação é dado por,

$$\epsilon_x = -y \frac{\partial^2 \hat{v}(x)}{\partial x^2} = -y \hat{v}(x)'' \quad (3.52)$$

Como na relação deslocamento-força apresentado na seção 3.4.1, a obtenção direta da deformação utilizando o SEM é similar. Considere agora um elemento de viga de dois nós, tendo sua deformação no sentido de y e a rotação em função da deformação, respectivamente $\hat{\epsilon}(x, t)$ e $\hat{\phi}^\epsilon(x, t)$, onde a rotação é a derivada da deformação transversal, $\hat{\phi}^\epsilon(x, t) = \partial \hat{\epsilon}(x, t) / \partial x$. As forças resultantes na viga são o cisalhamento $\hat{V}(x, t)$ e momento fletor $\hat{M}(x, t)$ Eq.[3.41]. A Fig.[3.6] ilustra as deformações nodais $\hat{\epsilon}$ e $\hat{\phi}^\epsilon$, e as forças nodais presentes na viga de comprimento L e de dois nós.

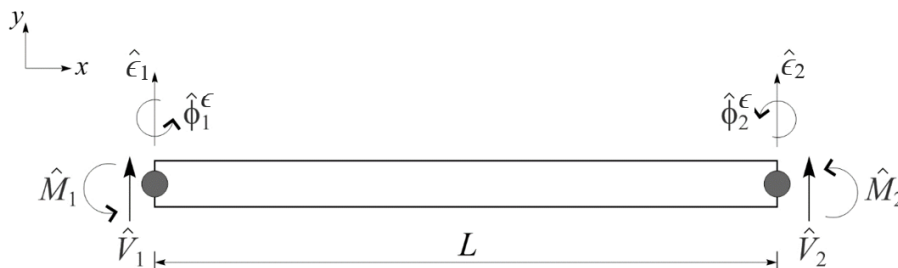


Figura 3.6 – Elemento espectral de viga de dois nós como dois GDLs relacionados à deformação e duas forças por nó.

Sabendo que o movimento transversal da viga é regido pela Eq.[3.14], porém considerando vibração livre, para a obtenção do deslocamento foi adotada a solução geral na forma espectral Eq.[3.42]. Para a estimação das deformações, transversais e de rotação, a Eq.[3.42] pode ser reescrita em função da deformação como dado na Eq.[3.52]. Desta forma a solução geral para a deformação transversal nodal será

$$\epsilon(x, \omega) = -y \left[-k^2 a_1 e^{-ikx} + k^2 a_2 e^{-kx} - k^2 a_3 e^{ik(L-x)} + k^2 a_4 e^{k(L-x)} \right] \quad (3.53)$$

, e a rotação nodal é dada por,

$$\phi^\epsilon(x, \omega) = \frac{\partial \epsilon(x, \omega)}{\partial x} \quad (3.54)$$

As deformações e inclinações nodais espectrais do elemento de viga podem ser expressas da seguinte forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\phi}_1^\varepsilon \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\phi}_2^\varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon(x=0, \omega) \\ \varepsilon'(x=0, \omega) \\ \varepsilon(x=L, \omega) \\ \varepsilon'(x=L, \omega) \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

A mesma relação adotada para o campo de deslocamentos será assumida aqui, ou seja $\mathbf{d} = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{a}$, no caso da deformação $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}(x, \omega)\mathbf{a}$. As deformações são obtidas nos dois nós das extremidades da viga com coordenadas $x=0$ e $x=L$. Aplicando a condição de contorno nas equações Eq.[3.53] e Eq.[3.54], podemos reescrever $\boldsymbol{\varepsilon}$ matricialmente como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -yk^2 & yk^2 & -yk^2e^{-ikL} & yk^2e^{-kL} \\ -ik & -k & ike^{-ikL} & -ke^{-kL} \\ -yk^2e^{-ikL} & yk^2e^{-kL} & -yk^2 & yk^2 \\ -kie^{-ikL} & ke^{-kL} & ik & -k \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_\varepsilon} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\phi}_1^\varepsilon \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\phi}_2^\varepsilon \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.56)$$

isolando o vetor de constantes \mathbf{a} tem-se

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}_\varepsilon^{-1}(\omega)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.57)$$

assim substituindo a Eq.[3.57] em Eq.[3.53] chega-se a:

$$\varepsilon(x, \omega) = \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}(\omega)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.58)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez dinâmica considerando a relação deformação-força é necessário descrevermos as deformações espectrais nodais (Eq.[3.53] a Eq.[3.58]) e das forças espectrais nodais. As forças e os momentos de flexão nodais espectrais foram definidas seção 3.4.1 nas Eq.[3.48] a Eq.[3.49], donde temos a que $\mathbf{f} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{a}$. Substituindo a Eq.[3.57] na Eq.[3.49], relacionamos as forças com as deformações nodais do seguinte modo

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}(\omega)\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbf{S}_\varepsilon(\omega)\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.59)$$

sendo $\mathbf{S}_\varepsilon(\omega) = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}(\omega)$ a matriz de rigidez dinâmica da viga em função da deformação.

3.4.3 Elemento espectral de viga com uma trinca não propagante para o deslocamento-força

A viga com uma trinca aberta transversal não propagante é apresentada na Fig.[3.7]. O elemento tem dois nós e dois graus de liberdade por nó, deslocamentos transversal e

rotação. O elemento espectral de viga com uma trinca transversal e não propagante foi formulado por Krawczuk (2002). O elemento contém dois nós com dois GDL por nó, onde L é o comprimento, L_1 é a posição da trinca em relação ao nó 1 e a é o comprimento ou profundidade da trinca. A trinca é modelada por uma flexibilidade local adimensional representada por Θ , a qual é calculada pelo teorema de Castigliano e as leis da mecânica da fratura (TADA et al., 1973).

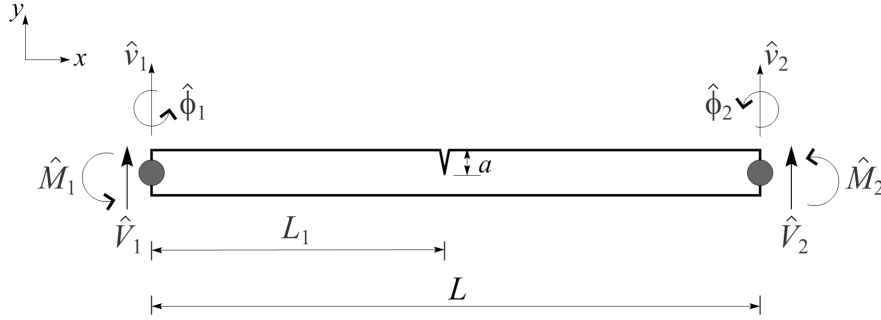


Figura 3.7 – Elemento espectral de viga trincado de dois nós como dois GDLs relacionados ao deslocamento e duas forças por nó.

A solução da Eq.[3.20] aplicada a esse elemento é dividida em duas partes, ao lado esquerdo ($\hat{v}^l(x)$) e direito ($\hat{v}^r(x)$) da trinca, temos assim os deslocamentos nodais dados por:

$$\hat{v}^l(x) = a_1 e^{-ik_n x} + a_2 e^{-k_n x} + a_3 e^{-ik_n(L_1-x)} + a_4 e^{-k_n(L_1-x)} \quad \text{para } x \in \langle 0, L_1 \rangle,$$

$$\hat{v}^r(x) = a_5 e^{-ik_n(L_1+x)} + a_6 e^{-k_n(L_1+x)} + a_7 e^{-ik_n(L-(L_1+x))} + a_8 e^{-k_n(L-(L_1+x))}, \quad \text{para } x \in \langle L_1, L \rangle. \quad (3.60)$$

Os coeficientes de a_i , ($i = 1 : 8$) podem ser calculados como uma função dos deslocamentos espectrais nodais, levando em conta as condições de contorno para o elemento. Assim, para o elemento de viga trincado devem ser consideradas as condições de contorno nas extremidade da viga e na posição da trinca conforme segue:

- No lado esquerdo do elemento para ($x = 0$):

$$\hat{v}^l(x) = \hat{v}_1, \quad \frac{\partial \hat{v}^l(x)}{\partial x} = \hat{\phi}_1. \quad (3.61)$$

- Na posição da trinca são considerados o deslocamento e a rotação para $\hat{v}^l(x)$ então

$x = L_1$, e para $\hat{v}^r(x)$ onde $x = 0$,

$$\begin{aligned} \hat{v}^l(x) &= \hat{v}^r(x), \\ \frac{\partial \hat{v}^r(x)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{v}^l(x)}{\partial x} &= \theta \frac{\partial^2 \hat{v}^r(x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \hat{v}^l(x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \hat{v}^r(x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 \hat{v}^l(x)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 \hat{v}^r(x)}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

- No lado direito do elemento, assim ($x = L - L_1$)

$$\hat{v}^r(x) = \hat{v}_2, \quad \frac{\partial \hat{v}^r(x)}{\partial x} = \hat{\phi}_2. \quad (3.63)$$

Em seguida, levando em conta as fórmulas que descrevem os deslocamentos espectrais nodais, Eq.[3.61],Eq.[3.62] e Eq.[3.63], para a esquerda e direita da trinca, aplicando as condições de contorno e escrevendo matricialmente tem-se

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ik & -k & ik\mathbf{a} & k\mathbf{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & 1 & 1 & -\mathbf{a} & -\mathbf{b} & -\mathbf{c} & -\mathbf{d} \\ (ik + \theta k^2)\mathbf{a} & (k - \theta k^2)\mathbf{b} & \theta k^2 - ik & -k - \theta k^2 & -ik\mathbf{a} & -k\mathbf{b} & ik\mathbf{c} & k\mathbf{d} \\ -ik^2\mathbf{a} & k^2\mathbf{b} & -k^2 & k^2 & k^2\mathbf{a} & -k^2\mathbf{b} & k^2\mathbf{c} & -k^2\mathbf{d} \\ -ik^3\mathbf{a} & -k^3\mathbf{b} & -ik^3 & k^3 & -ik^3\mathbf{a} & k^3\mathbf{b} & ik^3\mathbf{c} & -k^3\mathbf{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{f} & \mathbf{g} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ik\mathbf{f} & -k\mathbf{g} & ik & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

onde, $\mathbf{a} = e^{-ikL_1}$, $\mathbf{b} = e^{-kL_1}$, $\mathbf{c} = e^{-ik(L-L_1)}$, $\mathbf{d} = e^{-k(L-L_1)}$, $\mathbf{f} = e^{-ikL}$, $\mathbf{g} = e^{-kL}$.

A Eq.[3.64] recai na formulação geral do elemento, onde $\mathbf{d} = \mathbf{H}_c(\omega)\mathbf{a}$. Os coeficientes a_i , ($i=1,8$) podem ser relacionados aos deslocamentos espectrais nodais pelas relações:

$$a_i = H_{ci1}^{-1}\hat{v}_1 + H_{ci2}^{-1}\hat{\phi}_1 + H_{ci3}^{-1}\hat{v}_2 + H_{ci4}^{-1}\hat{\phi}_2, \quad i = (1,8) \quad (3.65)$$

Neste ponto, a matriz $\mathbf{H}_c(\omega)$ originalmente de dimensão 8x8 se reduz a uma matriz 8x4. Este processo se dá conforme a na Eq.[3.65], onde H_{cij}^{-1} ($i = 1,8; j = 1,2,7,8$) representa os elementos da matriz inversa da Eq.[3.64]. As forças espectrais nodais podem ser representadas pela diferenciação dos deslocamentos espectrais \hat{v}^l e \hat{v}^r com relação a x , e então podem ser representadas como no caso geral, tal que $\mathbf{f} = \mathbf{G}_c(\omega)\mathbf{a}$ e na forma

matricial como,

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \hat{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik^3 & -k^3 & -ik^3\mathbf{a} & k^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2 & k^2 & -k^2\mathbf{a} & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ik^3\mathbf{f} & -k^3\mathbf{g} & -ik^3 & k^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k^2\mathbf{f} & k^2\mathbf{g} & -k^2 & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

A partir das cargas e deslocamentos nodais, Eq.[3.64] e Eq.[3.66], a matriz de rigidez dinâmica dependente da frequência do elemento de viga de Euler-Bernoulli com uma trinca transversal aberta e não propagante pode ser calculada relacionando a força com o deslocamento nodais,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{[4 \times 1]} &= \mathbf{G}_c(\omega)_{[4 \times 8]} \mathbf{H}_c^{-1}(\omega)_{[8 \times 4]} \mathbf{d} \\ &= \mathbf{S}_c(\omega)_{[4 \times 4]} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.67)$$

sendo $\mathbf{S}_c(\omega)$ uma matriz 4x4 que descreve a matriz de rigidez dinâmica da viga trincada.

3.4.3.1 Flexibilidade no local da trinca

O teorema de Cartigliano é utilizado no elemento finito espectral de viga para determinar a flexibilidade no local da trinca, conforme:

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial S_i \partial S_j} \quad (\text{para } i = j = 1), \quad (3.68)$$

onde, U denota a energia de deformação do elemento causada pela presença da trinca e S são as forças nodais agindo no elemento. A energia de deformação devido a presença da trinca pode ser expressa pela relação

$$U = \frac{1 - \nu^2}{E} \int_A K_I^2 dA, \quad (3.69)$$

sendo, ν a relação de Poisson, A a área da trinca e K_I é o fator de intensividade de tensão correspondente ao primeiro modo formação da trinca (TADA et al., 1973)

$$K_I = \frac{6M_g}{bh^2} \sqrt{\pi\alpha} f\left(\frac{\alpha}{h}\right) \quad (3.70)$$

onde, M_g demonstra o momento de flexão no local da trinca b , h , α , são explicadas na Fig.[3.8]

$$f\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2h}\right) 0.752 + 2.02\left(\frac{\alpha}{h} + 0.37[1 - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2h}\right)]\right)^3}{\left(\frac{\pi\alpha}{2h}\right) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2h}\right)}} \quad (3.71)$$

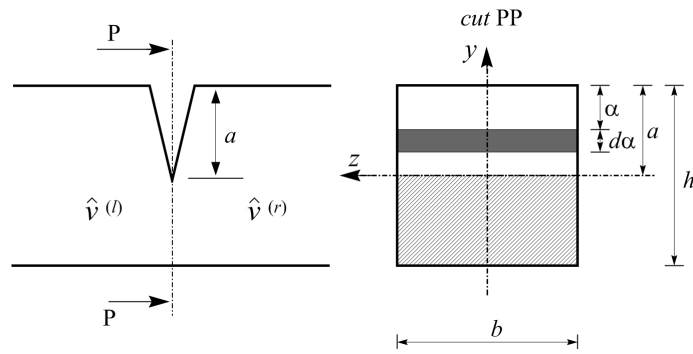


Figura 3.8 – Secção transversal da viga trincada na posição da trinca.

a flexibilidade do modelamento elástico da secção transversal trincada do elemento espectral de viga pode ser reescrita como

$$c = \frac{144\pi}{Ebh^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} f^2 \left(\frac{\alpha}{h} \right) d\bar{\alpha} \int_0^{1/2} d\bar{z} \quad (3.72)$$

onde $\bar{a} = a/h$ considerando a forma não adimensional a flexibilidade, c pode ser expressa como

$$\theta = \frac{EJc}{L} \quad (3.73)$$

3.4.4 Elemento espectral de viga com uma trinca não propagante para a deformação-força

De forma similar à viga trincada apresentada na secção 3.4.3, nós também podemos obter as deformações. Quando a deformação estrutural for requerida, se faz necessário o uso de uma formulação que relacione a deformação com a força. Nesta secção, a formulação de uma viga trincada para a estimação da deformação é desenvolvida com base no SEM. Assumindo a viga com uma trinca aberta transversal não propagante, comprimento L , dois nós, duas deformações e duas forças em cada nó é ilustrada na Fig.[3.9].

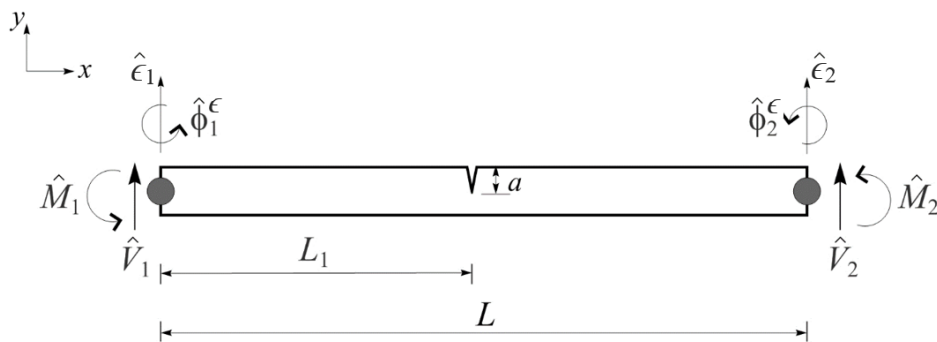


Figura 3.9 – Elemento espectral de viga trincado de dois nós como dois GDLs relacionados à deformação e duas forças por nó.

Separando o elemento em partes à esquerda e à direita da trinca podemos escrever as deformações nodais dadas por,

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}^l(x) &= -y \left[a_1 k^2 e^{-ikx} + a_2 k^2 e^{-kx} + a_3 k^2 e^{-ik(L_1-x)} + a_4 k^2 e^{-k(L_1-x)} \right], \quad x \in \langle 0, L_1 \rangle, \\ \hat{\epsilon}^r(x) &= -y \left[a_5 k^2 e^{-ik(L_1+x)} + a_6 k^2 e^{-k(L_1+x)} + a_7 k^2 e^{-ik(L-(L_1+x))} + a_8 k^2 e^{-k(L-(L_1+x))} \right], \quad x \in \langle L_1, L \rangle\end{aligned}\quad (3.74)$$

onde, L_1 é a localização da trinca, L o comprimento total da viga e k o número de ondas. Os coeficientes de a_i , ($i = 1 : 8$) podem ser calculados em função das deformações espectrais nodais tendo em vista as condições de contorno no elemento. As condições de contorno seguem a mesma lógica anterior (seção 3.4.3), ou seja nas extremidade da viga e na posição da trinca, sendo agora considerando as deformações nodais dados por,

- No lado esquerdo do elemento para ($x = 0$):

$$\hat{\epsilon}^l(x) = \hat{\epsilon}_1, \quad \frac{\partial \hat{\epsilon}^l(x)}{\partial x} = \hat{\phi}_1^\epsilon. \quad (3.75)$$

- Na posição da trinca são considerados as deformações verticais e de rotação, para $\hat{\epsilon}^l(x)$ então $x = L_1$, e para $\hat{\epsilon}^r(x)$ onde $x = 0$,

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}^l(x) &= \hat{\epsilon}^r(x), \\ \frac{\partial \hat{\epsilon}^r(x)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\epsilon}^l(x)}{\partial x} &= \theta \frac{\partial^2 \hat{\epsilon}^r(x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \hat{\epsilon}^l(x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \hat{\epsilon}^r(x)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 \hat{\epsilon}^l(x)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 \hat{\epsilon}^r(x)}{\partial x^3}.\end{aligned}\quad (3.76)$$

- No lado direito do elemento onde ($x = L - L_1$)

$$\hat{\epsilon}^r(x) = \hat{\epsilon}_2, \quad \frac{\partial \hat{\epsilon}^r(x)}{\partial x} = \hat{\phi}_2^\epsilon. \quad (3.77)$$

Aplicando as condições de contorno e escrevendo matricialmente as Eq.[3.75]-Eq.[3.77], obtêm-se

$$\begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\phi}_1^\epsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\epsilon}_2 \\ \hat{\phi}_2^\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -yk^2 & -yk^2 & -yk^2\mathbf{a} & -yk^2\mathbf{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ik & -k & ik\mathbf{a} & k\mathbf{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -yk^2\mathbf{a} & -yk^2\mathbf{b} & -yk^2 & -yk^2 & -yk^2\mathbf{a} & -yk^2\mathbf{b} & -yk^2\mathbf{c} & -yk^2\mathbf{d} \\ (ik + \theta k^2)\mathbf{a} & (k - \theta k^2)\mathbf{b} & \theta k^2 - ik & -k - \theta k^2 & -ik\mathbf{a} & -k\mathbf{b} & ik\mathbf{c} & k\mathbf{d} \\ -yik^2\mathbf{a} & yk^2\mathbf{b} & -yk^2 & yk^2 & yk^2\mathbf{a} & -yk^2\mathbf{b} & yk^2\mathbf{c} & -yk^2\mathbf{d} \\ -ik^3\mathbf{a} & -k^3\mathbf{b} & -ik^3 & k^3 & -ik^3\mathbf{a} & k^3\mathbf{b} & ik^3\mathbf{c} & -k^3\mathbf{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -yk^2\mathbf{f} & -yk^2\mathbf{g} & -yk^2 & -yk^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ik\mathbf{f} & -k\mathbf{g} & ik & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

sendo $\mathbf{a} = e^{-ikL_1}$, $\mathbf{b} = e^{-kL_1}$, $\mathbf{c} = e^{-ik(L-L_1)}$, $\mathbf{d} = e^{-k(L-L_1)}$, $\mathbf{f} = e^{-ikL}$, $\mathbf{g} = e^{-kL}$.

de forma simplificada temos $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}_c^\varepsilon(\omega)\mathbf{a}$. A matriz $\mathbf{H}_c^\varepsilon(\omega)$ originalmente de dimensão 8x8. Assumindo ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; e $j = 1, 2, 7, 8$), $[H_{cij}^\varepsilon]^{-1}$ se reduzirá a uma matriz 8x4. As cargas nodais continuam sendo as forças de momento e cortante, para a viga trincada estas foram demonstradas na seção 3.4.3 na Eq.[3.66]. Relacionando as cargas nodais Eq.[3.66] com as deformações Eq.[3.78], temos

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{[4 \times 1]} &= \mathbf{G}_c(\omega)_{[4 \times 8]}[\mathbf{H}_c^\varepsilon]^{-1}(\omega)_{[8 \times 4]}\boldsymbol{\varepsilon}_{[4 \times 1]} \\ &= \mathbf{S}_c^\varepsilon(\omega)_{[4 \times 4]}\boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\tag{3.79}$$

sendo $\mathbf{S}_c^\varepsilon(\omega)$ uma matriz 4x4 que descreve a matriz de rigidez dinâmica de deformação da viga trincada.

4 Análise modal de deformação

A resposta vibratória de um sistema dinâmico linear invariante no tempo pode ser expresso como uma combinação de uma configuração de movimentos harmônicos simples chamados de modos naturais de vibração (FU, 2001). Esse conceito é parecido com o uso de ondas de senos e cossenos da combinação de Fourier para determinação de formas de ondas complexas. Os modos naturais de vibração são inerentes ao sistema dinâmico e são determinados completamente por suas propriedades físicas, massa, rigidez e amortecimento e suas distribuições espaciais. Cada modo é descrito em termos de seus parâmetros modais: frequência natural, fator de amortecimento modal e padrão de deslocamento característico, chamado de *mode shape* (forma modal), onde cada forma modal corresponde à uma frequência natural. Os graus de participação de cada modo natural na vibração total são determinados pelas propriedades da fonte de excitação e pelas formas dos modos do sistema (EWINS, 1984; MAIA; SILVA, 1997; FU, 2001). A análise modal se divide em análise modal experimental e análise modal teórica (AVITABILE, 2017).

Na análise experimental dois tipos de técnicas são empregadas, a análise modal experimental (AME) e a análise modal operacional (AMO). Na AME o teste é realizado conhecendo-se as forças de excitação, e geralmente são realizados em ambientes laboratoriais controlados. Já na AMO as respostas são medidas em condições operacionais, sem o controle do comportamento do forçamento. Segundo Ewins (1984) os resultados obtidos via AME são mais fiéis que os encontrados via AMO. De acordo com GEVINSKI (2014) a análise modal experimental pode vir em conjunto com a análise modal numérica, por exemplo, com o uso do método dos elementos finitos. Em função da modelagem computacional, certas propriedades estruturais tais como amortecimento e não linearidades, incertezas e condições de contorno podem comprometer a assertividade dos resultados se tratando da análise modal numérica separadamente. Sendo assim, as avaliações experimentais são realizadas com o intuito de aprimoramento e validação do modelo numérico.

A análise modal teórica se embasa nos modelos físicos de um sistema dinâmico composto por sua massa, rigidez e amortecimento (MAIA; JULIO, 1997). Essas propriedades podem ser dadas em formas de equações diferenciais espaciais. Um exemplo é a equação da onda de uma viga de vibração uniforme estabelecida de sua distribuição de massa e propriedades elásticas. A solução da equação determina as frequências naturais, as formas modais da viga e suas respostas ao sistema de vibração forçada. Em estruturas

mais complexas, as propriedades físicas são dispostas nas matrizes de rigidez, massa e amortecimento. Essas matrizes são incorporadas nas equações diferenciais de movimento, onde o método da superposição transforma essas equações em um problema típico de autovalor e suas soluções determinam os dados modais do sistema (FU, 2001).

Nos testes modais, são estabelecidas as relações entre as respostas de vibração em um local e a excitação no mesmo ponto ou em outro ponto qualquer em função da frequência de excitação. Essa relação, que frequentemente é uma função matemática complexa, é conhecida como função de resposta em frequência (FRF) (AVITABILE, 2017). Combinações de excitações e respostas em diferentes locais levam a um conjunto completo de FRFs que podem ser representados por uma matriz FRF do sistema. Essa matriz é geralmente simétrica, refletindo a reciprocidade estrutural do sistema.

Em condição de operação, máquinas e equipamentos estão sujeitos a vibrações e níveis de tensão e estresse. Em algumas situações, altos níveis de tensão são alcançados quando as condições de operação são alteradas a condição de operação padrão real não é considerada. As desvantagens operacionais, como desgaste, desalinhamento e desequilíbrio, também podem causar vibrações. Falhas por Fadiga podem ser consequência de vibração excessiva. Alguns métodos foram desenvolvidos para prever a tensão dinâmica de medições de vibração. Além dessa técnica, Bernasconi e Ewins (1989a) e Yam et al. (1994), Yam et al. (1996) introduziram uma abordagem modal utilizando uma identificação experimental de FRFs de deformação (*strain FRFs-SFRF*). Tal técnica possibilitou a utilização de extensômetros (*strain gauges*) em substituição aos acelerômetros. Nesta seção serão apresentados os aspectos teóricos referentes à análise modal teórica e a análise modal de deformação. Partindo da equação do movimento do elemento estrutural até a obtenção da FRF e SFRF.

4.1 Análise modal de uma viga

A determinação da equação característica dos modos de vibrar e das frequências naturais utiliza a equação do movimento do elemento estrutural em estudo (RAO, 2008a). Neste caso, a equação do movimento da viga é representada pela Eq.[3.14]. O processo de obtenção dos modos de vibrar e das frequências naturais são derivados da equação do movimento da viga demonstrada na seção 3.3, Eq.[3.14]. Para este caso a solução para $v(x, t)$ pode ser encontrada usando o método de separação de variáveis onde,

$$v(x, t) = W(x)T(t) \quad (4.1)$$

Substituindo $v(x, t)$ na Eq.[3.14] e rearranjando os campos,

$$\frac{c^2}{\Phi(x)} \frac{d^4\Phi(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2T(t)}{dt^2} = const = \omega^2 \quad (4.2)$$

sendo,

$$c^2 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.3)$$

onde ω^2 pode ser adotada como uma constante positiva. A Eq.[4.2] pode ser reescrita como as duas equações mostradas abaixo,

$$\frac{d^4\Phi(x)}{dx^4} - k^4W(x) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{d^4T(t)}{dt^2} + \omega^2T(t) = 0 \quad (4.5)$$

sendo k o número de ondas, o mesmo encontrado através da abordagem de análise espectral dado pela Eq.[3.18]. A solução da Eq.[4.5] é dada por

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.6)$$

onde A e B são constantes que podem ser encontradas das condições iniciais. A solução da Eq.[4.4] é assumida ser exponencial na forma,

$$\Phi(x) = Ce^{sx} \quad (4.7)$$

onde C e s são constantes. Substituindo 4.7 na Eq.[4.4] resulta na equação auxiliar $s^4 - k^4 = 0$. As raízes reais desta equação são dadas por $s_{1,2} = \pm k$, $s_{3,4} = \pm ik$. Assim, a solução geral da Eq.[4.4] pode ser expressa como

$$\Phi(x) = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx} + C_3e^{ikx} + C_4e^{-ikx} \quad (4.8)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes. A Eq.[4.8] pode ser escrita na forma trigonométrica

$$\Phi(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + C_3 \cosh(kx) + C_4 \sinh(kx)$$

ou

$$\Phi(x) = C_1(\cos(kx) + \cosh(kx)) + C_2(\cos(kx) - \cosh(kx)) + C_3(\sin(kx) + \sinh(kx)) + C_4(\sin(kx) - \sinh(kx)) \quad (4.9)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes diferentes em cada caso. A frequência natural da viga pode então ser determinada dada a Eq.[3.18] por,

$$\omega_n = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (kl)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}} \quad n = 1, 2, 3... \quad (4.10)$$

A função $\Phi(x)$ é conhecida como modo normal ou função característica da viga e ω_n é chamado de frequência natural de vibração. Para qualquer viga, existe uma infinidade de numero de modos normais com uma frequência natural associada em cada modo normal. As constantes desconhecidas C_1 à C_4 na Eq.[4.9] e o valor de k na Eq.[4.10] podem ser determinadas a partir das condições de contorno da viga. Se a n^{th} frequência natural

é denotada como ω_n e a correspondência ao modo normal como $\Phi_n(x)$, o resposta de vibração livre total da viga pode ser encontrada pela superposição dos modos normais

$$w(x, t) = \Phi_n(x)(A_n \cos(\omega_n t) + B_n(\sin \omega_n t)) \quad (4.11)$$

onde as constantes A_n e B_n podem ser determinadas a partir das condições iniciais da viga. Portanto, a solução geral para a viga livre-livre pode ser expressa pela soma dos modos normais dados como

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w(x, t). \quad (4.12)$$

Para uma viga com as extremidades livres o momento de flexão e as forças de cisalhamento são zero. Sendo assim, as condições de contorno da viga podem ser demonstradas como

$$EI \frac{d^2 \Phi(0)}{dx^2} = 0 \quad ou \quad \frac{d^2 \Phi(0)}{dx^2} = 0 \quad (4.13)$$

$$EI \frac{d^3 \Phi(0)}{dx^3} = 0 \quad ou \quad \frac{d^3 \Phi(0)}{dx^3} = 0 \quad (4.14)$$

$$EI \frac{d^2 \Phi(l)}{dx^2} = 0 \quad ou \quad \frac{d^2 \Phi(l)}{dx^2} = 0 \quad (4.15)$$

$$EI \frac{d^3 \Phi(l)}{dx^3} = 0 \quad ou \quad \frac{d^3 \Phi(l)}{dx^3} = 0 \quad (4.16)$$

pela diferenciação da Eq.[4.9] obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = & k^2 [C_1(-\cos(kx) + \cosh(kx)) + C_2(-\cos(kx) - \cosh(kx)) \\ & + C_3(-\sin(kx) + \sinh(kx)) + C_4(-\sin(kx) - \sinh(kx))] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \Phi(x)}{dx^3} = & k^3 [C_1(\sin(kx) + \sinh(kx)) + C_2(\sin(kx) - \sinh(kx)) \\ & + C_3(-\cos(kx) + \cosh(kx)) + C_4(-\cos(kx) - \cosh(kx))] \end{aligned} \quad (4.18)$$

as equações 4.13 e 4.14 requerem que $C_2 = C_4 = 0$. Substituindo os valores de C_2 e C_4 nas equações 4.15 e 4.16 tem-se

$$C_1(-\cos(kl) + \cosh(kl)) + C_3(-\sin(kl) + \sinh(kl)) = 0$$

$$C_1(\sin(kl) + \sinh(kl)) + C_3(-\cos(kl) + \cosh(kl)) = 0 \quad (4.19)$$

para uma solução não trivial as constantes C_1 e C_3 nas equações 4.19, a determinante formada pelos seus coeficientes são igualadas a zero, matricialmente temos

$$\begin{bmatrix} -\cos(kl) + \cosh(kl) & -\sin(kl) + \sinh(kl) \\ \sin(kl) + \sinh(kl) & -\cos(kl) + \cosh(kl) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

A Eq.[4.20] pode ser simplificada para obter a equação da frequência dado por $\cos(kl) \cosh(kl) - 1 = 0$. Sendo assim, o n^{th} modo normal da viga pode ser expressa da seguinte forma

$$\Phi_n(x) = (\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) - \frac{\cos(k_n l) - \cosh(k_n l)}{\sin(k_n l) - \sinh(k_n l)} (\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) \quad (4.21)$$

e a solução da vibração livre é dada por

$$w_n(x, t) = \Phi_n(x) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \quad (4.22)$$

ou

$$w(x, t) = \left[(\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) - \frac{\cos(k_n l) - \cosh(k_n l)}{\sin(k_n l) - \sinh(k_n l)} \right] (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \quad (4.23)$$

Para diferentes soluções de condições de contorno existirá uma formulação tanto para o modo quanto para a frequência, estas podem ser encontradas em detalhes em (MEIROVITCH, 1997; HAGEDORN; DASGUPTA, 2007; RAO, 2008b; SAVI; PAULA, 2017).

4.1.1 Ortogonalidade dos modos

O problema de autovalor correspondente a uma viga uniforme pode ser obtida pela adoção de duas solução harmônica com frequência ω na Eq.[3.12]. Para derivar as relações de ortogonalidade para vigas, considere dois autovalores ω_i^2 e ω_j^2 e as funções normais correspondentes $\Phi_i(x)$ e $\Phi_j(x)$, respectivamente, então tem-se assim escrevemos (MEIROVITCH, 1997)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] = \omega_i^2 \rho A(x) \Phi_i(x), \quad 0 < x < L \quad (4.24)$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \Phi_j(x)}{dx^2} \right] = \omega_j^2 \rho A(x) \Phi_j(x), \quad 0 < x < L \quad (4.25)$$

Multiplicando a Eq.[4.24] por $\Phi_j(x)$ e integrando em no comprimento L da viga, isto será

$$\int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho A(x) \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx \quad (4.26)$$

Integrando o lado esquerdo da Eq.[4.26] por partes duas vezes obtém-se,

$$\begin{aligned} \int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] dx &= \Phi_j(x) \frac{d}{dx} \left[EI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \right] \Big|_0^L - \frac{d\Phi_j(x)}{dx} EI(x) \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} \Big|_0^L \\ &+ \int_0^L EI(x) \frac{d^2 \Phi_j(x)}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} dx \\ &= \int_0^L EI(x) \frac{d^2 \Phi_j(x)}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_i(x)}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo assim, a Eq.[4.26] pode ser escrita como

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2\Phi_j(x)}{dx^2} \frac{d^2\Phi_i(x)}{dx^2} dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho A(x) \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx \quad (4.28)$$

de uma forma similar, multiplicando a Eq.[4.25] por $\Phi_i(x)$ e integrando sobre o comprimento da viga chega-se a

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2\Phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2\Phi_j(x)}{dx^2} dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho A(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx \quad (4.29)$$

Notando que a ordem os subscritos i e j são irrelevantes e subtraindo a Eq.[4.29] da Eq.[4.28] tem-se

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L \rho A(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = 0 \quad (4.30)$$

sendo os autovalores distintos, a Eq.[4.30] resulta em

$$\int_0^L \rho A(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \omega_i^2 \neq \omega_j^2 \quad (4.31)$$

da mesma forma,

$$\int_0^L EI(x) \frac{d^2\Phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2\Phi_j(x)}{dx^2} dx = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \omega_i^2 \neq \omega_j^2 \quad (4.32)$$

a Eq.[4.30] é chamada de relação de ortogonalidade para funções normais. A Eq.[4.31] representa outra forma de condição de ortogonalidade para os modos normais. De fato, normalizando o i th modo normal como

$$\int_0^L \rho A(x) \Phi_i^2(x) dx = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.33)$$

as Eq.[4.31] e Eq.[4.33] podem ser expressas na seguinte forma

$$\int_0^L \rho A(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (4.34)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (4.35)$$

Usando a Eq.[4.34] na Eq.[4.32] a outra forma de ortogonalidade pode ser derivada como

$$\int_0^L \Phi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2\Phi_i(x)}{dx^2} \right] dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (4.36)$$

De acordo com o teorema da expansão, qualquer função $W(x)$ que satisfaça as condições de contorno da viga denota um possível deslocamento transversal da viga e pode ser expresso como uma soma de autofunções como

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Phi_i(x) \quad (4.37)$$

onde as constantes c_i são definidas por

$$c_i = \int_0^L \rho A(x) \Phi_i(x) \Phi(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.38)$$

e

$$c_i \omega_i^2 = \int_0^L \Phi_i(x) \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} \right] dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.39)$$

O teorema da expansão constrói a base para a análise modal, o qual permite a derivação da resposta da viga levando em conta tanto a excitação inicial quando as forças aplicadas.

4.1.2 Vibração forçada

A equação do movimento da viga sob carga transversal distribuída é por,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t),$$

A solução assumida para a equação do movimento é dada pela uma combinação linear dos modos normais da viga, tal que

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_i(t) \quad (4.40)$$

onde $\Phi_i(x)$ são os modos normais encontrados pela resolução da equação, usando as quatro condições de contorno da viga e $\eta_i(t)$ são as coordenadas modais. Substituindo a solução 4.40 na Eq.[3.12], esta pode ser expressa como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} \right] \eta_i(t) + \rho A(x) \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} = q(x, t) \quad (4.41)$$

No domínio da frequência a Eq.[4.41] pode ser reescrita da seguinte forma

$$\rho A(x) \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \Phi_i(x) \eta_i(t) + \rho A(x) \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} = q(x, t) \quad (4.42)$$

onde multiplicando a Eq.[4.42] por $W_i(x)$ e integrando no domínio, entre de 0 a L , resulta em

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \int_0^L \rho A(x) \omega_i^2 \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} \int_0^L \rho A(x) \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx = \int_0^L \Phi_j(x) q(x, t) dx \quad (4.43)$$

do ponto de vista da condição de ortogonalidade Eq.[4.34], todos os termos das somatórias do lado esquerdo da Eq.[4.43] desaparecem, exceto por um termo em que $i = j$, resumindo-se em

$$\frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} + \omega_i^2 \eta_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

onde $Q_i(t)$ é força generalizada correspondente ao i th modo dado por

$$Q_i(t) = \int_0^L \Phi_i(x) f(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.45)$$

a solução completa da Eq.[4.44] pode ser expressa como

$$\eta_i(t) = Y_i e^{i\omega t} \quad (4.46)$$

substituindo a Eq.[4.46] em Eq.[4.40] e truncando a série teremos:

$$w(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) Y_i e^{i\omega t} \quad (4.47)$$

4.1.3 Função de resposta em frequência

Partindo da Eq.[4.44] e adotando a solução dada pela Eq.[4.46] tem-se

$$\frac{d^2 Y_i e^{i\omega t}}{dt^2} + \omega_i^2 Y_i e^{i\omega t} = \Phi_i(x_e) F(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.48)$$

assim,

$$(\omega_i^2 - \omega^2) Y_i e^{i\omega t} = \Phi_i(x_e) F(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.49)$$

chegando a,

$$Y_i = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \Phi_i(x_e) F(\omega) \quad (4.50)$$

sendo $\Phi_i(x_e)$ o modo normal do forçamento, Substituindo a Eq.[4.50] na Eq.[4.47] obtém-se

$$w(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \Phi_i(x_e) F(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.51)$$

considerando o movimento harmônico no tempo e relacionando o deslocamento transversal com o forçamento chega-se à FRF da receptância.

$$\alpha(\omega) = \frac{w(\omega)}{F(\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(x) \Phi_i(x_e)}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (4.52)$$

Assumindo o amortecimento proporcional, associa-se um fator de perda ζ o modo i , então

$$\alpha(\omega) = \frac{w(\omega)}{F(\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(x) \Phi_i(x_e)}{\omega_i^2 (i + \zeta_j) - \omega^2} \quad (4.53)$$

Segundo Fu (2001) a FRF definida utiliza o deslocamento como resposta. Isto é conhecido como FRF da receptância. A resposta de vibração também pode ser dada em velocidade ou aceleração. Pela substituição da resposta em deslocamento $X(\omega)$ pela velocidade $\dot{X}(\omega)$ ou aceleração $\ddot{X}(\omega)$, dois tipos de FRFs podem ser definidas (EWINS, 1984),

$$\text{FRF da mobilidade } Y(\omega) = \frac{\dot{w}(\omega)}{F(\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{j \Phi_i(x) \Phi_i(x_e)}{\omega_i^2 (i + \zeta_j) - \omega^2} \quad (4.54)$$

$$\text{FRF da aceleração } A(\omega) = \frac{\ddot{w}(\omega)}{F(\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{-\Phi_i(x) \Phi_i(x_e)}{\omega_i^2 (i + \zeta_j) - \omega^2} \quad (4.55)$$

4.2 Análise modal de deformação e obtenção da função de resposta em frequência da deformação (SFRF)

Conforme [GEVINSKI \(2014\)](#) as deformações ao longo de uma estrutura se correlaciona com os deslocamentos através do tensor de deformações, composto por derivadas ordinárias lineares, no caso da análise da deformação de vigas em flexão, pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal. Tais relações ao serem aplicadas ao vetor da matriz modal do deslocamento se obtém diretamente a deformação. A formulação modal da deformação é semelhante à formulação de análise modal apresentada na seção 4.1. A superposição modal aplicada à análise modal de deformação é realizada da mesma forma que a análise modal clássica Eq.[4.40] e emprega a seguinte formulação:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i^\varepsilon(x) \eta_i(t) \quad (4.56)$$

onde, ψ_i é o modo de deformação em x , $\eta_i(t)$ a coordenada modal generalizada e $\varepsilon(x, t)$ a deformação da viga. Da teoria da elasticidade, a deformação em um dada direção é igual ao gradiente do componente vetorial nessa mesma direção. Ou seja, para o deslocamento na direção geral $v(x, t)$, assim a relação do deslocamento com a deformação será dada por

$$\varepsilon(x, t) = \nabla v(x, t) \quad (4.57)$$

onde ∇ é o operador diferencial linear. Uma vez sabendo a relação entre o deslocamento e a deformação, faz-se necessário obter relação entre os modos de deformação e deslocamento. A solução modal para uma viga livre-livre é descrita pela Eq.[4.9], esta pode ser relacionada com a deformação através do modo curvatura κ da viga em flexão Eq. [3.5]. Portanto, o modo de deformação da viga em flexão esta diretamente relacionada à curvatura do modo, tal que ([BERNASCONI; EWINS, 1989a](#); [YAM et al., 1996](#))

$$\Phi_i^\varepsilon(x) = y \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} = -k^2 y \Phi_i(x) \quad (4.58)$$

sendo y a distância normal da linha neutra até a superfície da viga e Φ_i^ε representa o modo de deformação correspondente ao modo $\Phi_i(x)$. Substituindo a solução 4.56 na Eq.[3.12], integrando no domínio espacial, aplicando a propriedades de ortogonalidade e fôramento na viga defini-se que $\eta_i(t) = Y_i e^{i\omega t}$ (eq. 4.46). Assim, a Eq.[4.56] pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i^\varepsilon(x) Y_i e^{i\omega t} \quad (4.59)$$

4.2.1 Função de resposta em frequência de deformação

Partindo da Eq.[4.44], adotando a solução para ε dada pela Eq.[4.59] e encontra-se a expressão para Y na Eq.[4.50]. Sendo $\Phi_i(x_e)$ o modo normal do fôramento. Substituindo

a Eq.[4.50] na Eq.[4.59], então a relação entre uma entrada de força e uma saída de deformação, em termos de modos de deslocamento e de deformação será

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i^\varepsilon(x) \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \Phi_i(x_e) F(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.60)$$

Considerando o movimento harmônico no tempo e relacionando a deformação transversal com o forçamento chega-se à SFRF da receptância.

$$\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon(\omega) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)}{F(\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^\varepsilon(x) \Phi_i(x_e)}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad (4.61)$$

ou com amortecimento proporcional

$$\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon(\omega) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)}{F(\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^\varepsilon(x) \Phi_i(x_e)}{\omega_i^2 (i + \zeta_j) - \omega^2} \quad (4.62)$$

A matriz de constantes modais de deformação que é derivada relacionando o modo de deformação (Φ_i^ε) e deslocamento (Φ_i) correspondente ao *ith* modo.

5 Resultados numéricos e experimentais

Neste capítulo testes numéricos e experimentais são realizados para demonstrar e validar a formulação Da obtenção direta da deformação dinâmica via SEM. Para esse fim, os estudos apresentados serão o de reciprocidade das FRFs de deslocamento e de deformação, a comparação entre as SFRFs calculadas através do SEM e AME, validação experimental utilizando dados retirados do trabalho de Santos et al. (2015) e dados de experimentos realizados no Laboratory of Mechanic of Normandy (LMN) - INSA de Rouen e por fim uma análise da obtenção da SFRF para um viga trincada.

5.1 Análise da viga através da FRF de deslocamento

Assume-se uma viga livre-livre sem qualquer descontinuidade com comprimento total de $L = 1$ m, base $b = 0,03$ m e altura da seção transversal de $h = 0,005$ m. As suas propriedades mecânicas são, módulo de Young de $E = 210$ GPa e densidade $\rho = 7860$ kg/m³. A FRF é obtida em uma banda de frequência entre 0 à 600 Hz, com excitação no nó 1 e medição da FRF de deslocamento no nó 4, ou seja nas extremidades da viga, como ilustrada na Fig.[5.1]. A medição da FRF nas extremidades permite capturar a maior quantidade de modos possíveis, uma vez que neste ponto existe a influência de todos os modos e não há o risco de posicionamento dos pontos de excitação ou medição em um nó modal.

A Fig.[5.1] demonstra a magnitude e a fase compreendendo os seis primeiros modos de vibrar da viga, que são identificados através dos picos de ressonâncias. Cada modo tem uma frequência natural característica, que devido ao baixo amortecimento, é possível realizar sua identificação. A verificação dos picos de ressonância também pode ser realizada pela mudança de fase. Quando a mesma cruza pelos picos de ressonância há o decréscimo de 180° e quando passa pelos picos de anti-ressonância o acréscimo de 180°. Sendo assim, o de número de modos na banda de frequência trabalhada e de frequências de ressonâncias são determinadas via FRF.

A fase é plotada utilizando o comando *phase* do Matlab[®] que extrai o ângulo entre

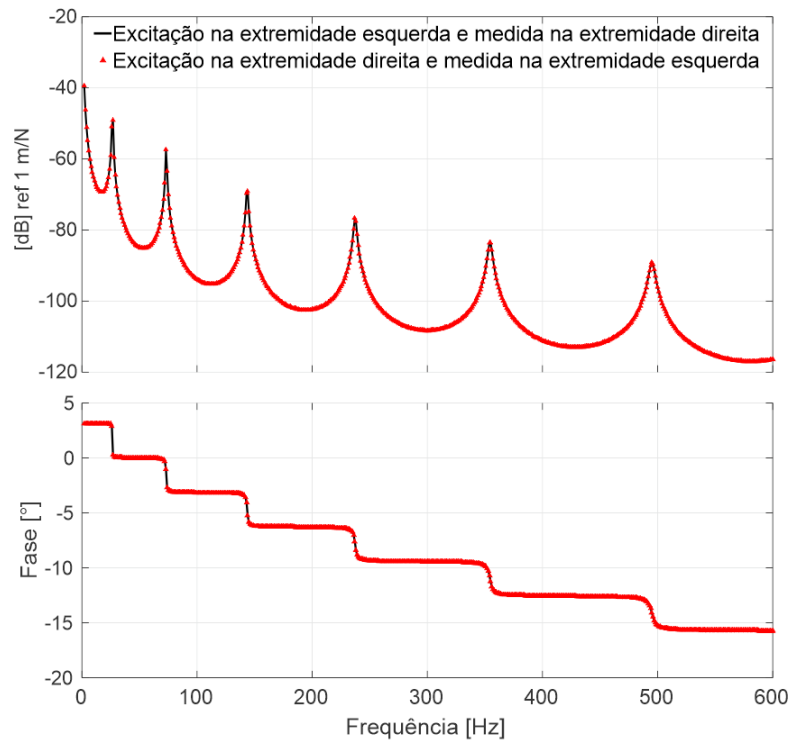


Figura 5.1 – Verificação de reciprocidade nas extremidades do elemento através da FRF e fase.

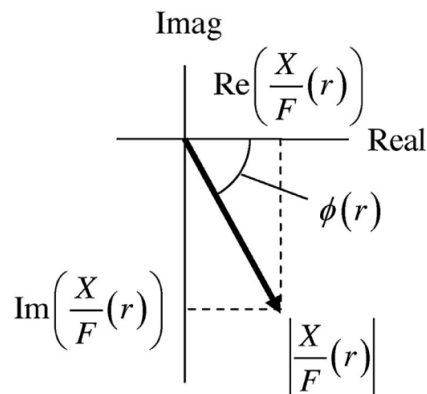


Figura 5.2 – Esquema gráfico da fase, parte real e a parte imaginária da FRF (GANGULY; SCHMITZ, 2014)]

a parte imaginária e a parte real da FRF, Fig.[5.2]. Para um sistema não amortecido, o modo da FRF terá uma queda de 180° próximo aos valores das frequências naturais e tal comportamento pode ser observado na Fig.[5.1].

Teste de reciprocidade

Dois testes de reciprocidade das respostas são pospostos e a configuração de cada viga é ilustrada nas Fig.[5.1] e Fig.[5.1]. Quando se utiliza o SEM como base para construção do modelo matemático, a sua discretização se dará em casos onde existir ponto de medição ou alguma descontinuidade ao longo da estruturas, caso contrário a discretização em

elementos é desnecessária. Partindo deste princípio, a viga apresentada na Fig.[5.1] foi discretizada em três elementos para incluirmos pontos de excitação e medição fora das extremidades. Neste estudo existirá excitação e medição no ponto P3 e no ponto P8, à respectivamente 0.35 m e à 0.95 m do nó 1.

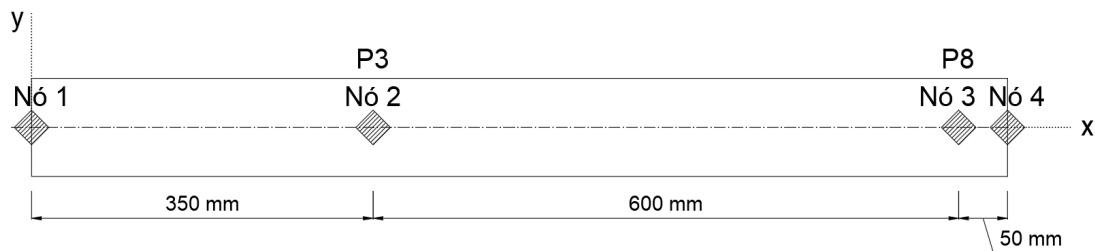


Figura 5.3 – Discretização do elemento de viga em 3 elementos e 4 nós, sendo que cada nó contém dois graus de liberdade, $\hat{\phi}$ rotação e \hat{v} deslocamento transversal. A medição e excitação se dá nos pontos P3 e P8.

A verificação da reciprocidade da resposta dinâmica é realizada excitando a viga em P3 e medindo em P8 e vice-versa. A análise da reciprocidade é baseada no teorema Maxwell-Betti, o qual diz que "... o trabalho realizado por um esforço, durante o deslocamento do seu ponto de aplicação, devido à ação de outro esforço qualquer é igual ao trabalho realizado pelo segundo esforço, durante o deslocamento de seu ponto de aplicação, devido à ação do primeiro esforço". Este fenômeno da reciprocidade do deslocamento é demonstrado em muitos livros texto e literatura em geral, porém pouco se fala da deformação. Neste sentido, o estudo abrangendo tanto deslocamento quanto deformação é apresentado. Fazer-se necessário ressaltar, que os pontos de excitação e medida devem estar distantes o suficientes das condições de contorno para que estas não interfiram nas respostas.

Assim, excitando em P3 e medindo em P8, quanto excitando em P8 e medindo em P3, as FRFs são iguais na banda de frequência considerada como mostrado na Fig.[5.4]. Para esta viga são identificados seis modos de vibração através dos picos de ressonâncias. Cada modo tem uma frequência natural característica e a sua identificação é realizada em combinação com a análise da fase. Verifica-se poucos picos de anti-ressonância o que acarreta no acréscimo de 180° na fase, este comportamento é comum quando o ponto de medição esta distante do de excitação. Sendo assim, as propriedades de número de modos na banda de frequência trabalhada e de frequências de ressonâncias são determinadas via FRF.

Considerando dois outros pontos ao longo da viga, sendo excitação e medição no ponto P3 e no ponto P5, ou seja à 0.35 m e à 0.50 m do nó 1, respectivamente como ilustrado na Fig.[5.6]. Similar a primeira análise de reciprocidade da FRF de deslocamento, neste outros pontos é constatado que excitando em P3 e medindo em P5 ou vice-versa as FRFs obtidas são iguais, confirmando que há a reciprocidade na respostas em deslocamento para este estudo. As FRFs medidas em P3 e P5, e as fases correspondentes são mostradas na Fig.[5.6], aqui também são identificados seis modos de vibração porém com uma forma

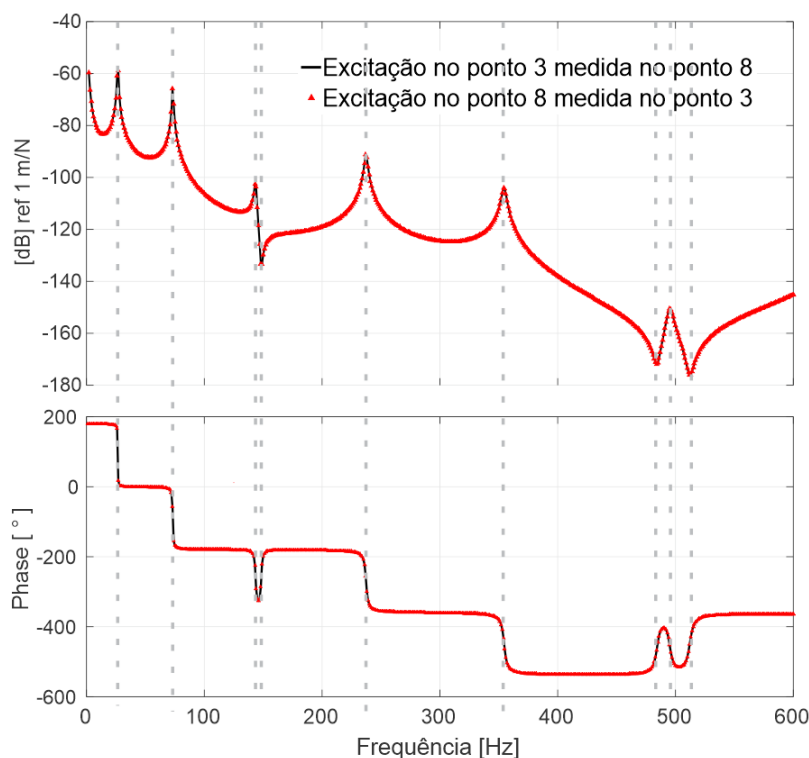


Figura 5.4 – Verificação de reciprocidade nos pontos P3 e P8 através do uso da FRF e sua fase.

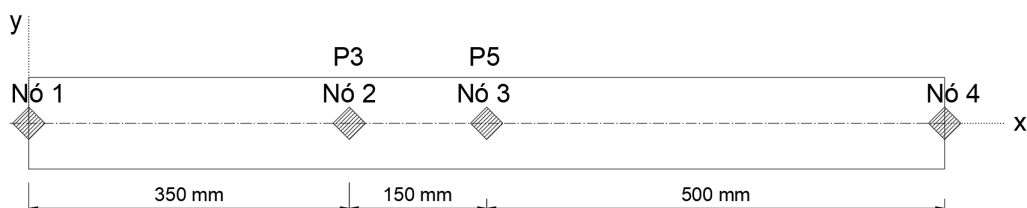


Figura 5.5 – Discretização do elemento de viga com a medição e excitação nos pontos P3 e P8.

diferente do primeiro caso, existem algumas anti-ressonâncias mais evidentes devido ao ponto de P5 ser próximo ao P3. Cada modo continua tendo uma frequência natural característica, e isso é esperado, pois não há a interferência e um modo em outro, sendo assim é possível realizar sua identificação. Neste gráfico da fase sofre o efeito contante ressonância e anti-ressonância com o acréscimo e decréscimo praticamente alternados de 180° , e as mudanças de fases são identificadas com as linhas tracejadas que ligam os de picos de ressonância ou anti-ressonância.

5.2 Análise da viga através da FRF de deformação (SFRF)

O objetivo principal deste trabalho é obter diretamente a deformação dinâmica de uma viga através do método do elemento espectral. A formulação do SEM para a estimação da SFRF e a relação entre o deslocamento e a deformação é demonstrado no

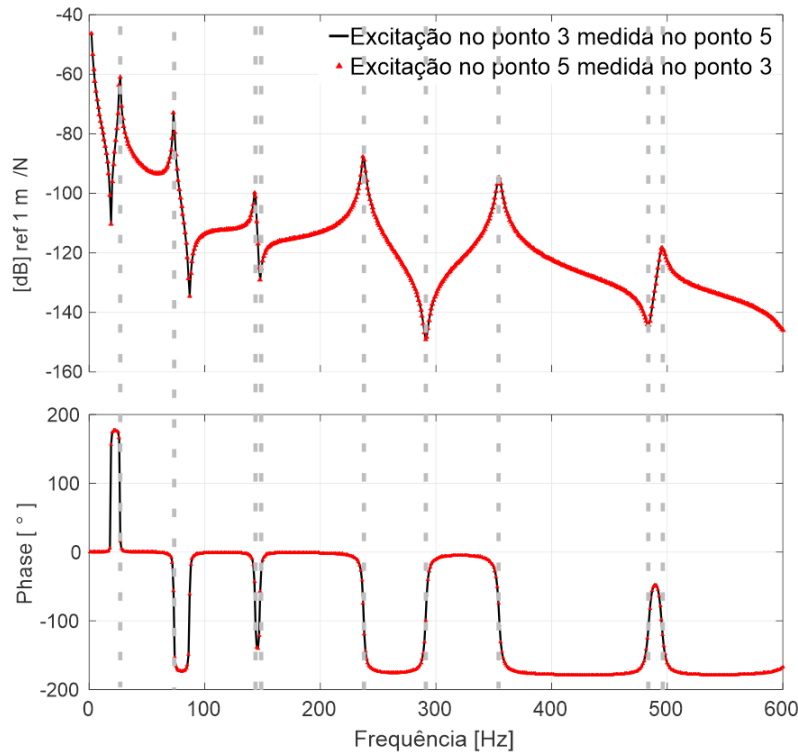


Figura 5.6 – Verificação de reciprocidade nos pontos P3 e P5 através do uso da FRF e sua fase.

capítulo 3. A motivação para este estudo é devido a possibilidade de se obter diretamente a deformação dinâmica da viga, a qual é um parâmetro imprescindível em muitas análises, como por exemplo em testes de fadiga ou quando há o uso de sensores que tem como saída a deformação. A grande vantagem do uso do SEM é devido ele ser um método construído utilizando a solução analítica da viga e das propriedades exatas da onda, o que faz dele uma ferramenta de pouco esforço computacional e de muita acurácia em qualquer banda de frequência. Assim, obter a deformação dinâmica através do SEM se torna uma opção numérica para o estudo onde se necessita da resposta dinâmica em deformação .

Teste de reciprocidade

No uso da análise modal de deformação existem algumas limitações associadas à falta de simetria da matriz da SFRF. As pesquisas presentes na literatura, apontam que o problema da reciprocidade é devido a assimetria da matriz da estrutura e por tal não obedece ao teorema da reciprocidade de Maxwell (BERNASCONI; EWINS, 1989a; CHOU, 1987; SANTOS et al., 2014; SANTOS et al., 2015; KRANJC et al., 2016) embora que a formulação esteja de acordo com o teorema. Segundo Santos et al. (2015), como y e k Eq.[4.58] são propriedades intrínsecas da estrutura, a reciprocidade pode ser provada. Se dois pontos 1 e 2 são considerados, desde que estejam localizados longe das extremidades da viga, as relações da reciprocidade são validas. Embasados no fato da possível não reciprocidade quando aplicado AME ou AMO da deformação, um estudo da reciprocidade da FRF de deformação quando estimada utilizado o SEM é abordada como primeiro

estudo.

A análise da reciprocidade em relação a resposta em deformação é realizada de forma similar ao deslocamento. São escolhidos dois pontos para alocação da excitação e da medição da SFRF. As propriedades mecânicas e geométricas da viga são as mesmas do exemplo anterior ilustradas nas Fig.[5.1] e Fig.[5.1].

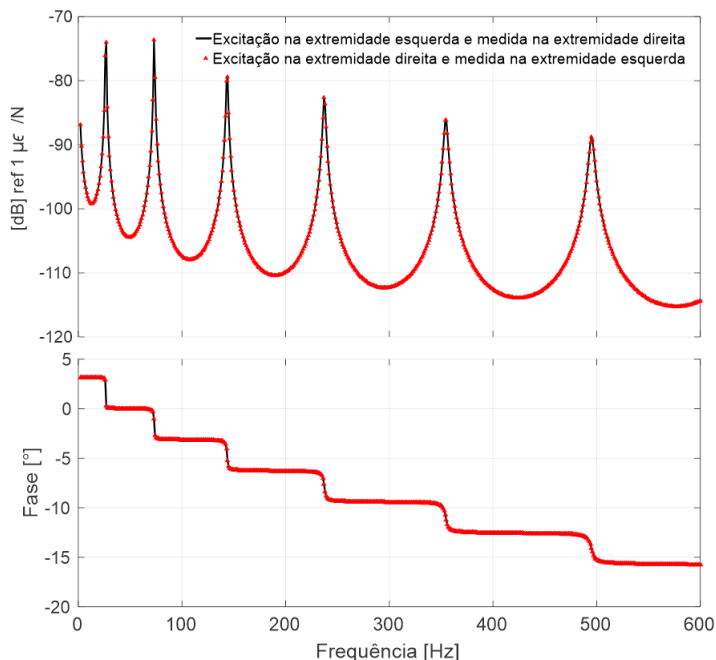


Figura 5.7 – Verificação de reciprocidade da SFRF e fase com excitação e medição nas extremidades da viga.

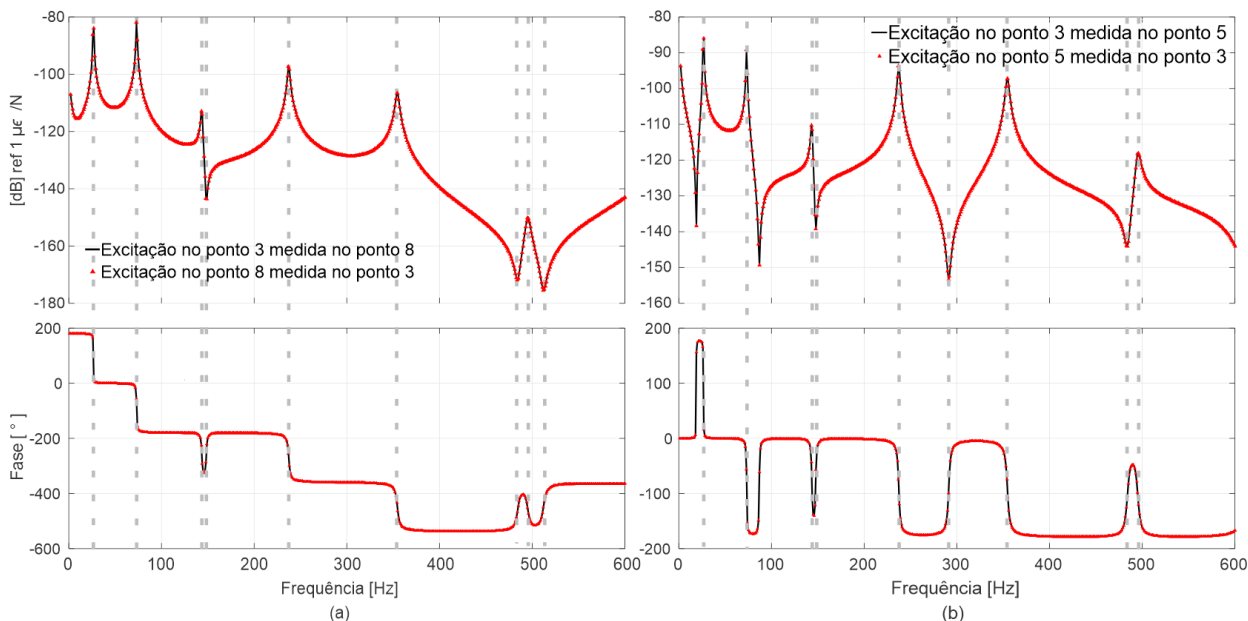


Figura 5.8 – Verificação de reciprocidade da SFRF e fase nos pontos P3 e P8 (a), P3 e P5 (b). As mudanças de fases são identificadas com as linhas tracejadas que ligam os de picos de ressonância ou anti-ressonância

Nas Fig.[5.7] e Fig.[5.8] são demonstradas as reciprocidades da viga utilizando os pontos de medição e excitação nas extremidade da viga, na Fig.[5.8(a)] as medições e excitações em P3 e P8, e em (b) P3 e P5. Nota-se que há reciprocidade com relação aos pontos escolhidos, pois as respostas estão coincidentes e não há variação nas ressonâncias, nas anti-ressonâncias, no amortecimento ou na fase. Importante notar que diferente da AME de deformação onde a reciprocidade principalmente nas extremidades não é assegurada (SANTOS et al., 2015), na estimação das deformações utilizando o SEM demonstra a existência da reciprocidade, tanto no meio da viga, quanto nas suas extremidades. Na Fig.[5.8] é possível identificar seis modos de vibração e suas respectivas frequências de ressonância, que se aproximam as frequências naturais devido o pequeno amortecimento. A primeira anti-ressonância na Fig[5.8(a)], por exemplo, é verificada após o quarto modo, fazendo com que a fase tenha um acréscimo de 180° depois do decréscimo de 180° devido à ressonância, e assim sucessivamente. As frequências de ressonâncias obtidas em P3-P8 e em P3-P5 são mostradas idênticas por se tratar da mesma viga sofrendo a alteração apenas na forma modal. A frequências e modos correspondentes estão listadas na tabela 1.

| SEM - SFRF | |
|------------|-----------------|
| Modo | Frequência [Hz] |
| 1 | 26,54 |
| 2 | 73,24 |
| 3 | 143,5 |
| 4 | 237,4 |
| 5 | 354,4 |
| 6 | 495,15 |

Tabela 1 – Modos de vibração e suas respectivas frequências naturais utilizando a SFRF gerada através do SEM.

Visando a verificação das respostas encontradas em deformação (SFRF), estas são comparadas diretamente com os resultados em deslocamento (FRF). As FRFs e SFRFs da Fig.[5.9] são geradas a partir de uma simulação onde os pontos P3 e P8 (a), P3 e P5 (b), de excitação e medição. Conforme verificado na Fig.[5.9] a resposta obtida via SFRF segue a mesma forma identificada na FRF, alterando apenas sua amplitude.

5.3 Validação numérica e experimental

Na análise modal tradicional utiliza-se o deslocamento como entrada de dados, seja ela no domínio do tempo ou no domínio da frequência (AVITABILE, 2017). Para a coleta dos deslocamentos no caso experimental são utilizados transdutores, fornecendo os valores dos deslocamentos em uma dada banda de frequência (LI et al., 2015). Porém, em estudos dinâmicos que se tem a deformação como variável, é interessante que esta seja medida

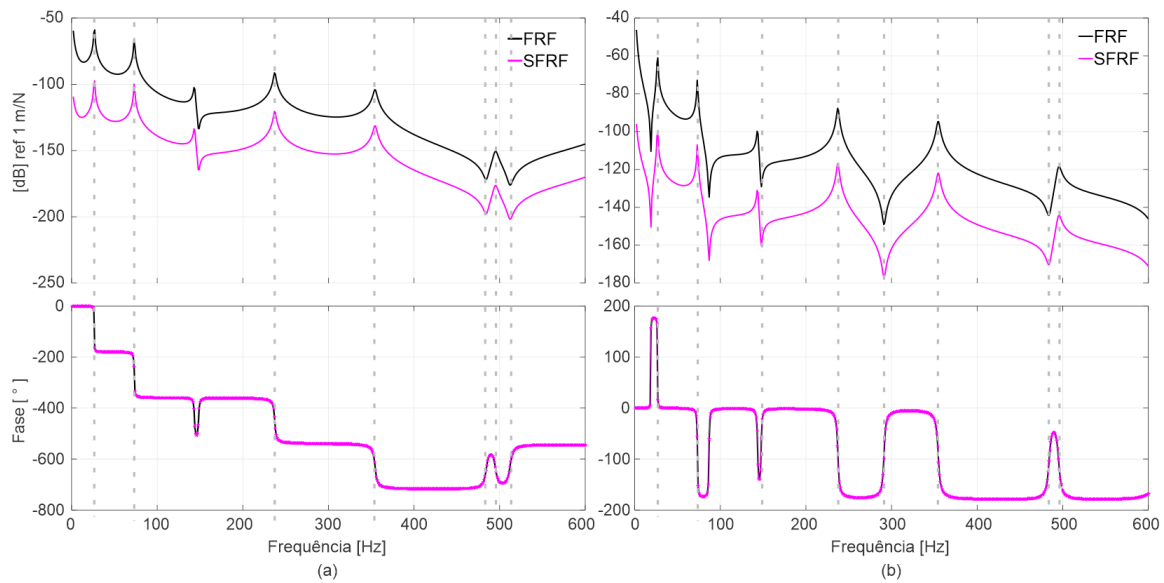


Figura 5.9 – Comparação entre a FRF e a SFRF com pontos de medida e excitação em: (a) P3 e P8 (a); (b) P3 e P5.

diretamente. Nesta seção a análise numérica abordando a da análise modal teórica de deformação apresentada no capítulo 4 com os resultados via SEM, bem como a validação experimental são tratados.

5.3.1 Validação numérica

Uma simulação numérica é realizada para comparar as SFRFs obtidas através do SEM e da análise modal teórica. A faixa de frequência é de 0 à 600 [Hz] e a viga assumida para este teste é a mesma das análises anteriores, ou seja, com propriedades geométricas e mecânicas de $L = 1$ m, base $b = 0,03$ m e altura da seção transversal de $h = 0,005$ m, módulo de Young de $E = 210$ GPa e densidade $\rho = 7860$ Kg/m^3 , com condição de contorno livre-livre. A viga em estudo é ilustrada na Fig. [5.10], além da geometria alguns pontos de posicionamento de medições dos extensômetros (*strain gauges*) e acelerômetros são identificados.

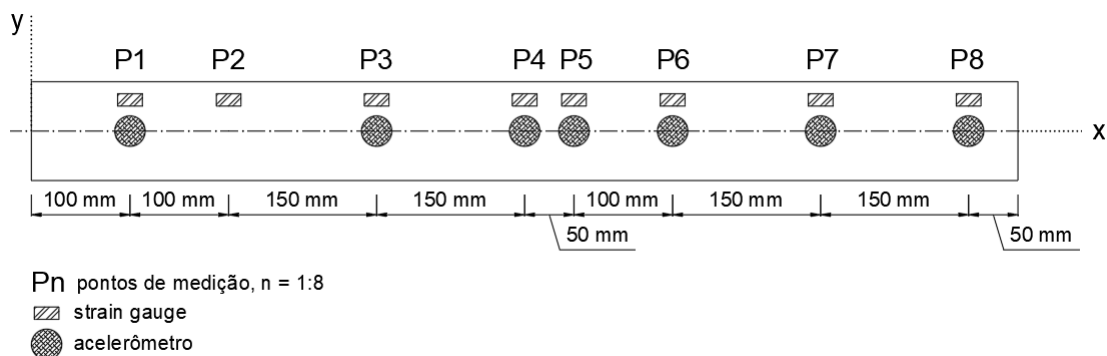


Figura 5.10 – Viga com os pontos de posicionamento dos extensômetros e acelerômetros.

Os seis primeiros modos de vibrar de deslocamento e deformação, Φ e Φ^ϵ , acompanhados de suas frequências para a viga são apresentados na Fig.[5.11]. A determinação desses modos foram realizadas analiticamente como demonstrado no capítulo 4 e são imprescindíveis para o calculo da SFRF via análise modal Eq.[4.61] e Eq.[4.62].

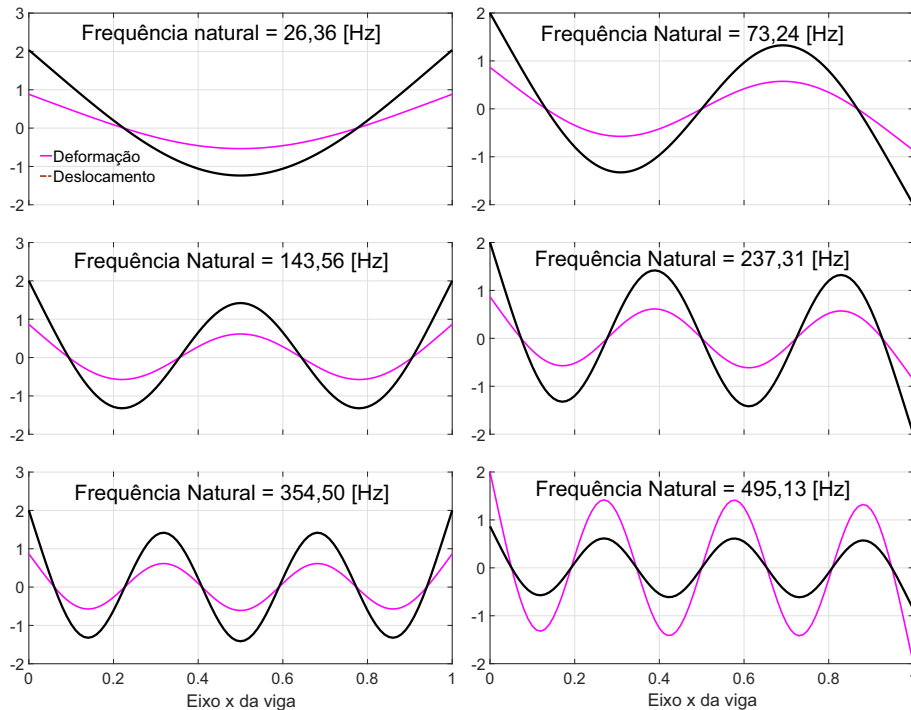


Figura 5.11 – Representação do primeiro ao sexto modo de vibração e suas respectivas frequências naturais. Deformação ϕ_ϵ e deslocamento ϕ

A Fig.[5.12] mostra a SFRF obtida em P3-P8 com o SEM e análise modal teórica utilizando os seis primeiros modos e frequências naturais apresentadas na Fig.[5.11]. Em Fig.[5.12(a)] é a SFRF correspondente à excitação e medição sendo P3-P8 e a Fig.[5.12(b)] é a SFRF obtida de P3-P5, em ambos dos casos as frequências de ressonância estão coincidentes em toda banda analisada. Para obtenção da SFRF via análise modal há o truncamento dos modos o que pode influenciar na estimação da forma modal, principalmente nas anti-ressonâncias. No entanto, comparando as duas técnicas o SEM se mostrou eficaz tanto quanto o modal para a estimação da SFRF.

Comparando a FRF estimadas pelos dois métodos mostrado na Fig.[5.13], observa-se que as frequências de ressonâncias são as mesmas e novamente há uma diferença na forma modal mais sutil que na SFRF. A comparação numérica entre o SEM e análise modal demonstra a eficiência do SEM em obter a FRF e SFRF da viga com uma boa acurácia, validando assim o modelo numérico do SEM e restando uma validação experimental para o mesmo que é apresentado a seguir.

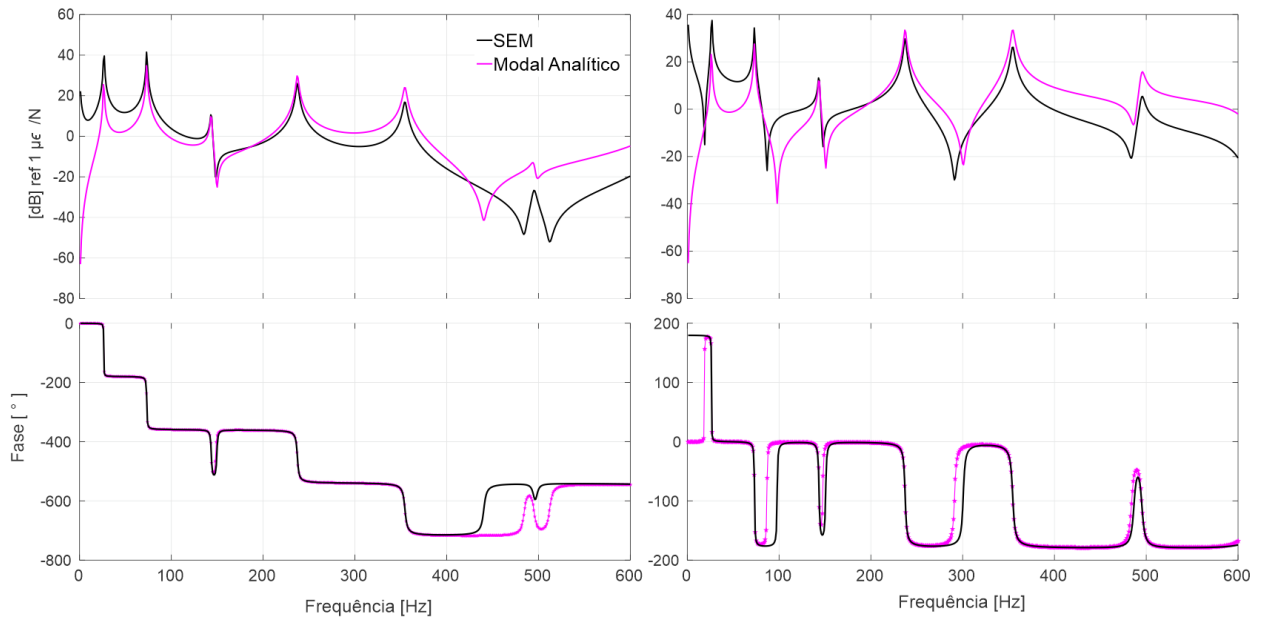


Figura 5.12 – Comparação das SFRFs geradas através do SEM e da análise modal, considerando os pontos de excitação e medição sendo P3 e P8, (a) e P3 e P5, (b)

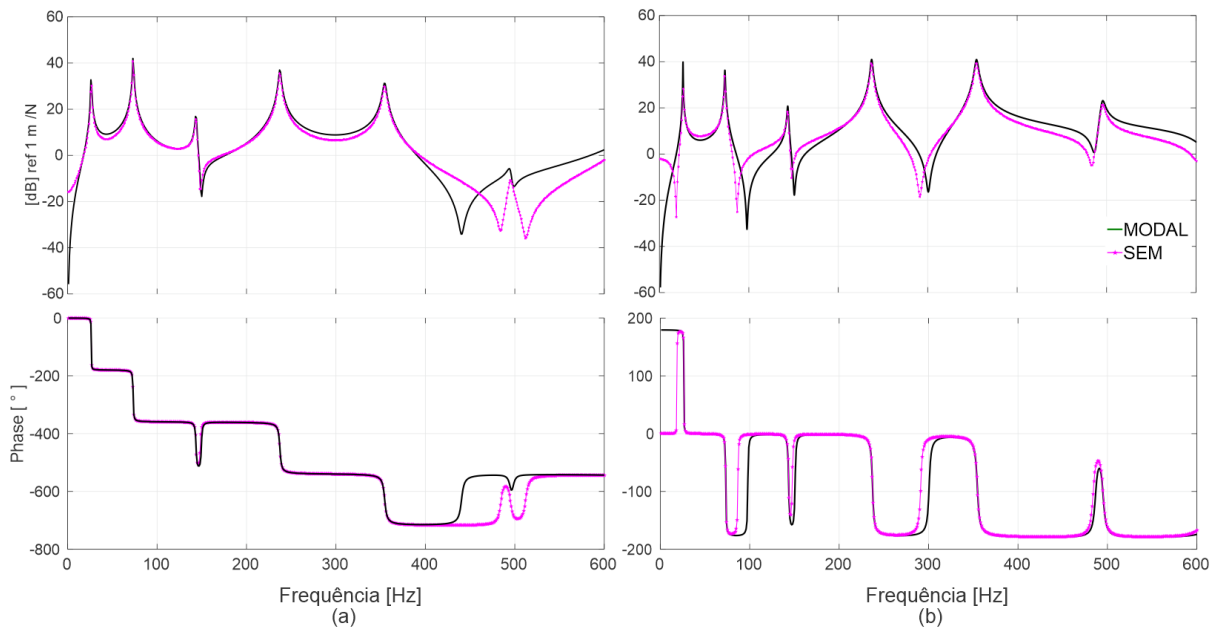


Figura 5.13 – Comparação das FRFs geradas através do SEM e da análise modal, considerando os pontos de excitação e medição sendo P3 e P8, (a) e P3 e P5, (b)

5.3.2 Validação experimental

Dois dados experimentais foram utilizados para validar a teoria apresentada, no primeiro é extraído do estudo realizado por Santos et al. (2015) e no segundo foram realizados testes experimentais em um corpo de prova utilizado para teste de fadiga.

Experimento 1

No experimento são utilizados *strain gauges* e acelerômetros para coletas de dados. A viga utilizada é a mesma dos exemplos anteriores, com 8 pontos de medições da deformação através dos extensômetros e 7 pontos de medição do deslocamento utilizando acelerômetros, ver Fig.[5.10]. De acordo com Santos et al. (2015), na configuração experimental utilizou-se um teste de impacto, usando um martelo modal de impacto PCB086D05 como uma fonte de excitação, 7 acelerômetros PCB U352C65, 8 Vishay micro-strain gauges (extensômetros) com medidas por resistência, um aquisitor de sinais LMS SCADAS Mobile (SCM05) com 24 VB8-II canais de medição e o Software LMS Test.Lab 12A. Os dados experimentais aplicados neste trabalho foram extraídos do artigo de Santos et al. (2015) através do software WebPlotDigitizer®.

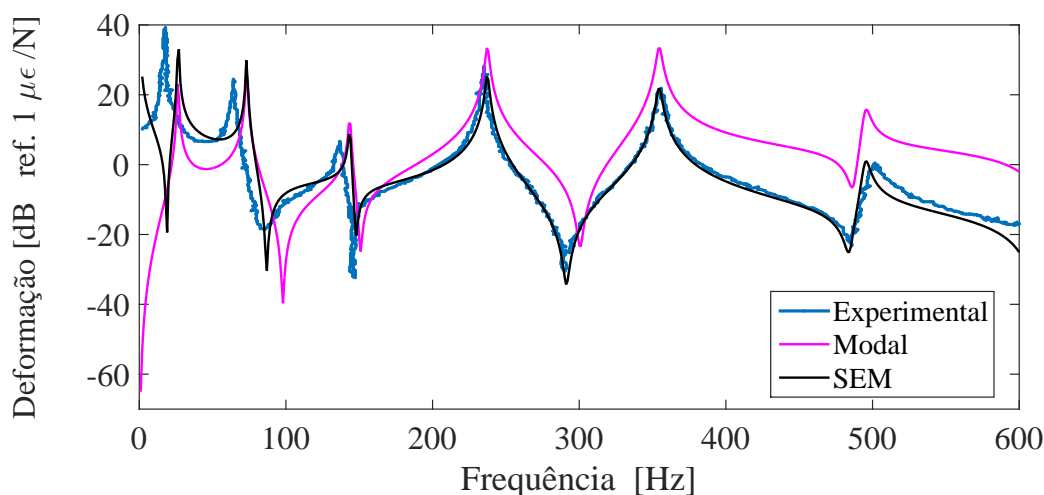


Figura 5.14 – Comparação das SFRFs obtidas nos pontos P3 e P8 através do SEM, análise modal e experimental (experimento realizado por Santos et al. (2015)).

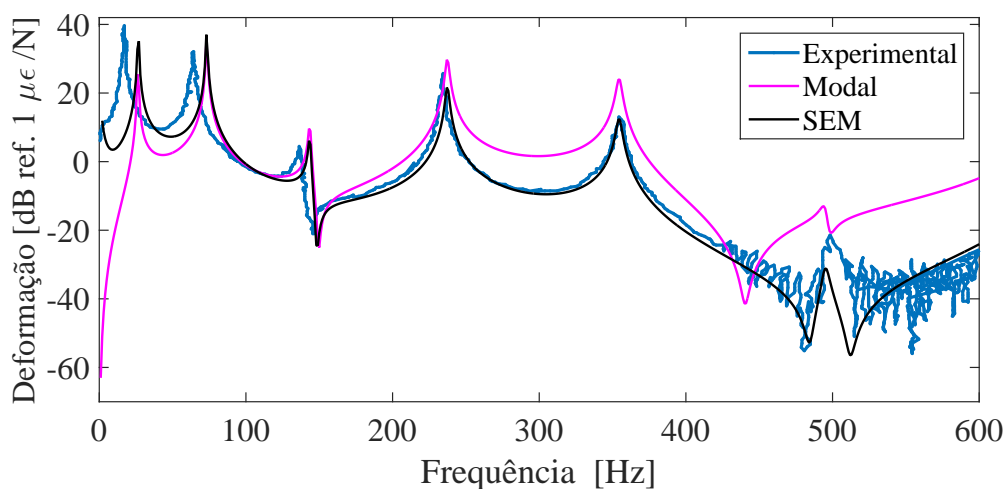


Figura 5.15 – Comparação das SFRFs obtidas nos pontos P3 e P5 através do SEM, análise modal e experimental (experimento realizado por Santos et al. (2015)).

A Fig.[5.14] mostra a SFRF obtida experimentalmente, com o SEM e análise modal com excitação no ponto P3 e medida no ponto P8. As SFRFs calculadas numericamente são então comparadas com a SFRF experimental com a finalidade de demonstrar a eficiência dos dois métodos na estimação da deformação dinâmica. Os dois métodos estimaram a SFRF com boa aproximação em comparação com a curva experimental, embora a SFRF obtida com o SEM se aproximou melhor da curva experimental em toda faixa de frequência. A mesma simulação também foi realizada para a medição no ponto P5 com excitação em P3, a SFRF experimental, via SEM e análise modal a qual é apresentada na Fig.[5.15]. As SFRFs numéricas tem uma boa concordância com a experimental, e novamente a SFRF estimada utilizando o SEM fica mais próxima da experimental na faixa de frequência de análise. Em ambos os métodos as formas modais, as amplitudes, os picos de ressonância e anti-ressonância são próximas do experimental. Porém o SEM apresenta melhor aproximação em comparação com a análise modal.

Na tabela 2 são listadas as frequências de ressonâncias obtidas via SEM e experimento associados a cada modo e aos erros relativos entre as duas. Verifica-se que há uma diferença entre as frequências de ressonância, principalmente nos primeiros modos, como máximo erro de 35% e mínimo de 0.05%. Na tabela 3 estão listados os valores das frequências de ressonância obtidas via SEM e análise modal, como os dois métodos são numéricos os erros relativos são pequenos como máximo 0.68% e mínimo de 0.028%.

| Modo | Frequência [Hz] | | Erro [%] |
|------|-----------------|-------------|----------|
| | SEM | Experimento | |
| 1 | 26,54 | 17,10 | 35.57 |
| 2 | 73,24 | 64,37 | 12.12 |
| 3 | 143,50 | 136,32 | 5.04 |
| 4 | 237,40 | 234,4 | 1.27 |
| 5 | 354,40 | 354,3 | 0.028 |
| 6 | 495,55 | 495,8 | 0.05 |

Tabela 2 – Comparação entre as frequências de ressonância encontradas através dos métodos SEM e experimento com a indicação de erro percentual.

| Modo | Frequência [Hz] | | Erro [%] |
|------|-----------------|---------------|----------|
| | SEM | Análise modal | |
| 1 | 26,54 | 26,36 | 0,68 |
| 2 | 73,24 | 73,24 | 0 |
| 3 | 143,50 | 143,56 | 0,042 |
| 4 | 237,40 | 237,31 | 0,038 |
| 5 | 354,40 | 354,50 | 0,028 |
| 6 | 495,55 | 495,13 | 0,0848 |

Tabela 3 – Comparação entre as frequências de ressonância encontradas através dos métodos SEM e AME com a indicação de erro percentual.

Experimento 2

A segunda validação experimental é realizada através dos resultados obtidos via simulação e sua comparação direta com um experimento realizados no Laboratory of Mechanic of Normandy (LMN) - INSA de Rouen. Neste teste experimental é utilizado um corpo de prova fixado a um shaker, são medidos a velocidade e a deformação em alguns pontos ao longo da amostra. As dimensões, pontos de medição e geometria do corpo de prova estão mostradas na Fig.[5.16]. O corpo de prova foi projetado para obter um área de tensão longe da sua fixação e de forma a ter a primeira frequência de ressonância próxima a 100 Hz (KHALIJ et al., 2015). o material da amostra é de aço com baixo teor de carbono (% C <0.1), com um limite de escoamento de 235MPa e Módulo de Young de 205GPa. A amostra foi submetida à tratamento térmico a temperatura de 900°C no vácuo por 1 hora, seguido por resfriamento lento em um forno de ar para reduzir as tensões residuais da amostra (KHALIJ et al., 2015; GAUTRELET1. et al., 2019).

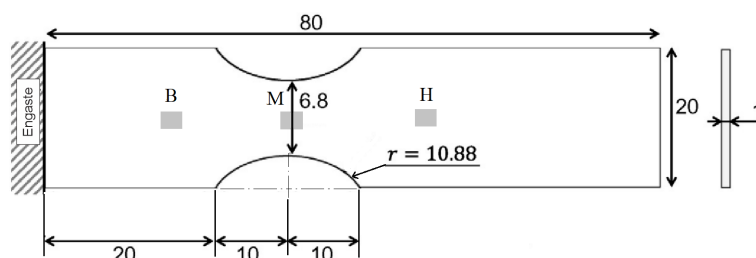


Figura 5.16 – Geometria e dimensões do corpo de prova (mm).

A bancada de teste utilizada para realizar o experimental é mostrada na Fig.[5.17] e consiste de um excitador eletrodinâmico-Shaker TiraVib TV50100+BAA1000+FPS, um sistema de aquisição ACP:Acquisition Control Peripheral of Spectral Dynamics, um amplificador de potência o qual transforma o sinal de controle em um movimento de vibração, um dispositivo de fixação fixo-móvel onde a amostra é fixa; Strain gauge HBM 1LY15-1.5/350 colado em três pontos da amostra e um Polytec Laser Vibrometer (OFV-3001/OFV-303). A excitação se dá por uma varredura senoidal (*sweep sine*) em uma faixa de frequência de 0 a 2000 Hz, este intervalo compreende as três primeiras frequências de ressonância da amostra. A duração do *sweep sine* foi de 10 min, a aceleração imposta foi de 0.5g e a frequência de amostragem de 9600Hz.

Os três extensômetros foram fixados em um ponto B à 15mm a partir do engaste, ponto M com 30 mm e ponto H com 45mm, Fig.[5.16]. O sinal temporal medidos pelos extensômetros e o equivalente sinal na frequência pós-processada no Matlab são mostrados nas Fig.[5.18],Fig.[5.19] e Fig.[5.20].

Os três sinais temporais extraídos das medições realizados com o extensômetro apresentam semelhantes picos próximos a 40 s, 200s e 580 s porém com níveis de amplitudes diferentes. Após a transformada do sinal para o domínio da frequência observa-se que na região em que os picos aparecem é ao onde ocorrem as ressonâncias. Conclui-se então, que

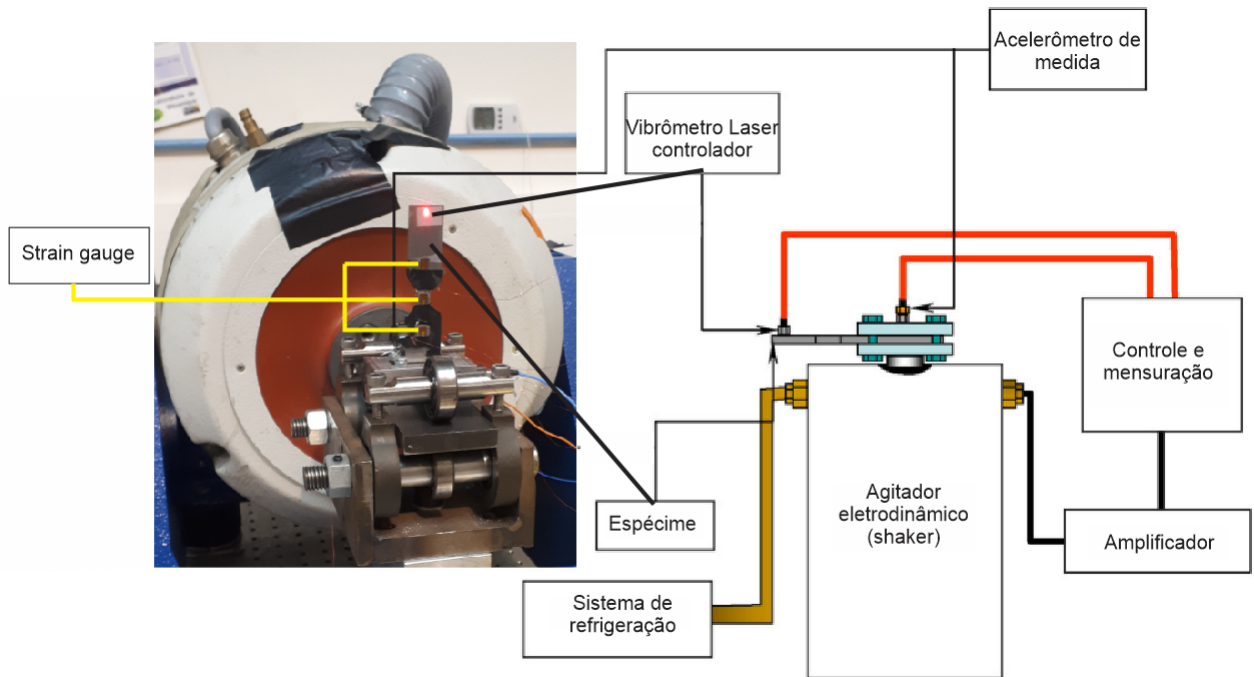


Figura 5.17 – Configuração real e esquemática da bancada experimental.

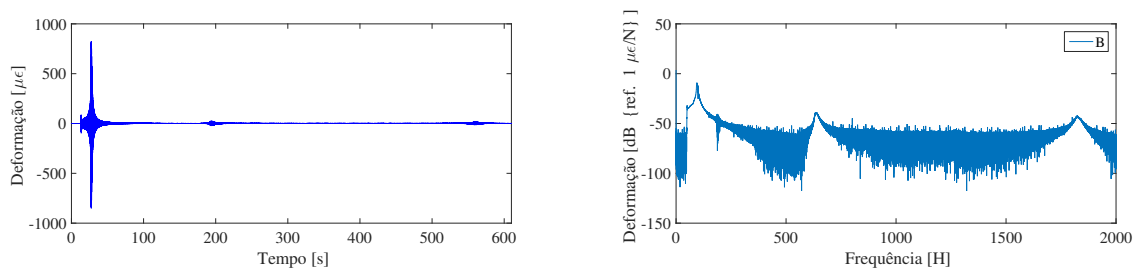


Figura 5.18 – Medida da deformação no domínio do tempo (esquerda) e da SFRF (direta) no ponto B.

nas regiões de ressonância do corpo de prova há uma aumento consideráveis no nível da deformação, sendo assim possível realizar o estudo dinâmico e vibracional de estruturas em geral a partir da sua resposta da deformação dinâmica.

Na construção do modelo numérico modelou-se o corpo de prova utilizando o

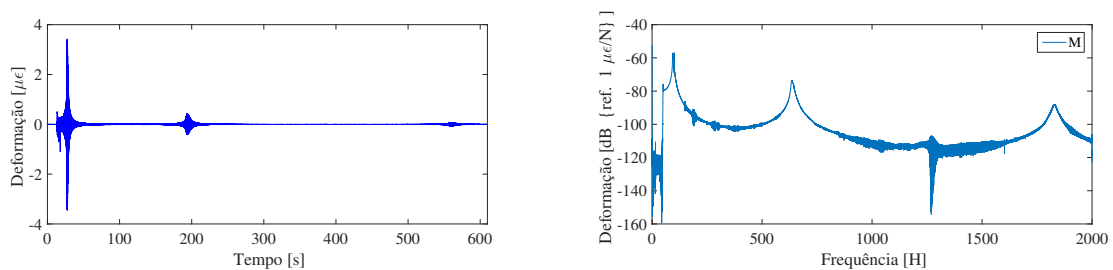


Figura 5.19 – Medida da deformação no domínio do tempo (esquerda) e da SFRF (direta) no ponto M.

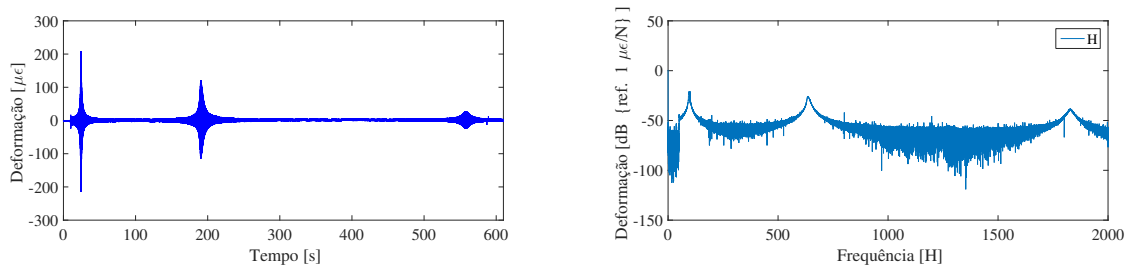


Figura 5.20 – Medida da deformação no domínio do tempo (esquerda) e da SFRF (direita) no ponto H.

SEM e a partir dai estimou-se a SFRF nos pontos B, M e H. As SFRFs experimentais foram medidas diretamente facilitando a comparação direta entre a SFRF numericamente calculadas. O modelo numérico é composto pela amostra fixada ao shake e ambos são modelados via SEM, mais detalhes em (MACHADO et al., 2018; MACHADO et al., 2019). O modelo numérico é apresentado na Fig.[5.21], o qual é composto por 5 vigas que juntas compõe a amostra e um shaker espectral conectado ao nó 2, a condição de contorno assumida é com restrições nas rotações nos primeiros 3 nós e com a vertical livre pois a amostra move juntamente com o eixo do shaker. A excitação é a realizada no nó 2 e se dá pelo movimento do shaker, e por fim as medições são realizadas nos pontos indicados.

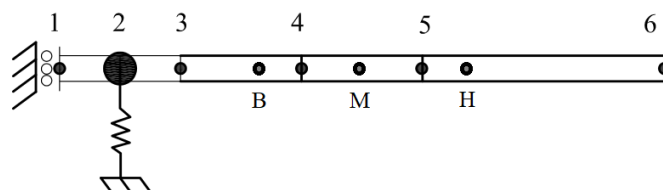


Figura 5.21 – Modelo da amostra com a conexão do shaker.

As SFRFs numérica e experimental dos pontos B, M e H são mostradas nas Fig.[5.22], Fig[5.23] e Fig.[5.24]. Analisando as SFRFs verifica-se que a formulação da deformação dinâmica proposta teve uma boa aproximação com a SFRF experimental, o qual tem muito ruído ao longo de todo o sinal, porém são nítidos os picos de ressonâncias. Assim, dos três modos identificados a curva numérica obtida com o SEM ajustou-se bem em todos eles. No ponto B há dois picos de anti-ressonância o qual não é claro na curava experimental. As estimações das SFRFs calculadas via SEM se tiveram em todos os três pontos uma boa aproximação das frequências de ressonância e na forma do modo, e embora os dados experimentais estejam contaminados com ruídos não influenciou na comparação entre as curvas. Portanto, é plausível de se dizer que a teoria apresentada foi capaz de descrever com precisão a resposta da deformação dinâmica da amostra.

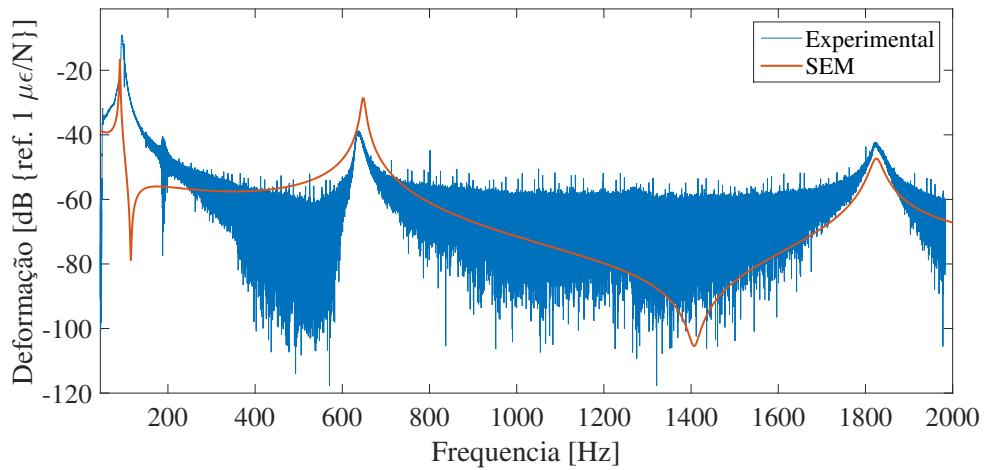


Figura 5.22 – Comparação das SFRFs experimental e numérica gerada com o SEM medidas no ponto B.

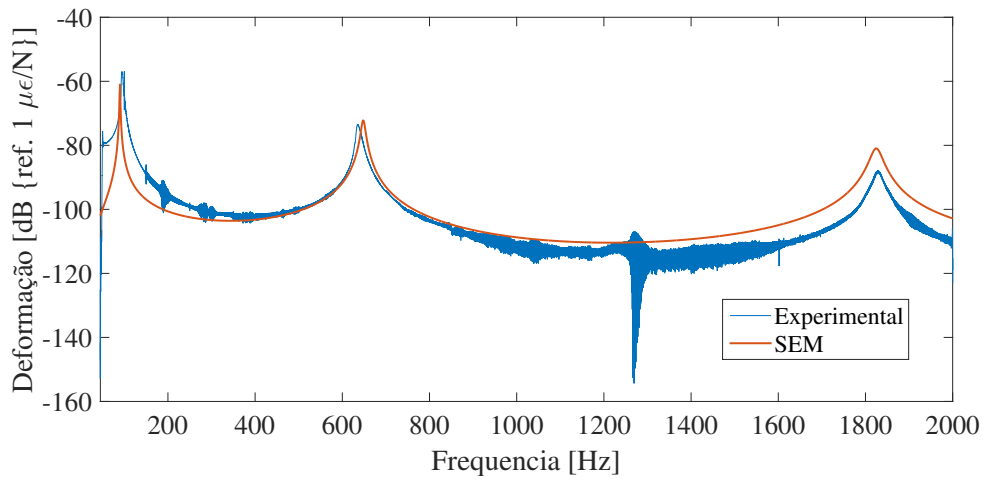


Figura 5.23 – Comparação das SFRFs experimental e numérica gerada com o SEM medidas no ponto M.

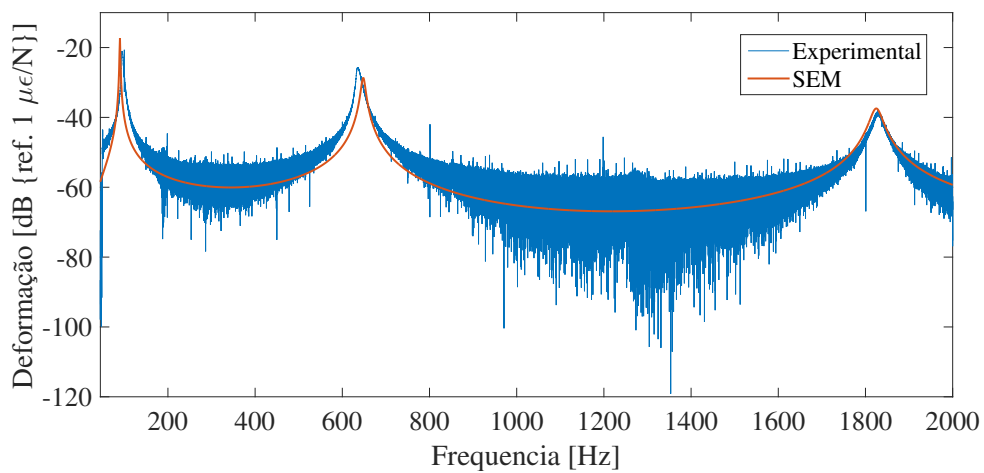


Figura 5.24 – Comparação das SFRFs experimental e numérica gerada com o SEM medidas no ponto H.

5.4 Análise da deformação dinâmica da viga trincada

Para a análise da deformação dinâmica em uma viga trincada utiliza-se uma viga sem dano modelada utilizando a teoria apresentada na seção 3.4.2 e uma viga trincada modelada via SEM como apresentado na seção 3.4.3. As Fig.[3.6] e Fig.[3.9] mostram as duas vigas. Assumindo a condição de contorno livre-livre, as estruturas são excitadas por uma força impulsiva e a SFRF obtida no nó 1. A viga é feita de aço tendo $E = 210\text{GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, o crimento total de $L = 1 \text{ m}$, a base de $b = 0.03\text{m}$, e a altura igual a $h = 0.005\text{m}$. A posição da trinca, L_1 , varia de 10, 30, 50 e 70% de comprimento total e para cada posição a profundidade da trinca, a , varia de 5, 10, 20 e 30% da altura da seção transversal.

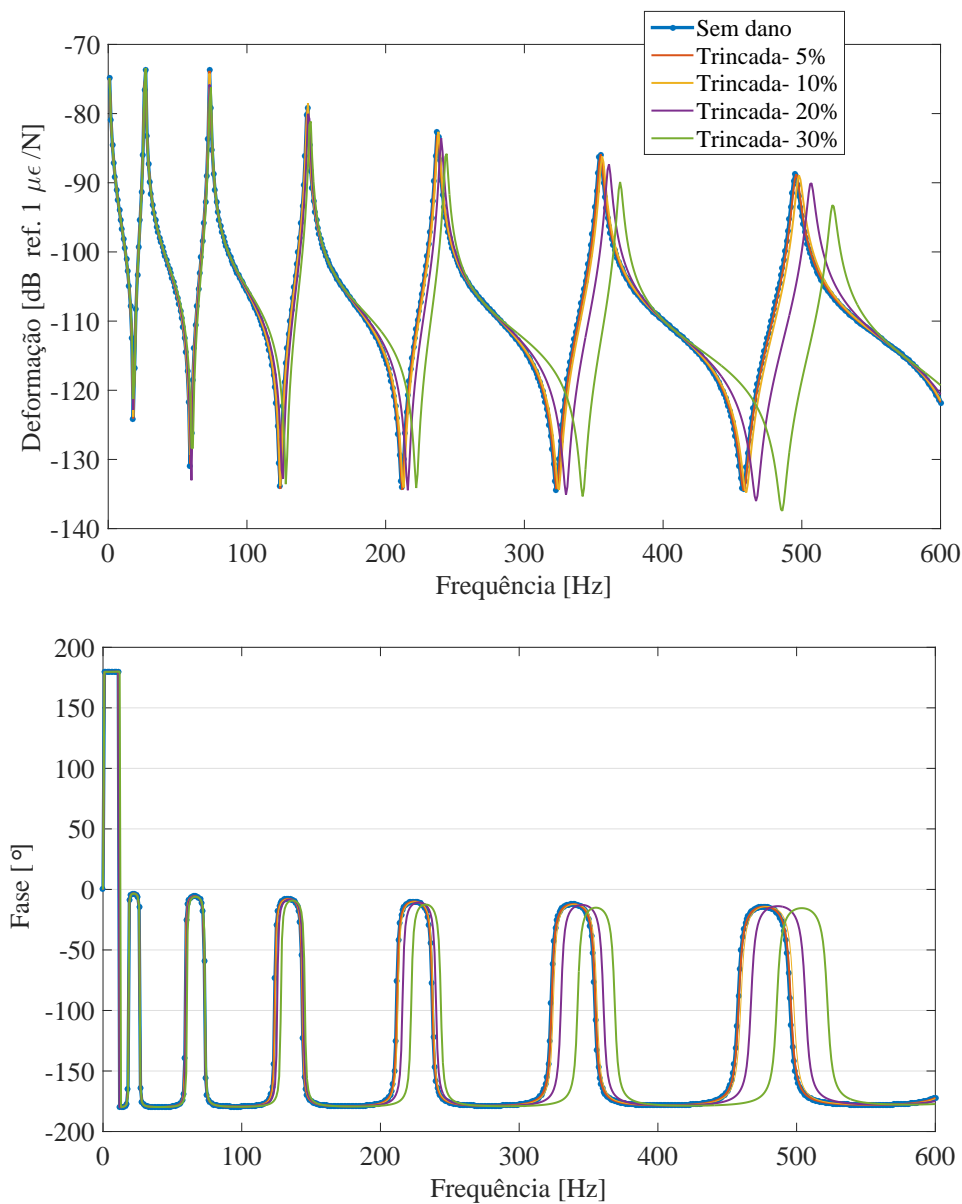


Figura 5.25 – Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 10% de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura.

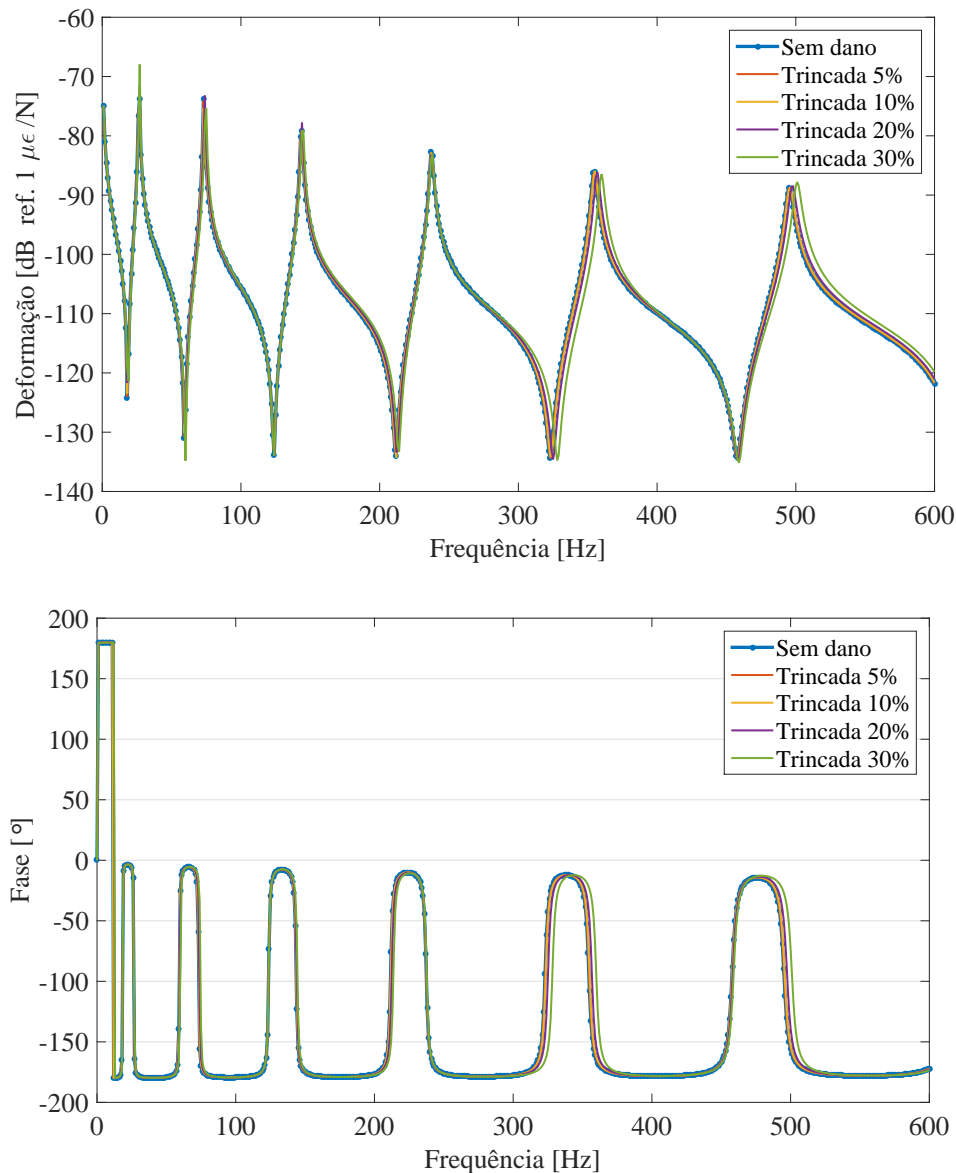


Figura 5.26 – Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 30% de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura.

As Fig.[5.25] à Fig.[5.28] mostram as SFRFs obtidas para a viga com e sem dano. Verifica-se que a resposta é alterada em função do tamanho da trinca e do aumento da frequência. Em todos os casos, nos modos de mais baixa frequência a variação da amplitude e da frequência de ressonância é muito pequena e para frequências mais altas as SFRF movem na para a esquerda. A presença de trinca em qualquer estrutura gera a perda de rigidez, e essa diminuição da rigidez afeta diretamente a SFRF, provocando algum tipo de alteração na resposta. Tal efeito é muito conhecido nas FRFs e através dessa mudança é possível monitorar a integridade da estrutura (DOEBLING et al., 1996; FARRAR; WORDEN, 2007). Assim, um estudo da SFRF e do seu comportamento quando há a presença de uma trinca é discutido nesta seção. Os autores salientam que a detecção e quantificação esta fora do escopo deste trabalho, ficando como tema para trabalhos futuros.

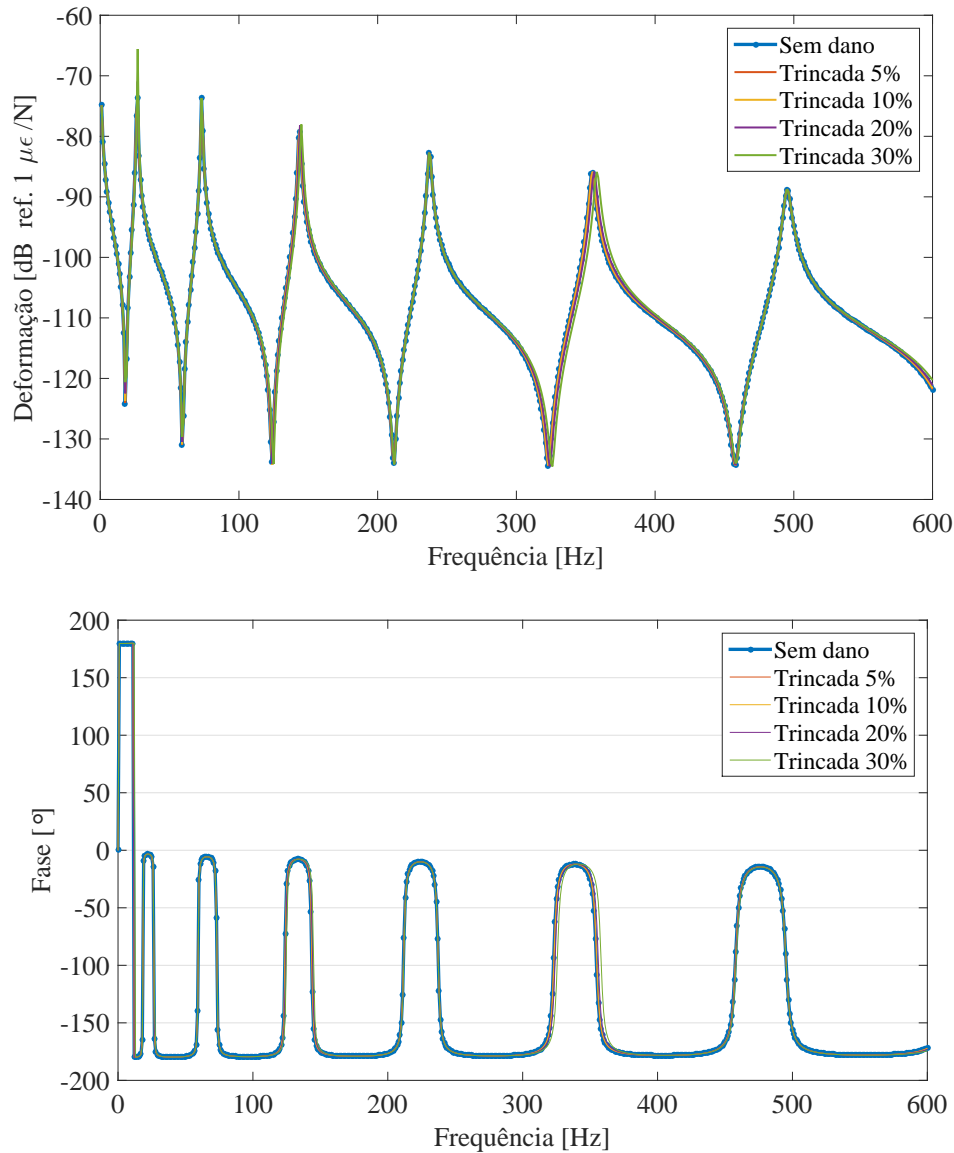


Figura 5.27 – Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 50% de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura.

Observa-se que nas SFRFs com a posição da trinca em 10% de L apresenta uma maior sensibilidade ao dano. Isso se deve à proximidade ao contorno e estar fora de um nó modal onde há a incidência de todos os modos. Quando a trinca esta localizada no meio da viga ($0.5L$) a sensibilidade da viga ao dano diminui, pois neste ponto geralmente é localizado um nó modal, observe que apenas os modos ímpares sofrem com alterações devido ao dano. Para a localização da trinca em $0.3L$ e $0.7L$, mesmo para uma trinca com profundidade maiores a alteração na SFRF ocorre no três últimos modos, isso porque esse o pontos são quase que simétricos entre si. A sensibilidade da trinca afeta os modos de mais alta frequência. Além da análise da SFRF para a detecção do dano, a fase também carrega a informação da trinca. Como a mudança da SFRF a fase também muda ficando, em alguns casos, mais visível o deslocamento dos modos da SFRF.

Portanto, este estudo demonstra que a posição da trinca é o fator influenciante para

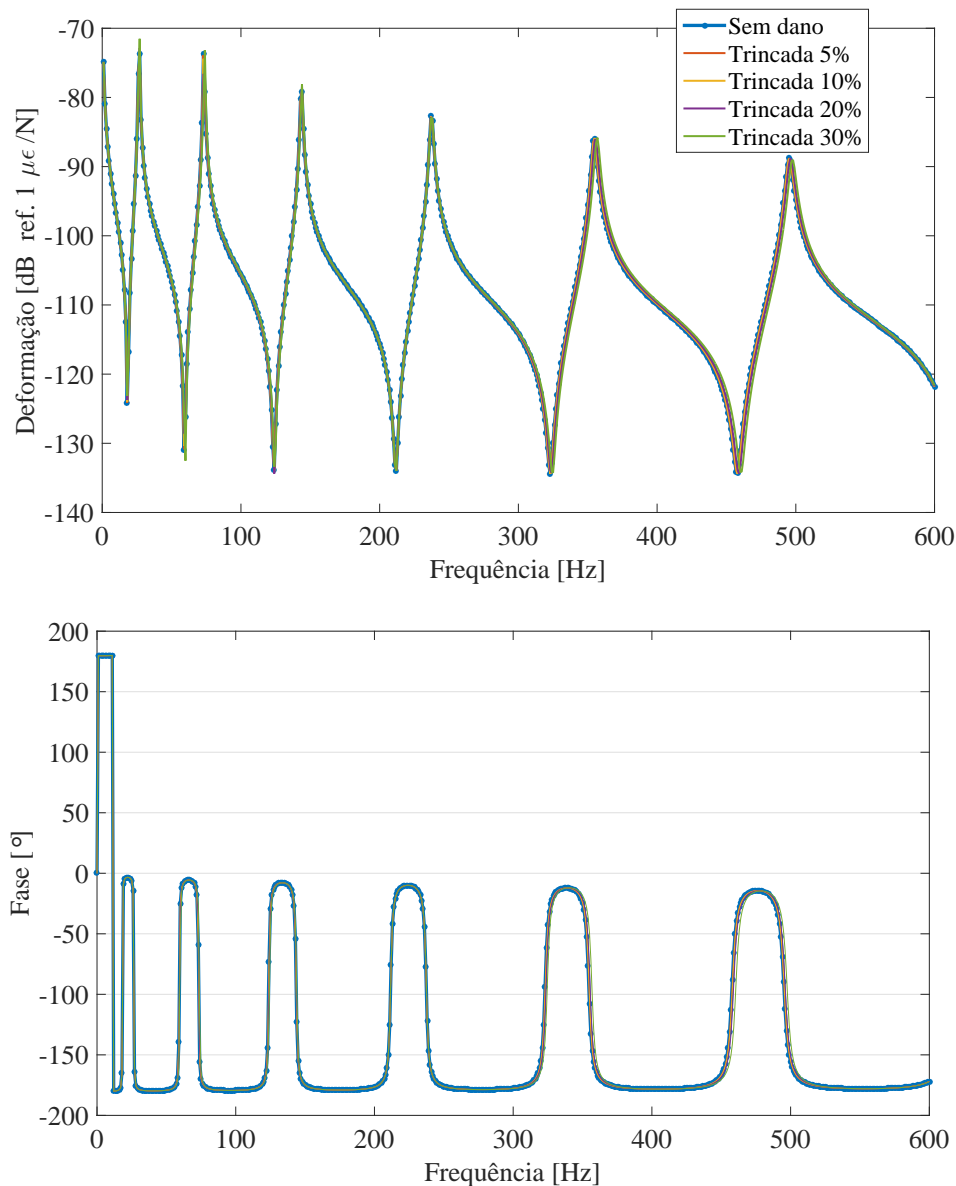


Figura 5.28 – Comparação das SFRFs e respectivas fases da viga com e sem dano. Posição da trinca à 70% de L e profundidade da trinca de 5, 10, 20 e 30% da altura.

um possível caso de detecção e quantificação. O tamanho da trinca está diretamente ligado a perda de rigidez e a localização está conectada com a estrutura física. Pois em casos que a posição da trinca estiver próximo a um nó modal impossibilita em alguns casos a indicação da integridade da viga. Assim esses dois parâmetros são sempre as variáveis de grande interesse na análise da detecção de dano e para um estudo acurado é necessário uma pré análise da vibração do sistema.

5.5 Considerações finais

Nesta secção foram apresentados estudos numéricos e experimentais para a estimação da SFRF. No estudo numérico a deformação obtida via SEM foi comparada

com a calculada utilizando um método abordado em muitos trabalhos que é a análise modal de deformação. Como primeira análise, realizou-se um teste de reciprocidade da reposta onde os dois métodos respeitam o teorema da reciprocidade descrita por Maxwell. Comparando ainda os resultados numéricos as SFRF estimadas com o SEM tem uma boa aproximação com as obtidas através da análise modal, apresentando algumas diferenças nas anti-ressonâncias. Tal efeito pode ser devido a convergência de modos utilizado na análise modal.

Além da validação numérica duas validações experimentais são apresentadas. Uma delas utilizou dados experimentais apresentado por [Santos et al. \(2015\)](#), tanto do SEM quanto a análise modal estimarão as SFRS medidas em dois diferentes pontos, porém o SEM teve uma melhor aproximação da curva experimental. Na segunda validação experimental foram utilizados dados experimentais realizados em um corpo de prova de teste de fadiga. As SFRS foram medidas em três diferentes pontos e diretamente comparadas com a deformação dinâmica calculadas com o SEM, em todas as medições o SEM foi capaz de estimar a SFRF com muita precisão em comparação com o experimental, mostrando assim sua eficiência na estimação direta das deformações

6 Conclusão

Neste trabalho foi apresentado a formulação da deformação dinâmica através do método do elemento espectral (SEM) de viga com e sem trinca. Resultados representados na forma de *strain frequency response function* SFRFs que demonstram o comportamento da deformação dinâmica em função da frequência de excitação.

No capítulo 3 foi apresentada a formulação da deformação dinâmica utilizando o SEM. Para a realização do modelamento foram utilizadas as propriedades mecânicas do elemento estudado, neste caso viga, para se correlacionar a força com a deformação. Assim foi possível chegar à matriz de rigidez exata com a resposta em deformação, possibilitando a determinação da SFRF. Para validar a formulação proposta, no capítulo 4 é demonstrada a teoria da análise modal que utilizando a mesma abordagem do SEM para se correlacionar o deslocamento e a deformação. É apresentada a teoria utilizada para se chegar à SFRF através da análise modal, possibilitando assim a comparação com a SFRF gerada via SEM.

No capítulo 5, são demonstrados os resultados numéricos e experimentais. Os resultados obtidos a partir da formulação proposta neste trabalho são analisados na forma de SFRF e suas respectivas fases. Inicialmente foram avaliadas a reciprocidade e as propriedades dinâmicas do elemento de viga, tanto da FRF quanto da SFRF. Verificou-se que a reciprocidade existe e foram determinadas as propriedades dinâmicas com assertividade. A validação dos resultados é realizada através da comparação com as respostas obtidas com o SEM, análise modal teórica e dois experimentos, um encontrado na literatura e outro realizado no Laboratory of Mechanic of Normandy (LMN) - INSA de Rouen. A validação da formulação foi obtida com sucesso em todas as comparações realizadas, pois dentre os métodos utilizados o SEM se aproximou mais dos valores experimentais quando se comparado à análise modal. Ao se comparar o SEM ao dados do experimento realizado se obteve uma boa aproximação das SFRFs.

Ao final, são realizadas verificações do comportamento da deformação dinâmica em um elemento viga com presença de trinca. Na simulação os resultados mostraram uma variação nas respostas os elementos trincados com relação aos elementos saudáveis, tendo dependência não somente em função do tamanho da trinca, mas também com sua localização. Tais resultados podem ser tratados mais a fundo e serem correlacionados com estudos voltados à mecânica da fratura e fadiga dos materiais em conjunto com a formulação proposta neste trabalho.

6.1 Trabalhos Futuros

Com a implementação realizada, surgiram possibilidades de extensão do trabalho realizado, podendo gerar pesquisas futuras, sendo elas:

- Análise da propagação de trincas em materiais homogêneos através da implementação da deformação dinâmica via SEM acoplada aos métodos de mecânica da fratura.
- Verificação do impacto do amortecimento estrutural na propagação de trincas através de análises da deformação dinâmica via SEM.

6.2 Publicações

Durante o desenvolvimento desta dissertação foi publicado um artigo no DINAME 2019 – XVIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, sendo:

Silva, T.P., Machado, M.R., Khalij, L. Dynamic strain analysis using spectral element method. Proceeding of XVIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME2019, Buzios-Rio de Janeiro, Brazil, 2019.

Referências

- ADHIKARI, S.; FRISWELL, M. Distributed parameter model updating using the karhunen-loève expansion. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, p. 326–339, 2010. Citado na página 8.
- AJITH, V.; GOPALAKRISHNAN, S. Spectral element approach to wave propagation in uncertain beam structures. *Journal of Mechanics of materials and structures*, v. 5(4), p. 637–659, 2010. Citado na página 8.
- ATTILIO, C. et al. Displacements in a vibrating body by strain gauge measurements. *IMAC1*, v. 191(2), p. 119–25, 1995. Citado na página 10.
- AVITABILE, P. *Modal Testing: A Practitioner's Guide*. [S.l.]: John Wiley AND Sons Ltd., 2017. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 46.
- BEER, F.; RUSSELL, J. *Mechanics of Materials*. 7. ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2012. 902 p. ISBN 9780073398235. Citado na página 11.
- BERNASCONI, O.; EWINS, D. Modal strain/stress fields. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 4(2), p. 68–76, 1989a. Citado 4 vezes nas páginas 9, 31, 38 e 44.
- BESKOS, D.; NARAYANAN, G. Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of fast fourier transform. *Journal Computers and Structures*, v. 9(2), p. 145–150, 1978. Citado na página 6.
- CHOU, Y. Modal testing for continuous systems. *5th IMAC*, v. 1, p. 650–654, 1987. Citado na página 44.
- CUI, H. et al. A damage detection method based on strain modes for structures under ambient excitation. *Measurement*, v. 125, p. 438–446, 2018. Citado na página 21.
- DOEBLING, S. W. et al. *Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics- A Literature Review*. [S.l.], 1996. Citado na página 57.
- DOYLE, J. F. *Wave propagation in structures : spectral analysis using fast discrete Fourier transforms*. Second. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1997. (Mechanical engineering). Citado 8 vezes nas páginas 1, 6, 7, 11, 15, 17, 19 e 21.
- EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory and Practice*. [S.l.]: Research Studies Press, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 37.
- FABRO, A. T. et al. Stochastic analysis of a cracked rod modeled via the spectral element method. *Mechanics Research Communications*, v. 37, p. 326–331, 2010. Citado na página 8.

- FANG, X. et al. Experimental and Theoretical Investigation of Lowering the Band Gaps of Phononic Crystal Beams through Fluid-Solid Coupling. *Crystals*, v. 7, n. 12, p. 366, 2017. ISSN 2073-4352. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/2073-4352/7/12/366>>. Citado na página 9.
- FARRAR, C. R.; WORDEN, K. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the royal society*, v. 365, p. 303 – 315, 2007. Citado na página 57.
- FU, J. H. Z. *Modal Analysis*. [S.l.]: Oxford, UK:Butterworth-Heinemann., 2001. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 37.
- GANGULY, V.; SCHMITZ, T. L. Phase correction for frequency response function measurements. *Precision Engineering*, Elsevier Inc., v. 38, n. 2, p. 409–413, 2014. ISSN 0141-6359. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.precisioneng.2013.12.007>>. Citado 2 vezes nas páginas ix e 41.
- GAUTRELET1., C. et al. Linearity investigation from a vibratory fatigue bench. *Mechanics & Industry*, v. 20(1), p. 1–11, 2019. Citado na página 52.
- GEVINSKI, J. R. *Determinação da Deformação Dinâmica em Superfícies utilizando Parametros Vibracionais*. [S.l.]: Universidade de Campinas-UNICAMP, Brasil, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 21, 30 e 38.
- GOPALAKRISHNAN, S.; CHAKRABORTY, A.; MAHAPATRA, D. R. *Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures*. [S.l.]: Springer Science and Business Media., 2005. Citado 4 vezes nas páginas 1, 7, 11 e 14.
- HAGEDORN, P.; DASGUPTA, A. *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*. [S.l.]: John Wiley, 2007. Citado na página 34.
- KHALIJ, L.; GAUTRELET, C.; GUILLET, A. Fatigue curves of a low carbon steel obtained from vibration experiments with an electrodynamic shaker. *Materials and Design*, Elsevier Ltd, v. 86, n. July, p. 640–648, 2015. ISSN 18734197. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2015.07.153>>. Citado na página 52.
- KIRYU, S.; GAN, B. S. Advanced Civil and Environmental Engineering Vibrational Analysis of Levy-Type Plates by Using SEM. v. 1, n. 1, p. 18–29, 2018. Citado na página 9.
- KOSS, L.; KARCZUB, D. Euler beam bending wave solution predictions of dynamic strain using frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 184(2), p. 229–244, 1995. Citado na página 21.
- KRANJC, T.; SLAVIC, J.; BOLTEZAR, M. A comparison of strain and classic experimental modal analysis. *Journal of Vibration and Control*, v. 22(2), p. 371–381, 2016. Citado na página 44.
- KRAWCZUK, M. Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 80, p. 1809–1816, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 24.
- KRAWCZUK, M.; GRABOWSKA, J.; PALACZ, M. Longitudinal wave propagation. part i- comparison of rod theories. *Journal of Sound and Vibration*, v. 295, p. 461–478, 2006. Citado na página 1.

KRAWCZUK, M.; PALACZ, M.; OSTACHOWICZ, W. The dynamic analysis of a cracked Timoshenko beam by the spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, n. 5, p. 1139–1153, 2003. ISSN 0022460X. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 7.

KRAWCZUK, M.; PALACZ, M.; OSTACHOWICZ, W. Wave propagation in plate structures for crack detection. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 991–1004, 2004. ISSN 03797112. Citado na página 7.

KUDELA, P. et al. Modelling of wave propagation in composite plates using the time domain spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 302, n. 4-5, p. 728–745, 2007. ISSN 10958568. Citado na página 7.

LEE, U. Vibration analysis of one-dimensional structures using the spectral transfer matrix method. *Engineering Structures*, v. 22, n. 6, p. 681–690, 2000. Citado na página 17.

LEE, U. *Spectral Element Method in Structural Dynamics*. [S.l.]: BInha University Press, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 1, 6, 7, 11 e 21.

LEE, U.; KIM, D.; PARK, I. Dynamic modeling and analysis of the PZT-bonded composite Timoshenko beams: Spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 332, n. 6, p. 1585–1609, 2013. ISSN 0022460X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2012.06.020>>. Citado na página 7.

LEE, U. T. K. Vibration Analysis of Thin Plate Structures Subjected to a Moving Force Using Frequency-Domain Spectral Element Method. *Shock and Vibration*, v. 2018, p. 27, 2018. Citado na página 9.

LI, D. et al. A review of damage detection methods for wind turbine blades. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 24, n. 3, p. 033001, 2015. ISSN 0964-1726. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0964-1726/24/i=3/a=033001?key=crossref.2d9872ce308594acb3e4ec59d5094560>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 46.

MACHADO, M. R.; ADHIKARI, S.; SANTOS, J. M. A spectral approach for damage quantification in stochastic dynamic systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 88, n. November 2016, p. 253–273, 2017. ISSN 10961216. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.11.018>>. Citado na página 8.

MACHADO, M. R.; ADHIKARI, S.; SANTOS, J. M. C. D. Spectral element-based method for a one-dimensional damaged structure with distributed random properties. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer Berlin Heidelberg, v. 2, p. 1–31, 2018. ISSN 1678-5878. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-018-1330-2>>. Citado na página 8.

MACHADO, M. R.; APPERT, A.; KHALIJ, L. Dynamic analysis of a fatigue specimen subjected to a random base excitation via spectral element method. In: *ICVRAM ISUMA UNCERTAINTIES 2018, Florianopolis-SC, Brasil*. [S.l.: s.n.], 2018. Citado na página 54.

MACHADO, M. R.; APPERT, A.; KHALIJ, L. Spectral formulated modelling of an electrodynamic shaker. *Mechanical Research Communication*, v. 1, p. Under review, 2019. Citado na página 54.

MACHADO, M. R.; SANTOS, J. M. C. D. Reliability analysis of damaged beam spectral element with parameter uncertainties. *Shock and Vibration*, v. 2015, p. 12 pages, 2015. Citado na página 8.

- MACHADO, S. A. M.; SANTOS, J. D.; J.R.F.ARRUDA. Estimation of beam material random field properties via sensitivity-based model updating using experimental frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier Ltd, v. 102, p. 180–197, 2018. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327017304727>>. Citado na página 8.
- MAIA, N.; SILVA, J. *Experimental Modal Analysis*. [S.l.]: Baldock, UK: Research Studies Press., 1997. Citado na página 30.
- MAIA, N. M.; JULIO, M. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. [S.l.]: Research Studies Pre, 1997. Citado na página 30.
- MEIROVITCH, L. *Principles and techniques of vibrations*. [S.l.]: Prentice-Hal, 1997. Citado na página 34.
- OKUBO, N.; YAMAGUSHI, K. Predictisociety for experimental mechanics:international modal analysis conference, nashville. In: . [S.l.: s.n.], 1995. Citado na página 9.
- OSTACHOWICZ, W. M. Damage detection of structures using spectral finite element method. *Computers & Structures*, v. 86, p. 454–462, 2008. Citado na página 7.
- PALACZ, M.; KRAWCZUK, M. Vibration parameters for damage detection in structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 249(5), p. 999–1010, 2002. Citado na página 7.
- PANTERA, T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, v. 54, p. 468–488, 1984. Citado na página 7.
- PARK, I.; LEE, U. Dynamic analysis of smart composite beams by using the frequency-domain spectral element method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 26, n. 8, p. 2511–2521, 2012. ISSN 1738494X. Citado na página 7.
- PARK, I.; LEE, U. Spectral element modeling and analysis of the transverse vibration of a laminated composite plate. *Composite Structures*, Elsevier Ltd, v. 134, p. 905–917, 2015. ISSN 02638223. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.111>>. Citado na página 8.
- PEETERS, B. Strain-Based Experimental Modal Analysis : Use of Mode Curvature and Strain-To-Displacement Relations of Mode Curvature and Strain-To-Displacement. n. JUNE, 2015. Citado na página 21.
- PENG, H.; MENG, G.; LI, F. Modeling of wave propagation in plate structures using three-dimensional spectral element method for damage detection. *Journal of Sound and Vibration*, v. 320, n. 4-5, p. 942–954, 2009. ISSN 0022460X. Citado na página 7.
- PRZEMIENIECKI, J. *Theory of matrix structural analysis*. [S.l.]: Courier Corporation., 1985. Citado na página 6.
- RAO, S. *Vibration of Continuous Systems*. [S.l.: s.n.], 2008. ISBN 9780471771715. Citado na página 31.
- RAO, S. S. *Mechanical Vibration*. [S.l.]: Person Prentice-Hall, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 34.

- ROVŠČEK, D.; SLAVIČ, J.; BOLTEŽAR, M. The use of strain sensors in an experimental modal analysis of small and light structures with free-free boundary conditions. *JVC/Journal of Vibration and Control*, v. 19, n. 7, p. 1072–1079, 2013. ISSN 10775463. Citado na página 2.
- SANTOS, F. D. et al. Strain-based experimental modal analysis: Use of mode curvature and strain-to-displacement relations. In: *In: Proceedings of ICEDyn 2015: International Conference on Structural Engineering Dynamics, Lagos, Algarve, Portugal, 22-24 June 2015*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 9 vezes nas páginas x, 3, 10, 40, 44, 46, 49, 50 e 60.
- SANTOS, F. dos et al. An overview of experimental strain-based modal analysis methods. In: *International Conference on Noise and Vibration Engineering: ISMA 2014, Leuven, Belgium*. [S.l.: s.n.], 2014. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 44.
- SAVI, M.; PAULA, A. D. *Vibrações Mecânicas*. 1. ed. [S.l.]: LTC-Gen, 2017. 226 p. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 34.
- SERIANI, G.; PRIOLO, E. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. p. 337–348, 2011. Citado na página 9.
- TADA, H.; PARIS, P.; IRWIN, G. R. *Stress Analysis of Cracks Handbook*. [S.l.]: Del Research Corporation, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- TSUBOI, S. The Spectral-Element Method in Seismology The Spectral-Element Method in Seismology. n. January 2005, 2014. Citado na página 9.
- VEBLEN, O. Theory on Plane Curves in Non-Metrical Analysis Situs. *Transactions of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 6, n. 1, p. 83–98, 1905. ISSN 00029947. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1986378>>. Citado na página 12.
- V.KOLOUSEK. *Dynamics in engineering structures*. [S.l.]: London:Butterworths., 1973. Citado na página 6.
- YAM, L.; T.P.LEUNG; D.B.LI. Experimental study on modal strain analysis of rectangular thin plates with small holes. *Journal of Sound and Vibration*, v. 191(2), p. 251–260, 1994. Citado na página 31.
- YAM, L.; T.P.LEUNG; D.B.LI. Theoretical and experimental study of modal strain analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 191(2), p. 251–260, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 10, 31 e 38.
- ZHU, H.-z. et al. Spectral element method for vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Springer Netherlands, v. 7, 2018. ISSN 1569-1713. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10999-018-9416-7>>. Citado na página 9.