



**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA EM MODELOS DE FRATURA E
FADIGA UTILIZANDO POLINÔMIOS DE EXPANSÃO DE CAOS**

NELSON AFANADOR GARCÍA

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA EM MODELOS DE
FRATURA E FADIGA UTILIZANDO POLINÔMIOS DE
EXPANSÃO DE CAOS**

NELSON AFANADOR GARCÍA

ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO
CIVIL**

PUBLICAÇÃO: E.TD-01A/19
BRASÍLIA/DF: 14 DE FEVEREIRO - 2019

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA EM MODELOS DE
FRATURA E FADIGA UTILIZANDO POLINÔMIOS DE
EXPANSÃO DE CAOS**

NELSON AFANADOR GARCÍA

TESE SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADA POR:

Prof. Francisco Evangelista Jr., Ph. D. (ENC-UnB)
(Orientador)

Prof. Luciano Mendes Bezerra, Ph.D. (ENC-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, DSc. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Fábio Comes de Castro, DSc. (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Frederico Martins Alves da Silva, DSc. (EEC-UFG)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 14 DE FEVEREIRO DE 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

GARCÍA, NELSON AFANADOR.

Quantificação da incerteza em modelos de fratura e fadiga utilizando polinômios de expansão de caos. [Distrito Federal] 2019.

xxx, 172 p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2019). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Polinômios de expansão de caos

2. Mecânica da fratura

3. Fadiga

4. Viscoelasticidade

I. ENC/FT/UnB

II. Título (Doutor)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GARCÍA, N. A. (2019). Quantificação da incerteza em modelos de fratura e fadiga utilizando polinômios de expansão de caos. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 01A/19, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, DF, 172 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Nelson Afanador García

TÍTULO: QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA EM MODELOS DE FRATURA E FADIGA UTILIZANDO POLINÔMIOS DE EXPANSÃO DE CAOS.

GRAU: Doutor

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Nelson Afanador García
Condominio campestre Torres del Cable, casa 103
546551 Ocaña-Norte de Santander-Colombia.
e-mail: nafanadorg@ufpso.edu.co

Dedicatória

Dedicado a minha filha, meu filho e minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar saúde física e mental e força para realizar esta pesquisa, além de estar presente em minha vida, principalmente na minha família. Um agradecimento especial à Virgem de Torcoroma por seu apoio e por cuidar de todos nós.

À minha esposa, filha e filho, por seu amor e apoio incondicionais mesmo que as distancias em alguns momentos foram grandes.

Aos meus pais, Rosalba García Ramirez e Luis Enrique Afanador Velasco pelos ensinamentos que me permitiram, através do trabalho, ser um homem digno. À meu pai e meu irmão José Luis por seu apoio.

Ao Professor Francisco Evangelista Junior, meu Orientador, pela orientação de alto nível profissional, objetiva, acompanhamento, cobranças e apoio ao longo do trabalho. Muito obrigado Professor.

Ao programa PECC (Pos-graduação em Estruturas e Construção Civil), departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnología, Universidade de Brasília e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Professor José Alexander Araújo por seu apoio para o uso do laboratório de Ensaios de Materiais em engenharia mecânica, UnB.

À Universidade Francisco de Paula Santander Ocaña (UFPSO) Colombia, pelo apoio financeiro e tecnológico, e para todos os funcionários serei grato.

À Universidad de Castilla-La Mancha (UCLM), Ciudad Real, España, por me aceitar durante a minha estadia no grupo de pesquisa de mecânica de sólido e especialmente ao Ph.D. Gonzalo Ruiz Lopez por sua contribuição científica.

Aos amigos e colegas do PECC pelo companherismo, amizade e solidariedade, que participaram direta ou indiretamente para a elaboração desta tese de doutorado.

Aos amigos de agora e sempre: Iago, Carlos, Jessica Borges, Jessica Sousa, Carla, Wilson, Nataly, Alvaro, Augusto e Gelsão.

As palavras são poucas para expressar meu agradecimento pelo acompanhamento, apoio e grande amizade, que sempre recebi de meu caro colega e amigo Iago.

Agradeço também aos professores que no decorrer da minha formação doutoral incentivaram e contribuíram em minha formação, especialmente: Luciano, William e Artur Antônio.

Nelson Afanador García

Orientador: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, 2019.

QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA EM MODELOS DE FRATURA E FADIGA UTILIZANDO POLINÔMIOS DE EXPANSÃO DE CAOS

Esta tese objetiva o desenvolvimento de técnicas não intrusivas utilizando polinômios de expansão de caos (PEC) para quantificação de incerteza na resposta mecânica de modelos viscoelásticos, de fadiga e de mecânica da fratura. Este trabalho utiliza a formulação do PEC tradicional para quantificar a incerteza, mas também, propõe uma metodologia de PEC Adaptativo (PEC_{Adap}) que utiliza os componentes principais de cada grau e dimensão do polinômio como uma técnica que minimiza o número de amostras para construir a aproximação estocástica. Os resultados demonstraram a eficiência e acurácia da metodologia proposta na quantificação de incerteza no módulo de relaxação do concreto e na deflexão em estruturas, além de, quantificar a incerteza do número de ciclos para falha por fadiga em membros estruturais metálicos sob carregamento constante e variável.

Uma metodologia de ensaio baseada no efeito de escala de Bazant também foi proposta para determinar a energia inicial e final de fratura, tamanho da zona de processo e deslocamento de abertura na ponta da trinca crítico, propriedades usadas em modelos de mecânica da fratura. No total foram corpos de prova de diferentes tamanhos em forma de disco compacto (DCT), variando-se a taxa de deslocamento. Testes de hipótese sobre a independência das propriedades da fratura com relação aos diferentes tamanhos foram realizados, junto com uma análise estatística dos resultados dos ensaios. Por fim, uma aplicação do PEC para estimar o carregamento máximo e a energia total de fratura em simulações numéricas com modelo de dano foi executada. Os resultados demonstraram que ambas as metodologias de ensaio como os modelos foram capazes de simular incerteza em modelos não lineares de danificação.

Palavras Chave: Polinômios de expansão de caos, Mecânica da fratura, Fadiga, Viscoelasticidade.

ABSTRACT

This thesis aims to develop non intrusive techniques using chaos expansion polynomials (PEC) to to the uncertainty quantification of the mechanical response of viscoelastic models, fatigue and fracture mechanics based on random output variables. This work uses traditional PEC to quantify the uncertainty, of those models, and proposes a methodology of Adaptive PEC Adaptive PEC (PEC_{Adap}), which uses the main components of each degree and dimension of the polynomial, as a technique that minimizes the number of samples to construct the stochastic approximation. The results demonstrated the efficiency and accuracy of the proposed methodology in the quantification of uncertainty in the concrete relaxation modulus and the deflection in structures, besides quantifying the uncertainty of the number of cycles for fatigue failure in metallic structural members under constant and variable loading.

A test methodology based on the Bažant size effect was also proposed to determine the initial and final fracture energy, process zone size and the critical crack tip opening displacement, properties used in fracture mechanics models. Compact disc-shaped (DCT) specimens of different sizes were tested varying the displacement rate. Hypothesis tests on the independence of fracture properties with respect to different sizes were performed, together with a statistical analysis of the results of the tests. Finally, an application of the PEC to estimate the maximum load and total fracture energy in numerical simulations with damage model was performed. The results demonstrated that both test methodologies such as models were able to simulate uncertainty in nonlinear models with evolving damage.

Keywords: Chaos Expansion Polynomial, Fracture Mechanics, Fatigue, Viscoelasticity.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E ESTADO DA ARTE	2
1.2	JUSTIFICATIVA	4
1.3	OBJETIVOS	4
1.4	CONTRIBUIÇÕES	5
1.5	RESUMO DA METODOLOGIA DA TESE	6
1.6	ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO	7
2	Fundamentação Teórica	8
2.1	POLINÔMIOS DE EXPANSÃO DE CAOS	8
2.1.1	CONSTRUÇÃO DE POLINÔMIOS DE CAOS	9
2.1.2	DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DO PEC	13
2.1.3	TRANSFORMAÇÃO DO PEC COM DIFERENTES FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE	15
2.1.4	PÓS-PROCESSAMENTO DOS COEFICIENTES DE EXPANSÃO DE CAOS	17
2.1.5	SEQUÊNCIA DE SOBOL	18
2.1.6	APLICAÇÃO GERAL DO PEC	19
2.2	CONFIABILIDADE	21
2.2.1	INTRODUÇÃO	21
2.2.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	23
2.3	VISCOELASTICIDADE	24
2.3.1	CONCRETO ENVELHECIDO	26
2.4	FADIGA	26
2.4.1	COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO CÍCLICO	26
2.4.2	CURVA DEFORMAÇÃO-VIDA	29
2.4.3	EFEITO DA TENSÃO MÉDIA	29
2.4.4	CARREGAMENTO DE AMPLITUDE VARIÁVEL	30
2.4.5	CÁLCULO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM ENTALHES	32
2.5	MECÂNICA DA FRATURA	33
2.5.1	NOÇÕES BÁSICAS DE MECÂNICA DA FRATURA	34
2.5.2	DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DE FRATURA CONSIDERANDO O EEB	36
2.5.3	MODELO DE ZONA COESIVA	38
2.6	MODELO DE DANO	42

2.7	FORMULAÇÃO DO MODELO DE DANO UTILIZADO	43
2.7.1	VARIÁVEL DE CONTROLE DE DANO	44
2.7.2	CRITÉRIO DE INÍCIO DE DANO.....	45
2.7.3	LEI DE EVOLUÇÃO DO DANO.....	45
3	Verificação do PEC em fadiga e viscoelasticidade.....	46
3.1	FADIGA	46
3.1.1	ANÁLISE DE FADIGA EM CORPOS ENTALHADOS SOB CARREGAMENTO DE AM- PLITUDE CONSTANTE.....	47
3.1.2	ANÁLISE DE FADIGA EM CORPOS ENTALHADOS SOB CARREGAMENTO DE AM- PLITUDE VARIÁVEL	54
3.2	VISCOELASTICIDADE	59
3.2.1	QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO.....	60
3.2.2	QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DAS DEFLEXÕES EM VIGA BIAPOIADA	65
3.3	CONTRIBUIÇÕES	69
4	Polinômio de expansão de caos adaptativo (PEC_{Adap}).....	70
4.1	COMPONENTES PRINCIPAIS DO PEC_C	71
4.1.1	FUNÇÕES DO PROGRAMA DE PEC_C Y PEC_{Adap}	72
4.2	VERIFICAÇÃO	73
4.3	APLICAÇÃO DO PEC_{Adap} NA DEFLEXÃO DA PONTE KOROR-BABELDAOB COM ENVELHECIMENTO DO CONCRETO.....	84
4.4	CONTRIBUIÇÕES	90
5	Metodologia experimental proposta para materiais quase-frágeis em ensaios de fratura em modo I.....	91
5.1	EXPERIMENTAÇÃO.....	92
5.1.1	PROJETO DAS FÔRMAS PARA OS CORPOS DE PROVA	93
5.1.2	CONSTRUÇÃO DOS CP.....	95
5.1.3	PROCEDIMENTO DE ENSAIO À FRATURA	96
5.1.4	ENSAIO COMPLEMENTARES	98
5.1.5	RESULTADOS DO ENSAIO DA MECÂNICA DA FRATURA EM DCT PARA DIFE- RENTES \dot{W} E \dot{w}	99
5.1.6	RESULTADOS DO EEB SOBRE O DCT CONSIDERANDO DIFERENTES \dot{w}	104
5.1.7	TESTES DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA DAS PROPRIEDADES DA FRATURA	106
5.2	VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO E PROPRIEDADES DO DCT EXPERIMENTAL	111
5.3	CONTRIBUIÇÕES	114
6	Quantificação da incerteza das propriedades da mecânica da fratura utilizando DCT e vigas via EF, PEC_C e P_{Adap}.....	115
6.1	METODOLOGIA DO PEC APLICADA EM DCT E VIGAS EM MATERIAL QUASE FRÁGIL	116
6.2	INFLUÊNCIA DA \dot{w} NO P_{max} EM DCT.....	117

6.3	INFLUÊNCIA DA \dot{w} NA G_F EM DCT	123
6.4	INFLUÊNCIA DA \dot{w} NAS PROPRIEDADES DA MECÂNICA DA FRATURA EM SEN-TPB	128
6.4.1	VERIFICAÇÃO DA OBJETIVIDADE DA MALHA DE EF E DOS PASSOS DE DESLOCAMENTO	128
6.4.2	INFLUÊNCIA DA \dot{w} NO P_{max}	130
6.5	CONTRIBUIÇÕES	135
7	Conclusões	136
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	138
	Anexos	151
I	PEC aplicado em confiabilidade	152
II	Análise estatística do ensaio de fratura em modo I	154
III	Validação do modelo numérico proposto	168

LISTA DE FIGURAS

2.1	Truncamento para o PEC de $n=2$ e $p=6$, com (a) $\ \xi\ _{1,00} \leq 6$, (b) $\ \xi\ _{0,75} \leq 6$ e (c) $\ \xi\ _{0,50} \leq 6$	12
2.2	Diagrama de fluxo do método da colocação baseado em regressão	17
2.3	Função de densidade conjunta f_{ReSe} da função de desempenho $Re - Se$. Adaptado de Nowak e Collins (2012).....	22
2.4	Analogia mecânica dos modelos elástico e viscoso simples, (a) fluido simples (newtoniano), (b) sólido elástico linear.	24
2.5	Modelo de Boltzmann para materiais viscoelásticos.	25
2.6	Ensaio de fadiga axial com deformação controlada, (a) carregamento uniaxial cíclico de amplitude constante, (b) laços de histerese. Adaptado de Morrow (1965)....	27
2.7	Representação esquemática de um laço de histerese estabilizado	27
2.8	Curva $S - \varepsilon$ cíclica, a) laços de histerese estabilizados, b) construção curva $S - \varepsilon$ cíclica	28
2.9	Ensaio de fadiga axial com deformação controlada, (a) com $\varepsilon_m \neq 0$, (b) variação da S_m ao longo do tempo (t).	30
2.10	Carregamento de amplitude variável	30
2.11	Predição de vida, segundo a regra de Palmgren-Miner, (a) carregamento de amplitude variável formado pelos trechos de amplitude constante, (b) curva S-N. Adaptado de Dowling (2012)	31
2.12	Escoamento cíclico em material elástico perfeitamente plástico, (a) lâmina perfurada sujeita a S_t cíclica, (b) tensão elástica sem escoamento, (c) variação de K de acordo com o nível de S_t e ε perto do furo. Adaptado Dowling (2012).....	32
2.13	Falha à fratura. (a) Modo I, (b) Modo II e (c) Modo III.	33
2.14	Comprimento equivalente de fratura	35
2.15	Modelo de zona coesiva: material heterogêneos frágil. Adaptado de Kuna (2010). ...	39
2.16	Curva de amolecimento bilinear considerando modelo não intrínseco (Roesler <i>et al.</i> , 2007; Park <i>et al.</i> , 2009).....	39
2.17	Função de modelo coesivo viscoso. Adaptado de Rosa <i>et al.</i> (2012).....	41
2.18	Função de amolecimento bilinear para diferentes \dot{w}_i	42
2.19	Elemento de um sólido deteriorado (adaptada de Lemaitre e Desmorat (2005)), (a) EVR de uma superfície do corpo, (b) operador de dano escalar (estado isotrópico). .	42
3.1	Diagrama de fluxo da metodologia PEC_C e SMC em problemas de fadiga.	48

3.2	Fadiga uniaxial, (a) placa de aço com 2 entalhes laterais semi-circulares, (b) carregamento de amplitude constante.....	49
3.3	Comparação das $f_{N_f}(N_f)$ do PEC_C e SMC para diferentes F_a , (a) 88,96 kN, (b) 53,38 kN e (c) 31,14 kN. Adaptado (Afanador <i>et al.</i> , 2016).	51
3.4	Caso de estudo de fadiga com carregamento de amplitude variável, a) Placa com furo central e b) Médias do carregamento com amplitude variável, μ_{S0}	55
3.5	Comparação da $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e $f_{N_f}(N_f)$ do PEC_C e SMC para a placa com furo central com diferente $S0$, a) $S0_1$, b) $S0_2$ e c) $S0_3$	57
3.6	Resultado da análise de sensibilidade do PEC_C para estimar o \hat{N}_f de uma placa de liga de alumínio 2024-T351 com furo central e $S0_1$	59
3.7	Comparação da $f_{E(t)}(E(t))$ e $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ para $t = 3E+03$ s e $3E+04$ s, com diferentes V	61
3.8	Comparação das $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ com diferentes V e t , (a) $t = 1E+00$ s, (b) $t = 3E+03$ s, (c) $t = 3E+04$ s e (d) $t = 1E+06$ s. Adaptado de Evangelista-Jr e Afanador (2016)	64
3.9	Envoltória do $\hat{E}(t)$ ($\mu_{\hat{E}(t)} \pm \sigma_{\hat{E}(t)}$) no tempo t para diferentes V	65
3.10	Viga biapoiada construída com material quase frágil e carregamento uniforme, $q(t)$.	65
3.11	Diagrama de fluxo da quantificação da incerteza na análise da $\hat{\delta}_N(t)$ em viga biapoiada, considerando modelo viscoelástico em materiais quase frágeis.	66
3.12	Distribuições das $F_{\hat{\delta}(t)_N}(\hat{\delta}(t)_N)$ estimadas por PEC_C , para (a) $t=1E+00$ s, (b) $t=3E+03$ s, (c) $t=3E+04$ s e (d) $t=1E+06$ s. Adaptado de Evangelista-Jr e Afanador (2016).	67
3.13	Comportamento de $\hat{\delta}(t)_N$; (a) curva do $V_{VA} - V_{\hat{\delta}(t)_N}$, (b) comportamento da $t - \mu_{\hat{\delta}(t)_N}$, em que, a) e b) adaptado de Evangelista-Jr e Afanador (2016), c) curva semilogarítmica do $t - \mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ e d) detalhe curva $t - \mu_{\hat{\delta}(t)_N}$, em que $t=0$ até $1,00E+05$ s.	69
4.1	Diagrama de fluxo do algoritmo do PEC_{Adap} proposto.	71
4.2	Número de coeficientes na adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 1.	74
4.3	Comparação dos componentes principais para $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1, 2$ e 3 , do PEC_{Adap} , e PEC_C do exemplo 1; variáveis (a) ξ_1 e (b) ξ_2	75
4.4	Comparação das $f_Y(y)$ da SMC , PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 1.....	75
4.5	Número de coeficientes na adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 2.	77
4.6	Comparação dos componentes principais para $p_{max} = 2$ com $p_{OB} = 1$ e 2 , e $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1$, do PEC_{Adap} e PEC_C do exemplo 2; variáveis (a) ξ_1 , (b) ξ_2 , (c) ξ_3 , (d) ξ_4 , (e) ξ_5 , (f) ξ_6 , (g) ξ_7 , (h) ξ_8 , (i) ξ_9 e (j) ξ_{10}	78
4.7	Comparação das $f_Y(y)$ da SMC , PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 2.....	79
4.8	Número de coeficientes na adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 3.	81
4.9	Comparação dos componentes principais para $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1, 2$ e 3 do PEC_{Adap} e PEC_C do exemplo 3; variáveis (a) ξ_1 , (b) ξ_2 e (c) ξ_3, ξ_4 e ξ_5	82

4.10	Comparação das a) $f_Y(y)$ e b) $F_Y(y)$ da SMC, PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 3....	82
4.11	Ponte Koror-Babeldaob (Bažant <i>et al.</i> , 2010).	84
4.12	Modelo da metade da ponte KB, a) Modelo de elementos finitos (Araújo <i>et al.</i> , 2017) e b) detalhe do meio do vão em que as deflexões serão simuladas.	85
4.13	Número de coeficientes na adaptabilidade do cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} com $p_{max} = 2$ para a ponte KB.....	87
4.14	Comparação dos componentes principais das VA ξ_1 até ξ_9 do PEC_{Adap} e PEC_C das $\hat{\delta}(t)$ da ponte KB para t_e e t' de 7 d.	87
4.15	Histograma e $f_X(x)$ das deflexões no centro do vão central da ponte KB para SEF, PEC_C e PEC_{Adap} para $t' = 7$ d e diferentes t_e , (a) 7 d, (b) 28 d e (c) 1.000 d.....	88
5.1	Fluxograma para determinar as propriedades da mecânica da fratura em materiais cimentícios.....	92
5.2	Representação esquemática do DCT. Adaptado de (Tada <i>et al.</i> , 2000).....	93
5.3	Projeto da forma do CP de $W = 112,90$ mm a) vista em planta, b) conjunto completo da forma, c) vista de perspectiva da base, d) vista lateral da base, e) cilindros internos para construção dos furos, f) vista lateral cilindro externo e entalhe em lâmina calibre 16. Unidades em mm.....	94
5.4	Fôrmas e concretagem dos CP (a) fôrmas com desmoldante e plástico, (b) moldagem dos CP com W_3 , W_2 e W_1	95
5.5	Corpos de prova moldados e cilindro de prova.	96
5.6	Detalhe do CP com chapa metálica para fixação.	96
5.7	Configuração de teste com o CP, a) proteção máquina universal de ensaios MTS 810 e b) detalhe <i>clip gages</i> e CP.	97
5.8	Máquina de ensaios para determinar f_c e f_t em CP cilíndrico, a) prensa Dinateste e b) prensa Denison.	99
5.9	Curvas experimentais $P-CMOD$ de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_2 e c) \dot{w}_1	100
5.10	Curvas experimentais $P-CMOD$ de W_2 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_2 e c) \dot{w}_1	100
5.11	Curvas experimentais $P-CMOD$ de W_1 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_2 e c) \dot{w}_1	101
5.12	Envoltória das curvas experimentais $P-CMOD$ para \dot{w}_3 avaliada para as diferentes W	102
5.13	Resultados do EEB para diferentes W e \dot{w} , a) \dot{w}_3 , b) \dot{w}_2 , e c) \dot{w}_1	104
5.14	Tensão nominal avaliada para diferentes \dot{w} do ensaio de fratura em modo I em DCT.105	
5.15	Curvas experimentais $P-CMOD$ e a proposta usando EF com diferente ε_{eq} em DCT de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_1	111
5.16	Curvas experimentais $P-CMOD$ e a proposta usando EF com diferente ε_{eq} em DCT de W_2 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	112
5.17	Curvas experimentais $P-CMOD$ e a proposta usando EF com diferente ε_{eq} em DCT de W_1 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	112
6.1	Fluxograma para quantificar a incerteza do P_{max} e G_F utilizando PEC_C e PEC_{Adap} em DCT e SEN-TPB.	116

6.2	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ dos \hat{P}_{max} usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} no ensaio de fratura em modo I com W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	119
6.3	Resultados da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para \hat{P}_{max_C} e $\hat{P}_{max_{Adap}}$ no ensaio de fratura de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	121
6.4	Curva $P-CMOD$ e $f_{\mathbf{X}}(x)$ do \hat{P}_{max} , da simulação EF do DCT com W_3 no ensaio de fratura com diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	123
6.5	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ da \hat{G}_F usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} no ensaio de fratura de W_3 com diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	125
6.6	Resultados da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para \hat{G}_F no ensaio de fratura de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	127
6.7	Geometria e malha de EF da SEN-TPB com $h = 250$ mm com diferente tipo de malha, a) Malha 4, $M4$; b) Malha 5, $M5$ e c) Malha 6, $M6$	129
6.8	Curvas de $P-CMOD$ do modelo proposto levando em consideração ε_{eq}^{MA} com respeito aos resultados experimentais de Roesler <i>et al.</i> (2007).	130
6.9	Número de passos considerando a malha M4 no modelo de EF na definição da curva $P-CMOD$ da SEN-TPB com $h = 250$ mm	130
6.10	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ do \hat{P}_{max} usando simulação em EF , PEC_C e PEC_{Adap} em SEN-TPB, com $h = 250$ mm e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	132
6.11	Resultado da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para \hat{P}_{max} na SUN-TBP e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1	134
II.1	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ do P_{max} para DCT com W_3 e 0,60 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap}	165
II.2	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ do P_{max} para DCT com W_3 e 0,06 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap}	165
II.3	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ da G_F para DCT com W_3 e 0,60 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap}	166
II.4	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ da G_F para DCT com W_3 e 0,06 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap}	166
II.5	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ da P_{max} para SUN-TPB com $h = 250$ mm e 0,60 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap}	167
II.6	Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ da P_{max} para SUN-TPB com $h = 250$ mm e 0,06 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap}	167
III.1	Modelo de EF do DCT para W_3	169
III.2	Comparação das curvas $P-CMOD$ do modelo proposto levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} com respeito aos resultados experimentais e ao modelo numérico de Amirkhonian <i>et al.</i> (2015).	169
III.3	Modelos de EF para DCT de W_3 com diferente tipo de malha, a) Malha 1, $M1$; b) Malha 2, $M2$ e c) Malha 3, $M3$	171
III.4	Curvas de teste de convergência das malhas de EF para W_3 e \dot{w}_1 , levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM}	172

III.5 Número de passos considerando a malha M2 no modelo de EF na definição da curva <i>P-CMOD</i> em DCT com W_3 e \dot{w}_3	172
--	-----

LISTA DE TABELAS

2.1	Algoritmo de Sudret (2012) aplicado na Equação (2.9).....	11
2.2	Transformação isoprobabilísticas $x = f(\xi)$ de variáveis aleatórias. Adaptado de Isukapalli (1999), Huang <i>et al.</i> (2009), Li <i>et al.</i> (2011)	16
2.3	Transformação do espaço das variáveis aleatórias normais padrão ao espaço das variáveis aleatórias, $x = f(\xi)$	19
3.1	Resultados experimentais do $N_{f_{Obs}}$ em ensaios de fadiga uniaxial com diferente F_a , (Socie <i>et al.</i> , 1984; Bannantine <i>et al.</i> , 1989).	49
3.2	Variáveis aleatórias e determinísticas consideradas na análise probabilística e determinístico do N_f da placa com 2 entalhes semi-circulares.	50
3.3	Número de pontos de colocação, N_{PECC} junto com N_{SMC} e $N_{SMC/PECC}$, utilizados na quantificação da incerteza de N_f da placa com 2 entalhes e diferente F_a	50
3.4	Comparação estatística dos resultados ao estimar o \hat{N}_f e N_f usando $PECC$ e SMC na placa com 2 entalhes semi-circular e diferente F_a (kN).....	52
3.5	Coefficientes do $PECC$ para determinar o \hat{N}_f em uma placa com 2 entalhes laterais semi-circulares sob $F_a = 88,96$ kN.	53
3.6	Resultados do N_f experimental e estimado usando $PECC$ e SMC para placa entalhada sob diferentes F_a , (kN).	54
3.7	Variáveis aleatórias e determinísticas do material consideradas na análise probabilística do N_f , de uma placa de liga de alumínio 2024-T351 com furo central.	55
3.8	Variáveis aleatórias e determinísticas do histórico de tensões nominais de amplitude variável aplicada na placa de liga de alumínio 2024-T351 com furo central.....	56
3.9	Número de pontos de colocação e N_{PECC} junto com N_{SMC} e $N_{SMC/PECC}$, utilizados para quantificar a incerteza de N_f da placa e $S0$ (MPa).	56
3.10	Comparação estatística dos resultados para estimar o N_f , usando $PECC$ e SMC na placa com furo central, e diferentes $S0$ (MPa).	57
3.11	Coefficientes do $PECC$ e os resultados da análise da sensibilidade dos coeficientes do $PECC$ na estimativa do \hat{N}_f em uma placa com furo central sob $S0_1$	58
3.12	Parâmetros das VA de entrada do modelo $E(t)$	60
3.13	Número de pontos de colocação e N_{PECC} junto com N_{SMC} e $N_{SMC/PECC}$, necessários para quantificar a incerteza de $E(t)$	61
3.14	Coefficientes do $PECC$ na estimativa do $\hat{E}(t)$ para diferentes instantes de t e V	62
3.15	Comparação estatística dos resultados para estimar o $E(t)$ usando $PECC$ e SMC para diferente t e V	62

3.16	Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} , junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , necessários para quantificar a incerteza de $E(t)$ para diferentes t e V .	63
3.17	Resultados da estatísticas da análise do $\hat{E}(t)$ usando PEC_C e diferente V e t .	64
3.18	Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC/PEC_C} , necessários para quantificar a incerteza de $\hat{\delta}_N(t)$.	66
3.19	Resultados das estatísticas da análise do $\hat{\delta}(t)_N$ usando PEC_C para diferente t e V .	68
4.1	Funções do programa PEC_C e PEC_{Adap} .	72
4.2	Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} para quantificar a incerteza da Equação 4.1.	73
4.3	Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_{Adap} do exemplo 1.	74
4.4	Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} para quantificar a incerteza da Equação 4.2.	76
4.5	Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_{Adap} do exemplo 2.	77
4.6	Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , para quantificar a incerteza no exemplo 3.	80
4.7	Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC do exemplo 3.	81
4.8	Comparação dos resultados obtidos utilizando diferentes metamodelos, no cálculo do β e o número de pontos amostrais do exemplo 4.	83
4.9	Variáveis aleatórias levadas em consideração no modelo numérico.	85
4.10	Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , utilizados na análise da ponte KB, para $t' = 7$ d e $t_e = 7$ d, 28 d e 1.000 d.	85
4.11	Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_{Adap} para a análise das $\hat{\delta}(t)$ da ponte KB com diferentes t_e (d).	86
4.12	Resultados da estatística das $\hat{\delta}(t)$ na ponte KB levando em consideração o envelhecimento do concreto para diferentes t_e , usando simulação em EF, SMC em PEC_C e PEC_{Adap} .	89
4.13	Teste de aderência das $f_X(x)$ da SEF, PEC_C e PEC_{Adap} das $\hat{\delta}(t)$ na ponte KB levando em consideração o envelhecimento do concreto para diferentes $t = (t_e, t')$.	90
5.1	Dimensões dos DCT usados.	93
5.2	Composição do microconcreto de referência.	95
5.3	Dimensões e \dot{w} usadas no ensaio de fratura em DCT.	98
5.4	Resultados das estatísticas dos ensaios complementares para microconcreto.	99
5.5	Valores experimentais de P_{max} , C_i e G_F do ensaio de fratura em modo I em DCT para diferentes \dot{w} e W .	103
5.6	Valores experimentais da $\mu_{P_{max}}$, μ_{C_i} e μ_{G_F} do ensaio de fratura em modo I em DCT para diferentes \dot{w} e W .	104
5.7	Valores da μ_{G_f} , μ_{c_f} , μ_{CTOD_C} e $\mu_{K_{IC}}$ aplicando EEB no ensaio de fratura em modo I em DCT para diferentes \dot{w} .	105
5.8	Uniformidade da variância e teste de médias para os resultados da G_F , para diferentes \dot{w} e W .	106

5.9	Uniformidade da variância e teste de médias para os resultados da c_f , para diferentes \dot{w} e W .	107
5.10	Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados da G_f , para diferentes \dot{w} e W .	108
5.11	Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados do $CTOD_C$, para diferentes \dot{w} e W .	108
5.12	Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados do E , para diferentes \dot{w} e W .	109
5.13	Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados do Ω , para diferentes \dot{w} e W .	110
5.14	Valores da μ e V (%) amostrais do $E^{\dot{w}_i}$ e f_t , para diferentes \dot{w} e W .	110
5.15	Valores das estatísticas μ e V (%) amostrais de entrada do modelo numérico, para diferentes \dot{w} e W .	111
5.16	Desvio médio do \hat{P}_{max} levando em consideração na simulação em EF as ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} com respeito dos resultados do P_{max}^{Exp} .	113
6.1	Valores das estatísticas amostrais das VA e determinísticas consideradas na análise probabilística do P_{max} e G_F em DCT.	117
6.2	Número de pontos de colocação de N_{PECC} e $N_{PECC_{Adap}}$ junto com N_{SEF} e $N_{SMC/PEC}$, necessários para quantificar a incerteza do \hat{P}_{max} para diferentes \dot{w} .	118
6.3	Resultados das estatísticas do \hat{P}_{max} no ensaio de fratura do DCT com W_3 e diferentes \dot{w} .	120
6.4	Comparação do $PECC$ e $PECC_{Adap}$ que relaciona o \hat{P}_{max} com ξ no ensaio de fratura em DCT com W_3 e diferentes \dot{w} .	121
6.5	Comparação dos resultados de P_{max} reportados por diferentes pesquisadores.	122
6.6	Número de pontos de colocação e N_{PECC} e $N_{PECC_{Adap}}$ junto com N_{SEF} e $N_{SMC/PEC}$, necessários para quantificar a incerteza do G_F para diferentes \dot{w} .	124
6.7	Resultados das estatísticas da \hat{G}_F no ensaio de fratura de W_3 com diferentes \dot{w} .	125
6.8	Comparação do $PECC$ e $PECC_{Adap}$ que relaciona a \hat{G}_F com ξ no ensaio de fratura de W_3 e diferentes \dot{w} .	126
6.9	Propriedades do material à fratura em SEN-TPB usados no modelo numérico de Roesler <i>et al.</i> (2007).	128
6.10	Resultados dos \hat{P}_{max} e $err_{\hat{P}_{max}}^{MA}$ (%) para diferentes tipos de malha, levando em consideração ε_{eq}^{MA} para SEN-TPB com $h = 250$ mm.	129
6.11	Número de pontos de colocação, N_{PECC} e $N_{PECC_{Adap}}$ junto com N_{SEF} e $N_{SMC/PEC}$, utilizados para quantificar a incerteza do \hat{P}_{max} na SEN-TPB com $h = 250$ mm e diferentes \dot{w} .	131
6.12	Resultados das estatísticas do \hat{P}_{max} com diferentes \dot{w} na SEN-TPB com $h = 250$ mm em material quase frágil.	133
6.13	Comparação do $PECC$ e $PECC_{Adap}$ que relaciona o \hat{P}_{max} com ξ e diferentes \dot{w} na SEN-TPB com $h = 250$ mm.	133
III.1	Propriedades do material à fratura em DCT usados no modelo numérico de Amirkharian <i>et al.</i> (2015).	168
III.2	Resultados do \hat{P}_{max} e err , do modelo numérico levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} , a $\mu_{P_{maxExp}}$ e \hat{P}_{max} do trabalho de Amirkharian <i>et al.</i> (2015).	170

III.3 Propriedades utilizadas no modelo numérico em DCT.....	170
III.4 Resultados dos \hat{P}_{max} e e_{rr} (%) para diferentes tipos de malha, levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} para \dot{u}_1 em DCT com W_3	171

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a	Comprimento de trinca equivalente
a_0	Comprimento do entalhe inicial
A	Inclinação da reta do EEB
\mathbf{A}	Matriz de valores para cada função básica do PEC para o grau e número de variável aleatória definidas
b	Expoente de resistência à fadiga
B	Espessura da seção transversal
c	Exponente de ductilidade à fadiga
c_n	Coefficiente dependente da seção transversal
c_f	Comprimento equivalente da zona de fratura
C	Intercessão da reta do EEB
C_i	Inverso da inclinação da parte inicial da reta da curva P - $CMOD$, entre 0% e 50% do P_{max}
\mathbf{C}_0	Tensor elástico de quarta ordem
d_{ijk}	Valor esperado do produto triplo do polinômio multivariado
d_{ijkl}	Valor esperado do quatro produto do polinômio multivariado
D	Dano
$D(t)$	Função de fluência dependente do tempo t .
D_b	Dano produzido por um bloco de carregamento
D_i	Dano produzido por N_i ciclos de carregamento de amplitude S_{a_i}
$D_i(\varepsilon_{eq})$	Dano produzido da realização $i = 1 : n$ até alcançar a deformação equivalente
D_1	Dano produzido por N_1 ciclos de carregamento
\dot{D}	Taxa de variação do dano
e	Deformação nominal
er	Erro
er_e	Erro relativo
er_f	Função erro
$err_{\mu_{\hat{N}_f}}$	Erro relativo da $\mu_{\hat{N}_f}$ com respeito à μ_{N_f}
$err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$	Erro relativo da $\sigma_{\hat{N}_f}$ com respeito à σ_{N_f}

E	Módulo de elasticidade
$E_{Compliance}$	Módulo de elasticidade definido em função de C_i e $V_{CMOD(\alpha_0)}$
E_i	Coefficiente da função de relaxação, $i = 0 : N$
E_k	Módulo de elasticidade do modelo de Kelvin
E_s	Módulo de elasticidade de um modelo elástico linear
$E(t)$	Módulo de relaxação no espaço do tempo t
$\hat{E}(t)$	Módulo de relaxação estimado no espaço do tempo t
$E(t_e, t')$	Módulo de relaxação considerando envelhecimento e tempo de carregamento
$E[\Psi_i(\xi)]$	Valor esperado do conjunto de variáveis aleatórias normais padronizadas <i>iid</i>
$E[\Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi)]$	Valor esperado do produto escalar dos conjuntos de variáveis aleatórias normais i e j padronizadas <i>iid</i>
$E[Y]$	Valor esperado do vetor de saída Y .
E_∞	Valor da função de relaxação quando $t \rightarrow \infty$
E_1	Relação entre os módulos de elasticidade E_s e E_k em t_1
f_t	Resistência a tração
$f(\frac{a}{W})$	Função de fator geométrico
$f(\varepsilon_{eq})$	Critério de dano
$\dot{f}(\varepsilon_{eq})$	Taxa de variação do critério de dano
$f'(\alpha_0)$	Primeira derivada da função de fator geométrico para α_0
$f''(\alpha_0)$	Segunda derivada da função de fator geométrico para α_0
$f(w)$	Função de lei coesiva estática
$f_{E(t)}(E(t))$	Função de densidade de probabilidade do módulo de relaxação
$f_{\hat{E}(t)}(E(t))$	Função de densidade de probabilidade do módulo de relaxação estimado
$f_{N_f}(N_f)$	Função de densidade de probabilidade do número de ciclos para falha por fadiga usando SMC
$f_{\hat{P}_{max}}$	Função de densidade de probabilidade do carregamento máximo estimado usando SEF
$f_{\hat{P}_{maxC}}$	Função de densidade de probabilidade do carregamento máximo estimado usando PEC_C
$f_{\hat{P}_{maxAdap}}$	Função de densidade de probabilidade do carregamento máximo estimado usando PEC_{Adap}
$f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$	Função de densidade de probabilidade do número de ciclos para falha por fadiga usando SMC sobre o PEC
$f_X(x)$	Função de densidade de probabilidade
$f_X(R_e, S_e)$	Função de densidade de probabilidade conjunta, também definido como f_{ReSe}
$f_\delta(\delta)$	Função de densidade de probabilidade do deslocamento (δ)
F	Força
F_a	Carregamento de amplitude constante
$F(\varepsilon_{eq})$	Função contínua e positiva da evolução do dano
$F(\dot{w}, w)$	Função dependente da \dot{w} e w , ou comportamento mecânico da trinca

$F_{\mathbf{X}}(x)$	Função de distribuição cumulativa
$F_{\delta_N}(\delta_N)$	Função de distribuição cumulativa da deflexão padronizada
$F_{\hat{\delta}(t)_C}(\hat{\delta}(t)_C)$	Função de distribuição cumulativa da $\hat{\delta}(t)_C$
$F_{\hat{\delta}(t)_{Adap}}(\hat{\delta}(t)_{Adap})$	Função de distribuição cumulativa da $\hat{\delta}(t)_{Adap}$
$g(\dot{w})$	Função viscosa dependente da taxa de abertura da trinca
G_f	Energia inicial de fratura
$G_f^{\dot{w}_i}$	Energia inicial de fratura dependente da \dot{w} , em que $i=1:3$
G_F	Energia total à fratura
$G_F^{\dot{w}_i}$	Energia total à fratura dependente da \dot{w} , em que $i=1:3$
h	Altura da seção transversal
$h(\mathbf{X})$	Função de desempenho
\mathbf{H}	Matriz não singular
H'	Coefficiente de encruamento cíclico
H_p	Polinômio de Hermite de ordem p
I	Momento de inercia da seção
$I_{\varepsilon 1}$	Primeiro invariante do tensor de deformações
$\mathcal{J}_{n,p}$	Conjunto multi-índice que representa a dimensão e o grau do polinômio com norma 1
$\mathcal{J}_{n,p}^q$	Conjunto multi-índice que representa a dimensão e o grau do polinômio com norma- q
iid	Distribuída idêntica e independente
$J_{\varepsilon 2}$	Segundo invariante do tensor de deformações
$J(t)$	Função de escoamento em função de t
J_0	Inverso da soma de E_{∞} e E_1
k	Razão entre as resistências a compressão e a tração
K	Fator de intensidade de tensão
K_{ε}	Fator de concentração de deformação
K_f	Fator de concentração de tensões
K_{Ic}	Fator de intensidade de tensão crítico
K_I	Fator de intensidade de tensão para fratura em modo I
K_t	Fator de concentração de tensão elástica
K_S	Fator de concentração de tensão
L	Comprimento
L_v	Vão
L_{zc}	Comprimento da zona coesiva
m	Dimensão do PEC
M	Número de modelos de envelhecimento do material levados em consideração
n	Número de variáveis aleatórias
nn	Número de ensaios para cada tamanho do DCT
$n_{\dot{w}}$	Expoente da dependência da taxa de deslocamento
n_1	Número de resultados experimentais para cada combinação W e \dot{w}
\mathbf{n}	Vector de referência normal

n'	Exponente de encruamento cíclico
np_{PEC}	Número de pontos amostrais necessários para encontrar o PEC
N	Número de termos do truncamento do PEC
\mathcal{N}	Função de densidade de probabilidade normal
N_{bf}	Número de repetições do blocos que gera a falha por fadiga
N_{pc}	Número de pontos de colocação usados por PEC_C
N_{pcAdap}	Número de pontos de colocação usados por PEC_{Adap}
N_f	Número de ciclos para falha por fadiga
\hat{N}_f	Número de ciclos para falha por fadiga estimado usando PEC
N_{falha}	Número de simulações que gera $h(\mathbf{X}) < 0$
N_{fn}	Número de ciclos para a falha devido ao carregamento de amplitude S_{an}
N_{fObs}	Número de ciclos para falha por fadiga observados em laboratório
N_{fSMC}	Número de ciclos para falha por fadiga usando SMC
N_{f1}	Número de ciclos para falha por fadiga devido ao carregamento de amplitude S_{a1}
N_n	Ciclos de carregamento de amplitude S_{an}
N_{PEC_C}	Número de coeficientes do PEC_C
N_S	Número de simulações da $f_{\mathbf{X}}(x)$
N_{SMC}	Número de simulações de Monte Carlo
N_{SMC/PEC_C}	Número de simulações de Monte Carlo usadas no PEC_C
N_1	Ciclos de carregamento de amplitude S_{a1}
p	Grau u ordem do polinômio
p_{OB}	Grau obrigatório do PEC
p_{max}	Grau máximo do PEC
P	Força
P_f	Probabilidade de falha
P_{max}	Carregamento máximo
\hat{P}_{max_C}	Carregamento máximo estimado usando PEC_C
$\hat{P}_{maxAdap}$	Carregamento máximo estimado usando PEC_{Adap}
\bar{P}_{max}^{Exp}	Valor médio do carregamento máximo experimental
\bar{P}_{max}^{Sim}	Carregamento máximo experimental usando os modelos de ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM}
P_{max}^{MA}	Carregamento máximo usando o modelo de ε_{eq}^{MA}
P_{max}^{VM}	Carregamento máximo usando o modelo de ε_{eq}^{VM}
PP	Peso de la ST del elemento
P_{ult}	Carregamento máximo no ensaio de fratura em modo I
q	Carregamento uniformemente distribuído
$q(t)$	Carregamento uniformemente distribuído dependente do tempo
R	Número de duplas de séries
r	Relação na quantidade de coeficientes usados no PEC_{adap} ao respeito do PEC completo
R^2	Coefficiente de determinação
R_a	Raio
R_{ant}^2	Coefficiente de determinação do polinômio anterior

Re	Resistência
S	Tensão
\mathbf{S}	Tensor de tensões
S_a	Amplitude de tensão
S_c	Resistência de coesão
S_e	Demanda de forças
S_m	Tensão média
S_{max}	Tensão máxima
S_{min}	Tensão mínima
S_N	Tensão nominal de resistência à propagação de fratura
S_Y	Tensão aplicada na direção Y
$S(w)$	Tensão em função do deslocamento
S_0	Tensão de escoamento
$\mathbf{S0}$	Carregamento de amplitude variável
S'	Tensão efetiva
\mathbf{S}'	Tensor de tensão para material deteriorado
S'_f	Coefficiente de resistência à fadiga
S_u	Limite de resistência à tração
S_t	Tensão aplicada
\dot{S}_t	Taxa de tensão, $\frac{dS_t}{dt}$
t	Tempo
t'	Idade de análise do ensaio
t_e	Idade de análise do carregamento
tol	Tolerância
$u(\theta)$	Variável aleatória
$\hat{u}(\theta)$	Variável aleatória aproximada
\mathbf{v}	Vetor de referência
V	Coefficiente de variação
$V_{\mathbf{E}(t)}$	Coefficiente de variação do módulo de relaxação
$V_{\hat{\mathbf{E}}(t)}$	Coefficiente de variação do módulo de relaxação estimado
$V_{\hat{N}_f}$	Coefficiente de variação do \hat{N}_f
V_{N_f}	Coefficiente de variação do N_f
V_{PEC}	Coefficiente de variação do PEC
V_{SMC}	Coefficiente de variação da SMC
$V_{\delta N}$	Coefficiente de variação do deslocamento padronizado
$V_{V.A.}$	Coefficiente de variação das variáveis aleatórias
w	Abertura da trinca
w_f	Abertura da trinca no instante da fratura
w_1	Interseção com o eixo horizontal (w) com a inclinação da reta da curva de amolecimento depois do P_{max}
\dot{w}	Taxa de deslocamento de abertura da trinca
\dot{w}_i	Coefficiente da taxa de abertura da trinca, $i, i = 1 : N$
\dot{w}_0	Parâmetro de padronização

w^i	Peso de integração da realização i
W	Comprimento não fissurado
W_k	Comprimento não fissurado para o k -ésimo corpo de prova, de acordo com o tamanho e \dot{w}
x_k^M	Variável aleatória k pela realização M
X	Vetor das variáveis aleatórias de entrada do modelo
\mathbf{X}_i	Conjunto i de variáveis aleatórias
\hat{y}	Saída expressada em termo de PEC
y^i	Saída do PEC usando SMC pela realização i
$\hat{\mathbf{y}}$	Vetor de coeficientes desconhecidos aproximados, usando truncamento
\mathbf{y}	Vetor de coeficientes do PEC usando regressão
y_i	Coefficientes determinísticos desconhecidos i
y_{SMC}	Coefficientes determinísticos desconhecidos i
y_ζ	Coefficientes determinísticos desconhecidos i usando no método de projeção
y_0	Primeiro coeficiente do PEC
\mathbf{Y}	Vetor de resposta aleatória do modelo
$Y(\xi(i))$	Resposta aleatória do modelo Y para $\xi(i)$
\mathbf{Y}_{EEB}	Vetor de saída do modelo de EEB
Y_k	Saída do modelo de EEB para o k -ésimo corpo de prova

Símbolos Gregos

α	Relação a/W
α_0	Relação a_0/W
β	Índice de confiabilidade
β_i	Coefficiente da função de envelhecimento
γ	Índice de sensibilidade
Γ_p	Polinômio de expansão de caos de ordem p
Δa	Comprimento da zona de processo
ΔS	Tensão total
$\Delta \epsilon$	Deformação total
$\Delta \epsilon_e$	Deformação elástica
$\Delta \epsilon_p$	Deformação plástica
δ	Coefficiente de assimetria
δ	Deflexão
δ_N	Deslocamento padronizado
δ_Y^{PEC}	Assimetria usando PEC
δO	Elemento diferencial de superfície
δO_D	Vazios e/ou descontinuidades geométricas
$\delta \tilde{O}$	Área equivalente
$\delta(t)$	Deflexão dependente do t
$\delta(t)_N$	Deflexão padrão estimada usando PEC
ϵ	Deformação
ϵ	Tensor de deformações
ϵ_a	Amplitude de deformação total
ϵ_{d0}	Valor inicial de deformação crítica
ϵ_{ea}	Amplitude deformação elástica
ϵ_{eq}	Deformação equivalente
ϵ_{eq}^{max}	Deformação equivalente máxima
ϵ_{eq}^{MA}	Deformação equivalente de Mazars
ϵ_{eq}^{VM}	Deformação equivalente de Von Mises
ϵ_i	Deformação principal na direção i
ϵ_m	Deformação média
ϵ_{max}	Deformação máxima
ϵ_{min}	Deformação mínima
ϵ_{pa}	Amplitude de deformação plástica
ϵ_N	Residual
ϵ'_f	Coefficiente de ductilidade à fadiga
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação, $\frac{d\epsilon}{dt}$

ζ	Vetor de graus das variáveis aleatórias normais padronizadas
η	Viscosidade
η_k	Viscosidade do modelo de Kelvin
θ	Evento aleatório
$\Theta_{\hat{P}_{max}^{Sim}}$	Desvio médio do \hat{P}_{max} encontrado da simulação em EF
κ	Coefficiente de curtose
κ^{PEC}	Coefficiente de curtose usando PEC
λ	Distância medida desde a ponta da trinca até a ponta do entalhe
μ	Média
μ_{c_f}	Média do C_f
μ_{C_i}	Média da C_i
μ_{CTOD_C}	Média do $CTOD_C$
μ_E	Média do E do DCT
$\mu_{\hat{E}(t)}$	Média do módulo de relaxação estimado ($\hat{E}(t)$) usando PEC
μ_{G_f}	Média da G_f
μ_{G_F}	Média da G_F
$\mu_{P_{max}}$	Média da P_{max}
$\mu_{K_{IC}}$	Média do K_{IC}
$\mu_{\hat{N}_f}$	Média do \hat{N}_f
μ_{N_f}	Média do N_f
μ_{PEC}	Média usando PEC
$\mu_{N_{f_{PEC}}}$	Média da $f_{N_{f_{PEC}}}(x)$
$\mu_{\mathbf{Y}}^{PEC}$	Média usando PEC
μ_{SMC}	Média usando SMC
$\mu_{N_{f_{SMC}}}$	Média da $f_{N_{f_{SMC}}}(x)$
μ_{x_i}	Média da variável x_i
$\mu_{\hat{\mathbf{Y}}}$	Média do vetor de saída ($\hat{\mathbf{Y}}$) usando PEC
$\mu_{\rho\mathbf{1}}$	Média da variável $\rho\mathbf{1}$
μ_{Ω}	Média do Ω
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Vetor de variáveis aleatórias normais padronizadas
$\xi(\theta)$	Conjunto de variáveis aleatórias normais padronizadas <i>iid</i>
ρ_i	Tempo de relaxação correspondente ao coeficiente i
σ	Desvio padrão
$\bar{\sigma}$	Desvio padrão médio
σ^2	Variança
$\sigma_{c_f}^2$	Variança do c_f
$\sigma_{C_i}^2$	Variança do C_i
$\sigma_{CTOD_C}^2$	Variança do $CTOD_C$
σ_E^2	Variança do E do DCT
$\sigma_{G_f}^2$	Variança da G_f
$\sigma_{G_F}^2$	Variança da G_F
$\sigma_{K_{IC}}^2$	Variança do K_{IC}
$\sigma_{P_{max}}^2$	Variança da P_{max}

$\bar{\sigma}_{\varepsilon_{eq}^{MA}}$	Desvio padrão médio do P_{max} levando em consideração ε_{eq}^{MA} .
$\bar{\sigma}_{\varepsilon_{eq}^{VM}}$	Desvio padrão médio do P_{max} levando em consideração ε_{eq}^{VM} .
$\sigma_{i,j}$	Matriz de covariâncias das variáveis (i, j)
σ_{N_f}	Desvio padrão do N_f
$\sigma_{\hat{N}_f}$	Desvio padrão do \hat{N}_f
$\sigma_{\mathbf{Y}}^{2,PEC}$	Variância da saída (\mathbf{Y}) usando PEC
$\sigma_{\hat{\mathbf{Y}}}$	Desvio padrão do vetor de saída ($\hat{\mathbf{Y}}$) usando PEC
σ_{Ω}^2	Variância do Ω
Σ^*	Matriz de covariâncias
τ	Tensão de corte
τ_1	Razão entre a viscoelasticidade e o módulo de relaxação do modelo de Kelvin
Φ	Função de densidade de probabilidade ou $f_{\mathbf{X}}(x)$
Ψ_i	Polinômio de expansão de caos, forma compacta
$\Psi_i(\xi)$	Função ortogonal de variável aleatória
$\Psi_i(\zeta)$	Função básica de variável aleatória normal padrão
χ	Rotação em relação à linha de propagação da trinca
ω_i	Coefficiente relacionado à idade de aplicação de carregamento
Ω	Coefficiente do ponto de mudança de direção da lei de modelo coesivo bilinear

Siglas

ANN	Artificial Neural Networks
APDL	ANSYS Parametric Design Language
AISI	American Iron and Steel Institute
CDF	Cumulative distribution function
CMOD	Crack Mouth Opening Displacement
COD	Crack Opening Displacement
CP	Corpo de prova
CTOD _C	Critical Crack Tip Opening Displacement
CTOD	Crack Tip Opening Displacement
DCT	Disk-Shaped Compact Tension
EF	Elemento finito
EVR	Elemento de volume representativo
FPZ	Fracture Process Zone
LEFM	Linear Elastic Fracture Mechanics
MSE	Mean Square Error
NLEFM	Non-Linear Elastic Fracture Mechanics
NMSE	Normalized Mean Square Error
NRMSE	Normalized root mean square error
PDF	Probability density function
PEC	Polinômios de expansão de caos
PEC _C	Polinômios de expansão de caos completo
PEC _{Adap}	Polinômios de expansão de caos adaptativo
KB	Koror-Babeldaob
KSTAT	One-sample Kolmogorov-Smirnov test
RILEM	International Union of Laboratories and Experts in Construction Materials, Systems, and Structures
RMSE	Root Mean Square Error
SEF	Simulação de elementos finitos
SEN-TPB	Single-Edge-Notched Beams in Three-Point Bending
SMC	Simulação de Monte Carlo
ST	Seção transversal
VA	Variável aleatória
VEG	Valor extremo generalizado

LISTA DE PUBLICAÇÕES DECORRENTES DA TESE

Periódicos

- 1 Evangelista-Jr, F.; Afanador, N. A polynomial chaos expansion approach to the analysis of uncertainty in viscoelastic structural elements. *Dyna*, v. 83, n. 12, p. 2200, Dec. 2017.
- 2 Ortega, J.J.; Ruiz, G.; Rena, C. Y.; Afanador-García, N.; Tarifa, M.; Poveda, E.; Zhang, X.; Evangelista, F. Number of test and corresponding error in concrete fatigue. *International Journal of Fatigue*, v. 116, n. 11, p. 210-219, Nov. 2018.

Congressos

- 1 Afanador, N.; Evangelista-JR, F.; Castro, F. Quantificação da incerteza da vida de placas de aço sob à fadiga via polinômios de Hermite. In: XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Brasília D.F., Brasil, 2016.

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, os sistemas estruturais tendem ser projetados considerando não apenas a sua funcionalidade, mas também incertezas inerentes que induzem variações na geometria, na resistência dos materiais e nos carregamentos. Embora tenha sido comum não ter em conta estas incertezas nas análises estruturais em um passado recente, são cada vez mais comuns modelos matemáticos ou numéricos que levam em consideração a aleatoriedade do fenômeno físico (Nowak e Collins, 2012; Melchers e Beck, 2018). Outra fonte da variabilidade dos resultados tem a ver com a incerteza experimental presente nos ensaios de laboratório (Montgomery, 2013).

O modelo matemático de um fenômeno físico pode ser definido como uma representação abstrata deste fenômeno por um conjunto de equações, as quais reproduzem a solução de observações experimentais com um rigoroso formalismo da matemática e da física do problema. O modelo pode, então, ser simulado para diferentes situações, tendo controle das variáveis e considerando prováveis variações. Além disso, os parâmetros envolvidos na análise de sistemas mecânicos devem levar em conta a aleatoriedade das variáveis assim como a existência de defeitos pré-existentes que modificam as diferentes capacidades resistentes dos elementos estruturais (Melchers, 2001).

Em engenharia estrutural é comum ter elementos de aço ou concreto submetido a fadiga, a propagação de trincas ou a viscoelasticidade onde quantificar a incerteza é fundamental na previsão da vida útil dos componentes estruturais. As incertezas geradas a partir da variabilidade das propriedades dos materiais, da geometria, dos carregamentos e dos processos de fabricação e construção são tal que geram diferenças nas respostas assim como podem influenciar a resistência dos componentes e, por conseguinte, sua vida útil. Essa falta de previsão conduz frequentemente a falhas estruturais e a uma diminuição da confiabilidade estrutural (Melchers e Beck, 2018).

A incerteza nos resultados do modelo está centrada na incerteza dos dados de entrada que são considerados variáveis aleatórias caracterizadas pelas respectivas funções de densidade de probabilidade, em inglês Probability Density Functions (PDF). Desta forma, a quantificação de incerteza estima a propagação das incertezas das variáveis aleatórias no modelo matemático por meio da predição de uma PDF da resposta do modelo. Isto pode ser feito por meio de técnicas intrusivas, como o método de Galerkin (Ghanem e Spanos, 1991; Ghanem e Spanos, 2003; Maitre e Knio, 2007) em que formulações estocásticas reformulam diretamente a equação do modelo matemá-

tico a ser resolvido. Alternativamente, técnicas denominadas não intrusivas, como: método da projeção (Ghiocel e Ghanem, 2002; Ghanem e Spanos, 2003; Maître *et al.*, 2002), método de la regressão (Tatang, 1995; Berveiller *et al.*, 2006; Sudret, 2007) e el método de la colocação (Isukapalli, 1999; Mathelin e Hussaini, 2003; Nobile e Webster, 2008) utilizam somente as variações dos dados de entrada. Além disso utiliza a resposta do sistema sem a necessidade de conhecimento do funcional matemático que relaciona a resposta (*output*) a partir de uma combinação de dados de entrada (*input*). Apesar de técnicas intrusivas serem mais eficientes, melhor acurácia com menor custo computacional, elas propõem formulações específicas para cada modelo (equação) a ser resolvida. As técnicas não intrusivas fornecem soluções gerais em que podem ser aplicadas a qualquer modelo matemático. Desta forma, as técnicas não intrusivas tratam o modelo matemático como uma “caixa preta” que fornece saídas do modelo para diferentes combinações de dados de entrada. Uma das técnicas não intrusivas existentes é o uso de polinômios de expansão de caos (PEC), que podem ser usados para a construção de um meta modelo capaz de reproduzir uma relação funcional *input-output* a partir de amostragens. Grandes avanços foram alcançados no desenvolvimento e aplicação de técnicas não intrusivas, principalmente na diminuição do número de amostras necessárias, tornando estas técnicas bem mais competitivas para a construção dos modelos estocásticos.

1.1 Contextualização e estado da arte

O objetivo principal do PEC não intrusivo é obter os coeficientes do polinômio sem fazer qualquer modificação no código determinístico. Entre os métodos não intrusivos tem-se: o método da projeção, o método da colocação e o método da regressão. No método da projeção pode ser estimado usando amostragem para calcular a esperança matemática (Isukapalli, 1999; Xiu e Karniadakis, 2002; Debusschere *et al.*, 2004) ou utilizando técnicas de quadratura numérica para estimar a integral multidimensional (Debusschere *et al.*, 2004; Lucor *et al.*, ; Eldred e Burkardt, 2009). O método da colocação esta baseado na minimização mínima quadrada do erro entre a variável de saída e a variável de saída aproximada, utilizando as raízes do polinômio de Hermite de grau superior, $p+1$ (Webster *et al.*, 1996; Isukapalli, 1999) ou elegidos aleatoriamente (Berveiller *et al.*, 2006). Por fim, o método da regressão, usa um conjunto de realizações as quais são referidos de um desenho experimental e recentemente melhorado através de estimativa de erro e adaptabilidade (Berveiller *et al.*, 2006; Blatman e Sudret, 2011; Sudret, 2012).

No contexto do desenvolvimento do PEC não intrusivo, os trabalhos encontrados na literatura mais próximos ao que é pesquisado nesta tese, foram os algoritmos que diminuem o número de coeficientes e a dimensão da física do problema. O custo computacional de gerar o PEC completo (PEC_C) de alta dimensão não é viável, pois o número de simulações e operações é grande, mesmo que a computação paralela seja usada (Blatman e Sudret, 2010; Pascual e Adhikari, 2012; Schöbi *et al.*, 2016; Slim *et al.*, 2017; Torii *et al.*, 2017; Oladyshkin e Nowak, 2018). Existem procedimentos adaptativos que ajudam a resolver o problema da alta dimensão. Blatman e Sudret (2009) propuseram a seleção de um subconjunto das funções base que tem os maiores efeitos sobre a resposta do sistema, rejeitando as outras funções usando dois passos, um truncamento

hiperbólico seguido de um algoritmo de regressão do ângulo mínimo (Efron *et al.*, 2004). O algoritmo de Blatman e Sudret é amplamente utilizado (Sudret, 2012; Beck e Santana, 2013; Hampton e Doostan, 2015; Soize, 2015; Spiridonakos *et al.*, 2016; Slim *et al.*, 2017; Kroetz *et al.*, 2017) e recentemente são reportados variantes desse procedimento. Assim, Kersaudy *et al.* (2015) apresentaram uma técnica de modelagem combinando PEC_C e *Kriging* com o alvo de melhorar o ajuste do PEC_C com a saída e diminuir o espaço amostral. Meng e Li (2017) fizeram uma comparação dos resultados usando regressão do ângulo mínimo e a regressão do ângulo mínimo modificado (Hastie *et al.*, 2009). Abraham *et al.* (2017) calcularam os coeficientes do PEC adaptativo (PEC_{Adap}), levando em consideração os intervalos de confiança e a variância dos coeficientes. Marelli e Sudret (2017) propuseram utilizar o PEC_{Adap} gerado com o truncamento hiperbólico e reamostragem *bootstrap*, para fornecer estimativas locais do erro do metamodelo.

Recentemente, algumas pesquisas têm sido desenvolvidas no Brasil para resolver problemas que incluem campos aleatórios utilizando PEC. Dentre estas, pode-se citar Silva *et al.* (2015) que utilizou os polinômios de Hermite para a determinação da carga de instabilidade paramétrica de cascas cilíndricas com incerteza nos parâmetros físicos e geométricos no modelo intrusivo. Outra pesquisa relacionada com o PEC é a de Carneiro (2010) que estudou a propagação de incertezas na exploração e produção de petróleo e fez uma redução do espaço probabilístico aplicando a expansão de Karhunen-Loève e o método da colocação probabilístico. No campo da otimização de risco, destaca-se o trabalho de Beck e Santana (2013) em que o PEC leva em consideração políticas de inspeção, manutenção e procura da solução ótima para representação do risco sob processos aleatórios de corrosão e fadiga. Na área da confiabilidade, um tema de grande interesse foi desenvolvido por Kroetz *et al.* (2017) ao analisar problemas numéricos e analíticos comparando os resultados utilizando redes neurais artificiais, PEC e *Kriging*.

Os parâmetros de fratura são estimados levando em consideração a influência da taxa de carregamento sobre o processo de falha de concreto simples, usando corpos de prova do tipo tensão em forma de disco compacto, em inglês, *disk-shaped compact tension* (DCT), construído com material cimentício, os quais ainda não são reportado pela literatura. Além disso, nas estruturas é evidente, que as taxas de carregamento podem ser aleatórias, gerando vibrações excessiva, de deslocamento e de deflexões que se refletem macroscopicamente sobre a resposta do carregamento versus deflexão (González-Fonteboia *et al.*, 2012; Zhou *et al.*, 2012; Lu, 2013). É definida a resposta do carregamento versus deslocamento de abertura na boca da trinca, em inglês, *Crack Mouth Opening Displacement* (CMOD) em vigas (Rosa *et al.*, 2012; Musto e Alfano, 2013). A força máxima e a energia à fratura em vigas aumentam com o incremento da taxa de carregamento enquanto que o deslocamento correspondente à força máxima permanece virtualmente inalterado de acordo com Bažant e Gettu (1992), Ruiz *et al.* (2011). Não existe na literatura a quantificação da incerteza usando o PEC em aplicações na modelagem estrutural, considerando a incerteza no material avaliada em diferentes da taxa de carregamento.

No programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília (UnB), diversas publicações tem sido realizadas nas temáticas de quantificação da incerteza e análise de risco como a de Muñoz e Evangelista-Jr (2014). Outras publicações são: Borges *et al.* (2016), Almeida e Evangelista-Jr. (2016), Afanador *et al.* (2016), Evangelista-Jr e

Afanador (2016) e Ortega *et al.* (2018). Muñoz e Evangelista-Jr (2014) e Borges *et al.* (2016) estudaram o risco estrutural das predições com modelos da mecânica da fratura, implementando simulação de Monte Carlo (SMC). Almeida e Evangelista-Jr. (2016) determinaram a quantificação da incerteza do número de ciclos para a falha por fadiga em membros estruturais submetidos a carregamentos variáveis aleatórios, utilizando técnicas de amostragem como: hipercubo latino e experimento fatorial. Afanador *et al.* (2016) quantificaram a incerteza do número de ciclos para a falha por fadiga em membros estruturais submetidos a carregamento constante e variável usando PEC. Evangelista-Jr e Afanador (2016) estudaram a incerteza no módulo de relaxação em vigas de material cimentício, levando em consideração um modelo viscoelástico assim como a quantificação da incerteza na deflexão de vigas de concreto, tendo em conta a incerteza no material. Por último Ortega *et al.* (2018) utilizaram a técnica *bootstrap* para determinar os parâmetros estatísticos da função de distribuição cumulativa dos resultados obtidos dos ensaios de fadiga em material quase frágil.

1.2 Justificativa

A quantificação da incerteza de fenômenos como fadiga, fratura e viscoelasticidade são ainda um problema em aberto. Especialmente porque a incerteza de geometria, propriedades dos materiais e carregamentos em modelos não lineares geram uma grande variabilidade da resposta estrutural tais como tensões, deformações e deslocamentos. Além disso, o desenvolvimento e utilização de técnicas não intrusivas em que se busca metodologias e algoritmos com maior acurácia e menor custo computacional ainda são temas abertos na literatura. Desta forma, este trabalho é uma iniciativa no sentido de desenvolver conhecimento e ferramentas necessárias para a quantificação de incerteza em problemas que envolvem fadiga, fratura e viscoelasticidade; como exemplos de aplicação, tem-se:

- Problemas por deflexões excessivas em elementos de concreto que não consideram a aleatoriedade do material.
- Estudo das deflexões em pontes levando em consideração modelos viscoelásticos que tenham em conta o processo de envelhecimento do concreto.
- Quantificação da incerteza em elementos estruturais sob fadiga com carregamento constante e variável, levando em consideração a aleatoriedade na resistência do material e no carregamento.
- Quantificação da incerteza do carregamento máximo e energia total de fratura no ensaio de fratura em modo I em DCT de material cimentício, com diferentes taxas de carregamento, usando PEC.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma técnica não intrusiva de quantificação de incerteza utilizando polinômios de expansão de caos (PEC). As estratégias aqui propostas usam PEC com-

pleto e propõe uma técnica adaptativa minimizando o número de amostras para construir o PEC. Para atingir esta meta, os seguintes objetivos específicos são elencados:

- Desenvolver modelos via polinômios de expansão de caos com um enfoque não intrusivo para processos estocásticos em problemas não lineares de viscoelasticidade e fadiga com carregamento de amplitude constante e variável.
- Desenvolver um novo algoritmo que permita diminuir o número de pontos de colocação e os coeficientes do PEC, sem perda de precisão.
- Propor uma metodologia de ensaio baseada no efeito de escala de Bažant (EEB) para determinação de propriedades do material cimentício e seus respectivos parâmetros estatísticos.
- Analisar estatisticamente os resultados dos ensaios e testar hipótese sobre a independência das propriedades da fratura com relação aos diferentes tamanhos dos corpos de prova propostos.
- Aplicação do PEC para determinar o carregamento máximo e a energia total de fratura em simulações numéricas com modelo de dano.
- Determinar as propriedades de fratura no ensaio de fratura modo I em DCT para materiais cimentícios levando em consideração modelos probabilísticos.
- Quantificar a incerteza do carregamento máximo no ensaio de fratura em modo I em vigas bi-apoiadas de material cimentício, levando em consideração diferentes taxas de carregamento.

1.4 Contribuições

Como principais contribuições inéditas ao estado da arte dos assuntos abordados nesta tese, destacam-se:

- Desenvolvimento de um algoritmo utilizando as componentes principais do PEC que permite obter um PEC_{Adap} com um número menor de pontos amostrais e menor número de coeficientes com respeito ao PEC_C . Este algoritmo inédito supera muitas vezes os algoritmos atuais utilizando menor quantidade de amostras.
- A quantificação da incerteza das deflexões esperadas em elementos de concreto considerando material viscoelástico em problemas dependente do tempo com processos de envelhecimento utilizando modelo 3D de elemento finitos, PEC_C e PEC_{Adap} .
- Implementação do efeito de escala de Bažant (EEB) na determinação das propriedades da mecânica da fratura em materiais quase frágil utilizando corpos de prova, tipo DCT. Para fabricação dos DCTs foram utilizadas fôrmas metálicas de modo a evitar a serragem do entalhe e execução dos buracos da geometria do DCT.
- A quantificação da incerteza do modelo mecânico, considerando a propagação de incerteza das variáveis aleatórias experimentais como energia de fratura inicial e total, tamanho equivalente da zona de processo e deslocamento de abertura na ponta da trinca crítico, em inglês *critical crack tip opening displacement (CTOD_C)*. A quantificação da incerteza, leva em consideração a aleatoriedade da resistência a tração, a energia total e inicial à fratura e o fator que define o componente do eixo Y do ponto de quebra no modelo coesivo.

- A determinação, via polinômio de expansão de caos completo e adaptativo, da quantificação da incerteza em problemas não lineares da mecânica da fratura como simulação do carregamento.

1.5 Resumo da metodologia da tese

O trabalho consiste inicialmente de uma revisão da literatura e do estado da arte de PEC, sendo posteriormente abordado noções de confiabilidade, viscoelasticidade, fadiga e mecânica da fratura. Além disso, modelos matemáticos foram implementados e resolvidos utilizando técnicas de SMC e PEC.

O modelo definido por PEC é aplicado nesta tese para quantificar a incerteza no número de ciclos para falha por fadiga em peças sujeitas a carregamento constante e variável. Em seguida é avaliada as deflexões no centro do vão em viga prismática biapoiada de material quase-frágil utilizando-se o modelo de Boltzmann com módulo de relaxação aleatório. Modificações ao coeficiente de variação irão gerar, em alguns casos, uma relação de proporcionalidade não linear de tipo exponencial entre o módulo de elasticidade e a deflexão.

Devido à necessidade de diminuir o número de pontos de colocação e os coeficientes do PEC, implementou-se um algoritmo que utiliza os componentes principais de cada grau e dimensão do polinômio. O algoritmo foi avaliado em 4 funções de estado limite (Grooteman, 2008; Krotetz *et al.*, 2017), quantificando a incerteza nas 3 primeiras e na última foi estimado o índice de confiabilidade obtidos por outras técnicas de simulação com respeito às encontradas neste trabalho. Na continuação, foram avaliadas as deflexões esperadas em 3 instantes de tempo em uma ponte de concreto, levando em consideração processos de envelhecimento do concreto em modelos viscoelásticos e utilizando elementos finitos e PEC.

A etapa seguinte consistiu no projeto e construção das fôrmas metálicas com posterior execução dos corpos de prova para ensaios de fratura. Os corpos de prova foram elaborados para diferentes diâmetros e realizou-se ensaios de fratura em modo I para estimar as propriedades à fratura do material cimentício, utilizando EEB em DCT. Foram realizados teste de variação das propriedades da mecânica de fratura sobre os resultados encontradas experimentalmente. Modelos de elementos finitos foram construídos para avaliar as curvas de comportamento $P-CMOD$ do material cimentício encontrados experimentalmente para cada tamanho e taxa de carregamento. Os resultados experimentais e do modelo numérico encontrados nesta tese foram comparados com os reportados pela literatura. Em seguida, utilizando o modelo de elementos finitos foram gerados o PEC_C e o PEC_{Adap} com o objetivo de quantificar a incerteza no carregamento máximo, na energia total de fratura em DCT e no carregamento máximo em vigas de concreto. Isto permitiu a obtenção dos momentos estatísticos, da função densidade de probabilidade do PEC_C e do PEC_{Adap} e das variáveis aleatórias de saída com um tamanho amostral menor que o esperado usando SMC.

1.6 Organização do conteúdo

Este trabalho está organizado como segue:

- No Capítulo 2, realiza-se o levantamento do estado da arte relacionado com polinômios de expansão de caos de maneira resumida, apontando algumas das referências consultadas para maiores detalhes assim como um exemplo de sua implementação. Apresenta-se os conceitos de maneira sucinta de confiabilidade, viscoelasticidade, fadiga, fratura e mecânica do dano.
- No Capítulo 3 é analisado peças metálicas sob fadiga com carregamento constante e variável para estimar o número de ciclos para falha por fadiga. O PEC é usado para estimar a função de densidade de probabilidade, como também, a probabilidade de falha por fadiga, considerando aleatoriedade no material e no carregamento. Em seguida é realizada uma abordagem da influência do módulo de relaxação na variação da deflexão em vigas de concreto biapoiadas levando em consideração um modelo viscoelástico.
- No Capítulo 4 é apresentado uma validação do algoritmo proposto para diminuir o número de coeficiente do PEC (PEC adaptativo, PEC_{Adap}), utilizando funções de estado limite encontradas na literatura. Além disso, foram determinadas as deflexões máximas probabilística na ponte Koror-Babeldado na república de Palau, usando PEC com todos os coeficientes, PEC_C , e o PEC_{Adap} , levando em consideração modelo viscoelástico com envelhecimento do concreto.
- No Capítulo 5 é apresentado a metodologia utilizada para construir os DCT, os procedimentos do ensaio, a calibração da malha de elementos finitos e a calibração do número de passos de carregamento assim como os resultados da curva de comportamento $P-CMOD$, para as diferentes combinações de tamanho dos corpos de prova e as 3 taxas de carregamento, e uma análise estatística das propriedades da mecânica da fratura no ensaio de fratura em modo I.
- No Capítulo 6 são apresentados os resultados para PEC_C e o PEC_{Adap} , obtido da quantificação de incerteza em carregamento máximo e a energia total de fratura em DCT e carregamento máximo em SEN-TPB. Uma análise dos erros do PEC_C e do PEC_{Adap} com respeito aos resultados usando SMC são apresentados.
- No Capítulo 7 são abordadas as conclusões alcançadas nessa tese de doutorado e algumas sugestões para trabalhos futuros.
- Por último são apresentadas as referências bibliográficas, que serviram como embasamento para a realização deste trabalho, e os apêndices que contém os resultados utilizados nesta pesquisa.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Os sistemas estruturais devem cumprir requisitos de resistência, ductilidade e segurança, e isto pode ser levado em consideração ao estabelecer as incertezas nas entradas e saídas dos modelos físicos, assim como, nas contribuições de cada variável aleatória. Neste Capítulo, as definições de polinômio multivariado, construção de polinômios de caos, determinação dos coeficientes, transformação de espaço das variáveis e pós-processamento dos coeficientes de expansão de caos são abordados.

2.1 Polinômios de Expansão de Caos

Robert Brown, através de uma análise em microscópio, observou um movimento aleatório dos grãos de pólen em água em que as partículas apresentaram mudança de direção e o comportamento dos grãos foi aleatório, também conhecido como movimento browniano. Wiener forneceu uma descrição matemática das irregularidades no movimento browniano, levando-o a estabelecer a expansão de caos homogêneo (Wiener, 1938).

A variável aleatória $u(\theta)$ está definida no espaço probabilístico, expandida em uma base polinomial multivariada que segue uma função de distribuição de probabilidade. O polinômio multivariado pode ser escrito como um processo aleatório $u(\theta)$, dado como:

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \Psi_i[\boldsymbol{\xi}(\theta)] \quad (2.1)$$

em que, y_i são os coeficientes determinísticos desconhecidos, θ é um evento aleatório, $\boldsymbol{\xi}(\theta)$ é um conjunto de variáveis aleatórias normais padronizadas distribuídas identicamente e independente, em inglês *independent identically distributed, iid*. Os polinômios de Hermite Ψ_i ($\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}, \xi_{i4}, \dots, \xi_{in}$) formam uma base ortogonal, a qual é um espaço de Hilbert das variáveis aleatórias com variância finita. A função $\Psi_i(\boldsymbol{\xi})$ na Equação (2.1) satisfaz a condição de ortogonalidade dada na Equação (2.2), ou seja, o vetor de ordem p é ortogonal com respeito ao vetor de ordem $p-1$ e $p+1$.

$$\begin{aligned}
\Psi_0(\xi) &= 1 \\
E[\Psi_i(\xi)] &= 0 \text{ para } i > 1 \\
E[\Psi_i(\xi)\Psi_j(\xi)] &= 0, \text{ para } i \neq j
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Em que $E[\Psi_i(\xi)]$ representa o valor esperado da função $\Psi_i(\xi)$. Outra forma, de representar os polinômios ortogonais multidimensionais segundo Ghanem e Spanos (2003) é:

$$\begin{aligned}
u(\theta) &= y_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} y_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} y_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \\
&+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} y_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \dots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

em que, $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$ é um conjunto de variáveis aleatórias Gaussianas, $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_p})$ são as funções base polinomial que denotam os polinômios de Hermite de ordem p , em termos das variáveis aleatórias normais independentes multidimensionais $\xi = [\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_p}]$. Ao fim, $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}$ são os coeficientes determinísticos e i representa a dimensão do polinômio. Dessa forma é possível a construção dos polinômios de Hermite de qualquer dimensão e grau usando a função de probabilidade normal padronizada ou um algoritmo.

2.1.1 Construção de polinômios de caos

Os polinômios de Hermite podem ser gerados a partir da função de densidade de probabilidade conjunta Gaussiana multidimensional- p , como pode ser visto na Equação (2.4), para cada grau p e dimensão i segundo Ghanem e Spanos (2003):

$$\Gamma_p(\xi) = (-1)^p e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} \frac{\partial^p}{\partial \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \tag{2.4}$$

Na literatura é possível encontrar algoritmos que permitam a construção dos polinômios de Hermite de ordem $p+1$, H_{p+1} , em termos das ordens dos polinômios anteriores p , H_p e $p-1$, H_{p-1} como é mostrado a seguir.

$$H_{p+1}(\xi(\theta)) = \xi H_p(\xi(\theta)) - p H_{p-1}(\xi(\theta)) \tag{2.5}$$

Os polinômios de Hermite de ordem zero e um, são definidos como, $H_0(\xi) = 1$ e $H_1(\xi) = \xi$. Logo, a ordem dos polinômios de dimensão 1 e de ordem 0 a 5 são apresentados, na Equação (2.6).

$$\begin{aligned}
H_0(\xi) &= 1 \\
H_1(\xi) &= \xi \\
H_2(\xi) &= \xi H_1 - 1H_0 = \xi(\xi) - 1(1) = \xi^2 - 1 \\
H_3(\xi) &= \xi H_2 - 2H_1 = \xi(\xi^2 - 1) - 2(\xi) = \xi^3 - 3\xi \\
H_4(\xi) &= \xi H_3 - 3H_2 = \xi(\xi^3 - 3\xi) - 3(\xi^2 - 1) = \xi^4 - 6\xi^2 + 3 \\
H_5(\xi) &= \xi H_4 - 4H_3 = \xi(\xi^4 - 6\xi^2 + 3) - 4(\xi^3 - 3\xi) = \xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi
\end{aligned} \tag{2.6}$$

A série apresentada na Equação (2.3) pode ser truncada em um número finito de termos N e dada em função de uma resposta aproximada \hat{u} , mostrada abaixo, que vai depender do número de termos do truncamento N (Kewlani *et al.*, 2012; Sudret, 2012; Beck e Santana, 2013), dado como:

$$u(\theta) \approx \hat{u}(\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \Psi_i[\boldsymbol{\xi}(\theta)] \tag{2.7}$$

em que, o número de termos do truncamento N , numa expansão de ordem p envolvendo n variáveis aleatórias, sendo exposto a seguir:

$$N = \frac{(n+p)!}{n!p!} \tag{2.8}$$

Seja o seguinte exemplo, cuja resposta y é uma função de três variáveis aleatórias, x_1 , x_2 e x_3 , e $p = 3$, em que x_1 segue uma função densidade de probabilidade normal (\mathcal{N}), com media zero, $\mu = 0$, e desvio padrão um, $\sigma = 1$, representado por $x_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, assim como, $x_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $x_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. As variáveis aleatórias x_1 , x_2 e x_3 que cumprem a condição acima exposta são chamadas variáveis aleatórias padrão, $x_i = \xi_i$, e podem ser representadas por polinômio de Hermite. Sendo assim, a solução aproximada da expansão, \hat{y} , ficaria conforme e indicado na seguinte equação, conforme a Equação (2.5).

$$\begin{aligned}
\hat{y} = & y_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 + y_4(\xi_1^2 - 1) + y_5(\xi_2^2 - 1) + y_6(\xi_3^2 - 1) + y_7\xi_1\xi_2 + \\
& + y_8\xi_1\xi_3 + y_9\xi_2\xi_3 + y_{10}(\xi_1^3 - 3\xi_1) + y_{11}(\xi_2^3 - 3\xi_2) + y_{12}(\xi_3^3 - 3\xi_3) + \\
& + y_{13}(\xi_1^2 - 1)\xi_2 + y_{14}(\xi_1^2 - 1)\xi_3 + y_{15}(\xi_2^2 - 1)\xi_1 + y_{16}(\xi_2^2 - 1)\xi_3 + \\
& + y_{17}(\xi_3^2 - 1)\xi_1 + y_{18}(\xi_3^2 - 1)\xi_2 + y_{19}\xi_1\xi_2\xi_3
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Funções de densidade de probabilidade diferentes poderiam ser consideradas, ou seja, polinômios unidimensionais de famílias diferentes seriam utilizados para compor a base do polinômio multidimensional. Mediante transformações isoprobabilísticas das variáveis aleatórias é possível transformar as variáveis do espaço inicial ao espaço normal padronizado. Além disso, o PEC não podem ser concedido até o infinito e normalmente a expansão é truncada ao grau, p . Em termos do conjunto multi-índice \mathcal{J} , este é expresso em função da dimensionalidade do problema n e a

expansão de ordem p como $\mathcal{J}_{n,p}$, sendo definida como:

$$\mathcal{J}_{n,p} = \left\{ \mathbf{i} \in \mathbb{N}^N : \|\mathbf{i}\|_1 \leq p \right\} \quad (2.10)$$

em que, $\|\cdot\|_1$ é a norma-1. Na Equação (2.9), foram usados todos os termos de grau multi-índice ≤ 3 . Outra forma de expressar o polinômio é dada como uma sequência de inteiros como é apresentada na Tabela 2.1. A continuação são apresentados as funções base do exemplo dado na Equação (2.9) utilizando o algoritmo de Sudret (2012).

Tabela 2.1: Algoritmo de Sudret (2012) aplicado na Equação (2.9).

ζ	Ψ_ζ	$\mathcal{J}_{n,p}$
[0, 0, 0]	1	0
[1, 0, 0]	ξ_1	1
[0, 1, 0]	ξ_2	1
[0, 0, 1]	ξ_3	1
[2, 0, 0]	$(\xi_1^2 - 1)$	2
[1, 1, 0]	$\xi_1 \xi_2$	2
[1, 0, 1]	$\xi_1 \xi_3$	2
[0, 2, 0]	$(\xi_2^2 - 1)$	2
[0, 1, 1]	$\xi_2 \xi_3$	2
[0, 0, 2]	$(\xi_3^2 - 1)$	2
[3, 0, 0]	$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$	3
[2, 1, 0]	$(\xi_1^2 - 1) \xi_2$	3
[2, 0, 1]	$(\xi_1^2 - 1) \xi_3$	3
[0, 3, 0]	$(\xi_2^3 - 3\xi_2)$	3
[1, 2, 0]	$(\xi_2^2 - 1) \xi_1$	3
[0, 2, 1]	$(\xi_2^2 - 1) \xi_3$	3
[0, 0, 3]	$(\xi_3^3 - 3\xi_3)$	3
[1, 0, 2]	$(\xi_3^2 - 1) \xi_1$	3
[0, 1, 2]	$(\xi_3^2 - 1) \xi_2$	3
[1, 1, 1]	$\xi_1 \xi_2 \xi_3$	3

Na Tabela 2.1 é apresentado o algoritmo que permite construir o PEC, em função do vetor ζ , em que, a primeira coluna é o p da primeira variável aleatória padrão, ξ_1 , até a última coluna que representa o p da terceira variável aleatória padrão, ξ_3 . O PEC é construído desde o $p = 0$ até o p requerido e a somatória dos componentes do vetor ζ corresponde ao p que se este analisando. Ψ_ζ representa as funções básicas para cada variável aleatória padrão com respeito ao p analisado, e $\mathcal{J}_{n,p}$ corresponde à somatória dos graus.

Para problemas de alta dimensão, $n \geq 10$ o número de coeficientes é elevado e o número de operações é grande (Didier *et al.*, 2012; Bryson e Rumpfkeil, 2017; Hawchar *et al.*, 2017; Abraham *et al.*, 2017). Neste caso a teoria PEC não apresenta uma vantagem comparada com outros métodos como a SMC e foi esta a motivação para a versão do PEC adaptativo dada por Blatman e Sudret (2010) e a deste trabalho. Blatman e Sudret (2010) propuseram selecionar somente um conjunto de funções básicas que leva em consideração os efeitos da alta ordem, ou seja, sem mistura

na resposta do sistema (Slim *et al.*, 2017). Para eliminar a interação de alta ordem, a nova forma da distância é definida e aplicada sobre um conjunto multi-índice $\mathfrak{J}_{n,p}$, chamado norma- q , o qual modifica $\|\cdot\|_1$, por:

$$\|\cdot\|_q = \left(\sum^n (\cdot)^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.11)$$

O novo conjunto multi-índice hiperbólico é denotado por $\mathfrak{J}_{n,p}^q$, ou seja, tem-se:

$$\mathfrak{J}_{n,p}^q = \left\{ \mathbf{i} \in \mathbb{N}^n : \|\mathbf{q}\|_1 \leq p \right\} \quad (2.12)$$

$$\left\{ \mathbf{i} \in \mathbb{N}^n : \left(\sum_{i=1}^n i_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq p \right\}$$

Para um problema de dimensão 2 e ordem 6 e norma-1, o número de coeficientes do PEC é 28, aplicando a Equação (2.8); como a representação gráfica, apresentada na Figura 2.1(a). Uma representação gráfica do truncamento hiperbólico com norma $q=0,75$ e $q=0,50$ pode ser achado na Figura 2.1(b-c), respectivamente. O termo polinomial selecionado pela primeira variável aleatória está localizado no eixo horizontal enquanto que o termo correspondente da segunda variável aleatória está no eixo vertical.

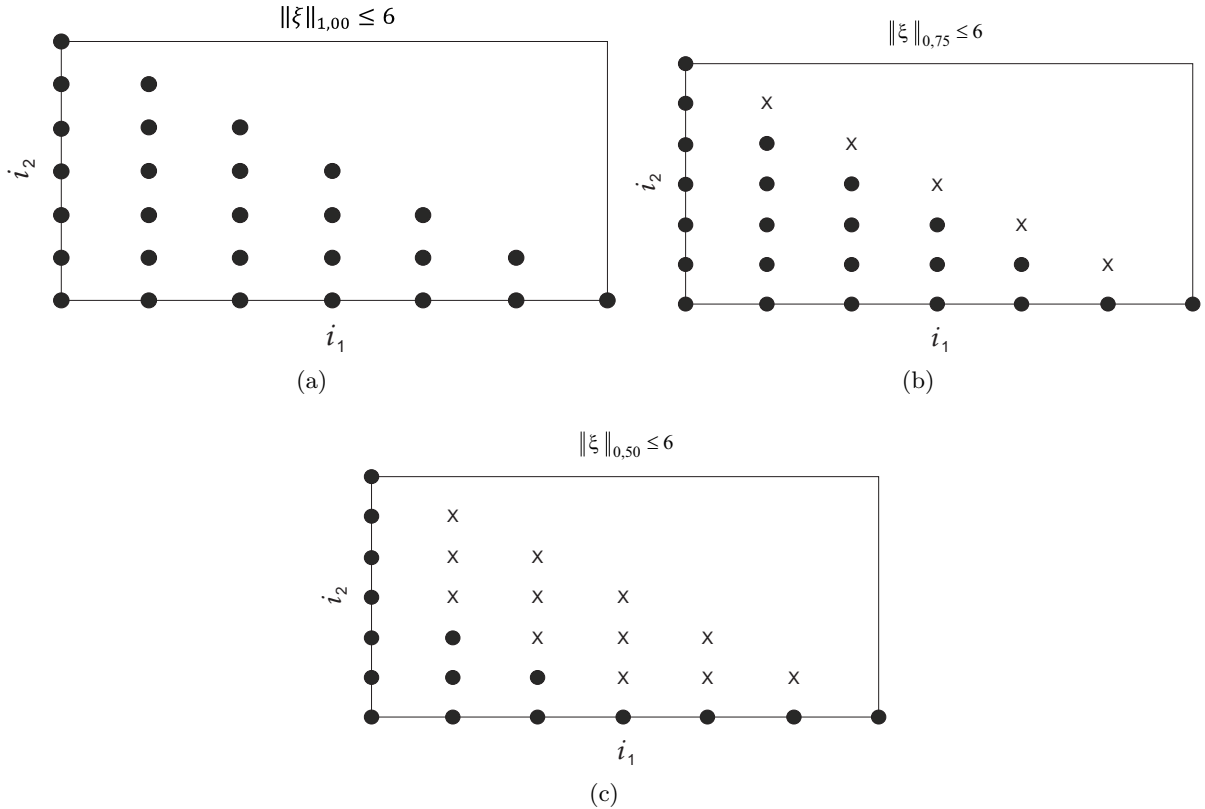


Figura 2.1: Truncamento para o PEC de $n=2$ e $p=6$, com (a) $\|\xi\|_{1,00} \leq 6$, (b) $\|\xi\|_{0,75} \leq 6$ e (c) $\|\xi\|_{0,50} \leq 6$.

Em sua tese Blatman (2009) mostrou que o PEC disperso pode produzir meta modelos com

maior acurácia, aplicando o truncamento hiperbólico ($q=0,50$), de acordo com a Figura 2.1(c) que acrescenta um truncamento ao realizado inicialmente pela Equação (2.8). Na Figura 2.1 apresenta-se a análise para duas variáveis aleatórias de ordem θ e diferentes valores de norma- q , em que os pontos sólidos consideram a função base e o restante desconsidera a iteração de alta ordem. Este truncamento conserva as funções básicas e as iterações de baixa ordem e desconsidera as iterações de alta ordem (Blatman e Sudret, 2011).

No exemplo apresentado na Figura 2.1, indica-se que, para uma norma $q=0,75$ são necessários 23 coeficientes do PEC e com norma $q=0,50$ só precisa-se de 16 coeficientes enquanto que aplicando a Equação (2.8), ou norma $q=1,00$, precisa-se de 28 coeficientes. Nesta tese, outro tipo de truncamento será utilizado, usando só os componentes principais, ou seja, as funções base como uma nova maneira de expressar o PEC e serão apresentados no capítulo 4. Este outro tipo de truncamento faz parte da contribuição obtida nesta tese ao desenvolvimento dos PEC.

2.1.2 Determinação dos coeficientes do PEC

A variável aleatória de saída $u(\theta)$ pode ser aproximada e expressa como o resultado de uma simulação numérica $\hat{u}(\theta)$, ou simplesmente \hat{u} , ou seja, a saída de um código numérico que implica um modelo matemático. Distinguem-se duas classes de métodos para a determinação dos coeficientes do PEC: o método intrusivo e o não intrusivo. A propagação da incerteza na simulação computacional do modelo via PEC, com um enfoque intrusivo, leva em consideração que todas as variáveis dependentes e os parâmetros aleatórios na equação que governa são substituídos pelos polinômios definidos nas funções de densidade de probabilidade, $f_{\mathbf{X}}(x)$. Esta nova expressão irá gerar um sistema de equações determinísticas a ser resolvido, no qual o procedimento fará a modificação do código computacional (determinístico) existente. Como exemplo, tem-se o chamado método dos elementos finitos estocástico espectral, no qual os coeficientes do PEC são obtidos através de um esquema de Galerkin que leva a um sistema de equações determinísticas acopladas (Blatman e Sudret, 2010). O método não intrusivo é mais simples, porém uma formulação intrusiva para problemas complexos pode ser de difícil implementação e de custo computacional proibitivo (Hosder e Walters, 2010; Blatman e Sudret, 2011).

O método não intrusivo é o método utilizado neste trabalho: Identifica-se a equação do modelo e onde os coeficientes desconhecidos podem ser calculados por diferentes métodos. Os coeficientes são estimados usando equações do modelo de saída, expresso como um PEC, em um conjunto de pontos que vai depender do método utilizado. Para cada conjunto de saída têm-se um conjunto de equações com coeficientes desconhecidos não requerendo a modificação do código numérico. A limitação do método está no cálculo dos coeficientes do PEC, utilizando simulações dos parâmetros aleatórios como uma "caixa preta" em que entram os valores das variáveis e sai a resposta.

Entre os métodos não intrusivos destacam-se: O método da projeção (Maitre *et al.*, 2001; Ghiocel e Ghanem, 2002; Keese e Matthies, 2005), o método da colocação estocástica (Isukapalli, 1999; Xiu e Hesthaven, 2005; Dongbin, 2009), o método da regressão (Berveiller *et al.*, 2006; Blatman e Sudret, 2010; Blatman e Sudret, 2011). O método da colocação junto com o método da regressão foi usado nesta pesquisa para melhorar a precisão dos coeficientes, dado que a quantidade e

qualidade dos pontos de colocação definirá a qualidade da aproximação.

O método da projeção assume que a resposta aleatória do modelo Y é escrita como uma expansão de polinômios de caos, como está descrita na Equação (2.7). O método da projeção têm como objetivo estimar os coeficientes do PEC, y_i , explorando a ortogonalidade da base truncada $\{\Psi_\zeta, \zeta \leq N\}$. Multiplicando a Equação (2.7) por $\Psi_\beta(\boldsymbol{\xi})$ e calculando o valor esperado, obtém-se a expressão teórica de cada coeficiente, y_ζ , em que usando técnicas de integração numéricas mediante somas ponderadas, é possível determinar os coeficientes dados por:

$$y_\zeta \approx \sum_{i=1}^N w^i Y(\xi(i)) \Psi_\zeta \quad (2.13)$$

em que w^i é o peso de integração da realização i de entrada. Existem duas classes de esquemas de projeção que podem ser usadas: métodos de simulação e o método de quadratura.

O método da regressão, trabalha com PEC truncado para efeitos computacionais, considerando uma série de expansão que pode ser vista como uma soma da série truncada e um residual (ε_N), conforme é exposto a seguir:

$$Y = \sum_{i=0}^{N-1} y_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon_N \quad (2.14)$$

em que os coeficientes desconhecidos \mathbf{y} e o polinômio multivariado $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi})$ podem ser expressos em forma vetorial como indica-se abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}^T \\ \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) &= \{\Psi_0(\boldsymbol{\xi}), \Psi_1(\boldsymbol{\xi}), \dots, \Psi_{N-1}(\boldsymbol{\xi})\}^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

Reescrevendo a Equação (2.14) como,

$$Y = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon_N \quad (2.16)$$

é possível determinar os coeficientes desconhecidos \mathbf{y} como um problema de regressão; que minimiza o erro quadrático médio residual, mostrado a seguir.

$$\hat{\mathbf{y}} = \underset{\mathbf{y}}{\operatorname{argmin}} E \left[\left(Y - \mathbf{y}^T \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

em que $\hat{\mathbf{y}}$ é o vetor de coeficientes desconhecidos aproximados. O método da colocação tem em conta os pontos de máxima probabilidade para cada polinômio de Hermite, sendo utilizados para determinar a resposta do sistema. Na próxima seção é apresentado com mais detalhe o método de colocação utilizado na pesquisa.

Seleção dos pontos de colocação

A seleção dos pontos de colocação de um PEC de dimensão n e de ordem p correspondem às raízes do polinômio seguinte, ou seja, $p+1$, de cada variável de entrada. O conjunto de pontos de colocação é eleito de todas as combinações possíveis $(\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \xi_{3,1}, \dots, \xi_{n,1}), (\xi_{1,2}, \xi_{2,2}, \xi_{3,2}, \dots, \xi_{n,2}),$

$\dots, (\xi_{1,N}, \xi_{2,N}, \xi_{3,N}, \dots, \xi_{n,N})$ com a maior probabilidade. Por exemplo, o primeiro conjunto de pontos de colocação é $(0, 0, 0, \dots, 0)$ que corresponde às médias das variáveis aleatórias normais padronizadas. O conjunto de pontos de colocação corresponde à combinação das raízes que gerem a mais alta probabilidade, até gerar os N conjuntos de pontos de colocação. O número de pontos de colocação selecionados deve ser duas vezes o número de coeficientes desconhecidos a serem estimados nos polinômios de caos para obter um estimador robusto do coeficiente (Isukapalli, 1999).

O método de colocação probabilístico pode ser instável para PEC de alta ordem, já que os pontos devem passar por todos os pontos de colocação selecionados, e qualquer um deles no espaço do modelo pode atrapalhar o comportamento do polinômio (Isukapalli, 1999). Esta pesquisa utilizou-se inicialmente dos pontos de máxima probabilidade, porém, encontrou-se que os pontos gerados pela sequência de Sobol oferece melhores resultados com menor quantidade amostral.

2.1.3 Transformação do PEC com diferentes funções densidade de probabilidade

Muitas situações em sistemas mecânicos precisam de variáveis aleatórias com funções densidade de probabilidade diferente, que representem a aleatoriedade do problema físico, e elas devem ser modeladas dentro de uma base consistente. Existem duas técnicas usadas na literatura: o método de transformação e o algoritmo de polinômios de expansão de caos generalizado segundo Xiu e Karniadakis (2002), que classifica os polinômios ortogonais hipergeométricos e a relação entre eles. O PEC generalizados não são limitados aos polinômios de Hermite (para funções densidade de probabilidade normal) não correlacionados. Esta pesquisa usa o método da transformação para o caso de variáveis aleatórias não normais.

Transformação de variáveis não normais

Os sistemas mecânicos podem ter diversidade de variáveis aleatórias, todas elas associadas com $f_{\mathbf{X}}(x)$, sendo por isso, ainda mais difícil atribuir-lhe um polinômio ortogonal à $f_{\mathbf{X}}(x)$ de cada variável. Uma transformação isoprobabilística pode ser feita tal qual um mapeamento que leva do espaço das variáveis originais a um espaço das variáveis aleatórias normais padronizadas, as quais são a base dos polinômios de Hermite. Uma forma simples de fazê-lo é calcular a inversa de sua $f_{\mathbf{X}}(x)$ da variável original do problema e substituir esse valor na $f_{\mathbf{X}}(x)$ da normal padronizada.

A transformação de 14 tipos de função de densidade frequentemente usados são resumidos na Tabela 2.2, em que ξ é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade normal padronizada. Os dois primeiros momentos estatísticos μ e σ são a média e o desvio padrão das variáveis aleatórias não correlacionadas enquanto a , b e λ são parâmetros de escala de cada distribuição.

Tabela 2.2: Transformação isoprobabilísticas $x = f(\xi)$ de variáveis aleatórias. Adaptado de Isukapalli (1999), Huang *et al.* (2009), Li *et al.* (2011)

Tipo de distribuição	Função densidade de probabilidade	Transformação, $x = f(\xi)$
Uniforme	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{b-a}$	$x = a + (b-a) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right]$
Normal	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$	$x = \mu + \sigma\xi$
Lognormal	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma} \right)^2}$	$x = e^{(\sigma\xi+\mu)}$
Chi-quadrado	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	$x = n \left(\xi \sqrt{\frac{2}{9n}} + 1 - \frac{2}{9n} \right)^3$
Exponencial	$f_{\mathbf{X}}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-x_0)}$	$x = x_0 - \frac{\ln(1-\Phi(\xi))}{\sigma}$
Fréchet	$f_{\mathbf{X}}(x) = \left(\frac{u}{x} \right)^k \frac{k}{x} e^{\left(\frac{u}{x} \right)^k}$	$x = \frac{u}{[-\ln(\Phi(\xi))]^{\frac{1}{k}}}$
Gamma	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{x^{a-1}}{b^a \Gamma(a)} e^{-\frac{x}{b}}$	$x = ab \left(\xi \sqrt{\frac{1}{9a}} + 1 - \frac{1}{9a} \right)$
Rayleigh	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{(x-x_0)}{\alpha^2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right)^2}$	$x = x_0 + \alpha \sqrt{-2 \ln(1-\Phi(\xi))}$
Tipo I máximo	$f_{\mathbf{X}}(x) = \alpha e^{-\alpha(x-u)} e^{-\alpha(x-u)}$	$x = u - \frac{\ln[-\ln(\Phi(\xi))]}{\alpha}$
Tipo I mínimo	$f_{\mathbf{X}}(x) = \alpha e^{\alpha(x-u)} e^{-e^{\alpha(x-u)}}$	$x = u + \frac{\ln[-\ln(1-\Phi(\xi))]}{\alpha}$
Weibull 3 parâmetros	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{k(x-x_0)^{k-1}}{(u-x_0)^k} e^{-\left(\frac{x-x_0}{u-x_0} \right)^k}$	$x = x_0 + (u-x_0) [1-\Phi(\xi)]^{\frac{1}{k}}$
Triangular	$f_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(c-a)} & c < x \leq b \\ 0 & \text{outros} \end{cases}$	$x = \begin{cases} \sqrt{(b-a)(c-a)} \Phi(\xi) + a & a \leq x \leq c \\ b - \sqrt{(b-a)(b-c)(1-\Phi(\xi))} & c < x \leq b \end{cases}$
Normal truncada	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{F_0(x_0) - F_0(x_1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} * e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$	$x = \mu + \sigma \left\{ \Phi^{-1} \left[\Phi(\xi) \left(\Phi \left(\frac{x\xi-\mu}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \right) + \Phi \left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \right) \right) \right] \right\}$
Exponencial truncada	$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$	$x = -\frac{1}{\lambda} \ln \left\{ e^{-\lambda a} - \Phi(\xi) \left[e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \right] \right\}$

O diagrama de fluxo apresentado na Figura 2.2, é uma combinação dos trabalhos apresentados por (Isukapalli, 1999) e (Huang *et al.*, 2009), e indica os passos a seguir no modelo da colocação estocástica com regressão. O diagrama é composto por 4 grandes partes; a primeira é a representação das variáveis aleatórias de entrada no espaço das variáveis aleatórias normais padrão. A segunda e a terceira parte estão relacionadas a expressar o polinômio em uma base consistente e a determinar os coeficientes do PEC, e por fim, a quarta parte relacionada com o pós-processamento.

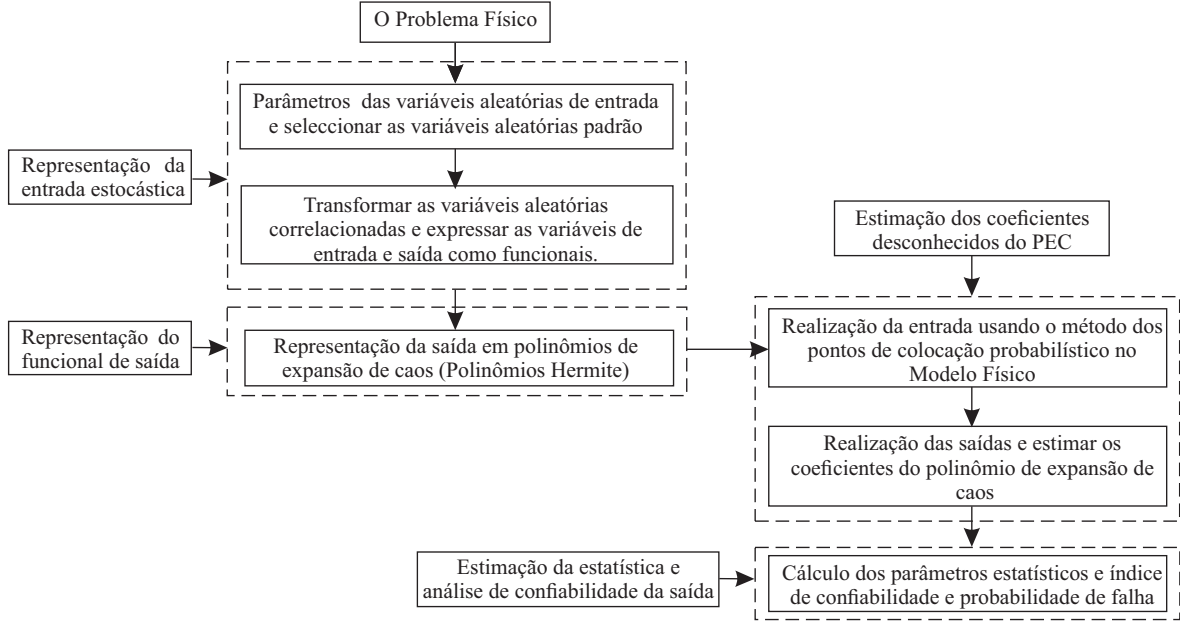


Figura 2.2: Diagrama de fluxo do método da colocação baseado em regressão

2.1.4 Pós-processamento dos coeficientes de expansão de caos

A representação da resposta da variável aleatória do modelo em termos de seus polinômios de expansão de caos é descrita como:

$$Y = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \Psi_j(\xi) \quad (2.18)$$

Os coeficientes do PEC devem ser pós-processados para gerar algumas quantidades de interesse como: média (μ), desvio padrão (σ), assimetria e curtose da resposta, definidos abaixo como momentos estatísticos, e a $f_{\mathbf{X}}(x)$ é gerada por um modelo analítico usando SMC.

Função densidade de probabilidade da resposta

Para obter uma representação gráfica da resposta da $f_{\mathbf{X}}(x)$, a série de expansão dada na Equação (2.18) pode ser simulada usando SMC, gerando um conjunto de amostragem $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$ que pode gerar um histograma e a $f_{\mathbf{X}}(x)$ da variável de saída. Embora $f_{\mathbf{X}}(x)$ seja uma função que contém todos os momentos estatísticos, é possível obter alguns dos momentos estatísticos utilizando-se apenas os coeficientes do PEC. Além disso, o tempo de simulação de um modelo pode diminuir se, por exemplo, um modelo com 10 variáveis aleatórias, determinado um modelo

aproximado definido com $p=3$, o número de simulações necessárias seria de 572, de acordo com a Equação (2.8).

Momentos estatísticos

Os momentos estatísticos podem ser encontrados para alguma ordem dos momentos da amostragem da resposta $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$. Porém, devido à ortogonalidade dos coeficientes do PEC, alguns momentos podem ser dados em expressões analíticas, o que evita a amostragem. O valor da média e da variância de Y , $\mu_{\hat{Y}}$ e $\sigma_{\hat{Y}}$, respectivamente, são expressos nas equações a seguir

$$\mu_{\hat{Y}} \equiv E[Y] = y_0 \quad (2.19)$$

$$\sigma_{\hat{Y}} \equiv Var[Y] = \sum_{j=1}^{N-1} y_j^2 \quad (2.20)$$

em que $E[Y]$ corresponde ao valor esperado do vetor de saída, y_0 é o primeiro coeficiente do PEC e $Var[Y]$ é a variância da saída Y . O momento de maior ordem pode ser diretamente calculado, por exemplo, os coeficientes de assimetria e curtose, $\delta_{\hat{Y}}$ e $\kappa_{\hat{Y}}$, respectivamente, são:

$$\delta_{\hat{Y}} = \frac{1}{\sigma_{\hat{Y}^3}} \left[(Y - y_0)^3 \right] = \frac{1}{\sigma_{\hat{Y}^3}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} d_{ijk} y_i y_j y_k \quad (2.21)$$

e

$$\kappa_{\hat{Y}} = \frac{1}{\sigma_{\hat{Y}^4}} E \left[(Y - y_0)^4 \right] = \frac{1}{\sigma_{\hat{Y}^4}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} d_{ijkl} y_i y_j y_k y_l \quad (2.22)$$

em que $d_{ijk} = E[\Psi_i(\mathbf{X}) \Psi_j(\mathbf{X}) \Psi_k(\mathbf{X})]$ representa o valor esperado do produto triplo do polinômio multivariado e $d_{ijkl} = E[\Psi_i(\mathbf{X}) \Psi_j(\mathbf{X}) \Psi_k(\mathbf{X}) \Psi_l(\mathbf{X})]$ é o valor esperado do quarto produto do polinômio multivariado. No caso de polinômios de Hermite, os coeficientes podem ser calculados analiticamente (Sudret, 2007). O conjunto de d_{ijk} e d_{ijkl} , assim chamados de produtos espectrais, tem uma estrutura dispersa, no sentido que muitos de seus valores são zero.

2.1.5 Sequência de Sobol

A sequência de Sobol pertence à família de sequências quase aleatórias que são projetadas para gerar amostras de múltiplos parâmetros tão uniformemente distribuídas quanto possível sobre o espaço de parâmetros multidimensional (Saltelli *et al.*, 2010; Todorov *et al.*, 2017). A maior diferença para números pseudo-aleatórios é que os valores amostrais são escolhidos considerando os pontos amostrados anteriormente e evitando assim a ocorrência de aglomeração. A dispersão na exploração do espaço de variáveis multi-dimensionais é baixo comparada com outras técnicas de amostragem. A média estimada de uma função $Y(x_1, x_2, \dots, x_k)$ avaliada nas combinações dos

pontos gerado pela sequência de Sobol, e representada por uma matriz de entrada \mathbf{F} , como:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(M-1)} & x_2^{(M-1)} & \cdots & x_k^{(M-1)} \\ x_1^{(M)} & x_2^{(M)} & \cdots & x_k^{(M)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

em que k representa a dimensão do problema; convergirá rapidamente pela média da função que no caso de amostragem pseudo-aleatório (Todorov *et al.*, 2017). A fim de utilizar o PEC para estimar o carregamento máximo no DCT, realizou-se uma calibração dos polinômios em confiabilidade desde o ponto de vista da simulação numérica.

2.1.6 Aplicação geral do PEC

O PEC é um método espectral (Papoulis, 1991; Isukapalli, 1999; Ghanem e Spanos, 2003; Phoon e Huang, 2007; Blatman, 2009; Huang *et al.*, 2009) que permite a propagação da incerteza das variáveis aleatórias de entrada. A propagação se dá através da construção de funcionais não lineares dependentes da solução (Ghanem e Spanos, 2003; Le-Maître e Knio, 2010) da variável aleatória de saída, que irá facilitar a quantificação da incerteza da saída através de $f_{\mathbf{X}}(x)$ (Tatang, 1995). A convergência da solução aproximada é medida por comparação do PEC de diferente grau, segundo Isukapalli (1999), ou entre PEC e SMC (Sudret, 2007; Le-Maître e Knio, 2010), assegurando a precisão dos resultados. A convergência espectral vai depender da alta diferenciabilidade das funções de Hermite contida em cada variável aleatória normal padrão segundo Xiu (2010).

Uma aplicação do PEC de maneira geral é realizada a seguir. Considere um modelo computacional com uma variável aleatória de saída (Y) com quatro variáveis aleatórias de entrada (X_1, X_2, X_3, X_4) em que as $f_{\mathbf{X}}(x)$ estão dadas na Tabela 2.3. As variáveis aleatórias de entrada podem ser transformadas no espaço normal padrão, um exemplo é apresentado na Tabela 2.3 e expressadas como variáveis aleatórias normais padrão ξ_1, ξ_2, ξ_3 e ξ_4 , em que ξ_1, ξ_2, ξ_3 e ξ_4 são *iid*.

Tabela 2.3: Transformação do espaço das variáveis aleatórias normais padrão ao espaço das variáveis aleatórias, $x = f(\xi)$

Variável	$f_{\mathbf{X}}(x)$	μ	σ	$x = f(\xi)$
X_1	Uniforme	p_1	q_1	$X_1 = p_1 + (q_1 - p_1) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \right) \right]$
X_2	Lognormal	p_2	q_2	$X_2 = e^{(p_2 + q_2 \xi_2)}$
X_3	Gamma	p_3	q_3	$X_3 = p_3 q_3 \left(\xi_3 \sqrt{\frac{2}{9p_3}} + 1 - \frac{2}{9p_3} \right)^3$
X_4	Normal	p_4	q_4	$X_4 = \xi_4 q_4 + p_4$

Na Tabela 2.3, relacionam-se as variáveis X_i e as variáveis ξ_i em função dos parâmetros μ e σ

e não dos parâmetros da $f_{\mathbf{X}}(x)$, e erf corresponde à função erro. Uma aproximação do modelo computacional, expressado como um funcional de segunda ordem em termos de ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 e ξ_4 , é:

$$\begin{aligned} Y = & y_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 + y_4\xi_4 + y_5(\xi_1^2 - 1) + y_6(\xi_2^2 - 1) + \\ & + y_7(\xi_3^2 - 1) + y_8(\xi_4^2 - 1) + y_9\xi_1\xi_2 + y_{10}\xi_1\xi_3 + y_{11}\xi_1\xi_4 + y_{12}\xi_2\xi_3 + \\ & + y_{13}\xi_2\xi_4 + y_{14}\xi_3\xi_4 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para estimar os 15 coeficientes da Equação (2.24), é necessário a seleção de um conjunto de pontos de amostragem N , igual ao dobro do número de coeficientes do PEC (Isukapalli, 1999), ou seja, 30 para este caso na forma de:

$$\begin{aligned} & (\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \xi_{3,1}, \xi_{4,1}), (\xi_{1,2}, \xi_{2,2}, \xi_{3,2}, \xi_{4,2}), (\xi_{1,3}, \xi_{2,3}, \xi_{3,3}, \xi_{4,3}), \dots, \\ & (\xi_{1,30}, \xi_{2,30}, \xi_{3,30}, \xi_{4,30}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

A seleção dos pontos de amostragem foi discutida na seção seleção dos pontos de colocação, sendo que estes pontos correspondem à amostragem do modelo original $(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}), \dots, (x_{1,30}, x_{2,30}, x_{3,30}, x_{4,30})$ depois de serem transformados, como é apresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \xi_{1,i} \\ \xi_{2,i} \\ \xi_{3,i} \\ \xi_{4,i} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Transf.}} \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \\ x_{4,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 + (q_1 - p_1) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ e^{p_2 + q_2 \xi_2} \\ p_3 q_3 \left(\xi_3 \sqrt{\frac{2}{9p_3}} + 1 - \frac{2}{9p_3} \right)^3 \\ \xi_4 q_4 + p_4 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

os pontos no espaço das variáveis de entrada $(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}), \dots, (x_{1,30}, x_{2,30}, x_{3,30}, x_{4,30})$ são substituídos na formulação do problema original para estimar as saídas $(Y_{1,1}, Y_{2,1}, Y_{3,1}, Y_{4,1}), \dots, (Y_{1,30}, Y_{2,30}, Y_{3,30}, Y_{4,30})$. A formulação polinomial expressa na Equação (2.24) pode ser escrita na forma matricial, levando em conta as variáveis de saída, assim:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (2.27)$$

em que:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ \vdots \\ Y_{30} \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ \vdots \\ y_{15} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

e a matriz \mathbf{A} representa os valores de cada grau do polinômio para cada variável no espaço das variáveis aleatórias normais patronizadas e é dada a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} & \xi_{1,4} & \cdots & \xi_{1,30} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} & \xi_{2,4} & \cdots & \xi_{2,30} \\ \xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} & \xi_{3,4} & \cdots & \xi_{3,30} \\ \xi_{4,1} & \xi_{4,2} & \xi_{4,3} & \xi_{4,4} & \cdots & \xi_{4,30} \\ \xi_{1,1}^2 - 1 & \xi_{1,2}^2 - 1 & \xi_{1,3}^2 - 1 & \xi_{1,4}^2 - 1 & \cdots & \xi_{1,30}^2 - 1 \\ \xi_{2,1}^2 - 1 & \xi_{2,2}^2 - 1 & \xi_{2,3}^2 - 1 & \xi_{2,4}^2 - 1 & \cdots & \xi_{2,30}^2 - 1 \\ \xi_{3,1}^2 - 1 & \xi_{3,2}^2 - 1 & \xi_{3,3}^2 - 1 & \xi_{3,4}^2 - 1 & \cdots & \xi_{3,30}^2 - 1 \\ \xi_{4,1}^2 - 1 & \xi_{4,2}^2 - 1 & \xi_{4,3}^2 - 1 & \xi_{4,4}^2 - 1 & \cdots & \xi_{4,30}^2 - 1 \\ \xi_{1,1}\xi_{2,1} & \xi_{1,2}\xi_{2,2} & \xi_{1,3}\xi_{2,3} & \xi_{1,4}\xi_{2,4} & \cdots & \xi_{1,30}\xi_{2,30} \\ \xi_{1,1}\xi_{3,1} & \xi_{1,2}\xi_{3,2} & \xi_{1,3}\xi_{3,3} & \xi_{1,4}\xi_{3,4} & \cdots & \xi_{1,30}\xi_{3,30} \\ \xi_{1,1}\xi_{4,1} & \xi_{1,2}\xi_{4,2} & \xi_{1,3}\xi_{4,3} & \xi_{1,4}\xi_{4,4} & \cdots & \xi_{1,30}\xi_{4,30} \\ \xi_{2,1}\xi_{3,1} & \xi_{2,2}\xi_{3,2} & \xi_{2,3}\xi_{3,3} & \xi_{2,4}\xi_{3,4} & \cdots & \xi_{2,30}\xi_{3,30} \\ \xi_{2,1}\xi_{4,1} & \xi_{2,2}\xi_{4,2} & \xi_{2,3}\xi_{4,3} & \xi_{2,4}\xi_{4,4} & \cdots & \xi_{2,30}\xi_{4,30} \\ \xi_{3,1}\xi_{4,1} & \xi_{3,2}\xi_{4,2} & \xi_{3,3}\xi_{4,3} & \xi_{3,4}\xi_{4,4} & \cdots & \xi_{3,30}\xi_{4,30} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Os coeficientes desconhecidos y_j presentes na Equação (2.18) podem ser estimados, uma vez que os coeficientes são estimados. A distribuição de \mathbf{Y} está completamente descrita pelo PEC como é mostrada na Equação (2.24). No presente trabalho, um método não intrusivo é utilizado para estudar a fadiga e viscoelasticidade (Capítulo 3) e o efeito da taxa de carregamento (Capítulo 5) no carregamento máximo e a energia total de fratura via PEC. A seleção dos pontos de colocação são estimados usando sequência de Sobol (Capítulo 4), para determinar a saída do sistema, e a regressão é utilizada para achar os coeficientes determinísticos.

2.2 Confiabilidade

Esta seção tem por finalidade estabelecer as bases de verificação da probabilidade de falha de diferentes equações encontradas na literatura mediante simulação numérica de um modelo matemático no espaço das variáveis padronizadas, $\boldsymbol{\xi}$, e validadas por SMC no espaço das variáveis, \mathbf{X} .

2.2.1 Introdução

Nos projetos estruturais, um dos principais objetivos é assegurar o funcionamento do sistema dentro das especificações estabelecidas com nível de segurança máxima e levando em consideração as restrições econômicas do projeto. Os riscos aos quais uma estrutura está sujeita é chamado de probabilidade de falha e são avaliados pela aplicação dos métodos de análise da confiabilidade estrutural. Logo, o objetivo da análise da confiabilidade estrutural é garantir que a resistência dos

elementos da estrutura sejam maiores que a demanda de resistência imposta em toda a sua vida útil. As variáveis do projeto estrutural são grandezas físicas na confiabilidade estrutural, que são consideradas aleatórias e podem ser representadas em um vetor aleatório \mathbf{X} , descrito na Equação (2.30).

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \quad (2.30)$$

A probabilidade de falha de uma estrutura é obtida a partir da avaliação das incertezas inerentes das variáveis do projeto X_i , por meio das $f_{\mathbf{X}}(x)$ das variáveis aleatórias. A fim de estabelecer a probabilidade de falha, estabelecem-se relações funcionais entre as variáveis aleatórias do projeto através da função de desempenho $h(\mathbf{X})$, que pode ser descrita como:

$$h(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \quad (2.31)$$

A superfície de falha, ou de estado limite, é definida quando $h(\mathbf{X}) = 0$, caracterizado como o limite entre as regiões de segurança e de falha. Na Figura 2.3 é representada a função de estado limite $h(\mathbf{X}) = 0$ como a parte hachurada enquanto que a função de densidade conjunta f_{ReSe} é expressada como $f_{\mathbf{X}}(Re, Se)$ da função de estado limite. Os efeitos das forças são representados pela variável aleatória Se (demanda) e a resistência (capacidade) pela variável aleatória Re .

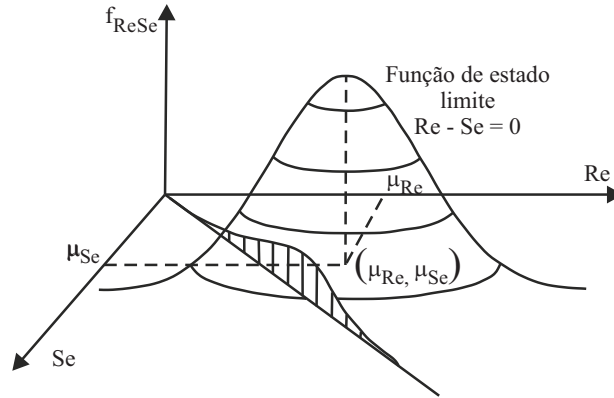


Figura 2.3: Função de densidade conjunta f_{ReSe} da função de desempenho $Re - Se$. Adaptado de Nowak e Collins (2012)

A probabilidade de falha (P_f) é dada por uma integral definida como:

$$P_f = \int \cdots \int_{g_{\mathbf{X}} < 0} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_n \quad (2.32)$$

O cálculo da probabilidade de falha na Equação (2.32) é complexo, uma vez que envolve integrais múltiplas e raramente se conhece a $f_{\mathbf{X}}(x)$ conjunta das variáveis aleatórias, sendo esta impossível de se obter. Não há metodologias que forneçam soluções para este problema, existem soluções aproximadas com aplicação de métodos de simulação e métodos analíticos que aproximem à função de estado limite por meio de superfícies lineares.

2.2.2 Simulação numérica

A SMC envolve um número significativamente grande de simulações do modelo analítico ou numérico com combinações das variáveis aleatórias. Tendo em conta a distribuição de probabilidades e os parâmetros de distribuição, as variáveis aleatórias normais padrão podem ser obtidas através da aplicação do método de transformação inversa (Melchers, 2001), vide a Equação (2.33).

$$\xi = \Phi^{-1}(F_{\mathbf{X}}(x_i)) \quad (2.33)$$

Em que, Φ é a $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal padrão e $F_{\mathbf{X}}(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ são as funções cumulativa de distribuição $F_{\mathbf{X}}(x)$ marginais de X_i

Para definir os valores das variáveis aleatórias seguiu-se o seguinte algoritmo proposto por (Kewlani *et al.*, 2012), em que, dada a expressão $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$, que representa o modelo sob consideração, o \mathbf{X} é um vetor que representa a incerteza nas variáveis de entrada, e \mathbf{Y} representa um vetor de saída estimado, assim:

1. Define-se as distribuições de probabilidade e os parâmetros da distribuição de cada variável aleatória de entrada;
2. Gera-se um valor de amostra de cada uma das j variáveis (X_j), aplicando o método da transformação inversa (Choi *et al.*, 2004);
3. Avalia-se a resposta do modelo analítico, ou numérico, utilizando os valores (X_j);
4. Repete-se os passos 2) e 3), para gerar uma distribuição de probabilidade da resposta. O número de simulações (N_s) é escolhido tal que a distribuição de saída converge para um valor definido.

Neste trabalho, a simulação do modelo estocástico $h(\mathbf{X})$ utiliza o método de Monte Carlo como base para validar a precisão da abordagem baseado em PEC (Sudret e Der-Kiureghian, 2000; Melchers, 2001; Kewlani *et al.*, 2012).

Se N_{SMC} é o número de simulações de Monte Carlo para cada variável aleatória no problema, e cada combinação de variáveis aleatórias representa uma realização do problema. A solução do problema N_{SMC} vezes, deterministicamente, dará N_{SMC} pontos de amostragem, no qual gerará uma informação da aleatoriedade da resposta, ou saída, do sistema para cada conjunto de variáveis básicas. A saída pode ser usada para calcular o histograma, $f_{\mathbf{X}}(x)$, $F_{\mathbf{X}}(x)$ e a probabilidade de falha para a função estado limite, em que a precisão da avaliação cresce na medida em que aumenta N_{SMC} .

Cada conjunto gerado de acordo com a sua $f_{\mathbf{X}}(x)$ é avaliado na função estado limite na Equação (2.31), assumindo variáveis aleatórias *iid*, e avaliando $h(\mathbf{X})$, vide Equação (2.31). É conhecido que um valor de $h(\mathbf{X})$ menor que zero indica falha, ou seja, o número de simulações que vai gerar $h(\mathbf{X}) < 0$ denota-se como N_{falha} . Uma estimativa da probabilidade de falha (P_f) pode ser expressa como.

$$P_f = \frac{N_{falha}}{N_s} \quad (2.34)$$

Para uma probabilidade de falha pequena e/ou pequeno N_s , a estimativa de P_f pode estar sujeita a erro. Devido à probabilidade de falha ser pequena (da ordem de 10^{-5}) nas estruturas, os códigos usam o índice de confiabilidade (β) definido como o inverso da função normal padrão cumulativa (Φ) da P_f , veja a Equação (2.35):

$$\beta = \Phi^{-1}(P_f) \quad (2.35)$$

2.3 Viscoelasticidade

Os materiais viscoelásticos lineares são caracterizados por um comportamento intermediário entre um sólido elástico linear e um fluido viscoso o qual segue a lei de Newton. Ao aplicar uma tensão de corte (τ) a um fluido, o corpo apresenta uma taxa de deformação $\dot{\epsilon}$, proporcional à tensão aplicada. Uma relação constitutiva dos fluidos Newtonianos é descrita na seguinte Equação e seu comportamento é apresentado na Figura 2.4(a), em que η representa a viscoelasticidade.

$$\tau = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.36)$$

Os materiais viscoelásticos têm a capacidade de armazenar energia de deformação como um sólido elástico e dissipá-la segundo a lei dos fluidos viscosos.

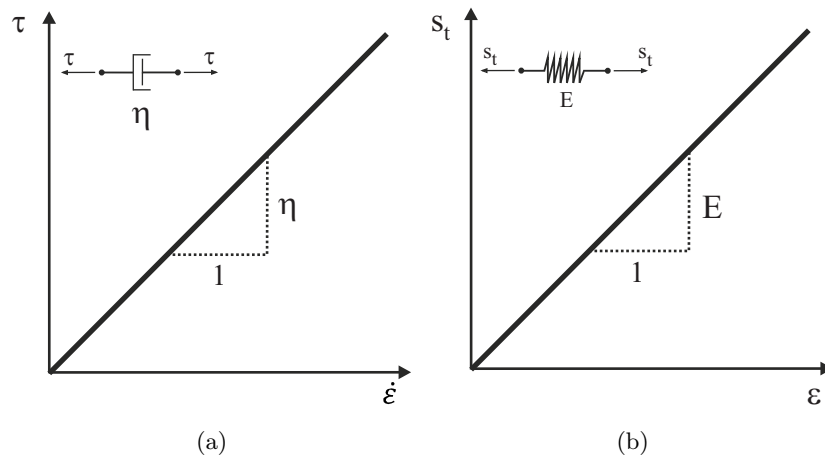


Figura 2.4: Analogia mecânica dos modelos elástico e viscoso simples, (a) fluido simples (newtoniano), (b) sólido elástico linear.

Os materiais considerados como sólidos elástico linear seguem a lei de Hooke, em que a tensão (S_t) é proporcional à deformação (ϵ) e é independente do tempo, dada na Equação 2.37 e seu comportamento é apresentado na Figura 2.4(b), em que E é o módulo de elasticidade.

$$S_t = E\epsilon \quad (2.37)$$

Fazendo uma analogia mecânica entre os materiais elétricos e viscoelásticos, o E é equivalente à capacitância do circuito (mede a capacidade de armazenamento de energia) que é usado para exibir

os diferentes modelos viscoelásticos que se encontram na literatura. Um exemplo dos modelos viscoelásticos são: Maxwell, Kelvin, Sólido linear padrão, Boltzmann, Burgers, Generalizado de Maxwell e Generalizado de Kelvin (Ferry, 1980; Christensen, 1982; Chaves, 2009). O modelo de Boltzmann usado nesta pesquisa é exibido na Figura 2.5 e considera um elemento de Kelvin e um elemento elástico simples operando em série (Christensen, 1982).

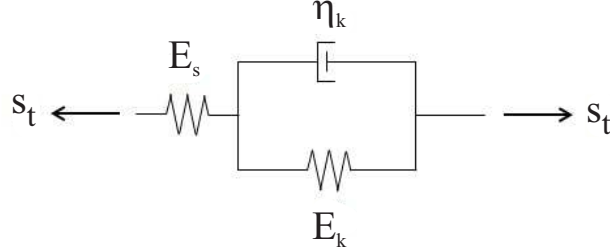


Figura 2.5: Modelo de Boltzmann para materiais viscoelásticos.

A Equação diferencial característica do modelo de Boltzmann, representado na Figura 2.5, é apresentada abaixo:

$$\left(1 + \frac{E_k}{E_s}\right) S_t + \frac{\eta_k}{E_s} \dot{S}_t = E_k \varepsilon + \eta_k \dot{\varepsilon} \quad (2.38)$$

em que E_k e η_k são respectivamente o módulo de elasticidade e a viscoelasticidade do modelo de Kelvin, E_s é o módulo de elasticidade de um modelo elástico linear e \dot{S}_t é a taxa de tensão. Aplicando uma tensão constante ao longo do tempo e considerando as condições de contorno $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ para o tempo $t = 0$ e $\dot{\varepsilon}(t) = 0, t > 0$, e resolvendo a Equação (2.38) obtém-se (Meneses, 2015):

$$E(t) = \frac{E_s}{E_s E_k} \left(E_k + E_s e^{-\frac{E_s + E_k}{\eta_k} t} \right) \quad (2.39)$$

em que t corresponde ao tempo e $E(t)$ é o módulo de relaxação, são definidos os seguintes parâmetros.

$$E_\infty = \frac{E_s E_k}{E_s + E_k}, \dots, E_1 = \frac{E_s^2}{E_s + E_k}, \dots, \rho_1 = \frac{\eta_k}{E_s + E_k} \quad (2.40)$$

E substituindo-os na Equação (2.39) obtém-se:

$$E(t) = E_\infty + E_1 e^{-\frac{t}{\rho_1}} \quad (2.41)$$

No Capítulo 3, esta equação será levada em consideração para encontrar a propagação da incerteza no cálculo das deflexões estimadas em vigas de concreto usando PEC. A Equação anterior expressa o módulo de relaxação como uma função do tempo e das relações dos módulos E_s , E_k e η_k porém, não é possível estabelecer uma relação para concreto envelhecido usando um modelo Boltzmann.

2.3.1 Concreto envelhecido

A Equação (2.41) representa bem o comportamento viscoelástico dos materiais, porém, não é capaz de representar o envelhecimento do material, pois o modelo depende da idade t' em que o material é carregado e da idade de análise do ensaio, t_e . Neste trabalho, adota-se o modelo proposto por Araújo *et al.* (2017) na formulação do comportamento viscoelástico do concreto, considerando o envelhecimento para a função $E(t_e, t')$, dada pela seguinte equação:

$$E(t_e, t') = \frac{1}{\sum_{i=1}^M \beta_i e^{-t'/\omega_i}} \left[E_\infty + \sum_{j=1}^R E_j e^{-\frac{(t_e-t')}{\rho_j}} \right] \quad (2.42)$$

em que, $E(t_e, t')$ é o módulo de relaxação, considerando o envelhecimento e o tempo de carregamento. O termo da direita da igualdade esta composto assim: o primeiro somatório é uma função de t' para a consideração do envelhecimento do material. O termo entre colchetes é a série de Prony que representa o comportamento viscoelástico do material (Araújo *et al.*, 2017). E_∞ representa o módulo do material totalmente relaxado, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$; E_j é a parcela elástica de cada dupla da série; ρ_j é o tempo de relaxação do material e β_i representa o coeficiente da função de envelhecimento. Outras variáveis são; ω_i que representa o coeficiente relacionado à idade de aplicação do carregamento, M que corresponde ao número de modelos de envelhecimento do material levados em consideração e R é o número de duplas de séries consideradas na serie de Prony. O modelo viscoelástico, levando em consideração processo de envelhecimento do concreto, é utilizado no Capítulo 4 para avaliar as deflexões no centro do vão de uma ponte de material quase frágil.

O PEC pode ser utilizados em diferentes áreas do conhecimento, dentre elas, a apresentada anteriormente. Uma nova aplicabilidade nesta tese consiste no uso do PEC em peças metálicas sometidas fadiga uniaxial. Em fadiga uniaxial, este trabalho considera a aleatoriedade do material e do carregamento na análise de ciclos de vida para falha de peças metálicas.

2.4 Fadiga

Nesta seção são abordadas noções básicas de fadiga uniaxial, necessárias para o desenvolvimento do modelo numérico que vai permitir estabelecer uma relação matemática entre as variáveis aleatórias e o número de ciclos de vida para falha por fadiga.

2.4.1 Comportamento tensão-deformação cíclico

O comportamento observado a partir das tensões e deformações (ε) que agem sobre um material submetido a carregamento cíclico ao longo do tempo, foi estudado por Morrow (1965) em corpos de prova de cobre. Os ensaios foram para diferentes tratamentos térmicos (totalmente recozido, parcialmente recozido e laminado a frio) com carregamento uniaxial cíclico de amplitude constante,

como se visualiza na Figura 2.6(a). A ε_{max} e ε_{min} correspondem a deformação máxima e mínima, respectivamente, e F é força axial aplicada.

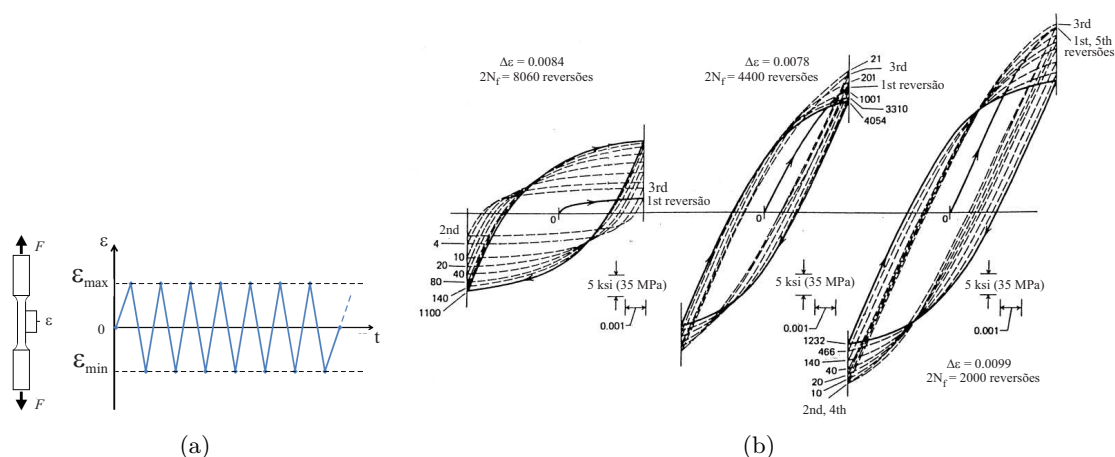


Figura 2.6: Ensaio de fadiga axial com deformação controlada, (a) carregamento uniaxial cíclico de amplitude constante, (b) laços de histerese. Adaptado de Morrow (1965)

A Figura 2.6(b) possui uma fase transiente, na qual os laços de tensão-deformação mudam em relação ao número de ciclos e tem uma fase estacionária ou estabilizada, no qual os laços de tensão-deformação permanecem inalterados. Na Figura 2.7 apresenta-se um laço de histerese estabilizado com os principais parâmetros de tensão e deformação.

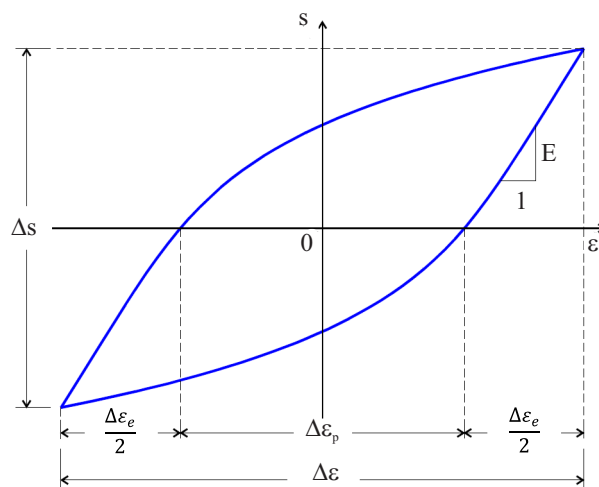


Figura 2.7: Representação esquemática de um laço de histerese estabilizado

Nota-se que a deformação total, $\Delta\varepsilon$, pode ser decomposta na deformação elástica, $\Delta\varepsilon_e$, e na deformação plástica, $\Delta\varepsilon_p$, como se indica na seguinte Equação.

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p \quad (2.43)$$

Em termos da amplitude de deformação é possível expressar as deformações anteriores conforme

a Equação abaixo:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ea} + \varepsilon_{pa} \quad (2.44)$$

em que $\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_{pa} = \frac{\Delta\varepsilon_p}{2}$ e $\varepsilon_{ea} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2}$ são as amplitudes de deformação total, plástica e elástica, respectivamente. A amplitude de deformação elástica segue a lei de Hooke, $\varepsilon_{ea} = \frac{S_a}{E}$ em que $S_a = \frac{\Delta S}{2}$ é a amplitude de tensões, ΔS é a tensão total e E é o módulo de elasticidade.

Geralmente, assume-se que a amplitude de tensão, S_a , e a amplitude de deformação plástica estão relacionadas da seguinte maneira:

$$S_a = H' \varepsilon_{pa}^{n'} \quad (2.45)$$

em que, H' é o coeficiente de encruamento cíclico e n' é o expoente de encruamento cíclico, sendo ambos parâmetros do material. Caso sejam produzidos diferentes laços de histerese estabilizados, cada um associado a uma ε_a diferente, tem-se um conjunto de laços de distintos tamanhos, conforme a Figura 2.8(a).

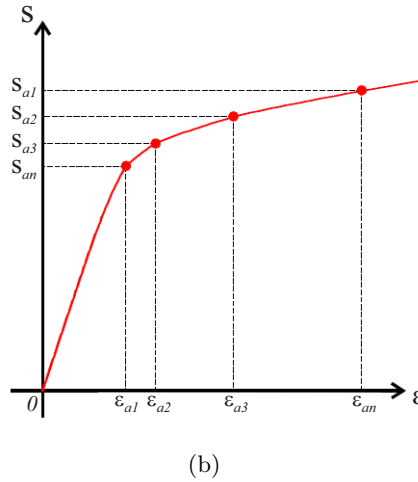
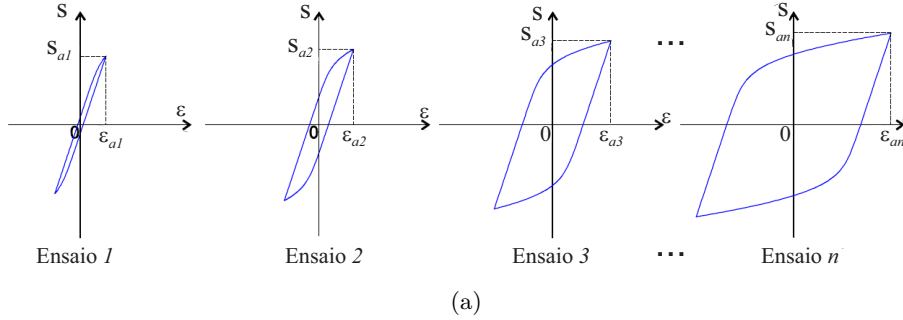


Figura 2.8: Curva $S - \varepsilon$ cíclica, a) laços de histerese estabilizados, b) construção curva $S - \varepsilon$ cíclica

Traçando os pontos máximos ou de maior ε de cada laço estabilizado em um mesmo gráfico, obtém-se a curva chamada curva tensão-deformação cíclica, vide a Figura 2.8(b).

A Equação (2.45) pode ser representada em escala log-log como uma linha reta para diferentes laços de histerese, correspondendo amplitudes de tensão e ε_p . Substituindo a Equação (2.45) na

lei de Hooke $\varepsilon_{ea} = \frac{S_a}{E}$, chega-se a:

$$\varepsilon_a = \frac{S_a}{E} + \left(\frac{S_a}{H'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2.46)$$

Esta equação é comumente chamada relação de Ramberg-Osgood por possuir a mesma forma da expressão proposta por Ramberg e Osgood (1943).

2.4.2 Curva deformação-vida

A relação entre ε_a e o número de ciclos para a falha por fadiga é representada pela curva deformação-vida. Fazendo a decomposição da Equação (2.44):

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ea} + \varepsilon_{pa} = \frac{S_a}{E} + \varepsilon_{pa} \quad (2.47)$$

Basquin (1910) propôs uma relação de potência entre S_a e o número de ciclos para falha por fadiga, como $S_a = S'_f (2N_f)^b$, em que b e S'_f são o expoente e o coeficiente de resistência à fadiga, respectivamente, e N_f é o número de ciclos para a falha por fadiga. Coffin (1954) e Manson (1954), de forma independente, propuseram a relação de potência entre a ε_{pa} e o N_f . Essa relação é $\varepsilon_{pa} = \varepsilon'_f (2N_f)^c$ em que, c e ε'_f são o expoente e o coeficiente de ductilidade à fadiga, respectivamente. Substituindo-se S_a e ε_{pa} na Equação (2.47), chega-se a equação que relaciona a S_a com o N_f .

$$\varepsilon_a = \frac{S'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (2.48)$$

Maiores informações para obter os parâmetros da curva deformação-vida podem ser encontrados na norma ASTM E606-92 (1992).

2.4.3 Efeito da tensão média

Seja um material submetido a uma história de deformação controlada, de amplitude constante e deformação média (ε_m) diferente de zero, como é ilustrado na Figura 2.9 (a), em que ε_{max} é a deformação máxima e ε_{min} representa a deformação mínima. Para este caso, a história de tensões possui uma tensão média (S_m) que varia com cada ciclo de carregamento, vide Figura 2.9(b), que influencia a falha por fadiga sendo S_{max} a tensão máxima e S_{min} a tensão mínima. Várias relações têm sido desenvolvidas para quantificar o efeito da S_m na falha por fadiga (Morrow, 1968; Smith *et al.*, 1970).

Este trabalho utilizou a combinação da metodologia de Neuber para estimar as S_t e ε na raiz do entalhe e Morrow (1968) para estimar o dano à fadiga produzido por cada ciclo de carregamento. Esta combinação foi abordada no modelo elaborado por Negrão (2014) e foi modificado pelo autor desta pesquisa para considerar um modelo probabilístico usando SMC e PEC, tanto para os ensaios com carregamento de amplitude constante quanto para os de amplitude variável. Morrow propôs

que S_m pode ser quantificado alterando a parte elástica da curva deformação-vida, assim:

$$\varepsilon_a = \frac{S'_f - S_m}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (2.49)$$

A seguir é apresentado um esquema com carregamento com S_m constante e variável é apresentado.

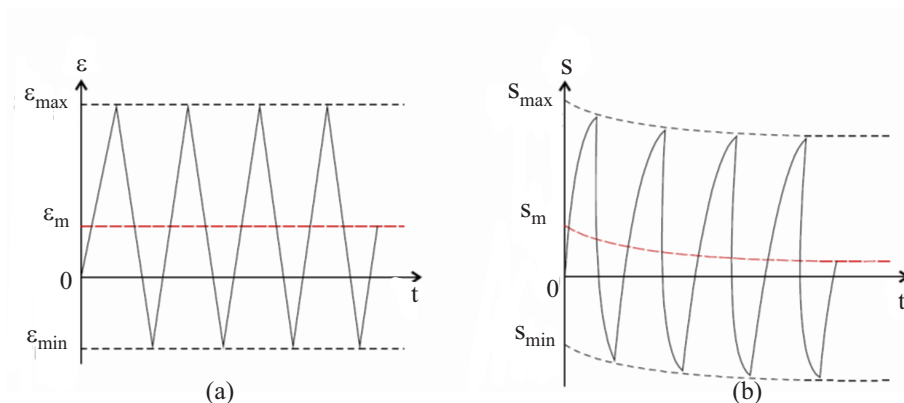


Figura 2.9: Ensaio de fadiga axial com deformação controlada, (a) com $\varepsilon_m \neq 0$, (b) variação da S_m ao longo do tempo (t).

Segundo Dowling (2012), a relação de Morrow pode ser utilizada para estimar N_f em aço. Os materiais submetidos às ações cíclicas podem ser de amplitude variável, já que não é possível garantir valores de carregamentos de amplitude constantes, dadas as variações na aplicação do carregamento, imperfeições no equipamento e o desconhecimento da aleatoriedade do carregamento.

2.4.4 Carregamento de amplitude variável

Em condições de serviço reais, uma estrutura pode se encontrar submetida a amplitudes de carregamento variável conforme é ilustrado na seguinte Figura.

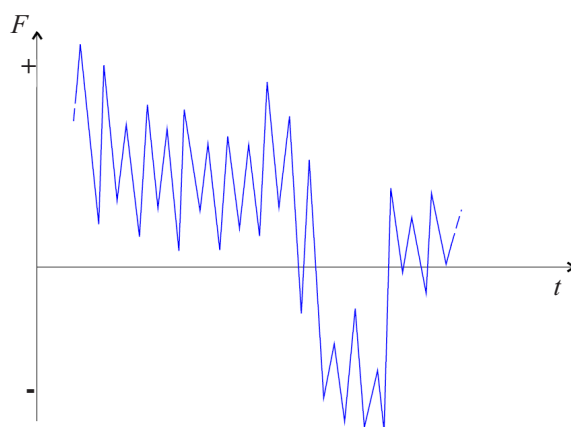


Figura 2.10: Carregamento de amplitude variável

Como uma introdução ao cálculo do N_f , considere uma situação de simples carregamentos de am-

plitude variável, de acordo com a Figura 2.11. Aplicando, inicialmente N_1 ciclos de carregamento de amplitude S_{a1} , o dano produzido pode ser definido como $D_1 = \frac{N_1}{N_{f1}}$ em que, N_{f1} é o número de ciclos para gerar a falha por fadiga devido ao carregamento de amplitude S_{a1} . Aplicando N_2 ciclos de carregamento de amplitude S_{a2} , o dano é $D_2 = \frac{N_2}{N_{f2}}$, e para N_n ciclos de carregamento de amplitude S_{an} é $D_n = \frac{N_n}{N_{fn}}$, em que, N_{fn} é o número de ciclos para a falha por fadiga devido ao carregamento de amplitude S_{an} , veja a Equação (2.50). Segundo a regra de Palmgren (1924) e Miner (1945) a falha do material ocorre quando a soma dos danos for igual a 1 ou em porcentagem igual a 100.

$$\sum_{i=1}^N D_i = \frac{N_1}{N_{f1}} + \frac{N_2}{N_{f2}} + \dots + \frac{N_n}{N_{fn}} = 1 \quad (2.50)$$

Seja o bloco de carregamento aplicado de forma repetida, apresentado na Figura 2.11(a).

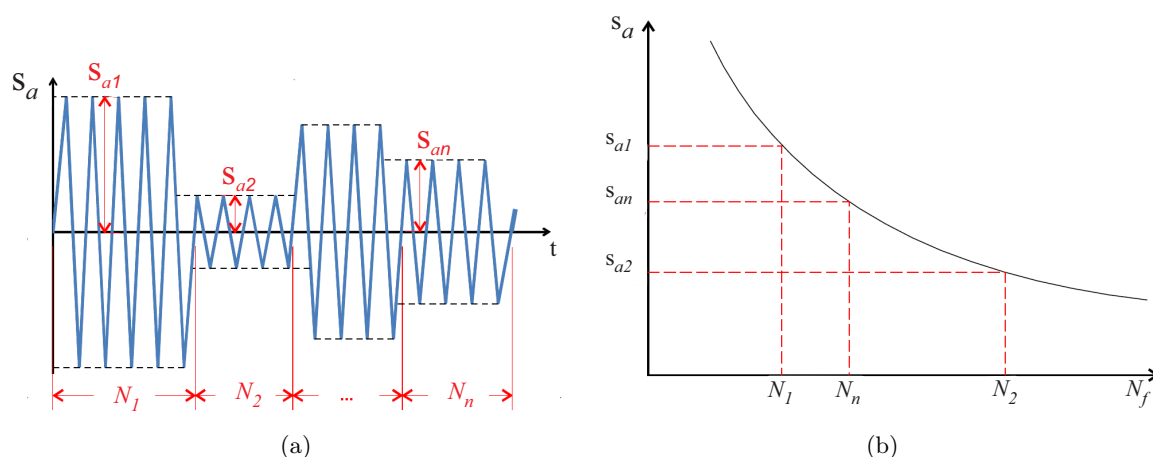


Figura 2.11: Predição de vida, segundo a regra de Palmgren-Miner, (a) carregamento de amplitude variável formado pelos trechos de amplitude constante, (b) curva S-N. Adaptado de Dowling (2012)

O dano D_b produzido por um bloco de carregamento é $D_b = \sum_{i=1}^n D_i$. A falha por fadiga ocorre quando o número de repetições do bloco N_{bf} é multiplicado pelo dano produzido por um bloco e se iguala a 1, como é apresentado a seguir;

$$N_{bf} D_b = 1 \quad (2.51)$$

O dano produzido por um carregamento de amplitude irregular, como o indicado na Figura 2.10, pode ser calculado utilizando a regra de Palmgren-Miner, somando os danos produzidos por cada um dos ciclos de carregamento. A metodologia da tese para calcular o N_f de componentes entalhados pela deformação-vida requer o conhecimento das S_t e ε que atuam na raiz do entalhe, estas S_t e ε podem ser obtidas por elementos finitos ou métodos aproximados. As tensões e ε na raiz do entalhe são estimadas a partir das S_t e ε fictícias obtidas por meio de uma análise elástica. Em seguida, será brevemente expressado o método de Neuber (1961), usado como método aproximado na estimativa das S_t e ε na raiz do entalhe.

2.4.5 Cálculo de tensões e deformações em entalhes

Inicialmente considera-se um componente submetido a carregamento monotônico, em que uma análise das S_t e ε é realizada, depois a análise é estendida para carregamentos cíclicos, conforme proposto por Topper *et al.* (1969). Considerando-se o elemento perfurado apresentado na Figura 2.12a sob carregamento monotônico, define-se S_t como tensão aplicada e ε a deformação na raiz do entalhe. Enquanto S_t for inferior à tensão de escoamento (S_0), a seguinte relação é válida:

$$K_t = \frac{S_t}{S} = \frac{\varepsilon}{e} \quad (2.52)$$

em que, K_t é o fator de concentração de tensão elástica, S é a tensão nominal e e é a deformação nominal definida como a deformação correspondente a S na curva $S_t - \varepsilon$.

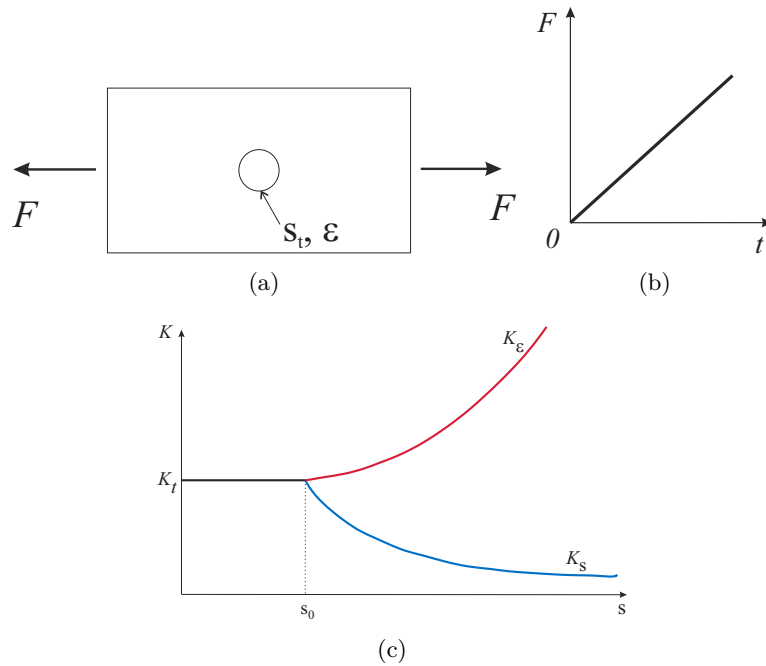


Figura 2.12: Escoamento cíclico em material elástico perfeitamente plástico, (a) lâmina perfurada sujeita a S_t cíclica, (b) tensão elástica sem escoamento, (c) variação de K de acordo com o nível de S_t e ε perto do furo. Adaptado Dowling (2012).

Na Figura anterior, após o escoamento plástico do material, o nível de concentração de tensão, K_S , tende a diminuir, enquanto o nível de concentração de deformação, K_ε , tende a aumentar. Aqui é necessário distinguir os fatores de concentração de tensão e ε , conforme demonstrado a seguir:

$$K_S = \frac{S_t}{S}, \quad K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{e} \quad (2.53)$$

O método de Neuber estabelece que o fator de concentração tensão elástica é igual à média geométrica entre os K_S e K_ε .

$$K_t = \sqrt{K_S K_\varepsilon} \quad (2.54)$$

Substituindo-se a Equação (2.53) em (2.54) e considerando que o comportamento nominal é elástico ($S = Ee$), obtém-se a seguinte Equação;

$$S_t \varepsilon = \frac{(K_t S)^2}{E} \quad (2.55)$$

Na raiz do entalhe, as tensões e deformações devem seguir a relação tensão-deformação do material, assim para a relação de Ramberg-Osgood, tem-se que:

$$\varepsilon = \frac{S_t}{E} + \left(\frac{S_t}{H'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2.56)$$

em que, H' e n' são o coeficiente de encruamento e o expoente de encruamento monotônico, respectivamente. Substituindo-se a Equação (2.56) em (2.55), obtém-se a Equação (2.57) não linear, a qual fornece a S_t e ε na raiz do entalhe, cuja solução é a tensão na raiz do entalhe.

$$\frac{S_t^2}{E} + S_t \left(\frac{S_t}{H'} \right)^{\frac{1}{n'}} = \frac{(K_t S)^2}{E} \quad (2.57)$$

Conhecida a S_t , substitui-se na Equação (2.56), para obter-se a ε na raiz do entalhe do furo.

O PEC é usado em outras áreas do conhecimento diferente a fadiga, como por exemplo, na determinação das propriedades da mecânica da fratura. Este trabalho considera a aleatoriedade do material e diferentes taxa de carregamento na análise do carregamento máximo e a energia total de fratura em DCT, considerando-o material quase frágil.

2.5 Mecânica da fratura

A modelagem da propagação da trinca utiliza a mecânica da fratura como um insumo básico fundamentado em um enfoque de tensões ou energia para prever a propagação de trincas em materiais. A mecânica da fratura trata do comportamento da propagação de discontinuidades de partículas, e para que isto ocorra é necessário uma força com módulo maior que a resistência de ligação entre os átomos. A seguir é apresentado os modos de falha à fratura.

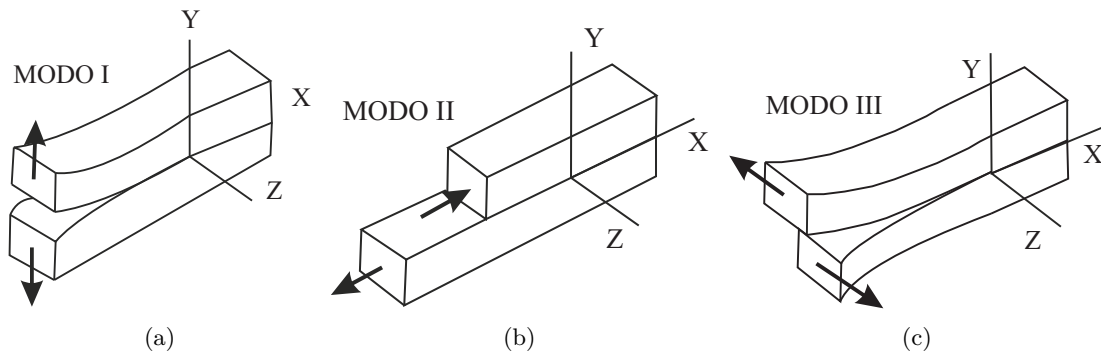


Figura 2.13: Falha à fratura. (a) Modo I, (b) Modo II e (c) Modo III.

Existem três modos de falha que são analisados na mecânica da fratura: modo de abertura ou

modo I, apresentado na Figura 2.13(a), que será usado nesta pesquisa, cortante no plano ou modo II, vide a Figura 2.13(b). Por último, o modo cortante fora do plano ou modo III, apresentado na Figura 2.13(c) (Van-Mier, 2013), e a combinação dos modos são referidos como modos mistos.

2.5.1 Noções básicas de mecânica da fratura

Dos ensaios realizados à fratura, analisa-se uma dependência inversa entre a S_t e o comprimento do entalhe no corpo de prova. Existe uma amplificação da intensidade de tensão dependendo da direção de aplicação da carga para o material perto do entalhe, definido como fator de intensidade de tensão, K , dado, assintoticamente, como:

$$K = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_Y \Big|_{\chi=0} (\sqrt{2\pi\lambda}) \quad (2.58)$$

em que, a tensão aplicada na direção de análise é S_Y para a fratura em modo I, χ é a rotação em relação à linha de propagação da trinca, λ é a distância medida desde a ponta da trinca até a ponta do entalhe (Sanford, 2002). A tensão nominal de resistência à propagação de fratura, (S_N), pode ser expressa em função dos parâmetros críticos do material (Sanford, 2002) como:

$$S_N = c_n \frac{K}{\sqrt{W} f(\alpha)} = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{W} f(\alpha)} \quad (2.59)$$

Sendo G_f a energia inicial à fratura e c_n um coeficiente que representa os diferentes tipos de estruturas, em que $c_n = 1$ é usado em placa carregada axialmente e $c_n = 1,5 \frac{L_v}{h}$ para uma viga (L_v é o vão e h é a altura da viga), e E o módulo de elasticidade. O fator geométrico é definido como uma relação entre o comprimento fissurado, a , e o comprimento não fissurado, W , relação também definida como $\alpha = \frac{a}{W}$.

Em materiais quase-frágeis, a mecânica da fratura elástico linear, em inglês *Linear Elastic Fracture Mechanics* (LEFM), não pode ser usada para a zona não elástica que está presente na ponta da trinca do elemento. Uma opção para modelar materiais com zona de processo de fratura não linear pode ser a mecânica da fratura não linear elástica ou a mecânica da fratura elasto-plástica. Assim como, combinações de critérios tais como Integral J (Hutchinson, 1968; Rice e Rosengren, 1968) e deslocamento de abertura na ponta da trinca, em inglês *Crack Tip Open Displacement* (CTOD) (Wells, 1963), também têm sido utilizados.

Em materiais quase-frágeis, a mecânica da fratura considera singularidade significativa devido ao comprimento da zona de processo de fratura, em inglês *Fracture Process Zone* (FPZ). A FPZ é a região na qual as tensões são amplificadas devido ao entalhe, trecho de não linearidade física situado no contorno da trinca (Bažant e Becq-Giraudon, 2002). Uma das metodologias usadas para aproximá-la à LEFM, é realizar uma aproximação do comprimento do entalhe para um comprimento equivalente, exposto graficamente na Figura 2.14.

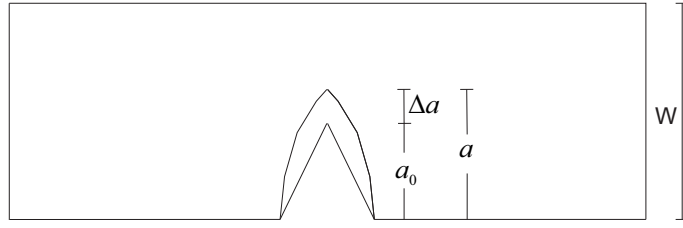


Figura 2.14: Comprimento equivalente de fratura

Considere que:

$$a = a_0 + \Delta a \quad (2.60)$$

em que a é o comprimento de trinca equivalente, a_0 corresponde ao comprimento do entalhe inicial e Δa é o comprimento da zona de processo. Considerando a aproximação do comprimento equivalente na equação de S_N , pode reescrever-se como:

$$S_N = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{W f\left(\alpha_0 + \frac{\Delta a}{W}\right)}} \quad (2.61)$$

em que $\alpha_0 = a_0/W$. Em grandes estruturas, o valor de Δa pode se aproximar à metade da *FPZ*, chamado de comprimento equivalente da zona de fratura, c_f , obtendo um novo a . No momento em que, $f(\alpha)$ não apresenta sinuosidades, pode-se utilizar a aproximação por expansão da série de Taylor para estender o fator geométrico com a consideração da trinca equivalente, conforme é apresentado abaixo:

$$f\left(\alpha_0 + \frac{c_f}{W}\right) = f(\alpha_0) + f'(\alpha_0) \frac{c_f}{W} + \frac{1}{2!} f''(\alpha_0) \left(\frac{c_f}{W}\right)^2 + \dots \quad (2.62)$$

Em que, $f'(\alpha_0)$ e $f''(\alpha_0)$ correspondem à primeira e segunda derivada da função de fator geométrico para α_0 respectivamente. Reescrevendo a Equação (2.61) com truncamento de segunda ordem na Equação (2.62), tem-se:

$$S_N = c_n \sqrt{\frac{G_f E}{W f(\alpha_0) + c_f f'(\alpha_0)}} \quad (2.63)$$

A equação anterior consegue representar casos em que a_0 tem valores entre $0,10$ e $0,50$; devido a c_f apresenta dimensão maior que a_0 ou casos em que a_0 se aproxima de W .

Bažant *et al.* (1984) usou a teoria do comprimento equivalente da mecânica da fratura elástico não linear, em inglês *Non-Linear Elastic Fracture Mechanics* (NLEFM), para vinculá-la com o modelo de efeito escala. Isto visa estimar a S_N , de uma estrutura fraturada ou com trinca pré-existente dependente de W , para estruturas com geometrias similares e razão a_0/W (Bažant, 2001).

2.5.2 Determinação dos parâmetros de fratura considerando o EEB

Existe uma relação entre a tensão de resistência e a altura do elemento estrutural com entalhes segundo Bažant e Planas (1997). Plotando em escala bi-logarítmica, em que a coordenada x representa ao número de fragilidade do material para a geometria referida, e a abscissa y define o valor da tensão resistente padronizado. A Equação (2.63) pode ser aproximada por uma equação linear como esta expressa a seguir:

$$Y_{EEB} = AW + C \quad (2.64)$$

em que, Y_{EEB} é definido como,

$$Y_{EEB} = \left(\frac{BW}{P} \right)^2 \quad (2.65)$$

em que, B é a espessura e o carregamento deve levar em conta o peso próprio do elemento e o carregamento último registrado para o caso de vigas, assim:

$$P = P_{ult} + PP \quad (2.66)$$

em que, P_{ult} corresponde ao carregamento máximo no ensaio de fratura em modo I e PP é o peso do elemento. No caso do DCT, pela configuração do ensaio de fratura em modo I, o $P = P_{ult}$.

Na reta definida na Equação 2.64 a variável independente é a altura do elemento estrutural ($X=W$), a intercessão é C e a inclinação A definem a reta de regressão no plano bilogarítmica e Y_{EEB} é a saída no modelo de EEB no plano bilogarítmico. Um dos modelos mais usados para determinar as propriedades da mecânica da fratura é definido por RILEM (1990), que institui o ensaio de viga sob flexão em 3 pontos com entalhe único. No presente trabalho, é proposta uma nova metodologia que usa o DCT no ensaio de fratura em modo I para determinar as propriedades à fratura do material quase frágil.

Existe uma dispersão nos valores da Equação (2.65), mesmo quando se mantém constante o valor de W . É conveniente um mínimo de 3 tamanhos diferentes dos corpos de prova para conseguir estabelecer com precisão os valores da inclinação A , e da interseção da reta C . Os parâmetros são estimados pelo método dos mínimos quadrados, em que Y_k corresponde Y_{EEB} , como é mostrado abaixo.

$$A = \frac{nn \sum_{k=1}^{nn} Y_k W_k - \sum_{k=1}^{nn} W_k \sum_{k=1}^{nn} Y_k}{nn \sum_{k=1}^{nn} (W_k)^2 - (\sum_{k=1}^{nn} W_k)^2} \quad (2.67)$$

e

$$C = \frac{\sum_{k=1}^{nn} (W_k)^2 \sum_{k=1}^{nn} Y_k - \sum_{k=1}^{nn} W_k \sum_{k=1}^{nn} Y_k W_k}{nn \sum_{k=1}^{nn} (W_k)^2 - \sum_{k=1}^{nn} W_k} \quad (2.68)$$

Em que, nn é o número de ensaios para tamanho, e k representa o k -ésimo resultado do ensaio. O E da curva P - $CMOD$ para o ensaio de fratura em modo I do DCT, via *compliance*, é denotado

por $E_{Compliance}$ e definido conforme Amirkhanian *et al.* (2015) como:

$$E_{Compliance} = \frac{2V_{CMOD}(\alpha_0)}{C_i B} \quad (2.69)$$

em que C_i corresponde ao inverso da inclinação da parte inicial da reta da curva $P-CMOD$, entre 0% e 50% do P_{max} , e V_{CMOD} é definido a seguir.

$$V_{CMOD}(\alpha_0) = \frac{501,8\alpha_0^3 + 2294\alpha_0^2 + 4349\alpha_0 + 1384}{\alpha_0^4 + 272,2\alpha_0^3 - 139,8\alpha_0^2 - 569,3\alpha_0 + 433,9} \quad (2.70)$$

Logo, os valores da G_f podem ser obtidos como:

$$G_f = \frac{f(\alpha_0)}{A E_{Compliance}} \quad (2.71)$$

Em que, Amirkhanian *et al.* (2015) define o fator de correção geométrico como $F(\alpha)$, que pode ser expresso como o fator de forma do DCT, $f(\alpha)$, assim:

$$f(\alpha) = [F(\alpha)]^2 = \left[\frac{-1,498\alpha^3 + 4,569\alpha^2 - 1,078\alpha + 0,113}{\alpha^4 - 2,408\alpha^3 + 1,717\alpha^2 - 0,3467\alpha + 0,0348} \right]^2 \quad (2.72)$$

e o comprimento da c_f é encontrado a partir de:

$$c_f = \frac{C f(\alpha_0)}{A f'(\alpha_0)} \quad (2.73)$$

Em que, $f'(\alpha_0)$ é a derivada do fator geométrico do DCT com respeito α_0 e, para o desenvolvimento desta pesquisa, $f'(\alpha_0)$ é avaliada de forma numérica:

$$f' = \frac{[f(\alpha_0 + \Delta x)]^2 - [f(\alpha_0 - \Delta x)]^2}{(\alpha_0 + \Delta x) - (\alpha_0 - \Delta x)} \quad (2.74)$$

em que $\Delta x = 1E + 06$ (assumido nesta pesquisa). O fator de intensidade de tensões crítico da fratura modo I, K_{IC} é dada em função da G_f e E definida na LEFM conforme Jenq e Shah (1985), apresentadas a seguir:

$$K_{IC} = \sqrt{G_f \bar{E}} \quad (2.75)$$

em que, $\bar{E} = \begin{cases} E \\ \frac{E}{1-\nu^2} \end{cases}$, para o estado plano de tensões e o estado plano de deformações respectivamente, e ν é o coeficiente de Poisson.

Baseado na LEFM, o deslocamento de abertura da trinca, em inglês *crack opening displacement* (COD) perto da ponta da trinca pode ser avaliada a partir do K_I para o estado plano de tensões conforme Jenq e Shah (1985), como:

$$COD = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{32r}{\pi}} \quad (2.76)$$

em que, r é a distância a partir da ponta da trinca. Para corpos infinitamente grandes $COD = CTOD_C$ quando $r = c_f$, e $CTOD_C$ é o deslocamento de abertura na ponta da trinca crítico, em inglês *critical crack tip opening displacement* ($CTOD_C$), logo:

$$CTOD_C = \sqrt{\frac{32c_f G_f}{\pi E_{Compliance}}} \quad (2.77)$$

O ponto de quebra no modelo coesivo bilinear está localizado $(w_k, \Omega f_t)$ como:

$$\Omega = 1 - \frac{CTOD_C f_t}{2G_f} \quad (2.78)$$

em que, f_t é a resistência a tração. A energia total à fratura, G_F , é estimada como a área abaixo da curva P - $CMOD$ dividida pela área de ligação, como é mostrado abaixo.

$$G_F = \frac{\int_0^{CMOD_f} P dCMOD}{(W - a_0) B} \quad (2.79)$$

A modelagem de propagação das trincas discretas atualmente é realizada usando o modelo de zona coesiva. A ideia de um modelo coesivo é baseada na suposição de que o material de processo de falha, durante a fratura, ocorre apenas em uma zona em forma de banda estreita na frente da trinca principal. De acordo com esta abordagem, o dano do material até a sua separação final tem lugar, principalmente, na região limitada enquanto que o resto do corpo obedece às leis comuns de deformação e permanece livre de danos.

2.5.3 Modelo de zona coesiva

O modelo de zona coesiva foi introduzido por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960) para tratar as singularidades de tensões existentes na ponta da trinca. Na idealização, todas as não linearidades ocorrem em uma zona coesiva localizada na frente da ponta de trinca (Moreira e Evangelista, 2016), veja a Figura 2.15. O modelo de zona coesiva usada em programas de elementos finitos utiliza elementos de interface, que têm seu comportamento condicionado a uma lei coesiva de falha $S - w$ (tensão - abertura da trinca) para materiais com amolecimento coesivo.

Há 2 maneiras de idealizar o processo de fratura que são implementadas como: o modelo intrínseco e não intrínseco. O modelo intrínseco, na lei $(S - w)$ considera-se uma rigidez inicial que vai até o instante em que a resistência à tração (f_t) do material é atingida, quando então a resposta de amolecimento do material é ativada. Além disso, no modelo intrínseco, inicialmente, o elemento de interface precisa ser inserido no modelo (Tvergaard e Hutchinson, 1992). O modelo extrínseco, usado neste trabalho não define a principio uma rigidez inicial na lei $(S - w)$ e os elementos de interface, juntamente com a lei de amolecimento, veja a Figura 2.16, são inseridos uma vez que o material atinge a f_t , segundo Camacho e Ortiz (1996) e Ortiz e Pandolfi (1999).

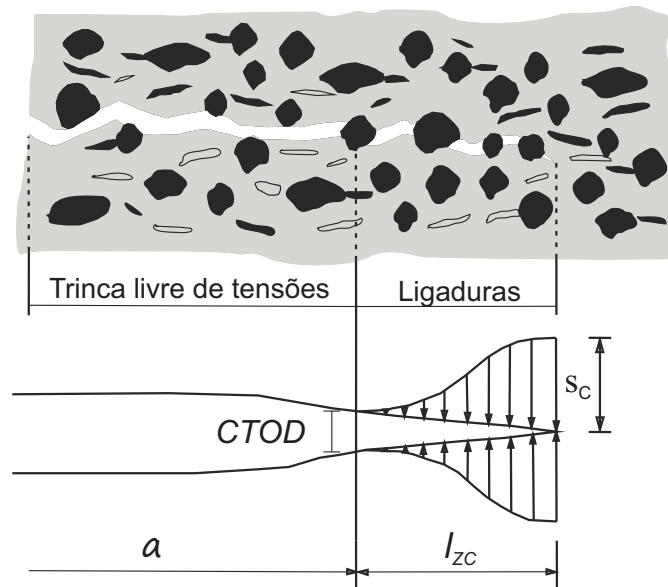


Figura 2.15: Modelo de zona coesiva: material heterogêneo frágil. Adaptado de Kuna (2010).

Na Figura 2.15, o deslocamento de abertura da ponta de trinca é $CTOD$, S_c é a resistência de coesão e l_{zc} é o comprimento de zona coesiva; que são variáveis definidas para o material heterogêneo frágil. O modelo de zona coesiva, representado na Figura 2.16 pode ser representado como uma função dependente da G_f , G_F , do fator de mudança de direção da curva de $S-w$ (Ω) e de f_t . Estas variáveis, definidas no Capítulo 5 como variáveis aleatórias com o intuito de quantificar a incerteza no carregamento máximo e a G_F , levando em consideração diferentes taxas de carregamento.

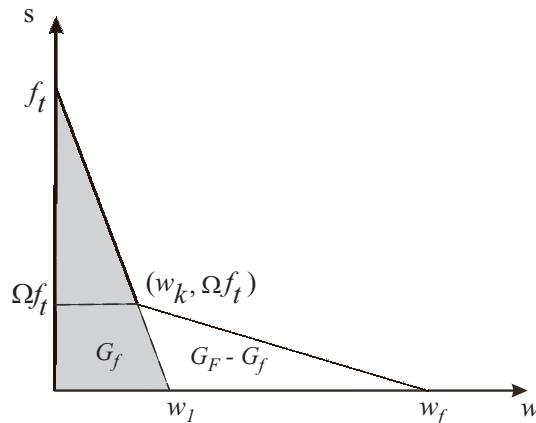


Figura 2.16: Curva de amolecimento bilinear considerando modelo não intrínseco (Roesler *et al.*, 2007; Park *et al.*, 2009).

O comportamento da fratura no concreto é estudado aplicando o modelo de zona coesiva em conjunto com o método de elementos finitos, esse procedimento ficou conhecido como Modelo de fissura fictícia de Hillerborg *et al.* (1976). Esta metodologia tem sido utilizada amplamente para a simulação de fissuras no concreto (Pettersson, 1981; Ingraffea, 1984; Carpinteri e Valente, 1989; Bittencourt *et al.*, 1992; Červenka e Sauoma, 1995; Larsson e Runesson, 1995; Bažant e Planas, 1997; Hanson e Ingraffea, 2002). No campo da modelagem tridimensional de fratura do concreto

utilizando o modelo de zona coesiva, foram implementados por Bittencourt (1993), Gaedicke e Roesler (2010) e Evangelista-Jr *et al.* (2013).

A região de amolecimento em tração pura pode ser descrita mediante a curva bilinear de amolecimento para materiais cimentícios quase-frágeis. A FPZ é descrita pela relação $S - w$, apresentada na Figura 2.16, e as micro trincas crescem e coalescem em uma trinca maior localizada após a f_t do material cimentício ser atingida, com o ligamento do agregado resistindo a abertura adicional da trinca. A G_f define a primeira inclinação descendente do modelo bilinear de amolecimento junto com a f_t , esta característica do modelo bilinear de amolecimento permite que o efeito de escala em estruturas quase - frágeis seja captado (Planas *et al.*, 1999; Bažant e Jirásek, 2002). Conforme o carregamento continua, a energia é dissipada através da degradação do ligamento entre os agregados e a pasta de cimento. Por último, a liberação gradual de energia leva à separação completa da superfície da trinca, quando a G_F do material cimentício é completamente dissipada durante o crescimento da trinca, é definida como:

$$G_F = \int_0^{w_f} S(w) dw \quad (2.80)$$

em que, w_f é a abertura da trinca final que resulta em uma região livre de forças para o material cimentício. A G_f define a interseção do eixo horizontal (w), em w_1 , da inclinação inicial da curva de amolecimento, logo:

$$w_1 = \frac{2G_f}{f_t} \quad (2.81)$$

O ponto de mudança de direção da curva de amolecimento (Ω) é realizada segundo Park *et al.* (2009), que postulou a abertura da trinca, w_1 é dada em função do $CTOD_c$, apresentado a seguir:

$$w_1 = CTOD_c \quad (2.82)$$

Por último, o deslocamento final, w_f é:

$$w_f = \frac{2}{\Omega f_t} [G_F - (1 - \Omega) G_f] \quad (2.83)$$

em que, w_f é obtida igualando a G_F com a área sob a curva do modelo de amolecimento para o caso da lei bilinear.

Os ensaios de laboratório são uma simplificação da realidade, há evidência de que a taxa de deslocamento (\dot{w} , é uma derivada com respeito ao tempo) em testes de fratura influencia significativamente sobre o processo de fratura de materiais cimentícios (Bažant e Jirásek, 1993). A \dot{w} reflete macroscopicamente na relação $P-CMOD$, segundo Rosa *et al.* (2012), a força pico P_{max} e a G_f aumenta monotonicamente com a elevação da \dot{w} . Por enquanto, o deslocamento correspondente à força pico permanece virtualmente na mesma posição (Ruiz *et al.*, 2011).

Para ter em conta o efeito da \dot{w} sobre o processo de fratura de materiais quase-frágeis, considerando modelo coesivo como uma função da abertura da trinca w e a velocidade de abertura de fissuras

\dot{w} , como é apresentado na Figura 2.17, é proposto, como se segue, Rosa *et al.* (2012):

$$S = F(\dot{w}, w) = g(\dot{w}) f(w) \quad (2.84)$$

e

$$\begin{cases} F(\dot{w}, w) = f(w) & \text{para } \dot{w} = 0 \\ F(\dot{w}, w) \geq 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

em que, a função $f(w)$ define a lei coesiva estática e $g(\dot{w})$ é a função viscosa dependente da taxa de abertura da trinca, \dot{w} , tal que:

$$g(\dot{w}) = 1 + \left(\frac{\dot{w}}{\dot{w}_0} \right)^{n_{\dot{w}}} \quad (2.86)$$

em que, \dot{w}_0 é o parâmetro de padronização e $n_{\dot{w}}$ corresponde ao expoente da dependência da taxa de deslocamento e é uma constante adimensional, que descreve o grau de viscosidade do material. A função $S = F(\dot{w}, w) = g(\dot{w}) f(w)$ caracteriza completamente o comportamento mecânico da trinca, vide a Figura 2.17, na qual, o sobrescrito s representa a análise estática ($\dot{w} = 0$).

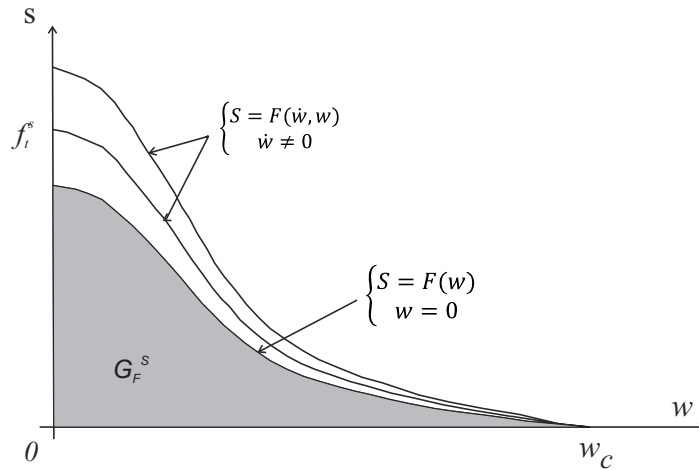


Figura 2.17: Função de modelo coesivo viscoso. Adaptado de Rosa *et al.* (2012).

A seguir, é apresentado o modelo de amolecimento bilinear dependente da \dot{w} , que pode acontecer quando se utiliza diferentes \dot{w} . Ao se considerar diferentes \dot{w}_i , serão obtidos diferentes modelos coesivos do material cimentício que são definidos em função dos parâmetros experimentais ($G_F^{\dot{w}_i}$, $G_f^{\dot{w}_i}$, $f_t^{\dot{w}_i}$ e $CTOD_c^{\dot{w}_i}$), em que $G_F^{\dot{w}_i}$ é a energia à fratura total dependente da \dot{w} , $G_f^{\dot{w}_i}$ representa a energia inicial de fratura dependente da \dot{w} . Outras variáveis como $f_t^{\dot{w}_i}$ representa a resistência à tração dependente da \dot{w} e $CTOD_c^{\dot{w}_i}$ é o deslocamento de abertura da boca da trinca dependente da \dot{w} .

Os modelos coesivos resultantes foram utilizados no modelo analítico e numérico de um sistema mecânico para ser resolvido, e sua saída é utilizada na implementação da quantificação da incerteza via PEC.

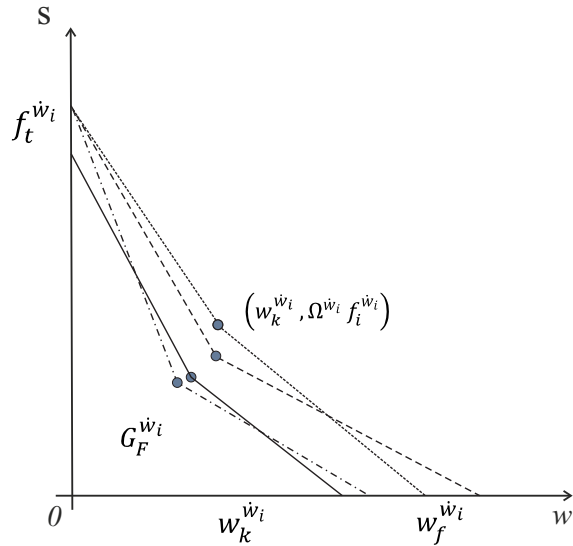


Figura 2.18: Função de amolecimento bilinear para diferentes w_i .

2.6 Modelo de dano

Na teoria de dano, considera-se um corpo sólido deteriorado e um elemento de volume representativo (EVR) que reproduza a heterogeneidade presente no sólido, sendo escolhido conforme apresenta-se na Figura 2.19(a). De uma superfície no domínio de EVR é selecionado um elemento diferencial δO com norma \mathbf{n} , um vetor de referência \mathbf{v} e δO_D representa os vazios e/ou descontinuidades geométricas. O dano local D no EVR na direção \mathbf{n} é representado por:

$$D = \frac{\delta O_D}{\delta O} \quad (2.87)$$

Os estados de dano D , podem ser, sem presença de dano, o material intacto é igual a 0, se totalmente deteriorado é 1 e, entre $0 < D < 1$, qualquer outro estado de dano intermediário.

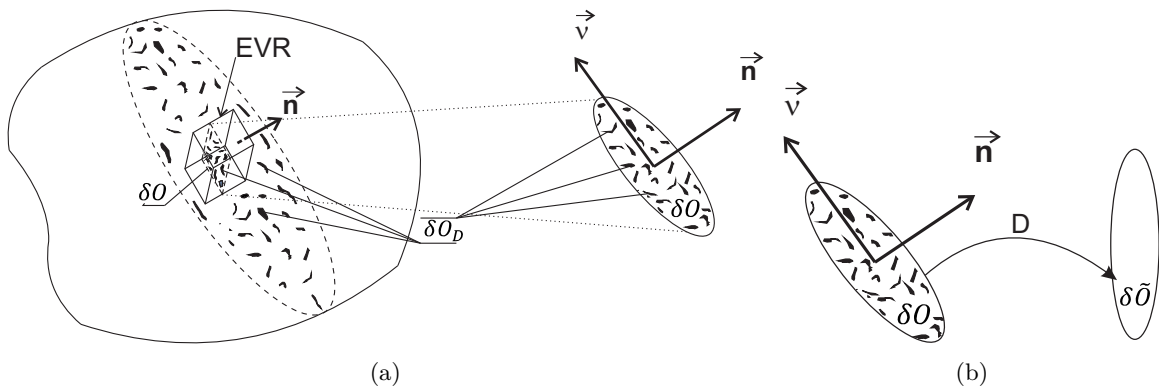


Figura 2.19: Elemento de um sólido deteriorado (adaptada de Lemaitre e Desmorat (2005)), (a) EVR de uma superfície do corpo, (b) operador de dano escalar (estado isotrópico).

O dano D não depende da orientação de \mathbf{n} , o escalar D é um operador transformando a atual área δO em uma área equivalente menor e continua $\delta \tilde{O} = \delta O - \delta O_D$, como é apresentado na Figura

2.19(b). Substituindo-se a Equação 2.87 na expressão de $\delta\tilde{O}$ obtém-se:

$$\delta\tilde{O} = (1 - D) \delta O \quad (2.88)$$

Rabotnov (1969) introduz na mecânica do dano o conceito de tensão efetiva S' e o define como:

$$S' = \frac{S}{(1 - D)} \quad (2.89)$$

em que S' é o tensor para o material deteriorado e S é o tensor de tensões para o material não deteriorado. É possível assumir que qualquer comportamento de um material deteriorado pode ser descrito pelo comportamento do material intacto. O comportamento elástico de um material deteriorado, em que a variável escalar caracterizada pelo dano escalar isotrópico D resulta em uma alteração no tensor de rigidez elástica, dá-se como:

$$S' = C_0 \varepsilon \quad (2.90)$$

Substituindo-se a Equação 2.89 na Equação 2.90 tem-se:

$$S = (1 - D) C_0 \varepsilon \quad (2.91)$$

Em que ε é o tensor de deformações e C_0 é o tensor elástico de quarta ordem. A variável de dano D pode seguir uma lei de evolução baseada em um critério de deformação (Mazars, 1984), energia ou tensão. A fratura do concreto em modo de abertura (fratura em modo I) ou modo misto (fratura em modo I e II) é descrita por (Mazars, 1984) através de um critério de tensão ou deformação para a lei de evolução do dano. O modelo busca descrever a evolução de comportamento do dano sob condições de carregamento específico, tais como carregamento proporcionalmente crescente. O modelo descrito por Mazars (1984) tem sido utilizado em vários problemas bidimensionais da Engenharia (Mazars, 1984; Bažant *et al.*, 1984; Ramtani *et al.*, 1990; Simone *et al.*, 2003; Proença e Torres, 2008).

O modelo de Mazars usa um pequeno número de variáveis, todas com significado físico, e está baseado em ensaios simples, como tensão e compressão uniaxial, isto é uma grande vantagem. As suposições do modelo estão baseadas no comportamento do concreto, bem conhecidas, e que podem ser levadas em consideração pelo estado triaxial de tensões. A modelagem do dano é através de microtrincas distribuídas uniformemente simulando a falha do concreto quando é submetido à fratura em modo I ou misto (fratura em modo I+II).

2.7 Formulação do modelo de dano utilizado

O modelo é usado para materiais quase-frágeis expostos a carregamento que resultam em modo I ou modo misto (I+II) de propagação de trinca, e as capacidades e limitações do modelo são:

- O modelo em processo evolutivo de dano é classificado em um meio elástico e não são levadas

em consideração as deformações plásticas nem as deformações inelásticas.

- O dano no material é produzido por extensões ($\varepsilon_i > 0$) ao longo das direções principais de tensão, o que significa que a ruptura local começa e se apresenta em modo I ou modo misto.
- O dano é representado por uma variável escalar D ($0 \leq D \leq 1$). Devido à natureza escalar de D , condição de dano isotrópico é assumido para o material.

Segundo Lemaitre e Chaboche (1994), para formular um modelo de dano termodinamicamente compatível, precisam-se de uma variável de controle de dano, de uma superfície para a iniciação de dano e uma lei de evolução de dano, sejam descritas.

2.7.1 Variável de controle de dano

O dano é controlado por uma variável de estado que está relacionada com o tensor de deformações por meio de uma deformação equivalente (ε_{eq}), segundo é proposto por Mazars (1984), sendo denominada como ε_{eq}^{MA} e definida como:

$$\varepsilon_{eq}^{MA} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle)^2} \quad (2.92)$$

em que, $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{(\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)}{2}$ e ε_i é a deformação principal na direção i , observe que somente as deformações principais positivas são consideradas. Por fim, esta medida de deformação equivalente foi considerada para a análise na qual as tensões de tração são predominantes, ou fratura em modo I em que apenas as tensões perpendiculares ao plano da fissura são relevantes.

Para os casos em que os esforços cisalhantes não são desprezíveis na definição do estado deformacional, a deformação equivalente de Von Mises (ε_{eq}^{VM}) se mostra como uma alternativa para a variável de controle de dano (Vree *et al.*, 1995; Geers, 1997; Simone *et al.*, 2003; Hofstetter e Meschke, 2011) e é definida como:

$$\varepsilon_{eq}^{VM} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_{\varepsilon 1} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{\varepsilon 1}^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_{\varepsilon 2}} \quad (2.93)$$

em que $I_{\varepsilon 1}$ é o primeiro invariante do tensor de deformações, ou traço do tensor de deformações, $I_{\varepsilon 1} = tr(\varepsilon)$, e $J_{\varepsilon 2}$ é o segundo invariante do tensor de deformações.

$$J_{\varepsilon 2} = tr(\varepsilon \cdot \varepsilon) - \frac{1}{3} tr^2(\varepsilon) \quad (2.94)$$

em que ε é o tensor de deformações, k é a razão entre as resistências a compressão e a tração, ν é o coeficiente de Poisson e tr corresponde ao traço da diagonal de uma matriz quadrada. A Equação 2.93 é chamada de Von Mises modificada porque sua formulação leva em consideração a influência do primeiro invariante, associado com os componentes hidrostáticos, uma vez que a formulação padrão de Von Mises usa somente no segundo invariante do tensor desviador. Assim,

ε_{eq}^{VM} foi levada em conta para o modelo proposto para análise de fratura em modo I e modo misto (fratura em modo I+II) quando todas as componentes são consideradas.

2.7.2 Critério de início de dano

O início do dano se apresenta quando a deformação equivalente, ε_{eq} , atinge um valor inicial de deformação crítica (ε_{d0}) igual à tensão máxima de um corpo de prova em tração uniaxial. O critério de dano, $f(\varepsilon_{eq})$, pode ser dado de forma geral como:

$$f(\varepsilon_{eq}) = (\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}) \leq 0 \quad (2.95)$$

o elemento chega à ε_{d0} quando o material atinge a resistência a tração máxima do material.

2.7.3 Lei de evolução do dano

A lei de evolução da variável escalar D , que atende aos princípios da termodinâmica dos processos irreversíveis (Lemaitre *et al.*, 2009) é representado pela seguinte equação:

$$\dot{D} = \begin{cases} F(\varepsilon_{eq}) & \text{se } f(\varepsilon_{eq}) = 0 \text{ ou } \dot{f}(\varepsilon_{eq}) > 0 \\ 0 & \text{se } f(\varepsilon_{eq}) = 0 \text{ e } \dot{f}(\varepsilon_{eq}) < 0 \text{ ou } f(\varepsilon_{eq}) < 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

em que $\dot{f}(\varepsilon_{eq})$ representa a taxa de variação do critério de dano, $F(\varepsilon_{eq})$ é uma função contínua e positiva de ε_{eq} que representa a evolução de dano e deve respeitar o comportamento experimental do material. Considerando um carregamento monotônico crescente até uma deformação equivalente máxima. (ε_{eq}^{max}), o valor explícito de D pode ser obtido por meio da seguinte equação:

$$D(\varepsilon_{eq}) = \int_0^{\varepsilon_{eq}^{max}} F(\varepsilon_{eq}) d\varepsilon_{eq} \quad (2.97)$$

A equação $D(\varepsilon_{eq})$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} D(\varepsilon_{eq}) &= D_0(\varepsilon_{eq}) + D_1(\varepsilon_{eq}) + \dots + D_i(\varepsilon_{eq}) + \dots + D_n(\varepsilon_{eq}) \\ D_i(\varepsilon_{eq}) &= \int_{\varepsilon_{eq_i}}^{\varepsilon_{eq_{i+1}}} F_i(\varepsilon_{eq}) d\varepsilon_{eq} \text{ para } \varepsilon_{eq_i} \leq \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{eq_{i+1}} \end{aligned} \quad (2.98)$$

em que, $\varepsilon_{eq_i} = \varepsilon_{eq_{i+1}}$ para D_n . Esta equação estabelece que cada função $D_i(\varepsilon_{eq})$ possa reproduzir um fenômeno diferente dentro do processo de amolecimento. Cada função é contínua dentro dos respectivos limites de integração.

No próximo Capítulo serão apresentados os casos de análise em que o PEC foram utilizados em viscoelasticidade e fadiga, e como uma forma de validar os resultados, estes foram comparados com os obtidos por SMC. Obtido o PEC validado foi possível analisar a incerteza nas saídas.

Capítulo 3

Verificação do PEC em fadiga e viscoelasticidade

Neste Capítulo são apresentados os resultados da simulação numérica, que foram realizados de acordo com o tratado no Capítulo anterior em relação com fadiga e viscoelasticidade, alcançando o objetivo da validação do PEC completo (PEC_C , com todos os coeficientes). Na quantificação da incerteza de elementos metálicos sujeitos à fadiga, foram consideradas as incertezas no material e no carregamento de amplitude constante e variável. Outro alvo alcançado usando PEC_C foi a quantificação de incerteza das propriedades do $E(t)$ no tempo, a qual é determinado a partir de ensaios e tem incerteza associada. A incerteza no $E(t)$ é levada em consideração no cálculo das deflexões em estruturas de concreto, considerando como lei constitutiva o modelo de Boltzmann e tendo em conta a propagação da incerteza usando PEC_C .

3.1 Fadiga

Para analisar a incerteza no material e no carregamento, diversas publicações, como Sankararaman *et al.* (2011) e Endeshaw *et al.* (2017), têm sido destaque na literatura, sendo os procedimentos bem similares a outros que envolvem fadiga. Estes trabalhos apresentam uma rotina no MatLab que gera valores aleatórios da carga para carregamento de amplitude variável multiaxial e torque. As constantes do material à fadiga da equação de Paris, foram assumidas como funções de distribuição de probabilidade não Gaussianas para Endeshaw *et al.* (2017) e Gaussianos para Sankararaman *et al.* (2011). Além disso, foram utilizados procedimentos que envolvem quantificação da incerteza com simulação de Monte Carlo, (SMC), contagem de rainflow e análise dinâmica. Em seguida, utilizaram elementos finitos para determinação do número de ciclos de vida à falha por fadiga e quantificação da incerteza da propagação da trinca. Este procedimento foi realizado $1E+03$ e $1E+04$ vezes para estimar a função densidade de probabilidade do comprimento da trinca, sem reportar uma análise da convergência do número de simulações.

3.1.1 Análise de fadiga em corpos entalhados sob carregamento de amplitude constante

Um fluxograma com o procedimento realizado na análise probabilística do número de ciclos para falha por fadiga (N_f), empregando PEC_C e SMC na metodologia de Neuber-Morrow é apresentado na Figura 3.1. O diagrama de fluxo mostrado na Figura 3.1 começa com os dados de entrada, tais como: o vetor de médias (μ) e desvios padrão (σ) das variáveis aleatórias (VA) as propriedades do material H' e n' definidos na seção 2.4.1. Outras propriedades utilizadas são, S'_f , b , ϵ'_f e c definidas na seção 2.4.2, e S_0 definido na seção 2.4.5, S_u que corresponde ao limite de resistência à tração. A história de tensão nominal (S_{0i}), a dimensão do elemento e o fator de concentração de tensão à fadiga (K_f). A metodologia de PEC inicia com a definição do espaço amostral, selecionando os pontos de colocação das VA e usando a sequência de Sobol (F) de acordo a seção 2.1.5, definidos no espaço uniforme que mediante uma transformação isoprobabilística é levado ao espaço normal padrão, ξ . Estes pontos amostrais no espaço das variáveis são o *input* do modelo implementado em Negrão (2014) que define a saída N_f , que junto com os pontos amostrais no espaço normal padrão determinam os coeficientes do PEC_C usando regressão por mínimos quadrados.

Estabelecido o PEC_C , é calculada a $f_{\mathbf{X}}(x)$ usando SMC sobre o PEC_C para determinar o número de ciclos para a falha por fadiga estimada (\hat{N}_f), representada por $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ sobre o polinômio de m e o p . O modelo elaborado por Negrão (2014) é utilizado para gerar N_f a partir da SMC das VA, que produz a $f_{\mathbf{X}}(x)$ do N_f e corresponde à $f_{N_f}(N_f)$. Para fornecer a $f_{N_f}(N_f)$ é usado o método da transformação inversa (Melchers e Beck, 2018) para transformar as combinações das VA do espaço das VA ao espaço das VA normais padrão. Após isso, é ordenada a história de tensões e os picos e vales são extraídos, para logo calcular a $S - \epsilon$ pela metodologia de Neuber. Em seguida, calcula-se o dano para cada ciclo pelo método de Morrow, para depois determinar o dano acumulado em um bloco de carregamento e o número de blocos para falha por fadiga, calculando assim o vetor de saída, N_f , e a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$. Determinadas a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e a $f_{N_f}(N_f)$, comparamos se elas são não são semelhantes, o p do PEC_C é acrescentado e o procedimento para encontrar a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ é reiniciado, até que as $f_{\mathbf{X}}(x)$ sejam similares. Calibrado o PEC_C através da comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$, prossegue-se com o cálculo dos momentos estatísticos (μ e σ), usando os coeficientes do PEC_C ou da $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$.

Na continuação, foi realizada uma análise probabilística do N_f , empregando a metodologia deformação-vida no cenário de componentes entalhados sob carregamento de amplitude constante, usando PEC_C e SMC como uma forma de avaliar os resultados obtidos da simulação com PEC_C . Na metodologia deformação-vida implementada, usa-se a relação de Neuber (1961), de acordo com a Equação 2.57, para estimar as tensões (S) e deformações (ϵ) na raiz do entalhe e a relação de Morrow (1965), de acordo com a Equação 2.48, para calcular o N_f .

Um estudo foi conduzido em uma placa de aço com dois entalhes laterais semi-circulares com raio, R_a , submetida à força axial de amplitude constante. A geometria e o carregamento são apresentados na Figura 3.2.

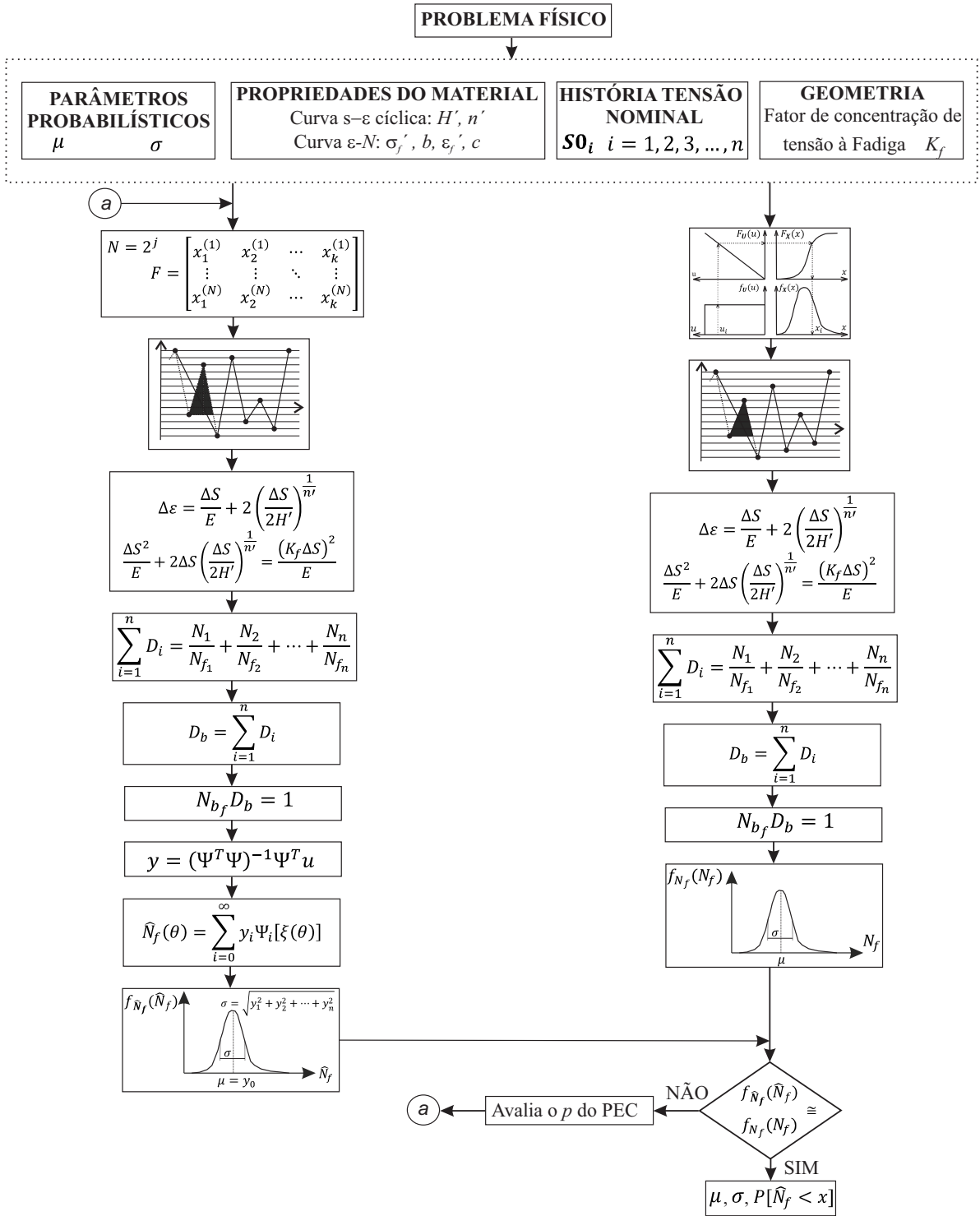


Figura 3.1: Diagrama de fluxo da metodologia PEC_C e SMC em problemas de fadiga.

O estudo experimental dirigido por Socie *et al.* (1984) e Bannantine *et al.* (1989) determinou o número de ciclos de vida para a iniciação de trinca de 0,51 mm ($N_{f_{Obs}}$), considerando diferentes carregamentos de amplitude constante (F_a), e os resultados são apresentados na Tabela 3.1.

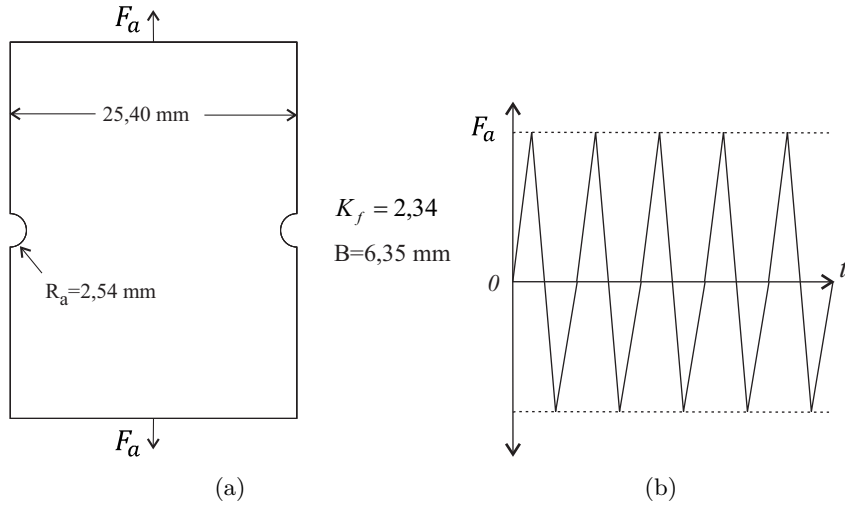


Figura 3.2: Fadiga uniaxial, (a) placa de aço com 2 entalhes laterais semi-circulares, (b) carregamento de amplitude constante.

Tabela 3.1: Resultados experimentais do $N_{f_{Obs}}$ em ensaios de fadiga uniaxial com diferente F_a , (Socie *et al.*, 1984; Bannantine *et al.*, 1989).

F_a (kN)	$N_{f_{Obs}}$ (Ciclos)
88,96	62
71,17	635
62,28	1.300
53,38	2.400
44,48	6.000
35,59	14.000
31,14	19.000

A configuração da placa apresentada na Figura 3.2(a) tem uma espessura B e foi fabricada em aço AISI 4340, cujas propriedades mecânicas cíclicas são dadas pela literatura (Socie *et al.*, 1984; Bannantine *et al.*, 1989). A seguir, são listadas na Tabela 3.2 o vetor de μ das VA na qual o coeficiente de variação (V) é $V=0,15$ e a $f_X(x)$ é função de densidade de probabilidade normal foram assumidas, assim como as variáveis determinísticas levadas em consideração na quantificação da incerteza no N_f .

Visando estimar o N_f que o corpo de prova pode resistir antes de gerar a trinca de 0,51 mm foi modificado o programa desenvolvido por Negrão (2014) para realizar análise probabilística no caso de carregamento constante, incorporando o PEC_C e SMC na estimação do N_f . O PEC_C foi utilizado para quantificar a incerteza do N_f levando em consideração as VA definidas na Tabela 3.2. A média das variáveis aleatórias foram as obtidas dos trabalhos de Socie *et al.* (1984), Bannantine *et al.* (1989) e os valores dos V e das $f_X(x)$ foram assumidos. Os coeficientes do $PEC_C(y)$, foram obtidos utilizando o método da colocação baseado em regressão, na qual o número de pontos de

Tabela 3.2: Variáveis aleatórias e determinísticas consideradas na análise probabilística e determinístico do N_f da placa com 2 entalhes semi-circulares.

VA	μ	V (%)	$f_{\mathbf{X}}(x)$
H' (MPa)	1.162,00	15	Normal
n' (-)	1,23E-01	15	Normal
S'_f (MPa)	1.165,00	15	Normal
ϵ'_f (-)	11,42E-01	15	Normal
b (-)	-81,00E-02	0	‡
c (-)	-67,00E-02	0	‡
S_0 (MPa)	648,00	0	‡
S_u (MPa)	786,00	0	‡

(-) Adimensional; ‡ Determinístico, sem $f_{\mathbf{X}}(x)$.

colocação usados por PEC_C (N_{pc_C}), são obtidos conforme a Equação (2.41), o espaço amostral foi gerado usando a sequência de Sobol. O espaço amostral gerado usando sequência de Sobol é transformado ao espaço normal padrão segundo a transformação dada na Tabela 2.3, pois o PEC_C é definido no espaço normal padrão. Na Tabela 3.3 são apresentados o p , N_{pc_C} , o número de coeficientes do PEC_C (N_{PEC_C}) o número de SMC usados para estabelecer $f_{N_f}(N_f)$ (N_{SMC}), e o número de SMC usadas no PEC_C para determinar a $f_{\hat{N}_f}(N_f)$, N_{SMC/PEC_C} .

Tabela 3.3: Número de pontos de colocação, N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , utilizados na quantificação da incerteza de N_f da placa com 2 entalhes e diferente F_a .

		F_a (kN)		
		88,96	53,38	31,14
p	(-)	3	4	4
N_{PEC_C}	(-)	35	70	70
N_{pc_C}	(-)	35	70	70
N_{SMC}	(-)	1,0E+06	1,0E+06	1,0E+06
N_{SMC/PEC_C}	(-)	5,0E+04	5,0E+04	7,0E+04

(-) Adimensional.

O p que gerou a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$, com menores erros com respeito da $f_{N_f}(N_f)$, foram os $p=3$, 4 e 4 para $F_a = 88,96$ kN; 53,38 kN e 31,14 kN, respectivamente, e as $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e $f_{N_f}(N_f)$ juntos com os erros encontrados para os três carregamentos analisados são apresentados nas Figuras 3.3a-c. Para os F_a utilizados, um espaço amostral foi definido com $N_{pc_C} = 35$, 70, e 70, para os $p = 3$, 4 e 4 de acordo com a Equação (2.41). Além disso, o $N_{PEC_C} = N_{pc_C}$, pois foram utilizados os N pontos de colocação, conforme a Equação (2.8).

As $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ segue uma distribuição lognormal construída ápios dos coeficientes dos PEC_C regredidos e usado SMC sobre o PEC_C ; utilizando 5E+04 e 7E+04 simulações, $N_{SMC/PEC_C} = 5E+04$ e $N_{SMC/PEC_C} = 7E+04$, e apresentados na Tabela 3.3. Determinada a $f_{\mathbf{X}}(x)$ que melhor define o comportamento dos dados, usando PEC_C e SMC, conforme as Figuras 3.3a-c. As $f_{N_f}(N_f)$ seguem

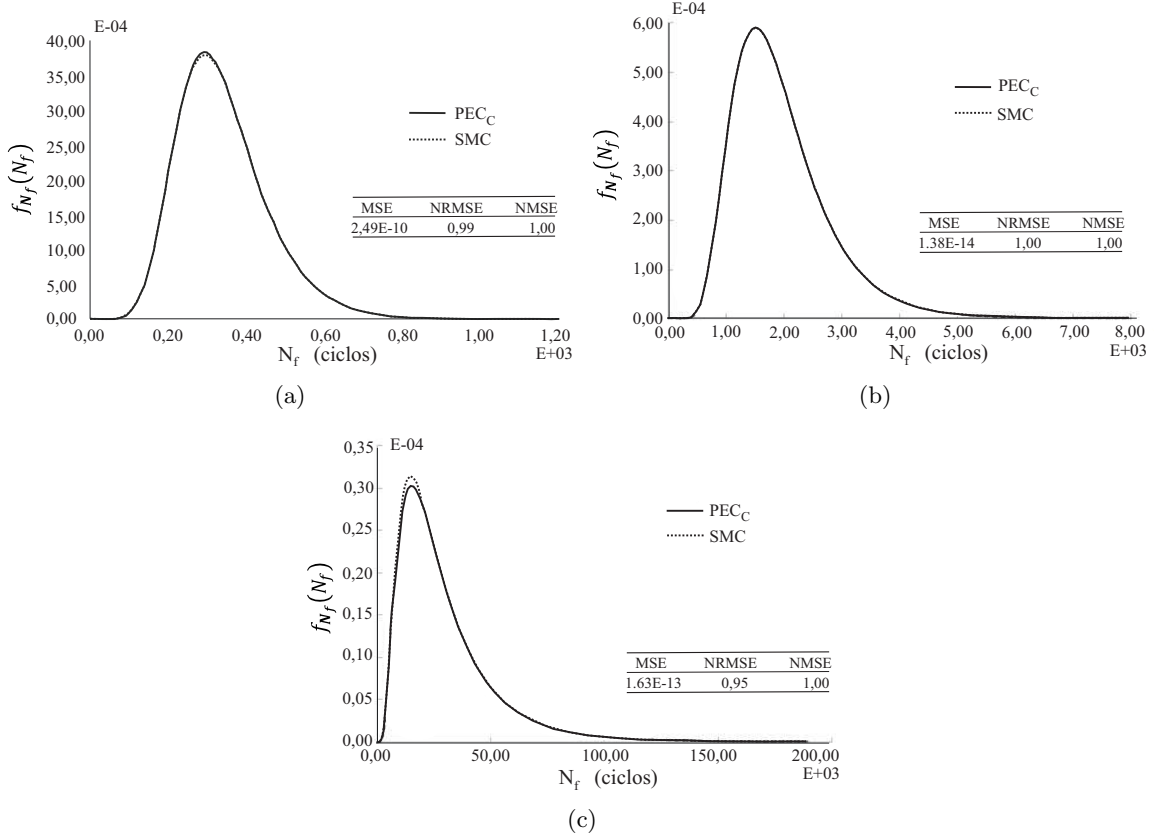


Figura 3.3: Comparação das $f_{N_f}(N_f)$ do PEC_C e SMC para diferentes F_a , (a) $88,96$ kN, (b) $53,38$ kN e (c) $31,14$ kN. Adaptado (Afanador *et al.*, 2016).

uma distribuição lognormal conforme o estimador de máxima verossimilhança e foram geradas pela técnica de SMC, usando o programa desenvolvido por Negrão (2014) com $N_{SMC} = 1E+06$.

A seguir são definidos matematicamente os tipos de erros utilizados na análise da convergência da $f_{\mathbf{X}}(x)$, assim:

$$MSE = \frac{[f_{\hat{\mathbf{X}}_C}(\hat{X}_C) - f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X})]^2}{N_S} \quad (3.1a)$$

em que, N_S corresponde ao número de amostras usadas para gerar a $f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X})$ e $f_{\hat{\mathbf{X}}_C}(\hat{X}_C)$. Nesta pesquisa $N_S = 200$ é adotado e MSE corresponde ao erro quadrático médio.

$$NRMSE = 1 - \frac{\|f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X}) - f_{\hat{\mathbf{X}}_C}(\hat{X}_C)\|}{\|f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X}) - \mu_{f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X})}\|} \quad (3.1b)$$

Em que $\mu_{f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X})}$ corresponde à μ da $f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X})$, NRMSE é a raiz padronizada do erro quadrático médio, e, além disso, é usado o NMSE que corresponde o erro quadrático médio padronizado.

$$NMSE = 1 - \left[\frac{f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X}) - f_{\hat{\mathbf{X}}_C}(\hat{X}_C)}{f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X}) - \mu_{f_{\hat{\mathbf{X}}}(\hat{X})}} \right]^2 \quad (3.1c)$$

Em que $\hat{X} = N_f$ e $\hat{X}_C = \hat{N}_f$ obtidas pela SMC no modelo elaborado por Negrão (2014) modificado, e na SMC aplicado no PEC_C .

A análise do erro que acompanha as Figuras 3.3a-c, o MSE tende a 0 ($MSE \approx 0$), indicando um bom ajuste. Outros tipos de erro analisados são: o $NMSE$ tende a 1, indicando uma adequada predição. A $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ encontrada usando PEC_C para $F_a = 88,96$ kN e $53,38$ kN ajusta-se à encontrada utilizando $f_{N_f}(N_f)$, com um $MSE \rightarrow 0$ e $NRMSE \rightarrow 1$, enquanto que para $F_a = 31,14$ kN o $NRMSE$ tende a 1 indicando um adequado ajuste com uma diferença na densidade máxima. A seguir é definido o erro relativo do μ do \hat{N}_f , $\mu_{\hat{N}_f}$, com respeito à μ do N_f , μ_{N_f} , como $err_{\mu_{\hat{N}_f}}$ assim como o erro relativo do σ do \hat{N}_f , $\sigma_{\hat{N}_f}$, com respeito ao σ do N_f , σ_{N_f} , $err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$.

$$err_{\mu_{\hat{N}_f}} = \frac{|\mu_{\hat{N}_f} - \mu_{N_f}|}{\mu_{N_f}} 100 (\%) \quad (3.2a)$$

$$err_{\sigma_{\hat{N}_f}} = \frac{|\sigma_{\hat{N}_f} - \sigma_{N_f}|}{\sigma_{N_f}} 100 (\%) \quad (3.2b)$$

O estimador de máxima verossimilhança foi usado para estimar as $f_X(x)$ que melhor se ajustam as μ , o V , e as $f_X(x)$ do PEC_C e da SMC sendo apresentados na Tabela 3.4. O comportamento da $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e a $f_{N_f}(N_f)$ são similares, assim como os valores da $\mu_{\hat{N}_f}$ e μ_{N_f} , da mesma maneira que os V , apresentados na Tabela 3.4, em que os valores μ obtidos são classificados como fadiga de baixo ciclo (Kazuo *et al.*, 2007; Nip *et al.*, 2010; Pereira *et al.*, 2015; Yun-Rong *et al.*, 2017). No problema estudado o N_{SMC/PEC_C} para determinar $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ vai representar o 5 % do N_{SMC} utilizados para encontrar a $f_{N_f}(N_f)$; representado uma diminuição importante na simulação.

Tabela 3.4: Comparação estatística dos resultados ao estimar o \hat{N}_f e N_f usando PEC_C e SMC na placa com 2 entalhes semi-circular e diferente F_a (kN).

F_a	$\mu_{\hat{N}_f}$	$\sigma_{\hat{N}_f}$	$V_{\hat{N}_f}$	$f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$	μ_{N_f}	σ_{N_f}	V_{N_f}	$f_{N_f}(N_f)$	$err_{\mu_{\hat{N}_f}}$	$err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$
88,96	338,24	120,46	36	LN	338,36	121,13	36	LN	0	1
53,38	1.959,83	832,85	42	LN	1.963,51	840,83	43	LN	0	1
31,14	30.654,40	23.177,51	76	LN	29.856,30	22.320,73	75	LN	4	4

Nota:

$\mu_{\hat{N}_f}, \mu_{N_f}, \sigma_{\hat{N}_f}, \sigma_{N_f}$ (ciclos);

LN = Lognormal;

$V_{\hat{N}_f}, V_{N_f}$ $err_{\mu_{\hat{N}_f}}, err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$ (%).

Em que, V_{N_f} é o coeficiente de variação do N_f e $V_{\hat{N}_f}$ corresponde ao coeficiente da variação do \hat{N}_f . Os valores da $\mu_{\hat{N}_f}$, $\sigma_{\hat{N}_f}$ e $V_{\hat{N}_f}$, usando PEC_C , são apresentados nas coluna 2, 3 e 4 da Tabela, além disso a μ_{N_f} , σ_{N_f} e V_{N_f} usando SMC são apresentados nas coluna 6, 7 e 8, apresentados na Tabela 3.4 levando em consideração a metodologia deformação-vida. A predição da $\mu_{\hat{N}_f}$, $\sigma_{\hat{N}_f}$ e $V_{\hat{N}_f}$, usando PEC_C , comparados com os encontrados, utilizando SMC, μ_{N_f} , σ_{N_f} e V_{N_f} são similares, dado que os $err_{\mu_{\hat{N}_f}}$ e $err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$ são $< 4,00\%$.

Como um exemplo é apresentado a seguir o PEC_C com $p=3$ que estima o \hat{N}_f de uma placa com dois entalhes laterais semi-circulares sujeito à fadiga com $F_a = 88,96$ kN.

Tabela 3.5: Coeficientes do PEC_C para determinar o \hat{N}_f em uma placa com 2 entalhes laterais semi-circulares sob $F_a = 88,96$ kN.

Função base	y_i	Função base	y_i	Função base	y_i
1	337,66	ξ_1	75,73	ξ_2	-40,21
ξ_3	16,97	ξ_4	72,32	$(\xi_1^2 - 1)$	3,20
$(\xi_2^2 - 1)$	3,46	$(\xi_3^2 - 1)$	0,71	$(\xi_4^2 - 1)$	2,56
$\xi_1 \xi_2$	-11,40	$\xi_1 \xi_3$	6,51	$\xi_1 \xi_4$	16,34
$\xi_2 \xi_3$	-3,42	$\xi_2 \xi_4$	-8,89	$\xi_3 \xi_4$	3,64
$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$	0,08	$(\xi_2^3 - 3\xi_2)$	-0,38	$(\xi_3^3 - 3\xi_3)$	0,17
$(\xi_4^3 - 3\xi_4)$	-0,03	$(\xi_1^2 - 1) \xi_2$	-0,98	$(\xi_1^2 - 1) \xi_3$	0,95
$(\xi_1^2 - 1) \xi_4$	0,87	$(\xi_2^2 - 1) \xi_1$	1,29	$(\xi_2^2 - 1) \xi_3$	0,42
$(\xi_2^2 - 1) \xi_4$	0,85	$(\xi_3^2 - 1) \xi_1$	0,48	$(\xi_3^2 - 1) \xi_2$	-0,20
$(\xi_3^2 - 1) \xi_4$	0,25	$(\xi_4^2 - 1) \xi_1$	0,56	$(\xi_4^2 - 1) \xi_2$	-0,29
$(\xi_4^2 - 1) \xi_3$	0,12	$\xi_1 \xi_2 \xi_3$	-1,67	$\xi_1 \xi_2 \xi_4$	-2,59
$\xi_2 \xi_3 \xi_4$	-0,83	$\xi_1 \xi_3 \xi_4$	1,41		

Na Tabela 3.5 o PEC_C que encontra o \hat{N}_f é apresentado, onde a função base do polinômio está dado nas colunas 1, 3 e 5 e seus coeficientes nas colunas 2, 4 e 6. As VA normal padrão ξ_1 , ξ_2 , e ξ_4 , que representam as VA H' , n' e e'_f , têm a maior participação no PEC_C para os componentes principais de $p=1$ e 2, apresentados na Tabela 3.5, enquanto que ξ_3 (σ'_f) exibe a menor participação no polinômio nas componentes principais de $p=1$ e 2, embora o componente principal de grau 3 sua participação não é desprezível.

Na Tabela 3.6 é apresentado na coluna 2 o $N_{f_{obs}}$ encontrado experimentalmente para uma placa com dois entalhes semi-circulares laterais sob fadiga com F_a por Socie *et al.* (1984) e Bannantine *et al.* (1989). Uma comparação dos resultados experimentais e dos encontrados usando simulação numérica vai depender da precisão da metodologia Neuber-Morrow para estimar N_f . As diferenças das $\mu_{\hat{N}_f}$, no que diz respeito aos $N_{f_{obs}}$, se deve principalmente à metodologia Neuber-Morrow que gera estimativas de vida conservadoras de N_f para F_a baixos e altos (Negrão, 2014).

Na Tabela 3.6 são apresentados, para diferentes F_a , as predições das $\mu_{\hat{N}_f}$ e $V_{\hat{N}_f}$ usando PEC_C , assim como, as μ_{N_f} e V_{N_f} usando SMC. e os $N_{f_{obs}}$ por Socie *et al.* (1984) e Bannantine *et al.* (1989). As previsões da $\mu_{\hat{N}_f}$ foram validadas pelas μ_{N_f} , alcançadas usando SMC, em que o valor estimado é igual à esperada pela metodologia Neuber-Morrow para $F_a \leq 44,48$ kN. Embora para $F_a = 35,59$ e $31,14$ kN apresenta-se um erro relativo entre as μ de 1,49 e 6,15 %, respectivamente. A dispersão estimada usando $V_{\hat{N}_f}$ é similar à encontrada usando SMC para $F_a \leq 35,59$ kN, entretanto para $F_a \geq 31,14$ kN a dispersão usando PEC_C é maior que a encontrada usando SMC para o caso de fadiga com carregamento de amplitude constante.

Tabela 3.6: Resultados do N_f experimental e estimado usando PEC_C e SMC para placa entalhada sob diferentes F_a , (kN).

F_a	N_{fObs}	PEC		SMC	
		$\mu_{\hat{N}_f}$	$V_{\hat{N}_f}$ (%)	μ_{N_f}	V_{N_f} (%)
88,96	62	338	34	338	35
71,17	635	696	37	696	37
62,28	1.300	1.104	39	1.104	39
53,38	2.400	1.963	42	1.963	42
44,48	6.000	4.210	49	4.210	50
35,59	14.000	13.176	67	12.983	65
31,14	19.000	31.671	94	29.834	79

N_{fObs} , $\mu_{\hat{N}_f}$ e μ_{N_f} (ciclos)

Na próxima seção um estudo será realizado para uma placa metálica com furo no centro e carregamento axial de amplitude variável, usando o PEC_C . A validação dos resultados obtidos com o PEC_C é realizada usando SMC na análise de deformação-vida, utilizando a metodologia Neuber-Morrow.

3.1.2 Análise de fadiga em corpos entalhados sob carregamento de amplitude variável

Foram realizadas diversas análises probabilísticas do N_f , considerando a incerteza do material (H' , n' , σ'_f e ϵ'_f), porém a aleatoriedade no carregamento de amplitude variável ($S0$) não foi levada em conta. Nesta seção, o $S0$ será considerado aleatório nos componentes de 1 até 4 do vetor de $S0$, $S0(1)$ até $S0(4)$, para o caso de uma placa com furo no centro, como apresentada na Figura 3.4(a).

Uma placa composta de uma liga de alumínio *2024-T351* com furo central é apresentada na Figura 3.4(a), cujo alvo é quantificar a incerteza do N_f , tendo em conta a aleatoriedade do material cujas propriedades são listadas na Tabela 3.7 e definidas na seção 2.4. A aleatoriedade no carregamento $S0$ e das variáveis aleatórias (VA) do material foram assumidas normais, além disso a história de tensões nominais de amplitude variável, aplicadas na placa com furo central para os 3 casos de $S0$, é ilustrado na Figura 3.4(b).

Os coeficientes do PEC_C (\mathbf{y}), foram obtidos utilizando o método da colocação baseado em regressão, na qual o N_{pec} é obtido conforme a Equação (2.41), e o espaço amostral foi gerado usando sequência de Sobol. Para obter o N_f , foi utilizado o programa de Negrão (2014) modificado para realizar análise probabilística para os casos de $S0$ representados na Figura 3.4(b), em que as μ e V são apresentados na Tabela 3.8. O espaço amostral definido é o *input* do programa de Negrão (2014), que vai gerar os N_f junto com os pontos de colocação, utilizando regressão por mínimos

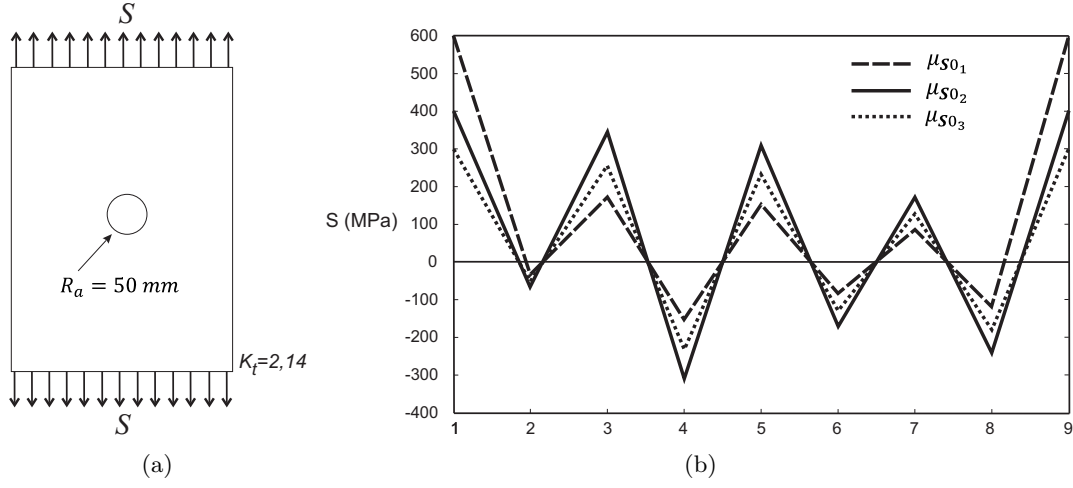


Figura 3.4: Caso de estudo de fadiga com carregamento de amplitude variável, a) Placa com furo central e b) Médias do carregamento com amplitude variável, μ_{S0} .

quadrados são utilizados para determinar os coeficientes do PEC_C . Na Tabela 3.9 são apresentados o p , N_{pcc} , o N_{PEC_C} , o número de SMC usados para estabelecer $f_{N_f}(N_f)$, denotado por N_{SMC} , e o número de SMC usados no PEC_C para determinar a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$, N_{SMC}/PEC_C .

Tabela 3.7: Variáveis aleatórias e determinísticas do material consideradas na análise probabilística do N_f , de uma placa de liga de alumínio $2024-T351$ com furo central.

Variáveis	μ	V (%)	$f_{\mathbf{X}}(x)$
H' (MPa)	662,00	15	Normal
n' (-)	0,07	15	Normal
σ'_f (MPa)	927,00	15	Normal
ϵ'_f (-)	0,41	15	Normal
E (MPa)	73.100,00	0	‡
b (-)	-0,11	0	‡
c (-)	-0,71	0	‡
K_f (-)	2,40	0	‡

(-) Adimensional; ‡ Determinístico, sem $f_{\mathbf{X}}(x)$.

O p que gerou a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$, com erros mínimos com respeito à $f_{N_f}(N_f)$, foi o $p=2$ para os $S0_i$, definidos na Tabela 3.9. O cálculo dos \mathbf{y} foi possível usando um espaço amostral de 90 pontos, $N_{pcc} = 90$, ou seja 2 vezes o estimado para $n=8$ e $p=2$ de acordo com a Equação (2.8). Em problemas com falta de convergência com respeito à $f_{\mathbf{X}}(x)$, Isukapalli (1999) recomenda que o $N_{pcc} = 2N$, em que N é o número de truncamento definido pela Equação (2.8), isto vai gerar \mathbf{y} mais robustos, e a $f_{\mathbf{X}}(x)$ converge mais rapidamente.

Tabela 3.8: Variáveis aleatórias e determinísticas do histórico de tensões nominais de amplitude variável aplicada na placa de liga de alumínio *2024-T351* com furo central.

Variáveis (MPa)	μ_{S0_i}			V (%)	$f_{\mathbf{X}}(x)$
	$i=1$	$i=2$	$i=3$		
$S0_i(1)$	600,00	400,00	300,00	20	Normal
$S0_i(2)$	-35,00	-69,00	-51,75	20	Normal
$S0_i(3)$	173,00	345,00	258,75	20	Normal
$S0_i(4)$	-155,00	-310,00	-232,50	20	Normal
$S0_i(5)$	155,00	310,00	232,50	0	‡
$S0_i(6)$	-86,00	-172,00	-129,00	0	‡
$S0_i(7)$	86,00	172,00	129,00	0	‡
$S0_i(8)$	-121,00	-241,00	-180,75	0	‡

μ_{S0_i} (MPa); ‡ Determinístico, sem $f_{\mathbf{X}}(x)$.

A $f_{N_f}(N_f)$ segue uma distribuição lognormal e foi construída pela técnica de SMC, usando o programa desenvolvido por Negrão (2014) modificado e realizando $N_{SMC} = 1E + 06$. Além disso, a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ segue uma distribuição lognormal gerada após dos coeficientes do $PECC$ regredidos usando SMC sobre o $PECC$ com $N_{SMC/PECC} = 5E+04$. As $f_{\mathbf{X}}(x)$ foram determinadas utilizando o estimador de máxima probabilidade para os \hat{N}_f e N_f .

Tabela 3.9: Número de pontos de colocação e N_{PECC} junto com N_{SMC} e $N_{SMC/PECC}$, utilizados para quantificar a incerteza de N_f da placa e $S0$ (MPa).

$S0$		$S0_1$	$S0_2$	$S0_3$
p	(-)	2	2	2
N_{PECC}	(-)	45	45	45
N_{pcC}	(-)	90	90	90
N_{SMC}	(-)	1,0E+06	1,0E+06	1,0E+06
$N_{SMC/PECC}$	(-)	5,0E+04	5,0E+04	5,0E+04

(-) Adimensional.

Na Figura 3.5 são apresentadas as $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e $f_{N_f}(N_f)$ usando $PECC$ e SMC, para placa com furo central levando em consideração 3 casos de $S0$.

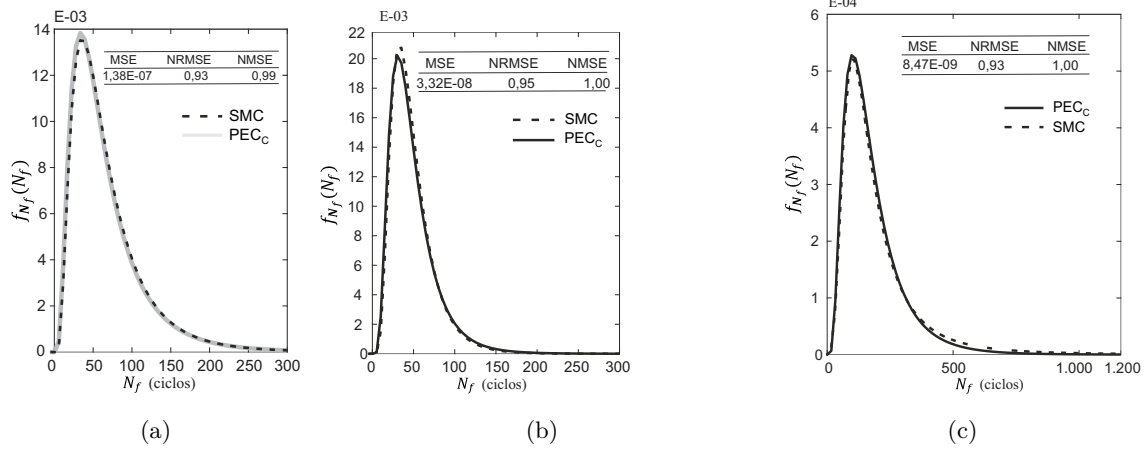


Figura 3.5: Comparação da $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e $f_{N_f}(N_f)$ do PEC_C e SMC para a placa com furo central com diferente S_0 , a) S_{01} , b) S_{02} e c) S_{03} .

Determinada a $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e $f_{N_f}(N_f)$ que melhor define o comportamento dos dados usando PEC_C e SMC, conforme é apresentado na Figura 3.5a-c. Uma análise do erro que acompanha as Figura 3.5a-c, indica que o MSE é baixo ($MSE \approx 0$), sendo adequado o ajuste. Outros tipos de erro analisados são: o $NMSE$ e a $NRMSE$, definidos nas Equações (3.1b) e (3.1c), em que o $NMSE$ e $NRMSE$ tendem a 1, indicando uma adequada predição. A $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ encontrada usando PEC_C para S_{01} , S_{02} e S_{03} ajusta-se à obtida utilizando $f_{N_f}(N_f)$, com um MSE tendendo a 0 e $NRMSE$ tendendo a 1. Definido o p , foi utilizado o estimador de máxima verossimilhança para determinar a $f_X(x)$ que gera $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e que tem melhor ajuste à $f_{N_f}(N_f)$, a μ e o V , os quais são apresentados na Tabela 3.10. O comportamento da $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ e a $f_{N_f}(N_f)$ são similares, assim como os valores da $\mu_{\hat{N}_f}$ e μ_{N_f} , o mesmo que os V , apresentados na Tabela 3.10, em que os valores da $\mu_{\hat{N}_f}$ e μ_{N_f} obtidos são classificados como fadiga de ciclo baixo (Kazuo *et al.*, 2007; Nip *et al.*, 2010; Pereira *et al.*, 2015; Yun-Rong *et al.*, 2017). No problema estudado o $N_{SMC/PEC}$ para determinar $f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$ vai representar o 5 % do N_{SMC} para encontrar a $f_{N_f}(N_f)$, obtendo uma diminuição importante na simulação e no custo computacional.

Tabela 3.10: Comparação estatística dos resultados para estimar o N_f , usando PEC_C e SMC na placa com furo central, e diferentes S_0 (MPa).

S_0	$\mu_{\hat{N}_f}$	$\sigma_{\hat{N}_f}$	$V_{\hat{N}_f}$	$f_{\hat{N}_f}(\hat{N}_f)$	μ_{N_f}	σ_{N_f}	V_{N_f}	$f_{N_f}(N_f)$	$err_{\mu_{\hat{N}_f}}$	$err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$
S_{01}	48,61	27,30	56	LN	48,43	26,93	56	LN	0,37	1,37
S_{02}	67,40	50,99	76	LN	68,81	50,69	74	LN	1,14	0,59
S_{03}	207,12	229,67	111	LN	209,75	234,25	112	LN	1,25	1,96

Nota:

$\mu_{\hat{N}_f}, \mu_{N_f}, \sigma_{\hat{N}_f}, \sigma_{N_f}$ (ciclos);

LN = Lognormal;

$V_{\hat{N}_f}, V_{N_f}, err_{\mu_{\hat{N}_f}}, err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$ (%).

Foram estimados os $err_{\mu_{\hat{N}_f}}$ assim como $err_{\sigma_{\hat{N}_f}}$, definidos respectivamente nas Equações (3.2a) e

(3.2b) e calculados para os 3 casos de $\mathbf{S0}$, sendo apresentados na coluna 10 e 11 da Tabela 3.10. Em geral, para os casos analisados de $\mathbf{S0}$ os $err_{\mu_{\hat{N}_f}} \leq 1,25\%$ enquanto que o $err_{\sigma_{\hat{N}_f}} \leq 1,96\%$ indicam que os 2 momentos estatísticos estimados calculados usando PEC_C apresentam erros baixos para $N_{pcC} = 90$ com respeito aos $N_{SMC} = 1E+06$. Como exemplo, o PEC_C que estima o \hat{N}_f para $\mathbf{S0}_1$ é apresentado na Tabela 3.11, na qual as colunas 1 e 4 são exibidas a função base do PEC_C .

As colunas 2 e 5 são apresentados os coeficientes do PEC_C , é por último, as colunas 3 e 6 indicam o índice de sensibilidade dos coeficientes, γ , conforme é definido na Equação (3.3), que estima o nível de contribuição de cada termo do polinômio.

$$\gamma_i = \frac{y_i}{\|y\|} \quad (3.3)$$

Tabela 3.11: Coeficientes do PEC_C e os resultados da análise da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C na estimativa do \hat{N}_f em uma placa com furo central sob $\mathbf{S0}_1$.

Função base	y_i	γ_i	Função base	y_i	γ_i
1	48,61	0,88	ξ_1	0,11	0,00
ξ_2	-0,05	0,00	ξ_3	19,18	0,35
ξ_4	6,42	0,12	ξ_5	-10,30	-0,19
ξ_6	0,75	0,01	ξ_7	-5,05	-0,09
ξ_8	8,00	0,14	$(\xi_1^2 - 1)$	-0,70	-0,01
$(\xi_2^2 - 1)$	0,31	0,01	$(\xi_3^2 - 1)$	3,82	0,07
$(\xi_4^2 - 1)$	-0,10	0,00	$(\xi_5^2 - 1)$	0,25	0,00
$(\xi_6^2 - 1)$	-0,20	0,00	$(\xi_7^2 - 1)$	-0,45	-0,01
$(\xi_8^2 - 1)$	-0,30	-0,01	$\xi_1\xi_2$	-0,44	-0,01
$\xi_1\xi_3$	0,88	0,02	$\xi_1\xi_4$	-1,32	-0,02
$\xi_1\xi_5$	-0,73	-0,01	$\xi_1\xi_6$	-0,60	-0,01
$\xi_1\xi_7$	1,39	0,03	$\xi_1\xi_8$	1,38	0,02
$\xi_2\xi_3$	0,53	0,01	$\xi_2\xi_4$	-0,29	-0,01
$\xi_2\xi_5$	0,06	0,00	$\xi_2\xi_6$	-0,13	0,00
$\xi_2\xi_7$	-1,04	-0,02	$\xi_2\xi_8$	0,89	0,02
$\xi_3\xi_4$	2,80	0,05	$\xi_3\xi_5$	-5,83	-0,11
$\xi_3\xi_6$	-0,81	-0,01	$\xi_3\xi_7$	-2,05	-0,04
$\xi_3\xi_8$	3,81	0,07	$\xi_4\xi_5$	-2,03	-0,04
$\xi_4\xi_6$	0,45	0,01	$\xi_4\xi_7$	-0,39	-0,01
$\xi_4\xi_8$	1,49	0,03	$\xi_5\xi_6$	1,42	0,03
$\xi_5\xi_7$	3,40	0,06	$\xi_5\xi_8$	-2,42	-0,04
$\xi_6\xi_7$	0,51	0,01	$\xi_6\xi_8$	-0,39	-0,01
$\xi_7\xi_8$	-1,52	-0,03			

Uma análise da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C foi apresentada na Tabela 3.11, em que os $\gamma \geq 0,01$ são apresentados na Figura 3.6, na qual o polinômio de 45 termos poderia ser escrito com 38 termos sem perda de precisão, desconsiderando os $\gamma_i \leq 0,01$. As VA do material, H' (ξ_1), n' (ξ_2) e do carregamento $S0_1(2)$ (ξ_6) não têm importância na quantificação da incerteza do \hat{N}_f , enquanto que o σ'_f (ξ_3), o ϵ'_f (ξ_4) e os componentes do vetor $\mathbf{S0}$, $\mathbf{S0}_1(1)$ (ξ_5), $\mathbf{S0}_1(3)$ (ξ_7) e

$\mathbf{SO}_1(4)$ (ξ_8), são importantes.

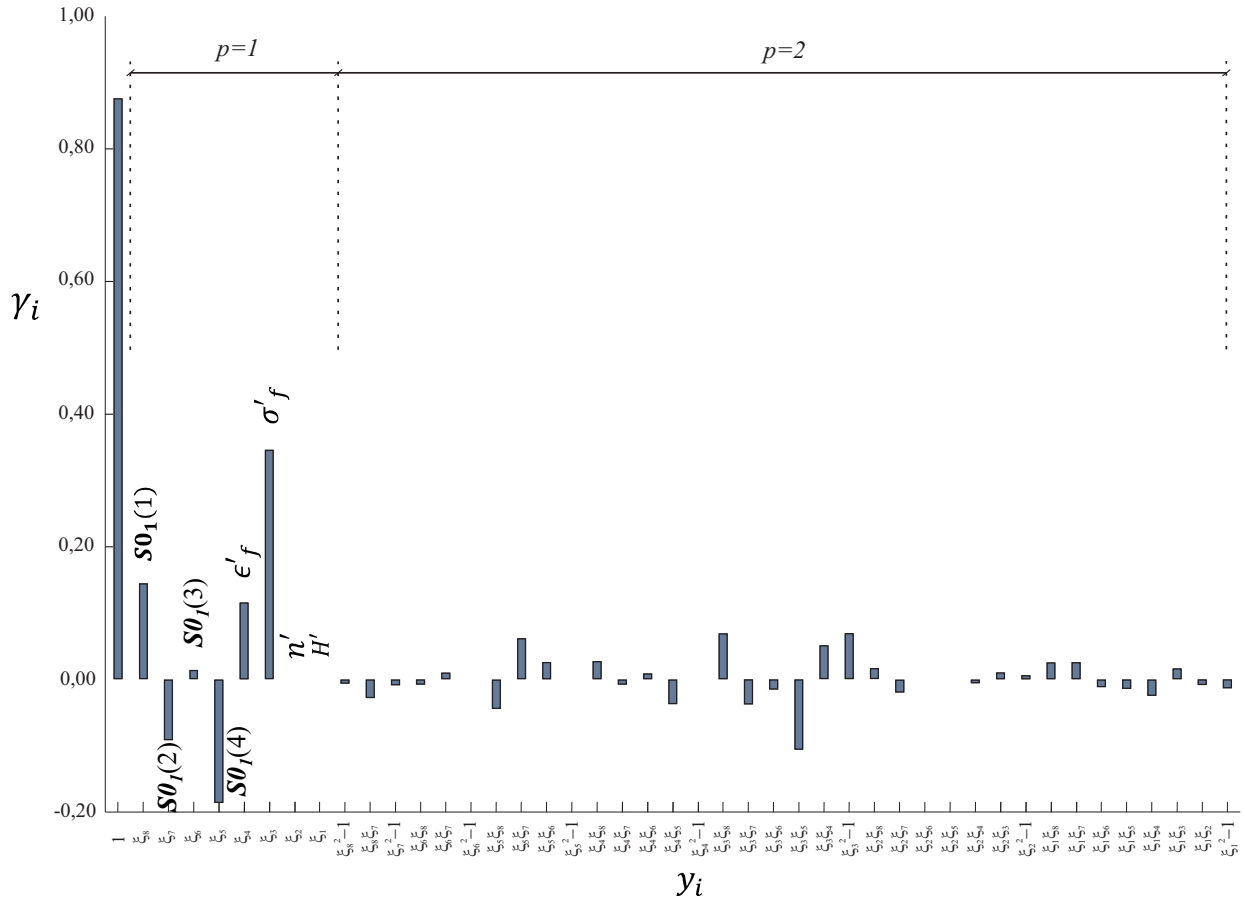


Figura 3.6: Resultado da análise de sensibilidade do PEC_C para estimar o \hat{N}_f de uma placa de liga de alumínio $2024-T351$ com furo central e \mathbf{SO}_1 .

3.2 Viscoelasticidade

No cálculo das deflexões em elementos de concreto, é importante considerar a aleatoriedade do material e a influência do tempo no $E(t)$, conforme a Equação (2.41). Para estimar as deflexões em estruturas de concreto foi utilizado o modelo de Boltzmann, o qual é utilizado em materiais viscoelásticos e leva em conta a influência do tempo no cálculo do $E(t)$. Será inicialmente abordada a quantificação da incerteza do $E(t)$ em materiais quase frágeis para diferentes instantes de tempo, assim como a função de escoamento ($J(t)$), antes de analisar a deflexão em elementos de concreto. A $J(t)$ pode ser expressa em termos das relações dos módulos E_s , E_k , e η_k de acordo com a Equação 2.40, e usando o método de interconversão (Park e Schapery, 1998; Park e Kim, 1999) têm-se,

$$J(t) = \frac{1}{E_\infty + E_1} \left[1 + \frac{E_1}{E_\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho_1}} \right) \right] \quad (3.4)$$

Sejam as seguintes relações:

$$J_0 = \frac{1}{E_\infty + E_1}, \quad J_1 = \frac{E_1}{E_\infty (E_\infty + E_1)}, \quad \tau_1 = \frac{\rho_1 (E_\infty + E_1)}{E_\infty} \quad (3.5)$$

Substituindo-se a Equação (3.5) na Equação (3.4) obtém-se.

$$J(t) = J_0 + J_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (3.6)$$

3.2.1 Quantificação da incerteza do módulo de relaxação

Devido à incerteza epistêmica dos dados decorrentes dos poucos ensaios de laboratório para medir $E(t)$ e tendo em conta a entropia estatística que diz: "quando são conhecidos 2 parâmetros tais como a μ e o σ , e se desconhece a distribuição, a máxima entropia estatística é atingida com a $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal" (Harr, 1997; Bendat e Piersol, 2008). O modelo de $E(t)$ estimado ($\hat{E}(t)$), usando PEC_C assume VA normais para E_∞ , E_1 e ρ , de acordo com a Equação (2.41), e são considerados *iid*; na Tabela a seguir se estabelecem os parâmetros de cada VA para diferentes V .

Tabela 3.12: Parâmetros das VA de entrada do modelo $E(t)$.

VA	μ	V (%)
E_∞ (dina/cm ²) $\rightarrow \xi_1$	1E-02	10; 20; 30; 40
E_1 (dina/cm ²) $\rightarrow \xi_2$	1E+00	10; 20; 30; 40
ρ_1 (s) $\rightarrow \xi_3$	1E+04	10; 20; 30; 40

$$1 \text{ dyn/cm}^2 = 10^{-1} \text{ N/m}^2$$

Para obter o $\hat{E}(t)$, foi utilizada a Equação (2.41) para realizar análise probabilística para $t=1E+00$ s, $3E+03$ s, $3E+04$ s e $t=1E+06$ s, em que, as μ e V são apresentados na Tabela 3.12 que incorpora o PEC_C e SMC na estimativa do $\hat{E}(t)$ e $E(t)$, respectivamente. Como um exemplo da calibração do PEC_C utilizando SMC são analisados $t=3E+03$ s e $t=3E+04$ s do $E(t)$, levando em consideração que os t a analisar são os que apresentam maior variação no $E(t)$, definido na Equação (2.8). Os \mathbf{y} foram obtidos usando o método da colocação baseado em regressão, em que N_{pcc} variam de acordo com n e p , conforme a Equação (2.8), e são apresentados na Tabela 3.13.

No problema de fadiga foi utilizado a sequência de Sobol para estabelecer o espaço amostral de acordo com m e p do PEC_C . Neste Capítulo são usadas as raízes da função base de grau $p+1$ como os pontos de colocação. Isto quer dizer, que as raízes da função base $p+1$ que geram os pontos com máxima probabilidade de ocorrência, veja Seção 2.1.2, conhecido como o método de colocação probabilístico, é usado nesta seção. O valor de p vai depender da acurácia do PEC_C com respeito dos resultados obtidos usando SMC no cálculo da $f_{\mathbf{X}}(x)$. O p que gerou a $f_{\mathbf{X}}(x)$ para o $\hat{E}(t)$ usando PEC_C , $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$, com menores erros com respeito da $f_{\mathbf{X}}(x)$ pelo $E(t)$ usando SMC, $f_{E(t)}(E(t))$, foi o $p=2$ para $t=3E+03$ s, e $p=3$ para $t=3E+04$ s, os parâmetros utilizados são dados na Tabela 3.13. O cálculo dos \mathbf{y} foi possível usando um espaço amostral de 20 e 40 pontos, $N_{pcc} = 20$ e 40, ou seja, 2 vezes o estimado conforme à Equação (2.8) para $n=3$, $p=2$ e $n=3$, $p=3$. Isto é feito para evitar problemas de singularidade na matriz A da Equação (2.29)

segundo Isukapalli (1999) que recomenda que o $N_{pec} = 2N$, isto vai gerar \mathbf{y} mais robustos que $N_{PEC_C} = N$.

Tabela 3.13: Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , necessários para quantificar a incerteza de $E(t)$.

		t (s)	
		$3E+03$	$3E+04$
p	(-)	2	3
N_{PEC_C}	(-)	10	20
N_{pec}	(-)	20	40
N_{SMC}	(-)	1,0E+06	1,0E+06
N_{SMC/PEC_C}	(-)	5,0E+04	5,0E+04

(-) Adimensional.

As $f_{E(t)}(E(t))$ e $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ são representadas como SMC e PEC_C na Figura 3.7, e seguem uma distribuição lognormal, conforme o estimador de máxima verossimilhança. A $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ é construída depois dos coeficientes dos PEC_C regredidos e usado SMC sobre o PEC_C , com $N_{PEC_C} = 5E+04$ simulações já $f_{E(t)}(E(t))$ é construída usando SMC sobre a Equação (3.4) e utilizando o vetor de $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ dados na Tabela 3.12 com um $N_{SMC} = 1E+06$.

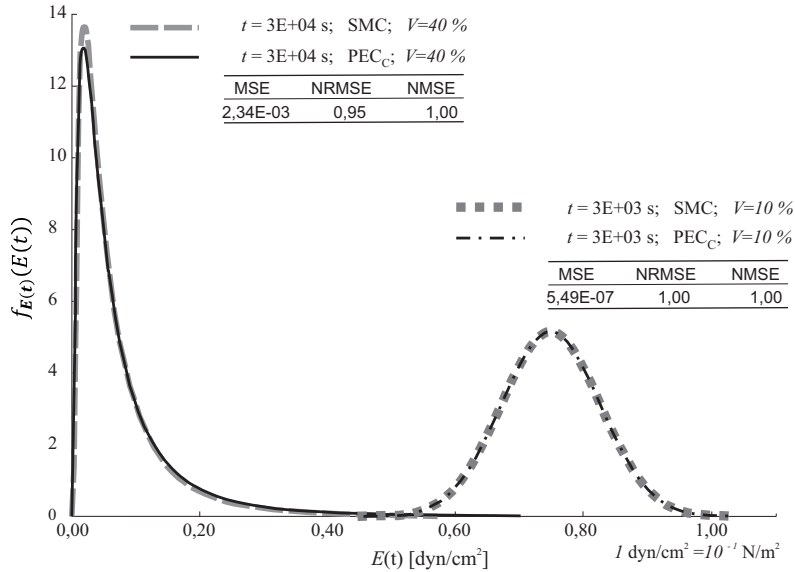


Figura 3.7: Comparação da $f_{E(t)}(E(t))$ e $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ para $t = 3E+03$ s e $3E+04$ s, com diferentes V .

A comparação entre as $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ e $f_{E(t)}(E(t))$ para $t = 3E+03$ s na Figura 3.7 apresenta um ajuste adequado em todo o domínio de $E(t)$. Entretanto, para $t = 3E+04$ s na Figura 3.7 o ajuste apresenta nas caudas das $f_X(x)$, com maior densidade do PEC_C que a SMC. A análise do erro da $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ com respeito à $f_{E(t)}(E(t))$ para $t = 3E+03$ s é apresentado na Figura 3.7. O MSE, conforme a Equação (3.1a) tende a 0 e outros tipos de erro analisados são: o $NMSE$ e a $NRMSE$, definidos nas Equações (3.1b) e (3.1c), respectivamente, em que o $NMSE$ e $NRMSE$ tendem a 1, indicando uma adequada predição. A $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ encontrada usando PEC_C para $t = 3E+04$ s

ajusta-se à encontrada usando $f_{E(t)}(E(t))$, com um MSE que tende a 0 e $NMSE$ tendendo a 1 enquanto que o $NRMSE=0,95$ com uma diferença na densidade máxima.

Na seguinte Tabela, são apresentados como exemplo os PEC_C de $p=2$ e $p=3$ para os tempos $t=3E+03$ s e $3E+04$ s que melhor se ajustam à $f_{E(t)}(E(t))$, levando em consideração $V=10\%$ e $V=40\%$.

Tabela 3.14: Coeficientes do PEC_C na estimativa do $\hat{E}(t)$ para diferentes instantes de t e V .

t (s)	V (%)	PEC_C
$3E+03$	10	$\hat{E}(t) = (7.488,87 + 10\xi_1 + 736,96\xi_2 + 227,11\xi_3 - 19,29(\xi_3^2 - 1) - 2,23\xi_1\xi_2 + 22,71\xi_2\xi_3)E - 04$
$3E+04$	40	$\hat{E}(t) = (753,76 + 39,02\xi_1 + 242,93\xi_2 + 514,40\xi_3 - 0,44(\xi_1^2 - 1) + 3,22\xi_1\xi_2 + 2,18\xi_1\xi_3 + 198,46\xi_2\xi_3 - 2,83(\xi_2^2 - 1) + 97,62(\xi_3^2 - 1) + 0,78(\xi_1^3 - 3\xi_1) + 3,59(\xi_1^2 - 1)\xi_2 - 1,99(\xi_1^2 - 1)\xi_3 + 1,52(\xi_2^3 - 3\xi_2) - 0,59(\xi_2^2 - 1)\xi_1 - 1,18(\xi_2^2 - 1)\xi_3 - 1,13(\xi_3^2 - 1)\xi_1 - 4,02\xi_1\xi_2\xi_3 + 41,22(\xi_3^2 - 1)\xi_2 - 25,73(\xi_3^3 - 3\xi_3))E - 04$

O PEC_C com $p=2$ que estima o $\hat{E}(t)$ para $t=3E+03$ s não tem em conta a VA padrão ξ_1 (E_∞) e ξ_2 (E_1), mas para $t=3E+04$ s todas as VA participam embora a VA que tem maior participação é ξ_3 (ρ_1). Determinadas a $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ e $f_{E(t)}(E(t))$ que melhor define o comportamento do $E(t)$, o estimador de máxima verossimilhança é usado para estimar μ , σ e o V e são apresentados na Tabela 3.15.

A seguir é definido o erro relativo da μ do $\hat{E}(t)$ ($\mu_{\hat{E}(t)}$) com respeito à μ do $E(t)$ ($\mu_{E(t)}$), $err_{\mu_{\hat{E}(t)}}$, assim como o erro relativo do σ do $\hat{E}(t)$ ($\sigma_{\hat{E}(t)}$) com respeito ao σ do $E(t)$ ($\sigma_{E(t)}$), $err_{\sigma_{\hat{E}(t)}}$.

$$err_{\mu_{\hat{E}(t)}} = \frac{|\mu_{\hat{E}(t)} - \mu_{E(t)}|}{\mu_{E(t)}} 100 \text{ (\%)} \quad (3.7a)$$

$$err_{\sigma_{\hat{E}(t)}} = \frac{|\sigma_{\hat{E}(t)} - \sigma_{E(t)}|}{\sigma_{E(t)}} 100 \text{ (\%)} \quad (3.7b)$$

Tabela 3.15: Comparação estatística dos resultados para estimar o $E(t)$ usando PEC_C e SMC para diferente t e V .

t (s)	V	$\mu_{\hat{E}(t)}$	$\sigma_{\hat{E}(t)}$	$V_{\hat{E}(t)}$	$f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$	$\mu_{E(t)}$	$\sigma_{E(t)}$	$V_{E(t)}$	$f_{E(t)}(E(t))$	$err_{\mu_{\hat{E}(t)}}$	$err_{\sigma_{\hat{E}(t)}}$
$3E+03$	10	0,75	0,08	10	Normal	0,75	0,08	10	Normal	0	0
$3E+04$	40	0,04	0,05	130	LN	0,04	0,05	128	LN	2	5

$\mu_{\hat{E}(t)}$, $\mu_{E(t)}$, $\sigma_{\hat{E}(t)}$, $\sigma_{E(t)}$ (ciclos); V , $V_{\hat{E}(t)}$, $V_{E(t)}$ (%); LN, Lognormal; $err_{\mu_{\hat{E}(t)}}$, $err_{\sigma_{\hat{E}(t)}}$ (%)

Foram estimados os $err_{\mu_{\hat{E}(t)}}$ assim como $err_{\sigma_{\hat{E}(t)}}$, definidos nas Equações (3.2a) e (3.2b) e calculados para os $t=3E+03$ s e $3E+04$ s, os quais são apresentados nas colunas 11 e 12 da Tabela 3.15. Em geral, para os casos analisados de t os $err_{\mu_{\hat{N}_f}} \leq 2\%$, enquanto que o $err_{\sigma_{\hat{N}_f}} \leq 5\%$ indicando

que os 2 momentos estatísticos estimados calculados usando PEC_C apresentam erros pequenos para $N_{pc} = 20$ com respeito aos $N_{SMC} = 1E + 06$ utilizados na SMC.

A seguir são apresentados na Tabela 3.16, o p , N_{PEC_C} , N_{pc} , N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , usados na análise do $\hat{E}(t)$ para $t=1E+00$ s, $3E+03$ s, $3E+04$ s e $1E+06$ s, encontrados de maneira similar à metodologia exposta para $t=3E+03$ s, $t=3E+04$ s e $V=10\%$ e 40% , respectivamente.

Tabela 3.16: Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} , junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , necessários para quantificar a incerteza de $E(t)$ para diferentes t e V .

t (s)	1E+00	3E+03	3E+04	1E+06
V (%)	10; 20; 30; 40	10; 20; 30; 40	10; 20; 30; 40	10; 20; 30; 40
p (-)	2	2	3	2
N_{PEC} (-)	10	10	20	10
N_{pc} (-)	20	20	40	20
N_{SMC} (-)	1E+06	1E+06	1,0E+06	1,0E+06
$N_{SMC/PEC}$ (-)	5E+04	5E+04	5,0E+04	5,0E+04

(-) Adimensional.

Um estudo do comportamento é realizado à $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ para o t e V definidos na Tabela 3.16, na qual tem como objetivo determinar o comportamento da $\mu_{\hat{E}(t)}$, $V_{\hat{E}(t)}$ e a $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$, apresentado na Figura 3.8a-d. A análise do $\hat{E}(t)$ para os $t=1E+00$ s, $3E+03$ s, $1E+06$ s com $V=10; 20; 30$ e 40 , usando PEC_C , foi realizado com $p=2$ dada a pouca variabilidade dos resultados do $\hat{E}(t)$, enquanto que, para $t=3E+04$ s e os V analisados o p que apresenta melhores resultados é $p=3$. Os resultados da $\mu_{\hat{E}(t)}$ (colunas 3 e 8), o $V_{\hat{E}(t)}$ (colunas 4 e 9) e o tipo de $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ (colunas 5 e 10) do $\hat{E}(t)$ são apresentados na Tabela 3.17.

O comportamento dos dados é simétrico com respeito à $\mu_{\hat{E}(t)}$ para os $t=1E+00$ s, $3E+03$ s e $1E+06$ s e os diferentes V analisados, o qual pode ser observado nas Figuras 3.8(a), 3.8(b) e 3.8(d), respectivamente. Para $t=3E+04$ s o comportamento dos dados é assimétrico com respeito à $\mu_{\hat{E}(t)}$ para os V analisados, Figura 3.8(c), os quais seguem uma distribuição de probabilidade lognormal. A $\mu_{\hat{E}(t)}$, $V_{\hat{E}(t)}$ e o tipo de $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ na Tabela 3.17 permanecem invariantes com o aumento do V para $t=1E+00$ s e $1E+06$ s. A $\mu_{\hat{E}(t)}$ para $t=3E+03$ s apresenta uma ligeira perda de rigidez ao acrescentar V , entretanto não há mudanças significativas no $V_{\hat{E}(t)}$ e a $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$. O $\hat{E}(t)$ para $t=3E+04$ s apresenta alta variabilidade no $V_{\hat{E}(t)}$ (coluna 9) tornado-se até 3,25 vezes maior ao V definido para as VA. No entanto, a $\mu_{\hat{E}(t)}$ (coluna 8) muda em menor medida e a $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ segue uma distribuição lognormal.

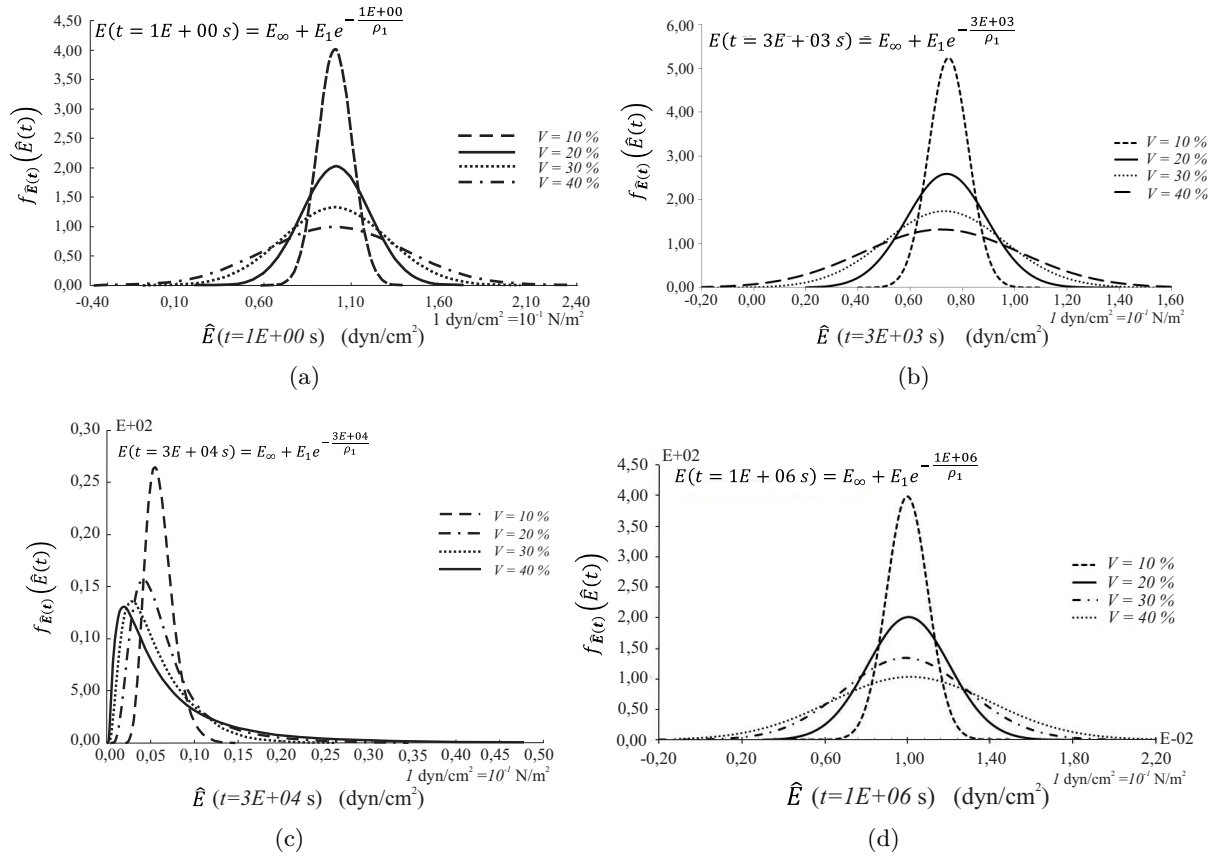


Figura 3.8: Comparação das $f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$ com diferentes V e t , (a) $t = 1E+00$ s, (b) $t = 3E+03$ s, (c) $t = 3E+04$ s e (d) $t = 1E+06$ s. Adaptado de Evangelista-Jr e Afanador (2016)

A seguir, são apresentados os resultados da estatísticas obtidas para o $\hat{E}(t)$ para os diferentes t e V .

Tabela 3.17: Resultados da estatísticas da análise do $\hat{E}(t)$ usando PEC_C e diferente V e t .

t (s)	V (%)	$\mu_{\hat{E}(t)}$	$V_{\hat{E}(t)}$ (%)	$f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$	t (s)	V (%)	$\mu_{\hat{E}(t)}$	$V_{\hat{E}(t)}$ (%)	$f_{\hat{E}(t)}(\hat{E}(t))$
1E+00	10	1,01	10	Normal	3E+04	10	6,03E-02	27	LN
	20	1,01	20	Normal		20	4,79E-02	60	LN
	30	1,01	29	Normal		30	4,30E-02	96	LN
	40	1,01	39	Normal		40	3,81E-02	130	LN
3E+03	10	0,75	10	Normal	1E+06	10	9,99E-03	10	Normal
	20	0,74	21	Normal		20	9,98E-03	20	Normal
	30	0,73	31	Normal		30	9,98E-03	30	Normal
	40	0,71	43	Normal		40	9,97E-03	41	Normal

$\mu_{\hat{E}(t)}$ (dyn/cm²); LN Lognormal.

Na Figura 3.9 é apresentada a envoltória do $\hat{E}(t)$, na qual são exibidos os comportamentos da $(\mu_{\hat{E}(t)} \pm \sigma_{\hat{E}(t)})$ para os V analisados. A envoltória do $\hat{E}(t)$ permite ter uma ideia da incerteza física do material, em que para o modelo de Boltzmann para os tempos iniciais (de 1 s até $1E+04$ s) têm maior incerteza dada a formulação matemática que define o modelo, na Equação (2.41).

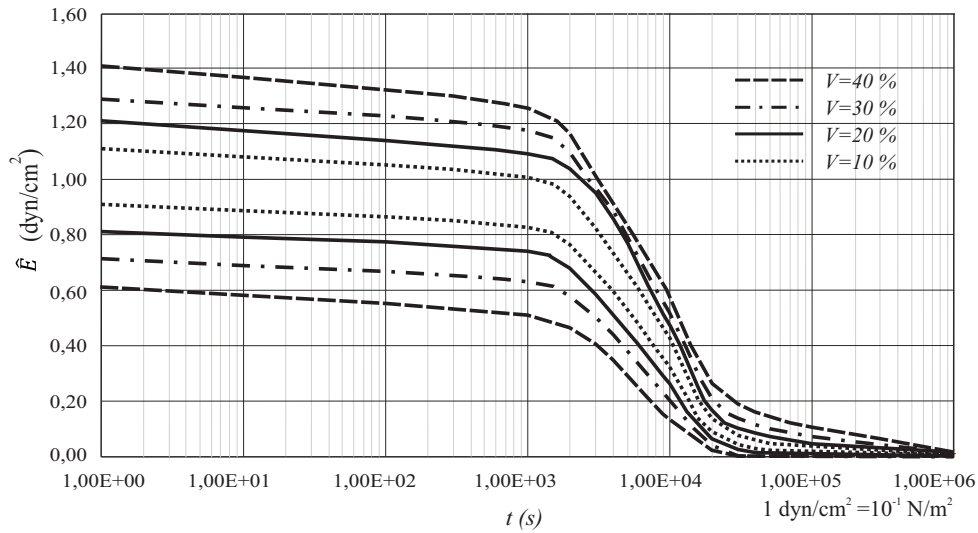


Figura 3.9: Envoltória do $\hat{E}(t)$ ($\mu_{\hat{E}(t)} \pm \sigma_{\hat{E}(t)}$) no tempo t para diferentes V .

É possível ter em conta a incerteza do $E(t)$, considerando um modelo viscoelástico em materiais quase frágeis para o cálculo das deflexões de uma viga biapoiada com carregamento uniforme. A seguir, um modelo numérico de vigas prismáticas de concreto usando um modelo viscoelástico que leva em consideração a incerteza do $E(t)$ é implementado para o cálculo das deflexões dependentes do t ($\delta(t)$), no centro do vão usando PEC_C .

3.2.2 Quantificação da incerteza das deflexões em viga biapoiada

Nesta seção são analisadas as deflexões que podem acontecer em uma viga prismática de concreto biapoiada com carregamento uniforme ($q(t)$), como mostra a Figura 3.10, junto com os valores determinísticos do $q(t)$, comprimento do vão L , espessura B e altura h . Uma representação do procedimento utilizado na análise das deflexões no centro do vão (δ), levando em consideração a incerteza no $E(t)$ de um material viscoelástico em uma viga de concreto biapoiada, é apresentado na Figura 3.11.

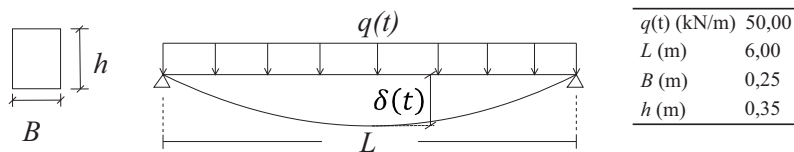


Figura 3.10: Viga biapoiada construída com material quase frágil e carregamento uniforme, $q(t)$.

Com o fim de realizar uma análise geral, são avaliados os resultados das deflexões padrão com o intuito de determinar a incerteza na deflexão padrão estimada dependente do t , $\hat{\delta}_N(t)$, utilizando o PEC_C . A $\hat{\delta}_N(t)$ é definida como a relação entre a deflexão dependente do tempo $\delta(t)$ em função da convolução da função de fluência, $J(t)$, e a deflexão de referência δ_{Ref} ($\delta_{Ref} = 5qL^4/384EI$), em que I é o momento de inércia da seção transversal da viga e E corresponde a E_∞ no modelo viscoelástico.

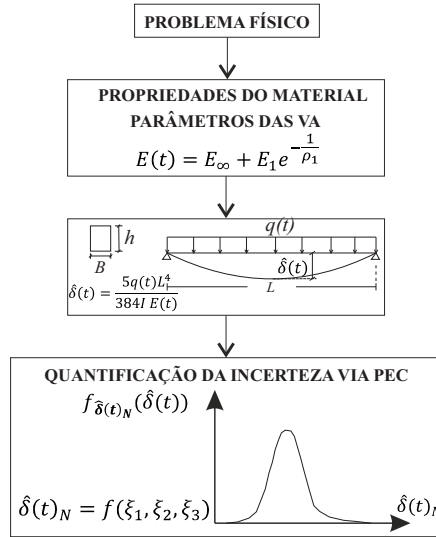


Figura 3.11: Diagrama de fluxo da quantificação da incerteza na análise da $\hat{\delta}_N(t)$ em viga biapoada, considerando modelo viscoelástico em materiais quase frágeis.

A deflexão dependente do tempo é definida,

$$\delta(t) = \frac{5L^4}{384I} \int_0^t J(t-\tau) \frac{dq}{d\tau} d\tau \quad (3.8)$$

em que, $L = 6,00$ m e $J(t-\tau)$ é a função de convolução da $J(t)$ definida conforme a Equação 3.4.

O espaço amostral depende do $n=4$ VA e p , utilizado para estabelecer o N que define o N_{PEC_C} . Usando um $N_{pc_C} = 2N$ no método da colocação probabilística, é possível determinar os coeficientes do PEC_C usando regressão por mínimos quadrados. Na Tabela 3.18 são apresentados os parâmetros utilizados para determinar o PEC_C e a $f_{\mathbf{X}}(x)$.

Tabela 3.18: Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC/PEC_C} , necessários para quantificar a incerteza de $\hat{\delta}_N(t)$.

Caso I		
p	(-)	2
N_{PEC_C}	(-)	10
N_{pc_C}	(-)	20
N_{SMC/PEC_C}	(-)	5,0E+04
(-) Adimensional.		

A $\hat{\delta}(t)_N$ pode ser calculada usando PEC_C , tendo em conta os parâmetros das estatísticas das VA como μ e σ do E_∞ , E_1 e ρ_1 , as quais seguem uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal e são consideradas *iid*, e foram definidos na Tabela 3.12. Para diferentes instantes de t ($1E+00$, $3E+03$, $3E+04$ e $1E+06$) s, foi calculada a $\delta(t)_N$, com relação ao $\delta(t)$ no centro da viga, e levando em consideração $V=10\%$, 20% , 30% e 40% . As $F_{\mathbf{X}}(x)$ da $\hat{\delta}(t)_N$ são denotadas como $F_{\hat{\delta}(t)_N}(\hat{\delta}(t)_N)$, usando PEC_C e levando em consideração o estimador de máxima verossimilhança para definir a melhor $F_{\hat{\delta}(t)_N}(\hat{\delta}(t)_N)$, como apresentado na Figura 3.12(a). As $F_{\hat{\delta}(t)_N}(\hat{\delta}(t)_N)$ seguem uma distribuição

lognormal construída depois dos coeficientes do PEC_C regredidos e usando a técnica de SMC sobre o PEC_C com $N_{SMC/PEC_C} = 5E+04$.

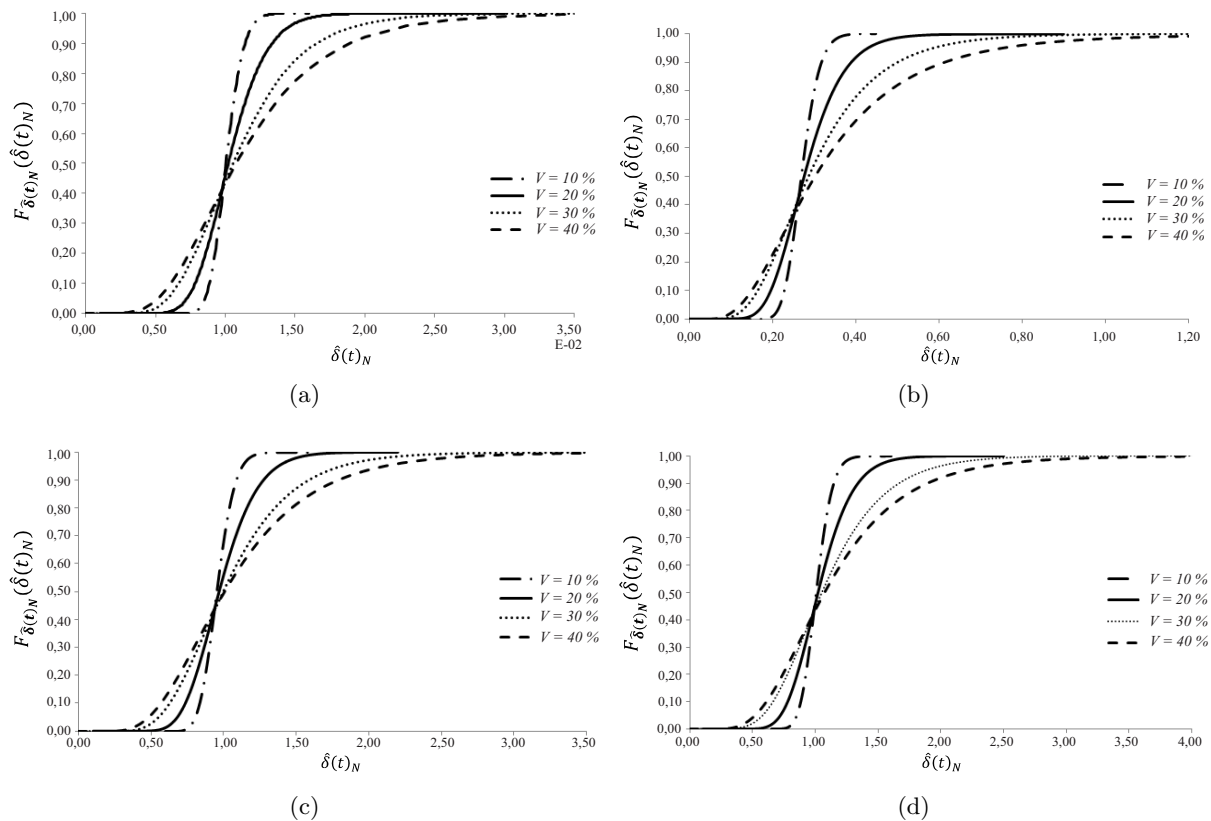


Figura 3.12: Distribuições das $F_{\hat{\delta}(t)_N}(\hat{\delta}(t)_N)$ estimadas por PEC_C , para (a) $t=1E+00$ s, (b) $t=3E+03$ s, (c) $t=3E+04$ s e (d) $t=1E+06$ s. Adaptado de Evangelista-Jr e Afanador (2016).

Os resultados das estatísticas encontradas na $\hat{\delta}(t)_N$, para os diferentes t e V analisados, são apresentado na Tabela 3.19. A μ do $\hat{\delta}(t)_N$ ($\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$) encontra-se nas colunas 3 e 8 da Tabela 3.19, enquanto que o V do $\hat{\delta}(t)_N$, corresponde a $V_{\hat{\delta}(t)_N}$, está localizado nas colunas 4 e 9. Além disso, as colunas 5 e 10 apresentam a distribuição que seguem os dados. Os resultados indicaram que para $t=1E+00$ s a $\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ é invariante com as mudanças do V , enquanto que, há um aumento importante no $V_{\hat{\delta}(t)_N}$ para $V=0,40$ %. Para $t=3E+03$ s as $\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ acrescentam com o aumento do V e o $V_{\hat{\delta}(t)_N}$ aumenta em todas os instantes de t com respeito ao V dado nas VA, chegando até 2,23 vezes maior quando $V=40$ %. Para $t=3E+04$ s e $1E+06$ s os resultados são semelhantes para $\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ e $V_{\hat{\delta}(t)_N}$ para os diferentes V , apresentando-se um ligeiro aumento na $\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ e $V_{\hat{\delta}(t)_N}$. Foi analisado o caso quando $t=3E+03$ s e $\rho_1=1E+04$ s para estudar a influência das VA E_∞ e E_1 na $\hat{\delta}(t)_N$. Observou-se que a $\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ aumenta em forma linear com o aumento do V e só apresenta uma variação importante no $V_{\hat{\delta}(t)_N}$ para $V=40$ %, sendo 1,33 vezes maior a saída que a entrada do modelo.

Os aumentos na $\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ é matematicamente normal, dado que, ao acrescentar o t , o $E(t)$ diminui e por conseguinte, a $\hat{\delta}(t)$ aumenta, mas as variações nos dados de entrada geram $\hat{\delta}(t)_N$ acima das esperadas pela literatura. Uma análise do $V_{\hat{\delta}(t)_N}$ permite concluir que não existe uma relação linear entre os V das VA de entrada (E_∞ , E_1 e ρ_1) e de saída ($\hat{\delta}(t)_N$) e, pelo contrário, ele

Tabela 3.19: Resultados das estatísticas da análise do $\hat{\delta}(t)_N$ usando PEC_C para diferente t e V .

t (s)	V (%)	$\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ (-)	$V_{\hat{\delta}(t)_N}$ (%)	$f_{\hat{\delta}(t)_N}(\hat{\delta}(t)_N)$	t (s)	V (%)	$\mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ (-)	$V_{\hat{\delta}(t)_N}$ (%)	$f_{\hat{\delta}(t)_N}(\hat{\delta}(t)_N)$
1E+00	10	0,01	10	LN	3E+04	10	0,96	10	LN
	20	0,01	21	LN		20	0,99	21	LN
	30	0,01	36	LN		30	1,06	37	LN
	40	0,01	60	LN		40	1,19	59	LN
3E+03	10	0,27	13	LN	1E+06	10	1,01	10	LN
	20	0,29	29	LN		20	1,05	21	LN
	30	0,31	45	LN		30	1,10	35	LN
	40	0,46	89	LN		40	1,24	59	LN
3E+03	10	0,28	10	LN					
$\rho_1 = 1E+04$ s	20	0,30	19	LN					
	30	0,34	32	LN					
	40	0,40	53	LN					

LN, Lognormal; (-) Adimensional.

aumenta significativamente depois do $V \geq 30$ %, e pode se conformar uma relação não linear, e é apresentado na Figura 3.13(a).

Com o uso do PEC_C para cada t analisado, foi possível calcular a $\hat{\delta}(t)_N$ para diferentes V , o que permitiu concluir que para $V \geq 20$ % são esperadas $\hat{\delta}(t)_N$ maiores à estimada para $t=1E+06$ s, apresentadas na Figura 3.13(b). A $\delta(t)$ de referência padrão é denotada por $\delta(t)_{Ref.N} = 1,00$, em que a $\delta(t)_{Ref.N}$ corresponde quando a $\delta(t) = \delta(t)_{Ref.}$. Em geral a $\hat{\delta}(t)_N \geq \delta(t)_{Ref.N}$ para os t e V analisado de acordo com os resultados apresentados na Tabela 3.19 e na Figura 3.13(b).

O $\hat{E}(t)$ em ambientes controlados pode ter variações pequenas ($V \leq 15$ %), mas quando o concreto é produzido no local é possível ter $V \geq 15$ %, visto que os efeitos ambientais podem afetá-lo (temperatura, radiação solar, umidade etc.). É por isto que, resultados como os contidos no presente trabalho tornam-se de especial relevância na previsão das deflexões possíveis em materiais quase frágeis. A técnica PEC_C facilita a análise probabilística de qualquer situação, pois requer um número menor de simulações, comparado com SMC.

O desenvolvimento deste capítulo permitiu verificar a aplicação do PEC_C em casos complexos da engenharia, como: fadiga e viscoelasticidade, diminuindo os custos computacional na estimação da μ , σ e as $f_X(x)$, além de, expressar um problema físico das VA usando PEC_C . Por último, para diminuir ainda mais o tempo computacional, foi desenvolvido um algoritmo que permitirá diminuir o número de coeficientes do PEC_C e será exposto no próximo capítulo.

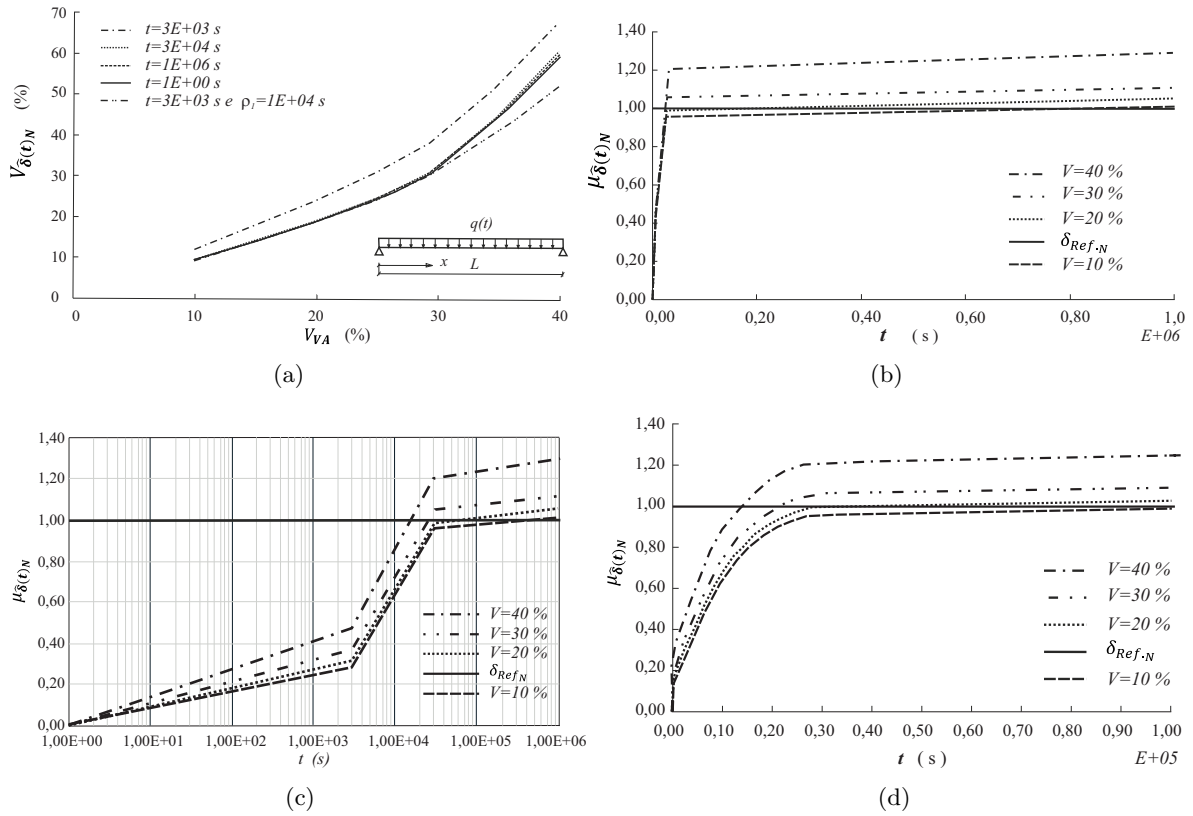


Figura 3.13: Comportamento de $\hat{\delta}(t)_N$; (a) curva do $V_{VA} - V_{\hat{\delta}(t)_N}$, (b) comportamento da $t - \mu_{\hat{\delta}(t)_N}$, em que, a) e b) adaptado de Evangelista-Jr e Afanador (2016), c) curva semilogarítmica do $t - \mu_{\hat{\delta}(t)_N}$ e d) detalhe curva $t - \mu_{\hat{\delta}(t)_N}$, em que $t=0$ até $1,00E+05$ s.

3.3 Contribuições

Uma análise probabilística do N_f sob carregamento constante usando PEC_C requer um espaço amostral menor que aplicando SMC, e portanto menos tempo de processamento, o que torna computacionalmente menos custoso. De igual modo, calcular $\mu_{\hat{N}_f}$ e $\sigma_{\hat{N}_f}$ vai precisar só N simulações (veja-se a Equação 2.8) comparado com N_{SMC} ; dado que eles são função dos coeficientes do PEC_C , conforme as Equações (2.19 e 2.20), o que faz da técnica do PEC_C uma ferramenta computacionalmente importante. Além disso, Foi possível determinar a dispersão do \hat{N}_f e N_f levando em consideração a metodologia de Neuber-Morrow, em que ela acrescenta em quanto que o F_a diminui.

O $\hat{E}(t)$ é definido por meio de um processo aleatório $E(t)$ que segue uma distribuição de probabilidade lognormal, no qual a variação da saída gera na estruturas deflexões importantes não previstas quando as forças são aplicadas à idade precoce. Além disso, as $\hat{\delta}(t)$ para $t \geq 1E + 06$ s (277,77 h) são maiores às previstas pela literatura, considerando modelo viscoelástico pelo caso analisado.

Capítulo 4

Polinômio de expansão de caos adaptativo (PEC_{Adap})

Vários métodos foram revisados no capítulo 2 para construir uma aproximação da resposta do modelo em uma base de PEC_C com n VA e p . No capítulo 3 foram construídos modelos a partir dos pontos de colocação usando as raízes do polinômio de $p+1$ a sequência de Sobol. Seja qual for a abordagem para determinar os coeficientes do PEC_C , intrusiva ou não intrusiva, conforme foi apresentado na seção 2.1.2, o número de funções de base pode ser proibitivamente grande quando o número de VA de entrada aumenta (Webster *et al.*, 1996; Isukapalli *et al.*, 1998).

Neste Capítulo são apresentados as bases teóricas levadas em consideração na estimação de um novo PEC , que leve em conta os componentes principais que permitam obter um polinômio com um número menor de coeficientes e um número menor de pontos amostrais. Como modelos de validação têm-se 3 funções de estado limite definidas por Grooteman (2008) na estimativa de determinar as $f_{\mathbf{X}}(x)$ definidas pelas funções de estado limite, assim como as encontradas usando PEC_C e um novo PEC proposto, PEC_{Adap} . Em seguida, é estabelecida uma comparação do β para a função de estado limite estudada por Kroetz *et al.* (2017) entre diferentes metamodelos propostos, incluindo o PEC_{Adap} . A terceira validação é uma comparação das deflexões de um ponte de concreto para diferentes instantes de tempo, utilizando uma discretização em EF com elementos triangular junto com PEC_C e PEC_{Adap} .

O problema da dimensão foi a motivação para desenvolver um método que diminua o número de coeficientes sem perda de precisão, utilizando os componentes principais do PEC_C , regressão por mínimos quadrados e coeficiente de determinação, R^2 . A metodologia proposta é mais fácil de implementar e permite ter controle do p a ser considerado obrigatório (p_{OB}) no PEC_C , o qual com as outras metodologias não é levado em consideração.

4.1 Componentes principais do PEC_C

A determinação de um PEC_{Adap} apropriado para o modelo de saída, utilizando os componentes principais, é um procedimento iterativo que foi desenvolvido neste trabalho como um aporte ao método, o fluxograma da metodologia utilizada é apresentada na Figura 4.1. A metodologia inicia-se com a definição dos dados de entrada: vetor de μ , σ e n das VA, grau de análise máximo (p_{max}), e o grau de análise obrigatório (p_{OB}). O p_{OB} corresponde ao p dos componentes principais, conforme a Equação 2.6, que serão considerados no PEC_{Adap} . Por exemplo, se $n = 2$, $p_{OB} = 2$ e $p_{max} = 4$ os componentes principais que estariam devido ao p_{OB} no polinômio são: ξ_1 , ξ_2 , $(\xi_1 - 1)^2$ e $(\xi_2 - 1)^2$.

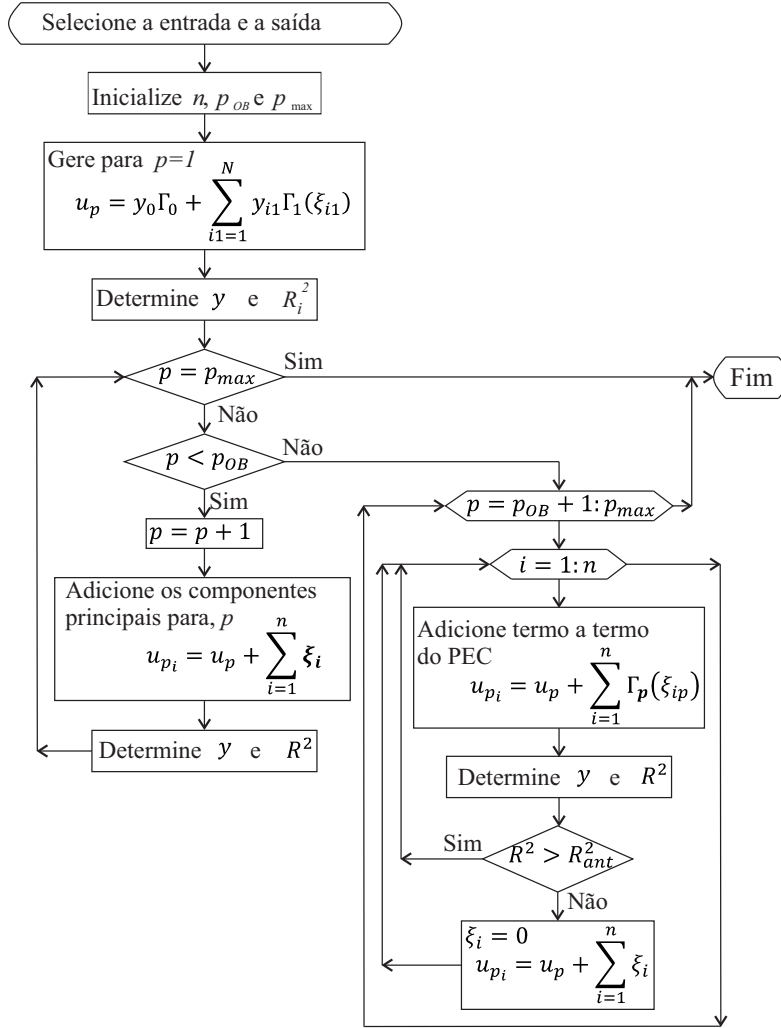


Figura 4.1: Diagrama de fluxo do algoritmo do PEC_{Adap} proposto.

O algoritmo começa com o polinômio de $p = 1$ e determina o vetor de coeficientes do PEC_C , \mathbf{y} , e o R^2 . Posteriormente, se $p < p_{max}$ e $p \leq p_{OB}$, acrescenta-se uma componente principal a mais para cada VA, conforme a Equação (2.6), até que $p = p_{OB}$. Tendo em conta que, para todos os componentes principais acrescentados ao polinômio, é calculado o R^2 , a partir de $p = 1$ até $p =$

p_{OB} , é levado em conta o último R^2 e o PEC_C gerado até esse momento. Para $p_{OB} < p \leq p_{max}$, é acrescentado um componente principal a mais no polinômio por ciclo, calculando o novo y e o R^2 para cada VA e p , se $R_i^2 > R_{i-1}^2 + Tol.$, em que $Tol. = \text{tolerância} = 5E-03$ (assumido) e R_{i-1}^2 é o R^2 do ciclo anterior executado. No caso anterior, se não for cumprido que $R_i^2 > R_{i-1}^2 + Tol.$ o termo acrescentado será desconsiderado, um novo termo será aumentado e novamente é avaliado e comparado o R^2 até que $p = p_{max}$.

A seguir são expostos as funções que faz parte do programa de PEC_C y PEC_{Adap} no ambiente de programação MatLab.

4.1.1 Funções do programa de PEC_C y PEC_{Adap}

Na seguinte tabela são apresentadas as funções que faz parte do programa de PEC_C e PEC_{Adap} realizado no ambiente de programação MatLab, em que a coluna *Função* indica o nome de extensão .m, e a segunda coluna indica que faz cada função dentro do programa.

Tabela 4.1: Funções do programa PEC_C e PEC_{Adap} .

<i>Função(.m)</i>	Faz
<i>leer_parametros</i>	Leia cada uma das variáveis definidas em PECNI.txt
<i>transform</i>	Transforma do espaço da variável ao espaço normal padrão
<i>matriz2</i>	Matriz algoritmo de Sudret (ζ), veja Tabela 2.1
<i>H_eps</i>	Pega ζ e constrói o vetor de funções base do PEC
<i>obtener_Y_A</i>	Determina o vetor de coeficientes do PEC_C , R^2 e o vetor de funções base do PEC_C
<i>A_vector</i>	Determina a matriz A , veja a Equação 2.29 utilizando o PEC_C
<i>he</i>	Polinômios de Hermite até $p = 7$
<i>obtener_Y_A_opt21</i>	Determina o vetor de coeficientes do PEC_{Adap} , R^2 e o vetor de funções base do PEC_{Adap}
<i>A_vector1</i>	Determina a matriz A , veja a Equação 2.29 utilizando o PEC_{Adap}
<i>SMC</i>	Gera números aleatórios no espaço das variáveis
<i>Y_funcao</i>	Define a equação a estimar a p_f e β
<i>new_Amat</i>	Determina a nova matriz A para os números aleatórios gerados na SMC e levados ao espaço normal padrão para determinar $f_{\mathbf{X}}(x)$ de PEC_C e PEC_{Adap}

Na seção seguinte é avaliado o PEC_C com os N termos de truncamento e o PEC_{Adap} com $N_{PEC_{Adap}} < N_{PEC_C}$ para 3 equações dadas. A precisão do PEC_C e PEC_{Adap} será quantificada em função dos resultados usando SMC sobre os PEC_C e PEC_{Adap} obtidos e os erros das $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_C e PEC_{Adap} com respeito à função original.

4.2 Verificação

Com o intuito de validar o algoritmo para encontrar o PEC_{Adap} , serão testadas 3 funções de estado limite definidas por Grooteman (2008) com diferentes níveis de complexidade e 1 função de estado limite utilizada por Kroetz *et al.* (2017).

Exemplo 1

$$y = 2 - x_2 - 0,1x_1^2 + 0,06x_1^3 \quad x_1, x_2 \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.1)$$

A função anterior de estado limite relaciona 2 VA ($n=2$), as quais seguem uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal padrão, ou seja, com $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1,00}$ e é assumido o $p_{max} = 3$ igual ao p máximo da Equação 4.1. O N_{pc} para estabelecer PEC_C , necessário para determinar o N_{PEC_C} , é conforme à Equação (2.6), e o espaço amostral é estabelecido usando sequência de Sobol . A vantagem de usar sequência de Sobol é que o N_{PEC_C} é igual ao N , pois a sequência de Sobol usado no polinômio de Hermite os resultados tendem de forma rápida à μ da função. A sequência de Sobol gera números aleatórios que seguem uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ uniforme que mediante transformação isoprobabilística, conforme a Tabela 2.2, é levada ao espaço normal padrão, espaço usado pelo polinômio de Hermite, conforme foi definido na seção 2.1.

Na Tabela 4.2 são apresentados p , N_{PEC_C} , N_{pc} , N_{SMC} e o N_{SMC/PEC_C} usados na função de estado limite dada na Equação 4.1. O N_{pc} corresponde com o N_{PEC_C} dado que a função não é complexa e não precisa de acrescentar o espaço amostral para estimar a saída. O número de pontos de colocação do PEC_{Adap} , representado por N_{pcAdap} , é determinado depois de definir $p_{max} = 3$, como o p máximo da função, os $p_{OB} = 1, 2, 3$, o R^2 . Na Tabela 4.3 são apresentados os resultados da adaptabilidade dos coeficientes do PEC_{Adap} , definidos como, N_{pcAdap} , r e R^2 , para cada p_{OB} em que, $r = N_{pcAdap}/N_{pc}$ é a relação entre o espaço amostral do PEC_{Adap} e PEC_C .

Tabela 4.2: Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} para quantificar a incerteza da Equação 4.1.

Caso I		
p	(-)	3
N_{PEC_C}	(-)	10
$N_{PEC_{Adap}}$	(-)	7
N_{pc}	(-)	10
N_{pcAdap}	(-)	7
N_{SMC}	(-)	1,00E+06
N_{SMC/PEC_C}	(-)	5,00E+04
(-) Adimensional.		

O $N_{pc} = 10$ apresentado na Tabela 4.2 é calculado para $n = 2$ e $p = 3$, conforme a Equação (2.6), enquanto que o $N_{pcAdap} = 7$, levando em consideração o $p_{OB} = 1$ e 2 , conforme é apresentado nas

colunas 2 e 6 da Tabela 4.3. A função dada no exemplo 1 pode ser representado por um PEC_{Adap} com $N_{pcAdap} = 9$, em que os componentes principais das 2 VA contêm $p=1, 2$ e 3 , os quais são exibidos na coluna 10 da Tabela 4.3. Esta diminuição deve-se ao fato dos termos em falta não contribuírem de forma importante na regressão.

Tabela 4.3: Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_{Adap} do exemplo 1.

$p_{max} = 3; p_{OB} = 1$				$p_{max} = 3; p_{OB} = 2$				$p_{max} = 3; p_{OB} = 3$			
Função base	N_{pcAdap}	r	R^2	Função base	N_{pcAdap}	r	R^2	Função base	N_{pcAdap}	r	R^2
1				1				1			
ξ_2				ξ_2				ξ_2			
ξ_1				ξ_1				ξ_1			
$(\xi_2^2 - 1)$	7	0,70	1,00	$(\xi_2^2 - 1)$	7	0,70	1,00	$(\xi_2^2 - 1)$	9	0,90	0,99
$(\xi_1^2 - 1)$				$(\xi_1^2 - 1)$				$(\xi_1^2 - 1)$			
$(\xi_2^2 - 1)\xi_1$				$(\xi_2^2 - 1)\xi_1$				$(\xi_2^3 - 3\xi_2)$			
$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$				$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$				$(\xi_2^2 - 1)\xi_1$			
								$(\xi_1^2 - 1)\xi_2$			
								$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$			

Na Figura 4.2 foram apresentados os N_{PEC_C} , para $n=2$ e $p=2$, e os $N_{PEC_{Adap}}$ para cada um dos p_{OB} analisados no exemplo 1. Na $N_{PEC_{Adap}}$ que tem menor número de coeficientes e maior R^2 , corresponde aos casos que leva em consideração $p_{max} = 3$ e os $p_{OB} = 1$ e 2 , segundo é apresentado na Tabela 4.3 e na Figura 4.2. A relação $r = 0,30$ indica que o $N_{PEC_{Adap}}$ é $0,70$ vezes menor que o N_{PEC_C} para os $p_{OB} = 1$ e 2 , ou seja, há uma diminuição no número de operações e tempo computacional com respeito ao PEC_C .

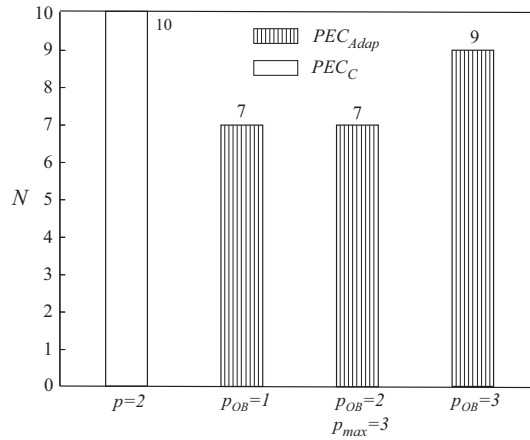


Figura 4.2: Número de coeficientes na adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 1.

A contribuição dos componentes principais das VA para os casos mencionados, PEC_{Adap} e o PEC_C , são apresentados na Figura 4.3. A contribuição dos componentes principais da VA x_1 (ξ_1) é constante para os $p_{OB} = 1, 2$ e 3 , conforme é apresentado na Figura 4.3(a). A VA x_2 (ξ_2) os componentes principais são importantes no grau 1 nos casos analisados e, os componentes principais dos $p=2$ e 3 não têm relevância, como é ilustrado na Figura 4.3(b). Embora o $p_{OB} = 1$ e 2 do PEC_{Adap} apresenta $N_{PEC_{Adap}} = 7$, o polinômio que foi utilizado para estimar a $f_{\mathbf{X}}(x)$ é aquele definido por o $p_{OB} = 1$.

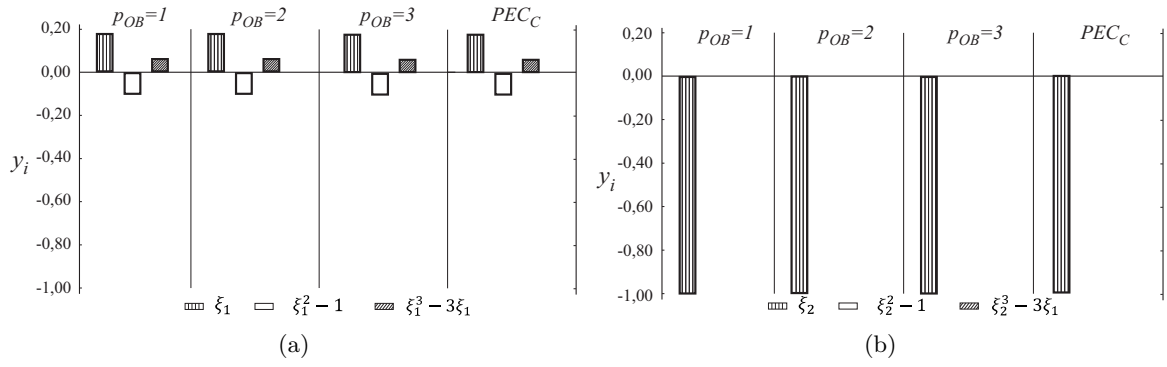


Figura 4.3: Comparação dos componentes principais para $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1, 2$ e 3 , do PEC_{Adap} , e PEC_C do exemplo 1; variáveis (a) ξ_1 e (b) ξ_2 .

A $f_Y(y)$ foi determinada usando SMC em que $N_{SMC} = 1E + 06$, enquanto que $f_Y(y)$ estimada usando PEC_C , $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$, foi estabelecida usando $N_{SMC/PEC_C} = 5E + 04$. Para o $p_{OB} = 1$ e o $N_{SMC/PEC_{Adap}} = 5E + 04$, a $f_Y(y)$ estimada, usando PEC_{Adap} , é $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$. As $f_X(x)$ que melhor definem o comportamento dos resultados usando PEC_C , PEC_{Adap} e a saída (representada por SMC) correspondem à $f_X(x)$ normal. Na Figura 4.4 é apresentada a $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$ como o PEC_C , a $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ é representada pelo PEC_{Adap} , e a $f_Y(y)$ é SMC. As $f_Y(y)$ apresentadas na Figura 4.4 são coincidentes, isto é, que o PEC_C e o PEC_{Adap} representam a saída usando SMC.

Uma análise dos erros das $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$ e a $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ com respeito à $f_Y(y)$ da saída, indica que há uma semelhança nas $f_Y(y)$, as quais seguem uma $f_Y(y)$ normal, levando em consideração o estimador de máxima verosimilhança. O valor dos erros MSE, NRMSE e NMSE entre a $f_Y(y)$ e a $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$ e a $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ tendem a 0 para MSE e 1 para NRMSE e NMSE, indicando que os resultados são similares com respeito aos obtidos usando SMC, mas com um espaço amostral menor. Os valores dos erros MSE, NRMSE e NMSE encontrados entre as $f_Y(y)$ são apresentados na Figura 4.4.

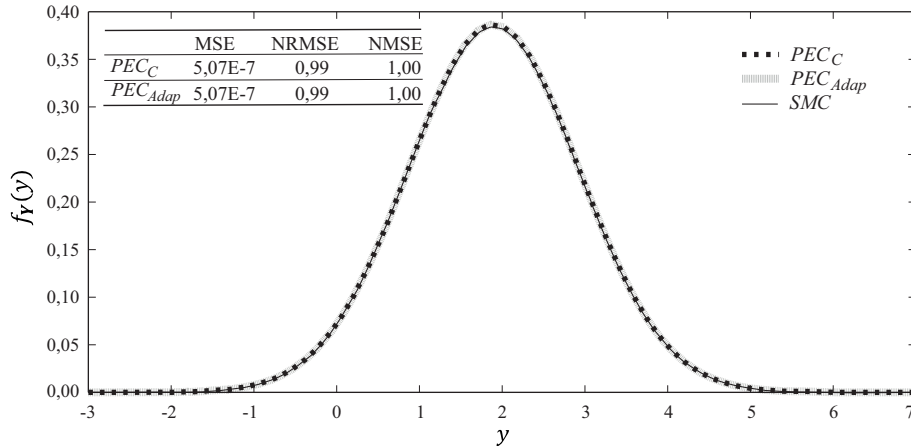


Figura 4.4: Comparação das $f_Y(y)$ da SMC, PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 1.

O PEC podem ser aplicados para diferentes número de VA, no exemplo 2 é abordado a função de estado limite com 10 VA, representada pela Equação 4.2.

Exemplo 2

$$y = 2 + 0,015 \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 \right) - x_{10} \quad x_1, x_2, \dots, x_{10} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.2)$$

A função de estado limite apresentada na Equação 4.2, tem um $p_{max} = 2$ e $n=10$ VA, as quais seguem uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal padrão. Embora a função de estado limite contem VA de $p=2$, é possível avaliar o polinômio para um p diferente ao definido inicialmente e, por isto, serão analisados os PEC para os $p=2$ e 3 nos casos I e II a seguir são apresentados p , N_{PEC_C} , N_{pc_C} , N_{SMC} , N_{SMC/PEC_C} , utilizados no exemplo 2.

Tabela 4.4: Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} para quantificar a incerteza da Equação 4.2.

		Caso I		Caso II
		a	b	
p	(-)	2	2	3
N_{PEC_C}	(-)	66	66	286
$N_{PEC_{Adap}}$	(-)	24	25	22
N_{pc_C}	(-)	66	66	286
$N_{pc_{Adap}}$	(-)	24	25	22
N_{SMC}	(-)	1,00E+06	1,00E+06	1,00E+06
N_{SMC/PEC_C}	(-)	5,00E+04	5,00E+04	5,00E+04

(-) Adimensional.

Na Tabela 4.4 foram apresentados dois casos de análise, com intuito de indagar a contribuição do p na precisão do polinômio. O caso Ia e Ib correspondem ao $p_{OB} = 1$ e $p_{OB} = 2$ com $p_{max} = 2$, e o caso II leva em consideração $p_{OB} = 1$ e $p_{max} = 3$. O N_{pc_C} utilizados foram 66 para $n=10$ e $p=2$, necessários para determinar os N_{PEC_C} no caso I, enquanto que para $n=10$ e $p=3$ o $N_{pc_C} = 286$ no caso II, o N_{pc_C} acrescenta. Os resultados da avaliação do algoritmo do PEC_{Adap} , aplicado na função de estado limite definida na Equação 4.2, é apresentada na Tabela 4.5.

O $N_{pc_{Adap}}$ foi determinado depois de definir $p_{max} = 2$ para $p_{OB} = 1$ como o caso Ia e $p_{OB} = 2$ como o caso Ib, além disso o caso II é definido $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1$ com o objetivo de avaliar a r e o R^2 . Para $p_{max} = 2$ são necessários $N_{pc_{Adap}} = 24$ e 25 pontos para $p_{OB} = 1$ e 2 respectivamente, enquanto que o para $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1$ o $N_{pc_{Adap}} = 22$, como apresentado na Tabela 4.5. Para o caso Ia, $p_{max} = 2$ e $p_{OB} = 1$ apresenta um R^2 maior com respeito ao $p_{OB} = 2$, pois só leva em consideração os componentes principais de $p=1$, e para o $p=2$ fica com liberdade para ter em conta ou não as funções base de $p = 2$ e produtos cruzados que permita ter um $R^2 > R_{ant}^2 + tol$. Dado que, os R^2 para os casos Ia e Ib apresentam $R^2 = 0,92$ e $0,84$ respectivamente, foi preciso pesquisar se a metodologia PEC_{Adap} proposto consegue melhorar a regressão. No caso II, é estabelecido o $p_{max} = 3$ e $p_{OB} = 1$ com um $N_{pc_{Adap}} = 22$ obtendo um $R^2 = 1,00$ conforme é apresentado nas colunas 10 e 12 da Tabela 4.5. Isto permitiu obter uma melhor regressão, dado que tem maior quantidade de pontos amostrais e coeficientes. Foi possível obter um $N_{pc_{Adap}}$ menor aos encontrados nos casos Ia e Ib, e deve-se ao fato que tem maior quantidade de funções

Tabela 4.5: Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_{Adap} do exemplo 2.

Caso Ia				Caso Ib				Caso II			
$p_{max} = 2; p_{OB} = 1$				$p_{max} = 2; p_{OB} = 2$				$p_{max} = 3; p_{OB} = 1$			
Função base	$N_{pecAdap}$	r	R^2	Função base	$N_{pecAdap}$	r	R^2	Função base	$N_{pecAdap}$	r	R^2
1				1				1			
ξ_{10}				ξ_{10}				ξ_{10}			
ξ_9				ξ_9				ξ_9			
ξ_8				ξ_8				ξ_8			
ξ_7				ξ_7				ξ_7			
ξ_6				ξ_6				ξ_6			
ξ_5				ξ_5				ξ_5			
ξ_4				ξ_4				ξ_4			
ξ_3				ξ_3				ξ_3			
ξ_2				ξ_2				ξ_2			
ξ_1				ξ_1				ξ_1			
$(\xi_{10}^2 - 1)$	24	0,36	0,92	$(\xi_{10}^2 - 1)$	25	0,38	0,84	$\xi_3 \xi_9$	22	0,08	1,00
$\xi_9 \xi_{10}$				$\xi_9 \xi_{10}$				$(\xi_7^2 - 1) \xi_{10}$			
$\xi_8 \xi_{10}$				$(\xi_9^2 - 1)$				$\xi_6 \xi_9 \xi_{10}$			
$(\xi_8^2 - 1)$				$\xi_8 \xi_9$				$(\xi_8^2 - 1) \xi_9$			
$\xi_7 \xi_8$				$(\xi_8^2 - 1)$				$\xi_5 \xi_7 \xi_9$			
$\xi_6 \xi_8$				$\xi_7 \xi_{10}$				$\xi_5 \xi_6 \xi_8$			
$\xi_5 \xi_9$				$\xi_7 \xi_8$				$(\xi_5^2 - 1) \xi_8$			
$\xi_5 \xi_8$				$(\xi_7^2 - 1)$				$\xi_4 \xi_6 \xi_{10}$			
$\xi_3 \xi_4$				$(\xi_6^2 - 1)$				$\xi_1 \xi_4 \xi_{10}$			
$\xi_2 \xi_8$				$(\xi_5^2 - 1)$				$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$			
$\xi_2 \xi_4$				$(\xi_4^2 - 1)$							
$\xi_1 \xi_2$				$(\xi_3^2 - 1)$							
$(\xi_1^2 - 1)$				$(\xi_2^2 - 1)$							
				$(\xi_1^2 - 1)$							

base para avaliar a contribuição de cada um dos termos. Na Figura 4.5 é apresentado o N_{PEC_C} , conforme a Equação (2.6) para $p = 2$ e 3 , e o $N_{PEC_{Adap}}$ para $p_{max} = 2$ com $p_{OB} = 1, 2$ e para $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1$, de acordo com os resultados apresentados na Tabela 4.5. Na análise

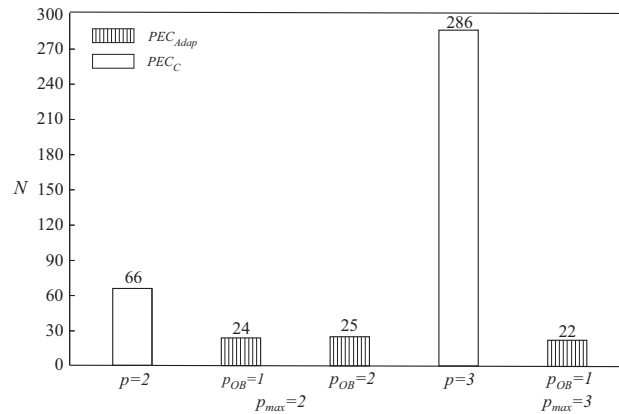


Figura 4.5: Número de coeficientes na adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 2.

dos $N_{PEC_{Adap}}$ que tem menor número de coeficientes e maior R^2 , corresponde ao caso $p_{max} = 3$ e o $p_{OB} = 1$, e representa $0,08$ dos N_{PEC_C} , para $n=10$ e $p=3$, e também ao usado por o PEC_C com $p = 2$. Essa é a vantagem desse algoritmo que permite ter um menor número de operações e tempo computacional que outras metodologias, tipo SMC ou PEC_C . Na Figura 4.6 estão as contribuições das componentes principais para os casos acima mencionados (PEC_{Adap} e o PEC_C).

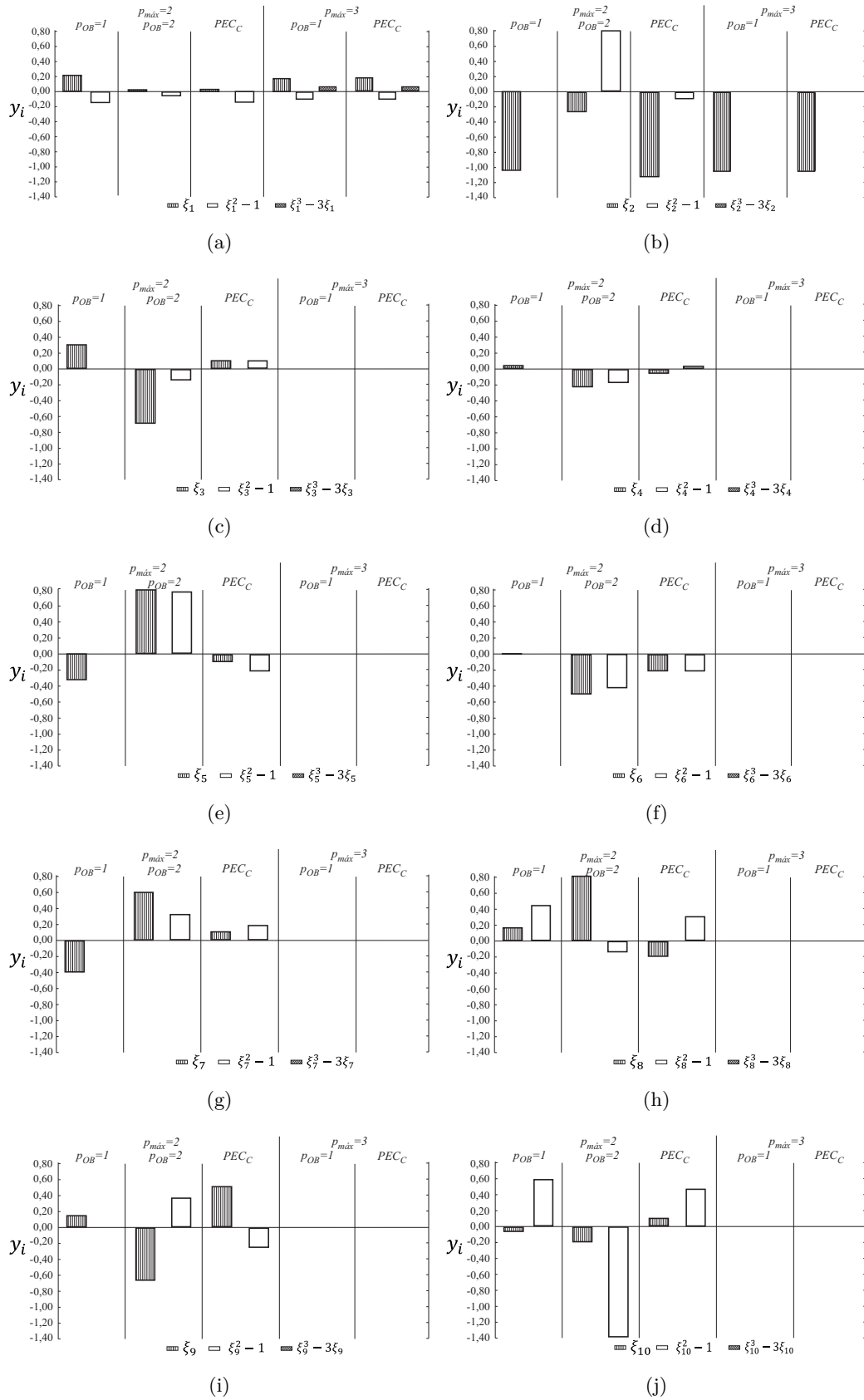


Figura 4.6: Comparação dos componentes principais para $p_{max} = 2$ com $p_{OB} = 1$ e 2 , e $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1$, do PEC_{Adap} e PEC_C do exemplo 2; variáveis (a) ξ_1 , (b) ξ_2 , (c) ξ_3 , (d) ξ_4 , (e) ξ_5 , (f) ξ_6 , (g) ξ_7 , (h) ξ_8 , (i) ξ_9 e (j) ξ_{10} .

O algoritmo de PEC_{Adap} aplicado ao exemplo 2 permite obter um PEC_{Adap} com número menor de coeficientes que um PEC_C com uma precisão similar, determinando quais variáveis não são relevantes. As VA 3 até 10 não contribuem em melhorar a precisão do PEC_{Adap} para caso II com $p_{max} = 3$ e $p_{OB} = 1$, veja as Figuras 4.6c-j. No PEC_C a VA 1 participa nos $p = 1, 2$ e 3, enquanto que a VA 2 só no $p = 1$, as outras VA tendem a zero ($\approx 1E-15$), veja o anexo I, Tabela A.I.1.

A $f_Y(y)$ foi determinada usando SMC, em que $N_{SMC} = 1E + 06$, enquanto que $f_Y(y)$ estimada usando PEC_C ($f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$), foi estabelecida usando $N_{SMC/PEC_C} = 5E + 04$. Para o caso II com $p_{max} = 3$ e $p_{OB} = 1$ o $N_{SMC/PEC_{Adap}} = 5E + 04$ para determinar a $f_Y(y)$ estimada usando PEC_{Adap} , $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$. As $f_Y(y)$ que melhor definem o comportamento dos resultados usando PEC_C , PEC_{Adap} e a saída (representada por SMC) correspondem à $f_Y(y)$ normal. Na Figura 4.7 é apresentada a $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$ como o PEC_C , a $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ é representada pelo PEC_{Adap} , e a $f_Y(y)$ é SMC. As $f_Y(y)$ apresentadas na Figura 4.7 são coincidentes, isto é, o PEC_C e o PEC_{Adap} representam a saída SMC.

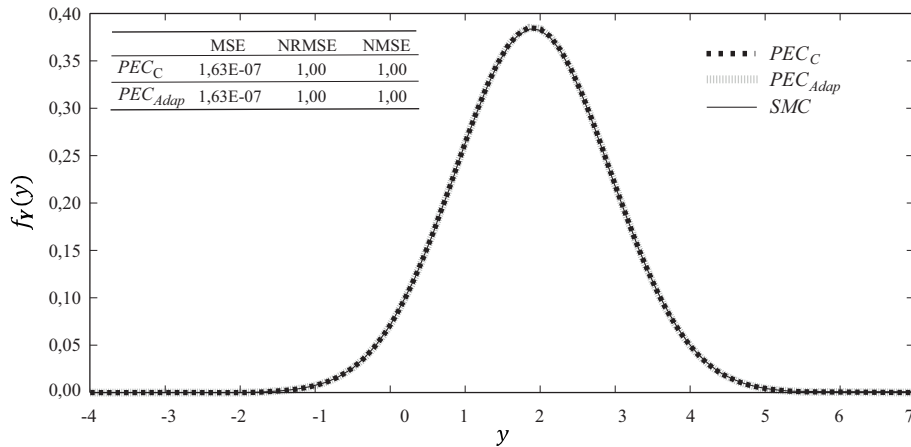


Figura 4.7: Comparação das $f_Y(y)$ da SMC, PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 2.

Uma análise dos erros das $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$ e a $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ com respeito à $f_Y(y)$ da saída, indica que há uma semelhança nas $f_Y(y)$, as quais seguem uma $f_Y(y)$ normal, levando em consideração o estimador de máxima verosimilhança. O valor dos erros MSE, NRMSE e NMSE entre a $f_Y(y)$ e as $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$ e $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$, tendem a 0 para MSE e 1 para NRMSE e NMSE, indicando que as $f_Y(y)$ são similares com respeito aos obtidos usando SMC sobre a função, mas com um espaço amostral menor. Os valores dos erros MSE, NRMSE e NMSE encontrados entre as $f_Y(y)$ são apresentados na Figura 4.7.

Em seguida, o algoritmo do PEC_{Adap} é aplicado ao Exemplo 3, expressão complexa pois envolve uma função periódica, dado que não é possível definir de forma direta o p do PEC, sendo preciso testar até conseguir o melhor R^2 .

Exemplo 3

$$y = \text{sen}(\pi x_1) x_2 + (x_3 + x_4)^2 - \frac{x_5}{\sqrt{2}} \quad x_1, x_2, \dots, x_5 \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.3)$$

O exemplo 3 é uma função de $n=5$ VA, as quais seguem uma $f_Y(y)$ normal padrão, com p não definido dado que a função seno é uma função periódica, para o qual será suposto o $p_{max} = 3$ com $1 \leq p_{OB} \leq 3$. O N_{pcC} utilizados foram 56, necessários para determinar o N_{PEC_C} com $n=5$ e $p=3$ a Tabela 4.6 são apresentados p , N_{PEC_C} , $N_{PEC_{Adap}}$, N_{pcC} , $N_{pc_{Adap}}$, N_{SMC} , N_{SMC/PEC_C} usados no exemplo 3. Na aplicação do algoritmo do PEC_{Adap} , define o $N_{pc_{Adap}}$ para a função de estado limite do exemplo 3, depois de definir $p_{max} = 3$ como o p máximo da função e $1 \leq p_{OB} \leq 3$ para avaliar a r e o R^2 . A seguir são apresentados os resultados do algoritmo, como: a função base do PEC_{Adap} , N_{pcC} , r e R^2 para cada espaço amostral analisado.

Tabela 4.6: Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} junto com N_{SMC} e N_{SMC/PEC_C} , para quantificar a incerteza no exemplo 3.

		$p_{max} = 3$		
		$p_{OB} = 1$	$p_{OB} = 2$	$p_{OB} = 3$
p	(-)	3	3	3
N_{PEC_C}	(-)	56	56	56
$N_{PEC_{Adap}}$	(-)	12	18	18
N_{pcC}	(-)	56	56	56
$N_{pc_{Adap}}$	(-)	12	18	18
N_{SMC}	(-)	1,00E+06	1,00E+06	1,00E+06
N_{SMC/PEC_C}	(-)	5,00E+04	5,00E+04	5,00E+04

(-) Adimensional.

Na Tabela 4.7 são apresentados os resultados do algoritmo, como: a função base do PEC_{Adap} , N_{pcC} , r e R^2 para cada analisado, da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC para o exemplo 3. O PEC_{Adap} pode ser representado por $N_{pc_{Adap}} = 12, 18$ e 18 para os $p_{OB} = 1, 2$ e 3 , além disso, para os $p_{OB} = 2$ e 3 apresenta um $N_{pc_{Adap}} = 18$, $r=0,32$ e $R^2 = 1,00$, conforme é apresentado nas colunas 6, 7, 8, 10, 11 e 12 da Tabela 4.7. Nos 3 p_{OB} analisados apresentam produtos cruzados (para $p=2$ e 3), indicando a importância destes graus na determinação do PEC_{Adap} , junto com as variáveis ξ_1, ξ_4, ξ_5 . Para o $p_{OB} = 1$ proposto utiliza-se só 0,21 do N_{pcC} , tendo um coeficiente de determinação que atinge 1,00, referido na coluna 4 da Tabela 4.7, em que os componentes principais das VA normal padrão ξ_2 e ξ_1 de $p=2$, e a VA padrão ξ_1 de $p=3$ tem participação no PEC_{Adap} . Na Figura 4.8 são apresentados os N_{PEC_C} para o $p=2$ e os $N_{PEC_{Adap}}$ para cada p_{OB} analisados no exemplo 3.

Tabela 4.7: Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC do exemplo 3.

$p_{max} = 3; p_{OB} = 1$				$p_{max} = 3; p_{OB} = 2$				$p_{max} = 3; p_{OB} = 3$			
Função base	N_{pcAdap}	r	R^2	Função base	N_{pcAdap}	r	R^2	Função base	N_{pcAdap}	r	R^2
1				1				1			
ξ_5				ξ_5				ξ_5			
ξ_4				ξ_4				ξ_4			
ξ_3				ξ_3				ξ_3			
ξ_2				ξ_2				ξ_2			
ξ_1				ξ_1				ξ_1			
$(\xi_2^2 - 1)$				$(\xi_5^2 - 1)$				$(\xi_5^2 - 1)$			
$\xi_4 \xi_1$				$(\xi_4^2 - 1)$				$(\xi_4^2 - 1)$			
$(\xi_1^2 - 1)$	12	0,21	1,00	$(\xi_3^2 - 1)$	18	0,32	1,00	$(\xi_3^2 - 1)$	18	0,32	1,00
$\xi_1 (\xi_4^2 - 1)$				$(\xi_2^2 - 1)$				$(\xi_2^2 - 1)$			
$\xi_5 (\xi_1^2 - 1)$				$\xi_1 \xi_5$				$\xi_1 \xi_5$			
$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$				$\xi_1 \xi_4$				$\xi_1 \xi_4$			
				$(\xi_1^2 - 1)$				$(\xi_1^2 - 1)$			
				$\xi_3 (\xi_5^2 - 1)$				$(\xi_5^3 - 3\xi_5)$			
				$\xi_4 (\xi_3^2 - 1)$				$(\xi_4^3 - 3\xi_4)$			
				$\xi_5 (\xi_2^2 - 1)$				$(\xi_3^3 - 3\xi_3)$			
				$\xi_4 (\xi_2^2 - 1)$				$(\xi_3^2 - 3\xi_2)$			
				$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$				$(\xi_1^3 - 3\xi_1)$			

Na análise dos N_{PEC_C} e $N_{PEC_{Adap}}$ que têm menor número de coeficientes e maior R^2 , corresponde ao caso que leva em consideração $p_{max} = 3$ e o $p_{OB} = 1$, e representa 0,21 dos N_{PEC_C} , para um polinômio com $n=5$ e $p=3$, apresentados na Tabela 4.7 e na Figura 4.8. Na Figura 4.9, é apresentado a contribuição dos componentes principais das VA para os casos analisados, levando em conta o PEC_{Adap} e o PEC_C .

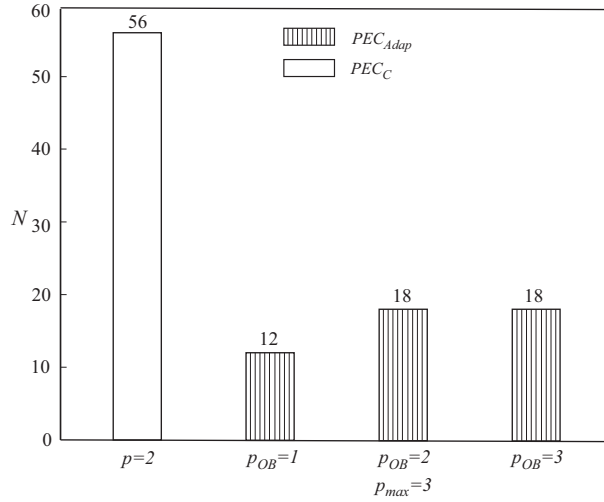


Figura 4.8: Número de coeficientes na adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 3.

Os componentes principais das VA normais padrão ξ_3 , ξ_4 e ξ_5 não participam na construção do PEC_{Adap} para $p_{max} = 3$ e $1 \leq p_{OB} \leq 3$, conforme é apresentado nas Figuras 4.9c. No PEC_C os componentes principais das variáveis ξ_3 , ξ_4 e ξ_5 tem participação porém baixa (do ordem de $1,0E - 15$).

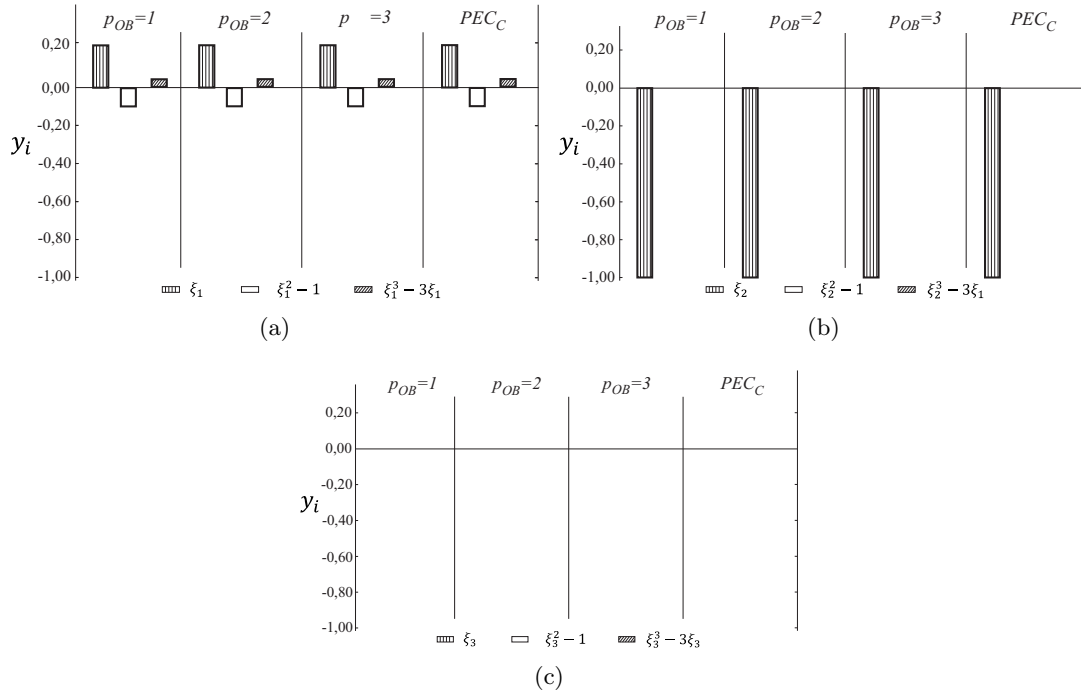


Figura 4.9: Comparação dos componentes principais para $p_{max} = 3$ com $p_{OB} = 1, 2$ e 3 do PEC_{Adap} e PEC_C do exemplo 3; variáveis (a) ξ_1 , (b) ξ_2 e (c) ξ_3, ξ_4 e ξ_5 .

A $f_Y(y)$ da função de estado limite definida na Equação (4.3) foi determinada usando SMC, em que $N_{SMC} = 1E+06$, enquanto que $f_Y(y)$ estimada usando PEC_C , $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$, foi estabelecida usando $N_{SMC}/PEC_C = 5E+04$. Para o $p_{max} = 3$ e $p_{OB} = 1$, o $N_{SMC}/PEC_{Adap} = 5E+04$ para determinar a $f_Y(y)$ estimada usando PEC_{Adap} , $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$. As $f_Y(y)$ que melhor definem o comportamento dos resultados, usando PEC_C , PEC_{Adap} e a saída (representada por SMC) correspondem à $f_Y(y)$ normal. Na Figura 4.2, é apresentada a $f_{\hat{Y}_C}(\hat{y}_C)$ como o PEC_C , a $f_{\hat{Y}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ é representada pelo PEC_{Adap} , e a $f_Y(y)$ é SMC. As $F_Y(y)$ e $f_Y(y)$ apresentadas na Figura 4.10 são coincidentes, isto é, que o PEC_C e o PEC_{Adap} representam a saída SMC.

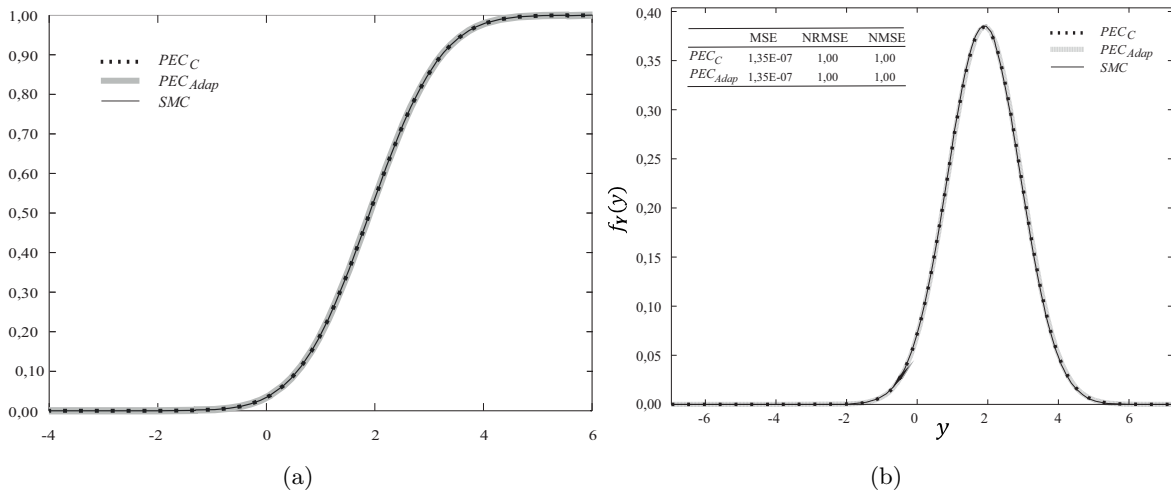


Figura 4.10: Comparação das a) $f_Y(y)$ e b) $F_Y(y)$ da SMC, PEC_C e PEC_{Adap} do exemplo 3.

Os valores dos erros MSE, NRMSE e NMSE encontrados entre as $f_{\mathbf{Y}}(y)$ são apresentados na Figura 4.2. Uma análise dos erro das $f_{\hat{\mathbf{Y}}_C}(\hat{y}_C)$ e a $f_{\hat{\mathbf{Y}}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ com respeito à $f_{\mathbf{Y}}(y)$ da saída, indica que há uma semelhança nas $f_{\mathbf{Y}}(y)$, as quais seguem uma $f_{\mathbf{Y}}(y)$ normal, levando em consideração o estimador de máxima verosimilhança. O valor dos erros MSE, NRMSE e NMSE entre a $f_{\mathbf{Y}}(y)$ e a $f_{\hat{\mathbf{Y}}_C}(\hat{y}_C)$ e a $f_{\hat{\mathbf{Y}}_{Adap}}(\hat{y}_{Adap})$ tendem a 0 para MSE e 1 para NRMSE e NMSE, indicando que as $f_{\mathbf{Y}}(y)$ são similares com respeito aos obtidos usando SMC sobre a função, mas com um espaço amostral menor.

Exemplo 4

$$y = e^{(0,2x_1+1,4)} - x_2 \quad x_1, x_2 \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.4)$$

O exemplo 4 é uma função de $n=2$ VA, as quais seguem uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal padrão; com p não definido dado que a função "e" é uma função exponencial, para o qual será suposto um $p = 2$ (caso I) e $p = 3$ (caso II) para o PEC_C e o PEC_{Adap} com $p_{max} = 2$ e 3, respectivamente.

A função de estado limite, definida pela Equação (4.4), foi avaliado o índice de confiabilidade (β) no trabalho publicado por Kroetz *et al.* (2017). Neste trabalho foram construídos, metamodelos usando redes neuronais artificiais, em inglês Artificial Neural Networks (ANN), PEC e Kriging para encontrar o β . Para estabelecer o índice de confiabilidade de referencia (β_{Ref}) na Equação (4.4) foi utilizando SMC com $N_{SMC} = 1E + 06$. Os resultados do β obtido do metamodelos de ANN, PEC e Kriging, assim como o número de pontos amostrais utilizados por Kroetz *et al.* (2017), são apresentados na Tabela 4.8, junto com os resultados obtidos nesta tese (PEC_C e PEC_{Adap}).

Tabela 4.8: Comparação dos resultados obtidos utilizando diferentes metamodelos, no cálculo do β e o número de pontos amostrais do exemplo 4.

		Kroetz <i>et al.</i> (2017)	Tese	
			PEC_C	PEC_{Adap}
$p = 2$	(-)	ANN = 3, 29(6)	3,29(6)	3,43(5)
		PEC = 3, 29(6)		
		Kriging = 3, 29(6)		
$p = 3$	(-)		3,34(10)	3,36(8)
$p = 4$	(-)	ANN = 3, 35(15)	3,36(15)	3,36 (6)
		PEC = 3, 36(15)		
		Kriging = 3, 36(15)		
β_{Ref}		3,36		
(-) Adimensional.				

Os resultados da comparação, entre os diferentes metamodelos usados no exemplo 4, indicaram que o PEC_{Adap} converge mais rápido que PEC_C , ANN e Kriging para estimar o β neste exemplo.

No PEC_{Adap} usou para $p_{max} = 2$, $p_{OB} = 2$, $N_{pcAdap} = 5$ e um polinômio de $N_{PECAdap} = 5$, menor que os outros metamodelos que usaram 6 pontos amostrais. Para $p_{max} = 3$ o melhor resultado obtido foi com $p_{OB} = 2$, $N_{pcAdap} = 8$ e um polinômio de $N_{PECAdap} = 8$ e alcançou o $\beta = 3,36$, enquanto que para $p_{max} = 4$ com um $p_{OB} = 1$, $N_{pcAdap} = 6$ e um polinômio de $N_{PECAdap} = 6$ e o $\beta = 3,36$. Na análise do β foram realizadas $N_{SMC/PEC_C} = N_{SMC/PEC_{Adap}} = 1E + 06$, usados no exemplo 4, igual ao trabalho de Kroetz *et al.* (2017).

4.3 Aplicação do PEC_{Adap} na deflexão da ponte Koror-Babeldaob com envelhecimento do concreto

A técnica do PEC foi aplicada na análise de deflexões na ponte Koror-Babeldaob (KB) que comunica as ilhas de Koror e Babeldaob na República de Palau, apresentada na Figura 4.11. Esta ponte entrou em colapso 19 anos depois de ter sido construída devido a deformações excessivas, tendo sido objeto de pesquisas e trabalhos publicados (Burgoyne e Scantlebury, 2006; Bažant *et al.*, 2010; Bažant *et al.*, 2012a; Bažant *et al.*, 2012b). O comprimento dos vãos, as condições de apoio, a geometria e as propriedades do material, levadas em consideração neste trabalho, são as dadas por Bažant *et al.* (2012a) e Bažant *et al.* (2012b).



Figura 4.11: Ponte Koror-Babeldaob (Bažant *et al.*, 2010).

O modelo numérico, necessário para definir a deflexão dependente do tempo, $\delta(t)$, para o PEC , encontrado na modelagem de elementos finitos definido por Araújo *et al.* (2017). Na Figura 4.12 é apresentado o modelo de EF, o qual usaram um elemento tridimensional tetraédrico quadrático com 10 nós ($C2D10$), gerando automaticamente a malha no Abaqus. A verificação da malha de EF foi realizada para diferentes quantidades de elementos e a partir desses teste feitos optou-se por utilizar uma malha de 12.416 elementos, aproveitando a simetria da ponte Araújo *et al.* (2017).

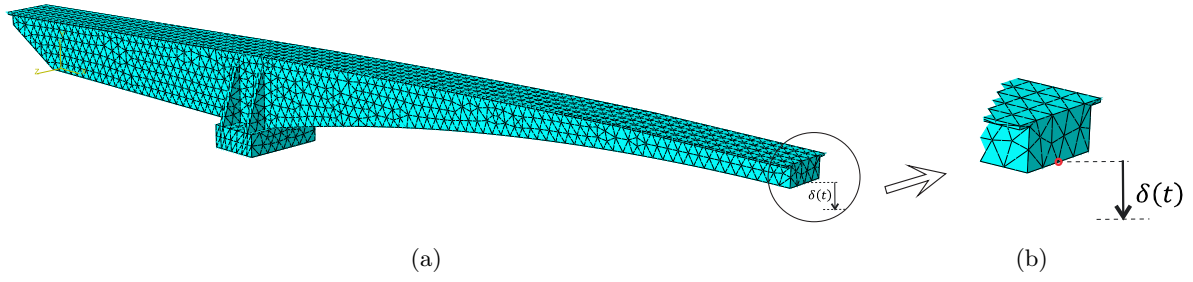


Figura 4.12: Modelo da metade da ponte KB, a) Modelo de elementos finitos (Araújo *et al.*, 2017) e b) detalhe do meio do vão em que as deflexões serão simuladas.

Análise das deflexões

Na análise da $\delta(t)$ no meio do vão central da ponte KB, foram levados em consideração 9 VA, com os vetores da μ e σ necessários para determinar o PEC tendo em conta o processo de envelhecimento do concreto, na qual as VA, μ e σ são apresentadas na Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Variáveis aleatórias levadas em consideração no modelo numérico.

	E_∞ (MPa)	E_1 (MPa)	E_2 (MPa)	ρ_1 (-)	ρ_2 (-)	β_1 (-)	β_2 (-)	ω_1 (-)	ω_2 (-)
μ	26,50E+06	9,69E+06	19,60E+06	1,85	126,80	3,211	3,789	16,55	1,147
V (%)	20,00	18,00	21,10	39,30	16,30	20,00	18,00	18,60	20,70

(-) Adimensional

As estatísticas das VA utilizadas no algoritmo do PEC usadas na previsão da $\delta(t)$, em que as VA foram definidas na seção 2.3.1 e levam em consideração o material como variável aleatória. Na análise dos resultados da modelagem em EF da $\delta(t)$ estimada ($\hat{\delta}(t)$) foram necessários definir a ordem do polinômio, o N_{pcc} , e o número de simulações em EF (SEF) necessárias para determinar a $\hat{\delta}(t)$, e estes são apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10: Número de pontos de colocação e N_{PECC} junto com N_{SMC} e $N_{SMC/PECC}$, utilizados na análise da ponte KB, para $t' = 7$ d e $t_e = 7$ d, 28 d e 1.000 d.

		t_e (d)		
		7	28	1.000
p	(-)	2	2	2
N_{PECC}	(-)	55	55	55
$N_{PECCAdap}$	(-)	21	21	25
N_{pcc}	(-)	110	110	110
$N_{pccAdap}$	(-)	21	21	25
N_{SEF}	(-)	110	110	110
$N_{SMC/PECC}$	(-)	5,0E+04	5,0E+04	5,0E+04

(-) Adimensional.

Na Tabela 4.10 são definidos o p , N_{pcc} , N_{PECC} , N_{SEF} e $N_{SMC/PECC}$ iguais para os $t_e = 7$ d, 28

d e 1.000 d. A dimensão do problema é $n = 9$, e é levado em consideração o $p = 2$ (assumido) como o p do polinômio, para o qual corresponde a um $N_{pcC} = 55$, conforme a Equação 2.8, mas para obter uma melhor regressão serão gerado $2N$. O espaço amostral terá $N_{pcC} = 110$ gerados utilizando a sequência de Sobol, os quais são o *input* do modelo de EF e cuja saída são os $\hat{\delta}(t)$, e correspondem a $N_{SEF} = 110$, além disso o $N_{PEC_C} = 55$ e o $N_{SMC/PEC_C} = 5,0E+04$, como é indicado na Tabela 4.10.

Na Tabela 4.11 são dados os resultados das regressões para os diferentes t_e , e é levado em consideração o $p_{max} = 2$. Aplicando o algoritmo do PEC_{Adap} , o melhor PEC_{Adap} encontrado para $t_e = 7$ d foi aquele que usou $p_{OB} = 2$, segundo o R^2 maior encontrado. Entretanto o $p_{OB} = 1$ para $t_e = 27$ d e 1.000 d foi aquele que apresentou melhores resultados, e estes são apresentados na Tabela 4.11. O N_{pcAdap} é significativamente menor ao utilizado para o N_{pcC} , pois só utiliza uma fração de 0,19 do N_{pcC} para $t_e = 7$ e 28 d. Entretanto para $t_e = 1.000$ d precisa-se de uma fração de 0,23 do N_{pcC} . O $N_{PEC_{Adap}} = 21$ para $t_e = 7$ d e 28 d, no entanto, para $t_e = 1.000$ d é necessário $N_{PEC_{Adap}} = 25$, em comparação com o $N_{PEC_C} = 55$.

Tabela 4.11: Resultados da adaptabilidade no cálculo dos coeficientes do PEC_{Adap} para a análise das $\hat{\delta}(t)$ da ponte KB com diferentes t_e (d).

$t_e = 7$				$t_e = 28$				$t_e = 1.000$			
$p_{max} = 2; p_{OB} = 2$				$p_{max} = 2; p_{OB} = 1$				$p_{max} = 2; p_{OB} = 1$			
PEC_{Adap}	N_{pcAdap}	r	R^2	PEC_{Adap}	N_{pcAdap}	r	R^2	PEC_{Adap}	N_{pcAdap}	r	R^2
1				1				1			
ξ_9				ξ_9				ξ_9			
ξ_8				ξ_8				ξ_8			
ξ_7				ξ_7				ξ_7			
ξ_6				ξ_6				ξ_6			
ξ_5				ξ_5				ξ_5			
ξ_4				ξ_4				ξ_4			
ξ_3				ξ_3				ξ_3			
ξ_2				ξ_2				ξ_2			
ξ_1				ξ_1				ξ_1			
$(\xi_9^2 - 1)$	21	0,19	0,80	$(\xi_9^2 - 1)$	21	0,19	0,91	$(\xi_9^2 - 1)$	25	0,23	0,72
$(\xi_8^2 - 1)$				$(\xi_7^2 - 1)$				$\xi_8\xi_9$			
$(\xi_7^2 - 1)$				$\xi_6\xi_9$				$\xi_6\xi_8$			
$\xi_6\xi_9$				$\xi_6\xi_8$				$\xi_6\xi_7$			
$\xi_6\xi_8$				$\xi_4\xi_8$				$(\xi_6^2 - 1)$			
$(\xi_6^2 - 1)$				$\xi_3\xi_9$				$\xi_5\xi_7$			
$(\xi_5^2 - 1)$				$\xi_2\xi_7$				$\xi_5\xi_6$			
$(\xi_4^2 - 1)$				$\xi_2\xi_6$				$\xi_3\xi_7$			
$(\xi_3^2 - 1)$				$(\xi_2^2 - 1)$				$\xi_2\xi_8$			
$(\xi_2^2 - 1)$				$\xi_1\xi_3$				$\xi_2\xi_7$			
$(\xi_1^2 - 1)$				$(\xi_1^2 - 1)$				$\xi_2\xi_6$			
								$\xi_2\xi_4$			
								$\xi_1\xi_7$			
								$\xi_1\xi_6$			
								$(\xi_1^2 - 1)$			

Na Figura 4.13 são apresentados os N_{PEC_C} para $p = 2$ e os $N_{PEC_{Adap}}$ com $p_{max} = 2$ e $1 \leq p_{OB} \leq 2$, para cada t_e analisados na $\hat{\delta}(t)$ da ponte KB.

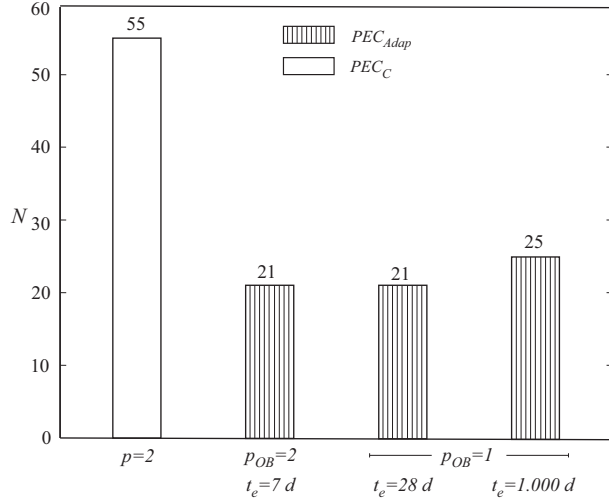


Figura 4.13: Número de coeficientes na adaptabilidade do cálculo dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} com $p_{max} = 2$ para a ponte KB.

Na análise dos N_{PEC_C} e $N_{PEC_{Adap}}$ que tem menor número de coeficientes e maior R^2 , são apresentados na Figura 4.13 e na Tabela 4.11, para $p_{max} = 2$ e o $p_{OB} = 1$ para $t_e = 7 d$ e $p_{OB} = 2$ para $t_e = 28 d$ e $1.000 d$. Como um exemplo, é apresentado na Figura 4.14 uma análise dos componentes principais do PEC_{Adap} e do PEC_C encontrado para as $\hat{\delta}(t)$ para $t' = 7 d$ e $t_e = 7 d$. Os componentes principais para $p = 1$ do PEC_C e PEC_{Adap} , nas VA normal padrão estão presentes em 8 das 9 VA, com exceção da variável ξ_5 , pois a participação no PEC_C tende a zero. Os componentes principais do PEC_C para $p = 2$ tende a zero com exceção da variável ξ_9 , entretanto, os componentes principais do PEC_{Adap} da variável ξ_6 tende a zero. A participação dos componentes principais para os $p = 1$ e 2 no PEC_{Adap} é maior que a participação dos componentes principais do PEC_C ; isso faz o polinômio convergir mais rápido que o PEC_C .

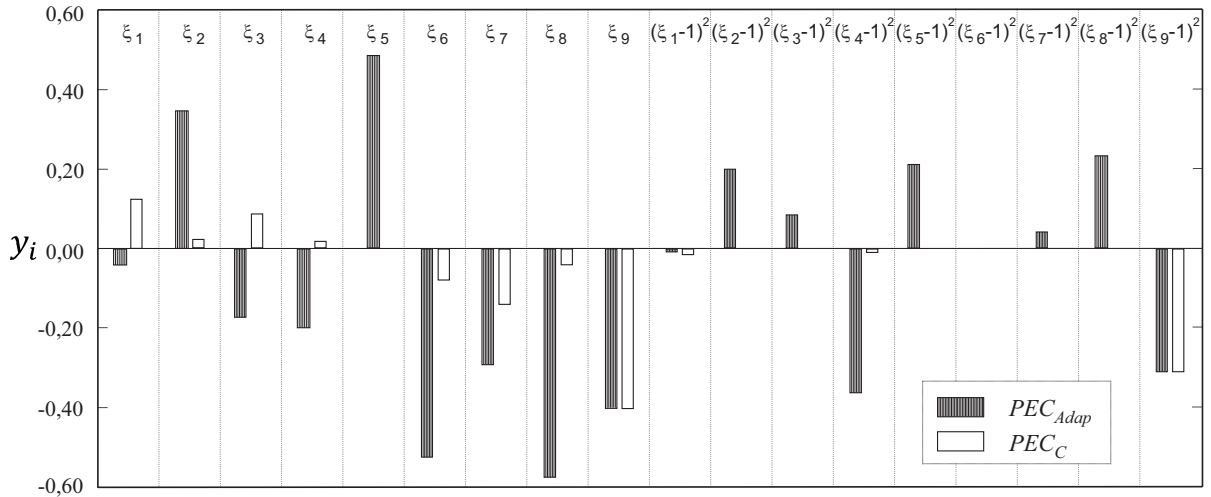


Figura 4.14: Comparação dos componentes principais das VA ξ_1 até ξ_9 do PEC_{Adap} e PEC_C das $\hat{\delta}(t)$ da ponte KB para t_e e t' de 7 d.

Nas Figuras 4.15a-c são ilustradas as $f_X(x)$ das $\hat{\delta}(t)$ calculas usando SEF, definidas como $f_{\hat{\delta}(t)}(\hat{\delta}(t))$,

e identificadas por SEF. A $f_{\hat{\delta}(t)_C}(\hat{\delta}(t)_C)$ é identificada como PEC_C junto com a $f_{\hat{\delta}(t)_{Adap}}(\hat{\delta}(t)_{Adap})$ que corresponde a PEC_{Adap} , apresentadas nas Figuras 4.15a-c. Com o intuito de avaliar a precisão das $f_{\mathbf{X}}(x)$ das respostas com respeito à obtida utilizando SEF, são encontrados os erros das $f_{\hat{\delta}(t)_C}(\hat{\delta}(t)_C)$ e $f_{\hat{\delta}(t)_{Adap}}(\hat{\delta}(t)_{Adap})$ com respeito à $f_{\hat{\delta}(t)}(\hat{\delta}(t))$. Na Figura 4.15a, para $t_e = 7$ d as previsões do PEC_C são similares às obtidas da SEF, entretanto para PEC_{Adap} é similar à usada na usada na SEF nas caudas, e apresenta mesmo valor da μ só que com menor densidade, mas com um $N_{pc_{Adap}} = 21$ em vez dos $N_{pc_C} = 110$. Para $t_e = 28$ d as previsões para o PEC_C são similares às obtidas usando SEF, entretanto para PEC_{Adap} as previsões são representativas das esperadas, com uma pequena diferença na densidade máxima, para $N_{pc_{Adap}} = 21$ em vez dos $N_{pc_C} = 110$, e é apresentada na Figura 4.15(b). Para $t_e = 1.000$ d as previsões do PEC_C não são adequadas com respeito da SEF, entretanto para PEC_{Adap} as previsões são similares às obtidas por SEF, com um $N_{pc_{Adap}} = 25$, isto ocorre devido ao aumento da dispersão dos dados, como ilustrado na Figura 4.15(c).

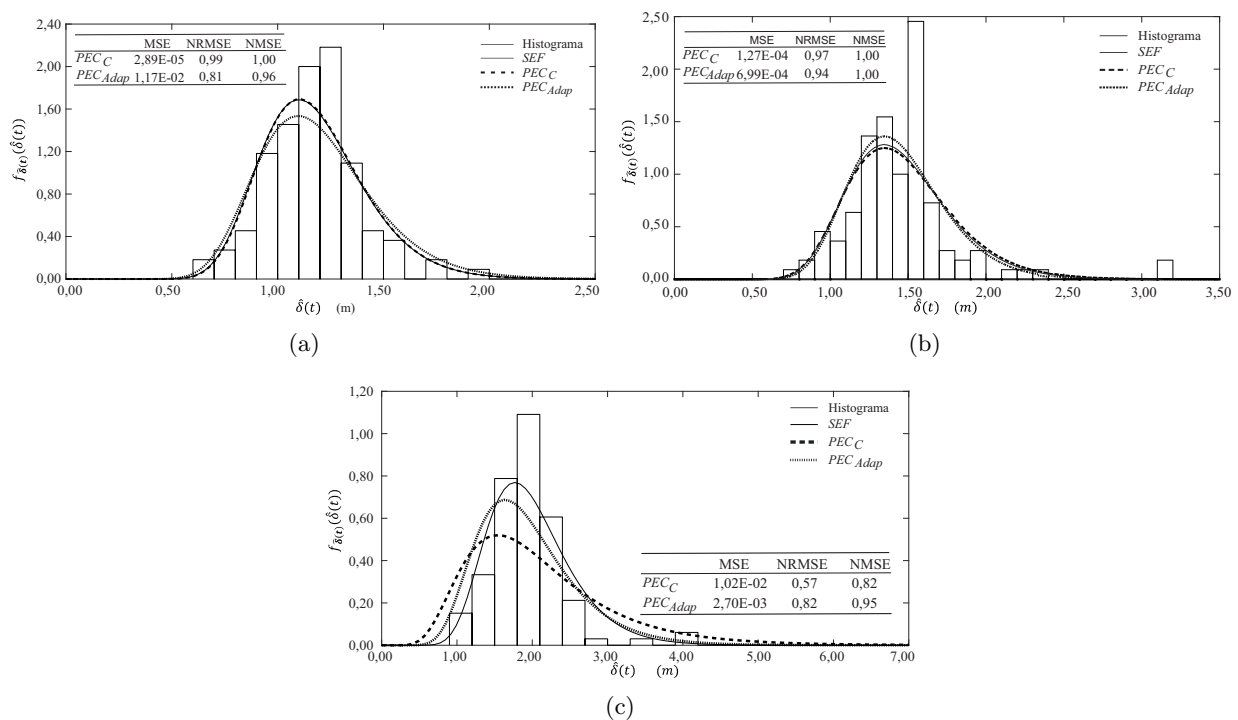


Figura 4.15: Histograma e $f_{\mathbf{X}}(x)$ das deflexões no centro do vão central da ponte KB para SEF, PEC_C e PEC_{Adap} para $t' = 7$ d e diferentes t_e , (a) 7 d, (b) 28 d e (c) 1.000 d.

Uma análise dos erros a partir de uma comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ foi realizada, e estão apresentadas nas Figuras 4.15a-c. Uma análise do erro das $f_{\mathbf{X}}(x)$ para $t_e = 7$ d indica que, o PEC_C tem um ajuste com um erro mínimo, enquanto que o PEC_{Adap} tem um ajuste adequado, veja a Figura 4.15a. Para $t_e = 28$ d as $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_C e PEC_{Adap} apresentam um erro mínimo do ordem de $1E-04$ no MSE, apresentado na Figura 4.15b. Para $t_e = 1.000$ d a $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_{Adap} apresentam um ajuste com erro mínimo do ordem de $1E-03$ no MSE, enquanto que a $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_C não apresenta um ajuste adequado, Figura 4.15c. Isto pode ser, porque o $p = 2$ não é o p que melhor define seu comportamento e é possível que para $p = 3$ os resultados seriam mais precisos.

Na Tabela 4.12 são apresentados os resultados das estatísticas das $f_{\mathbf{X}}(x)$ para a simulação em EF, PEC_C e PEC_{Adap} , como as $f_{\mathbf{X}}(x)$ que melhor definem o comportamento das $\hat{\delta}(t)$ para os diferentes t_e , junto com os 2 primeiros momentos estatísticos, a variância (σ^2) e V , para os t_e definidas. O erro relativo da μ da $\hat{\delta}(t)$ calculada usando PEC_{Adap} ($\hat{\delta}(t)_{Adap}$) varia de $1,67E-02$ até $6,90E-03$ para $t_e = 7$ d e 28 d com respeito à μ da $\hat{\delta}(t)$ usando SEF, respectivamente, enquanto que o erro relativo a μ da $\hat{\delta}(t)$ encontrada usando PEC_C ($\hat{\delta}(t)_C$), é de 0 até $1,67E-02$ para $t_e = 7$ d e 28 d, respectivamente. Para $t_e = 1.000$ d, a μ das $\hat{\delta}(t)_{Adap}$ apresenta um erro relativo com respeito à SEF de $3,02E-02$, enquanto que o erro relativo da μ da $\hat{\delta}(t)_C$ é de $5,03E-02$, exibindo melhores resultados o PEC_{Adap} , na previsão da μ e o σ das $\hat{\delta}(t)$.

Com o alvo de estabelecer se os dados vêm da mesma população com a mesma distribuição foram feitos testes de aderência da $f_{\hat{\delta}(t)_C}(\hat{\delta}(t)_C)$ e $f_{\hat{\delta}(t)_{Adap}}(\hat{\delta}(t)_{Adap})$ comparadas com a $f_{\hat{\delta}(t)}(\hat{\delta}(t))$ gerada pelos resultados obtidos por SEF. No teste, usando por exemplo PEC_C , é definido a hipótese nula, H_0 , como: dados de entrada ($\hat{\delta}(t)_C$ e $\hat{\delta}(t)$) vêm da mesma população com a mesma distribuição, e a hipótese alternativa, H_1 , os dados de entrada ($\hat{\delta}(t)_C$ e $\hat{\delta}(t)$) não vêm da mesma população com a mesma distribuição. O teste aceita H_0 se a estatística $p >$ nível de significância ($\alpha = 0,05$), α , e é representado com o valor 0 , porém, 1 é aceitado H_1 . O teste de aderência é implementado no Matlab com o teste de Kolmogorov-Smirnov de 1 amostra, em inglês, One-sample Kolmogorov-Smirnov test (KSTAT), e os resultados do teste são apresentados na Tabela 4.13.

Tabela 4.12: Resultados da estatística das $\hat{\delta}(t)$ na ponte KB levando em consideração o envelhecimento do concreto para diferentes t_e , usando simulação em EF, SMC em PEC_C e PEC_{Adap} .

t_e (d)	Estatística	SEF	PEC_C	PEC_{Adap}
7	$f_{\mathbf{X}}(x)$	LN	LN	LN
	μ	1,18 ¹	1,18	1,20
	σ^2	0,06 ¹	0,06	0,14
	σ	0,25 ¹	0,25	0,37
	V	22 ¹	21	30
28	$f_{\mathbf{X}}(x)$	LN	LN	LN
	μ	1,45 ¹	1,46	1,44
	σ^2	0,11 ¹	0,12	0,08
	σ	0,33 ¹	0,34	0,28
	V	23 ¹	23	20
1.000	$f_{\mathbf{X}}(x)$	LN	LN	LN
	μ	1,99 ¹	2,09	1,93
	σ^2	0,33 ¹	0,98	0,34
	σ	0,57 ¹	0,99	0,58
	V	31 ¹	47	30

¹ Amostral ; μ e σ (m); σ^2 (m²); V (%).

Com exceção da $f_{\hat{\delta}(t)_C}(\hat{\delta}(t)_C)$ para $t' = 7$ d e $t_e = 1.000$ d, todas as $f_{\hat{\delta}(t)}(\hat{\delta}(t))$ para PEC_C , PEC_{Adap} e SEF vêm da mesma população com a mesma distribuição com valores altos para a estatística p -valor, e é apresentado na Tabela 4.13. A estatística KSTAT mede a diferença entre as função cumulativa de distribuição da $\hat{\delta}(t)$, $F_{\hat{\delta}(t)}(\hat{\delta}(t))$, e a função cumulativa de distribuição da $\hat{\delta}(t)_C$,

$F_{\hat{\delta}(t)_C}(\delta(t)_C)$ ou $\hat{\delta}(t)_{Adap}$, $F_{\hat{\delta}(t)_{Adap}}(\delta(t)_{Adap})$, na qual os resultados das diferenças tendem a 0, para o qual pode-se afirmar que o PEC_{Adap} é uma adequada alternativa para estimar as $\delta(t)$, com um esforço computacional menor que usando simulação em EF ou PEC_C .

Tabela 4.13: Teste de aderência das $f_{\mathbf{X}}(x)$ da SEF, PEC_C e PEC_{Adap} das $\hat{\delta}(t)$ na ponte KB levando em consideração o envelhecimento do concreto para diferentes $t = (t_e, t')$.

(t_e, t') (d)	$f_{\mathbf{X}}(x)$	H_0	p -valor	KSTAT
(7,7)	PEC_C	0	0,98	1,00E-02
	PEC_{Adap}	0	0,37	6,97E-02
(28,7)	PEC_C	0	0,84	2,91E-02
	PEC_{Adap}	0	0,49	5,83E-02
(1.000,7)	PEC_C	1	0,04	12,44E-02
	PEC_{Adap}	0	0,42	6,47E-02

O PEC_{Adap} será utilizado no capítulo 6, na determinação da quantificação da incerteza do P_{max} e a G_F em materiais quase-frágeis em DCT e vigas de concreto para diferentes \dot{w} .

4.4 Contribuições

Neste capítulo é apresentado a contribuição do autor no campo da propagação da incerteza, com o problema da dimensão e aumento do grau, pois aumenta o número de pontos de colocação e de coeficientes do modelo, acrescentando o custo computacional. Para salvar esta dificuldade uma nova forma de truncar a representação do PEC é dada, favorecendo os componentes principais junto com os alguns produtos entre os componentes principais que melhoram a regressão dos dados. Isto é feito utilizando um algoritmo iterativo que define o grau dos componentes principais sem misturas e avalia a contribuição dos termos restantes do polinômio na regressão, levando em conta só os coeficientes que melhoram a regressão. Este é um algoritmo iterativo que fixa o grau dos componentes principais a ser levados em consideração e que nenhum outro algoritmo menciona na literatura.

Neste capítulo foram alcançadas contribuições na estimação da deflexão de elementos estruturais levando em conta a propagação da incerteza nos parâmetros do material, em modelos viscoelásticos. Uma segunda contribuição foi a de estabelecer uma relação matemática entre os parâmetros que definem o processo de envelhecimento do concreto, em modelos viscoelásticos, com o intuito de determinar a quantificação da incerteza da deflexão em elementos estruturais. Embora o autor tenha publicado um trabalho sobre polinômio de expansão de caos em viscoelasticidade, aplicando o modelo de Boltzmann em vigas de concreto, a literatura não reporta estes polinômios na quantificação da incerteza da deflexão de pontes de concreto, levando em consideração o processo de envelhecimento do concreto.

Capítulo 5

Metodologia experimental proposta para materiais quase-frágeis em ensaios de fratura em modo I

A literatura na mecânica da fratura reporta os trabalhos de Amirkhanian *et al.* (2011) que usaram teste de tensão em forma de disco compacto, em inglês, *disk-shaped compact tension test* (DCT) em material cimentício. Amirkhanian *et al.* (2011) fizeram uma comparação dos resultados experimentais e a SEF para taxas de carregamento quase-estática. Este trabalho determinou o carregamento máximo e a energia total à fratura para ensaios de fratura em modo I. Mais tarde, Amirkhanian *et al.* (2015) realizaram um trabalho comparando os resultados da simulação numérica e o método de análises inverso em disco compacto com uma taxa de deslocamento menor à usada em Amirkhanian *et al.* (2011). No campo da mecânica da fratura nenhum trabalho é relatado sobre a influência da taxa de deslocamento nas propriedades à fratura do material cimentício feitas em testes com disco compacto. Além disso, o estado da arte não reporta a utilização dos PEC para estimar os parâmetros mencionados acima no ensaio de fratura em modo I em DCT ou em vigas com entalhe de ponta única em flexão de 3 pontos, em inglês, *single-edge-notched beams in three-point bending* (SEN-TPB), e é por isto, que nesta tese serão desenvolvidos.

Os parâmetros de G_f , G_F e P_{max} podem ser determinados experimentalmente utilizando o ensaio de SEN-TPB, mas não é possível extrair uma viga de uma estrutura existente para realizar o ensaio. Wagoner *et al.* (2005a), e Wagoner *et al.* (2005b) propuseram o ensaio de fratura em modo I em DCT para concreto asfáltico. Posteriormente, outros testes foram feitos em concreto com agregado graúdo de calcário e com agregado reciclado de concreto (Amirkhanian *et al.*, 2011; Amirkhanian *et al.*, 2015). Nos últimos anos foram propostas modificações na geometria do DCT (Fernández-Canteli *et al.*, 2014; Cifuentes *et al.*, 2017; Seitzl *et al.*, 2017), mas devido ao comportamento assintótico da curva P - $CMOD$, ela deve ser corrigida na teoria, para avaliar os parâmetros G_f e G_F . É por isso, e pela possibilidade de extrair corpos de prova de uma estrutura existente que o presente trabalho usa o DCT convencional e não vigas para determinar as propriedades da fratura do material.

Este Capítulo está dividido em duas seções, inicialmente a parte experimental, na qual são apresentados os resultados do ensaio de fratura em modo I usando o teste de tensão em DCT e complementares. Outros resultados apresentados são os valores determinísticos de c_f , G_f , G_F e Ω usando o modelo de EEB (Bažant e Kazemi, 1992; Bažant e Planas, 1998). Por último, as propriedades da mecânica da fratura do material foram determinadas para \mathcal{B} \dot{w} assim como uma análise estatística dos resultados obtidos. O fluxograma para ilustrar o desenvolvimento do Capítulo e os passos utilizados na parte experimental do ensaio de fratura em modo I é apresentado na Figura 5.1. A segunda seção foram realizadas simulações em EF não linear do DCT para a validação do modelo, respeito a resultados obtidos por Amirkhanian *et al.* (2011) e Amirkhanian *et al.* (2015), assim como, uma verificação dos resultados experimentais do P_{max} e a G_F com respeito aos obtidos por EF.

5.1 Experimentação

O programa experimental foi desenvolvido nos laboratórios de ensaio de materiais (LEM) da Engenharia Civil e no laboratório de ensaios dos materiais da Engenharia Mecânica, ambos da Universidade de Brasília (UnB). Um fluxograma do desenvolvimento da parte experimental é apresentado na Figura 5.1 para estabelecer a curva de comportamento P - $CMOD$ (conforme seção 2.5.2) do DCT com entalhe e deslocamento controlado, com o alvo de determinar c_f , G_f e G_F de materiais cimentícios. Inicialmente são construídos \mathcal{B} diferentes tamanhos de corpos de prova junto com cilindros de prova e testes de fratura em modo I foram realizados para \mathcal{B} diferentes \dot{w} (\dot{w} , conforme foi definido na seção 2.5.3). As propriedades da mecânica da fratura c_f , G_f , Ω e G_F para cada \dot{w} são calculadas e é determinado o modelo coesivo para cada caso.

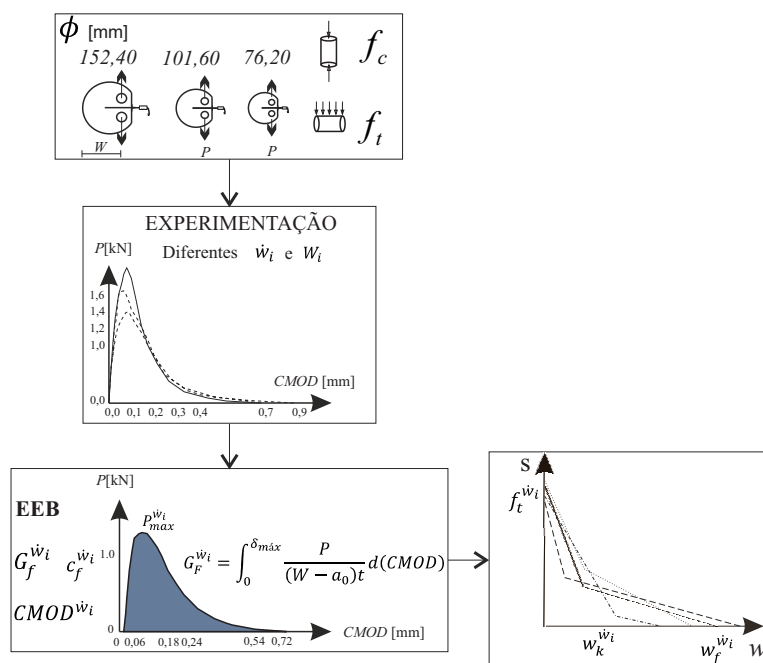


Figura 5.1: Fluxograma para determinar as propriedades da mecânica da fratura em materiais cimentícios.

5.1.1 Projeto das fôrmas para os corpos de prova

Uma representação da forma de um DCT, segundo Tada *et al.* (2000), é apresentada na Figura 5.2 para dimensionar os diferentes diâmetros (ϕ), que foram usados nesta pesquisa as dimensões das fôrmas são indicadas na Tabela 5.1. As 3 dimensões dos DCT adotadas, são necessárias para analisar o EEB e estabelecer as propriedades do material cimentício à fratura sendo preciso pelo menos 3 tamanhos diferentes do corpo de prova (CP) (RILEM, 1990; Bažant e Planas, 1998).

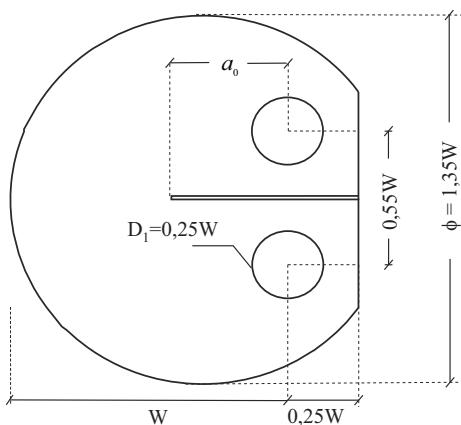


Figura 5.2: Representação esquemática do DCT. Adaptado de (Tada *et al.*, 2000).

Na Tabela 5.1 são apresentadas as dimensões geométricas do DCT utilizadas nesta pesquisa.

Tabela 5.1: Dimensões dos DCT usados.

	3	2	1
ϕ (mm)	152,40	101,60	76,20
W (mm)	112,90	75,30	56,40
a_0 (mm)	47,72	31,20	22,80

Os desenhos das fôrmas dos CP foram realizados no *SkechUp pro 2016* e algumas imagens das peças podem ser vistas na Figura 5.3. As 3 fôrmas (para CP de ϕ 76,20 mm; 101,60 mm e 152,40 mm) foram projetados em aço para ter melhor acabamento e uma desmoldagem fácil.

Na Figura 5.3(a) mostra a vista em planta da base com suas dimensões estão em mm. Na Figura 5.3(b) é apresentada uma vista de perspectiva do conjunto da forma de $\phi = 152,40$ mm e na Figura 5.3(c) é ilustrada a vista de perspectiva da base. A Figura 5.3(d) representa a vista lateral da base e na Figura 5.3(e) corresponde aos cilindros internos. Por último, a Figura 5.3(f) mostra a vista lateral cilindro externo. A forma consta de 4 partes: a base construída em aço *SAE 1020* (Sociedade de engenheiros automóvel, em inglês, Society of Automotive Engineers). Dois cilindros internos construído com aço *SAE 1020*, o cilindro lateral construído com aço *SAE 1518* e a lâmina calibre 16, que vai gerar o entalhe do CP.

Na base foi desenhada uma vala de 5 mm de modo que permita ajustar e desmoldar com facilidade o CP e obter uma fôrma do projeto, como mostram as Figuras 5.3(a), 5.3(c) e 5.3(d), desenhada em todas as fôrmas. Os cilindros internos podem ser ancorados na base, ajustando-os para ter

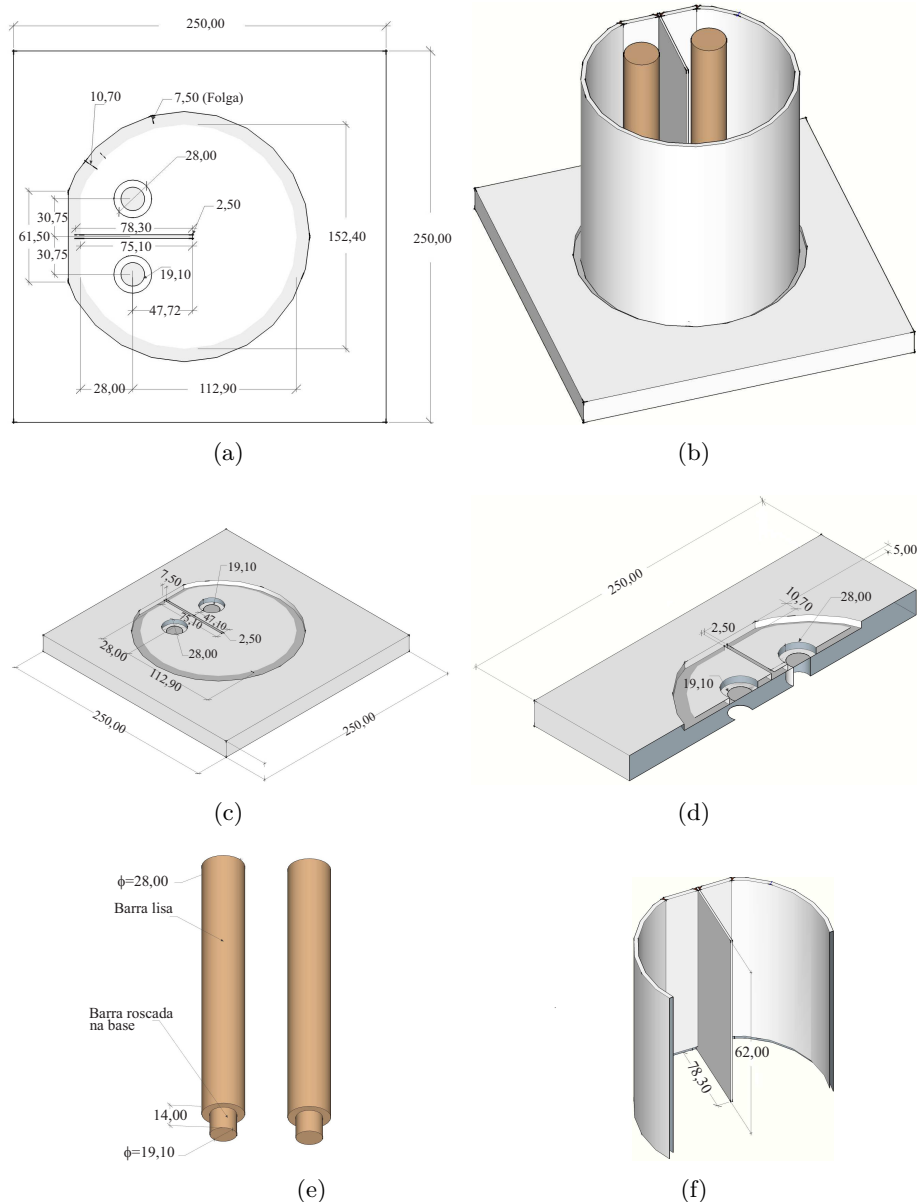
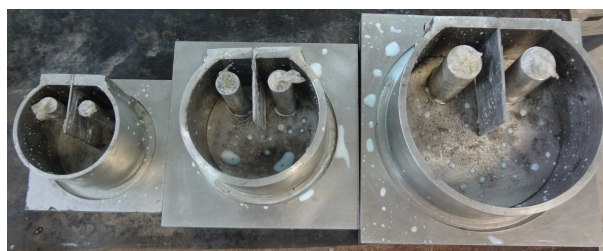


Figura 5.3: Projeto da forma do CP de $W = 112,90$ mm a) vista em planta, b) conjunto completo da forma, c) vista de perspectiva da base, d) vista lateral da base, e) cilindros internos para construção dos furos, f) vista lateral cilindro externo e entalhe em lâmina calibre 16. Unidades em mm.

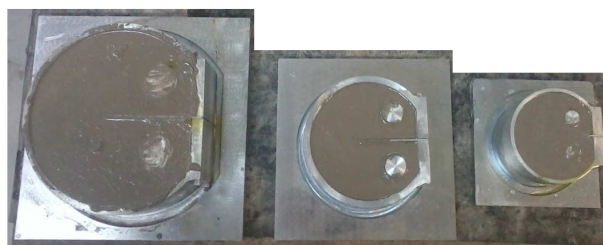
superfícies perpendiculares em relação à base e assegurando que a força aplicada nos CP seja perpendicular ao entalhe. As fôrmas são ajustadas por meio de dois parafusos internos, localizados na parte reta do cilindro lateral da fôrma, que vão fazer com que elas se encaixem na vala presente na base. As partes metálicas foram construídas com um banho de zinco, que garante maior durabilidade e melhora o acabamento das partes da forma.

5.1.2 Construção dos CP

Os corpos de prova foram construídos e armazenados no LEM da Engenharia Civil da UnB. Para a construção dos CP foi preciso colocar óleo, ou desmoldante, na lâmina interna e nos dois cilindros, antes de envolver com um plástico fino e, novamente, colocou-se óleo, ou desmoldante. Além disso, também utilizou-se óleo, ou desmoldante, nas paredes internas e na base, como mostra a Figura 5.4(a), com o intuito de facilitar a desmoldagem dos CP e evitar a geração de pré-esforços no momento da remoção. As fôrmas apresentadas na Figura 5.4(a) correspondem de esquerda à direita, $W_1 = 56,40$ mm; $W_2 = 75,30$ mm e $W_3 = 112,90$ mm.



(a)



(b)

Figura 5.4: Fôrmas e concretagem dos CP (a) fôrmas com desmoldante e plástico, (b) moldagem dos CP com W_3 , W_2 e W_1 .

O material cimentício usado nos ensaios de fratura e a dosagem utilizada nas misturas são indicados na Tabela 5.2 com dosagem fornecida por Manzano *et al.* (2015). O microconcreto é uma mistura de materiais elaborado com agregados graúdos de pequena dimensão (até 9,5 mm). A dosagem usa cimento Portland V de alta resistência inicial, relação água cimento (a/c) de 0,30 e aditivo superplastificante para concreto, tipo Tec Flow. A mistura foi colocada em 2 camadas compactada 25 vezes com um cilindro liso de $\phi = 12,30$ mm, por camada.

Tabela 5.2: Composição do microconcreto de referência.

Descrição	kg/m ³
Cimento CP V ARI	700,00
Areia lavada de rio	1.339,80
Sílica ativa (10% em relação à massa do cimento)	70,00
Água ($a/c = 0,30$)	210,00
Aditivo (2,6 % de cimento. Tec-Flow)	18,20

Em cada mistura foram gerados 3 CP (1 de cada ϕ) e 1 cilindro de 50 mm x 100 mm (diâmetro x altura) para testar a f_c ou f_t , vide Figura 5.5. Os CP e o cilindro de teste são cobertos com plástico, para evitar a perda de umidade e desmoldados 3 d depois, com o intuito de ter CP mais resistentes para a desmoldagem, e armazenados na câmara úmida por 56 d, ficando prontos para o ensaio aos 60 d.

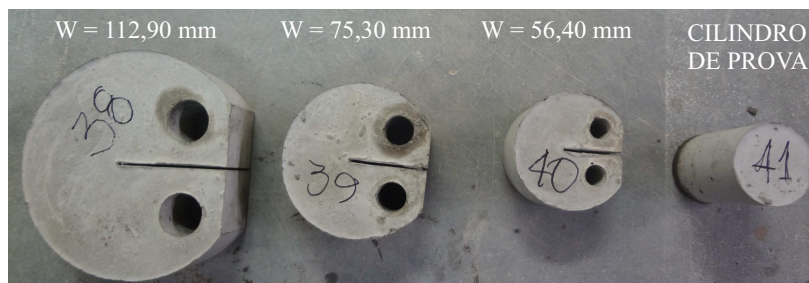


Figura 5.5: Corpos de prova moldados e cilindro de prova.

Antes de levar os CP para ensaiar à fratura, no laboratório de ensaios dos materiais da Engenharia Mecânica, foi preciso colar uma chapa metálica com chanfro em cada lado da abertura do CP, que serviu para fixar o *clip gages*, como é apresentado na Figura 5.6. Para colar as 2 chapas metálicas foi usado um separador padrão, de modo a garantir uma distância padrão de 5 mm, e as chapas estavam chanfradas por um lado, para melhorar a fixação de *clip gages*.



Figura 5.6: Detalhe do CP com chapa metálica para fixação.

A continuação é apresentada uma breve descrição do procedimento de ensaio de fratura em modo I para DCT com diferentes \dot{w} , assim como, a quantidade de ensaios realizados para cada W .

5.1.3 Procedimento de ensaio à fratura

Após fazer a proteção da máquina de ensaio universal MTS 810, contra o material que pode cair do DCT, se realiza a montagem dos CP, veja a Figura 5.7(a). A máquina usada no ensaio à fratura foi uma MTS 810 servo-hidráulica com capacidade de 100 kN, localizada no laboratório de ensaios dos materiais da Engenharia Mecânica da UnB. A MTS 810 está equipada com um controlador de dados e *software* profissional *Station Manager* para controlar, configurar e arma-

zenar os resultados do ensaio. Feita a proteção, foi colocado o dispositivo de aplicação de força (desenhado para o ensaio de fratura em modo I em DCT), o CP e o *clip gages*, conforme a Figura 5.7(b). Posteriormente, executar-se o ensaio de fratura em modo I por deslocamento controlado.

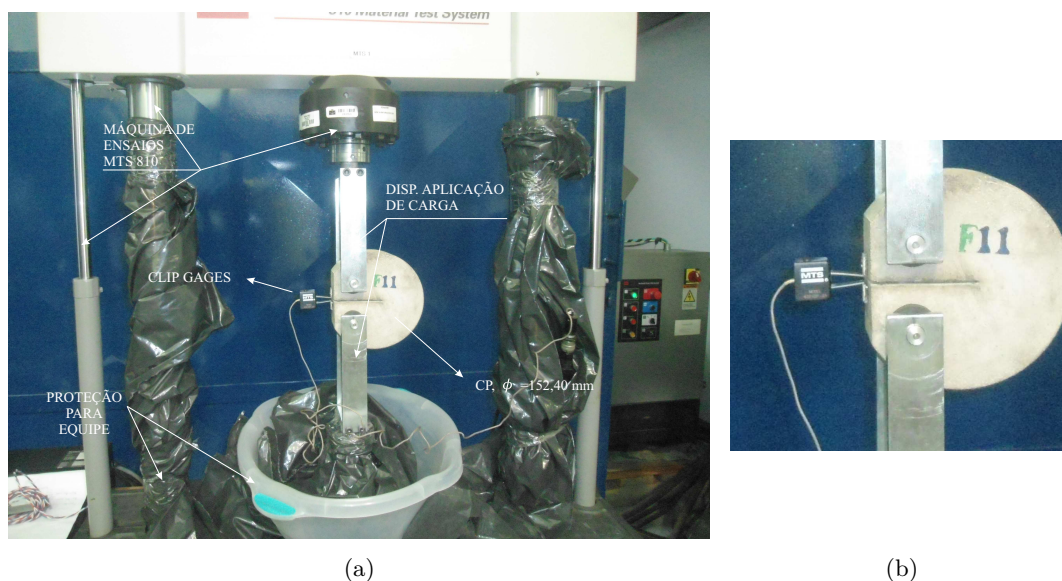


Figura 5.7: Configuração de teste com o CP, a) proteção máquina universal de ensaios MTS 810 e b) detalhe *clip gages* e CP.

Foram realizados ensaios de calibração para estimar o valor do deslocamento esperado máximo, para os ensaios de fratura com W_1, W_2 e W_3 , assim como, a sensibilidade da MTS 810 para os diferentes \dot{w} . Definidos estes parâmetros, foi estimado o tempo para cada ensaio e com ele a taxa de aquisição de dados para ter 1.000 dados por ensaio. O ensaio realizado foi do tipo deslocamento controlado para ter armazenados os valores de força aplicada (P) em função do $CMOD$, capturando a parte descendente da curva $P - CMOD$, chamada na literatura como pós pico, em inglês, *post peak*.

As \dot{w} utilizadas nesta pesquisa foram $\dot{w}_1 = 0,06$ mm/min; $\dot{w}_2 = 0,10$ mm/min e $\dot{w}_3 = 0,60$ mm/min para os 3 tamanhos de DCT usados, conforme a Tabela 5.1. A \dot{w}_1 (0,60 mm/min $1,00E-03$ mm/s) corresponde à \dot{w} utilizada no trabalho de Amirkhanian *et al.* (2015), referência em análise quase-estática, e referenciado também no trabalho desenvolvido por Rosa *et al.* (2012). Enquanto a \dot{w}_2 refere-se à transição entre os níveis de taxas quase estática e dinâmicas usada por Amirkhanian *et al.* (2011). A \dot{w}_3 (0,60 mm/min $1,00E-02$ mm/s) corresponde ao nível onde começam as \dot{w} dinâmico (Rosa *et al.*, 2012). Os níveis de \dot{w} , considerados na análise quase estática e dinâmica em DCT, são os mesmos utilizados no ensaio de flexão em 3 pontos em vigas de concreto, (Bažant *et al.*, 1992; Li e Li, 2012; Piseth *et al.*, 2015), e foram usadas na modelagem de vigas de 250 mm de altura. As dimensões, \dot{w} e quantidade de CP usados no ensaio de fratura são apresentadas na Tabela 5.3, em que W é o comprimento não fissurado, B é a espessura e a_0 corresponde o comprimento entalhado. Um total de 27 CP foram realizados e distribuídos em 9 ensaios com \dot{w}_1 , 10 com \dot{w}_2 e 8 com \dot{w}_3 .

Tabela 5.3: Dimensões e \dot{w} usadas no ensaio de fratura em DCT.

\dot{w} (mm/min)	ϕ (mm)	W (mm)	B (mm)	a_0 (mm)	α_0 (-)	
0,60	152,40	112,89	54,54	48,07	0,43	
		112,92	53,86	47,99	0,42	
		112,94	55,01	48,01	0,43	
	101,60	75,27	55,63	32,07	0,43	
		75,25	53,87	32,08	0,43	
		56,42	53,83	24,31	0,43	
	76,20	56,41	57,75	24,27	0,43	
		56,45	55,10	24,28	0,43	
		56,44	55,10	24,33	0,43	
	0,10	152,40	112,88	55,10	48,03	0,43
			112,92	56,20	48,10	0,43
			112,90	56,46	47,98	0,42
101,60		75,25	55,10	32,13	0,43	
		75,30	55,23	32,12	0,43	
		75,24	57,22	32,07	0,43	
76,20		75,27	55,45	32,10	0,43	
		56,41	55,71	24,33	0,43	
		56,44	56,27	24,31	0,43	
			56,46	56,21	24,28	0,43
0,06		152,40	112,88	56,52	48,04	0,43
			112,89	57,49	47,99	0,43
	101,60	75,25	55,90	32,13	0,43	
		75,27	57,55	32,07	0,43	
	76,20	75,27	56,24	32,10	0,43	
		56,43	56,22	24,28	0,43	
			56,46	56,84	24,34	0,43
			56,43	56,44	24,30	0,43

 $\alpha_0 = a_0/W$;

(-), Adimensional.

5.1.4 Ensaio complementares

Foram realizados 9 ensaios de f_c em cilindros de prova de 50 mm x 100 mm, com uma taxa de carregamento de 0,5 MPa/s (0,10 t/s) na máquina de ensaios Dinateste, mostrada na Figura 5.8(a), com precisão de ± 10 kg e capacidade de 100 t e célula de carga com indicador digital. Além disso, foram realizados 8 ensaios para determinar a f_t , utilizando a prensa de compressão Denison com capacidade de 200 t, apresentada na Figura 5.8(b). Todos os ensaios foram realizados no laboratório de ensaio de materiais da Engenharia civil da UnB.

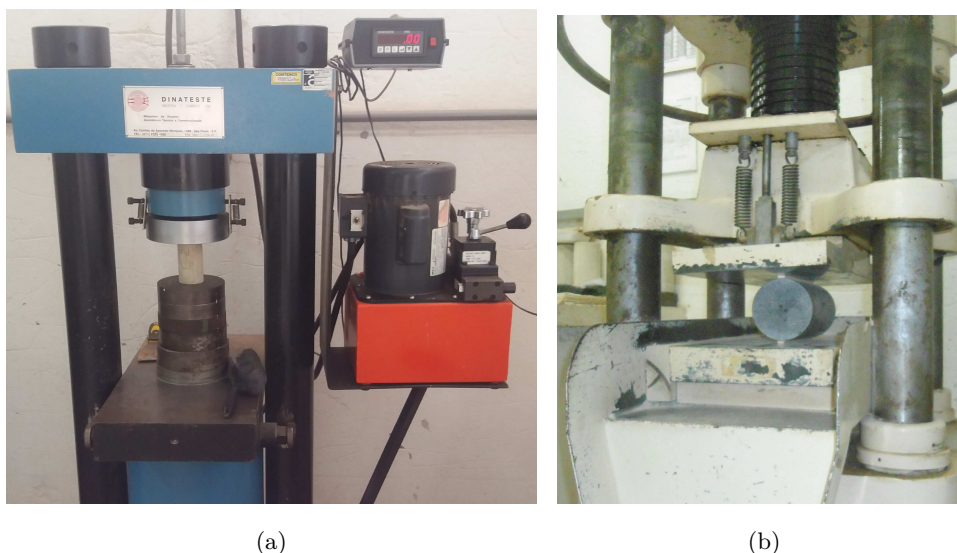


Figura 5.8: Máquina de ensaios para determinar f_c e f_t em CP cilíndrico, a) prensa Dinateste e b) prensa Denison.

As normas utilizadas e a μ , σ e V da f_c e f_t obtidos são apresentados na Tabela 5.4, em que os resultados obtidos se aproximam aos observados para esta mistura e relação de água/cimento (0,30) dados por Manzano *et al.* (2015).

Tabela 5.4: Resultados das estatísticas dos ensaios complementares para microconcreto.

Resistência	μ (MPa)	σ (MPa)	V (%)	Norma
f_c	61,80	7,18	12	ASTM C496-94
f_t	5,98	0,39	7	ASTM C496-96

(-) Adimensional.

5.1.5 Resultados do ensaio da mecânica da fratura em DCT para diferentes W e \dot{w}

Experimentalmente, foi determinado a curva de comportamento da P em função do $CMOD$ e representado na curva $P-CMOD$ para DCT com W_3 , W_2 , W_1 e \dot{w}_3 , \dot{w}_2 e \dot{w}_1 , conforme é apresentado na Figura 5.9, 5.10 e 5.11 respectivamente. As variáveis de saída que foram analisadas são: o $P_{máx}$ e a G_F , que podem ser extraídas direta e indiretamente das Figuras 5.9, 5.10 e 5.11. A curva $P-CMOD$ para o DCT com W_3 e \dot{w}_3 é apresentada na Figura 5.9(a), enquanto que para W_3 e \dot{w}_2 é mostrada na Figura 5.9(b) e, por último, a curva $P-CMOD$ do DCT com W_3 e \dot{w}_1 é ilustrada na Figura 5.9(c). Da análise dos resultados para W_3 com diferentes \dot{w} , encontrou-se que o P_{max} aumenta, assim que a \dot{w} aumenta, comportamento esperado (Bažant *et al.*, 1992; Ožbolt *et al.*, 2006; Rosa *et al.*, 2012; Li e Li, 2012; Piseth *et al.*, 2015). Porém, o tramo descendente da curva $P-CMOD$ do DCT com W_3 para \dot{w}_3 apresenta maior dispersão entre os CP testados e entre as \dot{w} , ao contrário do que acontece para a \dot{w}_1 .

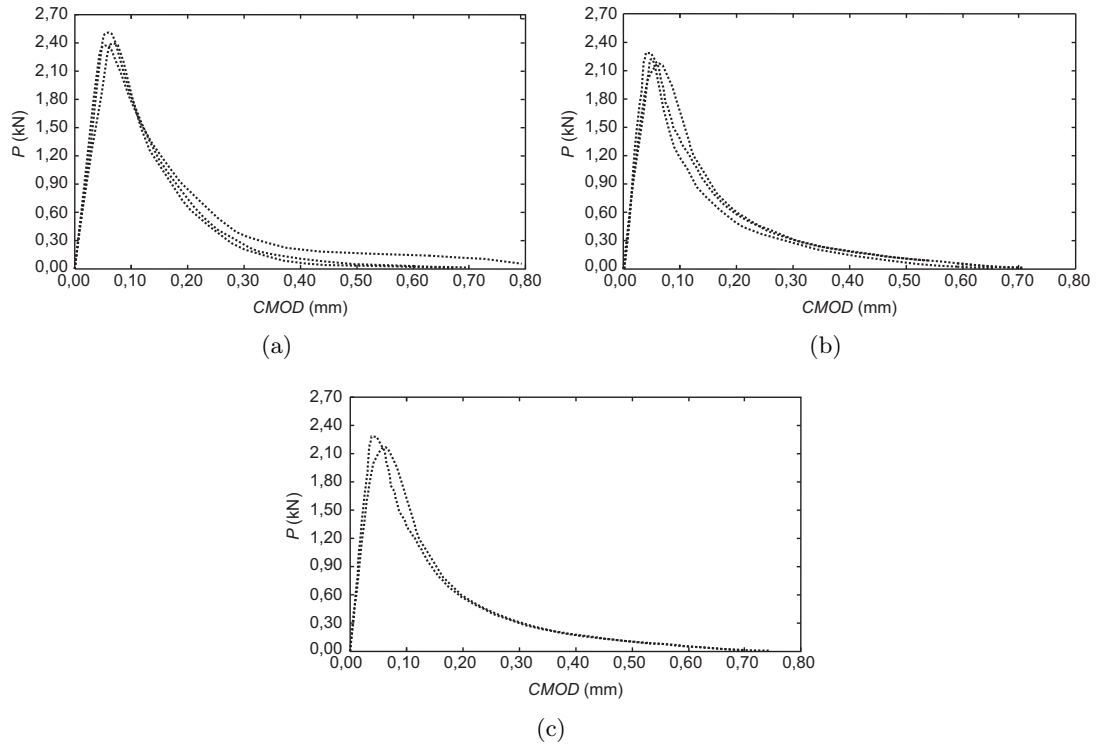


Figura 5.9: Curvas experimentais P - $CMOD$ de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_2 e c) \dot{w}_1 .

Uma análise foi realizado para o DCT de W_2 com 3 diferentes \dot{w} , com o intuito de estabelecer a curva de comportamento P - $CMOD$ como mostram as Figuras 5.10a-c.

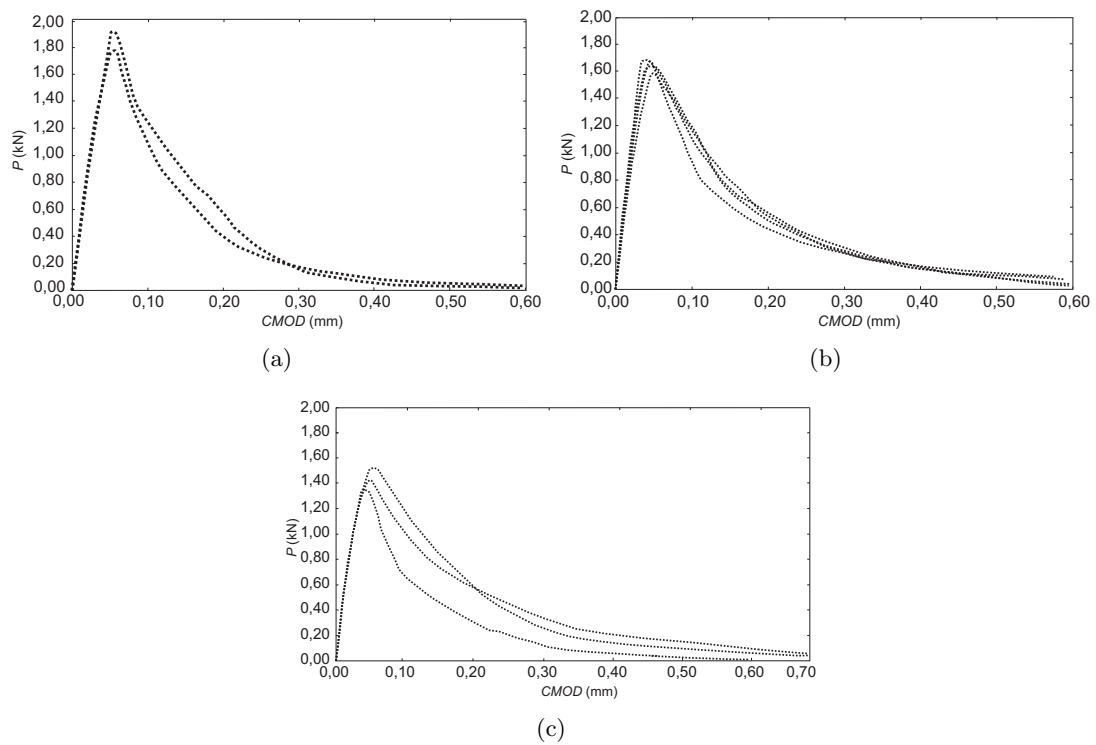


Figura 5.10: Curvas experimentais P - $CMOD$ de W_2 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_2 e c) \dot{w}_1 .

Um resultado similar é encontrado na análise das curvas P - $CMOD$ submetido a ensaio de fratura em modo I com W_2 e β diferentes \dot{w} , em que o P aumenta inicialmente linearmente até que a tensão aplicada atingir a f_t máxima no material. Depois de alcançar P_{max} o comportamento é não linear com valores de $CMOD$ (mm) máximos variando entre 0,58 até 0,70 para \dot{w} variando entre \dot{w}_3 , \dot{w}_2 e \dot{w}_1 . O tramo descendente da curva P - $CMOD$, do DCT com W_2 para \dot{w}_1 apresenta maior dispersão entre os CP testados e entre as \dot{w} ao contrário do que acontece para a \dot{w}_2 depois da metade do $CMOD_{max}$.

Uma análise foi realizado para DCT de W_1 com diferentes \dot{w} , com o intuito de estabelecer a curva de comportamento P - $CMOD$, como ilustrado nas Figuras 5.11a-c. Como os DCT com W_3 e W_2 , o P_{max} e G_F acrescenta, assim que a \dot{w} aumenta, foi encontrado para o W_1 , apresentado nas Figuras 5.11a-c. Existe uma maior separação entre as curvas P - $CMOD$ de W_1 na região descendente entre os CP. Isso pode ser devido a que para menores tamanhos qualquer variação no $CMOD$ gera maior variação no P , gerando curvas P - $CMOD$ com variação no P_{max} e na G_F .

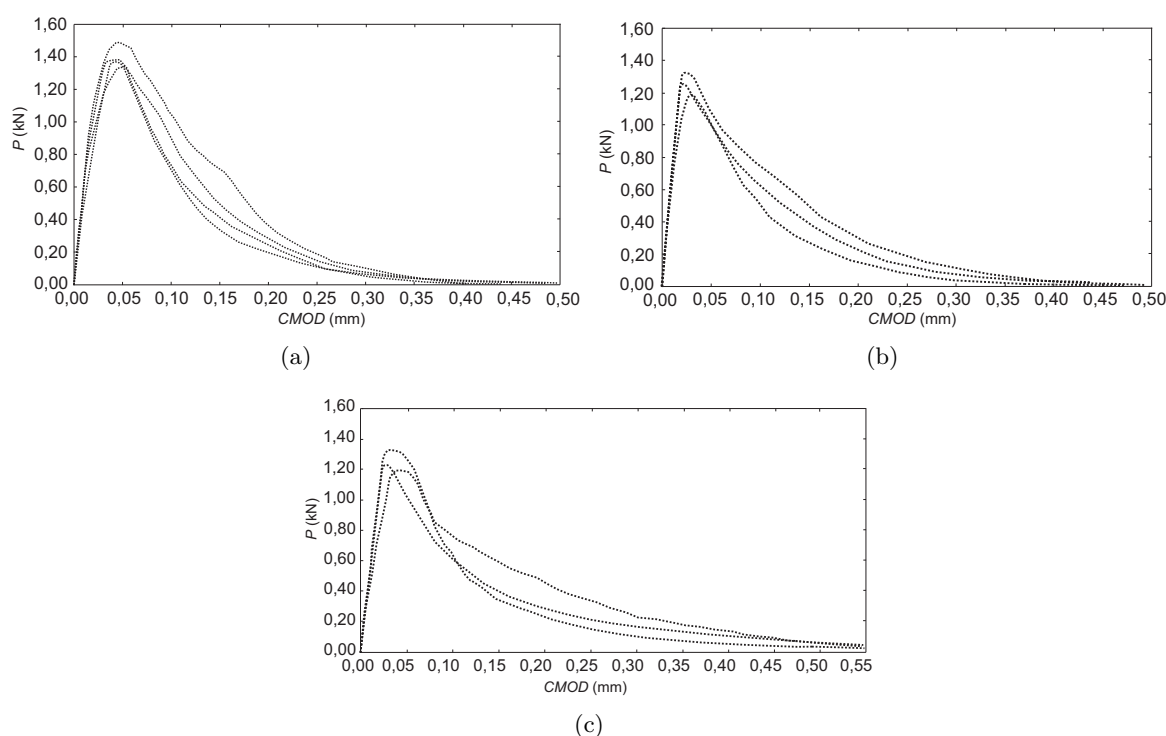


Figura 5.11: Curvas experimentais P - $CMOD$ de W_1 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_2 e c) \dot{w}_1 .

Dado que a \dot{w}_3 apresenta maior uniformidade na curva de comportamento P - $CMOD$, é realizada uma avaliação da envoltória das curvas experimentais P - $CMOD$ para \dot{w}_3 e os resultados são apresentados na Figura 5.12. Uma avaliação da envoltória das curvas experimentais P - $CMOD$ com \dot{w}_3 indicam que o tramo linear tem um comportamento similar, com uma tendência a ter uma inclinação similar para os β tamanhos de CP (W_1 , W_2 e W_3). Ao aumentar o tamanho do CP, acrescenta-se o P_{max} , de igual modo, e a G_F aumenta. Uma análise do carregamento aplicado P é possível inferir que o gradiente de tensões é igual para a parte linear inicial da curva P - $CMOD$ antes de apresentar-se o fissuramento do CP.

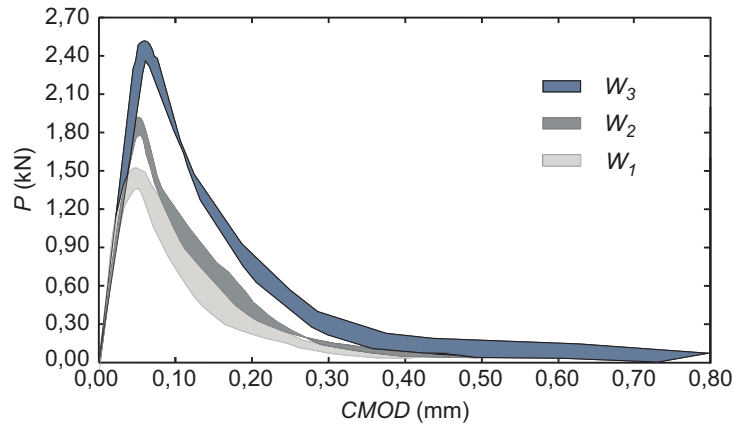


Figura 5.12: Envoltória das curvas experimentais P - $CMOD$ para \dot{w}_3 avaliada para as diferentes W .

O $CMOD$ encontrado para o P_{max} tem pouca, ou nenhuma, relevância, pois não apresenta mudanças notáveis com o aumento da \dot{w} . Na Tabela 5.5 são apresentados os resultados de P_{max} e G_F encontrados para as diferentes \dot{w} e W , assim como o inverso da inclinação da parte inicial da reta da curva P - $CMOD$, definida como C_i . O C_i é encontrado aplicando regressão nos dados da curva P - $CMOD$ entre 0 % e 50 % do P_{max} da inclinação inicial da reta.

Ao respeito da μ da G_F (μ_{G_F}) para \dot{w}_3 , com W_3 , W_2 e W_1 os valores correspondentes da μ_{G_F} são, respectivamente, 116,83 N/m, 112,77 N/m e 109,87 N/m, mostrando que um aumento no tamanho do DCT acrescenta a G_F , como são apresentados na Tabela 5.6. O P_{max} apresenta igual comportamento, pois ao acrescentar o tamanho o P_{max} aumenta, de fato a μ do P_{max} ($\mu_{P_{max}}$) é 2,43 kN, 1,85 kN e 1,40 kN para W_3 , W_2 e W_1 , respectivamente, dadas na Tabela 5.6. Embora, as μ_{G_F} e as $\mu_{P_{max}}$ são diferentes, é possível estabelecer sim as μ_{G_F} e as $\mu_{P_{max}}$ são estatisticamente iguais, fazendo uma análise de variância de um fator (anova), o que será feito na frente.

Uma análise da G_F para \dot{w}_2 , apresentados na Tabela 5.6, indica que a μ_{G_F} é de 108,07 N/m, 116,52 N/m e 99,70 N/m para W_3 , W_2 e W_1 , e não permite concluir que há uma relação direta entre \dot{w}_2 e W . Ao contrário do que acontece no P_{max} , em que as $\mu_{P_{max}}$ são de 2,21 kN, 1,65 kN e 1,26 kN, ou sejam, aumentam na medida que o tamanho do DCT aumenta. Por último, a análise das VA de saída para \dot{w}_1 são apresentados na Tabela 5.5, na qual μ_{G_F} é, 95,27 N/m, 124,28 N/m e 99,78 N/m para W_3 , W_2 e W_1 , e para o P_{max} as $\mu_{P_{max}}$ é de 2,18 kN, 1,57 kN e 1,27 kN as quais acrescentam na medida que o tamanho do DCT aumenta. Estes resultados não permitem concluir que com o aumento no tamanho do DCT a G_F acrescenta. É necessário realizar um análise de anova de um fator para decidir sim as μ são estatisticamente diferentes. Embora as \dot{w} de análise são consideradas estática e quase estática, segundo Rosa *et al.* (2012), o incremento na G_F é significativo para as taxas consideradas dinâmicas, e estimadas em, $0,60 \text{ mm/min} \leq \dot{w} \leq 600 \text{ mm/min}$.

O inverso da inclinação inicial da curva P - $CMOD$ é fundamental para encontrar a G_f e E , conforme as Equações 2.71 e 2.69. Os valores da μ da C_i (μ_{C_i}) são apresentados na Tabela 5.6 e não permite estabelecer uma relação entre a C_i e W . As variáveis G_F , P_{max} e C_i apresentam variação, na

Tabela 5.5: Valores experimentais de P_{max} , C_i e G_F do ensaio de fratura em modo I em DCT para diferentes \dot{w} e W .

\dot{w}	W	$P_{max}^{\dot{w}_i}$ (kN)	$C_i^{\dot{w}_i}$ E-02 (mm/kN)	$G_F^{\dot{w}_i}$ (N/m)
\dot{w}_3	W_3	2,40	2,32	119,51
		2,51	2,11	114,58
		2,37	1,88	116,40
	W_2	1,92	2,26	106,36
		1,78	2,15	119,17
		1,37	2,17	105,91
	W_1	1,34	1,70	108,65
		1,49	1,62	118,17
		1,38	1,62	106,77
\dot{w}_2	W_3	2,17	1,76	106,39
		2,25	1,51	107,38
		2,21	1,94	110,45
	W_2	1,64	1,90	116,28
		1,59	2,42	115,88
		1,69	1,93	114,11
	W_1	1,67	2,00	119,81
		1,24	1,63	97,17
		1,25	1,58	98,21
\dot{w}_1	W_3	1,30	1,56	103,72
		2,24	2,03	92,35
		2,11	1,99	98,19
	W_2	1,61	2,11	123,90
		1,52	2,03	124,46
		1,22	2,06	92,36
	W_1	1,25	2,18	113,51
		1,33	2,21	93,47

medida que a \dot{w} acrescenta, ou seja, as variáveis G_F , P_{max} e C_i são dependentes da \dot{w} , assim, $G_F^{\dot{w}}$, $P_{max}^{\dot{w}}$ e $C_i^{\dot{w}}$.

Na Tabela 5.6 são apresentados os valores médios experimentais da $\mu_{P_{max}}$, μ_{G_F} e μ_{C_i} para \dot{w}_1 , \dot{w}_2 e \dot{w}_3 e os diferentes W do DCT. O comportamento do P_{max} com respeito ao aumento da \dot{w} é o esperado, pois o DCT com W_3 tem $\mu_{P_{max}}$ é de 2,18 kN, 2,21 kN e 2,43 kN para \dot{w}_1 , \dot{w}_2 e \dot{w}_3 , respectivamente, similar comportamento teve o W_2 . Por último as $\mu_{P_{max}}$ para o W_1 são: 1,27 kN, 1,26 kN e 1,40 kN para \dot{w}_1 , \dot{w}_2 e \dot{w}_3 , indicando pouca diferença nos resultados entre as \dot{w}_1 e \dot{w}_2 . Entretanto, os valores do μ_{C_i} são similares para todas as \dot{w} e os W , por outro lado, os resultados da μ_{G_F} tem comportamento crescente para os W_1 e W_3 , o W_2 apresenta alta variação dos resultados, levando em consideração as \dot{w}_1 , \dot{w}_2 e \dot{w}_3 .

Tabela 5.6: Valores experimentais da $\mu_{P_{max}}$, μ_{C_i} e μ_{G_F} do ensaio de fratura em modo I em DCT para diferentes \dot{w} e W .

\dot{w}	W	$\mu_{P_{max}}$ (kN)	μ_{C_i} E-02 (mm/kN)	μ_{G_F} (N/m)
\dot{w}_3	W_3	2,43	2,10	116,83
	W_2	1,85	2,20	112,76
	W_1	1,40	1,78	109,87
\dot{w}_2	W_3	2,21	1,74	108,07
	W_2	1,65	2,12	116,52
	W_1	1,26	1,59	99,70
\dot{w}_1	W_3	2,18	2,01	95,27
	W_2	1,57	2,07	124,18
	W_1	1,27	2,15	99,78

5.1.6 Resultados do EEB sobre o DCT considerando diferentes \dot{w}

Os parâmetros A e C da mecânica da fratura usados no EEB são estimados pelo método dos mínimos quadrados conforme as Equações 2.67 e 2.68, na qual os dados de entrada são apresentados no anexo II nas Tabelas A.II.1-3 e os resultados da regressão são apresentados na Figura 5.13a-c. Existe, conforme aos resultados do EEB, uma dependência dos parâmetros A e B com respeito à \dot{w} .

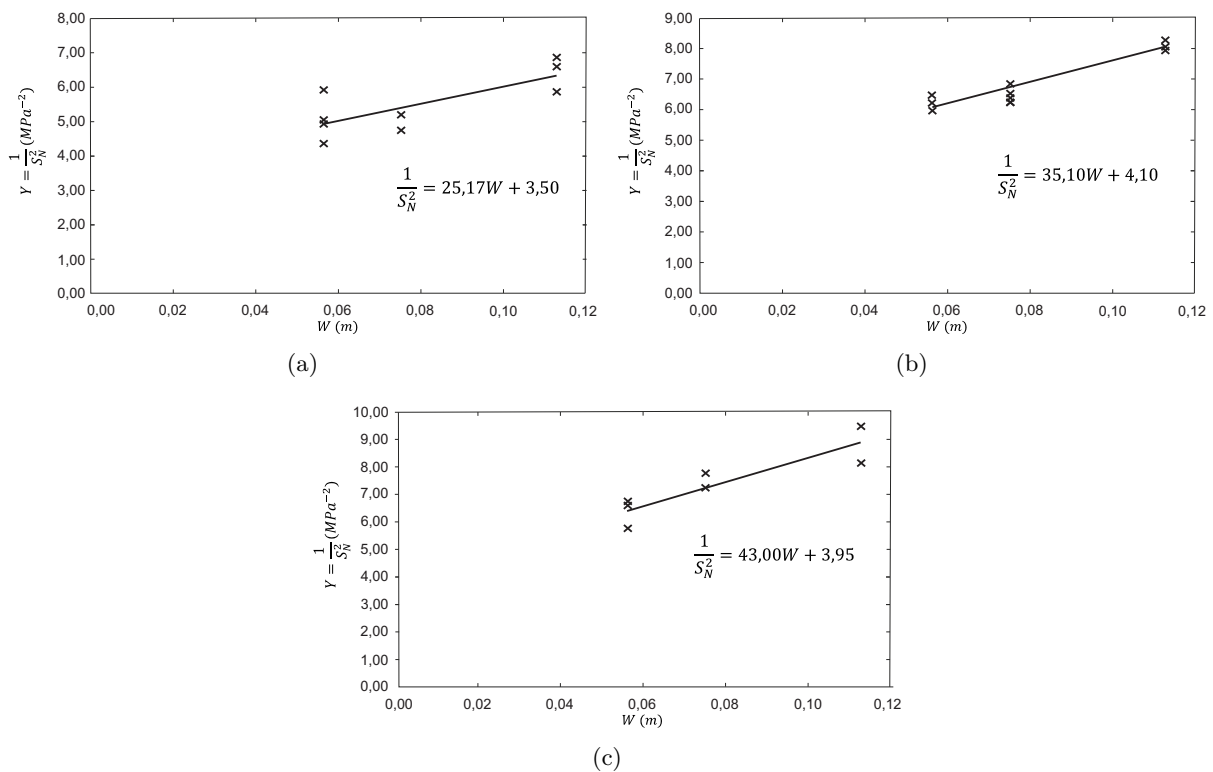


Figura 5.13: Resultados do EEB para diferentes W e \dot{w} , a) \dot{w}_3 , b) \dot{w}_2 , e c) \dot{w}_1 .

Uma análise do comportamento das tensões com respeito de W e as diferentes \dot{w} , são dadas nas regressões apresentadas nas Figuras 5.13a-c, indicando que S_N segue uma tendência decrescente com a diminuição da \dot{w} e o aumento do tamanho do DCT, de forma não linear, conforme é apresentado na Figura 5.14. Esta pesquisa comprovou que a afirmação de Borges *et al.* (2016) é correta quando diz que S_N é decrescente com o aumento da altura, ao referir-se a vigas e, isto é, estendido para DCT de altura W em materiais quase-frágeis.

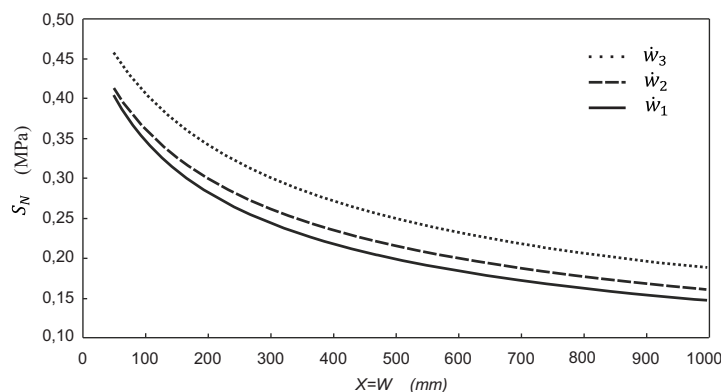


Figura 5.14: Tensão nominal avaliada para diferentes \dot{w} do ensaio de fratura em modo I em DCT.

Utilizando os resultados da regressão (A, C) para as \dot{w} analisadas, é possível obter a G_f conforme a Equação 2.71 para o DCT, e as μ e o V encontrados são apresentados na Tabela 5.7. A c_f definida na Equação 2.73 é calculada levando em consideração os resultados das regressões, e as μ e o V encontrados para cada \dot{w} são dados na Tabela 5.7. Por último, os resultados do μ_{CTOD_C} , conforme a Equação 2.77, e $\mu_{K_{IC}}$, conforme a Equação 2.75, aplicando o EEB em DCT e diferentes \dot{w} , são apresentados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Valores da μ_{G_f} , μ_{c_f} , μ_{CTOD_C} e $\mu_{K_{IC}}$ aplicando EEB no ensaio de fratura em modo I em DCT para diferentes \dot{w} .

\dot{w}	W	μ_{G_f} (N/m)	μ_{c_f} (mm)	μ_{CTOD_C} E-02 (mm)	$\mu_{K_{IC}}$ (MPa m ^{1/2})
\dot{w}_3	W_3	76,39 (10)	23,38	2,22 (10)	1,68
	W_2	80,50 (6)	23,38	2,34 (6)	1,68
	W_1	65,61 (13)	23,38	1,91 (13)	1,68
\dot{w}_2	W_3	46,53 (13)	19,60	1,46 (13)	1,42
	W_2	54,97 (11)	19,60	1,73 (11)	1,42
	W_1	42,62 (2)	19,60	1,34 (2)	1,42
\dot{w}_1	W_3	45,12 (1)	16,04	1,42 (1)	1,29
	W_2	46,39 (4)	16,05	1,46 (4)	1,29
	W_1	47,83 (4)	16,04	1,50 (4)	1,29

Os valores da μ encontrados são os esperados com respeito ao aumento do W , pois na medida que o tamanho do DCT acrescenta os valores da μ_{G_f} aumentam. Entretanto, as μ_{c_f} são iguais para qualquer W em cada uma das \dot{w} , pois a c_f depende do material e do tamanho. A μ_{CTOD_C} apresenta alguma variação nos resultados da μ , possivelmente devido ao C_i embora o K_{IC} não

apresenta variação entre os diferentes W e igual \dot{w} , pois ele depende de $g(\alpha)$ e A .

5.1.7 Testes de análise de variância das propriedades da fratura

Os parâmetros da fratura encontrados nesta pesquisa apresentam variação nas μ , devido ao incremento da \dot{w} e o W . A seguir foram realizados teste de uniformidade de variância e teste de médias das variáveis G_F , G_f , c_f , $CTOD_C$, E e Ω levando em consideração a \dot{w} , com valores de 0,60 mm/min e 0,06 mm/min. Com o intuito de estabelecer se estatisticamente as μ dos parâmetros da fratura analisados são iguais para cada W e \dot{w} analisadas. Foram realizados testes de uniformidade de variância e medias (análise de variância de um fator, anova).

Um teste de hipóteses dos resultados da G_F , conforme a Equação 2.79, são apresentados na Tabela 5.8, na qual são exibidos o teste de uniformidade de variâncias, que vai permitir estabelecer se as variâncias são estatisticamente iguais, ou não, assim como uma análise de anova das médias. No anexo II encontram-se os resultados obtidos dos ensaios para G_F com respeito da \dot{w} e W , Tabela A.II.4, e o teste de uniformidade de σ^2 apresentam-se nas Tabelas A.II.5-6, da mesma forma que, a anova das μ estão nas Tabelas A.II.7-8. O critério estabelecido para determinar se a hipótese nula (H_0) é aceita, é $F < F_{critico}$ ou $p\text{-valor} > \alpha$ (nível de significância, $\alpha = 0,05$), caso contrário a hipótese nula é rejeitada e é aceita H_1 para os dados apresentados nas Tabelas A.II.5-8. Na análise de anova da μ foram levados em consideração o teste de uniformidade das σ^2 , na qual a $\sigma_{G_{FW}}^2$ representa a σ^2 da G_F para o W e μ da G_F para W , é $\mu_{G_{FW}}$. Os resultados apresentados na Tabela 5.8 indicaram que as $\sigma_{G_F}^2$ para 0,60 mm/min e W_1, W_2, W_3 são estatisticamente iguais, assim como, para 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 e um $p\text{-valor} > 0,05$, como é mostrado na Tabela 5.8. Os resultados obtidos da análise de anova das μ indicam que não há diferença estatística entre as $\mu_{G_{FW}}$ para 0,60 mm/min e 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 com um $p\text{-valor} > 0,05$.

Tabela 5.8: Uniformidade da variância e teste de médias para os resultados da G_F , para diferentes \dot{w} e W .

Teste	\dot{w}_3	\dot{w}_1
<i>Uniformidade das variâncias</i>		
H_0 :	$\sigma_{G_{FW_1}}^2 = \sigma_{G_{FW_2}}^2 = \sigma_{G_{FW_3}}^2$	$\sigma_{G_{FW_1}}^2 = \sigma_{G_{FW_2}}^2 = \sigma_{G_{FW_3}}^2$
H_1 :	$\sigma_{G_{FW_1}}^2 \neq \sigma_{G_{FW_2}}^2 \neq \sigma_{G_{FW_3}}^2$	$\sigma_{G_{FW_1}}^2 \neq \sigma_{G_{FW_2}}^2 \neq \sigma_{G_{FW_3}}^2$
$p\text{-valor}$	0,15	0,07
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
<i>Teste de médias</i>		
H_0 :	$\mu_{G_{FW_1}} = \mu_{G_{FW_2}} = \mu_{G_{FW_3}}$	$\mu_{G_{FW_1}} = \mu_{G_{FW_2}} = \mu_{G_{FW_3}}$
H_1 :	$\mu_{G_{FW_1}} \neq \mu_{G_{FW_2}} \neq \mu_{G_{FW_3}}$	$\mu_{G_{FW_1}} \neq \mu_{G_{FW_2}} \neq \mu_{G_{FW_3}}$
$p\text{-valor}$	0,34	0,05
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
As $\sigma_{G_F}^2$ e as μ_{G_F} correspondem a valores amostrais		

Um teste de hipóteses dos resultados da c_f , conforme a Equação 2.73 são apresentados na Tabela

5.9, na qual são exibidos o teste de uniformidade de variâncias que estabelece se as variâncias são estatisticamente iguais, ou não, assim como uma análise de anova das médias. No anexo II encontram-se os resultados obtidos para c_f com respeito da \dot{w} e W , Tabela A.II.9, e o teste de uniformidade de σ^2 apresentam-se nas Tabelas A.II.10-11 da mesma forma que, a anova das μ estão nas Tabelas A.II.12-13. Na análise de anova da μ foram levados em consideração o teste de uniformidade das σ^2 , na qual a $\sigma_{c_f W}^2$ representa a σ^2 da c_f para o W e μ da c_f para W , é $\mu_{c_f W}$. Os resultados apresentados na Tabela 5.9 indicaram que as $\sigma_{c_f}^2$ para 0,60 mm/min e W_1, W_2, W_3 são estatisticamente iguais, assim como para 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 e um p -valor $> 0,05$, como é mostrado na Tabela 5.9. Os resultados obtidos da análise de anova das μ indicam, que não há diferença estatística entre as $\mu_{c_f W}$ para 0,60 mm/min e 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 com um p -valor $> 0,05$.

Tabela 5.9: Uniformidade da variância e teste de médias para os resultados da c_f , para diferentes \dot{w} e W .

<i>Teste</i>	\dot{w}_3	\dot{w}_1
<i>Uniformidade das variâncias</i>		
H_0 :	$\sigma_{c_f W_1}^2 = \sigma_{c_f W_2}^2 = \sigma_{c_f W_3}^2$	$\sigma_{c_f W_1}^2 = \sigma_{c_f W_2}^2 = \sigma_{c_f W_3}^2$
H_1 :	$\sigma_{c_f W_1}^2 \neq \sigma_{c_f W_2}^2 \neq \sigma_{c_f W_3}^2$	$\sigma_{c_f W_1}^2 \neq \sigma_{c_f W_2}^2 \neq \sigma_{c_f W_3}^2$
p -valor	0,25	0,24
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
<i>Teste de médias</i>		
H_0 :	$\mu_{c_f W_1} = \mu_{c_f W_2} = \mu_{c_f W_3}$	$\mu_{c_f W_1} = \mu_{c_f W_2} = \mu_{c_f W_3}$
H_1 :	$\mu_{c_f W_1} \neq \mu_{c_f W_2} \neq \mu_{c_f W_3}$	$\mu_{c_f W_1} \neq \mu_{c_f W_2} \neq \mu_{c_f W_3}$
p -valor	0,92	0,10
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
As $\sigma_{c_f}^2$ e as μ_{c_f} correspondem a valores amostrais		

Um teste de hipóteses dos resultados da G_f conforme a Equação 2.71 são apresentados na Tabela 5.10, na qual são exibidos o teste de uniformidade de variâncias, que vai permitir estabelecer se as variâncias são estatisticamente iguais, ou não, assim como uma análise de anova das médias. No anexo II encontram-se os resultados obtidos para G_f com respeito da \dot{w} e W , na Tabela A.II.14, e o teste de uniformidade de σ^2 apresentam-se nas Tabelas A.II.15-16 da mesma forma que, a anova das μ estão nas Tabelas A.II.17-18. Na análise de anova da μ foram levados em consideração o teste de uniformidade das σ^2 , na qual a $\sigma_{G_f W}^2$ representa a σ^2 da G_f para o W e μ da G_f para W , é $\mu_{G_f W}$. Os resultados apresentados na Tabela 5.10 indicaram que as $\sigma_{G_f}^2$ para 0,60 mm/min e W_1, W_2, W_3 são estatisticamente iguais, assim como para 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 e um p -valor $> 0,05$, como é mostrado na Tabela 5.10. Os resultados obtidos da análise de anova das μ indicam, que não há diferença estatística entre as $\mu_{G_f W}$ para 0,60 mm/min e 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 com um p -valor $> 0,05$.

Um teste de hipóteses dos resultados da $CTOD_C$ conforme a Equação 2.77 são apresentados na Tabela 5.11, na qual são exibidos o teste de uniformidade de variâncias, que vai permitir estabelecer se as variâncias são estatisticamente iguais, ou não, assim como uma análise de anova das médias.

Tabela 5.10: Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados da G_f , para diferentes \dot{w} e W .

<i>Teste</i>	\dot{w}_3	\dot{w}_1
<i>Uniformidade das variâncias</i>		
$H_0 :$	$\sigma_{G_f W_1}^2 = \sigma_{G_f W_2}^2 = \sigma_{G_f W_3}^2$	$\sigma_{G_f W_1}^2 = \sigma_{G_f W_2}^2 = \sigma_{G_f W_3}^2$
$H_1 :$	$\sigma_{G_f W_1}^2 \neq \sigma_{G_f W_2}^2 \neq \sigma_{G_f W_3}^2$	$\sigma_{G_f W_1}^2 \neq \sigma_{G_f W_2}^2 \neq \sigma_{G_f W_3}^2$
<i>p - valor</i>	0,31	0,07
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
<i>Teste de médias</i>		
$H_0 :$	$\mu_{G_f W_1} = \mu_{G_f W_2} = \mu_{G_f W_3}$	$\mu_{G_f W_1} = \mu_{G_f W_2} = \mu_{G_f W_3}$
$H_1 :$	$\mu_{G_f W_1} \neq \mu_{G_f W_2} \neq \mu_{G_f W_3}$	$\mu_{G_f W_1} \neq \mu_{G_f W_2} \neq \mu_{G_f W_3}$
<i>p - valor</i>	0,13	0,32
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
As $\sigma_{G_f}^2$ e as μ_{G_f} correspondem a valores amostrais		

No anexo II encontram-se os resultados obtidos para $CTOD_C$ com respeito da \dot{w} e W , na Tabela A.II.19, e o teste de uniformidade de σ^2 apresentam-se nas Tabelas A.II.20-21 da mesma forma que, a anova das μ estão nas Tabelas A.II.22-23. Na análise de anova da μ foram levados em consideração o teste de uniformidade das σ^2 , na qual a $\sigma_{CTOD_C W}^2$ representa a σ^2 da $CTOD_C$ para o W e μ da $CTOD_C$ para W , é $\mu_{CTOD_C W}$. Os resultados apresentados na Tabela 5.11 indicaram que as $\sigma_{CTOD_C}^2$ para 0,60 mm/min e W_1, W_2, W_3 são estatisticamente iguais, assim como para 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 e um *p - valor* $> 0,05$, como é mostrado na Tabela 5.11. Os resultados obtidos da análise de anova das μ indicam, que não há diferença estatística entre as μ_{CTOD_C} para 0,60 mm/min e 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 com um *p - valor* $> 0,05$.

Tabela 5.11: Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados do $CTOD_C$, para diferentes \dot{w} e W .

<i>Teste</i>	\dot{w}_3	\dot{w}_1
<i>Uniformidade das variâncias</i>		
$H_0 :$	$\sigma_{CTOD_C W_1}^2 = \sigma_{CTOD_C W_2}^2 = \sigma_{CTOD_C W_3}^2$	$\sigma_{CTOD_C W_1}^2 = \sigma_{CTOD_C W_2}^2 = \sigma_{CTOD_C W_3}^2$
$H_1 :$	$\sigma_{CTOD_C W_1}^2 \neq \sigma_{CTOD_C W_2}^2 \neq \sigma_{CTOD_C W_3}^2$	$\sigma_{CTOD_C W_1}^2 \neq \sigma_{CTOD_C W_2}^2 \neq \sigma_{CTOD_C W_3}^2$
<i>p - valor</i>	0,76	0,06
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
<i>Teste de médias</i>		
$H_0 :$	$\mu_{CTOD_C W_1} = \mu_{CTOD_C W_2} = \mu_{CTOD_C W_3}$	$\mu_{CTOD_C W_1} = \mu_{CTOD_C W_2} = \mu_{CTOD_C W_3}$
$H_1 :$	$\mu_{CTOD_C W_1} \neq \mu_{CTOD_C W_2} \neq \mu_{CTOD_C W_3}$	$\mu_{CTOD_C W_1} \neq \mu_{CTOD_C W_2} \neq \mu_{CTOD_C W_3}$
<i>p - valor</i>	0,13	0,33
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
As $\sigma_{CTOD_C}^2$ e as μ_{CTOD_C} correspondem a valores amostrais		

Um teste de hipóteses dos resultados da E conforme a Equação 2.69 são apresentados na Tabela 5.12, na qual são exibidos o teste de uniformidade de variâncias, que estabelece se as variâncias são estatisticamente iguais, ou não, assim como uma análise de anova das médias. No anexo II

encontram-se os resultados obtidos para E com respeito da \dot{w} e W , na Tabela A.II.24, e o teste de uniformidade de σ^2 apresentam-se nas Tabelas A.II.25-26 da mesma forma que, a anova das μ estão nas Tabelas A.II.27-28. Na análise de anova da μ foram levados em consideração o teste de uniformidade das σ^2 , na qual a σ_{EW}^2 representa a σ^2 da E para o W e μ da E para W , é μ_{EW} . Os resultados apresentados na Tabela 5.12 indicaram que as σ_E^2 para 0,60 mm/min e W_1, W_2, W_3 são estatisticamente iguais, assim como para 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 e um p -valor $> 0,05$, como é mostrado na Tabela 5.12. Os resultados obtidos da análise de anova das μ indicam, que não há diferença estatística entre as μ_E para 0,60 mm/min e 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 com um p -valor $> 0,05$.

Tabela 5.12: Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados do E , para diferentes \dot{w} e W .

Teste	\dot{w}_3	\dot{w}_1
<i>Uniformidade das variâncias</i>		
H_0 :	$\sigma_{EW_1}^2 = \sigma_{EW_2}^2 = \sigma_{EW_3}^2$	$\sigma_{EW_1}^2 = \sigma_{EW_2}^2 = \sigma_{EW_3}^2$
H_1 :	$\sigma_{EW_1}^2 \neq \sigma_{EW_2}^2 \neq \sigma_{EW_3}^2$	$\sigma_{EW_1}^2 \neq \sigma_{EW_2}^2 \neq \sigma_{EW_3}^2$
p -valor	0,50	0,06
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
<i>Teste de médias</i>		
H_0 :	$\mu_{EW_1} = \mu_{EW_2} = \mu_{EW_3}$	$\mu_{EW_1} = \mu_{EW_2} = \mu_{EW_3}$
H_1 :	$\mu_{EW_1} \neq \mu_{EW_2} \neq \mu_{EW_3}$	$\mu_{EW_1} \neq \mu_{EW_2} \neq \mu_{EW_3}$
p -valor	0,12	0,33
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
As σ_E^2 e as μ_E correspondem a valores amostrais		

Um teste de hipóteses dos resultados da Ω conforme a Equação 2.78 são apresentados na Tabela 5.13, na qual são exibidos o teste de uniformidade de variâncias, que estabelece se as variâncias são estatisticamente iguais, ou não, assim como uma análise de anova das médias. No anexo II encontram-se os resultados obtidos para Ω com respeito da \dot{w} e W , na Tabela A.II.29, e o teste de uniformidade de σ^2 apresentam-se nas Tabelas A.II.30-31 da mesma forma que, a anova das μ estão nas Tabelas A.II.32-33. Na análise de anova da μ foram levados em consideração o teste de uniformidade das σ^2 , na qual a $\sigma_{\Omega W}^2$ representa a σ^2 da Ω para o W e μ da Ω para W , é $\mu_{\Omega W}$. Os resultados apresentados na Tabela 5.13 indicaram que as σ_Ω^2 para 0,60 mm/min e W_1, W_2, W_3 são estatisticamente iguais, assim como para 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 e um p -valor $> 0,05$, como é mostrado na Tabela 5.13. Os resultados obtidos da análise de anova das μ indicam, que não há diferença estatística entre as μ_Ω para 0,60 mm/min e 0,06 mm/min com um nível de significância de 0,05 com um p -valor $> 0,05$.

Tabela 5.13: Uniformidade da σ^2 e teste de μ para os resultados do Ω , para diferentes \dot{w} e W .

<i>Teste</i>	\dot{w}_3	\dot{w}_1
<i>Uniformidade das variâncias</i>		
$H_0 :$	$\sigma_{\Omega W_1}^2 = \sigma_{\Omega W_2}^2 = \sigma_{\Omega W_3}^2$	$\sigma_{\Omega W_1}^2 = \sigma_{\Omega W_2}^2 = \sigma_{\Omega W_3}^2$
$H_1 :$	$\sigma_{\Omega W_1}^2 \neq \sigma_{\Omega W_2}^2 \neq \sigma_{\Omega W_3}^2$	$\sigma_{\Omega W_1}^2 \neq \sigma_{\Omega W_2}^2 \neq \sigma_{\Omega W_3}^2$
<i>p – valor</i>	0,89	0,25
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
<i>Teste de médias</i>		
$H_0 :$	$\mu_{\Omega W_1} = \mu_{\Omega W_2} = \mu_{\Omega W_3}$	$\mu_{\Omega W_1} = \mu_{\Omega W_2} = \mu_{\Omega W_3}$
$H_1 :$	$\mu_{\Omega W_1} \neq \mu_{\Omega W_2} \neq \mu_{\Omega W_3}$	$\mu_{\Omega W_1} \neq \mu_{\Omega W_2} \neq \mu_{\Omega W_3}$
<i>p – valor</i>	0,41	0,66
Resultado	Aceita H_0	Aceita H_0
As σ_{Ω}^2 e as μ_{Ω} correspondem a valores amostrais		

Na Tabela 5.14 são apresentados os resultados dos valores médios do E encontrado no ensaio de fratura em modo I em DCT calculado segundo a equação 2.69, assim como, a μ da f_t , para diferentes tamanhos e \dot{w} . Há pouca variação nos valores μ do E ao acrescentar a \dot{w} ; é de se esperar que ao acrescentar a \dot{w} o E aumente ligeiramente, mas isto não aconteceu em forma geral entre os diferentes W , pois o E depende do C_i . Os valores μ da f_t estão em torno de 5,98 MPa como o valor μ e apresenta pouca variação.

Tabela 5.14: Valores da μ e V (%) amostrais do $E^{\dot{w}_i}$ e f_t , para diferentes \dot{w} e W .

\dot{w}	W	$E^{\dot{w}_i}$ (GPa)	f_t (MPa)
\dot{w}_3	W_3	37,04 (10)	5,96 (4)
	W_2	35,00 (6)	5,85 (7)
	W_1	43,37 (12)	5,85 (7)
\dot{w}_1	W_3	36,81 (1)	6,03 (4)
	W_2	35,80 (4)	6,07 (4)
	W_1	34,80 (4)	6,11 (6)

() Coeficiente de variação, %

Os valores da μ e os V encontrados pela $G_F^{\dot{w}_i}$, $G_f^{\dot{w}_i}$, f_t , $\Omega^{\dot{w}_i}$, $E_{Compliance}^{\dot{w}_i}$ e usados na modelagem dos DCT são apresentados na Tabela 5.15. O desempenho da G_f no ensaio de fratura em modo I em DCT, segue o mesmo comportamento da G_F , pois, ao acrescentar a \dot{w} aumenta a G_f , resultado esperado, pois o valor do P_{max} cresce. As variações dos parâmetros da mecânica da fratura foram avaliadas por Zimmermann *et al.* (2014), que avaliaram, entre outras, a G_f para teste de tronco de cone de 45 e 75 mm e tempo de cura de 28 e 176 dias, obtendo V máximo de 23 %. Esta pesquisa estabeleceu que o V_{G_f} máximo foi de 13 % para um tempo de cura de 60 dias e os resultados são referidos na Tabela 5.15. Para tempo de curado maiores, as variações na G_f esperadas podem

aumentar, segundo se deduz do trabalho de Bažant *et al.* (1992) enquanto que o K_{Ic} acrescenta se a \dot{w} aumenta.

Tabela 5.15: Valores das estatísticas μ e V (%) amostrais de entrada do modelo numérico, para diferentes \dot{w} e W .

\dot{w}	W	$G_F^{\dot{w}_i}$ (N/m)	$G_f^{\dot{w}_i}$ (N/m)	f_t (MPa)	$\Omega^{\dot{w}_i}$ (-)	$E_{Compliance}^{\dot{w}_i}$ (MPa)
\dot{w}_3	W_3	116,83 (3)	76,39 (10)	5,85 (7)	0,12 (5)	37,04 (10)
	W_2	112,76 (8)	80,50 (6)	5,85 (7)	0,12 (8)	35,00 (6)
	W_1	109,87 (6)	65,61 (13)	5,96 (4)	0,11 (12)	43,37 (12)
\dot{w}_1	W_3	95,27 (4)	45,12 (1)	6,11 (6)	0,07 (23)	36,81 (1)
	W_2	124,18 (1)	46,39 (4)	6,07 (4)	0,06 (24)	35,80 (4)
	W_1	99,78 (12)	47,83 (4)	6,03 (4)	0,08 (39)	34,80 (4)

() Coeficiente de variação, %; (-) Adimensional.

Os parâmetros do modelo coesivo encontrados nesta pesquisa, indicam que Ω variou entre 0,06 até 0,12, valores habitualmente em DCT reportados, estão entre 0,03 a 0,18 (Amirkhanian *et al.*, 2015). Este trabalho concluiu que se \dot{w} aumenta o fator de quebra, Ω , incrementa para qualquer tamanho de DCT e portanto Ω é dependente da \dot{w} .

5.2 Validação do modelo numérico e propriedades do DCT experimental

Os parâmetros da mecânica da fratura do material quase frágil usado no DCT foram os definidos na Tabela 5.15 e as \dot{w} utilizadas são: \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . No anexo III, são apresentados as análises e os resultados da validação da malha e o número de passos de deslocamento levados em consideração no modelo de EF, assim como, a ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} . Os resultado da modelagem do DCT são apresentadas a seguir.

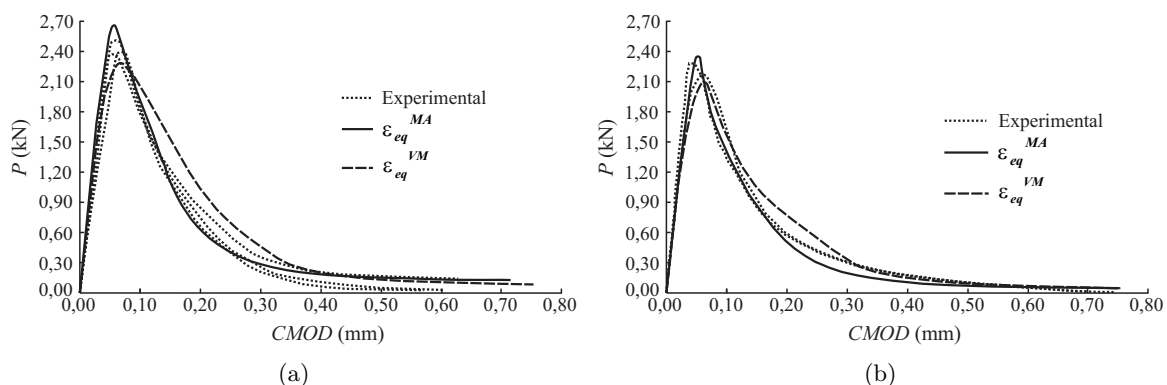


Figura 5.15: Curvas experimentais P - $CMOD$ e a proposta usando EF com diferente ε_{eq} em DCT de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 ; b) \dot{w}_1

O trecho inicial da curva P - $CMOD$ é definido em forma adequada para a \dot{w}_3 e \dot{w}_1 para os modelos de EF que consideram a ε_{eq}^{MA} e a ε_{eq}^{VM} . O \hat{P}_{max} para DCT de W_3 é melhor definido por o modelo de EF que leva em consideração a ε_{eq}^{MA} para as 2 \dot{w} analisadas. O modelo que melhor define os trechos descendentes da curva P - $CMOD$ é o modelo que leva em consideração a ε_{eq}^{MA} , pois é o modelo que melhor ajustam-se às curvas experimentais P - $CMOD$ e, portanto, vai definir melhor a G_F . A seguir é definida a curva P - $CMOD$ proposta utilizando o modelo de EF tendo em conta a ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} de W_2 e diferentes \dot{w} para materiais quase frágil e os resultados são apresentados a seguir.

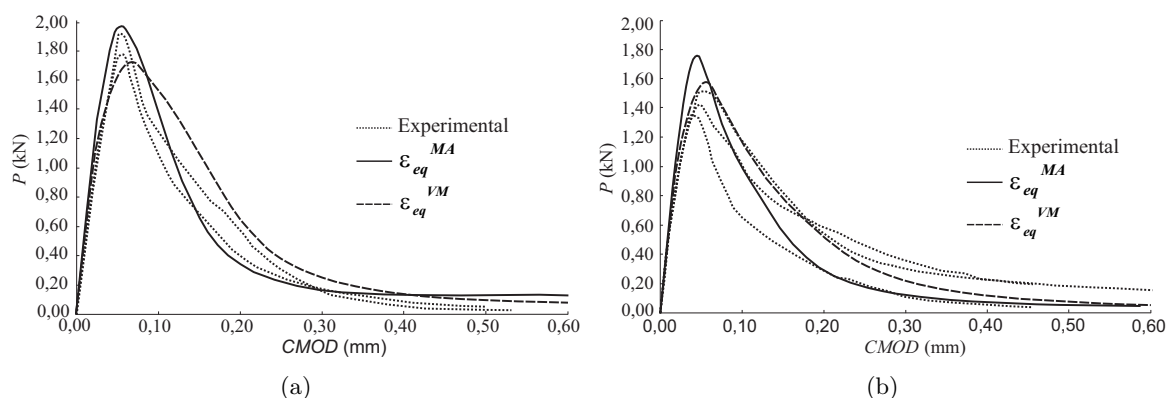


Figura 5.16: Curvas experimentais P - $CMOD$ e a proposta usando EF com diferente ε_{eq} em DCT de W_2 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1

Os modelos de EF definem corretamente o comportamento linear da curva P - $CMOD$, apresentado na Figura 5.16, para W_2 e diferentes \dot{w} embora o modelo que leva em consideração a ε_{eq}^{VM} faz uma melhor previsão do \hat{P}_{max} . O comportamento do trecho descendente da curva P - $CMOD$ apresenta maior dispersão em seu comportamento ao encontrada para W_3 , possivelmente pela influência do c_f em W menores (do tipo de W_2 e W_1), como apresentadas nas Figuras 5.16 e 5.17.

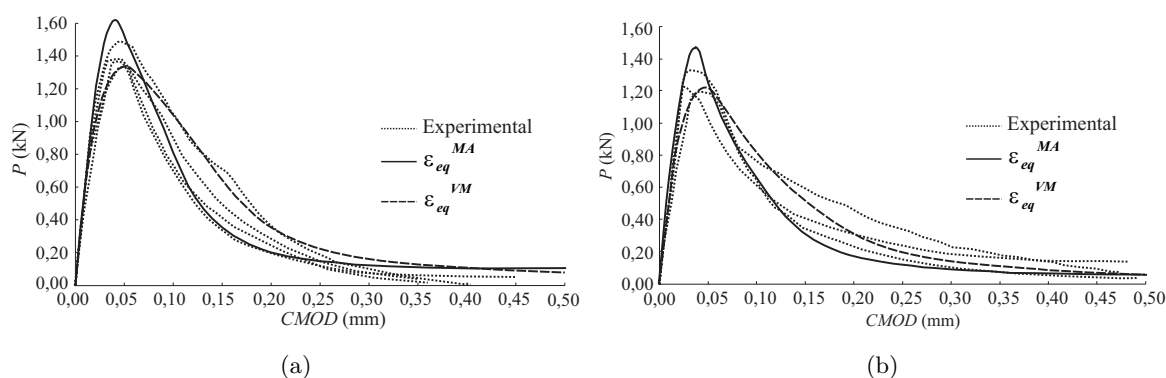


Figura 5.17: Curvas experimentais P - $CMOD$ e a proposta usando EF com diferente ε_{eq} em DCT de W_1 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1

A curva P - $CMOD$ proposta utilizando o modelo de EF tendo em conta a ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} de W_1 e diferentes \dot{w} , são apresentados na Figura 5.17a-b. Os modelos definem corretamente o setor linear da curva P - $CMOD$ e o modelo de EF que utiliza ε_{eq}^{VM} é o modelo que melhor atinge o valor do \hat{P}_{max} . O braço descendente da curva P - $CMOD$ apresenta dispersão em seu comportamento para

as \dot{w} analisadas, possivelmente pela influência do c_f em W pequenos, veja a Figura 5.17. Além disso os resultados mostraram uma influência importante do modo de falha misto (I+II). Isso é porque algumas curvas experimentais P - $CMOD$ são melhor definidas pelo modelo que leva em consideração a ε_{eq}^{VM} .

O desvio médio do \hat{P}_{max} encontrado da simulação em EF é $\Theta_{\hat{P}_{max}^{Sim}}$ e serão levado em consideração na análise dos \hat{P}_{max} para estimar a precisão dos modelos propostos, e é definido a seguir:

$$\Theta_{\hat{P}_{max}^{Sim}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (\hat{P}_{max_i}^{Sim} - P_{max_i}^{Exp})^2}{n_1}}, \quad \hat{P}_{max}^{Sim} \begin{cases} \hat{P}_{max}^{MA} \\ \hat{P}_{max}^{VM} \end{cases} \quad (5.1)$$

em que n_1 representa o número de resultados experimentais para cada combinação W e \dot{w} , \hat{P}_{max}^{Sim} é o \hat{P}_{max} encontrado da simulação em EF tendo em conta a ε_{eq}^{MA} , ou ε_{eq}^{VM} , $P_{max_i}^{Exp}$ representa o P_{max} experimental. Os resultados da modelagem em EF e experimentais da curva P - $CMOD$ para DCT com W_3 são apresentados na Tabela 5.16. O P_{max} experimentais encontrados para diferentes combinações de W e \dot{w} , definidos como P_{max}^{Exp} , encontram-se as colunas 3, 4, 5 e 6. Os \hat{P}_{max} encontrados da simulação, \hat{P}_{max}^{MA} e \hat{P}_{max}^{VM} , levando em consideração a ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} são mostrados nas colunas 7 e 8 respectivamente. Os $\Theta_{\hat{P}_{max}^{Sim}}$ correspondem aos $\Theta_{\hat{P}_{max}^{MA}}$ ou $\Theta_{\hat{P}_{max}^{VM}}$ para cada combinação W e \dot{w} analisada e vai depender da ε_{eq} utilizada, os resultados encontrados correspondem aos mostrados nas colunas 9 e 10. Os $\Theta_{\hat{P}_{max}^{Sim}}$ para as combinações W e \dot{w} observou-se que, $\Theta_{\hat{P}_{max}^{VM}} < \Theta_{\hat{P}_{max}^{MA}}$, indicando que o modelo numérico que leva em consideração ε_{eq}^{VM} faz uma melhor previsão do valor de \hat{P}_{max} . Porém a variação dos resultados \hat{P}_{max}^{Sim} levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} com respeito dos resultados do P_{max}^{Exp} é pequena, dado que o $\Theta_{\hat{P}_{max}^{Sim}} < 1,42E - 01$ kN indicando um ajuste adequado ao valores do P_{max} experimental.

Tabela 5.16: Desvio médio do \hat{P}_{max} levando em consideração na simulação em EF as ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} com respeito dos resultados do P_{max}^{Exp} .

W	\dot{w}	P_{max}^{Exp}			\hat{P}_{max}^{MA} (kN)	\hat{P}_{max}^{VM} (kN)	$\Theta_{\hat{P}_{max}^{MA}}$ (kN)	$\Theta_{\hat{P}_{max}^{VM}}$ (kN)	
		(kN)	(kN)	(kN)					
W_3	\dot{w}_3	2,40	2,51	2,37	2,66	2,29	1,39E-01	8,62E-02	
	\dot{w}_1	2,24	2,11		2,35	2,09	1,32E-01	7,57E-02	
W_2	\dot{w}_3	1,92	1,78		1,98	1,73	1,04E-01	9,82E-02	
	\dot{w}_1	1,61	1,52		1,76	1,58	1,42E-01	3,35E-02	
W_1	\dot{w}_3	1,37	1,34	1,49	1,38	1,62	1,34	1,16E-01	3,95E-02
	\dot{w}_1	1,22	1,25	1,33		1,47	1,22	1,20E-01	3,80E-02

No capítulo seguinte é apresentada uma comparação entre as $f_X(x)$ dos resultados obtidos via PEC_C , PEC_{Adap} e os resultados do modelo de EF do DCT na previsão do \hat{P}_{max} . Uma análise de sensibilidade dos coeficientes dos polinômios e o cálculo dos erros das $f_X(x)$ dos PEC_C e PEC_{Adap} com respeito à $f_X(x)$ da simulação em EF são determinados.

5.3 Contribuições

Neste Capítulo foi conseguido a utilização do EEB em DCT em materiais quase frágil, algo que a literatura não reporta sua utilização para estabelecer as propriedades da mecânica da fratura (c_f , G_f , G_F , $CTOD_C$) e como elas variam ao acrescentar a taxa de carregamento. Isto permitiu a determinação das propriedades do material em estruturas existentes e estabelecer critérios de reforço e conservação. Foi demonstrado estatisticamente mediante análise de variância de um fator (anova), que as médias são estatisticamente iguais para os diferentes tamanhos para as propriedades G_F , G_f , c_f , $CTOD_C$, E e Ω . Foi comprovado que a utilização da ε_{eq}^{MZ} no modelo numérico para validar os resultados da simulação, com respeito aos resultados experimentais obtidos dos ensaios de fratura em modo I, geraram bons resultados.

Capítulo 6

Quantificação da incerteza das propriedades da mecânica da fratura utilizando DCT e vigas via EF, PEC_C e P_{Adap}

Este Capítulo integra os tópicos abordados nos Capítulos 2, 4 e 5 para determinar a relação entre as VA: G_f , G_F , f_t e o Ω , com as variáveis de saída: P_{max} e G_F , usando PEC_C e PEC_{Adap} em DCT com W_3 . O Capítulo esta composto de 2 seções, inicialmente são apresentados os resultados para P_{max} e G_F , obtidos na modelagem e na análise estocástica, utilizando os PEC em DCT submetido a ensaio de fratura em modo I. Por último, os resultados do P_{max} calculado para uma viga de 250 mm de altura sometida a flexão em 3 pontos com entalhe no meio do vão. Os valores obtidos correspondem para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 e contêm: $f_{\mathbf{X}}(x)$, os valores estatísticos, o PEC_C e o PEC_{Adap} , a análise de sensibilidade e a análise do erro para cada \dot{w} analisada.

A \dot{w} utilizada para determinar os parâmetros de fratura, usada pela literatura, depende do material, em aço é utilizada \dot{w} de 0,01 mm/min; 0,10 mm/min; 1 mm/min; 10 mm/min; 100 mm/min e 500 mm/min (Musto e Alfano, 2013). Em vigas de concreto a \dot{w} é de 0,001 mm/min e 0,03 mm/min e taxas a níveis dinâmicos como 1 mm/min, 33 mm/min e 1044 mm/min (Rosa *et al.*, 2012). Estudos da variabilidade dos parâmetros de fratura P_{max} e G_F dependentes da \dot{w} são reportados em Rosa *et al.* (2012) para vigas de concreto, em que a \dot{w} quase-estática é reportada como 0,06 mm/min. Em DCT com geometria modificado (sem os buracos internos) é citado \dot{w} de 0,20 mm/min (Cifuentes *et al.*, 2017); 0,50 mm/min (Fernández-Canteli *et al.*, 2014) e 1 mm/min (Song *et al.*, 2006; Hill *et al.*, 2017). As \dot{w} utilizadas em DCT convencional são reportadas de 0,10 mm/min (Amirkhanian *et al.*, 2011) e 0,06 mm/min (Amirkhanian *et al.*, 2015).

6.1 Metodologia do PEC aplicada em DCT e vigas em material quase frágil

Na Figura 6.1 é apresentado o fluxograma utilizado para quantificar a incerteza usando PEC_C e PEC_{Adap} em ensaios de fratura em modo I em DCT e em vigas com materiais quase frágeis. As vigas simuladas são vigas com entalhe de ponta única em flexão de 3 pontos, em inglês, *single-edge-notched beams in three-point bending* (SEN-TPB).

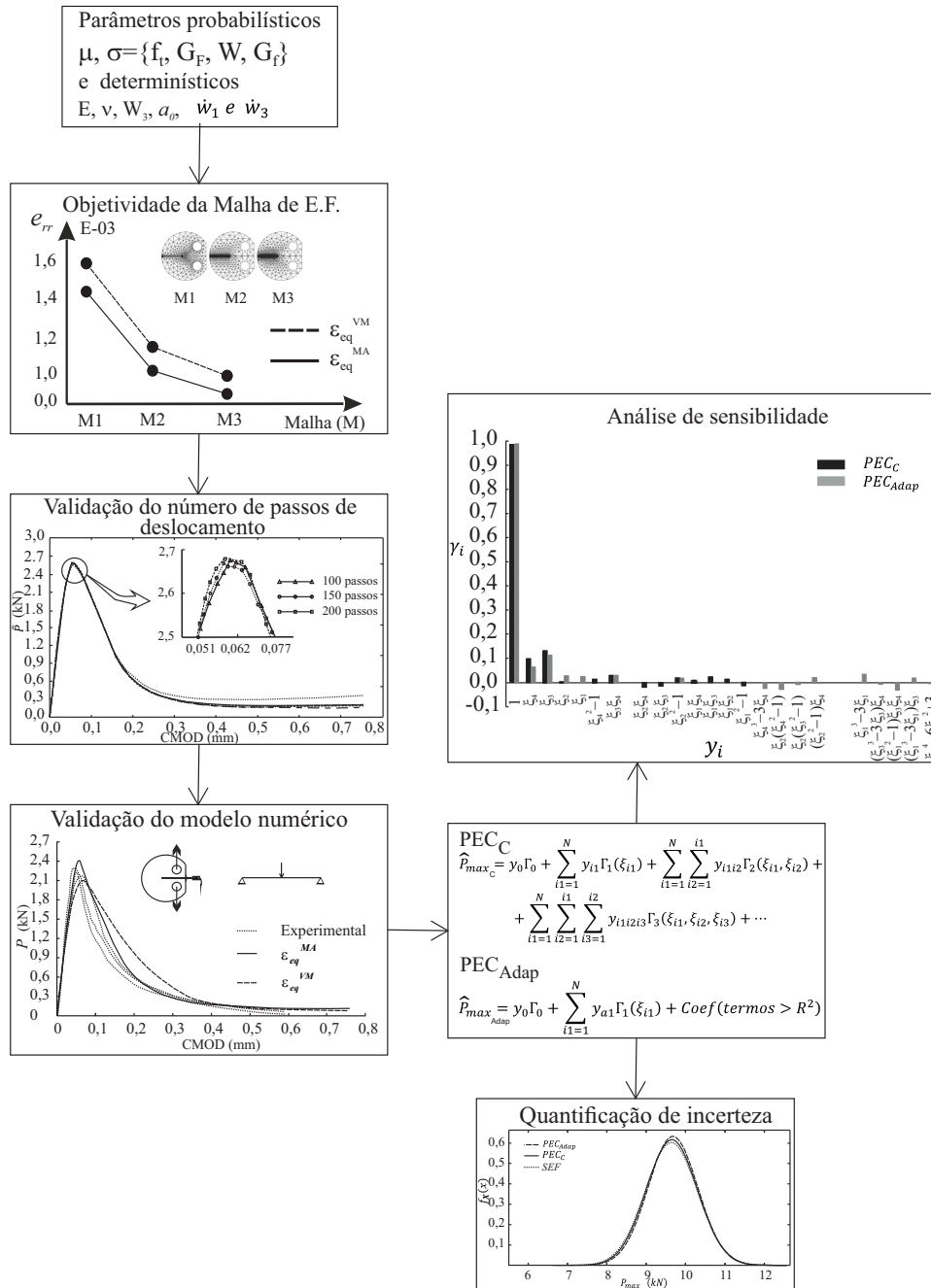


Figura 6.1: Fluxograma para quantificar a incerteza do P_{max} e G_F utilizando PEC_C e PEC_{Adap} em DCT e SEN-TPB.

O processo de quantificação da incerteza das propriedades do material à fratura, P_{max} e G_F , começa com os momentos estatísticos μ e σ das variáveis aleatórias f_t , G_F , Ω e G_f e as variáveis determinísticas E , ν , W_3 , a_0 , \dot{w}_1 e \dot{w}_3 , em que ν é a coeficiente de Poisson. Logo, é estabelecida a objetividade da malha de EF, encontrando o e_{rr} dos resultados da simulação e levando em consideração a ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} com respeito do valor médio experimental do P_{max} (\bar{P}_{max}^{Exp}), veja anexo III. Além disso, foi necessário validar o número de passos que permita definir melhor o ponto de \hat{P}_{max} , assim como, o número total de passos, apresentado no anexo III. Na continuação, é desenvolvido um modelo de EF não linear, levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} em DCT e viga. Definido o melhor modelo numérico, foram realizados N simulações de EF para diferentes combinações das VA definidas usando a sequência de Sobol, que irá definir o vetor de saída \hat{P}_{max} , necessário para determinar os N coeficientes do PEC_C e os coeficientes do PEC_{Adap} . Por último, é realizado uma análise de sensibilidade dos coeficientes dos polinômios, assim como, uma SMC sobre os PEC_C e PEC_{Adap} já regredidos para determinar as $f_{\mathbf{X}}(x)$. A comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ do vetor de saída do \hat{P}_{max} obtido da simulação em EF com respeito os \hat{P}_{max_C} e $\hat{P}_{max_{Adap}}$ gerados do PEC_C e PEC_{Adap} , respectivamente, é realizado com o intuito de encontrar o ajuste entre as $f_{\mathbf{X}}(x)$.

6.2 Influência da \dot{w} no P_{max} em DCT

Na avaliação da quantificação da incerteza do P_{max} em DCT para diferentes \dot{w} foram levadas em consideração as VA, tais como: f_t , G_F , Ω e G_f . Os valores das estatísticas da μ e V do modelo de entrada probabilísticos e determinísticos, usados na determinação da influência da \dot{w} sobre o P_{max} , são dados na Tabela 6.1. A \dot{w} adotada para o estudo das propriedades do material à fratura P_{max} e G_F em DCT é a \dot{w}_1 e \dot{w}_3 , os quais representam a \dot{w} no limite estático e quase estático.

Tabela 6.1: Valores das estatísticas amostrais das VA e determinísticas consideradas na análise probabilística do P_{max} e G_F em DCT.

Variável	\dot{w}_1			\dot{w}_3		
	μ	V (%)	$f_{\mathbf{X}}(x)$	μ	V (%)	$f_{\mathbf{X}}(x)$
f_t (MPa)	5,96	1,68	Normal	6,03	0,69	Normal
G_F (N/m)	95,30	4,33	Normal	116,80	2,13	Normal
Ω	0,21	37,70	Normal	0,41	31,99	Normal
G_f (N/m)	52,46	18,50	Normal	68,85	22,12	Normal
E (GPa)	49,20	0	‡	43,32	0	‡
ν	0,25	0	‡	0,25	0	‡
W_3 (mm)	112,92	0	‡	112,89	0	‡
a_0 (mm)	48,02	0	‡	48,02	0	‡
\dot{w}_3 (mm/min)	0,60	0	‡	0,60	0	‡
\dot{w}_1 (mm/min)	0,06	0	‡	0,06	0	‡

‡ Determinístico sem $f_{\mathbf{X}}(x)$.

Dado que não existe uma formulação matemática que defina explicitamente a saída (P_{max} e G_F) em

função das VA, o p não pode ser definido diretamente e devem ser determinado testando diferentes p , e diferentes número de pontos de colocação (N_{pc}) que permitam obter a melhor resposta. A melhor resposta é aquela que apresenta menor erro com respeito à obtida da simulação em EF para as diferentes \dot{w} analisadas. Os testes realizados incluem no PEC_C os $p = 2, 3$ e 4 com o N e $2N$ pontos de colocação. enquanto para o PEC_{Adap} foram utilizados diferentes combinações de pares (p_{max}, p_{OB}), utilizando os p usados no PEC_C . As $f_{\mathbf{X}}(x)$ obtidas a partir da SMC sobre o PEC_C e PEC_{Adap} , calculadas junto com a $f_{\mathbf{X}}(x)$ de todas as saídas (\hat{P}_{max}), usando simulação em EF de todos os testes realizados, são mostrados no anexo II, nas Figuras II.1 e II.2 das \dot{w} analisadas. Da comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ do \hat{P}_{max} para DCT com \dot{w}_3 e \dot{w}_1 , encontrou-se que o p com melhor ajuste corresponde a $p = 2$ para as 2 \dot{w} analisadas, PEC_C e PEC_{Adap} . Na Tabela 6.2 são apresentados os coeficientes usados na determinação do PEC_C e PEC_{Adap} para estimar o \hat{P}_{max} para o DCT com W_3 e as \dot{w} analisadas, tais como: p , o número de coeficientes do PEC_C (N_{PEC_C}) e do PEC_{Adap} ($N_{PEC_{Adap}}$). Assim como, o número de pontos de colocação usado no PEC_C (N_{pc_C}) e no PEC_{Adap} ($N_{pc_{Adap}}$), o número de simulações em EF (N_{SEF}) e o número de SMC usados no PEC_C e no PEC_{Adap} e é representado por $N_{SMC/PEC}$.

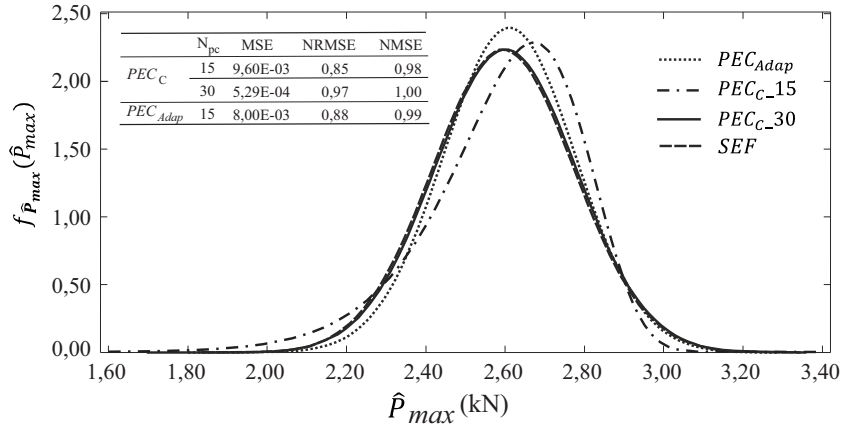
Tabela 6.2: Número de pontos de colocação de N_{PEC_C} e $N_{PEC_{Adap}}$ junto com N_{SEF} e $N_{SMC/PEC}$, necessários para quantificar a incerteza do \hat{P}_{max} para diferentes \dot{w} .

		\dot{w}_3	\dot{w}_1
p	(-)	2	2
N_{PEC_C}	(-)	15	15
$N_{PEC_{Adap}}$	(-)	10	8
N_{pc_C}	(-)	30	15
$N_{pc_{Adap}}$	(-)	15	15
N_{SEF}	(-)	290	150
$N_{SMC/PEC}$	(-)	5,0E+04	5,0E+04

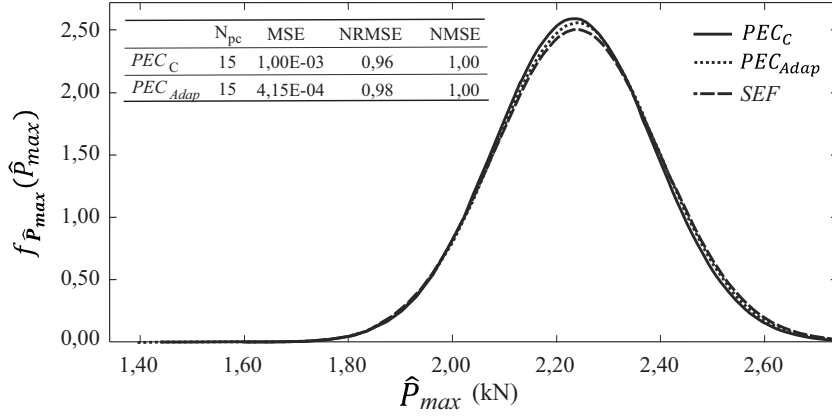
(-) Adimensional.

Para cada caso analisado, é definido o espaço amostral das VA utilizando a sequência de Sobol, o qual é o *input* do modelo de EF a ser usado no programa de Moreira e Evangelista (2016). O arquivo de saída representa o P_{max} estimado (\hat{P}_{max}) para cada caso, que agrupados todas as saídas de cada caso de análise, definem a $f_{\mathbf{X}}(x)$ denominada SEF são apresentadas nas Figuras 6.2a-b, dependendo da \dot{w} . Os vetores de saída do \hat{P}_{max} para cada caso são utilizados junto com as combinações das VA para determinar os coeficientes do PEC_C e do PEC_{Adap} , para depois usar SMC sobre os polinômios, tal que $N_{SMC/PEC_C} = N_{SMC/PEC_{Adap}} = 5E + 04$. Estas simulações definem as $f_{\mathbf{X}}(x)$ denominadas PEC_C e PEC_{Adap} , encontrando as $f_{\mathbf{X}}(x)$ que melhor ajusta à SEF é o PEC_C com $p = 2$ e $N_{pc_C} = 30$ pontos amostrais, para \dot{w}_3 . A $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_C com $p = 2$ e $N_{pc_C} = 15$, a μ do \hat{P}_{max_C} ($\mu_{\hat{P}_{max_C}}$) apresenta um deslocamento à direita da μ do \hat{P}_{max} usando simulação em EF, gerando um erro importante da $\mu_{\hat{P}_{max_C}}$, para \dot{w}_3 . No entanto, o PEC_{Adap} apresenta um ajuste adequado utilizando $p_{max} = 2$ e $p_{OB} = 1$ com $N_{pc_{Adap}} = 15$ para a \dot{w}_3 . Além disso, o PEC_C com $p = 2$ e o PEC_{Adap} com $p_{max} = 2$ e $p_{OB} = 1$ utilizaram $N_{pc_C} = N_{pc_{Adap}} = 15$ para conseguir as $f_{\mathbf{X}}(x)$ similares à esperada usando simulação em EF, com uma \dot{w}_1 . Para obter o \hat{P}_{max_C} e o $\hat{P}_{max_{Adap}}$, foram utilizadas as combinações definidas pela sequência de Sobol que

definiu os \hat{P}_{max} encontrados na simulação em EF com W_3 para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . Determinada a saída é estabelecido uma relação entre ξ e o \hat{P}_{max} em torno do PEC_C e do PEC_{Adap} , usando o método da colocação baseado em regressão para o polinômio que melhor ajusta-se à $f_{\mathbf{X}}(x)$ dos resultados da simulação em EF, conforme são apresentados na Figura 6.2a-b.



(a)



(b)

Figura 6.2: Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ dos \hat{P}_{max} usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} no ensaio de fratura em modo I com W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1 .

As $f_{\mathbf{X}}(x)$ do \hat{P}_{max} utilizando simulação em EF, PEC_C e PEC_{Adap} são apresentadas nas Figuras 6.2a-b para as \dot{w}_1 e \dot{w}_3 , na qual a determinação da $f_{\mathbf{X}}(x)$ do \hat{P}_{max} utilizando simulação em EF foram usadas todas as saídas definidas na Tabela 6.2, ou seja, 290 para a \dot{w}_3 e 150 para a \dot{w}_1 . As $f_{\mathbf{X}}(x)$ do \hat{P}_{max} é definida como $f_{\hat{P}_{max}}(\hat{P}_{max})$, denotada nas Figuras 6.2a-b como SEF, assim como, usando PEC_C é definida como $f_{\hat{P}_{max_C}}(\hat{P}_{max_C})$, representada por $PEC_C_{N_{pc_C}}$, em que N_{pc_C} pode ser (15, 30) para a \dot{w}_3 . Porém, para \dot{w}_1 a $f_{\hat{P}_{max_C}}(\hat{P}_{max_C})$ é representada por PEC_C . A $f_{\mathbf{X}}(x)$ utilizando PEC_{Adap} é definida como $f_{\hat{P}_{max_{Adap}}}(\hat{P}_{max_{Adap}})$, correspondendo nas Figuras 6.2a-b como PEC_{Adap} . Nas duas últimas $f_{\mathbf{X}}(x)$ foram geradas usando SMC, $N_{SMC}/PEC = 5E+04$ para obter a $f_{\hat{P}_{max_C}}(\hat{P}_{max_C})$ e $f_{\hat{P}_{max_{Adap}}}(\hat{P}_{max_{Adap}})$. A $f_{\hat{P}_{max_C}}(\hat{P}_{max_C})$ representada por PEC_C na Figura 6.2(a) consegue representar de forma adequada a saída, ou seja, os resultados encontrados são similares aos encontrados usando simulação de EF, para a \dot{w}_3 . A $f_{\hat{P}_{max_{Adap}}}(\hat{P}_{max_{Adap}})$

identificado como PEC_{Adap} apresenta uma maior densidade de dados perto da μ porém as caudas são similares entre SEF e PEC_{Adap} , para a \dot{w}_3 , conforme é apresentado na Figura 6.2(a). As $f_{\hat{P}_{max_C}}(\hat{P}_{max_C})$ e $f_{\hat{P}_{max_{Adap}}}(\hat{P}_{max_{Adap}})$ estão em concordância com respeito à $f_{\hat{P}_{max}}(\hat{P}_{max})$ para a \dot{w}_1 apresentadas na Figura 6.2(b). As $f_{\mathbf{X}}(x)$ apresentadas nas Figuras 6.2a-b seguem uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal para o \hat{P}_{max} para DCT com W_3 e as \dot{w} analisadas, com exceção do PEC_{C_15} que segue uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ de Weibull.

A seguir são calculados os diferentes tipos de erros utilizados na análise da convergência das $f_{\mathbf{X}}(x)$, conforme as Equações 3.1a, 3.1b e 3.1c, na qual $\hat{X} = \hat{P}_{max}$ e $\hat{X}_C = \{\hat{P}_{max_C}, \hat{P}_{max_{Adap}}\}$ obtidas pela simulação em EF, na SMC aplicado no PEC_C e no PEC_{Adap} , respectivamente. Uma análise do erro da convergência das $f_{\mathbf{X}}(x)$ utilizando PEC_C e do PEC_{Adap} , comparados com os resultados da simulação em EF (SEF), são listadas nas Figuras 6.2a-b. A $f_{\hat{P}_{max_C}}(\hat{P}_{max_C})$ ajusta-se à $f_{\hat{P}_{max}}(\hat{P}_{max})$, pois o MSE tende a zero e os $NRMSE$ e $NMSE$ tendem a 1, mostrando concordância na ajuste para \dot{w}_3 . Na comparação da $f_{\hat{P}_{max_{Adap}}}(\hat{P}_{max_{Adap}})$ e a $f_{\hat{P}_{max}}(\hat{P}_{max})$ encontra-se que o MSE tendendo a zero e $NMSE$ tende a 1, embora o $NRMSE=0,88$. Na \dot{w}_1 apresenta menor dispersão e melhor ajuste nas $f_{\mathbf{X}}(x)$ dos PEC_C e PEC_{Adap} com respeito da $f_{\mathbf{X}}(x)$ da simulação em EF, pois os erros analisados tendem a zero para o MSE e a 1 para o $NRMSE$ e $NMSE$, como apresentados nas Figuras 6.2a.

Os primeiros dos momentos estatísticos junto com o V obtidos das $f_{\mathbf{X}}(x)$ para PEC_C , PEC_{Adap} e a simulação em EF, para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 são apresentados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Resultados das estatísticas do \hat{P}_{max} no ensaio de fratura do DCT com W_3 e diferentes \dot{w} .

\dot{w}	Estatística	PEC_C	PEC_{Adap}	SEF
\dot{w}_3	μ (kN)	2,60	2,61	2,60
	σ (kN)	0,18	0,18	0,18
	V (%)	6,92	6,90	6,92
\dot{w}_1	μ (kN)	2,23	2,24	2,24
	σ (kN)	0,15	0,16	0,16
	V (%)	6,73	7,14	7,14

As propriedades do PEC permite, utilizando os coeficiente do PEC_C e PEC_{Adap} , estabelecer os valores estatísticas da μ e σ , conforme as Equações (2.19) e (2.20). A μ para a \dot{w}_3 é de 2,60 kN e 2,61 kN empregando PEC_C e PEC_{Adap} , respectivamente, obtidos dos coeficientes dados na Tabela 6.4 e coincidem com os obtidos pelas $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_C e PEC_{Adap} . A μ da simulação em EF é de 2,60 kN, Tabela 6.3, no qual o erro relativo do PEC_C é 0,04 % e para o PEC_{Adap} é de 0,42 %, com respeito da μ da simulação em EF. Mesma análise foi realizada para PEC_C e PEC_{Adap} com \dot{w}_1 em que a μ é 2,23 kN e 2,24 kN, respectivamente, enquanto a μ da simulação em EF é de 2,24 kN, cujos e_{rr} são 0,31 % para PEC_C e 0,09 % para PEC_{Adap} . Entretanto o σ é similar para o PEC_C e PEC_{Adap} ao encontrado usado simulação em EF para as 2 \dot{w} , indicando uma variação similar entre as diferentes metodologias. Na Tabela 6.4 são apresentados o PEC_C para $p = 2$ e o PEC_{Adap} com $p_{max} = 2$ e $p_{OB} = 1$ que relaciona P_{max} com ξ para as \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . O

N_{PEC_C} que fornece o \hat{P}_{max_C} para DCT com W_3 e as \dot{w} analisadas é de 15 enquanto $N_{PEC_{Adap}}$ que fornece o $\hat{P}_{max_{Adap}}$ é de 10 e 8 para as \dot{w}_3 e \dot{w}_1 , respectivamente, com uma diminuição significativa nos $N_{PEC_{Adap}}$. Na Tabela 6.4 pode se observar que os coeficientes do PEC_C que tendem a zero, ao ser avaliados no PEC_{Adap} , não contribui no $\hat{P}_{max_{Adap}}$. Isto acontece porque há funções base do polinômio que contribuem pouco na precisão do $\hat{P}_{max_{Adap}}$ e que podem ser avaliadas com uma análise de sensibilidade.

Tabela 6.4: Comparação do PEC_C e PEC_{Adap} que relaciona o \hat{P}_{max} com ξ no ensaio de fratura em DCT com W_3 e diferentes \dot{w} .

Função base	\dot{w}_3		\dot{w}_1	
	PEC_C	PEC_{Adap}	PEC_C	PEC_{Adap}
1	2,60	2,61	2,23	2,24
ξ_4	0,17	0,13	0,15	0,15
ξ_3	0,04	0,03	0,00	-0,01
ξ_2	0,01	-0,00	-0,00	0,00
ξ_1	0,01	0,02	0,01	0,02
$(\xi_4^2 - 1)$	-0,01	0,00	-0,01	-0,01
$\xi_3\xi_4$	-0,03	-	-0,06	-
$(\xi_3^2 - 1)$	0,03	0,03	0,00	0,01
$\xi_2\xi_4$	-0,00	-	-0,00	-
$\xi_2\xi_3$	0,00	0,01	0,00	0,00
$(\xi_2^2 - 1)$	0,00	-	0,00	-
$\xi_1\xi_4$	-0,01	-0,01	0,00	-
$\xi_1\xi_3$	0,01	-	0,00	-
$\xi_1\xi_2$	0,00	-	-0,00	-
$(\xi_1^2 - 1)$	-0,00	0,00	-0,00	-

Na Figura 6.3 é apresentado os resultados da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para as \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . Os polinômios encontrados para a \dot{w}_3 apresenta a maior participação das VA enquanto para \dot{w}_1 as variáveis Ω (ξ_3) e G_F (ξ_2) tem pouca participação no PEC_C e no PEC_{Adap} .

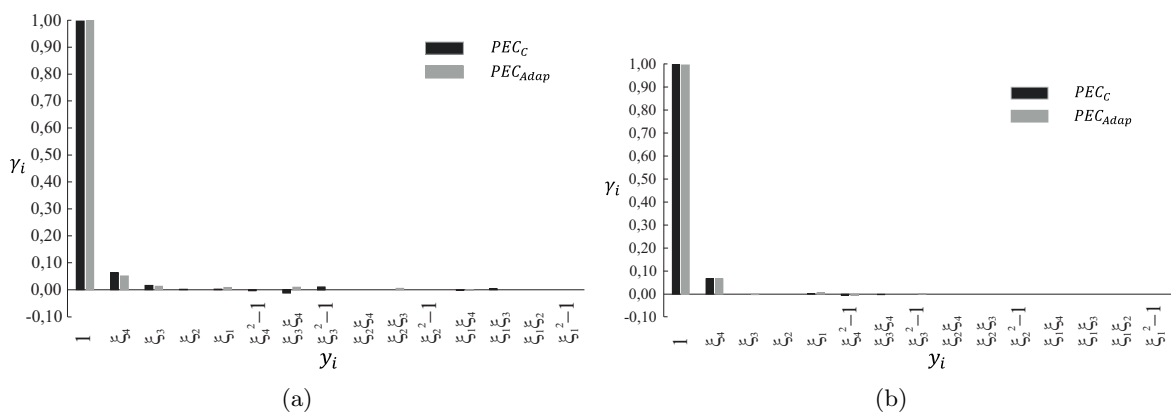


Figura 6.3: Resultados da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para \hat{P}_{max_C} e $\hat{P}_{max_{Adap}}$ no ensaio de fratura de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1 .

Existe influência da \dot{w} sobre o \hat{P}_{max} , de acordo com os resultados obtidos e os dados na literatura,

e são apresentados na Tabela 6.5.

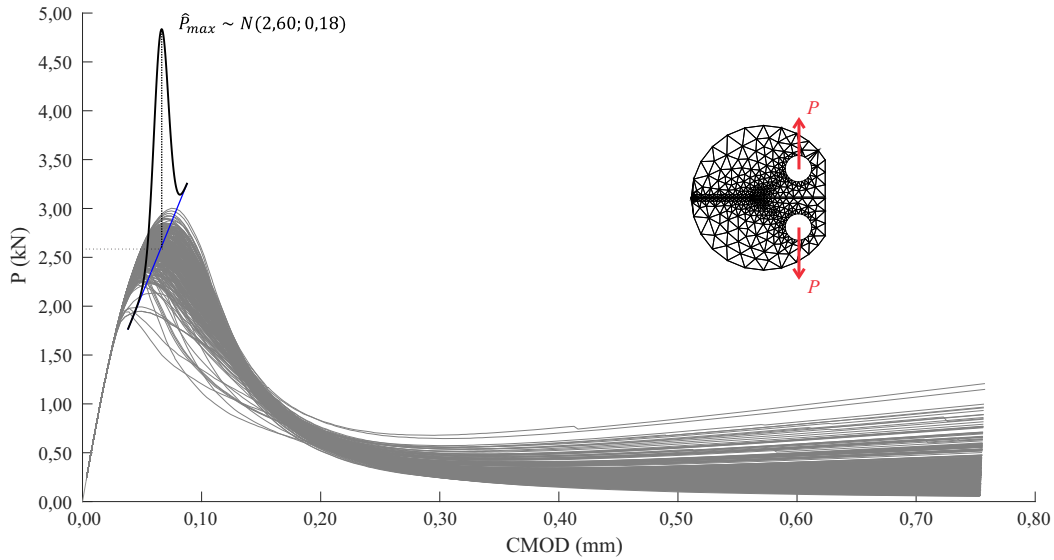
Tabela 6.5: Comparação dos resultados de P_{max} reportados por diferentes pesquisadores.

Referencia	No. dias	f_c (MPa)	f_t (MPa)	$\alpha = \frac{a_0}{W}$ (-)	\dot{w} (mm/min)	P_{max} (kN)
(Amirkhanian <i>et al.</i> , 2011)	28	50,20	3,30	0,42	0,10	1,39
(Fernández-Canteli <i>et al.</i> , 2014)	28	31,50	2,70	0,35	0,50	2,35
(Amirkhanian <i>et al.</i> , 2015)	223		6,60	0,25	0,06	2,09
(Cifuentes <i>et al.</i> , 2017)	28	97,00	5,70	0,50	0,20	2,15
(Seitl <i>et al.</i> , 2017)	28	97,00	5,70	0,50	0,20	2,15
Experimental	60	64,30	6,00	0,42	0,60	2,43
<i>SEF</i>	60	64,30	6,00	0,42	0,60	2,60
<i>PEC_C</i>						2,60
<i>PEC_{Adap}</i>						2,24
Experimental	60	60,90	6,00	0,42	0,06	2,17
<i>SEF</i>	60	60,90	6,00	0,42	0,06	2,24
<i>PEC_C</i>						2,23
<i>PEC_{Adap}</i>						2,24

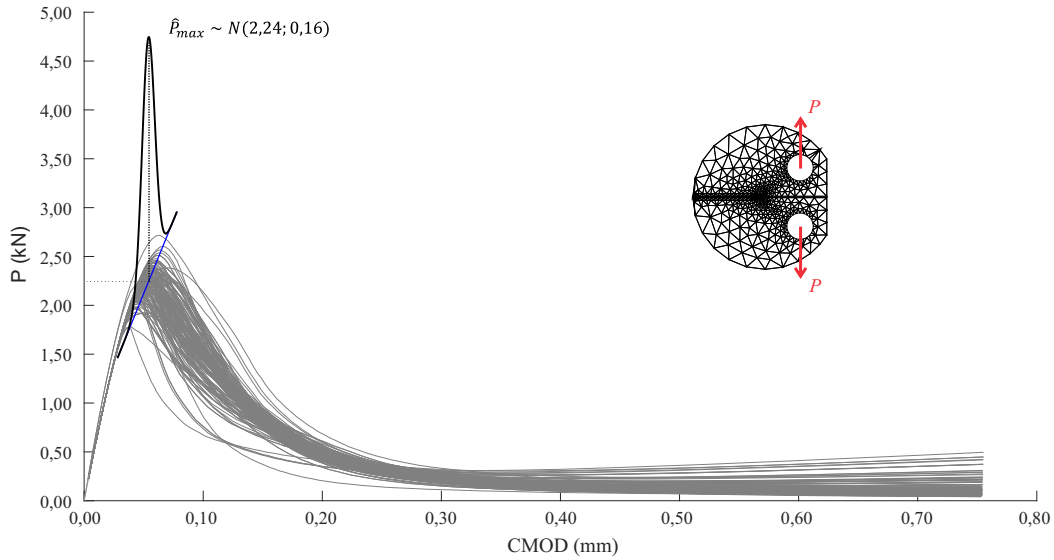
(-) Adimensional;

No. dias, número de dias de curado.

Os resultados reportados nesta pesquisa para \hat{P}_{max} são coerentes com os reportados pela literatura, dado que enquanto a \dot{w} aumenta o \hat{P}_{max} aumenta, assim como, a importância da f_t em amplificar o \hat{P}_{max} . Na Figura 6.4 são apresentados todos os resultados obtidos das simulações em *EF* para o DCT com \dot{w}_3 e \dot{w}_1 e a $f_{\mathbf{X}}(x)$ encontradas para o \hat{P}_{max} , utilizando o modelo *EF*. O número de simulação em *EF* a realizar vai depender da convergência entre as $f_{\mathbf{X}}(x)$ do *PEC* e simulação em *EF*, assim como o conhecimento do comportamento das *VA* do problema. Existe um aumento no \hat{P}_{max} com o incremento da \dot{w} , segundo Bažant *et al.* (1992), que pode ser observado ao comparar as Figuras 6.4(a) e 6.4(b).



(a)



(b)

Figura 6.4: Curva P - $CMOD$ e $f_X(x)$ do \hat{P}_{max} , da simulação EF do DCT com W_3 no ensaio de fratura com diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1 .

6.3 Influência da \dot{w} na G_F em DCT

As propriedades de fratura adotados para o estudo da G_F são os usados na seção anterior e definidos na Tabela 6.1. O número de casos analisados para determinar a $f_X(x)$ da G_F , correspondem aos analisados para \hat{P}_{max} e os resultados estão dados no anexo II na Figura II.3 para a \dot{w}_3 e Figura II.4 para a \dot{w}_1 . Os coeficientes utilizados na determinação do PEC_C e PEC_{Adap} correspondem aos valores da Tabela 6.6, em que o PEC_C com $p = 2$ e $2N$ simulações é o polinômio que melhor ajuste apresenta com respeito ao \hat{P}_{max} encontrado usando EF para as \dot{w}_3 . O PEC_{Adap} requer um $p_{max} = 4$ e um $p_{Obr} = 1$, quer isto dizer que considera os componentes principais das VA de

$p = 1$ como obrigatória ($p_{Obr} = 1$) e leva em conta só as funções base do PEC até um $p = 4$ que acrescentam o R^2 .

Tabela 6.6: Número de pontos de colocação e N_{PEC_C} e $N_{PEC_{Adap}}$ junto com N_{SEF} e $N_{SMC/PEC}$, necessários para quantificar a incerteza do G_F para diferentes \dot{w} .

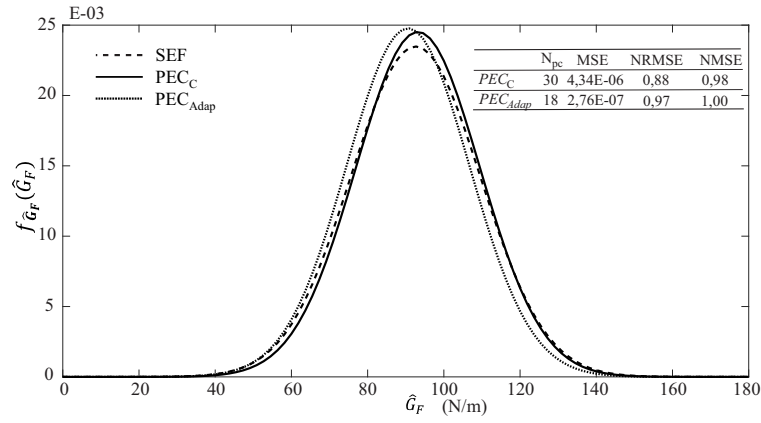
		\dot{w}_3		\dot{w}_1	
		PEC_C	PEC_{Adap}	PEC_C	PEC_{Adap}
p	(-)	2	4	2	4
N_{PEC_C}	(-)	15		15	
$N_{PEC_{Adap}}$	(-)		18		11
N_{pc_C}	(-)	30		15	
$N_{pc_{Adap}}$	(-)		18	15	11
N_{SEF}	(-)	290		150	
$N_{SMC/PEC}$	(-)	5,0E+04		5,0E+04	

(-) Adimensional.

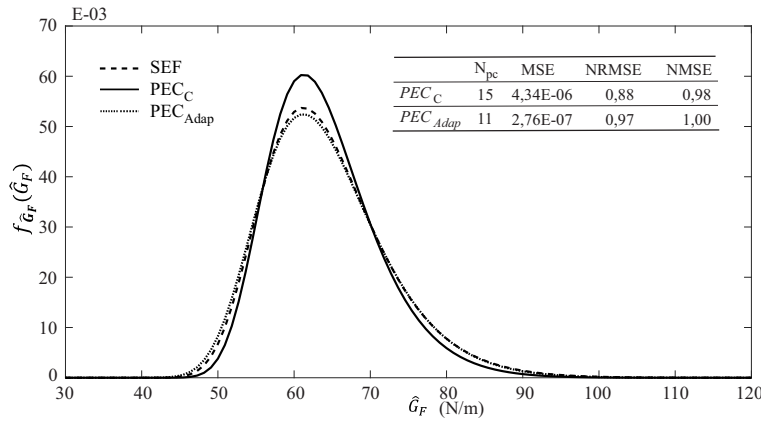
Para cada caso analisado, é definido o espaço amostral das VA utilizando a sequência de Sobol, o qual é o *input* do modelo de EF a ser usado no programa de Moreira e Evangelista (2016). O arquivo de saída representa o \hat{P}_{max} para cada caso, e define a $f_X(x)$ denominada *SEF*, apresentadas nas Figuras 6.5a-b, dependendo da \dot{w} . Os vetores de saída do \hat{P}_{max} para cada caso, são utilizados junto com as combinações das VA para determinar os coeficientes do PEC_C e do PEC_{Adap} , para depois usar SMC sobre os polinômios, tal que $N_{SMC/PEC_C} = N_{SMC/PEC_{Adap}} = 5E + 04$. Estas simulações definem as $f_X(x)$ denominadas PEC_C e PEC_{Adap} , e encontrou-se que as $f_X(x)$ que melhor ajuste tem com respeito à *SEF* é o PEC_C com $p = 2$ e $N_{pc_C} = 15$ pontos amostrais, para \dot{w}_3 . No entanto o PEC_{Adap} apresenta um ajuste adequado utilizando $p_{max} = 4$ e $p_{OB} = 1$ com $N_{pc_{Adap}} = 18$ para a \dot{w}_3 , conforme é apresentado 6.5(a).

Para a \dot{w}_1 o PEC_C com $p = 2$ os resultados se ajustam à μ do P_{max} , com uma maior densidade na μ do P_{max} , porém o PEC_{Adap} com $p_{max} = 4$ e $p_{OB} = 1$ a $f_X(x)$ esta em concordância com os resultados encontrados em *SEF*, com um número menor de $N_{PEC_{Adap}}$ e $N_{pc_{Adap}}$ com respeito aos utilizados pelo PEC_C . Determinada a saída, é estabelecido uma relação entre ξ e o G_F em torno do PEC_C e do PEC_{Adap} , usando o método da colocação baseado em regressão para o polinômio que melhor ajusta-se à $f_X(x)$ dos resultados da simulação em EF, conforme são apresentados na Figura 6.5a-b.

As $f_X(x)$ do \hat{G}_F , $f_{\hat{G}_F}(\hat{G}_F)$, é representada na Figura 6.5 como *SEF*, enquanto a $f_X(x)$ do \hat{G}_F usando PEC_C é denotado por $f_{\hat{G}_{FC}}(\hat{G}_{FC})$, e representado como PEC_C e a $f_X(x)$ do \hat{G}_F usando PEC_{Adap} é denotado por $f_{\hat{G}_{FAdap}}(\hat{G}_{FAdap})$, e representado como PEC_{Adap} , na Figura 6.5. Foram realizadas $N_{SMC/PEC} = 5E + 04$ simulações para obter a $f_{\hat{G}_{FC}}(\hat{G}_{FC})$ e $f_{\hat{G}_{FAdap}}(\hat{G}_{FAdap})$ nas \dot{w} analisadas. A $f_{\hat{G}_{FC}}(\hat{G}_{FC})$ seguem uma $f_X(x)$ normal similar à $f_{\hat{G}_F}(\hat{G}_F)$ para uma \dot{w}_3 , e é apresentada na Figura 6.5(a). A $f_{\hat{G}_{FAdap}}(\hat{G}_{FAdap})$, identificado como PEC_{Adap} , apresenta uma maior densidade dos dados tendendo à μ , porém as caudas são similares entre $f_{\hat{G}_F}(\hat{G}_F)$ e $f_{\hat{G}_{FAdap}}(\hat{G}_{FAdap})$ para a \dot{w}_3 . As $f_{\hat{G}_{FC}}(\hat{G}_{FC})$ e $f_{\hat{G}_{FAdap}}(\hat{G}_{FAdap})$ representam um ajuste adequado com respeito à $f_{\hat{G}_F}(\hat{G}_F)$



(a)



(b)

Figura 6.5: Comparação das $f_{\mathbf{X}}(x)$ da \hat{G}_F usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} no ensaio de fratura de W_3 com diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1 .

para os dados que tendem à μ , da mesma forma que as caudas para a \dot{w}_1 embora o PEC_{Adap} tem um melhor ajuste. As $f_{\mathbf{X}}(x)$ apresentadas nas Figuras 6.5a-b seguem uma $f_{\mathbf{X}}(x)$ normal levando em consideração o estimador de máxima verosimilhança para o DCT de W_3 e as \dot{w} analisadas. A μ e σ junto com o V , obtidos das $f_{\mathbf{X}}(x)$ para PEC_C , PEC_{Adap} e SEF , para a \dot{w}_3 e \dot{w}_1 , são apresentados na Tabela 6.7. Uma análise dos dois primeiros momentos estatísticos da \hat{G}_F obtidos da $f_{\hat{G}_{FC}}(\hat{G}_{FC})$ e $f_{\hat{G}_{FAdap}}(\hat{G}_{FAdap})$ apresenta valores similares para DCT submetidos a \dot{w}_1 . A maior diferença entre as estatísticas com respeito aos obtidos usando SEF acontece para a \dot{w}_3 , dada a alta dispersão encontrada, devido a uma \dot{w} maior.

Tabela 6.7: Resultados das estatísticas da \hat{G}_F no ensaio de fratura de W_3 com diferentes \dot{w} .

\dot{w}	Estatística	PEC_C	PEC_{Adap}	SEF
\dot{w}_3	μ (N/m)	93,18	88,48	92,58
	σ (N/m)	16,27	16,10	16,99
	V (%)	17,46	18,20	18,35
\dot{w}_1	μ (N/m)	63,97	63,29	64,35
	σ (N/m)	7,20	8,01	8,17
	V (%)	11,26	12,66	12,70

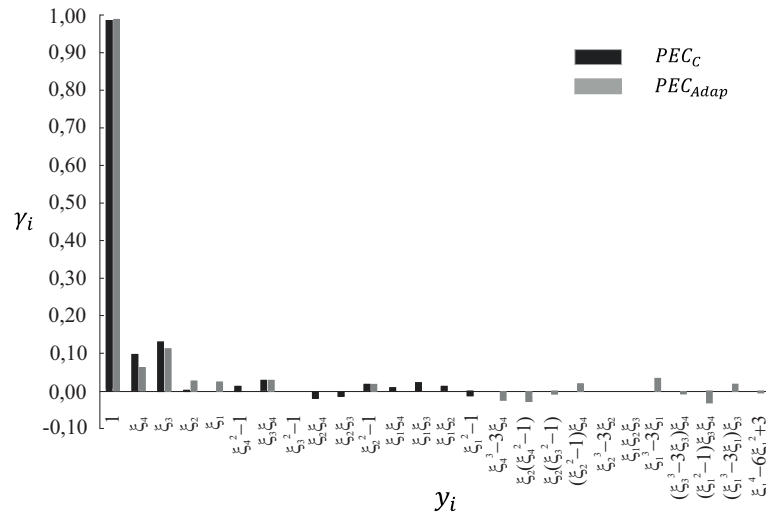
Na Tabela 6.8 são apresentados o PEC_C e PEC_{Adap} que estabelece uma relação entre a saída \hat{G}_F e ξ para DCT com W_3 e diferentes \dot{w} . O $N_{PEC_C} = 15$ para um polinômio de $m = 4$ e $p = 2$ enquanto para o PEC_{Adap} foi requerido acrescentar o grau do polinômio a $p = 4$ para melhorar a precisão das \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . Na \dot{w}_3 o $N_{PEC_{Adap}} = 18$ enquanto para a \dot{w}_1 são necessários $N_{PEC_{Adap}} = 11$ para ter um ajuste adequado aos resultados obtidos de SEF . Uma análise de sensibilidade, conforme a Equação (3.3), dos coeficientes do PEC_C e do PEC_{Adap} , que leva em conta a influência da \dot{w} na G_F em DCT, são apresentados na Figura 6.6a-b.

Tabela 6.8: Comparação do PEC_C e PEC_{Adap} que relaciona a \hat{G}_F com ξ no ensaio de fratura de W_3 e diferentes \dot{w} .

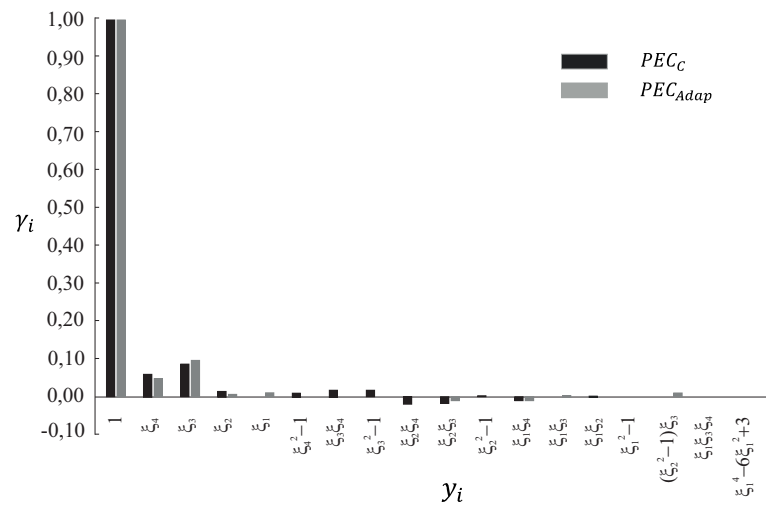
Função base	\dot{w}_3		\dot{w}_1	
	PEC_C	PEC_{Adap}	PEC_C	PEC_{Adap}
1	93,18	88,48	63,97	63,29
ξ_4	9,17	5,58	3,78	3,02
ξ_3	12,29	10,01	5,51	6,10
ξ_2	0,24	2,34	-0,88	0,39
ξ_1	0,11	2,08	0,00	0,64
$(\xi_4 - 1)^2$	1,15	-	0,59	-
$\xi_3 \xi_4$	2,67	2,50	1,09	-
$(\xi_3 - 1)^2$	0,16	-	1,08	-
$\xi_2 \xi_4$	-1,85	-	-1,28	-
$\xi_2 \xi_3$	-1,36	-	-1,16	-0,69
$(\xi_2 - 1)^2$	1,66	1,58	0,14	-
$\xi_1 \xi_4$	0,81	-	-0,67	-0,69
$\xi_1 \xi_3$	2,05	-	-0,10	0,19
$\xi_1 \xi_2$	1,13	-	0,11	-
$(\xi_1 - 1)^2$	-1,19	-	-0,04	-
$\xi_4^3 - 3\xi_4$	-	-2,26	-	-
$(\xi_2 - 1)^2 (\xi_4 - 1)^2$	-	-2,51	-	-
$(\xi_2 - 1)^2 (\xi_3 - 1)^2$	-	-0,72	-	-
$(\xi_2 - 1)^2 \xi_4$	-	1,66	-	-
$(\xi_2 - 1)^2 \xi_3$	-	-	-	0,63
$\xi_2^3 - 3\xi_2$	-	0,06	-	-
$\xi_1 \xi_2 \xi_3$	-	0,17	-	-
$\xi_1^3 - 3\xi_1$	-	2,99	-	-
$(\xi_3^3 - 3\xi_3) \xi_4$	-	-0,70	-	-
$(\xi_2 - 1)^2 \xi_3 \xi_4$	-	-2,85	-	-
$(\xi_1^3 - 3\xi_1) \xi_3$	-	1,62	-	-
$\xi_1 (\xi_3 - 1)^2 \xi_4$	-	-	-	-0,01
$\xi_1^4 - 6\xi_1^2 + 3$	-	-0,50	-	0,05

Para o PEC_C os componentes principais da f_t (ξ_1) do $p = 1$ e 2 , junto com o componente principal do Ω (ξ_3) de $p = 2$ apresentam pouca participação do PEC_C para a \dot{w}_3 , veja a Figura 6.6(a). Uma análise da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C para a \dot{w}_1 indicam que, os componentes principais da f_t do $p = 1$ e 2 tem pouca participação do PEC_C , conforme é apresentado na Figura

6.6(b). A \dot{w}_3 apresenta maior participação dos coeficientes de $p \geq 3$ e maior atuação dos produtos cruzados ou produtos de diferentes funções base, que os encontrados para \dot{w}_1 , como é mostrado na Tabela 6.8 e na Figura 6.6, isto é devido ao aumento da dispersão da \hat{G}_F . Da análise de sensibilidade dos coeficientes, pode-se concluir que, as variáveis aleatórias G_f (ξ_4) e Ω (ξ_3) tem maior influência no PEC_C e no PEC_{Adap} , embora o PEC_{Adap} usa $p = 4$ a sensibilidade dos coeficientes de alto grau é pouca, especialmente para a \dot{w}_1 .



(a)



(b)

Figura 6.6: Resultados da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para \hat{G}_F no ensaio de fratura de W_3 e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1 .

Uma análise dos erros das $f_X(x)$ da \hat{G}_F usando PEC_C e PEC_{Adap} , comparados com os resultados da simulação numérica, são apresentados nas Figuras 6.5a-b. A $f_{\hat{G}_{FC}}(\hat{G}_{FC})$ encontrada para a \dot{w}_3 ajusta-se à $f_{\hat{G}_F}(\hat{G}_F)$, com um MSE tendendo a zero, e o $NRMSE$ e $NMSE$ tendendo a 1, enquanto o MSE tendendo a zero, e $NMSE$ tende a 1, o valor do $NRMSE$ para PEC_{Adap} indicou 0,88. Para a \dot{w}_1 apresenta menor dispersão e melhor ajuste da $f_{\hat{G}_{FAdap}}(\hat{G}_{FAdap})$ com respeito da $f_{\hat{G}_F}(\hat{G}_F)$, pois os erros analisados são pequenos, já que MSE tende a zero o $NMSE$ tende a 1,

enquanto para o PEC_C o $NRMSE=0,88$.

Determinar o tipo de função de densidade de probabilidade, que seguem o \hat{P}_{max} e \hat{G}_F em vigas de concreto quando a \dot{w} varia, é importante e permitirá quantificar a incerteza das propriedades da mecânica da fratura. Mas conhecer o comportamento das VA de saída \hat{P}_{max} e a curva $P-CMOD$ em SEN-TPB é um dos objetivos de este trabalho, e para eles as $f_X(x)$ foram determinadas.

6.4 Influência da \dot{w} nas propriedades da mecânica da fratura em SEN-TPB

Na análise da influência da \dot{w} no P_{max} em SEN-TPB em material quase frágil foram usados modelagem em EF em vigas de seção $B = 80$ mm e $h = 250$ mm e seus resultados utilizados para estabelecer uma relação entre as VA e o P_{max} via PEC_C e PEC_{Adap} . Nesta seção é avaliada a malha e os números de passos de deslocamento que foram utilizados no modelo de EF, assim como a influência da \dot{w} no P_{max} em SEN-TPB em material quase frágil e, por último as contribuições alcançadas no desenvolvimento de esta pesquisa.

6.4.1 Verificação da objetividade da malha de EF e dos passos de deslocamento

Para prever o comportamento à fratura do material quase frágil em SEN-TPB, dado algumas propriedades à fratura, foi criado um modelo de EF não linear para simular o crescimento da trinca. As propriedades levadas em consideração na validação do modelo numérico são apresentados na Tabela 6.9, para a viga de $h = 250$ mm (no caso da viga $W = h$) e \dot{w}_1 os quais representam os valores médios das variáveis. Os valores de E , f_c , G_F , G_f , f_t e Ω correspondem aos encontrados por Roesler *et al.* (2007), assim como, a ν assumida foi de $0,20$, espessura do entalhe de 2 mm, $\alpha_0 = 0,33$ ($\alpha_0 = a_0/W$) e comprimento do vão de $1,00$ m.

Tabela 6.9: Propriedades do material à fratura em SEN-TPB usados no modelo numérico de Roesler *et al.* (2007).

h (mm)	E (GPa)	f_c (MPa)	G_F (N/m)	G_f (N/m)	f_t (MPa)	Ω (-)	ν (-)
250	32,00	58,10	167,00	56,00	4,15	0,25	0,20

(-) Adimensional.

Para verificar a convergência e a objetividade da malha de EF com respeito ao P_{max} foi construída a curva $P-CMOD$ com os resultados da simulação, utilizando 3 malhas não estruturadas com diferente discretização na região frente ao entalhe da viga. O modelo de EF não linear considera elemento triangular linear de 3 nós e usa um modelo de dano contínuo (2D), que capta o comportamento da fratura para os diferentes tipos de malha refinada apresentados na Figura 6.7a-c.

A precisão da previsão do \hat{P}_{max} , levando em consideração ε_{eq}^{MA} no modelo de EF não linear, é estabelecido utilizando o e_{rr} , veja anexo III, conforme a Equação III.1, em que o X representa o

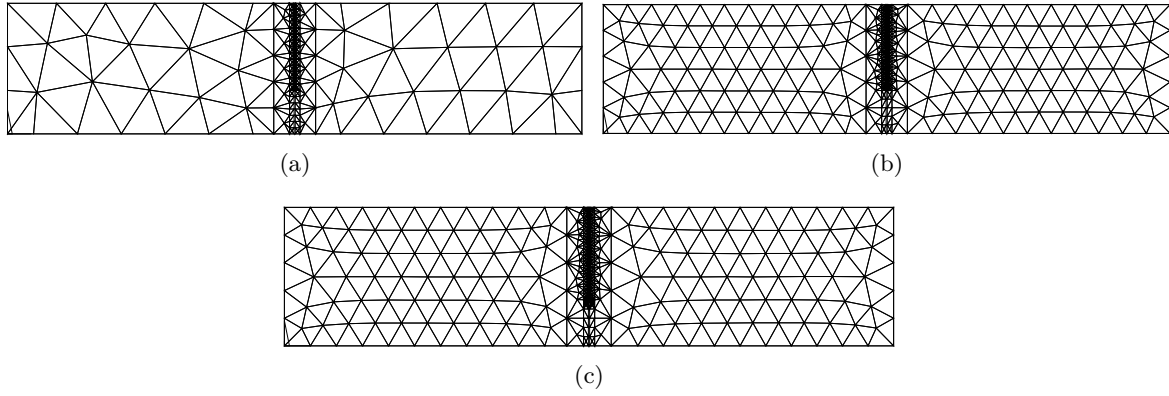


Figura 6.7: Geometria e malha de EF da SEN-TPB com $h = 250$ mm com diferente tipo de malha, a) Malha 4, $M4$; b) Malha 5, $M5$ e c) Malha 6, $M6$.

P_{max} médio experimental definido como \bar{P}_{max}^{Exp} e igual a $6,73$ kN. Na Tabela 6.10 são apresentados os diferentes tipos de malha, o número de nós por malha (No. Nós), o \hat{P}_{max}^{MA} em kN, e o $e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}}$ com respeito do \bar{P}_{max}^{Exp} conforme é apresentado na Tabela 6.10. A seguir é apresentado os resultados do \hat{P}_{max} e o $e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}}$ com respeito do \bar{P}_{max}^{Exp} , encontrado para o caso de estudo analisado por Roesler *et al.* (2007).

Tabela 6.10: Resultados dos \hat{P}_{max} e $e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}}$ (%) para diferentes tipos de malha, levando em consideração ε_{eq}^{MA} para SEN-TPB com $h = 250$ mm.

Malha	No. Nós (-)	\hat{P}_{max}^{MA} (kN)	$e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}}$ (%)
M4	288	6,73	0,05
M5	457	6,29	6,49
M6	484	6,30	6,34

(-) Adimensional.

A malha que consegue atingir o $\bar{P}_{max}^{Exp} = 6,73$ kN com uma $e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}} < 5$ % (adotado) é a malha $M4$ com um $e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}} = 0,05$ %. Para conseguir uma adequada concordância entre o \bar{P}_{max}^{Exp} e o \hat{P}_{max}^{MA} no processo de fratura não linear, o tamanho do elemento no setor da propagação da trinca foi determinada como $2,00$ mm, diferente ao usado por Roesler *et al.* (2007) que foi de $1,00$ mm utilizando elementos coesivos. Além da comparação numérica, é apresentada na Figura 6.8 as curvas P - $CMOD$ do modelo de EF levando em consideração a ε_{eq}^{MA} e as curvas experimentais reportadas por Roesler *et al.* (2007).

O \bar{P}_{max}^{Exp} é essencial para determinar as propriedades à fratura de materiais quase frágil e foi comparado com o \hat{P}_{max} da simulação numérica. O \hat{P}_{max} usando diferentes tipos de malha, encontra-se entre o intervalo de \bar{P}_{max}^{Exp} , como pode-se observar na Figura 6.8, na qual o $e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}}$ em forma geral é $< 6,80$ %, o que diz da precisão do modelo usado. A malha que apresenta um menor $e_{rr_{\hat{P}_{max}^{MA}}}$ é a $M4$ e será utilizada na verificação do número de passos de deslocamento. A seguir é apresentada a curva P - $CMOD$ levando em consideração diferentes número de passos de deslocamento.

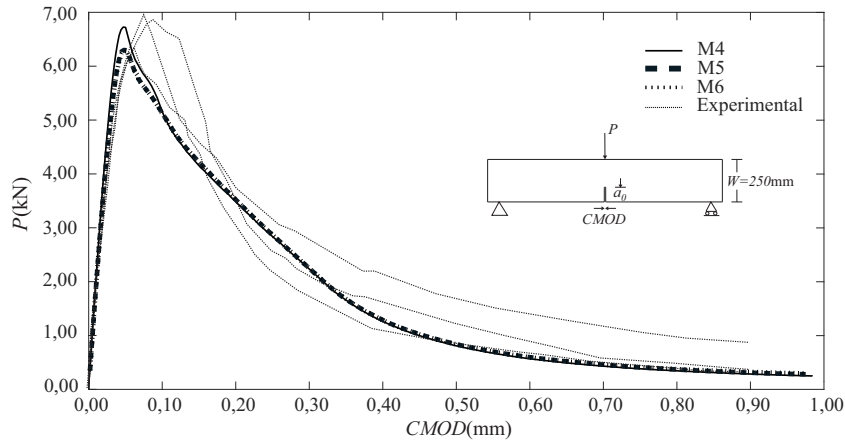


Figura 6.8: Curvas de P - $CMOD$ do modelo proposto levando em consideração ε_{eq}^{MA} com respeito aos resultados experimentais de Roesler *et al.* (2007).

O número de passos de deslocamento em que o $CMOD$ foi dividido vai definir o acabamento da curva P - $CMOD$ e o início do dano. O resultado de considerar diferentes número de passos: 100, 175, 200 e 225 são apresentados na Figura 6.9. A curva P - $CMOD$ é bem definida no setor de \hat{P}_{max} usando 200 e 225 passos, como se pode observar na ampliação do setor de \hat{P}_{max} , e a que precisou um menor tempo computacional foi a de 200 passos, o qual será utilizada nesta pesquisa.

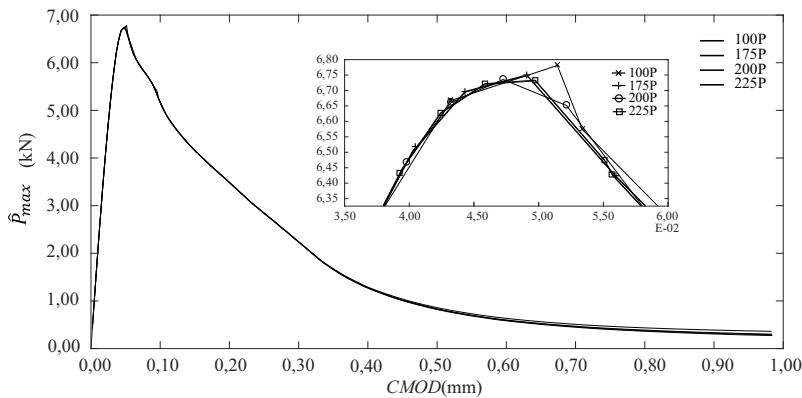


Figura 6.9: Número de passos considerando a malha M4 no modelo de EF na definição da curva P - $CMOD$ da SEN-TPB com $h = 250$ mm

6.4.2 Influência da \dot{w} no P_{max} .

As VA levadas em consideração na modelagem da SEN-TPB, são as usadas no DCT, $\mathbf{X} = \{f_t, G_F, \Omega, G_f\}$, e seus valores estatísticos foram apresentados na Tabela 6.1. Dado que não existe uma formulação matemática que defina explicitamente a saída (\hat{P}_{max}) em função das VA, o p não pode ser definido diretamente e devem ser determinados com diferentes p e diferentes N_{pc} que permitam obter a melhor resposta.

A melhor resposta é aquela que apresenta menor erro relativo entre as $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_C e PEC_{Adap} com respeito à obtida da simulação em EF para as diferentes \dot{w} analisadas. Os testes realizados

incluem no PEC_C os $p = 2, 3$ e 4 com o N e $2N$ pontos de colocação, enquanto que, para o PEC_{Adap} foram utilizados diferentes combinações de pares (p_{max}, p_{OB}) utilizando os p usados no PEC_C . As $f_{\mathbf{X}}(x)$ resultado de usar SMC sobre o PEC_C e PEC_{Adap} calculados, junto com a $f_{\mathbf{X}}(x)$ de todas as saídas (\hat{P}_{max}) usando simulação em EF de todos os testes realizados, são mostrados no anexo II, nas Figuras II.5 e II.6 das \dot{w} analisadas. Da comparação, foram determinados o p , N_{PEC_C} , $N_{PEC_{Adap}}$, N_{pc} , $N_{pc_{Adap}}$ e N_{SEF} , os quais são apresentados na Tabela 6.11.

Tabela 6.11: Número de pontos de colocação, N_{PEC_C} e $N_{PEC_{Adap}}$ junto com N_{SEF} e $N_{SMC/PEC}$, utilizados para quantificar a incerteza do \hat{P}_{max} na SEN-TPB com $h = 250$ mm e diferentes \dot{w} .

		\dot{w}_3	\dot{w}_1
p	(-)	2	2
N_{PEC_C}	(-)	15	15
$N_{PEC_{Adap}}$	(-)	10	10
N_{pc}	(-)	30	30
$N_{pc_{Adap}}$	(-)	15	15
N_{SEF}	(-)	150	150
$N_{SMC/PEC}$	(-)	5,0E+04	5,0E+04

(-) Adimensional.

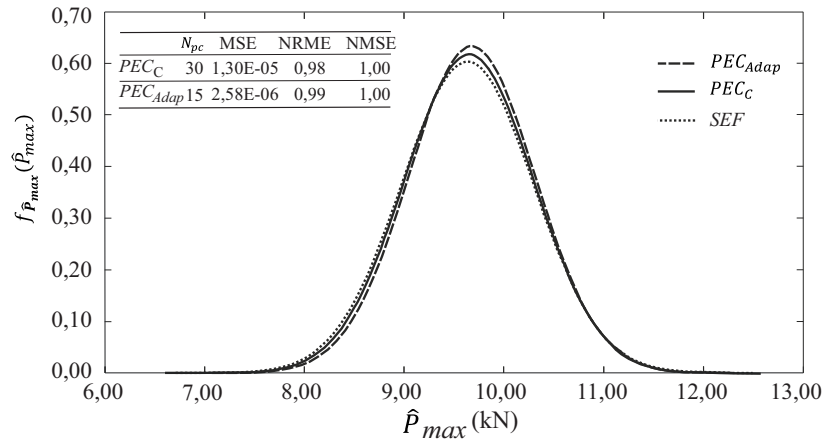
Para cada caso analisado, é definido o espaço amostral das VA utilizando sequência de Sobol, o qual é o *input* do modelo de EF a ser usado no programa de Moreira e Evangelista (2016). O arquivo de saída representa o \hat{P}_{max} para cada caso, que agrupados todas as saídas de cada caso de análise, definem a $f_{\mathbf{X}}(x)$ denominada SEF , e são apresentadas nas Figuras 6.10a-b, dependendo da \dot{w} . Os vetores de saída do \hat{P}_{max} para cada caso são utilizados junto com as combinações das VA para determinar os coeficientes do PEC_C e do PEC_{Adap} , para depois usar SMC sobre os polinômios, tal que $N_{SMC/PEC} = N_{SMC/PEC_{Adap}} = 5E + 04$. Estas simulações definem as $f_{\mathbf{X}}(x)$ denominadas PEC_C e PEC_{Adap} , e encontrou-se que as $f_{\mathbf{X}}(x)$ que melhor ajuste tem com respeito à SEF é o PEC_C com $p = 2$ e $N_{pc} = 30$ pontos amostrais para \dot{w}_3 .

A $f_{\mathbf{X}}(x)$ do PEC_C com $p = 2$ e $N_{pc} = 15$, a $\mu_{\hat{P}_{max_C}}$ apresenta um deslocamento à direita da μ do \hat{P}_{max} usando simulação em EF, gerando um erro importante da $\mu_{\hat{P}_{max_C}}$ para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . No entanto o PEC_{Adap} apresenta um ajuste adequado utilizando $p_{max} = 2$ e $p_{OB} = 1$ com $N_{pc} = 15$ para as duas \dot{w} . Além disso, o PEC_C com $p = 2$ e o PEC_{Adap} com $p_{max} = 2$ e $p_{OB} = 1$ utilizaram $N_{pc} = 15$ para conseguir as $f_{\mathbf{X}}(x)$ similares à esperada usando simulação em EF, com uma \dot{w}_1 .

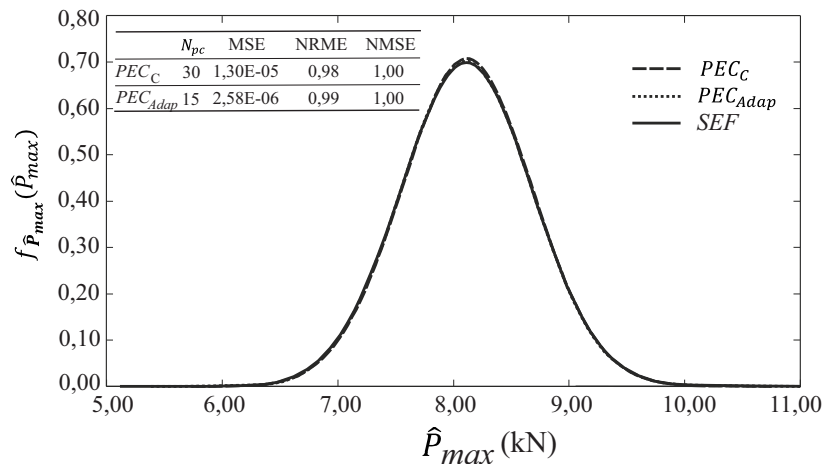
Para obter o \hat{P}_{max_C} , e o $\hat{P}_{max_{Adap}}$, foram utilizadas as combinações definidas pela sequência de Sobol que definiu os \hat{P}_{max} encontrados na simulação em EF em SEN-TPB com $h = 250$ mm para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . Determinada a saída é estabelecido uma relação entre ξ e o \hat{P}_{max} em torno do PEC_C e do PEC_{Adap} , usando o método da colocação baseado em regressão para o polinômio que melhor ajusta-se à $f_{\mathbf{X}}(x)$ dos resultados da simulação em EF, conforme são apresentados na Figura 6.10a-b.

O cálculo dos coeficientes do PEC_C levou em consideração o conceito dado por Isukapalli (1999), que diz, que duas vezes N permite obter coeficientes robustos, isto produz um vetor de saída

\hat{P}_{max_C} similar ao \hat{P}_{max} conseguido usando simulação em EF. O PEC_{Adap} encontrado que melhor ajuste tem corresponde aquele com $p_{max} = 2$ e um $p_{Obr} = 1$, quer isto dizer que considera os componentes principais das VA de $p = 1$ como obrigatória e leva em conta só as funções base do PEC até um $p = 2$ que acrescentam o R^2 . O PEC_C que relaciona ξ com as VA, com $n = 4$ precisou de $p = 2$ com 30 pontos amostrais para conseguir um ajuste adequado com respeito ao encontrado usando simulação em EF para as \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . Para as \dot{w} analisadas o PEC_{Adap} com $n = 4$ e que apresenta um ajuste adequado com respeito à simulação em EF, requer um $p_{max} = 2$ e $p_{OB} = 1$. Na Figura 6.10 são apresentadas as $f_X(x)$ de \hat{P}_{max} para diferentes \dot{w} ; $f_X(x)$ geradas com $5E+04$ simulações para os PEC (PEC_C e PEC_{Adap}), e 150 para a simulação em EF, para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 , são apresentadas nas Figuras 6.10(a) e 6.10(b).



(a)



(b)

Figura 6.10: Comparação das $f_X(x)$ do \hat{P}_{max} usando simulação em EF, PEC_C e PEC_{Adap} em SEN-TPB, com $h = 250$ mm e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1 .

A dispersão dos dados é similar entre os diferentes modelos de aproximação, como é mostrado na Figura 6.10 e listado na Tabela 6.12. A cauda da esquerda da $f_{\hat{P}_{max_C}}$ e $f_{\hat{P}_{max_{Adap}}}$ tem um erro pequeno como respeito aos resultados da simulação em EF para a \dot{w}_3 . Para \dot{w}_1 as estimações do modelo aproximado de PEC coincidem em relação ao reportado pelo modelo da simulação em EF, conforme é apresentado na Figura 6.10(b). A μ e σ do \hat{P}_{max_C} e $\hat{P}_{max_{Adap}}$ são

semelhante à μ e σ do \hat{P}_{max} obtido da simulação em EF para \dot{w}_3 , e maior convergência se apresenta para \dot{w}_1 , conforme é apresentado na Tabela 6.12. O V do \hat{P}_{max_C} e $\hat{P}_{max_{Adap}}$ tendem o \hat{P}_{max} com \dot{w}_3 e \dot{w}_1 , conforme é apresentado na seguinte Tabela.

Tabela 6.12: Resultados das estatísticas do \hat{P}_{max} com diferentes \dot{w} na SEN-TPB com $h = 250$ mm em material quase frágil.

\dot{w}	Estatística	PEC_C	PEC_{Adap}	SEF
\dot{w}_3	μ (kN)	9,65	9,67	9,64
	σ (kN)	0,65	0,63	0,66
	V (%)	6,70	6,51	6,86
\dot{w}_1	μ (kN)	8,12	8,11	8,11
	σ (kN)	0,56	0,57	0,57
	V (%)	6,95	7,02	7,04

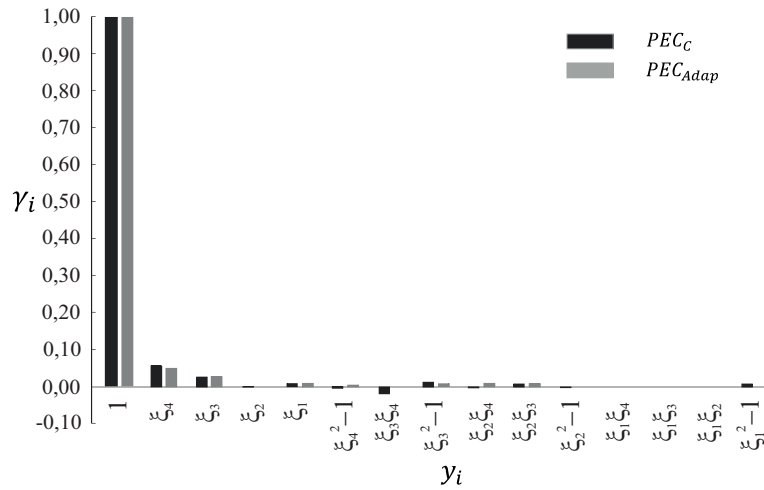
Na Tabela 6.13 são apresentados o PEC_C e PEC_{Adap} que permite quantificar a incerteza da \hat{P}_{max} em SEN-TPB com $h=250$ mm para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 . Um PEC de $m=4$ e $p=2$ requer $N_{PEC_C} = 15$, enquanto $N_{PEC_{Adap}} = 10$ são necessários para encontrar o PEC_C e o PEC_{Adap} para as \dot{w}_3 e \dot{w}_1 , respectivamente. A diferença na quantidade do $N_{PEC_{Adap}}$ representa um 66,67 % do N_{PEC_C} , diminuindo o número de operações e tempo computacional.

Tabela 6.13: Comparação do PEC_C e PEC_{Adap} que relaciona o \hat{P}_{max} com ξ e diferentes \dot{w} na SEN-TPB com $h = 250$ mm.

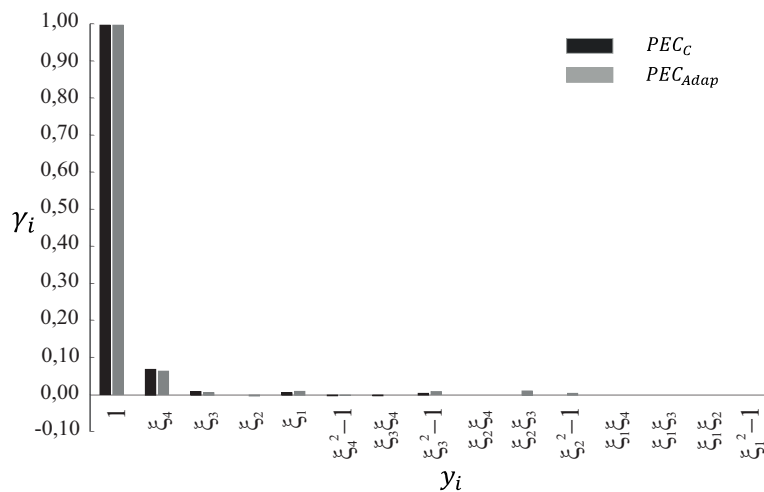
Função base	\dot{w}_3		\dot{w}_1	
	PEC_C	PEC_{Adap}	PEC_C	PEC_{Adap}
1	9,65	9,67	8,12	8,11
ξ_4	0,53	0,47	0,55	0,52
ξ_3	0,24	0,25	0,06	0,04
ξ_2	-0,02	-0,01	0,00	-0,03
ξ_1	0,06	0,08	0,04	0,07
$(\xi_4^2 - 1)$	-0,05	0,03	-0,03	-0,02
$\xi_3\xi_4$	0,20	-	-0,03	-
$(\xi_3^2 - 1)$	0,10	0,06	0,02	0,07
$\xi_2\xi_4$	-0,05	0,07	0,01	-
$\xi_2\xi_3$	0,05	0,07	-0,00	0,08
$(\xi_2^2 - 1)$	-0,03	-	0,00	0,03
$\xi_1\xi_4$	0,00	-	-0,01	-0,01
$\xi_1\xi_3$	-0,00	-	0,01	-
$\xi_1\xi_2$	0,01	-	-0,01	-
$(\xi_1^2 - 1)$	0,05	-0,01	-0,00	-

Na Figura 6.11a-b são apresentados os resultados da análise de sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para o \hat{P}_{max} na SEN-TPB $h = 250$ mm e diferentes \dot{w} . Dos resultados da análise de sensibilidade conforme a Equação 3.3, realizado aos coeficientes do PEC_C e o PEC_{Adap} para as \dot{w}_3 e \dot{w}_1 pode-se intuir que a G_F (ξ_2) não contribuí de forma importante na determinação

da \hat{P}_{max} , e é apresentado na Figura 6.11. Da análise de sensibilidade dos coeficientes PEC_{Adap} indicou que G_F não contribuem na determinação do \hat{P}_{max} para a \dot{w}_3 , entretanto as VA , f_t e G_f não contribuem na determinação do \hat{P}_{max} para uma \dot{w}_1 . Para as \dot{w} analisadas a G_f (ξ_4) é a variável que apresenta maior participação na determinação do \hat{P}_{max} na SEN-TPB em materiais quase frágil.



(a)



(b)

Figura 6.11: Resultado da sensibilidade dos coeficientes do PEC_C e PEC_{Adap} para \hat{P}_{max} na SUN-TBP e diferentes \dot{w} , a) \dot{w}_3 e b) \dot{w}_1 .

A μ do \hat{P}_{max_C} e $\hat{P}_{max_{Adap}}$, correspondem ao primeiro termo do polinômio, 9,65 kN e 9,67 kN, conforme a Tabela 6.13, enquantoa μ do \hat{P}_{max} da simulação em EF é de 9,64 kN, apresentada na Tabela 6.12 são similares para a \dot{w}_3 . As μ obtidas para \hat{P}_{max_C} e $\hat{P}_{max_{Adap}}$ só precisaram de 15 pontos amostrais para PEC_C e 10 pontos amostrais para PEC_{Adap} para \dot{w}_3 e \dot{w}_1 , e um e_{err} de 0,10 % para PEC_C , e de 0,31 % para PEC_{Adap} em relação à μ da simulação em EF.

A análise do erro da $f_{\hat{P}_{max_C}}(\hat{P}_{max_C})$ e $f_{\hat{P}_{max_{Adap}}}(\hat{P}_{max_{Adap}})$, em relação à $f_{\hat{P}_{max}}(\hat{P}_{max})$, foram apresentados nas Figuras 6.10, para diferentes tipos de erros; MSE, NRMSE e NMSE apresentam

ajuste entre os resultados do PEC_C e PEC_{Adap} com respeito à simulação em EF. O MSE apresenta valores $< 2,82E - 04$ para todas as \dot{w} , ou seja o MSE tende a zero, enquantoo NRMSE e NMSE observa valores tendendo a 1. Estes resultados obtidos do PEC_C e PEC_{Adap} demonstraram a precisão do \hat{P}_{max} no que diz respeito ao encontrado usando simulação em EF, que permitirá quantificar a incerteza no \hat{P}_{max} em vigas com material quase frágil, informação que a literatura não reporta.

6.5 Contribuições

Neste Capítulo foram alcançadas algumas contribuições na mecânica da fratura para material quase frágil, que a seguir são relacionadas. A utilização dos DCT em lugar de vigas de material quase frágil para a determinação das propriedades da mecânica da fratura mostrou ser útil para estabelecer a influência da taxa de deslocamento no cálculo do carregamento máximo e a energia total de fratura. Como uma segunda contribuição, foi a definição de uma relação matemática entre a resistência à tração, a energia total de fratura, o fator do ponto de quebra do modelo coesivo bilinear e a energia inicial de fratura com o intuito de determinar o carregamento máximo e a energia total de fratura. Isto foi possível utilizando polinômios de expansão de caos completos e adaptativo, tanto em DCT como em vigas, algo que a literatura ainda não reporta. Outra contribuição, foi a determinação da quantificação da incerteza do carregamento máximo e a energia total de fratura para diferentes taxas de carregamento utilizando o polinômio de expansão de caos completo e adaptativo, também não reportada pela literatura.

Esta é a primeira utilização do polinômio de expansão de caos na solução de problemas não lineares na mecânica da fratura e foi demonstrada a eficiência desta metodologia na estimação da quantificação da incerteza. Esta metodologia permite combinar análise não lineares de problemas da mecânica da fratura e método de elemento finitos levando em consideração a aleatoriedade do material.

Capítulo 7

Conclusões

Esta tese consistiu no desenvolvimento de algoritmos não intrusivos usando PEC para representar processos estocásticos não lineares, como viscoelasticidade, fadiga com carregamento constante e variável, fratura em modo I em DCT e em vigas com influência da taxa de carregamento. Além disso, foi elaborado um algoritmo que diminui o espaço amostral e o número de coeficientes do polinômio de caos avaliado, tornando-o mais eficiente com menor custo computacional.

A utilização desta metodologia com respeito aos valores esperados pela mecânica de materiais para deflexões em vigas bi-apoiadas, levou à obtenção de bons modelos para representar a incerteza da deflexão máxima e o módulo de relaxação. Foi demonstrada a eficiência e precisão do PEC, com poucas amostras, para determinar a resposta estrutural dada a aleatoriedade do material. O PEC faz uma representação espectral da propagação da incerteza dos parâmetros ajustados, dos dados de laboratório. A modelagem numérica das equações constitutivas viscoelásticas, as quais consistem de convolução matemática sobre o tempo, causa a propagação relevante da incerteza.

A construção de um modelo matemático para estimar os ciclos de vida à fadiga, com amplitudes de carregamento constante e variável, usando a metodologia deformação-vida e considerando variáveis aleatórias no material e no carregamento via PEC_C , foi analisada. O modelo usando PEC_C levou à obtenção de boas estimativas de número de ciclos de vida à fadiga para a falha, que representa a resposta estocástica. A quantificação de incerteza do N_f é sensível, principalmente, à aleatoriedade do carregamento, mais que à incerteza nas propriedades do material. O desempenho do PEC_C com relação a os resultados obtidos usando SMC gerou os mesmos resultados nas PDFs do N_f , validando a metodologia PEC.

O algoritmo desenvolvido nesta tese, permitiu determinar a propagação da incerteza em problemas de confiabilidade evitando a dificuldade da dimensão e o grau com uma nova forma de truncar a representação do PEC. Isto foi alcançado, favorecendo os componentes principais junto com alguns produtos entre os componentes principais das funções base do PEC. Este é um algoritmo iterativo que fixa o grau dos componentes principais a ser levados em consideração e que nenhum outro algoritmo menciona.

Foram alcançadas contribuições na estimação da deflexão de elementos estruturais levando em conta a propagação da incerteza nos parâmetros do material em modelos viscoelásticos, utilizando a

metodologia PEC e o algoritmo iterativo. Isto permitiu estabelecer uma relação matemática entre os parâmetros que definem o processo de envelhecimento do concreto, em modelos viscoelásticos, com o intuito de determinar a quantificação da incerteza da deflexão em um ponte de concreto.

A construção dos DCT por meio de fôrmas metálicas de diferentes tamanhos, facilitou o processo de fabricação permitindo o desenvolvimento de uma metodologia que estima a G_f , G_F , $CTOD_C$ e c_f em DCT submetido à fratura em modo I para diferentes \dot{w} . Os resultados obtidos do ensaio à fratura em modo I em DCT, utilizando o EEB para diferentes \dot{w} , têm média estatisticamente iguais.

Esta metodologia permitiu obter um polinômio que relaciona as variáveis aleatórias f_t , G_f , G_F e Ω com o P_{max} ou a G_F em DCT, metodologia não reportada na literatura, utilizando PEC_C e PEC_{Adap} . Além disso, esta metodologia foi aplicada em vigas de concreto para quantificar a incerteza no carregamento máximo levando em consideração a aleatoriedade de f_t , G_f , G_F e Ω , com resultados concordantes entre PEC_c , PEC_{Adap} e SMC com os observados utilizando modelos de EF não linear para diferentes \dot{w} . A metodologia do PEC aplicada em DCT foi capaz de estimar G_f , G_F , $CTOD_C$ e E de forma a ser usado em modelos de fratura e dano.

Os resultados da avaliação de todos os processos estocásticos analisados nesta tese, demonstraram amplamente a diminuição do espaço amostral, o número de coeficientes do PEC_{Adap} e do tempo computacional com pouca, ou nenhuma, perda de precisão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHAM, S.; RAISEE, M.; GHORBANIASL, G.; CONTINO, F.; LACOR, C. A robust and efficient stepwise regression method for building sparse polynomial chaos expansions. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 332, p. 461–474, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 11.

AFANADOR, N.; EVANGELISTA-JR., F.; CASTRO, F. Quantificação da incerteza da vida de placas de aço sob à fadiga via polinômios de hermite. In: XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Brasília D.F., Brasil, 2016. Citado 4 vezes nas páginas xii, 3, 4 e 51.

ALMEIDA, I.; EVANGELISTA-JR., F. Meta modelos para quantificação da incerteza da predição de fadiga de baixo ciclo em membros estruturais. In: XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Brasília D.F., Brasil, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.

AMIRKHANIAN, A.; SPRING, D.; ROESLER, J.; PARK, K.; PAULINO, G. *Disk shaped Compact Tension Test for Plain Concrete*. T and DI Congress 2011 and ASCE 2011, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 91, 92, 97, 115 e 122.

AMIRKHANIAN, A. N.; SPRING, D. W.; ROESLER, J. R.; PAULINO, G. H. Forward and inverse analysis of concrete fracture using the disk-shaped compact tension test. *Journal of Testing and Evaluation*, v. 1, n. 1, p. 1–11, Oct. 2015. Citado 12 vezes nas páginas xiv, xviii, 37, 91, 92, 97, 111, 115, 122, 168, 169 e 170.

ARAÚJO, C.; SILVA, M.; EVANGELISTA-JR, F. Análise das deflexões máximas de longo termo de uma ponte considerando o envelhecimento e a fluência do concreto. In: XXXVIII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Florianópolis, Brasil, 2017. Citado 4 vezes nas páginas xiii, 26, 84 e 85.

ASTME606-92. *Standard Practice for Strain-Controlled Fatigue Testing*. Annual Book of ASTM Standards, Section 3, Volume 03.01, 1992. Citado na página 29.

BANNANTINE, J.; COMER, J.; HANDROCK, J. *Fundamentals of metal fatigue analysis*. New York, State United: Prentice Hall, 1989. Citado 4 vezes nas páginas xvi, 48, 49 e 53.

BARENBLATT, G. The formation of equilibrium crack during brittle fracture, general ideas and hypothesis, axially symmetric cracks. *Mat. Mech.*, v. 23, n. 3, p. 434–444, Jul. 1959. Citado na página 38.

BASQUIN, O. The exponential law of endurance tests. *ASTM*, v. 10, p. 625–630, 1910. Citado na página 29.

BAŽANT, Z. Concrete fracture models: Testing and practice. *Engineering fracture mechanics*, v. 69, n. 1, p. 165 – 205, Jan. 2001. Citado na página 35.

- BAŽANT, Z.; BECQ-GIRAUDON, E. Statistical prediction of fracture parameters of concrete and implications for choice of testing standard. *Cement and concrete research*, v. 33, n. 1, p. 529–556, Jan. 2002. Citado na página 34.
- BAŽANT, Z.; BELYTSCHKO, T.; CHANG, T. Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 110, n. 12, p. 1666–1692, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 43.
- BAŽANT, Z.; GETTU, R. Rate effects and load relaxation in static fracture of concrete. *ACI Mater*, v. 89, p. 456–468, 1992. Citado na página 3.
- BAŽANT, Z.; GU, W.; FABER, K. Effect of change of loading rate on post-peak softening of concrete. *ACI Materials*, v. 3, n. 1, p. 139–159, Jan. 1992. Citado 4 vezes nas páginas 97, 99, 111 e 122.
- BAŽANT, Z.; JIRÁSEK, M. R-curve modeling of rate and size effects in quasibrittle fracture. *International Journal of Fracture*, v. 62, n. 1, p. 355–373, Jan. 1993. Citado na página 40.
- BAŽANT, Z.; JIRÁSEK, M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 128, n. 11, p. 1119–1149, Jan. 2002. Citado na página 40.
- BAŽANT, Z.; KAZEMI, M. Size effect on diagonal shear failure of beams without stirrups. *ACI Structural journal*, v. 88, n. 3, p. 268–276, 1992. Citado na página 92.
- BAŽANT, Z.; PLANAS, J. Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials. *CRC PRESS*, v. 1, n. 1, p. 1–2, Jan. 1997. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 39.
- BAŽANT, Z.; PLANAS, J. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. First. United States: CRC Press, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.
- BAŽANT, Z.; QIANG, Y.; GOANSEUP, Z. Choice of standard fracture test for concrete and its statistical evaluation. *Intl. J. Fracture*, v. 118, n. 1, p. 303–337, Jan. 2002. Citado na página 168.
- BAŽANT, Z.; QIANG, Y.; GUANG-HUA, L. Excessive long-time deflections of prestressed box girders. ii: Numerical analysis and lessons learned. *Journal of Structural Engineering*, v. 138, n. 6, p. 687–696, Jan. 2012. Citado na página 84.
- BAŽANT, Z.; QIANG, Y.; LI, G.-H. Excessive long-time deflections of prestressed box girders. i: Record-span bridge in Palau and other paradigms. *Journal of Structural Engineering*, v. 138, n. 6, p. 676–686, Jan. 2012. Citado na página 84.
- BAŽANT, Z.; QIANG, Y.; LI, G.-H.; KLEIN, G. J.; KŘÍSTEK, V. Excessive deflections of record-span prestressed box girder: Lessons learned from the collapse of the Koror-Babeldaob bridge in Palau. *ACI Concrete International*, v. 32, n. 1, p. 44–52, Jan. 2010. Citado 2 vezes nas páginas xiii e 84.
- BECK, A.; SANTANA, W. Stochastic fracture mechanics using polynomial chaos. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 34, n. 1, p. 26–39, jan. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 10.
- BENDAT, J.; PIERSOL, A. *Random data Analysis and measurement procedures*. Second. New Jersey United State: Wiley, 2008. Citado na página 60.
- BERVEILLER, M.; SUDRET, B.; LEMAIRE, M. Stochastic finite elements a non-intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics*, v. 15, n. 1-3, p. 81–92, jan. 2006. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 13.

- BITTENCOURT, T. *Computer Simulation of Linear and Nonlinear Crack Propagation in Cementitious Materials*. 200 f. Tese (Ph.D. Thesis) — Cornell University, United States, jan. 1993. Citado na página 40.
- BITTENCOURT, T.; INGRAFFEA, A.; LLORCA, J. Simulation and arbitrary, cohesive crack propagation. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, v. 45, n. 2, p. 339–350, Jul. 1992. Citado na página 39.
- BLATMAN, G. *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. 222 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Agosto 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 19.
- BLATMAN, G.; SUDRET, B. Anisotropic parcimonious polynomial chaos expansions based on the sparsity-f-effects principle. In: *Proc ICOSSAR'09, International Conference in Structural Safety and Reliability*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 2.
- BLATMAN, G.; SUDRET, B. An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 25, n. 2, p. 183–197, jan. 2010. Citado 3 vezes nas páginas 2, 11 e 13.
- BLATMAN, G.; SUDRET, B. Adaptive sparse polynomial chaos expansions based on least angle regression. *Journal Computational Physics*, v. 230, n. 6, p. 2345–2367, jan. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 13.
- BORGES, J.; PENA, I.; EVANGELISTA-JR, F. Confiabilidade de estruturas de concreto fraturadas considerando incerteza de propriedades dos materiais. In: 58 CONGRESSO BRASILEIRO DE CONCRETO. Belo Horizonte, Brasil, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 3, 4 e 105.
- BORST, R.; GUTIERREZ, M.; WELLS, G.; REMMERS, J.; ASKES, H. Cohesive zone models, higher-order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 90, n. 1, p. 289–315, Jan. 2004. Citado na página 168.
- BRYSON, D.; RUMPFKEIL, M. All-at-once approach to multifidelity polynomial chaos expansion surrogate modeling. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier, v. 70, p. 121–136, 2017. Citado na página 11.
- BURGOYNE, C.; SCANTLEBURY, R. Why did Palau bridge collapse? *The Structural Engineer*, v. 84, n. 1, p. 30–37, Jan. 2006. Citado na página 84.
- CAMACHO, G.; ORTIZ, M. Computational modeling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, n. 1, p. 2899–2938, Jan. 1996. Citado na página 38.
- CARNEIRO, J. C. *Propagação de Incertezas na Exploração e Produção de Petrôleo: Abordagens com o uso do Método do Caos Polinomial e da Colocação Estocástica*. 108 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, Agosto 2010. Citado na página 3.
- CARPINTERI, A.; VALENTE, S. Size-scale transition from ductile to brittle failure. *Cracking and Damage, Strain Localization and Size Effect*, v. 8, n. 1, p. 477–490, Jul. 1989. Citado na página 39.
- ČERVENKA, J.; SAUOMA, V. Discrete crack modeling in concrete structure. *Fracture Mechanics of Concrete*, v. 7, n. 1, p. 1285–1300, Jul. 1995. Citado na página 39.

- CHAVES, E. *Mecánica del médio Continuo (Modelos Constitutivos)*. First. Ciudad Real: Universidad Castilla La Mancha, 2009. Citado na página 25.
- CHOI, S.-K.; GRANDHI, R. V.; CANFIELD, R. A. Structural reliability under non-gaussian stochastic behavior. *Computers and structures*, Elsevier, v. 82, n. 13-14, p. 1113–1121, 2004. Citado na página 23.
- CHRISTENSEN, R. *Theory of viscoelasticity: An introduction*. New Jersey, USA: Courier corporation, 1982. Citado na página 25.
- CIFUENTES, H.; LOZANO, M.; HOLUŠOVÁ, T.; MEDINA, F.; SEITL, S.; FERNÁNDEZ-CANTELI, A. Modified disk-shaped compact tension test for measuring concrete fracture properties. *International Journal of Concrete Structures and Materials*, Springer, v. 11, n. 2, p. 215–228, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 91, 115 e 122.
- COFFIN, J. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Transactions ASME*, v. 76, n. 1, p. 931–950, Jan. 1954. Citado na página 29.
- DEBUSSCHERE, B.; NAJM, H.; PEBAY, P.; GHANEM, O. R.; MAITRE, L.; KNIO, O. Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes. *Journal on Scientific Computing*, v. 26, n. 2, p. 698–719, 2004. Citado na página 2.
- DIDIER, J.; FAVERJON, B.; SINOUE, J. Analysing the dynamic response of a rotor system under uncertain parameters by polynomial chaos expansion. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 18, n. 5, p. 712–732, 2012. Citado na página 11.
- DONGBIN, X. Fast numerical methods for stochastic computations a review. *Communications in computational physics*, v. 5, n. 2-4, p. 242–272, jan. 2009. Citado na página 13.
- DOWLING, N. *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue*. 4. ed. United State: Pearson, 2012. Citado 4 vezes nas páginas xi, 30, 31 e 32.
- DUGDALE, D. Yielding of steel sheets containing slits. *Mech. Phys. Solids*, v. 8, n. 1, p. 100–108, Jul. 1960. Citado na página 38.
- EFRON, B.; HASTIE, T.; JOHNSTONE, I.; TIBSHIRANI, R. Least angle regression. *The Annals of statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 32, n. 2, p. 407–499, 2004. Citado na página 3.
- ELDRED, M.; BURKARDT, J. Comparison of non-intrusive polynomial chaos and stochastic collocation methods for uncertainty quantification. In: PROCEEDINGS OF THE 47TH AIAA AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT. Orlando, USA, 2009. Citado na página 2.
- ENDESHAW, H.; EKWARO-OSIRE, S.; ALEMAYEHU, F.; DIAS, J. Evaluation of fatigue crack propagation of gears considering uncertainties in loading and material properties. *Sustainability*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 9, n. 12, p. 2200, 2017. Citado na página 46.
- EVANGELISTA-JR, F.; AFANADOR, N. A polynomial chaos expansion approach to the analysis of uncertainty in viscoelastic structural elements. *Dyna*, v. 83, n. 199, p. 172–182, Jan. 2016. Citado 5 vezes nas páginas xii, 4, 64, 67 e 69.
- EVANGELISTA-JR, F.; ROESLER, J.; PROENÇA, S. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 97, n. 1, p. 261–280, Jan. 2013. Citado na página 40.

FERNÁNDEZ-CANTELI, A.; CASTAÑÓN, L.; NIETO, B.; LOZANO, M.; HOLUSOVÁ, T.; SEITL, S. Determining fracture energy parameters of concrete from the modified compact tension test. *Frattura ed Integrità Strutturale*, Gruppo Italiano Frattura, n. 30, p. 383, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 91, 115 e 122.

FERRY, J. *Viscoelastic properties of polymers*. 1. ed. New York, USA: Wiley, 1980. Citado na página 25.

GAEDICKE, C.; ROESLER, J. Fracture-based method to determine flexural capacity of concrete beams on soil. *Road Materials and Pavement Design*, v. 11, n. 2, p. 361–385, Jan. 2010. Citado na página 40.

GEERS, M. *Experimental analysis and computational modelling of damage and fracture*. Tese (Ph.D. Thesis) — Eindhoven University of Technology, Estados unidos, 1997. Citado na página 44.

GHANEM, R.; SPANOS, P. Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis. *Journal Eng. Mech.*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 117, n. 10, p. 2351–2372, 1991. Citado na página 1.

GHANEM, R.; SPANOS, P. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. United State: Dover Publications, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 9 e 19.

GHIODEL, D.; GHANEM, R. Stochastic finite element analysis of seismic soil structure interaction. *Journal Eng. Mechanics.*, v. 128, n. 1, p. 66–77, jan. 2002. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 13.

GONZÁLEZ-FONTEBOA, B.; MARTÍNEZ-ABELLA, F.; HERRADOR, M.; SEARA-PAZ, S. Structural recycled concrete: Behaviour under low loading rate. *Construction and Building Materials*, v. 28, n. 1, p. 111–116, Jan. 2012. Citado na página 3.

GROOTEMAN, F. Adaptive radial-based importance sampling method for structural reliability. *Structural safety*, v. 30, n. 1, p. 533–542, jan. 2008. Citado 3 vezes nas páginas 6, 70 e 73.

GUINEA, G.; PLANAS, J.; ELICES, M. A general bilinear fit for the softening curve of concrete. *Material Structural*, v. 27, n. 2, p. 99–105, Jan. 1994. Citado na página 168.

GUSTAFSSON, A.; HILLERBORG, P. Improvements in concrete design achieved through application of fracture mechanics. *appl. Fract. Mech. Cement. Compos.*, v. 94, n. 1, p. 639–680, Jan. 1985. Citado na página 168.

HAMPTON, J.; DOOSTAN, A. Compressive sampling of polynomial chaos expansions: Convergence analysis and sampling strategies. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 280, p. 363–386, 2015. Citado na página 3.

HANSON, J.; INGRAFFEA, A. Using numerical simulations to determine the accuracy of the size - effect and two-parameter data reduction methods for fracture toughness tests of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 70, n. 1, p. 1015–1027, Jul. 2002. Citado na página 39.

HARR, M. *Reliability-based Design in Civil Engineering*. First. New York United State: Dover, 1997. Citado na página 60.

HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference and Prediction*. Second. Swansea: Springer, 2009. Citado na página 3.

HAWCHAR, L.; EL-SOUEIDY, C.; SCHOEFS, F. Principal component analysis and polynomial chaos expansion for time-variant reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety*, Elsevier, v. 167, p. 406–416, 2017. Citado na página 11.

HILL, B.; GIRALDO-LONDOÑO, O.; PAULINO, G.; BUTTLAR, W. Inverse estimation of cohesive fracture properties of asphalt mixtures using an optimization approach. *Experimental Mechanics*, Springer, v. 57, n. 4, p. 637–648, 2017. Citado na página 115.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSON, P. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Research*, v. 6, n. 1, p. 773–782, Jan. 1976. Citado na página 39.

HOFSTETTER, G.; MESCHKE, G. *Numerical modeling of concrete cracking*. New York, USA: Cambridge university press, 2011. Citado na página 44.

HOSDER, S.; WALTERS, R. Non-intrusive polynomial chaos methods for uncertainty quantification in fluid dynamics. In: 48TH AIAA AEROSPACE SCIENCES MEETING INCLUDING THE NEW HORIZONS FORUM AND AEROSPACE EXPOSITION. Orlando, Florida, USA, 2010. Citado na página 13.

HUANG, S.; LIANG, B.; PHOON, K. Geotechnical probabilistic analysis by collocation based stochastic response surface method an excel add in implementation. *Georisk*, v. 3, n. 2, p. 75–86, jan. 2009. Citado 4 vezes nas páginas xvi, 16, 17 e 19.

HUTCHINSON, J. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 16, n. 1, p. 13–31, Jan. 1968. Citado na página 34.

INGRAFFEA, A. Numerical modeling of fracture propagation in reinforced and plain concrete. *Fracture Mechanics of Concrete*, v. 7, n. 1, p. 171–225, Jul. 1984. Citado na página 39.

ISUKAPALLI, S.; ROY, A.; GEORGOPOULOS, P. Stochastic response surface methods (srsms) for uncertainty propagation: application to environmental and biological systems. *Risk analysis*, Wiley Online Library, v. 18, n. 3, p. 351–363, 1998. Citado na página 70.

ISUKAPALLI, S. S. *Uncertainty Analysis of Transport Transformation Models*. 141 f. Tese (PhD thesis) — The State University of New Jersey, New Jersey, United State, jul. 1999. Citado 11 vezes nas páginas xvi, 2, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 55, 61 e 131.

JENQ, Y.; SHAH, S. Two parameter fracture model for concrete. *Journal Eng. Mech.*, v. 11, n. 4, p. 1227–1241, Jan. 1985. Citado na página 37.

KAZUO, T.; TAKESHI, H.; KUNIAKI, M. A prediction model for extremely low cycle fatigue strength of structural steel. *International Journal of fatigue*, Elsevier, v. 29, n. 5, p. 887–896, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 57.

KEESE, A.; MATTHIES, H. Hierarchical parallelisation for the solution of stochastic finite element equations. *Journal computers and structures*, v. 83, n. 14, jan. 2005. Citado na página 13.

KERSAUDY, P.; SUDRET, B.; VARSIER, N.; PICON, O.; WIART, J. A new surrogate modeling technique combining kriging and polynomial chaos expansions—application to uncertainty analysis in computational dosimetry. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 286, p. 103–117, 2015. Citado na página 3.

- KEWLANI, G.; CRAWFORD, J.; IAGNEMMA, K. A polynomial chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, v. 50, n. 5, p. 1–26, Jan. 2012. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 23.
- KROETZ, H.; TESSARI, R.; BECK, A. Performance of global metamodeling techniques in solution of structural reliability problems. *Advances in Engineering Software*, v. 114, n. 1, p. 394–404, jan. 2017. Citado 6 vezes nas páginas 3, 6, 70, 73, 83 e 84.
- KUNA, M. *Finite Elements in Fracture Mechanics*. First. NY. United State: Springer, 2010. Citado 2 vezes nas páginas xi e 39.
- LARSSON, R.; RUNESSON, K. Cohesive crack models for semi-brittle material derived from localization of damage coupled to plasticity. *Int. J. Fracture*, v. 69, n. 1, p. 101–122, Jul. 1995. Citado na página 39.
- LE-MAÎTRE, O.; KNIO, O. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification: With Applications to Computational Fluid Dynamics*. London, UK: Springer, 2010. Citado na página 19.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. *Mechanics of solid materials*. First. France: Cambridge university press, 1994. Citado na página 44.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L.; BENALLAL, A.; DESMORAT, R. *Mécanique des matériaux solides*. Third. France: Dunod, 2009. Citado na página 45.
- LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. First. France: Springer Science & Business Media, 2005. Citado 2 vezes nas páginas xi e 42.
- LI, D.; CHEN, Y.; LU, W.; ZHOU, C. Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables. *Computers and Geotechnics*, v. 38, n. 1, p. 58–68, Nov. 2011. Citado 2 vezes nas páginas xvi e 16.
- LI, M.; LI, H. Effects of loading rate on reinforced concrete beams. In: 15 WCEE. Lisboa, Portugal, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 99.
- LU, Y. Structural response to high impulsive loads: Dynamic effects and analysis approaches. *Journal of Earthquake and Tsunami*, v. 7, n. 3, p. 1–23, Jan. 2013. Citado na página 3.
- LUCOR, D.; ENAUX, C.; JOURDREN, H.; SAGAUT, P. Stochastic design optimization: Application to reacting flow. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, n. 49-52, p. 5047–5062, Jan. Citado na página 2.
- MAITRE, O.; KINO, O.; NAJM, H.; GHANEM, R. A stochastic projection method for fluid flow: I. basic formulation. *Journal of Computational Physics*, v. 173, n. 3, p. 481–511, jan. 2001. Citado na página 13.
- MAITRE, O. L.; KNIO, O. A stochastic particle-mesh scheme for uncertainty propagation in vortical flows. *Journal Comput. Phys*, v. 226, n. 1, p. 645–671, 2007. Citado na página 1.
- MANSON, S. Behavior of materials under conditions of thermal stress. University of Michigan, Juny 1954. Citado na página 29.
- MANZANO, M.; ANDRADE, W.; SILVA, E.; LOPES, A. Análise da caracterização de um polímero superabsorvente utilizado em materiais cimentícios. In: XIII CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE PATOLOGIA DA CONSTRUÇÃO - CONPAT. Lisboa, Portugal, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 99.

- MARELLI, S.; SUDRET, B. *An active-learning algorithm that combines sparse polynomial chaos expansions and bootstrap for structural reliability analysis*. Switzerland, 2017. Citado na página 3.
- MATHELIN, L.; HUSSAINI, M. *A stochastic collocation algorithm for uncertainty*. Nasa langley Research Center, 2003. Citado na página 2.
- MAZARS, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Tese (Ph.D. Thesis) — THESE DE DOCTEUR ES SCIENCES PRESENTÉE A L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE-PARIS 6, França, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- MAÎTRE, O. L.; REAGAN, M.; NAJM, H.; GHANEM, R.; KNIO, O. A stochastic projection method for fluid flow: II. random process. *Journal of Computational Physics*, v. 181, n. 4, p. 9–44, jan. 2002. Citado na página 2.
- MELCHERS, R. *Structural reliability analysis and prediction*. 1. ed. New York, USA: John Wiley and Sons, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 23.
- MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. *Structural reliability analysis and prediction*. Third. India: John Wiley & Sons, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 47.
- MENESES, C. *Análise do comportamento mecânico de compósitos laminares considerando a viscoelasticidade*. 173 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade de Brasília, Distrito Federal DF, Maio 2015. Citado na página 25.
- MENG, J.; LI, H. An efficient stochastic approach for flow in porous media via sparse polynomial chaos expansion constructed by feature selection. *Advances in water resources*, Elsevier, v. 105, p. 13–28, 2017. Citado na página 3.
- MINER, M. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, v. 67, n. 1, p. A159–A164, Jan. 1945. Citado na página 31.
- MONTGOMERY, D. *Design and Analysis of Experiments*. Eighth. United State: Jhon Wiley & Sons, Inc., 2013. Citado na página 1.
- MOREIRA, J.; EVANGELISTA, F. Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais quase-frágeis. In: XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Brasília, Brasil, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 38, 118, 124, 131 e 168.
- MORROW, J. Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals. *ASTM STP*, v. 378, n. 1, p. 45, 1965. Citado 4 vezes nas páginas xi, 26, 27 e 47.
- MORROW, J. *Fatigue Design Handbook*. 1. ed. United State: SAE Warrendale, 1968. Citado na página 29.
- MUÑOZ, I.-D.; EVANGELISTA-JR, F. Avaliação numérica do risco de falha estrutural por propagação de trincas em estruturas e materiais quasi-frágeis incorporando incerteza e mecânica de fratura. In: XXXV IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Fortaleza, Brasil, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.
- MUSTO, M.; ALFANO, G. A novel rate-dependent cohesive-zone model combining damage and visco-elasticity. *Computers and Structures*, v. 118, n. 1, p. 126–133, feb. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 115.

NEGRÃO, G. *Implementação e avaliação da metodologia deformação-vida em componentes entalhados*. 54 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — UnB. Universidade de Brasília, Brasília, DF, Dezembro. 2014. Citado 8 vezes nas páginas 29, 47, 49, 51, 52, 53, 54 e 56.

NEUBER, H. Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law. *Journal of applied mechanics*, v. 28, n. 1, p. 544–550, Jan. 1961. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 47.

NIP, K.; GARDNER, L.; DAVIES, C.; ELGHAZOULI, A. Extremely low cycle fatigue tests on structural carbon steel and stainless steel. *Journal of constructional steel research*, Elsevier, v. 66, n. 1, p. 96–110, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 57.

NOBILE, F.; WEBSTER, C. A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equation with random input data. *SIAM J. Numerical Anal.*, v. 46, n. 5, p. 2309–2345, jun. 2008. Citado na página 2.

NOWAK, A.; COLLINS, K. R. *Reliability of structures*. Broken Sound Parkway, N.W., EUA: CRC Press, 2012. Citado 3 vezes nas páginas xi, 1 e 22.

OLADYSHKIN, S.; NOWAK, W. Incomplete statistical information limits the utility of high-order polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety*, Elsevier, v. 169, p. 137–148, 2018. Citado na página 2.

ORTEGA, J. J.; RUIZ, G.; RENA, C. Y.; AFANADOR-GARCÍA, N.; TARIFA, M.; POVEDA, E.; ZHANG, X.; EVANGELISTA, F. Number of tests and corresponding error in concrete fatigue. *International Journal of Fatigue*, v. 116, n. 11, p. 210–219, Nov. 2018. Citado na página 4.

ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineerin*, v. 44, n. 1, p. 1267–1282, Jan. 1999. Citado na página 38.

OŽBOLT, J.; RAH, K. K.; MEŠTROVIĆ, D. Influence of loading rate on concrete cone failure. *Structural Concrete*, v. 139, n. 1, p. 239–252, Jan. 2006. Citado na página 99.

PALMGREN, A. Die lebensdauer von kugellagern. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, v. 68, n. 14, p. 339–341, Jan. 1924. Citado na página 31.

PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. First. New York United State: McGraw-Hill, 1991. Citado na página 19.

PARK, K.; PAULINO, G.; ROESLER, J. A unified potential-based cohesive model of mixed mode fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 57, n. 6, p. 891–908, Jan. 2009. Citado 4 vezes nas páginas xi, 39, 40 e 168.

PARK, S.; KIM, Y. Interconversion between relaxation modulus and creep compliance for viscoelastic solids. *Journal of materials in civil engineering*, v. 11, n. 1, p. 76–82, Jan. 1999. Citado na página 59.

PARK, S.; SCHAPERLY, R. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I-a numerical method based on prony series. *International journal of solids and structural*, v. 36, n. 11, p. 1653–1675, Jan. 1998. Citado na página 59.

PASCUAL, B.; ADHIKARI, S. A reduced polynomial chaos expansion method for the stochastic finite element analysis. *Sadhana*, Springer, v. 37, n. 3, p. 319–340, 2012. Citado na página 2.

- PEREIRA, J.; JESUS, A. de; FERNANDES, A. Ultra-low-cycle fatigue behavior of pipeline steels based on theory of critical distances. In: INTERNATIONAL SOCIETY OF OFFSHORE AND POLAR ENGINEERS. *The Twenty-fifth International Ocean and Polar Engineering Conference*. Hawaii, USA, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 57.
- PETERSSON, P. *Crack Growth and Development of Fracture Zone in Plain Concrete and Similar Materials*. Report No. TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology Lund, Sweden, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 168.
- PHOON, K.; HUANG, S. Uncertainty quantification using multi-dimensional hermite polynomials, ASCE 2007. *J. ASCE*, v. 1, n. 1, p. 1–10, Jan. 2007. Citado na página 19.
- PISETH, V.; NAKARAI, K.; CHIJIWA, N.; MAEKAWA, K. Experimental study on the effects of a loading rate on the shear performance of an RC beam. In: PROCEEDINGS OF THE 10TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHANICS AND PHYSICS OF CREEP, SHRINKAGE, AND DURABILITY OF CONCRETE AND CONCRETE STRUCTURES. Vienna, Austria, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 99.
- PLANAS, J.; GUINEA, G.; ELICES, M. Size effect and inverse analysis in concrete fracture. *Intl. J. Fracture*, v. 95, n. 1, p. 367–378, Jan. 1999. Citado na página 40.
- PROENÇA, S.; TORRES, I. Generalized finite element method for nonlinear three-dimensional analysis of solids. *International Journal of Computational Methods*, World Scientific, v. 5, n. 01, p. 37–62, 2008. Citado na página 43.
- RABOTNOV, Y. N. Creep problems in structural members. North-Holland, 1969. Citado na página 43.
- RAMBERG, W.; OSGOOD, W. Description of stress-strain curves by three parameters. *NACA Tech. Note No. 902*, 1943. Citado na página 29.
- RAMTANI, S.; MAZARS, J.; BERTHAUD, Y. The unilateral behavior of damage concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, p. 629–635, 1990. Citado na página 43.
- RICE, J.; ROSENGREN, G. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 16, n. 1, p. 1–12, Jan. 1968. Citado na página 34.
- RILEM. Size effect method for determining fracture energy and process zone size of concrete. *Mater. Struct.*, v. 23, n. 1, p. 461–465, Jan. 1990. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 93.
- ROESLER, J.; PAULINO, G.; PARK, K.; GAEDICKE, C. Concrete fracture prediction using bilinear softening. *Cement and Concrete Composites*, v. 29, n. 4, p. 300–312, Jan. 2007. Citado 8 vezes nas páginas xi, xiv, xviii, 39, 128, 129, 130 e 168.
- ROSA, A. L.; YU, R. C.; SAUCEDO, L.; SOUSA, J. L. A loading rate dependent cohesive model for concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 82, n. 1, p. 195–208, feb. 2012. Citado 8 vezes nas páginas xi, 3, 40, 41, 97, 99, 102 e 115.
- RUIZ, G.; ZHANG, X.; YU, R.; RORRAS, R.; POVEDA, E.; VISO, J. Effect of loading rate on fracture energy of high-strength concrete. *STRAIN An International Journal for Experimental Mechanics*, v. 47, n. 6, p. 518–524, Dec. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 40.
- SALTELLI, A.; ANNONI, P.; AZZINI, I.; CAMPOLONGO, F.; RATTO, M.; TARANTOLA, S. Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, v. 181, n. 2, p. 259–270, 2010. Citado na página 18.

- SANFORD, R. *Principles of Fracture Mechanics*. First. NY. United State: Pearson, 2002. Citado na página 34.
- SANKARARAMAN, S.; LING, Y.; SHANTZ, C.; MAHADEVAN, S. Uncertainty quantification in fatigue crack growth prognosis. *International Journal of Prognostics and Health Management*, Directory of Open Access Journals, v. 2, n. 1, p. 15, 2011. Citado na página 46.
- SCHÖBI, R.; SUDRET, B.; MARELLI, S. Rare event estimation using polynomial-chaos kriging. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 3, n. 2, p. D4016002, 2016. Citado na página 2.
- SEITL, S.; RÍOS j.; CIFUENTES, H. Comparison of fracture toughness values of normal and high strength concrete determined by three point bend and modified disk-shaped compact tension specimens. *Frattura ed Integrità Strutturale*, v. 11, n. 42, p. 56–65, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 122.
- SILVA, F. M. A. d.; BRAZÃO, A. F.; GONÇALVES, P. B. Influence of physical and geometrical uncertainties in the parametric instability load of an axially excited cylindrical shell. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2015, 2015. Citado na página 3.
- SIMONE, A.; WELLS, G.; SLUYS, L. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 192, n. 41-42, p. 4581–4607, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- SLIM, J.; RATHMANN, F.; NASS, A.; SOLTNER, H.; GEBEL, R.; PRETZ, J.; HEBERLING, D. Polynomial chaos expansion method as a tool to evaluate and quantify field homogeneities of a novel waveguide rf wien filter. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 859, p. 52–62, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 12.
- SMITH, K.; WATSON, P.; TOPPER, T. A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, v. 5, n. 4, p. 767–778, Jan. 1970. Citado na página 29.
- SOCIE, D.; DOWLING, N.; KURATH, P. Fatigue life estimation of notched members. *ASTM STP 833*, v. 833, n. 1, p. 284–299, Jan. 1984. Citado 4 vezes nas páginas xvi, 48, 49 e 53.
- SOIZE, C. Polynomial chaos expansion of a multimodal random vector. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, SIAM, v. 3, n. 1, p. 34–60, 2015. Citado na página 3.
- SONG, S.; GLAUCIO, G.; BUTTLAR, W. A bilinear cohesive zone model tailored for fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 73, n. 18, p. 2829–2848, 2006. Citado na página 115.
- SPIRIDONAKOS, M. D.; CHATZI, E. N.; SUDRET, B. Polynomial chaos expansion models for the monitoring of structures under operational variability. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 2, n. 3, p. B4016003, 2016. Citado na página 3.
- SUDRET, B. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models : Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. 173 f. Tese (PhD thesis) — Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand, France, Oct. 2007. Citado 3 vezes nas páginas 2, 18 e 19.

- SUDRET, B. Meta models for structural reliability and uncertainty quantification. In: ASIAN-PACIFIC SYMPOSIUM ON STRUCTURAL RELIABILITY AND ITS APPLICATIONS. Singapore, 2012. Citado 5 vezes nas páginas xvi, 2, 3, 10 e 11.
- SUDRET, B.; DER-KIUREGHIAN, A. *Stochastic Finite Elements and Reliability: A State of the Art Report*. University of California, Berkeley, 2000. Citado na página 23.
- TADA, H.; PARIS, P.; IRWIN, G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Third. NY. United State: The American Society of Mechanical Engineers, 2000. Citado 2 vezes nas páginas xiii e 93.
- TATANG, M. *Direct Incorporation of Uncertainty in Chemical and Environmental Engineering Systems*. 141 f. Tese (PhD thesis) — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, jul. 1995. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 19.
- TODOROV, V.; DIMOV, I.; DZUROV, V.; STANCHEV, T.; TSVETKOV, I.; DIMITROV, V. A numerical study on hammersley sequence and fibonacci based lattice rule for computation of multidimensional integrals. *Journal scientific and applied research*, v. 12, n. 1, p. 18–26, feb. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- TOPPER, T.; WETZEL, R.; MORROW, J. Neuber's rule applied to fatigue of notched specimens. *Journal of Materials*, v. 4, n. 1, p. 200–209, Jan. 1969. Citado na página 32.
- TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Probability of failure sensitivity analysis using polynomial expansion. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Elsevier, v. 48, p. 76–84, 2017. Citado na página 2.
- TVERGAARD, V.; HUTCHINSON, J. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic - plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 40, n. 1, p. 1377–1397, Jan. 1992. Citado na página 38.
- VAN-MIER, J. *Concrete Fracture A Multiscale Approach*. First. NY. United State: CRC Press, 2013. Citado na página 34.
- VREE, J. D.; BREKELMANS, W.; GILS, M. V. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, Elsevier, v. 55, n. 4, p. 581–588, 1995. Citado na página 44.
- WAGNONER, M.; BUTTLAR, W.; PAULINO, G. Disk-shaped compact tension test for asphalt concrete fracture. *Experimental Mechanics*, Springer, v. 45, n. 3, p. 270–277, 2005a. Citado na página 91.
- WAGONER, M.; BUTTLAR, W.; PAULINO, G.; BLANKENSHIP, P. Investigation of the fracture resistance of hot-mix asphalt concrete using a disk-shaped compact tension test. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Transportation Research Board of the National Academies, n. 1929, p. 183–192, 2005b. Citado na página 91.
- WEBSTER, M.; TATANG, M.; MCRAE, G. *Application of the Probabilistic Collocation Method for an Uncertainty Analysis of a Simple Ocean Model*. MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change Reports Series No. 4, Massachusetts institute of Technology., 1996. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 70.
- WELLS, A. Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British Welding Journal*, v. 10, n. 1, p. 563–570, Jan. 1963. Citado na página 34.

WIENER, N. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, v. 60, n. 4, p. 897–936, jan. 1938. Citado na página 8.

WITTMANN, F.; ROKUGO, K.; BRUHWILLER, E.; MIHASHI, H.; SIMOPNIN, P. Fracture energy and strain softening of concrete as determined by compact tension specimens. *Material Structural*, v. 21, n. 1, p. 21–32, Jan. 1988. Citado na página 168.

XIU, D. *Numerical Methods for Stochastic Computations*. New Jersey: Princeton University Press, 2010. Citado na página 19.

XIU, D.; HESTHAVEN, J. S. High order collocation methods for differential equations with random inputs. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 27, n. 3, p. 1118–1139, jan. 2005. Citado na página 13.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G. The wiener askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal Scientific Computing*, v. 24, n. 2, p. 619–644, jan. 2002. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 15.

YUN-RONG, L.; QING-YUAN, W.; LEI, F.; WEN-LING, X.; YING-QIAN, Z. Extremely low cycle fatigue behaviors of anti-seismic steel HRB400 reinforcing steel bars under strong earthquakes. *Journal of Material Sciences*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 48–54, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 57.

ZHOU, Z.; WANG, Z.; ZHAO, L.; SHU, X. Loading rate effect on yield surface of aluminum alloy foams. *Materials Science and Engineering*, v. 543, n. 1, p. 193–199, Jan. 2012. Citado na página 3.

ZIMMERMANN, T.; STRAUSS, A.; LEHKÝ, D.; NOVÁK, D.; KERŠNER, Z. Stochastic fracture-mechanical parameters for the performance-based design of concrete structures. *Structural Concrete*, v. 15, n. 3, p. 380–394, Jan. 2014. Citado na página 110.

ANEXOS

I. PEC APLICADO EM CONFIABILIDADE

Tabela A.I.1 Resultados do análise do exemplo 2 caso II, coeficientes do PEC_C .

No.	Coef.	Hn	No.	Coef.	Hn	No.	Coef.	Hn
1	1,9	'1'	58	-2,098E-16	'H1(e1)H1(e9)'	115	4,76673E-16	'H1(e5)H1(e6)H1(e7)'
2	-4,82429E-15	'H1(e10)'	59	-8,65292E-16	'H1(e1)H1(e8)'	116	-1,90323E-15	'H1(e5)H2(e6)'
3	4,66232E-15	'H1(e9)'	60	1,42203E-16	'H1(e1)H1(e7)'	117	9,87927E-16	'H2(e5)H1(e10)'
4	-1,89727E-15	'H1(e8)'	61	-1,43123E-16	'H1(e1)H1(e6)'	118	8,9705E-16	'H2(e5)H1(e9)'
5	-3,35731E-15	'H1(e7)'	62	-4,39167E-16	'H1(e1)H1(e5)'	119	2,24731E-15	'H2(e5)H1(e8)'
6	-1,30276E-15	'H1(e6)'	63	1,30613E-15	'H1(e1)H1(e4)'	120	-8,02817E-16	'H2(e5)H1(e7)'
7	-2,31053E-15	'H1(e5)'	64	2,49247E-16	'H1(e1)H1(e3)'	121	-2,51881E-15	'H2(e5)H1(e6)'
8	-1,1533E-15	'H1(e4)'	65	2,3288E-15	'H1(e1)H1(e2)'	122	3,48151E-16	'H3(e5)'
9	-1,51324E-15	'H1(e3)'	66	-0,1	'H2(e1)'	123	3,53562E-16	'H1(e4)H2(e10)'
10	-1	'H1(e2)'	67	-1,05984E-15	'H3(e10)'	124	-9,41759E-17	'H1(e4)H1(e9)H1(e10)'
11	0,18	'H1(e1)'	68	5,78504E-15	'H1(e9)H2(e10)'	125	4,372E-17	'H1(e4)H2(e9)'
12	9,00636E-16	'H2(e10)'	69	-1,78627E-15	'H2(e9)H1(e10)'	126	3,80067E-15	'H1(e4)H1(e8)H1(e10)'
13	-8,15481E-16	'H1(e9)H1(e10)'	70	3,3609E-16	'H3(e9)'	127	1,25442E-15	'H1(e4)H1(e8)H1(e9)'
14	3,09635E-16	'H2(e9)'	71	-2,73227E-15	'H1(e8)H2(e10)'	128	-2,66648E-15	'H1(e4)H2(e8)'
15	-9,34976E-17	'H1(e8)H1(e10)'	72	4,77491E-15	'H1(e8)H1(e9)H1(e10)'	129	-2,19152E-15	'H1(e4)H1(e7)H1(e10)'
16	-1,63153E-15	'H1(e8)H1(e9)'	73	-3,52642E-15	'H1(e8)H2(e9)'	130	2,10596E-15	'H1(e4)H1(e7)H1(e9)'
17	4,01072E-17	'H2(e8)'	74	-1,52883E-15	'H2(e8)H1(e10)'	131	-2,60913E-16	'H1(e4)H1(e7)H1(e8)'
18	-1,50722E-15	'H1(e7)H1(e10)'	75	1,18679E-15	'H2(e8)H1(e9)'	132	-1,0263E-15	'H1(e4)H2(e7)'
19	4,81051E-16	'H1(e7)H1(e9)'	76	9,24155E-17	'H3(e8)'	133	-7,99305E-16	'H1(e4)H1(e6)H1(e10)'
20	-2,26417E-15	'H1(e7)H1(e8)'	77	-2,90128E-15	'H1(e7)H2(e10)'	134	-9,82209E-16	'H1(e4)H1(e6)H1(e9)'
21	-1,42322E-15	'H2(e7)'	78	2,48579E-15	'H1(e7)H1(e9)H1(e10)'	135	1,36685E-15	'H1(e4)H1(e6)H1(e8)'
22	1,90312E-15	'H1(e6)H1(e10)'	79	-8,80175E-16	'H1(e7)H2(e9)'	136	2,84355E-16	'H1(e4)H1(e6)H1(e7)'
23	3,68791E-16	'H1(e6)H1(e9)'	80	-6,98317E-16	'H1(e7)H1(e8)H1(e10)'	137	-1,56636E-16	'H1(e4)H2(e6)'
24	2,98024E-15	'H1(e6)H1(e8)'	81	2,11469E-16	'H1(e7)H1(e8)H1(e9)'	138	-1,15484E-15	'H1(e4)H1(e5)H1(e10)'
25	9,13634E-16	'H1(e6)H1(e7)'	82	1,48797E-15	'H1(e7)H2(e8)'	139	7,62404E-16	'H1(e4)H1(e5)H1(e9)'
26	-1,81092E-16	'H2(e6)'	83	-1,02814E-15	'H2(e7)H1(e10)'	140	-4,04926E-15	'H1(e4)H1(e5)H1(e8)'
27	5,70959E-16	'H1(e5)H1(e10)'	84	-1,26136E-15	'H2(e7)H1(e9)'	141	3,15333E-15	'H1(e4)H1(e5)H1(e7)'
28	-2,26518E-15	'H1(e5)H1(e9)'	85	1,74566E-15	'H2(e7)H1(e8)'	142	2,63189E-15	'H1(e4)H1(e5)H1(e6)'
29	-8,15999E-16	'H1(e5)H1(e8)'	86	-6,90067E-16	'H3(e7)'	143	-3,83311E-16	'H1(e4)H2(e5)'
30	-9,06233E-16	'H1(e5)H1(e7)'	87	-1,6429E-15	'H1(e6)H2(e10)'	144	7,24438E-16	'H2(e4)H1(e10)'
31	-2,12928E-15	'H1(e5)H1(e6)'	88	-4,91327E-15	'H1(e6)H1(e9)H1(e10)'	145	1,19878E-15	'H2(e4)H2(e9)'
32	-3,67173E-16	'H2(e5)'	89	1,11825E-15	'H1(e6)H2(e9)'	146	4,38767E-16	'H2(e4)H1(e8)'
33	4,4455E-16	'H1(e4)H1(e10)'	90	5,34508E-15	'H1(e6)H1(e8)H1(e10)'	147	-5,39327E-16	'H2(e4)H1(e7)'
34	-2,48978E-15	'H1(e4)H1(e9)'	91	-2,57103E-15	'H1(e6)H1(e8)H1(e9)'	148	1,40332E-15	'H2(e4)H1(e6)'
35	1,17786E-15	'H1(e4)H1(e8)'	92	4,17259E-16	'H1(e6)H2(e8)'	149	1,88188E-16	'H2(e4)H1(e5)'
36	-1,2408E-15	'H1(e4)H1(e7)'	93	8,07196E-16	'H1(e6)H1(e7)H1(e10)'	150	9,42396E-16	'H3(e4)'
37	5,63342E-16	'H1(e4)H1(e6)'	94	1,15817E-15	'H1(e6)H1(e7)H1(e9)'	151	-1,40892E-15	'H1(e3)H2(e10)'
38	5,68497E-16	'H1(e4)H1(e5)'	95	-5,57933E-16	'H1(e6)H1(e7)H1(e8)'	152	-7,18168E-17	'H1(e3)H1(e9)H1(e10)'
39	-2,22328E-15	'H2(e4)'	96	2,51869E-16	'H1(e6)H2(e7)'	153	-3,49021E-16	'H1(e3)H2(e9)'
40	-2,6113E-15	'H1(e3)H1(e10)'	97	-2,41477E-16	'H2(e6)H1(e10)'	154	1,48251E-15	'H1(e3)H1(e8)H1(e10)'
41	-1,60991E-15	'H1(e3)H1(e9)'	98	1,11694E-15	'H2(e6)H1(e9)'	155	-2,36923E-15	'H1(e3)H1(e8)H1(e9)'
42	2,25114E-15	'H1(e3)H1(e8)'	99	5,17422E-16	'H2(e6)H1(e8)'	156	2,07775E-15	'H1(e3)H2(e8)'
43	-1,15454E-16	'H1(e3)H1(e7)'	100	9,81083E-16	'H2(e6)H1(e7)'	157	-7,2983E-16	'H1(e3)H1(e7)H1(e10)'
44	7,16728E-16	'H1(e3)H1(e6)'	101	-1,29725E-16	'H3(e6)'	158	3,86636E-16	'H1(e3)H1(e7)H1(e9)'
45	-6,70344E-16	'H1(e3)H1(e5)'	102	-7,37133E-16	'H1(e5)H2(e10)'	159	-9,08314E-16	'H1(e3)H1(e7)H1(e8)'
46	3,20229E-16	'H1(e3)H1(e4)'	103	-5,72712E-17	'H1(e5)H1(e9)H1(e10)'	160	-7,09551E-16	'H1(e3)H2(e7)'
47	1,15347E-15	'H2(e3)'	104	-1,66705E-15	'H1(e5)H2(e9)'	161	1,04656E-15	'H1(e3)H1(e6)H1(e10)'
48	1,7642E-16	'H1(e2)H1(e10)'	105	1,0066E-15	'H1(e5)H1(e8)H1(e10)'	162	-1,18581E-15	'H1(e3)H1(e6)H1(e9)'
49	-6,78352E-16	'H1(e2)H1(e9)'	106	8,53824E-16	'H1(e5)H1(e8)H1(e9)'	163	-1,71585E-16	'H1(e3)H1(e6)H1(e8)'
50	6,53261E-16	'H1(e2)H1(e8)'	107	9,17141E-16	'H1(e5)H2(e8)'	164	-1,76325E-15	'H1(e3)H1(e6)H1(e7)'
51	-1,38798E-15	'H1(e2)H1(e7)'	108	6,98971E-16	'H1(e5)H1(e7)H1(e10)'	165	4,46949E-16	'H1(e3)H2(e6)'
52	-3,87183E-16	'H1(e2)H1(e6)'	109	-9,34938E-16	'H1(e5)H1(e7)H1(e9)'	166	8,77785E-16	'H1(e3)H1(e5)H1(e10)'
53	2,87915E-15	'H1(e2)H1(e5)'	110	-2,9095E-16	'H1(e5)H1(e7)H1(e8)'	167	-2,77889E-16	'H1(e3)H1(e5)H1(e9)'
54	2,12427E-15	'H1(e2)H1(e4)'	111	-2,40749E-15	'H1(e5)H2(e7)'	168	4,43936E-16	'H1(e3)H1(e5)H1(e8)'
55	-2,55418E-16	'H1(e2)H1(e3)'	112	2,46388E-15	'H1(e5)H1(e6)H1(e10)'	169	2,90438E-15	'H1(e3)H1(e5)H1(e7)'
56	-8,91035E-17	'H2(e2)'	113	-1,89494E-15	'H1(e5)H1(e6)H1(e9)'	170	-1,31654E-15	'H1(e3)H1(e5)H1(e6)'
57	-1,07079E-15	'H1(e1)H1(e10)'	114	-3,58276E-15	'H1(e5)H1(e6)H1(e8)'	171	1,41401E-15	'H1(e3)H2(e5)'

Continua...

Tabela A.I.1 Resultados do análise do exemplo 2 caso II coeficientes do PEC_C .

No.	Coef.	Hn	No.	Coef.	Hn
172	1,35305E-15	'H1(e3)H1(e4)H1(e10)'	230	-2,57767E-17	'H2(e2)H1(e3)'
173	-2,51793E-15	'H1(e3)H1(e4)H1(e9)'	231	-1,96713E-15	'H3(e2)'
174	-1,91993E-16	'H1(e3)H1(e4)H1(e8)'	232	1,93674E-15	'H1(e1)H2(e10)'
175	-1,79512E-15	'H1(e3)H1(e4)H1(e7)'	233	1,52955E-15	'H1(e1)H1(e9)H1(e10)'
176	-1,87242E-15	'H1(e3)H1(e4)H1(e6)'	234	5,98654E-16	'H1(e1)H2(e9)'
177	-8,47005E-16	'H1(e3)H1(e4)H1(e5)'	235	-3,54676E-15	'H1(e1)H1(e8)H1(e10)'
178	-1,00553E-15	'H1(e3)H2(e4)'	236	-1,84624E-15	'H1(e1)H1(e8)H1(e9)'
179	2,89246E-15	'H2(e3)H1(e10)'	237	2,65692E-15	'H1(e1)H2(e8)'
180	-5,46685E-16	'H2(e3)H1(e9)'	238	-1,11096E-15	'H1(e1)H1(e7)H1(e10)'
181	1,63071E-15	'H2(e3)H1(e8)'	239	-4,79062E-16	'H1(e1)H1(e7)H1(e9)'
182	-4,58747E-16	'H2(e3)H1(e7)'	240	-1,20959E-16	'H1(e1)H1(e7)H1(e8)'
183	9,3997E-16	'H2(e3)H1(e6)'	241	-1,92109E-15	'H1(e1)H2(e7)'
184	2,47775E-16	'H2(e3)H1(e5)'	242	-1,9888E-15	'H1(e1)H1(e6)H1(e10)'
185	3,17463E-15	'H2(e3)H1(e4)'	243	-1,88101E-15	'H1(e1)H1(e6)H1(e9)'
186	-1,68983E-16	'H3(e3)'	244	-1,36309E-15	'H1(e1)H1(e6)H1(e8)'
187	-3,77943E-16	'H1(e2)H2(e10)'	245	4,72074E-15	'H1(e1)H1(e6)H1(e7)'
188	-5,31097E-16	'H1(e2)H1(e9)H1(e10)'	246	-9,77997E-16	'H1(e1)H2(e6)'
189	-3,24149E-15	'H1(e2)H2(e9)'	247	-1,1804E-15	'H1(e1)H1(e5)H1(e10)'
190	-2,09256E-15	'H1(e2)H1(e8)H1(e10)'	248	-2,21696E-15	'H1(e1)H1(e5)H1(e9)'
191	-1,18387E-15	'H1(e2)H1(e8)H1(e9)'	249	2,33386E-15	'H1(e1)H1(e5)H1(e8)'
192	-5,24545E-17	'H1(e2)H2(e8)'	250	-1,93445E-15	'H1(e1)H1(e5)H1(e7)'
193	-1,50186E-15	'H1(e2)H1(e7)H1(e10)'	251	-4,03707E-16	'H1(e1)H1(e5)H1(e6)'
194	1,54312E-15	'H1(e2)H1(e7)H1(e9)'	252	-4,6131E-16	'H1(e1)H2(e5)'
195	1,71645E-16	'H1(e2)H1(e7)H1(e8)'	253	8,44392E-16	'H1(e1)H1(e4)H1(e10)'
196	2,95491E-15	'H1(e2)H2(e7)'	254	-3,68434E-15	'H1(e1)H1(e4)H1(e9)'
197	-8,83802E-16	'H1(e2)H1(e6)H1(e10)'	255	-1,59489E-15	'H1(e1)H1(e4)H1(e8)'
198	-2,66685E-15	'H1(e2)H1(e6)H1(e9)'	256	2,1656E-16	'H1(e1)H1(e4)H1(e7)'
199	8,85315E-16	'H1(e2)H1(e6)H1(e8)'	257	-7,80999E-16	'H1(e1)H1(e4)H1(e6)'
200	-1,03781E-15	'H1(e2)H1(e6)H1(e7)'	258	-2,21017E-15	'H1(e1)H1(e4)H1(e5)'
201	-1,05657E-15	'H1(e2)H2(e6)'	259	-1,01828E-15	'H1(e1)H2(e4)'
202	2,66747E-15	'H1(e2)H1(e5)H1(e10)'	260	5,41436E-16	'H1(e1)H1(e3)H1(e10)'
203	1,1809E-15	'H1(e2)H1(e5)H1(e9)'	261	-1,08332E-15	'H1(e1)H1(e3)H1(e9)'
204	4,03943E-15	'H1(e2)H1(e5)H1(e8)'	262	-1,76585E-15	'H1(e1)H1(e3)H1(e8)'
205	3,11664E-15	'H1(e2)H1(e5)H1(e7)'	263	-1,76913E-15	'H1(e1)H1(e3)H1(e7)'
206	1,75909E-15	'H1(e2)H1(e5)H1(e6)'	264	-1,02011E-15	'H1(e1)H1(e3)H1(e6)'
207	-1,76804E-15	'H1(e2)H2(e5)'	265	2,87668E-16	'H1(e1)H1(e3)H1(e5)'
208	1,2567E-17	'H1(e2)H1(e4)H1(e10)'	266	5,95057E-16	'H1(e1)H1(e3)H1(e4)'
209	9,62396E-16	'H1(e2)H1(e4)H1(e9)'	267	1,57001E-15	'H1(e1)H2(e3)'
210	-1,37019E-15	'H1(e2)H1(e4)H1(e8)'	268	2,19263E-15	'H1(e1)H1(e2)H1(e10)'
211	7,49405E-16	'H1(e2)H1(e4)H1(e7)'	269	7,01664E-16	'H1(e1)H1(e2)H1(e9)'
212	7,60286E-16	'H1(e2)H1(e4)H1(e6)'	270	-9,90115E-16	'H1(e1)H1(e2)H1(e8)'
213	-3,29963E-15	'H1(e2)H1(e4)H1(e5)'	271	1,66533E-16	'H1(e1)H1(e2)H1(e7)'
214	1,81847E-15	'H1(e2)H2(e4)'	272	3,18064E-16	'H1(e1)H1(e2)H1(e6)'
215	-1,96688E-15	'H1(e2)H1(e3)H1(e10)'	273	-4,19717E-15	'H1(e1)H1(e2)H1(e5)'
216	2,26552E-15	'H1(e2)H1(e3)H1(e9)'	274	4,70791E-15	'H1(e1)H1(e2)H1(e4)'
217	2,16205E-15	'H1(e2)H1(e3)H1(e8)'	275	-1,44734E-15	'H1(e1)H1(e2)H1(e3)'
218	7,23365E-16	'H1(e2)H1(e3)H1(e7)'	276	-1,44894E-15	'H1(e1)H2(e2)'
219	-1,05389E-15	'H1(e2)H1(e3)H1(e6)'	277	-2,1798E-15	'H2(e1)H1(e10)'
220	2,71033E-15	'H1(e2)H1(e3)H1(e5)'	278	2,90056E-16	'H2(e1)H1(e9)'
221	7,49905E-16	'H1(e2)H1(e3)H1(e4)'	279	-3,68055E-16	'H2(e1)H1(e8)'
222	-1,07276E-15	'H1(e2)H2(e3)'	280	2,09805E-15	'H2(e1)H1(e7)'
223	-3,64461E-15	'H2(e2)H1(e10)'	281	-1,29145E-15	'H2(e1)H1(e6)'
224	5,48348E-17	'H2(e2)H1(e9)'	282	6,52857E-16	'H2(e1)H1(e5)'
225	-6,13998E-16	'H2(e2)H1(e8)'	283	-1,481E-16	'H2(e1)H1(e4)'
226	-4,27485E-16	'H2(e2)H1(e7)'	284	-2,44363E-15	'H2(e1)H1(e3)'
227	-3,42847E-16	'H2(e2)H1(e6)'	285	-4,66735E-16	'H2(e1)H1(e2)'
228	1,67758E-17	'H2(e2)H1(e5)'	286	0,06	'H3(e1)'
229	1,16224E-15	'H2(e2)H1(e4)'			

II. ANÁLISE ESTATÍSTICA DO ENSAIO DE FRATURA EM MODO I

Tabela A.II.1 Parâmetros de entrada para EEB com 0,60 mm/min e diferentes W .

W (mm)	t (mm)	a_0 (mm)	P_j (kN)	h (mm)	C_i (mm/kN)	ft (MPa)	G_F (N/m)
112,89	54,54	47,65	2,40	3,53	0,023189	6,02	119,51
112,92	53,86	47,69	2,51	3,58	0,021054	6,00	114,58
112,94	55,01	47,70	2,37	3,55	0,018840	6,08	116,40
75,27	55,63	30,95	1,92	3,85	0,022582	6,02	106,36
75,25	53,87	31,15	1,78	3,53	0,021471	6,12	119,17
56,42	53,83	22,99	1,37	3,28	0,021702	6,02	105,91
56,41	57,75	22,77	1,34	3,70	0,017024	6,12	108,65
56,45	55,10	22,90	1,49	3,40	0,016171	6,08	118,17
56,44	55,10	22,90	1,38	3,44	0,016171	6,23	106,77

Tabela A.II.2 Parâmetros de entrada para EEB com 0,10 mm/min e diferentes W .

W (mm)	t (mm)	a_0 (mm)	P_j (kN)	h (mm)	C_i (mm/kN)	ft (MPa)	G_F (N/m)
112,88	55,10	47,70	2,17	3,51	0,017645	5,88	106,39
112,92	56,20	47,86	2,25	3,25	0,015149	5,91	107,38
112,90	56,46	47,54	2,21	3,77	0,019397	5,01	110,45
75,25	55,10	31,13	1,64	3,52	0,018975	5,88	116,28
75,30	55,23	31,26	1,59	3,33	0,024241	5,91	115,88
75,24	57,22	31,02	1,69	3,77	0,019281	6,12	114,11
75,27	55,45	31,29	1,67	3,25	0,020022	5,99	119,81
56,41	55,71	22,94	1,24	3,38	0,016313	5,95	97,17
56,44	56,27	23,06	1,25	3,15	0,015777	6,12	98,21
56,46	56,21	22,77	1,30	3,73	0,015600	5,99	103,72

Tabela A.II.3 Parâmetros de entrada para EEB com 0,06 mm/min e diferentes W .

W (mm)	t (mm)	a_0 (mm)	P_j (kN)	h (mm)	C_i (mm/kN)	ft (MPa)	G_F (N/m)
112,88	56,52	47,77	2,24	3,40	0,020309	6,03	92,35
112,89	57,49	47,69	2,11	3,52	0,019866	5,89	98,19
75,27	57,55	31,34	1,61	3,15	0,021109	6,03	123,90
75,31	56,24	31,30	1,52	3,26	0,020274	5,89	124,46
56,43	56,22	22,97	1,22	3,33	0,020577	5,62	92,36
56,46	56,84	23,05	1,25	3,21	0,021754	6,03	98,51
56,43	56,44	23,01	1,33	3,29	0,022098	5,89	93,47

Tabela A.II.4 Resultados de G_F (N/m) do ensaio de fratura em modo I com diferentes \dot{w} e W .

G_F (N/m)								
w3			w2			w1		
W3	W2	W1	W3	W2	W1	W3	W2	W1
119,51	106,36	105,91	106,39	116,28	97,17	92,35	123,90	92,36
114,58	119,17	108,65	107,38	115,88	98,21	98,19	124,46	113,51
116,40		118,17	110,45	114,11	103,72			93,47
		106,77		119,81				
116,83	112,76	109,87	108,07	116,52	99,70	95,27	124,18	99,78
2,68	6,41	3,96	1,68	0,24	2,53	2,92	0,28	7,42
2,25	6,41	1,23	0,69	0,64	1,49	2,92	0,28	13,73
0,43		8,29	2,38	2,41	4,02			6,31
		3,10		3,29				

Tabela A.II.5 Análise uniformidade da variância de G_F com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
W3	3	5,36	1,79	1,43E+00
W2	2	12,82	6,41	0,00E+00
W1	4	16,58	4,15	8,93E+00

ANOVA

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	2,62E+01	2	1,31E+01	2,65	0,15	5,14
Dentro dos grupos	2,97E+01	6	4,94E+00			
Total	5,59E+01	8				

Em que, SQ representa a soma de quadrados, gl é grau de liberdade, MQ é média de quadrados e F representa o valor calculado de Fischer.

Tabela A.II.6 Análise uniformidade da variância de G_F para 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
W3	2	5,84	2,92	4,50E-08
W2	2	0,56	0,28	0,00E+00
W1	3	7,46	2,49	1,47E+00

ANOVA

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	8,31E+00	2	4,16E+00	5,66	0,07	6,94
Dentro dos grupos	2,93E+00	4	7,34E-01			
Total	1,12E+01	6				

Tabela A.II.7 Teste de médias de G_F com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	3	350,49	116,83	6,21E+00
W2	2	225,53	112,76	8,21E+01
W1	4	439,49	109,87	3,19E+01

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	8,30E+01	2	4,15E+01	1,31	0,34	5,14
Dentro dos grupos	1,90E+02	6	3,17E+01			
Total	2,73E+02	8				

Tabela A.II.8 Teste de médias de G_F com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	2	190,54	95,27	1,70E+01
W2	2	248,36	124,18	1,57E-01
W1	3	299,34	99,78	1,42E+02

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	1,01E+03	2	5,03E+02	6,69	0,05	6,94
Dentro dos grupos	3,01E+02	4	7,51E+01			
Total	1,31E+03	6				

Tabela A.II.9 Resultados de c_f (mm) do ensaio de fratura em modo I para diferentes w e W .

	<i>c_f (mm)</i>								
	<i>w3</i>			<i>w2</i>			<i>w1</i>		
	<i>W3</i>	<i>W2</i>	<i>W1</i>	<i>W3</i>	<i>W2</i>	<i>W1</i>	<i>W3</i>	<i>W2</i>	<i>W1</i>
	23,39	23,38	23,38	19,60	19,60	19,60	16,04	16,05	16,04
	23,37	23,37	23,37	19,60	19,60	19,60	16,04	16,04	16,04
	23,38		23,39	19,60	19,59	19,59			16,03
			23,38		19,60				
Média	23,38	23,38	23,38	19,60	19,60	19,60	16,04	16,05	16,04
xi-Média	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
	0,00		0,01	0,00	0,01	0,00			0,00
			0,00		0,00				

Tabela A.II.10 Análise de variância de c_f com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	2	0,00	0,00	2,00E-10
W2	2	0,00	0,00	0,00E+00
W1	3	0,01	0,00	2,81E-06

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	5,77E-06	2	2,8873E-06	2,05	0,24	6,94
Dentro dos grupos	5,63E-06	4	1,4067E-06			
Total	1,14E-05	6				

Tabela A.II.11 Análise de variância de c_f com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	3	0,02	0,01	2,08E-05
W2	2	0,00	0,00	0,00E+00
W1	4	0,03	0,01	3,08E-05

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	7,96E-05	2	3,9814E-05	1,78	0,25	5,14
Dentro dos grupos	1,34E-04	6	2,2349E-05			
Total	2,14E-04	8				

Tabela A.II.12 Teste de médias de c_f com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	2	32,08	16,04	3,97E-06
W2	2	32,09	16,05	4,77E-07
W1	3	48,12	16,04	1,08E-05

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	5,65E-05	2	2,8254E-05	4,34	0,10	6,94
Dentro dos grupos	2,61E-05	4	6,5157E-06			
Total	8,26E-05	6				

Tabela A.II.13 Teste de médias de c_f com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO				
<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	3	70,14	23,38	4,53E-05
W2	2	46,75	23,38	4,45E-05
W1	4	93,51	23,38	1,15E-04

ANOVA						
<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	1,42E-05	2	7,1224E-06	0,09	0,92	5,14
Dentro dos grupos	4,79E-04	6	7,9782E-05			
Total	4,93E-04	8				

Tabela A.II.14 Resultados de G_f (N/m) do ensaio de fratura em modo I para diferentes w e W .

	<i>G_f (N/m)</i>								
	<i>w3</i>			<i>w2</i>			<i>w1</i>		
	<i>W3</i>	<i>W2</i>	<i>W1</i>	<i>W3</i>	<i>W2</i>	<i>W1</i>	<i>W3</i>	<i>W2</i>	<i>W1</i>
	84,35	83,80	77,95	46,50	50,00	43,47	45,24	47,86	45,59
	75,67	77,19	65,63	40,72	64,03	42,45	45,00	44,93	48,73
	69,15		59,41	52,36	52,78	41,95			49,17
			59,44		53,09				
Média	76,39	80,50	65,61	46,53	54,97	42,62	45,12	46,39	47,83
xi-Média	7,96	3,30	12,35	0,03	4,98	0,85	0,12	1,47	2,24
	0,72	3,30	0,02	5,81	9,05	0,17	0,12	1,47	0,90
	7,24		6,20	5,84	2,19	0,67			1,34
			6,17						

Tabela A.II.15 Análise de variância de G_f com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO				
<i>Grupo</i>	<i>Cuenta</i>	<i>Suma</i>	<i>Promedio</i>	<i>Varianza</i>
W3	2	0,24	0,12	0,00E+00
W2	2	2,94	1,47	0,00E+00
W1	3	4,48	1,49	4,67E-01

ANOVA						
<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	2,66E+00	2	1,33E+00	5,70	0,07	6,94
Dentro dos grupos	9,33E-01	4	2,33E-01			
Total	3,59E+00	6				

Tabela A.II.16 Análise de variância de G_f com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Cuenta</i>	<i>Suma</i>	<i>Promedio</i>	<i>Varianza</i>
W3	3	15,92	5,31	1,59E+01
W2	2	6,60	3,30	0,00E+00
W1	4	24,74	6,19	2,53E+01

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	1,11E+01	2	5,56E+00	0,31	0,75	5,14
Dentro dos grupos	1,08E+02	6	1,80E+01			
Total	1,19E+02	8				

Tabela A.II.17 Teste de médias de G_f com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Cuenta</i>	<i>Suma</i>	<i>Promedio</i>	<i>Varianza</i>
W3	2	86,48	43,24	4,69E-01
W2	3	140,57	46,86	2,52E+00
W1	3	145,94	48,65	4,73E+01

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	3,53E+01	2	1,76E+01	0,88	0,47	5,79
Dentro dos grupos	1,00E+02	5	2,00E+01			
Total	1,35E+02	7				

Tabela A.II.18 Teste de médias de G_f com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Cuenta</i>	<i>Suma</i>	<i>Promedio</i>	<i>Varianza</i>
W3	3	229,17	76,39	5,81E+01
W2	2	160,99	80,50	2,18E+01
W1	4	262,44	65,61	7,63E+01

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	3,63E+02	2	1,82E+02	2,97	0,13	5,14
Dentro dos grupos	3,67E+02	6	6,12E+01			
Total	7,30E+02	8				

Tabela A.II.19 Resultados de $CTOD_C$ (mm) do ensaio de fratura em modo I para diferentes \dot{w} e W .

		$CTOD_C$ (mm)								
		w3			w2			w1		
		W3	W2	W1	W3	W2	W1	W3	W2	W1
		2,46E-02	2,44E-02	2,27E-02	1,46E-02	1,57E-02	1,37E-02	1,42E-02	1,50E-02	1,43E-02
		2,20E-02	2,24E-02	1,91E-02	1,28E-02	2,02E-02	1,34E-02	1,41E-02	1,41E-02	1,53E-02
		2,01E-02		1,73E-02	1,65E-02	1,66E-02	1,32E-02			1,54E-02
				1,73E-02		1,67E-02				
Média		2,22E-02	2,34E-02	1,91E-02	1,46E-02	1,73E-02	1,34E-02	1,42E-02	1,46E-02	1,50E-02
xi-Média		0,00234	0,00098	0,00359	0,00001	0,00156	0,00026	0,00003	0,00046	0,00070
		0,00023	0,00098	0,00002	0,00183	0,00285	0,00004	0,00003	0,00046	0,00029
		0,00211		0,00177	0,00184	0,00071	0,00022			0,00041
				0,00179		0,00059				

Tabela A.II.20 Análise de variância de $CTOD_C$ com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
W3	2	0,00	0,00	0,00E+00
W2	2	0,00	0,00	0,00E+00
W1	3	0,00	0,00	4,44E-08

ANOVA

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	2,69E-07	2	1,3457E-07	6,06	0,06	6,94
Dentro dos grupos	8,89E-08	4	2,2217E-08			
Total	3,58E-07	6				

Tabela A.II.21 Análise de variância de $CTOD_C$ com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
W3	3	0,00	0,00	1,34E-06
W2	2	0,00	0,00	0,00E+00
W1	4	0,01	0,00	2,12E-06

ANOVA

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	8,83E-07	2	4,4157E-07	0,29	0,76	5,14
Dentro dos grupos	9,05E-06	6	1,5088E-06			
Total	9,94E-06	8				

Tabela A.II.22 Teste de médias de $CTOD_C$ com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
W3	2	0,03	0,01	2,21E-09
W2	2	0,03	0,01	4,26E-07
W1	3	0,04	0,01	3,68E-07

ANOVA

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	8,60E-07	2	4,2988E-07	1,48	0,33	6,94
Dentro dos grupos	1,16E-06	4	2,91E-07			
Total	2,02E-06	6				

Tabela A.II.23 Teste de médias de $CTOD_C$ com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
W3	3	0,07	0,02	5,00E-06
W2	2	0,05	0,02	1,90E-06
W1	4	0,08	0,02	6,40E-06

ANOVA

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	3,08E-05	2	1,5378E-05	2,97	0,13	5,14
Dentro dos grupos	3,11E-05	6	5,1834E-06			
Total	6,19E-05	8				

Tabela A.II.24 Resultados de E (GPa) do ensaio de fratura em modo I para diferentes w e W .

	w3			w2			w1		
	W3	W2	W1	W3	W2	W1	W3	W2	W1
	33,27	33,53	36,08	43,35	40,29	46,42	38,63	36,50	36,45
	37,19	36,47	42,95	49,50	31,48	47,44	39,47	34,67	29,97
	40,66		47,18	38,45	38,26	48,13		36,94	39,18
			47,28		37,95				
Média	37,04	35,00	43,37	43,77	37,00	47,33	39,05	36,03	35,20
xi-Média	3,77	1,47	7,29	0,41	3,30	0,91	0,42	0,46	1,25
	0,15	1,47	0,43	5,73	5,52	0,11	0,42	1,37	5,23
	3,62		3,81	5,32	1,27	0,80		0,91	3,98
			3,91		0,95				

Tabela A.II.25 Análise de variância de E com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	2	0,16	0,08	0,00E+00
W2	2	2,28	1,14	0,00E+00
W1	3	3,30	1,10	2,43E-01

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	1,54E+00	2	7,68E-01	6,33	0,06	6,94
Dentro dos grupos	4,85E-01	4	1,21E-01			
Total	2,02E+00	6				

Tabela A.II.26 Análise de variância de E com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	3	7,54	2,51	4,19E+00
W2	2	2,94	1,47	2,00E-06
W1	4	15,44	3,86	7,84E+00

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	8,22E+00	2	4,11E+00	0,77	0,50	5,14
Dentro dos grupos	3,19E+01	6	5,32E+00			
Total	4,01E+01	8				

Tabela A.II.27 Teste de médias de E com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	2	73,62	36,81	1,28E-02
W2	2	71,61	35,80	2,59E+00
W1	3	104,41	34,80	2,05E+00

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	4,89E+00	2	2,44E+00	1,46	0,33	6,94
Dentro dos grupos	6,70E+00	4	1,68E+00			
Total	1,16E+01	6				

Tabela A.II.28 Teste de médias de E com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	3	111,11	37,04	1,37E+01
W2	2	70,00	35,00	4,33E+00
W1	4	173,49	43,37	2,77E+01

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	1,19E+02	2	5,93E+01	3,10	0,12	5,14
Dentro dos grupos	1,15E+02	6	1,91E+01			
Total	2,33E+02	8				

Tabela A.II.39 Resultados de Ω do ensaio de fratura modo I para diferentes w e W .

	w3			w2			w1		
	W3	W2	W1	W3	W2	W1	W3	W2	W1
	0,12	0,12	0,12	0,07	0,07	0,06	0,03	0,10	0,10
	0,13	0,11	0,11	0,07	0,07	0,04	0,05	0,03	0,03
	0,12		0,11	0,21	0,04	0,06		0,05	0,06
			0,09		0,06				
Média	0,12	0,12	0,11	0,12	0,06	0,05	0,04	0,06	0,06
xi-Média	0,00	0,01	0,01	0,04	0,01	0,01	0,01	0,04	0,04
	0,01	0,01	0,00	0,05	0,01	0,02	0,01	0,03	0,03
	0,01		0,00	0,09	0,02	0,01		0,01	0,01
			0,02		0,00				

Tabela A.II.40 Análise de variância de Ω com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	2	0,02	0,01	5,00E-07
W2	3	0,08	0,03	2,33E-04
W1	3	0,08	0,03	2,33E-04

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	3,92E-04	2	0,00019602	1,05	0,42	5,79
Dentro dos grupos	9,34E-04	5	0,00018677			
Total	1,33E-03	7				

Tabela A.II.42 Análise de variância de Ω com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	3	0,02	0,01	3,33E-05
W2	2	0,02	0,01	0,00E+00
W1	4	0,03	0,01	9,17E-05

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	1,39E-05	2	6,94E-06	0,12	0,89	5,14
Dentro dos grupos	3,42E-04	6	5,69E-05			
Total	3,56E-04	8				

Tabela A.II.43 Teste de médias de Ω com 0,06 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	2	0,09	0,04	2,41E-04
W2	3	0,18	0,06	1,12E-03
W1	3	0,19	0,06	1,11E-03

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	5,04E-04	2	2,52E-04	0,27	0,78	5,79
Dentro dos grupos	4,72E-03	5	9,43E-04			
Total	5,22E-03	7				

Tabela A.II.45 Teste de médias de Ω com 0,60 mm/min e diferentes W .

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
W3	3	0,37	0,12	3,73E-05
W2	2	0,23	0,12	9,08E-05
W1	4	0,44	0,11	1,66E-04

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	2,26E-04	2	1,13E-04	1,02	0,41	5,14
Dentro dos grupos	6,63E-04	6	1,11E-04			
Total	8,90E-04	8				

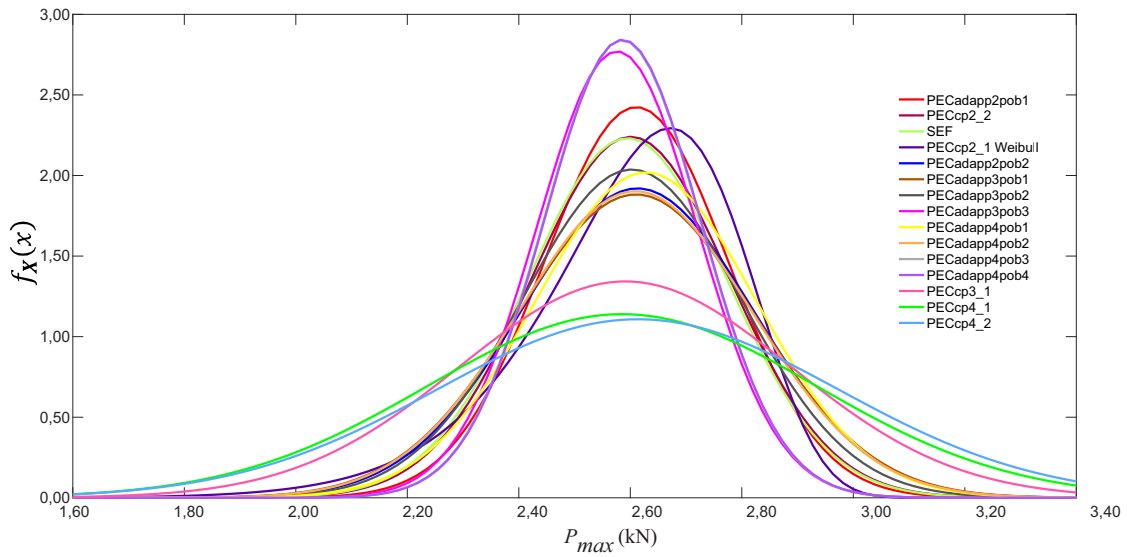


Figura II.1: Comparação das $f_X(x)$ do P_{max} para DCT com W_3 e 0,60 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} .

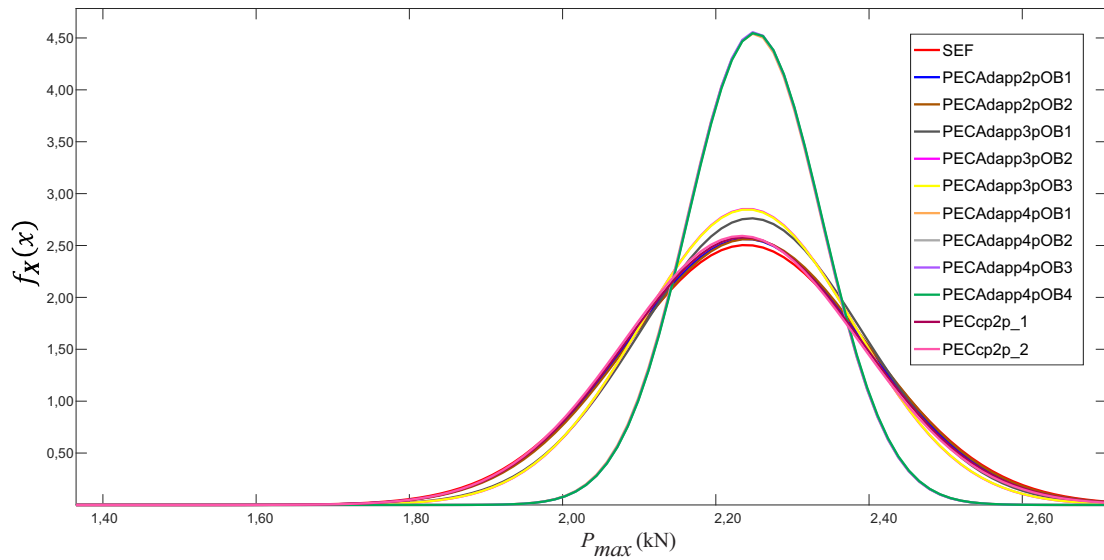


Figura II.2: Comparação das $f_X(x)$ do P_{max} para DCT com W_3 e 0,06 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} .

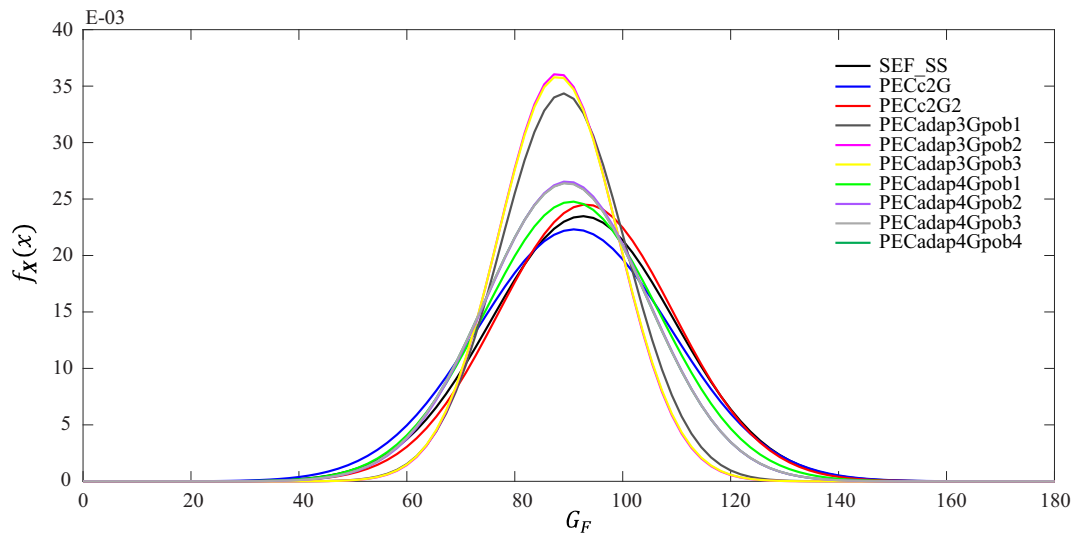


Figura II.3: Comparação das $f_X(x)$ da G_F para DCT com W_3 e 0,60 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} .

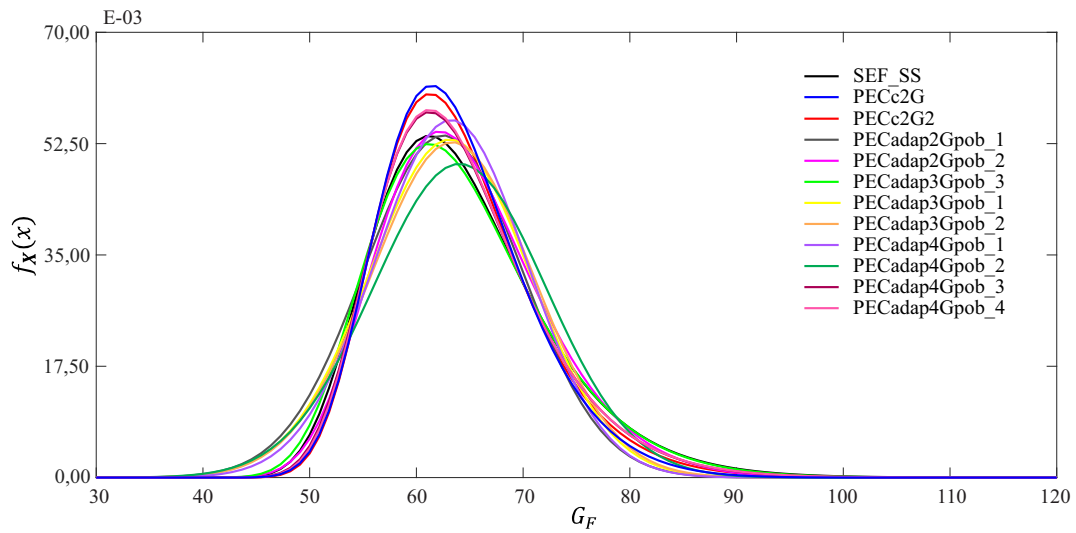


Figura II.4: Comparação das $f_X(x)$ da G_F para DCT com W_3 e 0,06 mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} .

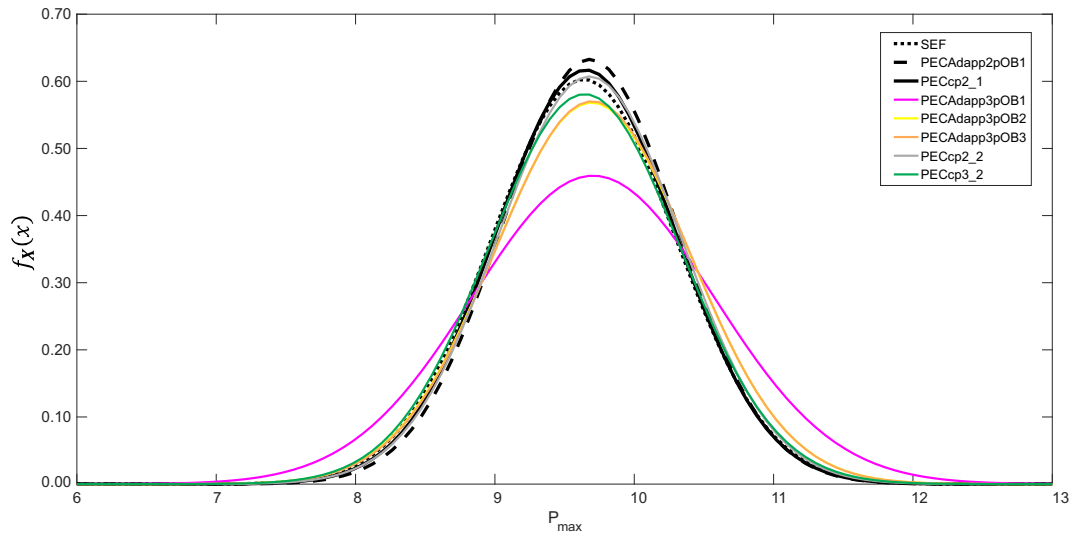


Figura II.5: Comparação das $f_X(x)$ da P_{max} para SUN-TPB com $h = 250$ mm e $0,60$ mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} .

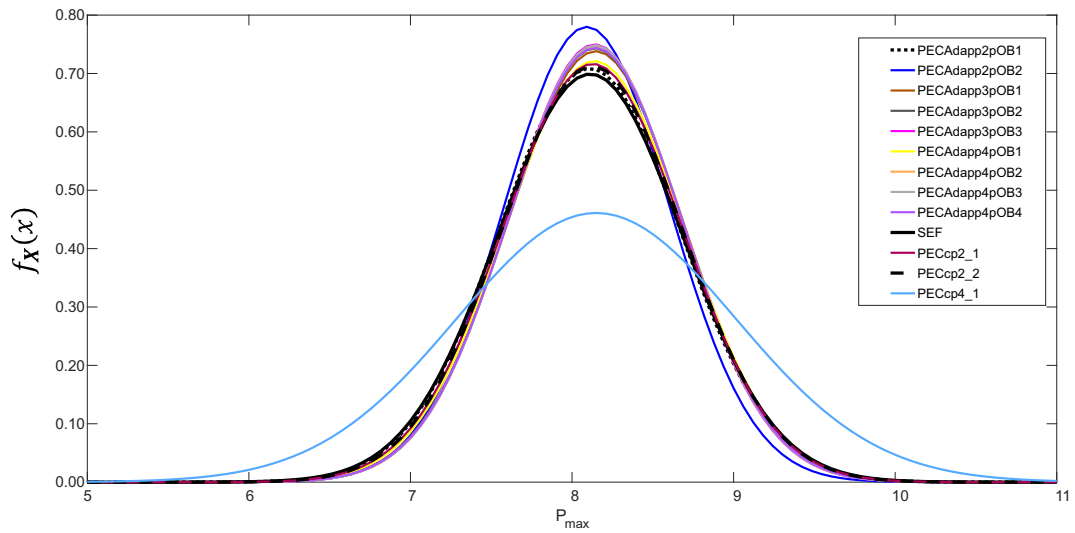


Figura II.6: Comparação das $f_X(x)$ da P_{max} para SUN-TPB com $h = 250$ mm e $0,06$ mm/min usando SEF , PEC_C e PEC_{Adap} .

III. VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO PROPOSTO

Com o objetivo de validar o modelo de dano proposto para o ensaio de fratura em modo I em DCT, foi realizada uma comparação entre a curva de comportamento P - $CMOD$ experimental e numérica obtida por Amirkhanian *et al.* (2015) e o modelo numérico proposto. O modelo proposto utiliza o programa de dano desenvolvido por Moreira e Evangelista (2016) para validar o modelo numérico. Posteriormente foi realizada uma comparação das curvas P - $CMOD$ do programa experimental desenvolvido neste trabalho e o modelo numérico proposto. Validado o modelo, foram determinados os valores de P_{max} estimado (\hat{P}_{max}) e G_F estimado (\hat{G}_F) para algumas combinações, com fins de encontrar o PEC_C e PEC_{Adap} que melhor define o comportamento do P_{max} e G_F .

Para prever o comportamento P - $CMOD$ do material cimentício em DCT, um modelo de dano não linear foi criado para simular a propagação da trinca. O modelo de dano leva em consideração a deformação equivalente de Mazars (ε_{eq}^{MA}) e von Mises (ε_{eq}^{VM}), conforme as Equações (2.92) e (2.93), respectivamente. Trabalhos anteriores sugerem que o modelo de zona coesiva com relação de amolecimento bilinear, pode adequadamente descrever o comportamento à fratura de materiais quase frágeis. Os trabalhos que faz referencia no parágrafo anterior referem-se: Petersson (1981), Gustafsson e Hillerborg (1985), Wittmann *et al.* (1988), Guinea *et al.* (1994), Bažant *et al.* (2002), Borst *et al.* (2004), Roesler *et al.* (2007), Park *et al.* (2009). Porém, um modelo de dano será utilizado para determinar a curva P - $CMOD$.

Os parâmetros do material para o DCT utilizados no ensaio de fratura em modo I para a validação do modelo de dano, foram os reportados por Amirkhanian *et al.* (2015) e são apresentados a seguir.

Tabela III.1: Propriedades do material à fratura em DCT usados no modelo numérico de Amirkhanian *et al.* (2015).

DCT	E (GPa)	f_c (MPa)	G_F (N/m)	G_f (N/m)	f_t (MPa)	Ω (-)
W_3	50,00	112,20	140,80	72,30	6,60	0,03

(-) Adimensional.

Na Figura III.1 é exibido a geometria e a malha não estruturada utilizada nesta pesquisa; a geometria e a malha refinada na região frente ao entalhe, foi construída usando código APDL no Ansys e posteriormente, o programa de dano elaborado por Moreira e Evangelista (2016). O tamanho do elemento da zona sujeita ao dano que melhor define o modelo usando neste trabalho foi um elemento triangular bilinear de tamanho 1,48 mm e um total de 583 nós com 2 graus de liberdade por nó, foi usado para representar o DCT.

As curvas de P - $CMOD$ para DCT com $W_3 = 112,90$ mm ($\phi = 152,40$ mm, definido na Tabela 5.1) experimentais e numérico obtido por Amirkhanian *et al.* (2015), e o alcançado nesta pesquisa

levando em consideração a ε_{eq}^{MA} e a ε_{eq}^{VM} , são apresentados na Figura III.2. Os resultados do modelo numérico que leva em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} estão em concordância com os resultados dados pelo modelo de Amirkhanian *et al.* (2015) para uma $\dot{w} = 0,06$ mm/min.

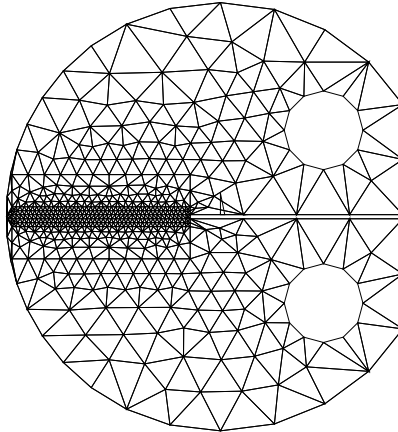


Figura III.1: Modelo de EF do DCT para W_3 .

O tramo linear dos modelo numéricos ilustrados na Figura III.2 definem o comportamento experimental encontrado no ensaio de fratura em modo I. O \hat{P}_{max} encontrado usando os modelos de EF levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} são ligeiramente inferiores ao modelo numérico de Amirkhanian, apresentado na Figura III.2. Observa-se que a curva P - $CMOD$ que utiliza a ε_{eq}^{MA} , é levemente superior ao encontrada usando ε_{eq}^{VM} , apesar que ε_{eq}^{VM} é definida para casos de modo misto; o modelo de ε_{eq}^{MA} estima de forma adequada o modelo de fratura com respeito ao modelo de zona coesiva de Amirkhanian *et al.* (2015).

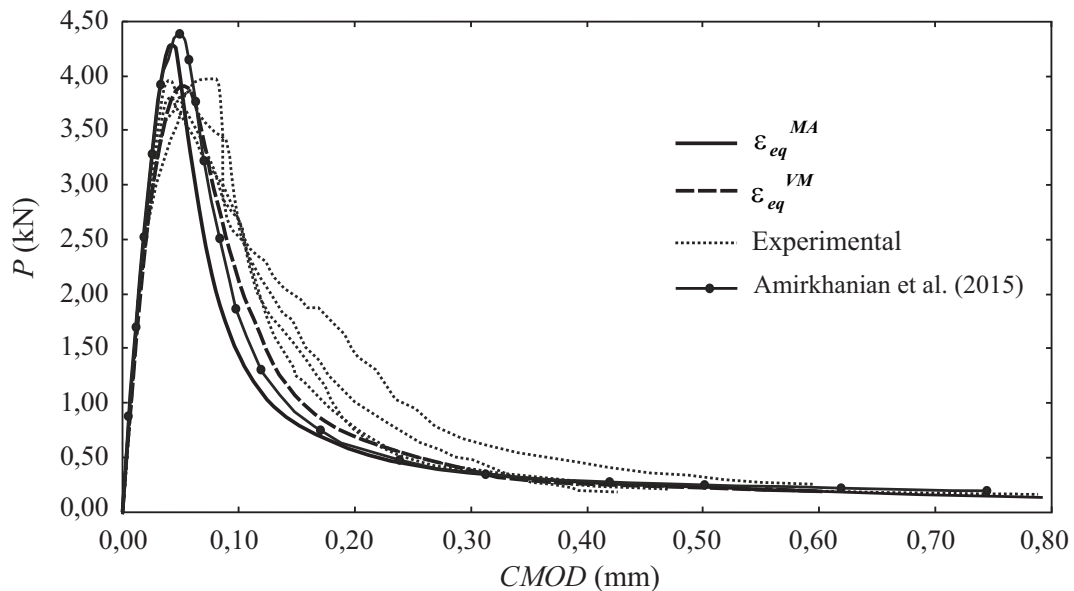


Figura III.2: Comparação das curvas P - $CMOD$ do modelo proposto levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} com respeito aos resultados experimentais e ao modelo numérico de Amirkhanian *et al.* (2015).

O erro relativo (e_{rr}) do \hat{P}_{max} dos modelos numéricos considerando ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} com respeito ao

modelo de Amirkhanian *et al.* (2015), são definidos conforme a Equação (III.1).

$$err_{\hat{X}} = \frac{|X - \hat{X}|}{X} 100 (\%), \quad X = \hat{P}_{max}^{MZC}, \quad \hat{X} = \begin{cases} \hat{P}_{max}^{MA} \\ \hat{P}_{max}^{VM} \end{cases} \quad (III.1)$$

Em que, X corresponde \hat{P}_{max}^{MZC} , e é o \hat{P}_{max} levando em conta o modelo de Amirkhanian *et al.* (2015), e \hat{X} representa o \hat{P}_{max}^{MA} ou \hat{P}_{max}^{VM} , na qual o \hat{P}_{max}^{MA} é o \hat{P}_{max} levando em conta ε_{eq}^{MA} e \hat{P}_{max}^{VM} é o \hat{P}_{max} tendo em conta ε_{eq}^{VM} . Por último, o erro relativo do \hat{P}_{max} levando em conta ε_{eq}^{MA} é $err_{\hat{P}_{max}^{MA}}$, e o erro relativo do \hat{P}_{max} levando em conta ε_{eq}^{VM} é $err_{\hat{P}_{max}^{VM}}$, erros com respeito ao modelo numérico de Amirkhanian *et al.* (2015). Os resultados dos err do \hat{P}_{max} para os modelos numéricos analisados, assim como a μ do P_{max} experimental ($\mu_{P_{max}Exp}$), são apresentadas na seguinte Tabela.

Tabela III.2: Resultados do \hat{P}_{max} e err , do modelo numérico levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} , a $\mu_{P_{max}Exp}$ e \hat{P}_{max} do trabalho de Amirkhanian *et al.* (2015).

MZC (Amirkhanian <i>et al.</i> , 2015) (kN)	\hat{P}_{max}^{MA} (kN)	$err_{\hat{P}_{max}^{MA}}$ (%)	\hat{P}_{max}^{VM} (kN)	$err_{\hat{P}_{max}^{VM}}$ (%)	$\mu_{P_{max}Exp}$ (kN)
4,42	4,25	3,85	3,92	11,31	3,69

Na Tabela III.2 é apresentado o resultado do modelo de EF que considera ε_{eq}^{MA} e estima em forma adequada o \hat{P}_{max} com um $err_{\hat{P}_{max}^{MA}} = 3,85$ % no que diz com respeito ao expressado por Amirkhanian *et al.* (2015). O modelo de EF que leva em consideração a ε_{eq}^{MA} tem uma melhor precisão que o ε_{eq}^{VM} , pois não leva em consideração as tensões por cisalhamento. A predição do modelo proposto de EF esta em concordância com os resultados dados pelo modelo numérico de Amirkhanian *et al.* (2015), e é considerado como uma primeira validação do modelo proposto.

Verificação da objetividade da malha de EF e os passos de deslocamento

As propriedades levadas em consideração na validação do modelo numérico, são apresentados na Tabela III.3, usados no DCT com W_3 e w_1 os quais representam os valores médios das variáveis. A G_F é dado na Tabela 5.6, a G_f é mostrado na Tabela 5.7, o E e Ω são apresentados na Tabela 5.15 e seja $k = f_c/f_t$, em que f_c e f_t são apresentadas na Tabela 5.4. O valor da ν assumida foi de 0,25 e os CP foram curados em câmara úmida e ensaiados a 60 d.

Tabela III.3: Propriedades utilizadas no modelo numérico em DCT.

W_3 (mm)	G_F (N/m)	G_f (N/m)	E (GPa)	Ω (-)	k (-)	ν (-)
112,90	95,27	45,12	36,81	0,07	10,33	0,25

(-) Adimensional.

Para verificar a convergência e a objetividade da malha de EF foi construída a curva $P-CMOD$ com os resultados da simulação, utilizando 3 malhas não estruturadas com diferente discretização

na região frente ao entalhe do DCT para W_3 . O modelo de EF não linear leva em consideração o modelo de dano contínuo, e os diferentes tipos de malha refinada são apresentados a seguir.

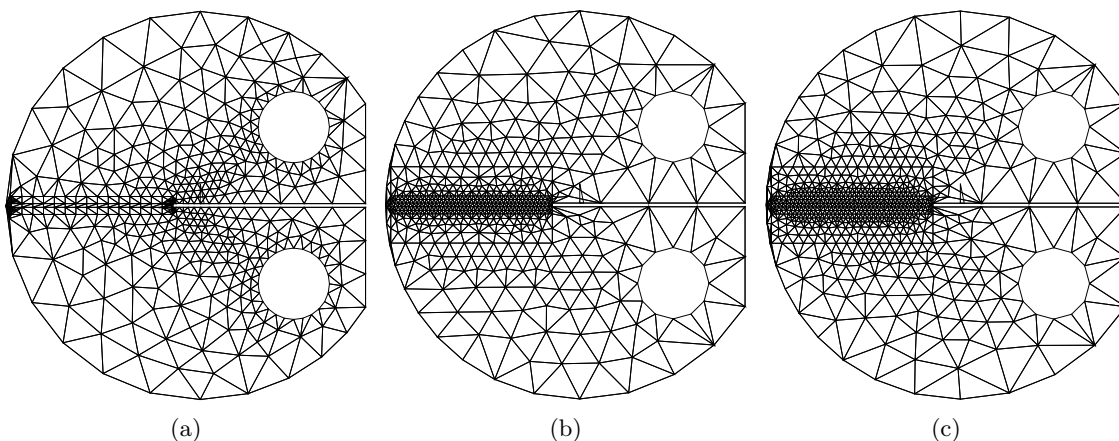


Figura III.3: Modelos de EF para DCT de W_3 com diferente tipo de malha, a) Malha 1, $M1$; b) Malha 2, $M2$ e c) Malha 3, $M3$.

A precisão da previsão do \hat{P}_{max} levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} no modelo de EF, é estabelecido utilizando o e_{rr} para cada ε_{eq} , conforme a Equação III.1, em que o X representa o P_{max} médio experimental definido como \bar{P}_{max}^{Exp} , apresentados. Na Tabela III.4 são apresentados os diferentes tipos de malha, o número de nós por malha (No. Nós), o \hat{P}_{max}^{MA} , \hat{P}_{max}^{VM} em kN, e o $e_{rr}^{\hat{P}_{max}^{MA}}$ e $e_{rr}^{\hat{P}_{max}^{VM}}$ com respeito do \bar{P}_{max}^{Exp} conforme a Tabela 5.6. Os P_{max} encontrados experimentalmente para o DCT de W_3 e \dot{w}_1 foram apresentados na Tabela 5.5.

Tabela III.4: Resultados dos \hat{P}_{max} e e_{rr} (%) para diferentes tipos de malha, levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} para \dot{w}_1 em DCT com W_3 .

Malha	No. Nós (-)	\hat{P}_{max}^{MA} (kN)	\hat{P}_{max}^{VM} (kN)
M1	481	1,80 (17,43)	1,74 (20,18)
M2	537	2,21 (1,38)	2,01 (7,80)
M3	705	2,22 (1,83)	2,01 (7,80)

(-) Adimensional.

Foi realizado um teste de convergência do \hat{P}_{max} para DCT com W_3 e \dot{w}_1 para as malhas $M1$, $M2$ e $M3$, e os resultados são apresentados na Figura III.4, que permitiu estabelecer o comportamento da curva *Malha* – e_{rr} , e o e_{rr} (adotado) conforme à Equação (III.1) considera $X = \bar{P}_{max}^{Exp}$. As malhas que conseguem atingir o $\bar{P}_{max}^{Exp} = 2,18$ kN com um $e_{rr} < 5\%$, são: o modelo de ε_{eq}^{MA} com malha M2 e M3, veja-se a Tabela III.4 e é mostrado na Figura III.4. O modelo que usa um menor tempo computacional na execução é aquele que utiliza ε_{eq}^{MA} e definido como malha M2 (7,89 h), sendo o modelo utilizado na modelagem dos DCT com W_3 para estimar P_{max} e G_F , no ensaio de fratura. Da Figura III.4 pode-se inferir que, não há um incremento significativo da precisão do \hat{P}_{max} com o aumento do número de nós da malha; pois, para as malhas $M2$ e $M3$ do modelo de

EF que leva em consideração ε_{eq}^{MA} não apresenta um aumento significativo na precisão. O modelo de EF que representa o ensaio de fratura com os melhores resultados é o modelo que considera ε_{eq}^{MA} .

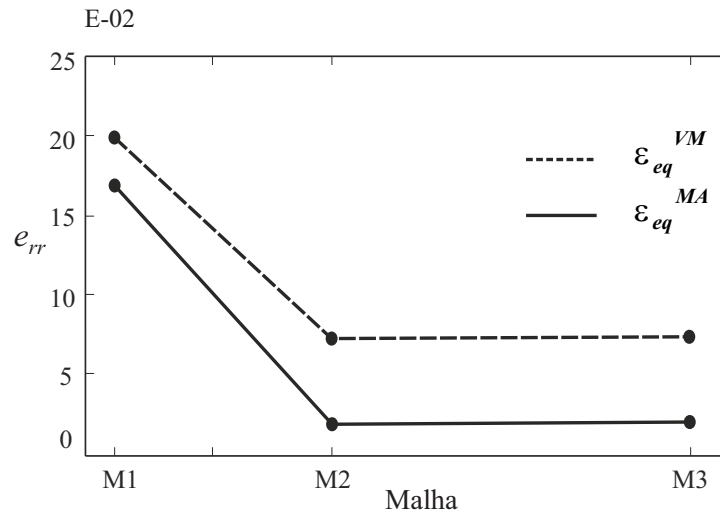


Figura III.4: Curvas de teste de convergência das malhas de EF para W_3 e \dot{w}_1 , levando em consideração ε_{eq}^{MA} e ε_{eq}^{VM} .

O número de passos de deslocamento em que o $CMOD$ foi dividido, vai definir o acabamento da curva $P-CMOD$ e o início do dano; o resultado de considerar diferente número de passos: 100, 150, 200, 225 e 250, são apresentados na Figura III.5. A curva $P-CMOD$ é bem definida no setor de \hat{P}_{max} usando 200, 225 ou 250 passos, como pode se observar na ampliação do setor de P_{max} , e o número de passos com menor tempo computacional é, 225 passos, que será usado em adiante.

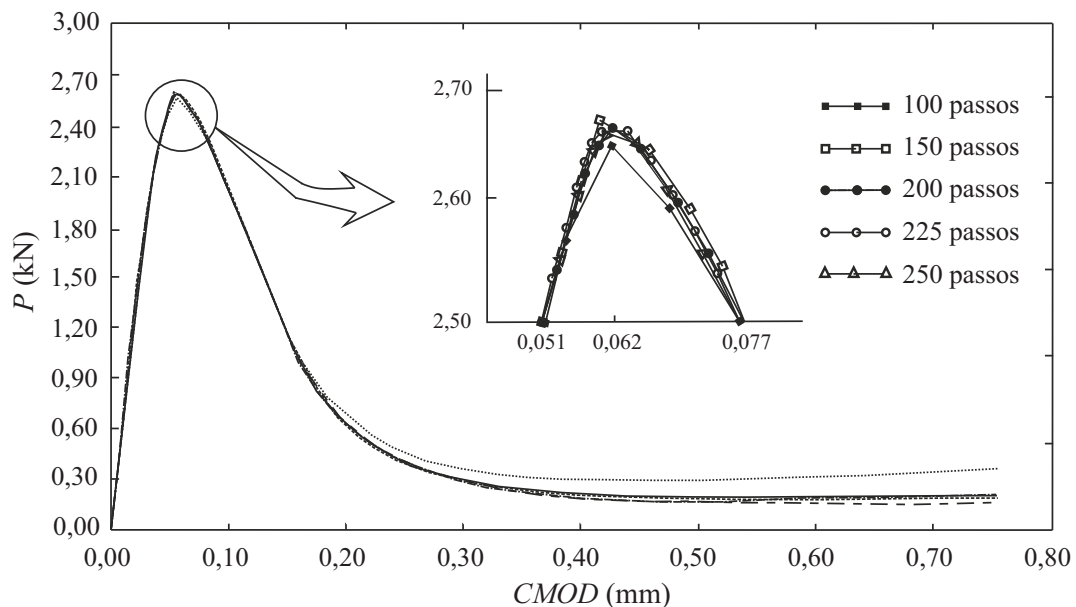


Figura III.5: Número de passos considerando a malha M2 no modelo de EF na definição da curva $P-CMOD$ em DCT com W_3 e \dot{w}_3 .