



Universidade de Brasília

**Movimentos Auto-similares de
Superfícies Helicoidais sob o Fluxo de
Curvatura Média**

Guilherme Ströher Sabo Paes

Orientador: Dr. João Paulo dos Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Brasília

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática como requisitos
parciais para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, Fevereiro de 2019

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Movimentos Auto-similares de Superfícies Helicoidais sob o Fluxo de Curvatura Média.

por

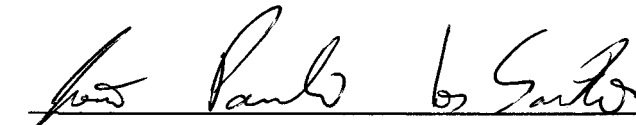
Guilherme Ströher Sabo Paes

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

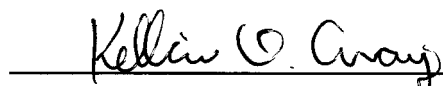
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 20 de fevereiro de 2019.


Comissão Examinadora:



Prof. Dr. João Paulo dos Santos- MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo- MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Romildo da Silva Pina- UFG (Membro)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

PP126m Paes, Guilherme Ströher Sabo
Movimentos Auto-similares de Superfícies Helicoidais sob
o Fluxo de Curvatura Média / Guilherme Ströher Sabo Paes;
orientador João Paulo dos Santos. -- Brasília, 2019.
88 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2019.

1. Fluxo da Curvatura Média. 2. Superfícies Helicoidais .
3. Soluções Auto-similares . I. Santos, João Paulo dos ,
orient. II. Título.

Aos meus Pais José Eduardo e Sara,
aos meus irmãos Felipe e Giovanna
e a meu anjo Karla

“Não existe nobreza alguma em ser superior a outra pessoa.
A verdadeira nobreza é ser superior a você mesmo.”
- Kingsman.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por até aqui ter me ajudado e me abençoado.

Aos meus pais José Eduardo e Sara por sempre estarem presentes nos momentos mais importantes da minha vida, minha companheira dos melhores momentos Karla, aos meus irmãos Felipe e Giovanna bem como os demais membros da minha família que de uma forma ou de outra contribuíram para minha formação tanto acadêmica quanto pessoal.

Ao meu orientador João Paulo dos Santos, por toda paciência, incentivo, dedicação e confiança que teve durante este trabalho, te admiro muito e tenho um grande respeito pelo senhor.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Romildo da Silva Pina e Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo, pelas críticas e sugestões a este trabalho.

Aos meus grandes amigos e colegas do departamento, em especial a Carol, Daniel, Deivid, Edna, Gustavo e Leandro, amigos para todas as horas, sem a presença deles em minha vida, não teria chegado até aqui.

Agradeço também aos meus melhores amigos da família escoteira, que por serem tantos seria impossível citá-los, os quais me acompanham desde muito tempo, dentro e fora da minha vida acadêmica e para os quais tenho grande carinho.

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fornecer um estudo sobre o fluxo da curvatura média que evoluem ao longo de movimentos auto-similares. Inicialmente, apresentamos uma breve introdução ao fluxo da curvatura média e verificamos como se comportam duas hipersuperfícies, compactas sem intersecção, ao longo do fluxo de curvatura média. Em seguida, descrevemos completamente uma família de superfícies helicoidais de dois parâmetros imersas no espaço Euclidiano, que evoluem sob o fluxo de curvatura média (FCM) através de movimentos auto-similares. Analisamos os casos limites, de quando o passo da superfície helicoidal tende a zero. A partir da estrutura geométrica e analítica desenvolvida para superfícies helicoidais, estudamos as superfícies helicoidais de curvatura média constante não-nula e as superfícies helicoidais mínimas.

Abstract

The objective of this dissertation is to provide a study on the mean curvature flow that evolves under the self-similar movement. Initially, we present an introduction to the mean curvature flow and verify how two compact hypersurfaces without intersections behave along the mean curvature flow. Then we describe completely a two parameters family of surfaces immersed in the Euclidean space, which evolve under the mean mean curvature flow (MCF) through self-similar movements. We analyze the limiting cases, when the pitch of the helicoidal surface goes to zero. From the geometric and analytical structure developed for helicoidal surfaces, we studied the helicoidal surfaces of non-zero constant mean curvature and minimal helicoidal surfaces.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Noções de álgebra linear	5
1.2 Alguns conceitos de hipersuperfícies	6
1.3 Curvas	9
2 Fluxo da Curvatura Média	13
2.1 Uma Introdução ao Fluxo da Curvatura Média	13
2.2 Variedades dadas por gráficos	14
2.3 Princípio da Comparação	18
3 Superfícies Helicoidais Rotacionando/Transladando Sob o Fluxo de Curvatura Média	23
3.1 Movimentos auto-similares sob o fluxo de curvatura média	23
3.2 Superfícies helicoidais	28
3.3 Superfícies helicoidais girando / transladando sob o FCM	32
3.4 Superfícies helicoidais mínimas	44
3.5 Superfícies helicoidais de curvatura média constante	51
Conclusão	69
Bibliografia	73

Introdução

O Fluxo de Curvatura Média (FCM) é um campo de pesquisa da matemática impressionante e já clássico. Situa-se no cruzamento de várias áreas: Análise Geométrica, Teoria das Medidas Geométricas, Topologia Diferencial, Física Matemática, Processamento de Imagens, Desenho Auxiliado por Computador, entre outras.

O FCM é uma equação diferencial parcial de evolução não linear para hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana que se comporta como a equação do calor em um curto período de tempo sendo definido da seguinte maneira. Seja M^n uma variedade n -dimensional e considere uma família de imersões suaves $F_t = F(\cdot, t) : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, $t \in I$, com $M_t = F_t(M^n)$. A família de hipersuperfícies $(M_t)_{t \in I}$, é dita mover-se pela curvatura média se.

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = \vec{H}(F(p, t)),$$

para $p \in M^n$ e $t \in I$. Aqui \vec{H} é o vetor de curvatura média de M_t , dado por $\vec{H} = -Hn$, onde n é uma escolha de campo normal unitário e H é a curvatura média de M_t . Neste trabalho usaremos $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$.

Problemas envolvendo o fluxo de curvatura média conduzem a sistemas interessantes de equações diferenciais parciais não-lineares e fornecem a modelagem matemática apropriada de processos físicos, tais como propagação de interface de material, movimento de contorno livre de fluido, crescimento de cristais como explica o autor em [9].

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma família de superfícies de dois parâmetros completamente imersas em \mathbb{R}^3 que evoluem sob o fluxo de curvatura média (FCM) através de movimentos auto-similares. Estas superfícies pertencem à família das chamadas superfícies helicoidais, que são superfícies invariantes sob um movimento helicoidal, isto é, a composição de uma rotação com uma translação ao longo do eixo de rotação.

Para uma melhor compreensão do fluxo, o estudo das soluções auto-similares são de fundamental importância. Hipersuperfícies que evoluem de forma auto-similar sobre o FCM, isto é, por uma composição de isometrias e homotetias, desempenham um papel importante na teoria de singularidades do fluxo. As mais importantes são as hipersuperfícies

auto-contráteis como as descritas em [1] e [5] e as que transladam através do fluxo como algumas que estudaremos ao longo deste trabalho.

No Capítulo 2, daremos uma introdução ao fluxo de curvatura média. Em seguida, aplicaremos o fluxo em subvariedades dadas por gráficos, calculando sua primeira e segunda formas fundamentais, vetor normal e curvatura média em função apenas da função que gera a subvariedades dadas por gráfico e suas derivadas. Com isso, podemos mostrar que dadas duas hipersuperfícies M e N compactas sem fronteira, que não se intersectam, então, suas respectivas evoluções também não vão se interceptar (teorema do princípio de comparação). Este teorema pode parecer trivial a primeira vista ao se pensar em M e N como hipersuperfícies homeomorfas a esfera, porém ao se considerar superfícies como na Figura 1 tal resultado se torna pouco esperado.

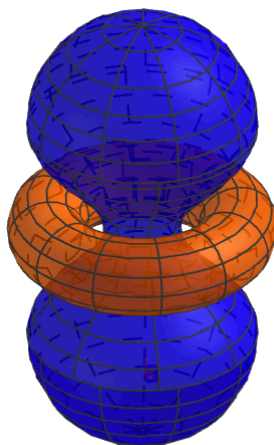


Figura 1 Exemplo para o teorema do princípio de comparação

Como feito pelo autor em [6], na seção, começamos descrevendo todos os possíveis movimentos auto-similares de hipersuperfícies sob o FCM e encontramos as equações que as hipersuperfícies têm que satisfazer. Veremos os seguintes movimentos auto-similares: Dilatação, translação, rotação, dilatação composta com rotação e translação composta com rotação ortogonais entre si (movimento helicoidal).

Na Seção 3.2, introduzimos as superfícies helicoidais. No restante deste trabalho, nos concentraremos nas curvas planas geradoras destas superfícies, obtemos uma parametrização para elas definindo-as como a intersecção das superfícies com um plano ortogonal ao seu eixo helicoidal.

A Seção 3.3 é a seção central deste trabalho. Nesta seção apresentamos uma família de superfícies helicoidais de dois parâmetros que giram com velocidade unitária sob o

fluxo de curvatura média. Apresentamos algumas propriedades básicas dessas superfícies e investigamos o comportamento limite das curvas geradoras à medida que o passo do movimento helicoidal vai para 0. Nesta seção verificamos que uma escolha específica de valores iniciais para estas curvas fornece convergência a um círculo, de modo que as superfícies geradas pelas curvas correspondentes convergem de algum modo a um cilindro.

Na Seção 3.4, utilizando a estrutura desenvolvida ao longo do capítulo, examinamos as superfícies mínimas helicoidais descritas em [15]. Encontramos sua parametrização e investigamos seu comportamento limite à medida que o passo tende a 0. Finalmente, na Seção 3.5, examinamos as superfícies helicoidais de curvatura média constante e encontramos sua parametrização e garantimos sua existência e unicidade (para o caso $H = 1$) pelo Teorema 3.3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, fixaremos a notação e apresentaremos alguns conceitos e resultados necessários para o pleno entendimento dessa dissertação.

1.1 Noções de álgebra linear

Definição 1.1. O grupo ortogonal especial indefinido, $SO(n)$ é o grupo de Lie de todas as transformações lineares do espaço vetorial \mathbb{R}^n com determinante 1, que deixam invariante uma forma bilinear simétrica, não degenerada.

Lema 1.1. Seja Q tal que $Q : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow SO(n+1)$ com $Q'(0) = A$, então, A é anti-simétrica, isto é, $A^T = -A$.

Demonstração. De fato, como $Q : I \rightarrow SO(n+1)$, onde $Q(0) = Id$ e $Q'(0) = A$, logo:

$$\begin{aligned}Q(t)Q^T(t) &= Id \\Q'(t)Q^T(t) + Q(t)(Q^T(t))' &= 0 \\Q'(t)Q^T(t) + Q(t)(Q'(t))^T &= 0 \\Q'(0)Q^T(0) + Q(0)(Q'(0))^T &= 0 \\A &= -(A)^T.\end{aligned}$$

□

Lema 1.2. Se A é anti-simétrica, então A não possui autovalores reais não nulos.

Demonstração. para isso, vamos supor que $\exists \lambda \neq 0$ tal que, $Av = \lambda v$, podemos supor que $|v| = 1$, assim, por um lado,

$$\langle Av, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda,$$

e por outro lado,

$$\langle Av, v \rangle = \langle v, A^T v \rangle = \langle v, -Av \rangle = -\lambda \langle v, v \rangle = -\lambda,$$

ou seja, $\lambda = -\lambda \Rightarrow \lambda = 0$ o que é um absurdo. \square

Lema 1.3. Se A é anti-simétrica, então $\ker(A)$ é ortogonal a $\text{Im}(A)$.

Demonstração. Sejam $v \in \ker(A)$, ou seja $Av = 0$ e $Au \in \text{Im}(A)$, então $\langle v, Au \rangle = \langle A^T v, u \rangle = \langle -Av, u \rangle = 0$. \square

Lema 1.4. (Lei de Inércia de Sylvester) Seja A uma matriz quadrada simétrica $n \times n$. Cada matriz não degenerada S de mesma ordem converte A em outra matriz simétrica B como:

$$B = SAS^T.$$

A prova deste lema foi publicada pelo autor em [13].

Lema 1.5. Sejam A e B matrizes reais simétricas de ordem n , com A positiva definida e B negativa semi-definida. Então $\text{Traço}(A \cdot B) \leq 0$.

Demonstração. Como A é positivo definido, então A tem uma raiz quadrada, que denotamos por $A^{\frac{1}{2}}$, que é invertível e simétrica. Pela lei de inércia de Sylvester, como B e $A^{\frac{1}{2}}B(A^{\frac{1}{2}})^T = A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ são matrizes simétricas congruentes, então elas têm o mesmo número de autovalores positivos, negativos e nulos. Isso significa que todos os autovalores μ_i de $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ são todos não positivos. Então nós temos

$$0 \geq \sum_{i=1}^n \mu_i = \text{Traço}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = \text{Traço}((A^{\frac{1}{2}}B)A^{\frac{1}{2}}) = \text{Traço}(A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B)) = \text{Traço}(AB).$$

\square

1.2 Alguns conceitos de hipersuperfícies

Nesta seção iremos considerar alguns cálculos locais em hipersuperfícies, definindo algumas de suas estruturas e propriedades destas.

Primeiramente, considere $(U, x_1, x_2, \dots, x_n)$ coordenadas locais em torno de $p \in U \subset M^n$. Nós temos $F : (M^n, g) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g})$ onde $\bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual em \mathbb{R}^{n+1} de forma que:

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \bar{g}\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), dF\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Como podemos identificar localmente M^n com $F(M^n)$, então, podemos dizer que $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ é um campo vetorial local em \mathbb{R}^{n+1} que estende o campo suave em M^n dado por $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Por outro lado, a conexão Levi-Civita $\bar{\nabla}$ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} é a conexão padrão em \mathbb{R}^{n+1} , isto é, dado $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ tem-se $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = D_{\bar{X}}\bar{Y}$, onde $D_{\bar{X}}\bar{Y}$ significa a derivada direcional de \bar{Y} ao longo de \bar{X} . No que se segue, vamos denotar $\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}}\frac{\partial F}{\partial x_j}$ por $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, uma vez que:

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}}\frac{\partial F}{\partial x_j} = D_{\frac{\partial F}{\partial x_i}}\frac{\partial F}{\partial x_j} = D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j},$$

onde a segunda igualdade teve em conta a identificação entre os campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ dada por F .

Vamos agora definir a segunda forma fundamental da imersão da imersão $F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M , sejam \bar{X}, \bar{Y} suas respectivas extensões locais em \mathbb{R}^{n+1} .

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y.$$

Temos que $B(X, Y)$ é uma forma bilinear e simétrica que não depende das extensões escolhidas como visto pelo autor em [3].

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = -\langle B(x, y), \eta \rangle.$$

A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x),$$

é chamada segunda forma fundamental de F em p segundo o vetor normal η . Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = -H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Considere agora N uma extensão de η . Então $\langle N, \bar{Y} \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(X), Y \rangle &= \langle B(\bar{X}, \bar{Y})(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, N \rangle(p) = -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} N \rangle(p) = \langle -\bar{\nabla}_{\bar{X}} N, Y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $Y \in T_p M$. Com isso obteremos em p ,

$$\begin{aligned} H_\eta(X, X) &= -\langle S_\eta(X), X \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} N, \bar{X} \rangle \\ &= \bar{X} \langle N, \bar{X} \rangle - \langle N, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} \rangle = -\langle N, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} \rangle. \end{aligned}$$

Logo os coeficientes da matriz da segunda forma fundamental são dados por:

$$h_{ij} = -\left\langle S_\eta \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right), \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j}, N \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, N \right\rangle.$$

Observação 1.1. Utilizamos o sinal na definição da segunda forma fundamental para manter o texto coerente e compatível com nossas principais referências.

Observação 1.2. Para o caso $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \supset S$ (F parametrização local de S) a segunda forma fundamental $II_p(w)$ de S num ponto $p \in S$, relativa à orientação N (a aplicação normal de Gauss de S) é a forma quadrática de $T_p S$ determinada pelo operador dN_p , isto é,

$$II_p(w) = \langle dN_p w, w \rangle, \quad w \in T_p S.$$

Para determinar a matriz da segunda forma fundamental de S em $F(u, v)$ (relativa a uma orientação N de S) com respeito à base $\{F_{x_1}(x_1, x_2), F_{x_2}(x_1, x_2)\}$, isto é, os coeficientes h_{ij} da segunda forma fundamental se definem pelas igualdades:

$$h_{ij} = \langle dN_{F(x_1, x_2)} F_{x_i}(x_1, x_2), F_{x_j}(u, v) \rangle \quad i, j = 1, 2.$$

Observando que, para quaisquer $(u, v) \in U$, vale a igualdade

$$\langle (N \circ F)(x_1, x_2), F_{x_j}(x_1, x_2) \rangle = 0. \quad j = 1, 2.$$

Diferenciando-a, então, com respeito a x_i , obtém-se

$$\langle dN_{F(x_1, x_2)} F_{x_i}(x_1, x_2), F_{x_j}(x_1, x_2) \rangle + \langle (N \circ F)(x_1, x_2), F_{x_i x_j}(x_1, x_2) \rangle = 0,$$

donde

$$h_{ij} = -\langle N \circ F, F_{x_i x_j} \rangle \quad i, j = 1, 2.$$

Definimos a curvatura média como o traço da segunda forma fundamental, dada por $H = g^{ij}h_{ij}$, em que g^{ij} é a inversa da métrica induzida por F . Observe que a partir daqui estaremos usando a notação de Einstein, onde o produto $g^{ij}h_{ij}$ denota $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij}h_{ij}$.

Em seguida, definimos o vetor curvatura média por $\vec{H} = -HN$. Assim, temos que

$$\vec{H} = -g^{ij}h_{ij}N = g^{ij} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, N \right\rangle N = g^{ij}N \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)^\perp = \left(g^{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)^\perp.$$

1.3 Curvas

Nesta seção introduziremos algumas notações e conceitos básicos sobre curvas que serão utilizados no capítulo 3. Utilizaremos a identificação do plano complexo com \mathbb{R}^2 , dada por

$$(p, q) \simeq p + iq.$$

Primeiramente, se faz interessante introduzir e compreender a seguinte notação:

$$e^{it}(p, q) \quad \text{com } (p, q) \in \mathbb{R}^2,$$

basicamente esta notação se refere a rotação do vetor (p, q) em t radianos. Escrevendo o numero complexo em sua forma trigonométrica tem-se que

$$p + iq = \sqrt{p^2 + q^2} \left(\cos \left(\arctg \left(\frac{q}{p} \right) \right) + i \operatorname{sen} \left(\arctg \left(\frac{q}{p} \right) \right) \right).$$

E como,

$$e^{it} = (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t)).$$

Então:

$$\begin{aligned}
 e^{it}(p, q) &= e^{it}(p + iq) \\
 &= \sqrt{p^2 + q^2} \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \cos(t) + i \cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \operatorname{sen}(t) \right) \\
 &+ \sqrt{p^2 + q^2} \left(i \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \cos(t) - \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \operatorname{sen}(t) \right) \\
 &= \sqrt{p^2 + q^2} \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \cos(t) - \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \operatorname{sen}(t) \right) \\
 &+ \sqrt{p^2 + q^2} \left(i \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \cos(t) + i \cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) \right) \operatorname{sen}(t) \right) \\
 &= \sqrt{p^2 + q^2} \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) + t \right) + i \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{q}{p} \right) + t \right) \right).
 \end{aligned}$$

De maneira analoga se introduz a notação:

$$i(p, q),$$

que denota uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ sobre o vetor (p, q) . Uma vez que:

$$i(p, q) \simeq i(p + iq) = ip - q \simeq (-q, p).$$

Considere agora $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s . No que segue, usaremos as notações:

- $T = \frac{dX}{ds}$ a tangente unitária ao longo de X .
- $N = iT$ sua normal apontando para a esquerda.
- $k = \left\langle \frac{d^2X}{ds^2}, N \right\rangle$ como a curvatura de X .
- $r^2 = \langle X, X \rangle = |X|^2$ a distância da curva à origem.
- É conveniente também trabalhar com as funções $\tau = \langle X, T \rangle$ e $\nu = \langle X, N \rangle$, as quais satisfazem:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \tau = 1 + k\nu \\ \frac{d}{ds} \nu = -k\tau \end{cases} \quad (1.1)$$

Uma vez que:

$$\frac{d}{ds} \langle X, T \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} X, T \right\rangle + \left\langle X, \frac{d}{ds} T \right\rangle = 1 + \left\langle X, \frac{d^2 X}{ds^2} \right\rangle = 1 + \langle \nu N, kN \rangle = 1 + k\nu.$$

$$\frac{d}{ds} \langle X, N \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} X, N \right\rangle + \left\langle X, \frac{d}{ds} N \right\rangle = \left\langle X, i \frac{d^2 X}{ds^2} \right\rangle = \langle \tau T, kiN \rangle = k\tau \langle T, -T \rangle = -k\tau.$$

Como $T, N \in \mathbb{R}^2$ formam uma base ortonormal, então $X = c_1 T + c_2 N$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, logo

$$X = \tau T + \nu N = (\tau + i\nu)T \quad \text{e ainda} \quad r^2 = \tau^2 + \nu^2. \quad (1.2)$$

Lema 1.6. Para cada função suave $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ponto $z_0 \in \mathbb{R}^2$ e ângulo $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, existe uma única curva imersa $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo a equação $k = \Phi(\tau, \nu)$ e passando por z_0 com ângulo θ_0 .

Demonstração. Observe que, se $T = e^{i\theta}$ então $T' = \theta' N$ e assim, tendo em mente (1.2) e (1.1), consideramos τ, ν e θ ser a solução única para o sistema EDO's:

$$\begin{cases} \tau' = 1 + \Phi(\tau, \nu)\nu \\ \nu' = -\Phi(\tau, \nu)\tau \\ \theta' = \Phi(\tau, \nu) \end{cases}, \quad (1.3)$$

com os valores iniciais $\theta(0) = \theta_0$, $\tau(0) + i\nu(0) = e^{i\theta_0} z_0$ e depois definimos a curva como:

$$X = (\tau + i\nu)e^{i\theta}.$$

Note também que:

$$\begin{aligned} X' &= (\tau' + i\nu' + i\theta'(\tau + i\nu))e^{i\theta} \\ &= (1 + \Phi(\tau, \nu)\nu - i\Phi(\tau, \nu)\tau + i\Phi(\tau, \nu)\tau - \Phi(\tau, \nu)\nu)e^{i\theta} \\ &= e^{i\theta}, \end{aligned}$$

então X é parametrizada pelo comprimento do arco com a tangente $T = e^{i\theta}$. Portanto, a curvatura k é igual a:

$$k = \left\langle \frac{d^2 X}{ds^2}, N \right\rangle = \left\langle i\theta' e^{i\theta}, ie^{i\theta} \right\rangle = -\left\langle i^2 \theta' e^{i\theta}, e^{i\theta} \right\rangle = \theta' = \Phi(\tau, \nu).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\langle X, T \rangle &= \langle (\tau + i\nu)e^{i\theta}, e^{i\theta} \rangle = \langle \tau e^{i\theta}, e^{i\theta} \rangle + \langle i\nu e^{i\theta}, e^{i\theta} \rangle \\ &= \tau - \langle \nu e^{i\theta}, ie^{i\theta} \rangle = \tau - \nu \langle T, N \rangle = \tau = \Re(Xe^{-i\theta}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X, N \rangle &= \langle (\tau + i\nu)e^{i\theta}, ie^{i\theta} \rangle = \langle \tau e^{i\theta}, ie^{i\theta} \rangle + \langle i\nu e^{i\theta}, ie^{i\theta} \rangle \\ &= \tau \langle T, N \rangle + \nu = \nu = \Re(X(-i)e^{-i\theta}).\end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{d}{ds}r = \frac{d}{ds}\sqrt{\tau^2 + \nu^2} = \frac{\tau'\tau + \nu'\nu}{\sqrt{\tau^2 + \nu^2}} = \frac{\tau + \Phi(\tau, \nu)\tau\nu - \Phi(\tau, \nu)\nu\tau}{\sqrt{\tau^2 + \nu^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \nu^2}} \leq 1, \quad (1.4)$$

a solução não pode explodir em tempo finito e, portanto, é definida em todo \mathbb{R} , já que o limite $\lim_{s \rightarrow x} r(s)$ esta bem definido $\forall x \in \mathbb{R}$. Terminando a prova. \square

Capítulo 2

Fluxo da Curvatura Média

2.1 Uma Introdução ao Fluxo da Curvatura Média

Ao longo desta seção, M representará uma hipersuperfície n -dimensional de \mathbb{R}^{n+1} . Embora a maior parte dos resultados também sejam válidos em espaços mais gerais, estudaremos apenas as hiper-superfícies no espaço Euclidiano.

Definição 2.1. Dizemos que M evolui através do fluxo da curvatura média se houver uma família suave de imersões $F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que:

- $F_0 := F(\cdot, 0)$ é a imersão original de M em \mathbb{R}^{n+1} .
- Para cada p em M e para cada t em $[0, T)$, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = \vec{H}(p, t) \\ F(p, 0) = F(p) \end{cases},$$

onde $\vec{H}_t(p) := \vec{H}(p, t)$ é o vetor curvatura média de $M_t := F(M, t)$ em $F(p, t)$. \vec{H} é um vetor na direção do campo normal de M_t e módulo H .

Como visto em 1.2, temos que o vetor curvatura média pode ser escrito como:

$$\vec{H} = \left(g^{ij} \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^\perp.$$

Sendo assim, podemos escrever a equação do fluxo da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(g^{ij} \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x_i}} \frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^\perp.$$

Como feito pela autora em [14] vamos agora calcular como a esfera $\mathbb{S}_{R_0}^n$ de raio R_0 e o cilindro $\mathbb{S}_{R_0}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ evoluem pelo fluxo da curvatura média

Exemplo 2.1. Considere uma esfera de raio R_0 . Vamos supor que a solução seja uma esfera para todo tempo t , isto é, $F(t) = R(t)\omega$ com $\omega \in \mathbb{S}^n$. Então a curvatura média é dada por $H = \frac{n}{R}$ e a equação do fluxo é dada por:

$$R'(t)\omega = -\frac{n}{R}\eta \Rightarrow R'(t) = -\frac{n}{R}.$$

Portanto, a solução para a equação é

$$R(t) = \sqrt{R_0 - 2nt}.$$

Exemplo 2.2. Para o caso do cilindro, iremos calcular primeiramente $h_{i,j}$, sabendo que os vetores normais são dados por $\eta = (\omega, 0)$ com $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ e supondo que, assim como no caso da esfera, a solução seja um cilindro para todo tempo t , isto é, $F(t) = R(t)\omega \times \mathbb{R}$. Então obtemos que

$$\begin{cases} h_{i,i} = \frac{1}{R} \text{ (como no caso da esfera), se } i \neq n \\ h_{i,i} = 0, \text{ se } i = n \end{cases}.$$

Logo:

$$R'(t) = -\frac{n-1}{R}.$$

E com isso

$$R(t) = \sqrt{R_0 - 2nt + 2t}.$$

2.2 Variedades dadas por gráficos

Para provar o princípio da comparação para o FCM, precisamos entender primeiramente como o fluxo é considerado em variedades dada por gráficos, sendo assim, seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, sabe-se que o gráfico de u , definido como $M_0 = \{(x, u(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ é uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} . Então, podemos estudar como ela evolui sob o fluxo de curvatura média, definindo assim, a função:

$$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$F(p, t) = (x(p, t), u(x(p, t), t)).$$

Satisfazendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F = -\eta H, \\ F(\cdot, 0) = M_0 \end{cases}$$

Neste ponto, se faz extremamente útil saber como expressar os principais elementos geométricos associados a M_0 em termos de u e suas derivadas. Para isso, considere a seguinte notação $D_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $Du = (D_1 u, \dots, D_n u)$:

Lema 2.1. (Sub-variedades dadas por gráficos) Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e M_0 o gráfico de u . Então temos:

1. $g_{ij} = \delta_{ij} + D_i u D_j u$,
2. $g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2}$,
3. $\eta = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$,
4. $h_{ij} = -\frac{D_{ij} u}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$,
5. $H = -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right)$.

Demonstração. Para a demonstração considere que $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ denota a base canônica de \mathbb{R}^{n+1}

1. $g_{ij} = \langle D_i F, D_j F \rangle = \langle (e_i, D_i u), (e_j, D_j u) \rangle = \delta_{ij} + D_i u D_j u$,

2. Fazendo o produto matricial:

$$\begin{aligned} g_{ik} g^{kj} &= (\delta_{ik} + D_i u D_k u) \left(\delta_{kj} - \frac{D_k u D_j u}{1 + |Du|^2} \right) \\ &= \delta_{ik} \delta_{kj} - \frac{D_k u D_j u}{1 + |Du|^2} \delta_{ik} + D_i u D_k u \delta_{kj} - D_i u D_k u \frac{D_k u D_j u}{1 + |Du|^2} \\ &= \delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} + D_i u D_j u - |Du|^2 \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} \\ &= \delta_{ij} - (1 + |Du|^2) \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} + D_i u D_j u \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Temos que g_{ij} é a inversa de g^{ij}

3. Como $\{D_i F\}_{i=1, \dots, n}$ é uma base para o espaço tangente de M_0 , então $(-Du, 1)$ é um vetor normal a este espaço, normalizando este vetor, tem-se que:

$$\eta = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}},$$

4. Sabendo que $h_{ij} = \langle II(D_i F, D_j F), \eta \rangle$, Logo:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\langle II(D_i F, D_j F), \eta \rangle = -\langle (\bar{\nabla}_{D_i F} D_j F)^\perp, \eta \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{D_i F} D_j F, \eta \rangle \\ &= -\langle D_{D_i F} D_j F, \eta \rangle = -\langle D_{ij}^2 F, \eta \rangle = -\left\langle (0, D_{ij}^2 u), \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right\rangle \\ &= -\frac{D_{ij}^2 u}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \end{aligned}$$

5. se, por um lado:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) &= D_i \left(\frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n D_{ii}^2 u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} - \frac{1}{2} \frac{D_i u}{(1 + |Du|^2)^{\frac{3}{2}}} 2 \langle D_i(Du), Du \rangle \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n D_{ii}^2 u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} - \frac{D_i u D_{ij}^2 u D_j u}{(1 + |Du|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Por outro temos que:

$$H = g^{ij} h_{ij} = - \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} \right) \frac{D_{ij}^2 u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = - \frac{\sum_{i=1}^n D_{ii}^2 u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + \frac{D_i u D_{ij}^2 u D_j u}{(1 + |Du|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Portanto:

$$H = -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

□

Agora usaremos essas informações para encontrar novas equações diferenciais parciais para gráficos que evoluem pelo fluxo da curvatura média. Começamos derivando F em

relação ao tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Usando isto, a equação do fluxo da curvatura média torna-se:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \left\langle Du, \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = H \frac{(Du, -1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{H}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du \\ \left\langle Du, \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{H}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \end{cases}.$$

Da primeira equação obtemos que:

$$\left\langle Du, \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle = \frac{H}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \langle Du, Du \rangle.$$

Logo, da segunda obtemos a seguinte relação:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{H}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + \frac{H}{\sqrt{1 + |Du|^2}} |Du|^2 = H \sqrt{1 + |Du|^2}.$$

Como $H = -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right)$, então obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) \sqrt{1 + |Du|^2}. \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) &= \frac{\sum_{i=1}^n D_{ii}^2 u}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{D_i u D_{ij}^2 u D u_j}{(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(\delta_{ij} D_{ij}^2 u - \frac{D_i u D_{ij}^2 u D u_j}{1+|Du|^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D u_j}{1+|Du|^2} \right) D_{ij}^2 u.
 \end{aligned}$$

Então chegamos a seguinte relação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D u_j}{1+|Du|^2} \right) D_{ij}^2 u. \quad (2.1)$$

2.3 Princípio da Comparação

Nesta seção apresentaremos e provaremos um interessante problema, que foca em relacionar a evolução pelo fluxo da curvatura média de duas hipersuperfícies compactas, enunciado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1. (Princípio de comparação)

Sejam M_0 e N_0 hipersuperfícies compactas, mergulhadas e sem fronteira, em \mathbb{R}^{n+1} que não se intersectam. Se M_t e N_t são suas respectivas evoluções pelo fluxo de curvatura média, então elas nunca vão se intersectar.

O exemplo a seguir nos traz uma melhor compreensão de onde se aplica o Teorema 2.1

Exemplo 2.3. Sejam M_0 uma esfera de raio R centrada na origem e N_0 uma esfera de raio r também centrada na origem com $R > r$. Usando o Exemplo 2.1 pode-se observar que as evoluções de M_0 e N_0 se afastam cada vez mais, uma vez que, sabendo que a velocidade com que os raios de ambas diminuem é dada por:

$$R'(t) = -\frac{n}{\sqrt{R_0 - 2nt}},$$

então quanto menor o raio mais rápido a esfera se colapsa em um ponto.

Para dar início à prova do Teorema 2.1, daremos algumas introduções:

Definição 2.2. Dizemos que $Q(X_0, \varepsilon)$ é um cilindro parabólico se

$$Q(X_0, \varepsilon) := \{Y \in \mathbb{R}^{n+1}; |Y - X_0| < \varepsilon, t < t_0\},$$

onde $X_0 = (x_0, t_0)$ e $|(x, t)| = \max\{|x|_{\mathbb{R}^n}, \sqrt{|t|}\}$.

Considere agora Ω um domínio (subconjunto aberto e conexo) em \mathbb{R}^{n+1} . Nesta configuração, escreveremos os pontos de \mathbb{R}^{n+1} como $X = (x, t)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.3. Definimos $\partial_p \Omega$ a fronteira parabólica de Ω , como o conjunto de pontos $X = (x, t) \in \partial \Omega$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ o cilindro parabólico $Q(X, \varepsilon)$ contém pontos no complementar de $\overline{\Omega}$.

Exemplo 2.4. Para o melhor entendimento das duas definições anteriores, considere $n = 1$ e $X_0 = (0, 0)$, assim, temos que $Q(X_0, \varepsilon)$ é um cilindro de altura ε e de base determinada pela função $f(x, y) = \max\{|x|, \sqrt{|y|}\}$, com $y > 0$. A fronteira parabólica de Ω neste caso, pode ser vista como $\partial \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Definição 2.4. Dado $u \in C^{2,1}(\Omega)$ (a função u é Lipschitz e suas derivadas até segunda ordem são todas contínuas em Ω) nós definimos P o operador quase-linear, de segunda ordem como:

$$Pu := -\frac{\partial u}{\partial t} + a^{ij}(X, u, Du)D_{ij}^2 u + a(X, u, Du). \quad (2.2)$$

Onde Du denota o gradiente da u e $D_{ij}^2 u$ a matriz Hessiana.

Assumimos que $a^{ij}(X, z, p)$ e $a(X, z, p)$ são definidos para qualquer $(X, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que P é parabólico em um subconjunto S de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, se a matriz cujos coeficientes forem $a^{ij}(X, z, p)$ for positiva definida para qualquer $(X, z, p) \in S$

Nós distinguimos dois casos especiais para S :

- Se $S = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, dizemos que P é parabólico;
- Se $S = \{(X, z, p) \in U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : z = u(X), p = Du(X)\}$ para alguma função $u \in C^1(U)$ onde $U \subset \Omega$ então diremos que P é parabólico em u .

Introduziremos agora um Princípio de Comparação para operadores dados por (2.2) (veja [7] para detalhes)

Teorema 2.2. (Princípio de Comparação - Operadores Parabólicos). Seja P um operador quasilinear

como em (2.2). Suponha que $a^{ij}(X, z, p)$ não dependa de z e que exista uma função crescente positiva $K(L)$ tal que $a(X, z, p) - K(L) \cdot z$ é decrescente em z em $\Omega \times [L, L] \times \mathbb{R}^n$

para $L > 0$. Se u e v forem funções em $C^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus \partial_P \Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, tal P é parabólico em u ou em v , $Pu \geq Pv$ em $\overline{\Omega} \setminus \partial_P \Omega$ e $u \leq v$ em $\partial_P \Omega$, então $u \leq v$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Primeiro, fixamos L de tal forma que $[-L, L]$ contenha o intervalo de variação u e v , ou seja, $L := \max\{\sup_{\Omega} |u|, \sup_{\Omega} |v|\}$.

Vamos definir $w := (u - v)e^{\lambda t}$ em Ω , onde $\lambda < -K(L)$. Observe que provar que $u \leq v$ em $\overline{\Omega}$ é equivalente a provar que $w \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. De nossas declarações, sabemos que o $u \leq v$ em $\partial_P \Omega$, então temos que provar que $w \leq 0$ em $\overline{\Omega} \setminus \partial_P \Omega$.

Então basta provarmos que o valor máximo de w não pode ser positivo. Procederemos por contradição:

Suponhamos que $X_0 = (x_0, t_0)$ é um ponto de máximo tal que $w(X_0) > 0$. Sabendo que se uma função de classe C^2 atinge seu máximo em um ponto interior, então o gradiente nesse ponto é zero e a matriz Hessiana é negativa semi-definida. Em particular, temos que a matriz $(D_{ij}w(X_0))_{i,j=1,\dots,n}$ é negativa semi-definida e ainda:

$$Dw(X_0) = 0 \Leftrightarrow (Du - Dv)(X_0)e^{\lambda t_0} = 0 \Rightarrow Du(X_0) = Dv(X_0), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(X_0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(u - v)(X_0)e^{\lambda t_0} + \lambda(u - v)(X_0)e^{\lambda t_0} = 0 \Rightarrow \\ &-\frac{\partial}{\partial t}(u - v)(X_0)e^{\lambda t_0} = \lambda(u - v)(X_0)e^{\lambda t_0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Abaixo, por conveniência, denotamos:

$$R := (X_0, u(X_0), Du(X_0)) \quad \text{e} \quad S := (X_0, v(X_0), Dv(X_0)).$$

Da nossa hipótese, sabemos que $Pu \geq Pv$ em $\overline{\Omega} \setminus \partial_P \Omega$. Ou seja:

$$0 \leq Pu(X_0) - Pv(X_0) = a^{ij}(R)D_{ij}u(X_0) - a^{ij}(S)D_{ij}v(X_0) + a(R) - a(S) - \frac{\partial}{\partial t}(u - v)(X_0).$$

Observe que $a^{ij}(R) = a^{ij}(X_0, u(X_0), Du(X_0))$ e $a^{ij}(S) = a^{ij}(X_0, v(X_0), Dv(X_0))$ coincidem. Isso se deve ao fato de, por hipótese, a^{ij} não depender do segundo argumento e por (2.3) tem-se que $Du(X_0) = Dv(X_0)$. Usando ainda (2.4) temos:

$$0 \leq a^{ij}(R)D_{ij}(u - v)(X_0) + a(R) - a(S) + \lambda(u - v)(X_0).$$

Usando o Lema 1.5 para $A := a^{ij}(R)$ e $B := D_{ij}(u - v)(X_0)$, temos que $a^{ij}(R)D_{ij}(u - v)(X_0) \leq 0$. Logo:

$$0 \leq a(R) - a(S) + \lambda(u - v)(X_0).$$

Lembrando agora que $u(X_0) > v(X_0)$. Como $a(x, z, p) - K(L)z$ é uma função decrescente de z em $\Omega \times [-L, L] \times \mathbb{R}^n$, então $a(R) - K(L)u(X_0) \leq a(S) - K(L)v(X_0)$, ou em outras palavras, $a(R) - a(S) \leq K(L)(u - v)(X_0)$, ainda, como $\lambda < -K(L)$ temos:

$$0 \leq K(L)(u - v)(X_0) + \lambda(u - v)(X_0) = (K(L) + \lambda)(u - v)(X_0) \Rightarrow u(X_0) \leq v(X_0).$$

O que é um absurdo, já que estamos supondo $w(X_0) > 0$ que é equivalente a $u(X_0) > v(X_0)$. \square

Antes de dar início a prova do Teorema do princípio de comparação iremos observar iremos mais uma vez observar a equação (2.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} \right) D_{ij}^2 u. \quad (2.5)$$

Ao compararmos com a definição do operador (2.2), obtemos neste caso que:

$$a^{ij}(X, z, p) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1 + |p|^2}$$

Logo $a^{ij}(X, z, p)$ não depende de z e $a(X, z, p) \equiv 0$ para que (2.2) seja um operador parabólico, a matriz de coeficientes $a^{ij}(X, z, p)$ é positiva definida, que será verificado pelo seguinte lema.

Lema 2.2. A matriz de coeficientes $a^{ij}(X, z, p)$ é positiva definida

Demonstração. Primeiramente, observe que se $p = 0$, então $a^{ij} = \delta_{ij}$, que nos fornece a matriz identidade.

Agora, se $p \neq 0$, considere $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como a matriz de coeficientes $a^{ij}(X, z, p)$ é positiva definida se e somente se $x_i a^{ij}(X, z, p) x_j > 0$ então:

$$\begin{aligned} x_i a^{ij}(X, z, p) x_j &= x_i \delta_{ij} x_j - x_i \frac{p_i p_j}{1 + |p|^2} x_j \\ &= x_i x_i - \frac{(x_i p_i)(p_j x_j)}{1 + |p|^2} \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, p \rangle \langle x, p \rangle}{1 + |p|^2} = |x|^2 - \frac{\langle x, p \rangle^2}{1 + |p|^2} \end{aligned}$$

Com isso,

$$x_i a^{ij}(X, z, p) x_j > 0 \Leftrightarrow |x|^2 - \frac{\langle x, p \rangle^2}{1 + |p|^2} > 0 \Leftrightarrow \langle x, p \rangle^2 < |x|^2 (1 + |p|^2).$$

Observe agora que, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $\langle x, p \rangle^2 \leq |x|^2 |p|^2$, logo $\langle x, p \rangle^2 < |x|^2 (1 + |p|^2)$, concluindo nossa demonstração. \square

Iremos agora dar início a prova do Teorema 2.1, escreveremos aqui mais uma vez seu enunciado:

(Princípio de comparação)

Sejam M_0 e N_0 hipersuperfícies compactas, mergulhadas e sem fronteira, em \mathbb{R}^{n+1} que não se intersectam. Se M_t e N_t são suas respectivas evoluções pelo fluxo de curvatura média, então elas nunca vão se intersectar.

Demonstração. Provaremos por contradição. Suponha que M_t e N_t se encontrem pela primeira vez no tempo t_0 em um ponto p (que é um ponto interior de ambas as superfícies porque, por suposição, nenhuma delas tem fronteira), então ambas as hipersuperfícies têm o mesmo plano tangente no ponto p , caso contrário, este não seria seu primeiro ponto de contato. Então, M_{t_0} e N_{t_0} podem ser expressos localmente sobre p como gráficos de funções, u_{t_0} e v_{t_0} sobre o plano tangente, respectivamente. Por outro lado, como ambas tem o mesmo plano tangente em p , também possuem (a menos de sinal) o mesmo vetor normal unitário, para evitar este problemas consideraremos a mesma orientação em M_{t_0} e N_{t_0} .

Assim, note que, como t_0 é o primeiro ponto de contato, então no instante t imediatamente antes de ambas as hipersuperfícies se cruzarem, temos (depende da escolha da aplicação de Gauss) $v_t < u_t$ ou $v_t > u_t$, sem perda de generalidade podemos assumir que $v_t > u_t$, então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $v_t - u_t > \varepsilon$.

Agora aplicamos o fluxo de curvatura média começando naquele instante antes de t_0 . Como, u_t e v_t satisfazem a equação parabólica quasilinear por (2.1):

$$Pu = -\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} \right) D_{ij}^2 u = 0.$$

Como também verificamos antes, P pode ser visto como um operador que satisfaz as hipóteses do princípio de comparação para operadores parabólicos (Teorema 2.2) É óbvio que $v_t - \varepsilon$ é também uma solução da equação acima. Além disso, u_t e $v_t - \varepsilon$ satisfazem as suposições do Teorema 2.2 em uma vizinhança do ponto p , então deduzimos que $u_t \leq v_t - \varepsilon < v_t$ nessa vizinhança particular de p , que contradiz $u(p, t_0) = v(p, t_0)$. Esta contradição completa a prova. \square

Capítulo 3

Superfícies Helicoidais

Rotacionando/Transladando Sob o Fluxo de Curvatura Média

3.1 Movimentos auto-similares sob o fluxo de curvatura média

Sejam M^n uma hipersuperfície orientada e $F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão, dizemos que uma família $(M^n)_{t \in I}$ de superfícies imersas em \mathbb{R}^{n+1} é obtida pela aplicação de um movimento auto-similar à imersão F , tal que as imersões de $(M^n)_{t \in I}$ são descritas pela fórmula:

$$F(p, t) = g(t)Q(t)F(p) + v(t) \quad p \in M^n, t \in I.$$

Em que I é um intervalo contendo o 0, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : I \rightarrow SO(n+1)$ e $v : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ são funções diferenciáveis e $g(0) = 1$, $Q(0) = Id$ e $v(0) = 0$, sendo assim $F(p, 0) = F(p)$ e $M^n = M_0^n$.

Seja n o campo vetorial unitário normal de $F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Uma família de um parâmetro de hipersuperfícies F é uma solução para o fluxo de curvatura média (FCM) com a condição inicial $F(M^n)$, se:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = -H(p, t)n(p, t) \\ F(p, 0) = F(p) \end{cases} .$$

Onde $H(\cdot, t)$ é a curvatura média e $n(\cdot, t)$ é o campo de vetor normal unitário de $F(\cdot, t)$.

A EDP acima pode ser escrita como:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} F(p, t), n(p, t) \right\rangle = -H(p, t), \quad (3.1)$$

uma vez que, por [14] temos que se uma família de hipersuperfícies $(M^n)_{t \in I}$ satisfaz (3.1), então ela pode ser localmente parametrizada para uma solução para o fluxo de curvatura média, o que nos fornece uma definição mais geométrica e alternativa para o fluxo de curvatura média:

Definição 3.1. Sejam M^n uma hipersuperfície orientada e $F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Uma família de hipersuperfícies $(M^n)_{t \in I}$ é solução para o fluxo de curvatura média de M^n com condição inicial $F(M)$, se satisfaz a equação:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} F(p, t), n(p, t) \right\rangle = -H(p, t), \quad (3.2)$$

Considerando-se a evolução por movimentos auto-similares, tem-se que:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (g(t)Q(t)F(p) + v(t)), Q(t)n(p) \right\rangle = -g(t)^{-1}H(p)$$

uma vez que $Q(t)n(p)$ é um vetor normal a $F(p, t)$. De fato, isso segue imediatamente de $Q(t)$ ser uma aplicação ortogonal e de $\frac{\partial}{\partial x_i} F(p, t) = g(t)Q(t) \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (g(t)Q(t)F(p)), Q(t)n(p) \right\rangle + \langle v'(t), Q(t)n(p) \rangle &= -g(t)^{-1}H(p) \\ \langle g'(t)Q(t)F(p), Q(t)n(p) \rangle + & \\ \langle g(t)Q'(t)F(p), Q(t)n(p) \rangle + & \\ \langle v'(t), Q(t)n(p) \rangle &= -g(t)^{-1}H(p). \end{aligned}$$

Portanto:

$$g(t)g'(t) \langle F(p), n(p) \rangle + g^2(t) \langle Q^T(t)Q'(t)F(p), n(p) \rangle + g(t) \langle Q^T(t)v'(t), n(p) \rangle = -H(p). \quad (3.3)$$

Analisando em $t = 0$, temos que $M = M_0$ satisfaz:

$$b \langle F, n \rangle + \langle AF, n \rangle + \langle c, n \rangle = -H. \quad (3.4)$$

Onde $b = g'(0)$, $A = Q'(0)$ e $c = v'(0)$.

Satisfazer a equação (3.4) também é uma condição suficiente para que M se mova de maneira auto-similar sob o (FCM). Para observar isso, analisaremos dois casos separadamente:

Caso 1: Movimento sem translação.

Neste caso temos $v(t) = 0$, com isso:

$$b \langle F, n \rangle + \langle AF, n \rangle = -H.$$

Agora, se $g(t)g'(t) = b$ e $g^2(t)Q^T(t)Q'(t) = A$, então a equação (3.3) é satisfeita $\forall p \in M$ e $t \in I$, com isso obtém-se que:

$$g(t) = \sqrt{2bt+1} \quad \text{e} \quad Q(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\log(2bt+1)}{2b}A\right) & \text{se } b \neq 0 \\ e^{At} & \text{se } b = 0 \end{cases}$$

Assim, a superfície M , sobre o FCM, expande e gira continuamente, com velocidade decrescente, quando $b > 0$ e expande e gira para sempre, com velocidade crescente, quando $b < 0$, (até o instante $t = -\frac{1}{2b}$, onde obtemos uma singularidade). Veja solução abaixo:

De fato, se $F(p, t) = g(t)Q(t)F(p)$, temos que:

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} = g'(t)Q(t)F(p) + g(t)Q'(t)F(p),$$

portanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F(p, t)}{\partial t} \right|^2 &= g'(t)^2 \langle F(p), F(p) \rangle + 2g(t)g'(t) \langle F(p), Q^T(t)Q'(t)F(p) \rangle + \\ &+ g(t)^2 \langle Q'(t)F(p), Q'(t)F(p) \rangle. \end{aligned}$$

Sabendo que $g(t)g'(t) = b$ e $g^2(t)Q^T(t)Q'(t) = A$, reescrevemos a equação acima como

$$\left| \frac{\partial F(p, t)}{\partial t} \right|^2 = g'(t)^2 \langle F(p), F(p) \rangle + 2b(g(t))^{-2} \langle F(p), AF(p) \rangle + (g(t))^{-2} |AF(p)|^2.$$

De acordo com a solução que obtivemos, segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F(p, t)}{\partial t} \right|^2 &= \frac{1}{2bt+1} |bF(p)|^2 + \frac{1}{2bt+1} 2 \langle bF(p), AF(p) \rangle + \frac{1}{2bt+1} |AF(p)|^2 \\ &= \frac{1}{2bt+1} \langle bF(p) + AF(p), bF(p) + AF(p) \rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right| = \frac{1}{\sqrt{2bt+1}} |bF(p) + AF(p)|.$$

Derivando em relação a t , obtemos

$$\left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right|' = \frac{-b}{(2bt+1)^{\frac{3}{2}}} |bF(p) + AF(p)|.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right|' > 0 & \text{se } b < 0 \\ \left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right|' < 0 & \text{se } b > 0 \end{cases}$$

Para $b = 0$ temos $g(t) = 1$. Procedendo como anteriormente, temos que

$$\left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right| = |AF(p)|.$$

Caso 2: Movimento sem dilatação/contração.

Neste caso temos $g(t) = 1$, com isso, $g'(t) = b = 0$, o que implica:

$$\langle AF, n \rangle + \langle c, n \rangle = -H. \quad (3.5)$$

Será imposta agora a condição: $Ac = 0$, ou seja, a translação e a rotação estão em direções ortogonais. Agora, se as funções v e Q satisfazem $Q^T(t)Q'(t) = A$ e $Q^T(t)v'(t) = c$, então a equação (3.3) é satisfeita $\forall p \in M$ e $t \in I$, resolvendo as EDO's, obtém-se:

$$Q(t) = e^{tA} \quad \text{e} \quad v(t) = ct.$$

Para encontrar $v(t) = ct$ temos que observar que

$$v'(t) = Q(t)c \Rightarrow v''(t) = Q'(t)c \Rightarrow v''(t) = Q(t)Ac \xrightarrow{Ac=0} v''(t) = 0.$$

Assim, $v(t)$ é do tipo $v(t) = k_1t + k_2$, como $v(0) = 0$ e $v'(0) = c$, então $v(t) = ct$.

Portanto, sob o FCM a hipersfície translada e gira continuamente com velocidade constante e velocidade angular constante uma vez que:

$$F(p,t) = Q(t)F(p) + v(t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(p,t)}{\partial t} &= Q'(t)F(p) + v'(t) \\
\left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right|^2 &= \langle Q'(t)F(p), Q'(t)F(p) \rangle + 2 \langle Q'(t)F(p), v'(t) \rangle + \langle v'(t), v'(t) \rangle \\
\left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right|^2 &= \langle AF(p), AF(p) \rangle + 2 \langle AQ(t)F(p), Q(t)c \rangle + |c|^2 \\
\left| \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} \right|^2 &= |AF(p)|^2 + |c|^2, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

e esses movimentos são ortogonais.

Com isto em vista, vamos estudar o caso em que se mantêm todos os termos do lado esquerdo da equação. Para isso consideraremos que M satisfaz (3.4). Por uma translação de M pelo vetor w , obtemos uma superfície $\hat{M} = M - w$ e de (3.1) obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (g(t)Q(t)(F(p) - w) + v(t)), Q(t)n(p) \right\rangle &= -g(t)^{-1}H(p) \\
\left\langle \frac{\partial}{\partial t} g(t)Q(t)F(p), Q(t)n(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (-g(t)Q(t)w + v(t)), Q(t)n(p) \right\rangle &= -g(t)^{-1}H(p).
\end{aligned}$$

Analisaremos aqui apenas o último termo do lado esquerdo da equação, uma vez que os cálculos feitos para o primeiro termo serão essencialmente os mesmos que foram feitos na equação (3.3), logo:

$$\begin{aligned}
\cdots + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (-g(t)Q(t)w + v(t)), Q(t)n(p) \right\rangle &= -g(t)^{-1}H(p) \\
\cdots + \langle -(g'(t)Q(t)w + g(t)Q'(t)w) + v'(t), Q(t)n(p) \rangle &= -g(t)^{-1}H(p) \\
\cdots + \langle -g'(t)Q(t)w, Q(t)n(p) \rangle + \langle -g(t)Q'(t)w + v'(t), Q(t)n(p) \rangle &= -g(t)^{-1}H(p) \\
&\quad \cdots - g(t)g'(t) \langle Iw, n(p) \rangle + \\
g(t)^2 \langle -Q(t)^T Q'(t)w + Q(t)^T v'(t), n(p) \rangle &= -H(p),
\end{aligned}$$

aplicando em $t = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\cdots - g(0)g'(0) \langle Iw, n(p) \rangle + \\
g(0)^2 \langle -Q^T(0)Q(0)'w + Q(0)^T v'(0), n(p) \rangle &= -H(p) \\
&\cdots - b \langle Iw, n(p) \rangle + \langle -Aw + c, n(p) \rangle = -H(p) \\
&\cdots + \langle -(Ib + A)w + c, n(p) \rangle = -H(p),
\end{aligned}$$

com isso

$$b \langle F, n \rangle + \langle AF, n \rangle + \langle c - (A + Ib)w, n \rangle = -H.$$

Portanto, podemos fazer a seguinte escolha para w :

- Se $b \neq 0$, considere w a solução de $(A + Ib)w = c$, assim \hat{M} satisfaz as condições do **Caso 1** e com isso, M dilata e gira em torno do ponto w .
- Se $b = 0$, então considere w , tal que satisfaça $c = Aw + c_0$, onde $Ac_0 = 0$, assim \hat{M} satisfaz as condições do **Caso 2** e com isso, M translada e gira em torno do ponto w .

Sendo assim, o caso geral sempre pode ser reduzido a um dos dois casos já mencionados. Por isso, eles dão todos os movimentos auto-similares considerados de hipersuperfícies imersas sob o FCM.

3.2 Superfícies helicoidais

Superfícies helicoidais em espaços tridimensionais surgem como uma generalização natural de superfícies rotacionais em tais espaços. Estas superfícies são invariantes por um subgrupo do grupo de isometrias do espaço ambiente, chamado grupo helicoidal, cujos elementos podem ser vistos como uma composição de uma translação com uma rotação para um dado eixo. Como estudado por [4], para superfícies com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 , em [10] no espaço hiperbólico (\mathbb{H}^3), por [12], para superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , em [11] temos o estudo das superfícies helicoidais em \mathbb{R}^3 onde a curvatura média está relacionada com a distância ao eixo z , em [2], para superfícies mínimas, em espaços conformemente planos \mathbb{F}_3 e ainda em [8] no espaço \mathbb{S}^3 . Sendo assim, considere $h \in \mathbb{R}$ e seja $\gamma_t^h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um subgrupo do grupo de movimentos rígidos de \mathbb{R}^3 , dado pela composição de uma rotação com uma translação:

$$\gamma_t^h(x, y, z) = (x \cos(t) - y \sin(t), x \sin(t) + y \cos(t), z + ht) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta aplicação é chamada de movimento helicoidal de eixo Oz e de passo h . Uma superfície helicoidal de eixo Oz e de passo h é definida como uma superfície que é invariante sob γ_t^h . Observe que quando $h = 0$ temos que γ_t^h se reduz a:

$$\gamma_t^h(x, y, z) = (x \cos(t) - y \sin(t), x \sin(t) + y \cos(t), z),$$

Ou seja, apenas uma rotação em torno do eixo z , com isso a superfície invariante sob γ_t^h se reduz a uma superfície simétrica por rotações, Iremos focar em estudar o caso em

que $h \neq 0$ e analisar o limite quando $h \rightarrow 0$. A menos de uma reflexão pelo plano xy , se necessário, podemos assumir $h > 0$. É fácil ver que o parâmetro $\frac{1}{h}$ representa a velocidade angular de rotação a medida em que nos movemos ao longo do eixo z com com velocidade unitária, uma vez que, se:

$$\begin{aligned}\gamma_t^h(x, y, z) &= (x \cos(t) - y \sin(t), x \sin(t) + y \cos(t), z + ht) \\ \gamma_u^h(x, y, z) &= \left(x \cos\left(\frac{u}{h}\right) - y \sin\left(\frac{u}{h}\right), x \sin\left(\frac{u}{h}\right) + y \cos\left(\frac{u}{h}\right), z + u\right),\end{aligned}$$

temos

$$\frac{d}{du} \gamma_u^h(x, y, z) = \left(-\frac{x}{h} \sin\left(\frac{u}{h}\right) - \frac{y}{h} \cos\left(\frac{u}{h}\right), \frac{x}{h} \cos\left(\frac{u}{h}\right) - \frac{y}{h} \sin\left(\frac{u}{h}\right), 1\right).$$

Assim, a velocidade ao longo do eixo z é unitária e a velocidade de rotação $\frac{d}{du} \omega_u^h(x, y)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{du} \omega_u^h(x, y)\right|^2 &= \left| \left(-\frac{x}{h} \sin\left(\frac{u}{h}\right) - \frac{y}{h} \cos\left(\frac{u}{h}\right), \frac{x}{h} \cos\left(\frac{u}{h}\right) - \frac{y}{h} \sin\left(\frac{u}{h}\right)\right) \right|^2 \\ &= \frac{x^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{u}{h}\right) + 2\frac{xy}{h^2} \sin\left(\frac{u}{h}\right) \cos\left(\frac{u}{h}\right) + \frac{y^2}{h^2} \cos^2\left(\frac{u}{h}\right) \\ &\quad + \frac{x^2}{h^2} \cos^2\left(\frac{u}{h}\right) - 2\frac{xy}{h^2} \sin\left(\frac{u}{h}\right) \cos\left(\frac{u}{h}\right) + \frac{y^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{u}{h}\right) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{h^2} \\ \left|\frac{d}{du} \omega_u^h(x, y)\right| &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{h}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Com isso a velocidade angular de rotação é $\frac{1}{h}$.

Definindo isso, observe que se este novo parâmetro tender a 0 (ou seja quando $h \rightarrow \infty$) iremos obter uma superfície invariante por translação no eixo Oz . A maioria das equações de superfície aqui estudadas se estende de forma suave para esse caso, então, muitas vezes usaremos a notação $h = \infty$.

Uma superfície helicoidal com $h > 0$ pode ser parametrizada da seguinte forma: Seja $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Transladamos a curva X ao longo do eixo Oz com velocidade h , ao mesmo tempo em que a rodamos ao longo do eixo Oz no sentido anti-horário com velocidade angular unitária, assim seu traço define uma

superfície M imersa com eixo em Oz e passo h , parametrizada por:

$$F(s, t) = (e^{it}X(s), ht) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

É fácil ver que as superfícies helicoidais são parametrizadas desta forma uma vez que:

$$\gamma_{t_0}^h(e^{it}X(s), ht) = (e^{i(t+t_0)}X(s), h(t+t_0)) = F(s, t+t_0).$$

Reciprocamente, se S é uma superfície helicoidal então, $\gamma_t^h(S) \subseteq S$, considere agora $Y(s)$ uma curva de \mathbb{R}^2 , tal que $S \cap \{z=0\} = Y(s)$, assim $S \supseteq \gamma_t^h(Y(s), 0) = (e^{it}Y(s), ht) = F(s, t)$

Vamos agora obter a curvatura média H de uma superfície helicoidal. Para isso, temos que o plano tangente a M é definido pelos vetores tangentes:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = (e^{it}T(s), 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = (ie^{it}X(s), h),$$

e um normal é dado por:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial t}}{\left| \frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial t} \right|} \\ &= \frac{(e^{it}x'(s), e^{it}y'(s), 0) \times (e^{it}y(s), -e^{it}x(s), h)}{|(e^{it}x'(s), e^{it}y'(s), 0) \times (e^{it}y(s), -e^{it}x(s), h)|} \\ &= \frac{(he^{it}y'(s), -he^{it}x'(s), -(e^{it})^2(x(s)x'(s) + y(s)y'(s)))}{|(he^{it}y'(s), -he^{it}x'(s), -(e^{it})^2(x(s)x'(s) + y(s)y'(s)))|} \\ &= \frac{(he^{it}N(s), -(e^{it})^2 \langle X, T \rangle)}{|(he^{it}N(s), -(e^{it})^2 \langle X, T \rangle)|} \\ &= \frac{(he^{it}N(s), -\langle e^{it}X, e^{it}T \rangle)}{\sqrt{h^2|e^{it}|^2|N(s)|^2 + |(e^{it})^2|^2\tau^2}} \\ &= \frac{(he^{it}N(s), -\tau)}{\sqrt{h^2 + \tau^2}}. \end{aligned}$$

A métrica é dada pela matriz:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \langle e^{it}T(s), ie^{it}X(s) \rangle \\ \langle e^{it}T(s), ie^{it}X(s) \rangle & r^2 + h^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\langle ie^{it}T(s), e^{it}X(s) \rangle \\ -\langle ie^{it}T(s), e^{it}X(s) \rangle & r^2 + h^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{v} \\ -\mathbf{v} & r^2 + h^2 \end{pmatrix},$$

com inversa dada por:

$$g^{ij} = \frac{1}{r^2 + h^2 - \mathbf{v}^2} \begin{pmatrix} r^2 + h^2 & \mathbf{v} \\ \mathbf{v} & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{ij} = \frac{1}{\tau^2 + h^2} \begin{pmatrix} r^2 + h^2 & \mathbf{v} \\ \mathbf{v} & 1 \end{pmatrix}.$$

As derivadas segundas são:

$$F_{ss} = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s} = (e^{it}kN(s), 0), \quad F_{st} = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} = (ie^{it}T(s), 0) \quad \text{e} \quad F_{tt} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial t} = (-e^{it}X(s), 0).$$

Então, a segunda forma fundamental é dada pela matriz:

$$A_{ij} = -\langle F_{ij}, n \rangle = -\frac{h}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & -\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \forall i = s, t \quad \text{e} \quad j = s, t.$$

Finalmente a curvatura média de M é:

$$\begin{aligned} H &= \text{Tr}(g^{ij}A_{ij}) \\ &= -\frac{h}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} r^2 + h^2 & \mathbf{v} \\ \mathbf{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & -\mathbf{v} \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{h}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} k(r^2 + h^2) + \mathbf{v} & \tau^2 + h^2 \\ k\mathbf{v} + 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{h(k(r^2 + h^2) + \mathbf{v})}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Feito isso, podemos agora, enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1. Para toda função suave $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h > 0$, existe uma superfície helicoidal imersa de passo h satisfazendo a equação $H = \Psi(\tau, \nu)$.

A prova deste teorema se reduz a resolvermos a equação (3.8) para k e a prova do Lema 1.6:

Podemos ver o sistema de equações diferenciais ordinárias (1.3) para τ e ν como funções de apenas um único parâmetro s . Portanto, obtemos uma família de superfícies de um parâmetro para cada h .

Nas restantes três seções, olhamos separadamente para três tipos de superfícies helicoidais, ou seja, superfícies que rodam sob o MCF e depois as superfícies helicoidais mínimas e de curvatura média constante.

3.3 Superfícies helicoidais girando / transladando sob o FCM

Nesta seção, descreveremos uma família de dois parâmetros de superfícies helicoidais imersas em \mathbb{R}^3 que giram em torno do eixo z com velocidade unitária sob o FCM. Como as superfícies são invariantes sob o movimento helicoidal γ_t^h , esse movimento também pode ser visto como uma translação com velocidade h na direção negativa do eixo z o que será explicado pelo seguinte lema:

Lema 3.1. A evolução das superfícies helicoidais sob o FCM que produz um movimento de rotação em torno do eixo z com velocidade unitária, também pode ser visto como uma translação com velocidade h na direção negativa do eixo z .

Demonstração. Observando que, ao aplicar uma rotação $Q(r)$ em $F(s, t) = (e^{it}X(s), ht)$, temos $Q(r)F(s, t) = (e^{i(t+r)}X(s), ht)$. Fazendo a mudança de variável $\bar{t} = t + r$, temos

$$Q(r)F(s, t) = (e^{i(t+r)}X(s), ht) = (e^{i\bar{t}}X(s), h(\bar{t} - r)) = (e^{i\bar{t}}X(s), h\bar{t}) + (0, 0, -rh).$$

Portanto $|c| = h$. □

Sendo assim, vamos analisar o movimento helicoidal da superfície apenas como um movimento de rotação, ou seja, consideraremos o **Caso 2** em que $c = 0$, então temos da (3.5) que $-H = \langle AF, n \rangle$.

Afim de determinar o valor da curvatura média H , iremos calcular primeiramente o valor de A , como buscamos superfícies helicoidais que giram em torno do eixo z com velocidade unitária, faremos o uso do seguinte lema:

Lema 3.2. A superfície gira com velocidade unitária se e somente se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ gera a rotação em questão.}$$

Demonstração. De fato, como

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ \text{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denota uma matriz de rotação em torno do eixo z , onde θ é o ângulo de rotação.

Como em (3.5) $Q'(t) = Q(t)A$, então:

$$\begin{pmatrix} -\theta'(t) \text{sen}(\theta(t)) & -\theta'(t) \cos(\theta(t)) & 0 \\ \theta'(t) \cos(\theta(t)) & -\theta'(t) \text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ \text{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A.$$

Com isso, se a velocidade de rotação for 1, então:

$$\begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta(t)) & -\cos(\theta(t)) & 0 \\ \cos(\theta(t)) & -\text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ \text{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$\begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta(t)) & -\cos(\theta(t)) & 0 \\ \cos(\theta(t)) & -\text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ -\text{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Reciprocamente, se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, então:

$$\begin{pmatrix} -\theta'(t) \text{sen}(\theta(t)) & -\theta'(t) \cos(\theta(t)) & 0 \\ \theta'(t) \cos(\theta(t)) & -\theta'(t) \text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\text{sen}(\theta(t)) & 0 \\ \text{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$\begin{aligned} \theta'(t) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta(t)) & -\operatorname{cos}(\theta(t)) & 0 \\ \operatorname{cos}(\theta(t)) & -\operatorname{sen}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \operatorname{cos}(\theta(t)) & -\operatorname{sen}(\theta(t)) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta(t)) & \operatorname{cos}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta'(t) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta(t)) & -\operatorname{cos}(\theta(t)) & 0 \\ \operatorname{cos}(\theta(t)) & -\operatorname{sen}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta(t)) & -\operatorname{cos}(\theta(t)) & 0 \\ \operatorname{cos}(\theta(t)) & -\operatorname{sen}(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta'(t) &= 1. \end{aligned}$$

□

Assim, se $-H = \langle AF, n \rangle$, temos por (3.5) que

$$\begin{aligned} -H &= \langle AF, n \rangle \\ &= \left\langle (ie^{it}X(s), 0), \frac{(he^{it}N(s), -\tau)}{\sqrt{h^2 + \tau^2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2 + \tau^2}} \langle e^{it}iX(s), he^{it}N(s) \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{h^2 + \tau^2}} \langle e^{it}X(s), -he^{it}T(s) \rangle \\ &= \frac{h\tau}{\sqrt{h^2 + \tau^2}}. \end{aligned}$$

Agora, como H é dado como uma função suave de τ , a existência dessas superfícies é garantida pelo Teorema 3.1. A equação correspondente para a curva X por (3.8) é

$$\begin{aligned} \frac{h\tau}{\sqrt{h^2 + \tau^2}} &= \frac{h(k(r^2 + h^2) + v)}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \tau(\tau^2 + h^2) &= k(r^2 + h^2) + v \\ \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2} &= k, \end{aligned} \tag{3.9}$$

então o sistema bidimensional de EDO's para τ e v (1.1) se torna:

$$\begin{cases} \tau' = 1 + \left(\frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2} \right) v \\ v' = -\frac{\tau^2(\tau^2 + h^2) - v\tau}{r^2 + h^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau' = \frac{(r^2 + h^2) + (\tau(\tau^2 + h^2) - v)v}{r^2 + h^2} \\ v' = \frac{v\tau - \tau^2(\tau^2 + h^2)}{r^2 + h^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau' = \frac{\tau^2 + \nu^2 + h^2 + \tau\nu(\tau^2 + h^2) - \nu^2}{r^2 + h^2} \\ \nu' = \frac{\nu\tau - \tau^2(\tau^2 + h^2)}{r^2 + h^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau' = \frac{(\tau^2 + h^2)(1 + \tau\nu)}{r^2 + h^2} \\ \nu' = \frac{\nu\tau - \tau^2(\tau^2 + h^2)}{r^2 + h^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

Note que o lado direito de (3.10) permanece o mesmo quando (τ, ν) é substituído por $(-\tau, -\nu)$. Portanto, $s \mapsto -(\tau(-s), \nu(-s))$ é também uma solução para o sistema, que, claro, apenas corresponde à curva X parametrizada de maneira oposta a usual. Essa simetria simplificará alguns dos nossos argumentos. Observe também que o sistema não possui pontos de equilíbrio (não há como ambas as derivadas se anularem), uma vez que se $\tau' = 0$ então $\tau\nu = -1$ assim:

$$\begin{cases} \tau' = 0 \\ \nu' = \frac{-1 - \tau^2(\tau^2 + h^2)}{r^2 + h^2} < 0 \end{cases} \quad .$$

Da mesma forma, se $\nu' = 0$, então $\nu\tau = \tau^2(\tau^2 + h^2)$, logo:

$$\begin{cases} \tau' = \frac{(\tau^2 + h^2)(1 + \tau^2(\tau^2 + h^2))}{r^2 + h^2} > 0 \\ \nu' = 0 \end{cases} \quad .$$

Observe agora que:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} k = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - \nu}{r^2 + h^2} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\tau(\frac{\tau^2}{h^2} + 1) - \frac{\nu}{h^2}}{\frac{r^2}{h^2} + 1} = \tau.$$

O caso limite $h = \infty$ produz $k = \tau$, a equação de rotação para o encurtamento da curva no plano, e a superfície de rotação é simplesmente o produto $X \times \mathbb{R}$, uma vez que para formar a superfície, a curva X gira com velocidade angular $\frac{1}{h}$ e assim, com $h \rightarrow \infty$ então $\frac{1}{h} \rightarrow 0$. Essas curvas foram descritas pelo autor em [5]. Acontece que para alguns valores de h suficientemente grandes, X ainda tem a maioria das mesmas propriedades, embora não esteja mais sempre mergulhado. Sendo assim, vamos analisar o caso de $h < \infty$, por meio do seguinte teorema:

Teorema 3.2. Para cada $h > 0$ existe uma família de superfícies helicoidais de um parâmetro com passo h , que giram com a velocidade unitária em torno de seu eixo helicoidal sob o FCM. As curvas que geram tais superfícies têm um ponto mais próximo da origem e consistem em dois ramos apropriadamente mergulhados vindos desse ponto. Cada ramo tem curvatura total infinita e espirais que se afastam da origem a medida que circulam ao redor dela. A curvatura

vai para 0 ao longo de cada ramo e o limite do ângulo formado pelo vetor tangente e o vetor posição é de π .

A prova será dada através de uma série de lemas. Começamos investigando o comportamento limite de τ e v .

Lema 3.3. Ambos τ e v possuem limites (possivelmente infinitos) com $s \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração. Inicialmente, vamos analisar a existência de pontos em que $k(s) = 0$. Observe que, se $\tau(s) = 0$, então $\tau'(s) = \frac{h^2}{v(s)^2 + h^2} > 0$. Assim, τ tem no máximo um ponto em que atinge o zero, caso contrário, como τ é contínua, então τ teria que ser decrescente em algum intervalo para se anular novamente. Observa-se também que τ é negativo antes de s e positivo depois dele.

De forma análoga, se $k(s) = 0$, então temos que por (1.1):

$$\begin{cases} \tau'(s) = 1, \\ v'(s) = 0. \end{cases}$$

Por (3.10), $v'(s) = \frac{v(s)\tau(s) - \tau(s)^2(\tau(s)^2 + h^2)}{r(s)^2 + h^2}$, logo $v'(s) = 0$ implica em $v(s)\tau(s) > 0$. Ainda, por (1.4) tem-se $r' = \frac{\tau}{r}$. Aplicando agora a derivada em (3.9):

$$\begin{aligned} k(s) &= \frac{\tau(s)^3 + h^2\tau(s) - v(s)}{r(s)^2 + h^2} \\ k'(s) &= \frac{(3\tau(s)^2\tau'(s) + h^2\tau'(s) - v'(s))(r(s)^2 + h^2) - 2r(s)r'(s)(\tau(s)^3 + h^2\tau(s) - v(s))}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) &= \frac{3\tau(s)^2\tau'(s)r(s)^2 + h^2\tau'(s)r(s)^2 - v'(s)r(s)^2 + 3\tau(s)^2\tau'(s)h^2 + h^4\tau'(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ &\quad - \frac{v'(s)h^2 - 2r(s)r'(s)\tau(s)^3 - 2r(s)r'(s)h^2\tau(s) + 2r(s)r'(s)v(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) &= \frac{3\tau(s)^2r(s)^2 + h^2r(s)^2 + 3\tau(s)^2h^2 + h^4 - 2\tau(s)^4 - 2h^2\tau(s)^2 + 2\tau(s)v(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) &= \frac{3\tau(s)^2(\tau(s)^2 + v(s)^2) + h^2r(s)^2 + \tau(s)^2h^2 + h^4 - 2\tau(s)^4 + 2\tau(s)v(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) &= \frac{\tau(s)^4 + 3\tau(s)^2v(s)^2 + h^2r(s)^2 + \tau(s)^2h^2 + h^4 + 2\tau(s)v(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2} > 0, \end{aligned}$$

conclui-se que $k'(s) > 0$, então k tem no máximo um ponto em que se anula e possui valores negativos antes deste ponto e positivos depois dele.

Além disso, Observe que τ e k não se anulam simultaneamente, uma vez que, se $\tau(s) = \langle X(s), T(s) \rangle = 0$ então $\nu(s) = \langle X(s), N(s) \rangle \neq 0$ e $\tau(s) = 0$ implica que $k(s) = \frac{-\nu(s)}{\nu(s)^2 + h^2} \neq 0$.

Consequentemente, como $\nu' = -\tau k$ então ν tem no máximo dois extremos, uma vez que só possui dois pontos críticos e, com isso, tem um limite (possivelmente infinito) em cada direção.

Passemos agora à análise de τ . Se $\tau'(s) = 0$, então por (3.10) obtém-se que $\tau(s)\nu(s) = -1$ implica $\nu(s) = \frac{-1}{\tau(s)}$ e ainda $\tau(s)\nu(s) = k(s)\nu(s) = -1 = \tau(s)\nu(s) \Rightarrow \tau(s) = k(s)$ sendo assim, derivando $\tau' = 1 + k\nu$ e aplicando neste ponto, temos:

$$\tau''(s) = k'(s)\nu(s) + k(s)\nu'(s),$$

$$\tau''(s) = \frac{-k'(s)}{\tau(s)} - k(s)^2\tau(s),$$

$$\tau''(s) = \frac{-k'(s) - k(s)^2\tau(s)^2}{\tau(s)},$$

$$\tau''(s) = -\frac{k'(s) + \tau(s)^4}{\tau(s)}$$

Vamos agora verificar que $k' + \tau^4 > 0$. Usando (3.9):

$$k(s) = \frac{\tau(s)^3 + h^2\tau(s) - \nu(s)}{r(s)^2 + h^2}$$

$$k'(s) = \frac{(3\tau(s)^2\tau'(s) + h^2\tau'(s) - \nu'(s))(r(s)^2 + h^2) - 2r(s)r'(s)(\tau(s)^3 + h^2\tau(s) - \nu(s))}{(r(s)^2 + h^2)^2}$$

$$k'(s) = \frac{3\tau(s)^2\tau'(s)r(s)^2 + h^2\tau'(s)r(s)^2 - \nu'(s)r(s)^2 + 3\tau(s)^2\tau'(s)h^2 + h^4\tau'(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2} -$$

$$\frac{\nu'(s)h^2 - 2r(s)r'(s)\tau(s)^3 - 2r(s)r'(s)h^2\tau(s) + 2r(s)r'(s)\nu(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2}$$

$$k'(s) = \frac{-\nu'(s)r(s)^2 - \nu'(s)h^2 - 2\tau(s)^4 - 2h^2\tau(s)^2 + 2\tau(s)\nu(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2}$$

$$k'(s) = \frac{k(s)\tau(s)(\tau(s)^2 + \nu(s)^2) + k(s)\tau(s)h^2 - 2\tau(s)^4 - 2h^2\tau(s)^2 + 2\tau(s)\nu(s)}{(r(s)^2 + h^2)^2}$$

$$k'(s) = \frac{\tau(s)^4 + 1 + \tau(s)^2 h^2 - 2\tau(s)^4 - 2h^2 \tau(s)^2 - 2}{(r(s)^2 + h^2)^2}.$$

Agora somando com $\tau(s)^4$, obtém-se:

$$\begin{aligned} k'(s) + \tau(s)^4 &= -\frac{\tau(s)^4 + 1 + \tau(s)^2 h^2}{(r(s)^2 + h^2)^2} + \tau(s)^4 \\ k'(s) + \tau(s)^4 &= -\frac{\tau(s)^4 + 1 + \tau(s)^2 h^2 - \tau(s)^4 (r(s)^4 + 2r(s)^2 h^2 + h^4)}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) + \tau(s)^4 &= \frac{-\tau(s)^4 - 1 - \tau(s)^2 h^2 + \tau(s)^4 r(s)^4 + 2\tau(s)^4 r(s)^2 h^2 + \tau(s)^4 h^4}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) + \tau(s)^4 &= \frac{-\tau(s)^4 - 1 - \tau(s)^2 h^2 + \tau(s)^4 (\tau(s)^2 + \nu(s)^2)^2}{(r(s)^2 + h^2)^2} + \\ &\quad + \frac{2\tau(s)^4 (\tau(s)^2 - \nu(s)^2) h^2 + \tau(s)^4 h^4}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) + \tau(s)^4 &= \frac{-\tau(s)^4 - 1 - \tau(s)^2 h^2 + \tau(s)^8 + 2\tau(s)^6 \nu(s)^2}{(r(s)^2 + h^2)^2} + \\ &\quad + \frac{\nu(s)^4 \tau(s)^4 + 2\tau(s)^6 h^2 + 2\tau(s)^4 \nu(s)^2 h^2 + \tau(s)^4 h^4}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) + \tau(s)^4 &= \frac{-\tau(s)^4 - 1 - \tau(s)^2 h^2 + \tau(s)^8 + 2\tau(s)^4 + 1 + 2\tau(s)^6 h^2 + 2\tau(s)^2 h^2 + \tau(s)^4 h^4}{(r(s)^2 + h^2)^2} \\ k'(s) + \tau(s)^4 &= \frac{\tau(s)^4 + \tau(s)^2 h^2 + \tau(s)^8 + 2\tau(s)^6 h^2 + \tau(s)^4 h^4}{(r(s)^2 + h^2)^2} > 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, o sinal de τ'' depende apenas de $\tau(s)$, de tal forma que τ atinge seu mínimo local em s se $\tau(s) < 0$ e atinge seu máximo local se $\tau(s) > 0$. Como τ tem no máximo um zero, isso significa que τ tem no máximo dois extremos e, portanto, possui limite (possivelmente infinito) em cada direção. \square

Lema 3.4. A relação $\frac{\nu}{\tau}$ é decrescente quando τ e ν são positivos.

Demonstração. Segue diretamente da derivada de $\frac{\nu}{\tau}$. Temos que,

$$\frac{d}{ds} \frac{\nu}{\tau} = \frac{\nu' \tau - \nu \tau'}{\tau^2}.$$

Aplicando (3.10), segue que

$$\frac{d v}{d s \tau} = \frac{(\tau v - \tau^4 - \tau^2 h^2) \tau - v(\tau^2 + h^2 + \tau^3 v + h^2 \tau v)}{\tau^2(r^2 + h^2)}$$

$$\frac{d v}{d s \tau} = \frac{\tau^2 v - \tau^5 - \tau^3 h^2 - \tau^2 v - h^2 v - \tau^3 v^2 - h^2 \tau v^2}{\tau^2(r^2 + h^2)}$$

$$\frac{d v}{d s \tau} = -\frac{\tau^5 + \tau^3 v^2 + \tau^3 h^2 + h^2 \tau v^2 + h^2 v}{\tau^2(r^2 + h^2)}.$$

□

Lema 3.5. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} v = \mp\infty$.

Demonstração. Como o sistema (3.10) não possui pontos de equilíbrio, τ e v não convergem simultaneamente para nenhum valor de s . Assuma por absurdo que $\lim_{s \rightarrow \infty} v$ é finito. Como não há pontos de equilíbrio, $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau$ não pode ser finito, então ele deve ser ∞ ou $-\infty$. Mas por (3.9)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} k &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau^2(\tau + \frac{h^2}{\tau}) - \frac{v}{\tau^2}}{\tau^2(1 + \frac{v^2 + h^2}{\tau^2})} \\ &= \pm\infty, \end{aligned}$$

isso implica que k vai respectivamente para ∞ ou $-\infty$ e, portanto, $v' = -k\tau$ vai para $-\infty$, uma contradição.

Assumindo por contradição que $\lim_{s \rightarrow \infty} v = \infty$. Se $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau = -\infty$, então por (3.9), a partir de algum momento teremos $k < 0$, uma vez que seu sinal é determinado apenas pelo numerador e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tau(\tau^2 + h^2) - v = \lim_{s \rightarrow \infty} \tau(\tau^2 + h^2) - \lim_{s \rightarrow \infty} v = -\infty - \infty.$$

Portanto, $v' = -k\tau < 0$, uma contradição. Suponha que τ tenha um limite finito, por (3.9), temos que temos que eventualmente $k < 0$, pois da mesma forma seu sinal é determinado apenas pelo numerador e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tau(\tau^2 + h^2) - v = \lim_{s \rightarrow \infty} \tau(\tau^2 + h^2) - \lim_{s \rightarrow \infty} v = \text{const.} - \infty,$$

e desde que $-k\tau = v' > 0$, τ eventualmente se torna positivo. Mas o Lema 3.4 então nos dá uma estimativa $v \leq C\tau$, já que $\frac{v}{\tau}$ é decrescente então τ é forçado a ir para ∞ , uma contradição.

Finalmente, assuma que τ vai para ∞ , então, tem-se que τ e v são positivos e novamente pelo Lema 3.4, obtemos a estimativa $v \leq C\tau$. Por (3.9), isso implica $k \rightarrow \infty$, ja que,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} k &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2} \\ &\geq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{\tau^2 + C^2\tau^2 + h^2} \\ &\geq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - C\tau}{\tau^2 + C^2\tau^2 + h^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tau^2(\tau + \frac{h^2}{\tau}) - \frac{C}{\tau}}{\tau^2(1 + C^2 + \frac{h^2}{\tau^2})} = \infty, \end{aligned}$$

e, portanto, $v' = -k\tau \rightarrow -\infty$, uma contradição, pois $v \rightarrow \infty$. □

Lema 3.6. τ tem um limite finito em cada direção.

Demonstração. Se $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau = \infty$, então, pelo Lema 3.5, eventualmente $1 + \tau v < 0$ e por (3.10), $\tau' < 0$, uma contradição. De modo similar Se $\lim_{s \rightarrow \infty} \tau = -\infty$, então eventualmente $1 + \tau v > 0$ e por (3.10), $\tau' > 0$, uma contradição. O limite na outra direção, segue por simetria. □

Lema 3.7. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} k = 0^\pm$.

Demonstração. Tendo que por (3.9), $k = \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2}$, então fazendo o limite com $s \rightarrow \infty$ e tendo em mente os Lemas 3.5 e 3.6, então:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} k &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau(\tau^2 + h^2) - v}{r^2 + h^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{v(\frac{\tau(\tau^2 + h^2)}{v} - 1)}{v(\frac{\tau^2}{v} + v + \frac{h^2}{v})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

O limite na outra direção, segue por simetria. □

Lema 3.8. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = \infty$ e r tem exatamente um extremo, um mínimo global.

Demonstração. A primeira afirmação segue dos Lemas 3.5 e 3.6, uma vez que $r^2 = \tau^2 + v^2$, então $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = \sqrt{\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tau^2 + \lim_{s \rightarrow \pm\infty} v^2} = \infty$. O segundo decorre do fato de que $\frac{d}{ds}r =$

$\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \nu^2}}$ e a observação na prova do Lema 3.3 de que τ tem no máximo um zero, com isso r possui apenas um ponto crítico e como $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = \infty$, então este é um ponto de mínimo. \square

Observe que como $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = \infty$ e é contínua, então r tem que ter pelo menos um ponto crítico, ou seja τ se anula ao menos uma vez. Observando agora que k é contínua e que k atinge valores negativos quando se aproxima de $-\infty$ e atinge valores positivos quando se aproxima de ∞ , então k se anula ao menos uma vez.

Uma consequência direta do Lema 3.8 é que X tem um ponto único mais próximo da origem e sua trajetória consiste em dois ramos saindo deste ponto e indo estritamente para o infinito. Observando que cada ramo não possuem auto-intersecção, já que em caso contrário teríamos que um ramo iria atingir mais de uma vez a mesma distância em relação a origem, fazendo assim com que r possuísse mais de um ponto crítico. Assim, cada um desses ramos separadamente está propriamente mergulhado, mas eles podem se cruzar, uma vez que a distância em relação a origem dos ramos de X podem atingir o mesmo valor uma vez que $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = \infty$. O limite da direção de crescimento dos ramos é dada pelo seguinte lema:

Iremos analisar agora o comportamento do ângulo tangencial polar, definido pelo vetor posição X e o vetor tangente à curva T .

Lema 3.9. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{rT}{X} = \pm i$.

Demonstração. observando que:

$$\frac{rT}{X} = \frac{rT}{(\tau + i\nu)T} = \frac{r}{\tau + i\nu} \frac{\tau - i\nu}{\tau - i\nu} = \frac{r(\tau - i\nu)}{r^2} = \frac{\tau - i\nu}{r}, \quad (3.11)$$

sendo assim, basta calcular $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau - i\nu}{r}$, usando os Lemas 3.5 e 3.6, tem-se que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tau - i\nu}{r} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tau}{r} - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{i\nu}{r} = - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{i\nu}{|\nu|} = i$$

e

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\tau - i\nu}{r} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\tau}{r} - \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{i\nu}{r} = - \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{i\nu}{|\nu|} = -i.$$

\square

Agora, seja ϕ o ângulo de X , ou seja, $X = re^{i\phi}$. Então temos o seguinte.

Lema 3.10. $\frac{d\phi}{d \ln r} = r \frac{d\phi/ds}{dr/ds}$

Demonstração. Sabendo que $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} r = \infty$ e que $r(s)$ tem no máximo um ponto crítico s_0 , então podemos inverter $r(s)$ em dois intervalos $(-\infty, s_0)$ e (s_0, ∞) .

Assim, como $X = re^{i\phi}$, então podemos escrever ϕ como função de r e; como $\ln r$ é injetiva, podemos ter ϕ como função de $\ln r$, sendo assim:

$$\frac{d\phi}{d\ln(r)} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dr} \frac{dr}{d\ln r}.$$

Mas como $\frac{d\ln r}{dr} = \frac{1}{r}$, então pelo teorema da função inversa $\frac{dr}{d\ln r} = r$, portanto:

$$\frac{d\phi}{d\ln(r)} = r \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dr}.$$

□

Lema 3.11. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \phi = +\infty$

Demonstração. Primeiramente provaremos que $\phi' = -\frac{v}{r^2}$, sendo assim:

$$\begin{aligned} X &= re^{i\phi} \\ X' &= r'e^{i\phi} + ri\phi'e^{i\phi} \\ T &= \frac{\tau X}{r} + r\phi' \frac{iX}{r} \\ \langle T, T \rangle &= \frac{\tau \langle T, X \rangle}{r} + \phi' \langle T, iX \rangle \\ 1 &= \frac{\tau \tau}{r r} - \phi' v \\ \phi' v &= \frac{\tau^2}{r^2} - 1 \\ \phi' v &= \frac{r^2 - v^2}{r^2} - 1 \\ \phi' v &= 1 - \frac{v^2}{r^2} - 1 \\ \phi' &= -\frac{v}{r^2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, como $\frac{d\phi}{d\log(r)} = r \frac{d\phi/ds}{dr/ds} = r \frac{-v/r^2}{\tau/r} = -\frac{v}{\tau}$, que vai para ∞ quando $s \rightarrow \infty$ e para $-\infty$ quando $s \rightarrow -\infty$, como pelo Lema 3.8 $r \rightarrow \infty \Rightarrow \log(r) \rightarrow \infty$, então $\frac{d\phi}{d\log(r)} \rightarrow \infty$, eventualmente $\phi > \log(r)$, seguindo assim o resultado. □

Isto significa que cada ramo espiraliza infinitamente muitas vezes em torno da origem. Além disso, temos o seguinte.

Lema 3.12. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \theta = +\infty$. Em outras palavras, $\int_{s_0}^{\infty} k ds = +\infty$ e $\int_{-\infty}^{s_0} k ds = -\infty$, então cada ramo tem uma curvatura total infinita.

Demonstração. Basta observar que

$$X = (\tau + i\nu)e^{i\theta}$$

$$X = re^{i\phi}$$

$$(\tau + i\nu)e^{i\theta} = re^{i\phi}$$

$$\log(\tau + i\nu) + i\theta = \log(r) + i\phi$$

$$\log(|\tau + i\nu|) - \log(r) + i \arg(\tau + i\nu) + i\theta = i\phi$$

$$\log(r) - \log(r) + i \arg(\tau + i\nu) + i\theta = i\phi$$

$$\arg(\tau + i\nu) + \theta = \phi.$$

Como $\arg(\tau + i\nu)$ é limitado, então pelo lema anterior, $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \phi = +\infty \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \arg(\tau + i\nu) + \theta = +\infty \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \theta = +\infty$. \square

Isto conclui a prova do Teorema 3.2.

Nossa parametrização para as superfícies helicoidais não permanece válida no caso $h = 0$, mas podemos investigar o que acontece com as curvas geradoras no limite $h \rightarrow 0$. Quando $h \rightarrow 0$, as equações (3.10) e (3.9) tornam-se:

$$k = \frac{\tau^3 - \nu}{r^2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \tau' = \frac{\tau^2(1 + \tau\nu)}{r^2} \\ \nu' = \frac{\nu\tau - \tau^4}{r^2} \end{cases}.$$

Nesse sistema de EDO's, cada ponto no eixo ν , com exceção do ponto $(0, 0)$, é um ponto fixo. Estes pontos fixos correspondem a soluções em que a curva X é um círculo em torno da origem, uma vez que, $\tau = 0$ implica em $r = |\nu| = \text{const.}$ e $k = \frac{-\nu}{r^2} = \text{const.}$, portanto X possui curvatura constante diferente de zero.

As outras trajetórias são encontradas ao notar que a função $\frac{v}{\tau} + \frac{1}{2}r^2$ é constante, uma vez que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{\tau} + \frac{r^2}{2}\right)' &= \frac{v'\tau - v\tau'}{\tau^2} + \tau \\ &= \frac{\left(\frac{\tau v - \tau^4}{r^2}\right)\tau - v\left(\frac{\tau^2 + \tau^3 v}{r^2}\right) + \tau^3}{\tau^2} \\ &= \frac{\tau^2 v - \tau^5 - v\tau^2 - \tau^3 v^2 + r^2 \tau^3}{r^2 \tau^2} \\ &= \frac{\tau^2 v - \tau^5 - v\tau^2 - \tau^3 v^2 + \tau^5 + v^2 \tau^3}{r^2 \tau^2} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, as trajetórias são as curvas algébricas do tipo

$$\frac{v}{\tau} + \frac{\tau^2 + v^2}{2} = a \Rightarrow \frac{2v + \tau^3 + \tau v^2}{2\tau} = a \Rightarrow \tau^3 + \tau v^2 + 2v = 2a\tau,$$

onde a é qualquer constante real, representando a inclinação da trajetória conforme ela passa pela origem, uma vez que, com a trajetória se aproximando da origem, temos $r \rightarrow 0$ e assim $\frac{v}{\tau} \rightarrow a$. A menos que $a = 0$, a curvatura k explode à medida que a trajetória passa pela origem, já que $\frac{v}{\tau} + \frac{1}{2}r^2 = a \Rightarrow r^2 = 2\left(a - \frac{v}{\tau}\right)$ e assim.

$$k = \frac{\tau^3 - v}{r^2} = \frac{\tau\left(\tau^2 - \frac{v}{\tau}\right)}{2\left(a - \frac{v}{\tau}\right)} = \frac{\tau\tau^2}{2\left(a - \frac{v}{\tau}\right)} - \frac{\tau\frac{v}{\tau}}{2\left(a - \frac{v}{\tau}\right)} \xrightarrow{\frac{v}{\tau} \rightarrow a} -\infty.$$

Portanto, só podemos pegar metade da trajetória para criar uma curva suave X . Essa curva X é mergulhada, tem uma extremidade em espiral no infinito e a outra em espiral na origem em um tempo finito, onde sua curvatura explode. Quando $a = 0$, obtemos uma curva X completamente mergulhada, uma vez que, quando a trajetória se aproximar da origem, $\frac{v}{\tau} \rightarrow 0$ e assim $k = \tau$. Estas curvas nos dão uma ideia sobre o comportamento de limitação de nossas curvas geradoras como $h \rightarrow 0$.

3.4 Superfícies helicoidais mínimas

Utilizando a estrutura analítica e geométrica desenvolvida até aqui neste capítulo, faremos nesta seção um estudo das superfícies mínimas helicoidais, analisando o comportamento limite com $h \rightarrow 0$.

Primeiramente suponha que Φ seja uma função suave em $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ e $A \neq 0$. Para cada $h \geq 0$, seja (τ_h, v_h) a solução para o sistema de valor inicial:

$$\begin{cases} \tau'_h = 1 + v_h \Phi(\tau_h, v_h, h) \\ v'_h = -\tau_h \Phi(\tau_h, v_h, h) \\ \tau_h(0) = 0 \\ v_h(0) = A \end{cases} . \quad (3.13)$$

Com (τ_0, v_0) sendo a solução constante $(0, A)$.

Observe que, da equação (3.8), as curvas que geram as superfícies mínimas helicoidais são determinadas por

$$0 = -\frac{h(k(r^2 + h^2) + v)}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

assim,

$$\begin{aligned} 0 &= k(r^2 + h^2) + v \\ k &= \frac{-v}{r^2 + h^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, o sistema bidimensional de EDO's para τ e v torna-se

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tau' = 1 + v \frac{-v}{r^2 + h^2} \\ v' = -\tau \frac{-v}{r^2 + h^2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \tau' = \frac{r^2 + h^2 - v^2}{r^2 + h^2} \\ v' = \frac{\tau v}{r^2 + h^2} \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} \tau' = \frac{\tau^2 + h^2}{r^2 + h^2} \\ v' = \frac{\tau v}{r^2 + h^2} \end{cases} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Observe que o caso limite $h = \infty$ produz a equação $k = 0$. Isso significa que X é apenas uma linha reta e a superfície M se torna um plano, uma superfície mínima mergulhada.

No caso geral, observamos inicialmente que $\frac{v}{\sqrt{\tau^2 + h^2}}$ é constante, uma vez que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} \right)' &= \frac{v' \sqrt{\tau^2 + h^2} - v \frac{\tau \tau'}{\sqrt{\tau^2 + h^2}}}{\tau^2 + h^2} \\ &= \frac{v'(\tau^2 + h^2) - v \tau \tau'}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\frac{\tau v}{r^2 + h^2}(\tau^2 + h^2) - v \tau \frac{\tau^2 + h^2}{r^2 + h^2}}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{v}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} = a,$$

para todo s e alguma constante a . Com isso, temos que $k = -\frac{a^2}{v(1+a^2)}$. De fato

$$\begin{aligned} \frac{v}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} &= a \\ \frac{v}{a} &= \sqrt{\tau^2 + h^2} \\ \frac{v^2}{a^2} &= h^2 + \tau^2 \\ r^2 + h^2 &= \frac{v^2}{a^2} + v^2 \\ &= \frac{v^2(1+a^2)}{a^2}, \end{aligned}$$

com isso tem-se, por (3.14) :

$$\begin{aligned} k &= -\frac{v}{(r^2 + h^2)} \\ &= -\frac{a^2}{v(1+a^2)}. \end{aligned}$$

Como $\tau' = 1 + kv$, temos que $\tau' = \frac{1}{1+a^2}$, logo $\tau = \frac{s}{1+a^2} + \tau_0$, em que $\tau(0) = \tau_0$. Pela seção anterior, vimos que os pontos de equilíbrio quando $h \rightarrow 0$ são dados por $\tau = 0$ e $v = A \neq 0$. Sendo os pontos de equilíbrio as soluções constantes, fazemos $\tau_0 = 0$ e $v(0) = A$.

Assim, sendo $\frac{v}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} = a$, para todo s , temos que

$$a = \frac{v(0)}{\sqrt{\tau^2(0) + h^2}} = \frac{A}{h}.$$

Portanto, obtemos uma expressão de τ dada por

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{1 + \frac{A^2}{h^2}}s \\ &= \frac{h^2}{h^2 + A^2}s.\end{aligned}$$

Resolvendo agora para v, k e θ

$$\begin{aligned}\frac{v}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} &= a \\ v &= a\sqrt{\tau^2 + h^2} \\ v &= \frac{A}{h}\sqrt{\tau^2 + h^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= \int k ds \\ &= \int -\frac{a^2}{v(1+a^2)} ds \\ &= -\int a \frac{ah}{v} \frac{1}{h(1+a^2)} ds \\ &= -\int \frac{A}{h} \frac{A}{\frac{A}{h}\sqrt{h^2 + \tau^2}} \frac{1}{h(1+a^2)} ds \\ &= -\int \frac{A}{h} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{h^2}}} \frac{1}{h(1+a^2)} ds \\ &= -\frac{A}{h} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{h^2}}} \frac{\tau'}{h} ds \\ &= -\frac{A}{h} \int \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} dy \\ &= -\frac{A}{h} \operatorname{arcsenh} \frac{\tau^2}{h^2} + \theta_0.\end{aligned}$$

Com isso, em termos de τ temos que a curva é dada por:

$$X = \left(\tau + i\frac{A}{h}\sqrt{\tau^2 + h^2} \right) e^{-i\frac{A}{h}\operatorname{arcsenh}\frac{\tau}{h} + i\theta_0} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

fazendo $u = \frac{1}{h}\operatorname{arcsenh}\frac{\tau}{h}$, obtem-se:

$$X = \left(h\operatorname{senh}(hu) + i\frac{A}{h}\sqrt{h\operatorname{senh}(hu)^2 + h^2} \right) e^{-iAu + i\theta_0}$$

$$X = (h\operatorname{senh}(hu) + iA\operatorname{cosh}(hu)) e^{-iAu + i\theta_0}.$$

Note que $|A|$ nos fornece a menor distância da curva a partir da origem, uma vez que:

$$|X| = \left| \left(\tau + i\frac{A}{h}\sqrt{\tau^2 + h^2} \right) \right| \left| e^{-i\frac{A}{h}\operatorname{arcsenh}\frac{\tau}{h} + i\theta_0} \right|$$

$$|X| = \sqrt{\tau^2 + \frac{A^2}{h^2}(\tau^2 + h^2)}$$

$$|X| = \sqrt{\tau^2 \left(1 + \frac{A^2}{h^2} \right) + A^2}$$

$$|X| = \sqrt{\left(\frac{h^2 s}{A^2 + h^2} \right)^2 \left(\frac{h^2 + A^2}{h^2} \right) + A^2}$$

$$|X| = \sqrt{\frac{h^2 s^2}{A^2 + h^2} + A^2}$$

$$|X| \geq |A|.$$

Observe que se $A = 0$ então $\tau = s$ e $X = \tau e^{i\theta_0} \Rightarrow X = s e^{i\theta_0}$ ou seja, a curva é apenas uma linha reta passando pela origem e assim, a superfície M é o helicóide, uma superfície mínima mergulhada em \mathbb{R}^3 . Nos outros casos, a curva gira infinitamente em torno da origem, cruzando-se em diversos pontos. A curva X é simétrica em relação a reflexões através da linha através da origem e do ponto $ie^{i\theta_0}$, uma vez que $X = (h\operatorname{senh}(hu) + iA\operatorname{cosh}(hu)) e^{-iAu + i\theta_0}$ e as funções $\operatorname{arcsenh}$ e senh são simétricas em relação a origem e cosh é simétrica em relação ao ponto $(0, 1)$. Observe que, como

$$k = -\frac{a^2}{v(1+a^2)} = -\frac{a^2}{a\sqrt{\tau^2 + h^2}(1+a^2)} = -\frac{\frac{A}{h}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}(1+a^2)},$$

a curvatura nunca muda de sinal, atinge seu máximo absoluto no ponto mais próximo da origem, uma vez que $\tau = \frac{h^2 s}{A^2 + h^2}$ e ainda

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} k = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} -\frac{\frac{A}{h}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}(1 + a^2)} = 0.$$

Observe que por (3.11) o limite do ângulo de crescimento $\frac{rT}{X}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{rT}{X} &= \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau - i\nu}{r} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau - i\frac{A}{h}\sqrt{\tau^2 + h^2}}{\sqrt{\tau^2 \left(1 + \frac{A^2}{h^2}\right) + A^2}} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - i\frac{A}{h}\sqrt{1 + \frac{h^2}{\tau^2}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{A^2}{h^2}\right) + \frac{A^2}{\tau^2}}} \\ &= \frac{1 - i\frac{A}{h}}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{h^2}}} = \frac{h - iA}{\sqrt{h^2 + A^2}}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo o limite $h \rightarrow 0$, as equações (3.14) e (3.15) tornam-se:

$$k = \frac{-\nu}{r^2}, \quad \begin{cases} \tau' = \frac{\tau^2}{r^2} \\ \nu' = \frac{r^2 \nu}{r^2} \end{cases}.$$

Como no caso da superfície de rotação, cada ponto diferente de zero no eixo ν é um ponto fixo desse sistema. As outras trajetórias são encontradas notando-se que a função $\frac{\nu}{\tau}$ é constante, já que,

$$\left(\frac{\nu}{\tau}\right)' = \frac{\tau \frac{\tau \nu}{r^2} - \frac{\tau^2}{r^2} \nu}{\tau^2} = 0$$

de modo que estas trajetórias são linhas retas da forma $v = a\tau$ para alguma constante real a , assim:

$$\begin{aligned} r^2 &= \tau^2 + v^2 \\ &= \tau^2 + a^2\tau^2 \\ &= \tau^2(1 + a^2) \\ \frac{1}{1 + a^2} &= \frac{\tau^2}{r^2} \\ \frac{1}{1 + a^2} &= \tau', \end{aligned}$$

ou seja $\tau = \frac{1}{1 + a^2}s$ então $v = \frac{a}{1 + a^2}s$. Além disso $r^2 = \tau^2(1 + a^2) = \frac{1}{(1 + a^2)^2}s^2(1 + a^2) = \frac{1}{(1 + a^2)}s^2$ e $k = \frac{-v}{r^2} = \frac{-\frac{a}{1 + a^2}s}{\frac{1}{(1 + a^2)}s^2} = \frac{-a}{s}$, então $\theta = -a \log |s|$. Observe que a menos que $a = 0$, a curvatura k explode na origem, portanto a curva X é definida apenas para $s > 0$ (ou $s < 0$) e é dada por:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1 + ia}{1 + a^2} s e^{-ia \log s} = \frac{1 + ia}{1 + a^2} s \frac{1 - ia}{1 - ia} e^{\log s^{-ia}} = \frac{1 + a^2}{(1 + a^2)(1 - ia)} s s^{-ia} \Rightarrow \\ &X = \frac{s^{1 - ia}}{1 - ia} \quad \forall s > 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Essas curvas, têm um ângulo de crescimento constante:

$$\frac{rT}{X} = \frac{\tau - iv}{r} = \frac{\frac{1 - ia}{1 + a^2}s}{\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}s} = \frac{1 - ia}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Aqui, podemos obter a convergência das curvas geradoras para certas curvas circulares correspondentes aos pontos fixos no eixo v , essa convergência pode ser vista diretamente de (3.16). A curva dada por (3.17) também pode ser vista como um limite, Colocando $A = ah$ e $\theta_0 = a \log \frac{2}{h(a^2 + 1)}$ em (3.16) obtemos:

$$\begin{aligned} X &= \left(\tau + ia \sqrt{\tau^2 + h^2} \right) e^{-ia \operatorname{arcsinh} \frac{\tau}{h} + ia \log \frac{2}{h(a^2 + 1)}} \\ X &= \left(\frac{1}{1 + a^2} s + ia \sqrt{\frac{1}{(1 + a^2)^2} s^2 + h^2} \right) e^{-ia \operatorname{arcsinh} \frac{1 + a^2}{h} s + ia \log \frac{2}{h(a^2 + 1)}} \end{aligned}$$

$$X = \left(\frac{1}{1+a^2} s + ia \frac{\sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)}}{(1+a^2)^2} \right) e^{-ia \operatorname{arcsenh} \frac{s}{h(1+a^2)} + ia \log \frac{2}{h(a^2+1)}}.$$

Usando agora a igualdade $\operatorname{arcsenh}(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$:

$$X = \left(\frac{1}{1+a^2} s + ia \frac{\sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)}}{(1+a^2)^2} \right) e^{-ia \log \left(\sqrt{\frac{s^2}{h^2(1+a^2)^2} + 1} + \frac{s}{h(1+a^2)} \right) + ia \log \frac{2}{h(a^2+1)}}$$

$$X = \left(\frac{s + ia \sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)}}{1+a^2} \right) e^{-ia \log \left(\sqrt{\frac{s^2 + h^2(1+a^2)^2}{h^2(1+a^2)^2} + \frac{s}{h(1+a^2)}} \right) + ia \log \frac{2}{h(a^2+1)}}$$

$$X = \left(\frac{s + ia \sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)}}{1+a^2} \right) e^{-ia \log \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)^2}}{h(1+a^2)} \right) + ia \log \frac{2}{h(a^2+1)}}$$

$$X = \left(\frac{s + ia \sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)}}{1+a^2} \right) e^{-ia \log \frac{s + \sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)^2}}{2}} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Assim, quando $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} X &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{s + ia \sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)}}{1+a^2} \right) e^{-ia \log \frac{s + \sqrt{s^2 + h^2(1+a^2)^2}}{2}} \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{s + ia \sqrt{s^2}}{1+a^2} \right) e^{-ia \log \frac{s + \sqrt{s^2}}{2}} \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ &= \left(\frac{1+ia}{1+a^2} \right) s e^{-ia \log \frac{2s}{2}} \quad \forall s > 0 \\ &= \left(\frac{1+ia}{1+a^2} \right) s e^{\log s^{-ia}} \quad \forall s > 0 \\ &= \left(\frac{1}{1-ia} \right) s e^{\log s^{-ia}} \quad \forall s > 0 \\ &= \frac{s^{1-ia}}{1-ia} \quad \forall s > 0, \end{aligned}$$

esta curva converge para a curva dada por (3.17).

3.5 Superfícies helicoidais de curvatura média constante

Nesta seção estudaremos as superfícies helicoidais de curvatura média constante afim de encontrarmos uma parametrização para elas.

Da Equação (3.8) vemos que as superfícies helicoidais da curvatura média constante $H \neq 0$ são dadas pela equação:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{h(k(r^2 + h^2) + v)}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -H(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} &= h(k(r^2 + h^2) + v) \\ -\frac{H(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h} - v &= k(r^2 + h^2) \\ -\frac{H(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} + hv}{h(r^2 + h^2)} &= k. \end{aligned}$$

Observe que no caso limite em que $h \rightarrow \infty$, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} k &= -\frac{H(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} + hv}{h(r^2 + h^2)} \\ \lim_{h \rightarrow \infty} k &= -\frac{h^3(H(\frac{\tau^2}{h^2} + 1)^{\frac{3}{2}} + \frac{v}{h^2})}{h^3(\frac{r^2}{h^2} + 1)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

a equação reduz para $k = -H$. Portanto, como $H \neq 0$ e constante, X é um círculo e a superfície M se torna um cilindro, uma superfície de curvatura média constante mergulhada em \mathbb{R}^3 .

Agora, parametrizando X com $s \mapsto -s$ e redimensionando, se necessário, podemos supor que $H = -1$. Então nós temos o seguinte sistema bidimensional de EDO's para τ e v .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tau' = 1 + vk \\ v' = -\tau k \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \tau' = 1 + \frac{v(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - hv^2}{h(r^2 + h^2)} \\ v' = \frac{-\tau(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} + hv\tau}{h(r^2 + h^2)} \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} \tau' = \frac{h(r^2 + h^2) + v(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - hv^2}{h(r^2 + h^2)} \\ v' = -\frac{hv\tau - \tau(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(r^2 + h^2)} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \tau' = \frac{h(r^2 - v^2 + h^2) + v(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(r^2 + h^2)} \\ v' = -\frac{hv\tau - \tau(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(r^2 + h^2)} \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} \tau' = \frac{(\tau^2 + h^2)(h + v\sqrt{\tau^2 + h^2})}{h(r^2 + h^2)} \\ v' = -\frac{hv\tau - \tau(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h(r^2 + h^2)} \end{cases} & \cdot \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analisemos os pontos de equilíbrio. Inicialmente, observe que $\tau' = \nu' = 0$ é equivalente a $h + \nu\sqrt{\tau^2 + h^2} = 0$ e $h\nu\tau - \tau(\tau^2 + h^2)^{3/2} = 0$. A primeira equação implica em $\nu < 0$. Por outro lado, a segunda equação é equivalente $\tau(h\nu - (\tau^2 + h^2)^{3/2}) = 0$. Se $\nu < 0$, $\nu - (\tau^2 + h^2)^{3/2}$ nunca se anula e assim, devemos ter $\tau = 0$. Segue da primeira equação que $\nu = -1$.

Assim, o sistema tem um único ponto fixo $(0, -1)$, correspondendo a $X = -ie^{\int k ds}$ sendo o círculo unitário traçado no sentido anti-horário, de fato, X é um círculo, ja que:

$$k = \frac{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} + h\nu}{h(r^2 + h^2)}$$

$$k = \frac{(h^2)^{\frac{3}{2}} - h}{h(1 + h^2)}$$

$$k = \frac{h^2 - 1}{1 + h^2},$$

k é constante e diferente de zero.

Para encontrar as outras trajetórias, transformaremos o sistema através de uma mudança de variáveis. Primeiro, defina a seguinte função:

$$\begin{aligned} \Phi_h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \left(x_2 \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}, x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} \right), \end{aligned}$$

em que $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Mostraremos que Φ_h é uma involução, ou seja, $\Phi_h(\Phi_h(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$, e que Φ preserva norma

a) Φ_h é involução: definiremos primeiramente que: $y_1 = x_2 \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}$ e $y_2 = x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}$,

assim,

$$\Phi_h(x_1, x_2) = \left(x_2 \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}, x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} \right),$$

e com isso obtem-se:

$$\begin{aligned}
 \Phi_h(\Phi_h(x_1, x_2)) &= \Phi_h(y_1, y_2) = \left(y_2 \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{y_2^2 + h^2}}, y_1 \frac{h}{\sqrt{y_2^2 + h^2}} \right) \\
 &= \left(x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{\left(x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}\right)^2 + h^2}}, x_2 \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} \frac{h}{\sqrt{\left(x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}\right)^2 + h^2}} \right) \\
 &= \left(x_1 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2} \sqrt{x_1^2 \frac{h^2}{x_2^2 + h^2} + h^2}}, x_2 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2} \sqrt{x_1^2 \frac{h^2}{x_2^2 + h^2} + h^2}} \right) \\
 &= \left(x_1 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2} \sqrt{\frac{x_1^2 h^2 + h^2 x_2^2 + h^4}{x_2^2 + h^2}}}, x_2 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2} \sqrt{\frac{x_1^2 h^2 + h^2 x_2^2 + h^4}{x_2^2 + h^2}}} \right) \\
 &= \left(x_1 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2} \sqrt{\frac{h^2(r^2 + h^2)}{x_2^2 + h^2}}}, x_2 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2} \sqrt{\frac{h^2(r^2 + h^2)}{x_2^2 + h^2}}} \right) \\
 &= \left(x_1 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{h\sqrt{r^2 + h^2}}, x_2 \frac{h\sqrt{r^2 + h^2}}{h\sqrt{r^2 + h^2}} \right) = (x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

b) Φ_h **preserva norma:** uma vez que,

$$\begin{aligned}
 |\Phi_h(x_1, x_2)| &= \left| \left(x_2 \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}, x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} \right) \right| \\
 &= \sqrt{x_2^2 \frac{x_1^2 + x_2^2 + h^2}{x_2^2 + h^2} + x_1^2 \frac{h^2}{x_2^2 + h^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{x_2^2 x_1^2 + x_2^4 + x_2^2 h^2 + x_1^2 h^2}{x_2^2 + h^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{x_1^2(x_2^2 + h^2) + x_2^2(x_2^2 + h^2)}{x_2^2 + h^2}} \\
 &= |(x_1, x_2)|.
 \end{aligned}$$

Note também, que Φ_∞ é apenas uma reflexão sobre a reta $x_1 = x_2$, ja que:

$$\begin{aligned}
 \Phi_\infty &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left(x_2 \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}, x_1 \frac{h}{\sqrt{x_2^2 + h^2}} \right) \\
 \Phi_\infty &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left(x_2 \frac{\sqrt{\frac{r^2}{h^2} + 1}}{\sqrt{\frac{x_2^2}{h^2} + 1}}, x_1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x_2^2}{h^2} + 1}} \right) \\
 \Phi_\infty &= (x_2, x_1).
 \end{aligned}$$

Considere o par (x, y) dado por

$$(x, y) = \Phi_h(v, \tau) = \left(\tau \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}}, v \frac{h}{\sqrt{\tau^2 + h^2}} \right),$$

e assim, usando (3.19) para obter as derivadas de (x, y) temos:

$$\begin{cases} x = \tau \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{\tau^2 + h^2}}, \\ y = v \frac{h}{\sqrt{\tau^2 + h^2}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \tau' \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{\tau^2+h^2}} + \tau \frac{\tau(\tau^2+h^2) - \tau\tau'(r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}\sqrt{\tau^2+h^2}(\tau^2+h^2)} \\ y' = \nu' \frac{h}{\sqrt{\tau^2+h^2}} - \nu \frac{h\tau\tau'}{\sqrt{\tau^2+h^2}(\tau^2+h^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\tau^2+h^2}(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h\sqrt{r^2+h^2}} + \tau^2 \frac{(\tau^2+h^2) - \frac{(\tau^2+h^2)(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h}}{\sqrt{r^2+h^2}\sqrt{\tau^2+h^2}(\tau^2+h^2)} \\ y' = \frac{h\tau\nu - \tau(\tau^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}{(r^2+h^2)\sqrt{\tau^2+h^2}} - \nu \frac{\tau(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{\sqrt{\tau^2+h^2}(r^2+h^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\tau^2+h^2}(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h\sqrt{r^2+h^2}} + \tau^2 \frac{h(\tau^2+h^2) - (\tau^2+h^2)(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h(\tau^2+h^2)\sqrt{r^2+h^2}\sqrt{\tau^2+h^2}} \\ y' = -\frac{\tau(\tau^2+h^2) + \nu^2\tau}{(r^2+h^2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\tau^2+h^2}(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{h\tau^2 - \tau^2(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h\sqrt{r^2+h^2}\sqrt{\tau^2+h^2}} \\ y' = -\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{(\tau^2+h^2)(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu) + h\tau^2 - \tau^2(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h\sqrt{r^2+h^2}\sqrt{\tau^2+h^2}} \\ y' = -\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{(\tau^2+h^2)(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu) + h\tau^2 - \tau^2(h+\sqrt{\tau^2+h^2}\nu)}{h\sqrt{r^2+h^2}\sqrt{\tau^2+h^2}} \\ y' = -\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{h^2 + \sqrt{\tau^2+h^2}h\nu + \tau^2}{\sqrt{r^2+h^2}\sqrt{\tau^2+h^2}} \\ y' = -\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\tau^2+h^2} + h\nu}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ y' = -\tau \end{cases}.$$

Como Φ_h é uma involução, ou seja $\Phi_h^{-1} = \Phi_h$, temos que:

$$(\nu, \tau) = \Phi_h(x, y) = \left(y \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{y^2+h^2}}, x \frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}} \right).$$

Logo:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\left(x\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}}\right)^2 + h^2} + hy\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{y^2+h^2}}}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ y' = -x\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\frac{x^2h^2+h^2(y^2+h^2)}{y^2+h^2}} + hy\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{y^2+h^2}}}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ y' = -x\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{\frac{h^2(x^2+y^2)+h^4}{y^2+h^2}} + hy\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{y^2+h^2}}}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ y' = -x\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\frac{\sqrt{h^2r^2+h^4}+hy\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{y^2+h^2}}}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ y' = -x\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{h+hy}{\sqrt{y^2+h^2}} \\ y' = -x\frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}} \end{cases} .$$

Nos fornecendo assim, que as funções x e y são soluções para o sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}}(1+y) \\ \frac{dy}{ds} = \frac{-hx}{\sqrt{y^2+h^2}} \end{cases} .$$

Agora, introduzindo uma nova variável u tal que $\frac{du}{ds} = \frac{h}{\sqrt{y^2+h^2}}$. Então obtemos um sistema mais simples:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = (1+y) \\ \frac{du}{ds} = -x \end{cases} . \quad (3.20)$$

Resolvendo tal sistema, conclui-se que x e y são funções trigonométricas, onde as soluções são dadas por $(x, y) = (R \cos u, -1 - R \operatorname{senu})$, em que $R \in [0, \infty)$ é uma constante qualquer, cuja as trajetórias consistem em círculos concêntricos ao redor do ponto $(0, -1)$. Agora, as soluções para o sistema original são dadas por $(v, \tau) = \Phi_h(x, y)$ e Φ_h preserva normas, então elas também são periódicas, pois mantém-se a distancia em relação a origem. observando que:

$$|(x, y)| = \sqrt{R^2 \cos^2 u + 1 + 2R \operatorname{senu} + R^2 \operatorname{sen}^2 u} = \sqrt{1 + 2R \operatorname{senu} + R^2}.$$

Atinge seu valor máximo $R + 1$ quando $\operatorname{senu} = 1$ e seu valor mínimo $|R - 1|$ quando $\operatorname{senu} = -1$, como Φ_h é preserva norma, cada solução de (v, τ) está contida em um anel com centro na origem, raio interno $|R - 1|$ e o raio externo $R + 1$ e toca cada fronteira uma vez em cada período, ainda, como $|X| = \sqrt{\tau^2 + v^2}$ então a curva correspondente X também também está contida no mesmo anel e consiste em repetidas excursões idênticas entre os dois limites do anel e passa pela origem se e somente se $R = 1$.

Para obter uma descrição mais completa, definimos uma excursão da curva como sendo uma parte da trajetória de X que começa no limite externo do anel, passa pelo limite interno e volta para o limite externo, correspondendo à trajetória (τ, v) passando por um período.

Examinaremos agora uma única excursão inteira da curva.

Considerando $\Delta\theta$ como a diferença entre os valores do ângulo de tangência antes e depois de uma excursão completa, existem apenas duas possibilidades:

1. A diferença angular $\Delta\theta$ é da forma $\frac{p2\pi}{q}$ para p e q inteiros positivos relativamente primos. Então, depois de q excursões, a curva X fecha. Assim, X é uma curva fechada com simetria q rotacional (pois a curva precisa percorrer q excursões distintas para fechar) e a superfície é um cilindro imerso. O número p é chamado de número de rotação de X .
2. A diferença angular $\Delta\theta$ não é da forma $\frac{p2\pi}{q}$. Nestes casos a curva X nunca fecha e percorre infinitas excursões e com isso, torna-se densa no anel.

No restante desta seção, encontramos todos os valores possíveis de $\Delta\theta$ para obter uma classificação das curvas imersas fechadas mencionadas acima.

Como $d\theta = kds$, $\Delta\theta$ é dado pela integração de k em um período:

$$\Delta\theta = \int_{s_0}^{s_1} kds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - hv}{h(r^2 + h^2)} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\left(\left(x \frac{h}{\sqrt{y^2 + h^2}} \right)^2 + h^2 \right)^{\frac{3}{2}} - hy \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2}}}{h(r^2 + h^2)} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{s_0}^{s_1} \frac{\left(\frac{x^2 h^2 + h^2 (y^2 + h^2)}{y^2 + h^2} \right)^{\frac{3}{2}} - hy \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2}}}{h(r^2 + h^2)} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\left(\frac{h^2 (r^2 + h^2)}{y^2 + h^2} \right)^{\frac{3}{2}} - hy \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2}}}{h(r^2 + h^2)} ds = \\
&= \int_{s_0}^{s_1} \frac{\frac{h^2 \sqrt{r^2 + h^2}^3}{\sqrt{y^2 + h^2}^3} - y \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2}}}{r^2 + h^2} ds.
\end{aligned}$$

Fazendo agora o mesma mudança de coordenadas de (3.20), em que $\frac{du}{ds} = \frac{h}{\sqrt{y^2 + h^2}}$, então:

$$\begin{aligned}
\int_{s_0}^{s_1} \frac{\frac{h^2 \sqrt{r^2 + h^2}^3}{\sqrt{y^2 + h^2}^3} - y \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2}}}{r^2 + h^2} ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h^2 \sqrt{r^2 + h^2}^3 - y \sqrt{r^2 + h^2} (y^2 + h^2)}{r^2 + h^2 \sqrt{y^2 + h^2}^3} \frac{\sqrt{y^2 + h^2}}{h} du = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{h \sqrt{h^2 + r^2}}{y^2 + h^2} - \frac{y}{h \sqrt{h^2 + r^2}} \right) du.
\end{aligned}$$

$$\Delta \theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{h \sqrt{h^2 + 1 + 2R \operatorname{senu} + R^2}}{(1 + R \operatorname{senu})^2 + h^2} + \frac{1 + 2R \operatorname{senu}}{h \sqrt{h^2 + 1 + 2R \operatorname{senu} + R^2}} \right) du.$$

Claramente, $\Delta \theta$ é suave em $(R, h) \in [0, \infty) \times (0, \infty]$. Note que quando $h = \infty, k = 1$ como observado em (3.18) então $\Delta \theta = 2\pi$ para todos os valores de R e portanto $\frac{\partial \Delta \theta}{\partial R} = 0$.

É conveniente também trabalhar com $\Delta \phi$, onde ϕ é o ângulo da curva X , ou seja, $X = re^{i\phi}$. Como $X = (\tau + i\nu)e^{i\theta}$, é possível obter uma relação entre $\Delta \phi$ e $\Delta \theta$, notando que a trajetória (τ, ν) espiraliza no sentido horário em torno da origem quando $R > 1$ passa pela origem quando $R = 1$ e não faz nenhum dos dois quando $0 \leq R < 1$, como ilustrado na Figura 3.1

Observe que $\arg(\tau + i\nu) + \theta = \phi$. Logo $\Delta \arg(\tau + i\nu) + \Delta \theta = \Delta \phi$ e assim, quando a trajetória dá uma volta completa em torno da origem no sentido anti-horário temos $\Delta \arg(\tau + i\nu) = -2\pi$, ao percorrer uma trajetória que passa pela origem, a curva se encontra apenas em um lado do eixo x , assim segue que $\Delta \arg(\tau + i\nu) = -\pi$. Por fim, ao completar uma volta sem passar pela origem, nem em trono dela observe que $\arg(\tau + i\nu)$ aumenta quando a curva esta próxima do limite externo e diminui na mesma proporção quando esta próxima do limite interno e neste caso $\Delta \arg(\tau + i\nu) = 0$. Concluimos então que:

$$\Delta \phi = \begin{cases} \Delta \theta & \text{se } 0 < R < 1, \\ \Delta \theta - \pi & \text{se } R = 1, \\ \Delta \theta - 2\pi & \text{se } R > 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

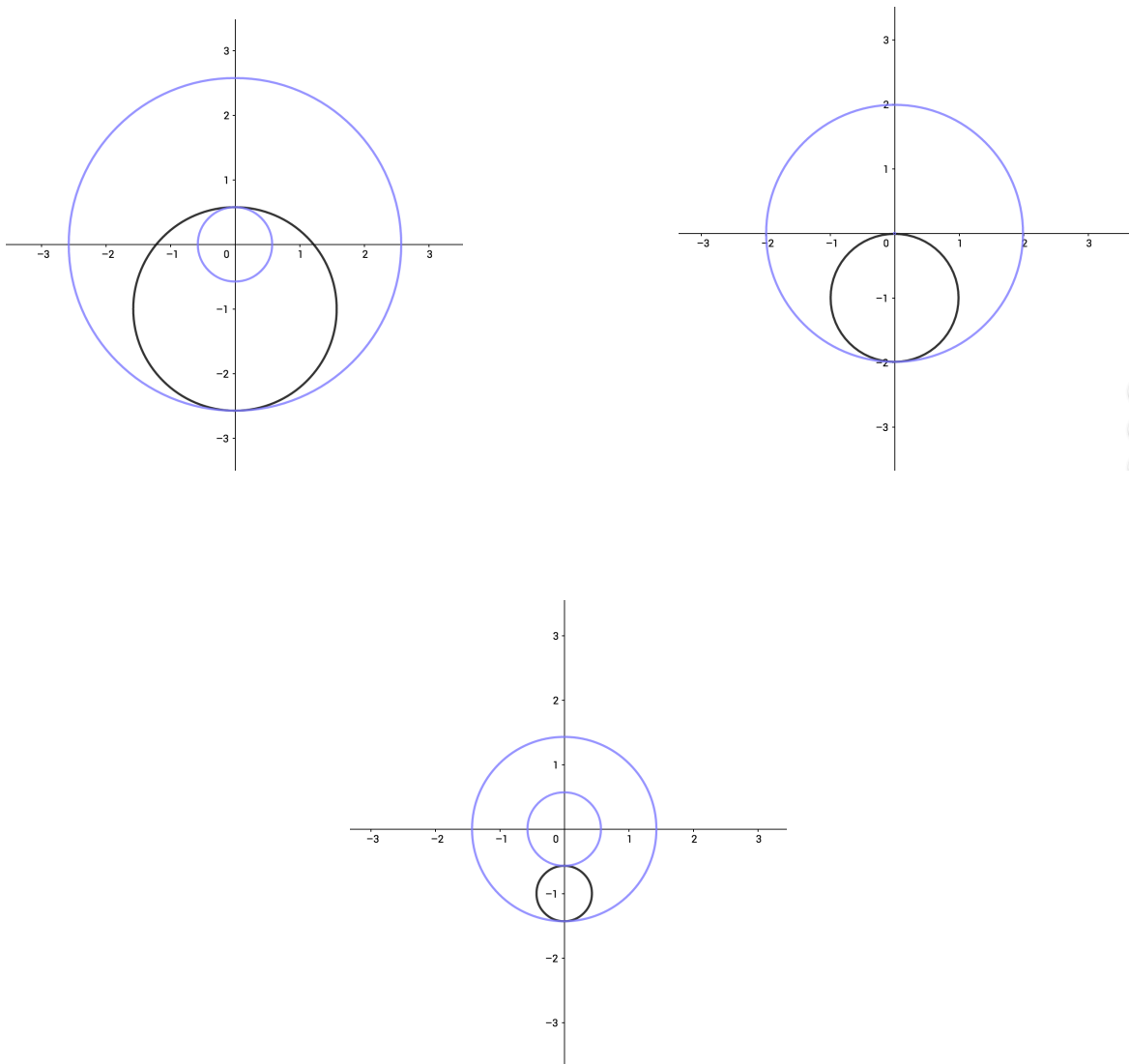


Figura 3.1 Trajetória da curva em coordenadas (x, y) para $R > 1$, $R = 1$ e $R < 1$

Sabendo de (3.12) que $d\phi = -\frac{v}{r^2}ds$, então $\Delta\phi$ é dado pela integração em um período por:

$$\Delta\phi = \int_{s_0}^{s_1} -\frac{v}{r^2}ds = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{y\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{y^2+h^2}} \frac{\sqrt{y^2+h^2}}{h} du = \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{y\sqrt{r^2+h^2}}{r^2h} du = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+R \operatorname{senu})\sqrt{1+2R \operatorname{senu}+R^2+h^2}}{(1+2R \operatorname{senu}+R^2)h} du. \quad (3.22)$$

Lema 3.13. Quando $R = 0$, $\Delta\phi$ assume o valor $2\pi \frac{\sqrt{h^2+1}}{h}$.

Demonstração. Segue diretamente fazendo $R = 0$:

$$\Delta\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{1+h^2}}{h} du = 2\pi \frac{\sqrt{h^2+1}}{h}. \quad \square$$

Lema 3.14. Quando $R = 1$, $\Delta\phi$ assume o valor $2 \frac{\sqrt{h^2+4}}{h} E\left(\frac{2}{\sqrt{h^2+4}}\right)$, onde $E(e)$ é a integral elíptica completa do segundo tipo definida como:

$$E(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

O que nos fornece $\frac{1}{4}$ do comprimento de uma elipse com eixo semi-maior 1 e excentricidade e .

Demonstração. Quando $R = 1$ na Equação (3.22) obtemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2+2\operatorname{sen}u+h^2}}{2h} du = \frac{\sqrt{h^2+4}}{h} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2+2\operatorname{sen}u+h^2}}{2\sqrt{h^2+4}} du.$$

Agora, fazendo $u = 2\theta$:

$$\frac{\sqrt{h^2+4}}{h} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2+2\operatorname{sen}2\theta+h^2}}{\sqrt{h^2+4}} d\theta,$$

e como:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2\theta) d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(2\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se:

$$\frac{\sqrt{h^2+4}}{h} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2+2-4\operatorname{sen}^2\theta+h^2}}{\sqrt{h^2+4}} d\theta$$

$$\frac{\sqrt{h^2+4}}{h} \int_0^\pi \sqrt{\frac{4+h^2-4\operatorname{sen}^2\theta}{h^2+4}} d\theta$$

$$\frac{\sqrt{h^2+4}}{h} \int_0^\pi \sqrt{1-\frac{4}{h^2+4}\operatorname{sen}^2\theta} d\theta.$$

□

O valor de $E\left(\frac{2}{\sqrt{h^2+4}}\right)$ no lema é a metade do comprimento de uma elipse com semi-eixo menor 1 e semi-eixo maior $\frac{\sqrt{h^2+4}}{h}$.

Lema 3.15. Para cada h , $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta\phi = 0$.

Demonstração. Observe que se $R \geq 2$, então $\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2} \geq \sqrt{1+4\operatorname{senu}+4} \geq 1$, então o integrando em (3.22) é tal que $\frac{(1+R\operatorname{senu})\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2}}{(1+2R\operatorname{senu}+R^2)h} < \frac{\sqrt{h^2+1}}{h}$. Portanto pelo teorema da convergência dominada:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta\phi = \int_{-\pi}^\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(1+R\operatorname{senu})\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2}}{(1+2R\operatorname{senu}+R^2)h} du =$$

$$= \int_{-\pi}^\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{R} + \operatorname{senu})\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{2}{R}\operatorname{senu} + 1 + \frac{h^2}{R^2}}}{(\frac{1}{R^2} + \frac{2}{R} + 1)h} du = \int_{-\pi}^\pi \frac{\operatorname{senu}}{h} du = 0.$$

□

Lema 3.16. Para cada h , $\Delta\phi$ é estritamente decrescente em R .

Demonstração. Mostraremos primeiramente que $\frac{\partial}{\partial R}\Delta\phi < 0$ para $R = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_{-\pi}^\pi \frac{(1+R\operatorname{senu})\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2}}{(1+2R\operatorname{senu}+R^2)h} du$$

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{(\operatorname{senu}\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2} + (1+R\operatorname{senu})\frac{\operatorname{senu}+R}{\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2}})(1+2R\operatorname{senu}+R^2)h}{(1+2R\operatorname{senu}+R^2)^2h^2}$$

$$- \frac{(2\operatorname{senu}+2R)h(1+R\operatorname{senu})\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2}}{(1+2R\operatorname{senu}+R^2)^2h^2} du$$

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{(\operatorname{senu}(1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2) + (1+R\operatorname{senu})(\operatorname{senu}+R))(1+2R\operatorname{senu}+R^2)h}{(1+2R\operatorname{senu}+R^2)^2h^2\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2}}$$

$$- \frac{(2\operatorname{senu}+2R)h(1+R\operatorname{senu})(1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2)}{(1+2R\operatorname{senu}+R^2)^2h^2\sqrt{1+2R\operatorname{senu}+R^2+h^2}} du$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{sen}u(2+2\operatorname{sen}u+h^2) + (1+\operatorname{sen}u)(\operatorname{sen}u+1))(2+2\operatorname{sen}u)h}{(2+2\operatorname{sen}u)^2 h^2 \sqrt{2+2\operatorname{sen}u+h^2}} \\
& \quad - \frac{(2\operatorname{sen}u+2)h(1+\operatorname{sen}u)(2+2\operatorname{sen}u+h^2)}{(2+2\operatorname{sen}u)^2 h^2 \sqrt{2+2\operatorname{sen}u+h^2}} du \\
& \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}u(2+2\operatorname{sen}u+h^2) + (1+\operatorname{sen}u)^2 - (1+\operatorname{sen}u)(2+2\operatorname{sen}u+h^2)}{(1+\operatorname{sen}u)h\sqrt{2+2\operatorname{sen}u+h^2}} du \\
& \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\operatorname{sen}u+\operatorname{sen}^2u - (2+2\operatorname{sen}u+h^2)}{(1+\operatorname{sen}u)h\sqrt{2+2\operatorname{sen}u+h^2}} du \\
& \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2u - h^2 - 1}{(1+\operatorname{sen}u)h\sqrt{2+2\operatorname{sen}u+h^2}} du < 0.
\end{aligned}$$

Agora, como $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\theta = 0$ e por (3.21) temos $\Delta\theta = \Delta\phi(+2\pi)$ para $R \neq 1$, então $\frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi = 0$ quando $h \rightarrow \infty$, então se $\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi > 0$ segue que $\frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi$ é estritamente crescente a medida que h cresce e atinge seu maior valor quando $h \rightarrow \infty$, logo $\frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi < 0$ para todo R , sendo assim nos resta mostrar que de fato $\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi > 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi &= \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial}{\partial h} \Delta\phi \\
 &= \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + R \operatorname{sen} u) \frac{h}{\sqrt{1+2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2}} (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2) h}{(1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2)^2 h^2} \\
 &\quad - \frac{(1 + R \operatorname{sen} u) \sqrt{1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2} (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2)}{(1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2)^2 h^2} du \\
 &= \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + R \operatorname{sen} u) \left(\frac{h^2}{\sqrt{1+2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2}} - \sqrt{1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2} \right)}{(1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2) h^2} du \\
 &= \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + R \operatorname{sen} u) (h^2 - 1 - 2R \operatorname{sen} u - R^2 - h^2)}{(1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2) h^2 \sqrt{1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2}} du \\
 &= \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\pi}^{\pi} - \frac{(1 + R \operatorname{sen} u)}{h^2 \sqrt{1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2}} du \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} - \frac{\operatorname{sen} u h^2 \sqrt{1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2}}{h^4 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)} \\
 &\quad - \frac{(1 + R \operatorname{sen} u) h^2 \frac{2 \operatorname{sen} u + 2R}{2\sqrt{1+2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2}}}{h^4 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)} du \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} - \frac{\operatorname{sen} u h^2 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2) - (1 + R \operatorname{sen} u) h^2 (\operatorname{sen} u + R)}{h^4 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} du \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} - \frac{\operatorname{sen} u + 2R \operatorname{sen}^2 u + R^2 \operatorname{sen} u + h^2 \operatorname{sen} u}{h^2 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad - \frac{\operatorname{sen} u - R - R \operatorname{sen}^2 u - R^2 \operatorname{sen} u}{h^2 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} du \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-R \operatorname{sen}^2 u - h^2 \operatorname{sen} u + R}{h^2 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} du.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial R} \Delta\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R \cos^2 u}{h^2 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} du - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h^2 \operatorname{sen} u}{h^2 (1 + 2R \operatorname{sen} u + R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} du.$$

O primeiro termo é claramente positivo. Observe que o resultado integração do segundo termo é negativo, uma vez que que o denominador é menor quando $\operatorname{sen} u$ assume valores negativos. \square

Agora, a partir dos lemas anteriores e da Equação (3.21) concluímos que para cada h , $\Delta\theta$ é uma função suave e decrescente de R satisfazendo:

- $\Delta\theta = 2\pi \frac{\sqrt{h^2+1}}{h}$ se $R = 0$ (Pelo Lema 3.17).
- $\Delta\theta = 2 \frac{\sqrt{h^2+4}}{h} E\left(\frac{2}{\sqrt{h^2+4}}\right) + \pi$ se $R = 1$ (Pelo Lema 3.18).
- $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta\theta = 2\pi$ (Pelo Lema 3.19).

Lema 3.17. O índice de X ao redor da origem é dado por $\frac{q\Delta\phi}{2\pi}$

Demonstração. Como o índice $n(\gamma, a)$ de uma curva fechada γ em torno de um ponto $a \in \mathbb{C}$ é dado por:

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz.$$

Então, se s_0 é o valor de s tal que $X(0) = X(s_0)$, para calcular o índice da curva X em torno do 0 basta fazer:

$$\begin{aligned} n(X, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_X \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{s_0} \frac{X'}{X} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{s_0} \frac{r'e^{i\phi} + re^{i\phi}i\phi'}{re^{i\phi}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{s_0} \frac{r'}{r} ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \phi' ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\ln r(s)]_0^{s_0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \phi' ds. \end{aligned}$$

Observe agora que $r(s_0) = r(0)$ e por (3.22), tem-se: $\Delta\phi = \int_{s_0}^{s_1} d\phi$ e ainda, que a curva X fecha depois de concluir q excursões então:

$$\begin{aligned} n(X, 0) &= \frac{1}{2\pi i} (\ln r(s_0) - \ln r(0)) + \frac{1}{2\pi} q \int_{s_0}^{s_1} \phi' ds. \\ &= \frac{q\Delta\phi}{2\pi}. \end{aligned}$$

□

Assim, como o índice de X é dado por $\frac{q\Delta\phi}{2\pi}$ e $\Delta\theta$ é positivo, já que nossa escolha da normal unitária foi que aponta para dentro. Fazendo $H = 1$, temos, com respeito à normal unitária, a que aponta para fora.

Portanto, temos o seguinte teorema. Em que a tricotomia corresponde a $R = 1, R < 1$ e $R > 1$ respectivamente, e

$$\alpha_h = \frac{\sqrt{h^2 + 4}}{\pi h} E \left(\frac{2}{\sqrt{h^2 + 4}} \right) + \frac{1}{2}.$$

Teorema 3.3. Sejam p e q inteiros positivos relativamente primos, de modo que $1 < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{h^2 + 4}}{h}$. Sendo assim, existe uma única curva X imersa e fechada (a menos de rotação), com número de rotação p e simetria q rotacional, de tal modo que gera uma superfície helicoidal com passo h e curvatura média constante $H = 1$ em relação à normal unitária apontando para fora. Além disso,

- se $\frac{p}{q} = \alpha_h$, X passa pela origem,
- se $\frac{p}{q} > \alpha_h$, X tem índice p em torno da origem,
- se $\frac{p}{q} < \alpha_h$, X possui índice $p - q$ em torno da origem.

Demonstração. A existência da curva é garantida pela igualdade $X = (\tau + \nu)e^{i\theta}$, já que, a menos de rotação, θ é unicamente determinado por $\Delta\theta = \frac{p2\pi}{q}$, tão como τ e ν , que pela função Φ_h (que preserva distancias) dependem apenas de R .

Em relação a R , podemos dividir o estudo em apenas três casos:

Caso $R = 1$

Por (3.21) temos que Para $R = 1$, X passa pela origem e

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sqrt{h^2 + 4}}{h} E \left(\frac{2}{\sqrt{h^2 + 4}} \right) &= \Delta\phi \\ 2 \frac{\sqrt{h^2 + 4}}{h} E \left(\frac{2}{\sqrt{h^2 + 4}} \right) &= \Delta\theta - \pi \\ 2 \frac{\sqrt{h^2 + 4}}{h} E \left(\frac{2}{\sqrt{h^2 + 4}} \right) + \pi &= \frac{p2\pi}{q} \\ \frac{\sqrt{h^2 + 4}}{\pi h} E \left(\frac{2}{\sqrt{h^2 + 4}} \right) + \frac{1}{2} &= \frac{p}{q} = \alpha_h. \end{aligned}$$

Para os demais casos usaremos o Lema 3.16 e a prova do Lema 3.12, observando que assim como $\Delta\phi$ é decrescente em R , $\Delta\theta$ e $\frac{p}{q}$ também o são, assim:

Caso $0 < R < 1$

Temos $\frac{p}{q} > \alpha_h$ e por (3.21):

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \Delta\theta \\ \frac{\Delta\phi}{2\pi} &= \frac{p}{q} \\ \frac{q\Delta\phi}{2\pi} &= p.\end{aligned}$$

Caso $R > 1$

Temos $\frac{p}{q} < \alpha_h$ e por (3.21):

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \Delta\theta - 2\pi \\ &= \frac{p2\pi - q2\pi}{q} \\ \frac{q\Delta\phi}{2\pi} &= p - q.\end{aligned}$$

□

Conclusão

Neste trabalho descrevemos a trajetória de superfícies que se movem pelo FCM. Primeiro com o estudo do comportamento de sub-variedades gráficas, obtendo-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} \right) D_{ij}^2 u.$$

Onde $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função que gera a sub-variedade gráfica. com isso, podemos fazer o estudo local de duas hipersuperfícies M e N compactas e sem fronteira que não se interceptam e mostrar que suas respectivas evoluções pelo fluxo também não vão se interceptar (Teorema 2.1).

A continuação, estudamos o caso do fluxo, sobre superfícies, que produzem movimentos auto-similares, se tornando assim invariantes sob movimentos de translação, encolhimento(dilatação) rotação e combinações como os movimentos helicoidais. Assim, descrevemos todos os movimentos auto-similares possíveis de superfícies imersas no espaço Euclidiano sob o FCM e encontramos as equações que devem devem satisfazer, em que os únicos movimentos auto-similares possíveis são os seguintes:

- dilatação de acordo com a função $\sqrt{2bt + 1}$, isto é, encolhimento com velocidade crescente se $b < 0$ e expansão com velocidade decrescente se $b > 0$,
- translação com velocidade constante,
- rotação com velocidade angular constante,
- dilatação de acordo com a função $\sqrt{2bt + 1}$, em conjunto com rotação com velocidade angular proporcional a $\frac{\log(2bt + 1)}{2b}$,
- translação com velocidade constante juntamente com rotação com velocidade angular constante, mas em direções ortogonais.

Em seguida, introduzimos o conceito de superfície helicoidal e encontramos a seguinte parametrização para estas superfícies:

$$F(s, t) = (e^{it}X(s), ht) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Onde h é o passo da superfície $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que denota uma curva parametrizada pelo comprimento de arco definida como:

$$X = (\tau(s) + i\nu(s))e^{i\theta(s)}.$$

Em que $\tau = \langle X, T \rangle$ e $\nu = \langle X, N \rangle$ onde T é a tangente unitária ao longo de X , N sua normal apontando para a esquerda e $\int k(s)ds = \theta'(s)$ com k sendo a curvatura de X .

Deste ponto em diante, salienta-se que o trabalho se concentrou em apenas estudar as propriedades destas curvas, obtendo assim, um método para a construção de superfícies helicoidais. Com estas fórmulas definidas foi possível encontrar uma fórmula para a curvatura média da superfície:

$$H = -\frac{h(k(r^2 + h^2) + \nu)}{(\tau^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Onde r é a distância da curva à origem. Como consideramos o movimento de translação e rotação ortogonais e notando que girar e transladar uma superfície helicoidal são essencialmente o mesmo movimento nestas condições, então podemos concluir da equação do FCM para movimento auto-similares que:

$$-H = \langle AF, n \rangle.$$

Em que R é a matriz geradora do movimento de rotação e n o vetor normal a superfície, assim:

$$-H = \frac{h\tau}{\sqrt{h^2 + \tau^2}}.$$

Em seguida, relacionando as duas fórmulas para a curvatura média, obtemos:

$$\frac{\tau(\tau^2 + h^2) - \nu}{r^2 + h^2} = k.$$

Com isso fomos capazes de encontrar como se comportam as superfícies helicoidais que, sob o FCM, descrevem movimentos auto-similares e também investigamos o comportamento limite das curvas geradoras à medida que o passo do movimento helicoidal vai para 0.

Para concluir este trabalho, foram apresentados mais dois resultados, considerando condições específicas sobre a curvatura média, o primeiro deles foi produzido ao examinamos

as superfícies mínimas helicoidais, onde encontramos sua parametrização e investigamos seu comportamento limite à medida que o passo tende a 0 e o segundo, ao examinamos as superfícies helicoidais de curvatura média constante e encontramos sua parametrização e no Teorema 3.3 provamos a existência e unicidade das curvas (geradoras de superfícies helicoidais) apenas pelo seu número de rotação p e sua simetria q rotacional.

Bibliografia

- [1] Abresch, U. and Langer, J. (1986). The normalized curve shortening flow and homothetic solutions. *J. Differential Geom.*, 23(2):175–196.
- [2] Araújo, K. O., Cui, N., and Pina, R. d. S. (2016). Helicoidal minimal surfaces in a conformally flat 3-space. *Bull. Korean Math. Soc.*, 53(2):531–540.
- [3] do Carmo, M. P. (2015). *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro.
- [4] do Carmo, M. P. and Dajczer, M. (1982). Helicoidal surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Math. J. (2)*, 34(3):425–435.
- [5] Halldorsson, H. P. (2012). Self-similar solutions to the curve shortening flow. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364.
- [6] Halldorsson, H. P. (2013). Helicoidal surfaces rotating/translating under the mean curvature flow. *Geometriae Dedicata*, 162(1):45–65.
- [7] Lieberman, G. M. (1996). *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ.
- [8] Manfio, F. and Santos, J. P. d. (2019). Helicoidal flat surfaces in the 3-sphere. *Mathematische Nachrichten*, 292:127–136.
- [9] MARTÍN, F. and PÉREZ, J. (2014). An introduction to the mean curvature flow. *XXIII International Fall Workshop on Geometry and Physics, held in Granada*. <https://www.ugr.es/jpgarcia/investigacion.html>.
- [10] Martínez, A., dos Santos, J. P., and Tenenblat, K. (2013). Helicoidal flat surfaces in hyperbolic 3-space. *Pacific J. Math.*, 264(1):195–211.
- [11] Palmer, B. and Perdomo, O. M. (2015). Rotating drops with helicoidal symmetry. *Pacific J. Math.*, 273(2):413–441.
- [12] Perdomo, O. M. (2013). Helicoidal minimal surfaces in \mathbf{R}^3 . *Illinois J. Math.*, 57(1):87–104.
- [13] Sylvester, J. (1852). A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4(23):138–142.

- [14] Sáez, M. (2016). Lectures on mean curvature flow. *XIX School of Differential Geometry at IMPA*, pages 7, 38 p. :. <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/Saez-1.pdf>.
- [15] Wunderlich, W. (1952). Beitrag zur kenntnis der minimalschraubflächen. *Compositio Mathematica*, 10:297–311.