



**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE  
PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM ESTRUTURAS  
LEVES: APLICAÇÕES EM COMPÓSITOS E  
METAMATERIAIS**

Por,  
**Daniely Amorim das Neves**

**Brasília, 26 de fevereiro de 2019**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

**INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE  
PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM ESTRUTURAS  
LEVES: APLICAÇÕES EM COMPÓSITOS E  
METAMATERIAIS**

**Daniely Amorim das Neves**

**ORIENTADOR: ADRIANO TODOROVIC FABRO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**BRASÍLIA/DF, FEVEREIRO DE 2019**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DE  
PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM ESTRUTURAS  
LEVES: APLICAÇÕES EM COMPÓSITOS E  
METAMATERIAIS**

POR,

**Daniely Amorim das Neves**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Mestre em Ciências Mecânicas.

**Banca Examinadora**

Prof. Adriano Todorovic Fabro, UnB/ ENM  
(Orientador)

---

Prof<sup>a</sup>. Marcela Rodrigues Machado, Unb/ ENM

---

Prof. Fabrício César Lobato Almeida, UNESP/FCE

---

Brasília, 26 de fevereiro de 2019

## Agradecimentos

*Agradeço primeiramente á Deus pela vida, cuidado e, neste momento, principalmente pela realização deste trabalho.*

*Á minha família pelo amor incondicional, apoio e incentivo. Obrigada aos meus pais Romildes Amorim e Joelson Carlos. Obrigada meu irmão Joelson Junior, sempre comigo.*

*A Lucas Viana pelo amor, carinho, apoio, compreensão e por toda força e coragem nos momentos de dificuldade.*

*As minhas tias Rozenil Rodrigues, Regina Rodrigues e Marley Neves pelo carinho e dedicação.*

*Ao Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro pela orientação, paciência, dedicação e incompatível conhecimento científico que tanto contribuíram neste trabalho e para meu crescimento profissional.*

*Ao Prof. Dr. Luiz Filomeno Fernandes pelo suporte incondicional durante toda minha vida acadêmica, a quem tenho uma grande amizade.*

*Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Fabricio Almeida e Prof<sup>a</sup>. Dr. Marcela Machado, pela disponibilidade e contribuições a este trabalho.*

*Ao grupo NT3D do Instituto Brasil Renato Archer (Campinas-SP, Brasil) pela fabricação das amostras de vigas de metamaterial através do programa ProEXP, e o apoio financeiro do processo CNPq n° 420304 / 2018- 5, processo número 0193.001507 / 2017 da Fundação de Pesquisa do Distrito Federal (FAP-DF) e da Universidade de Brasília.*

*A todos os professores, alunos e funcionários do grupo de dinâmica de sistemas mecânicos do programa de pós-graduação em Ciências Mecânicas da Unb pelas amizades, ensinamentos, incentivos e por promover um ambiente de trabalho agradável.*

*“Consagre ao senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão bem-sucedidos”  
(Provérbios 16:3)*

O constante avanço tecnológico e no processo de manufatura proporcionam o crescimento da utilização de materiais com atributos físicos-mecânicos não alcançados por insumos convencionais, tais como materiais compósitos e metamateriais. Estes materiais apresentam propriedades vibroacústicas superiores em regiões de médias e altas frequências, onde os métodos modais tradicionais não são aplicáveis. Parâmetros como número de onda, velocidade de grupo, densidade modal e potência dissipada caracterizam seu desempenho dinâmico e podem ser analisadas por métodos baseados em propagação de ondas. Diante disto, este trabalho apresenta uma investigação de métodos experimentais de caracterização do comportamento dinâmico de estruturas leves: painel compósito do tipo sanduíche com núcleo de *honeycomb* e vigas de poliamidas com e sem ressonadores mecânicos (metamateriais). Os painéis sanduíches compósitos se destacam devido à suas características de alta resistência combinadas a uma baixa massa específica. Já o metamaterial, destaca-se no controle de vibrações e ruído dados a sua capacidade de atenuação de vibração para certas bandas de frequência, denominado efeito *bandgap*. Foram analisados três métodos experimentais com o objetivo de obter o número de onda, o primeiro método utiliza a resposta em frequência em três pontos igualmente espaçados na estrutura, o segundo é denominado método de Séries de *Fourier* Discreta Regressiva (RDFS) em que utiliza o conceito de frequências espaciais e transformada discreta de *Fourier* e o último método emprega os pontos de máximos do coeficiente de correlação para estimar o número de onda. Uma análise preliminar foi realizada aplicando tais métodos às respostas dinâmicas experimentais de uma estrutura bem conhecida, uma viga de aço. A instrumentação e o sistema de aquisição foram adequadamente adotados para a realização dos ensaios experimentais para cada estrutura analisada, considerando fatores de sensibilidade, faixa de frequência de excitação e relação entre massa da amostra e a massa dos transdutores. Para as estruturas unidimensionais os resultados experimentais foram comparados a resultados analíticos calculados levando em consideração as suas propriedades e geometrias. Já para a estrutura bidimensional, painel compósito, os resultados experimentais são comparados a resultados numéricos presentes na literatura. Os resultados encontrados em todos os métodos aplicados são condizentes com os resultados analíticos e numéricos. No metamaterial foi possível identificar o efeito *bandgap* na frequência entre 1500 Hz a 1800 Hz. No entanto, o método de correlação mostrou-se mais preciso e com menos parâmetros a serem determinados em comparação aos demais métodos.

**Palavras chave:** Propagação de Ondas; Metamaterial; Painel Compósito.

---

## ABSTRACT

The constant technological advancement in manufacturing processes allows the growing of the use of materials with physical-mechanical attributes not reached by conventional inputs, such as composites and metamaterials, providing superior dynamic performance. These materials present superior vibroacoustic properties in the mid and high frequency bands, where the classical modal approaches are not suitable. Parameters such as the wave number, group velocity, modal density and dissipated power can then be characterized by wave-based methods. This work makes an investigation of experimental methods aiming to characterize the dynamic behavior of light structures: honeycomb core composite sandwich panel and single polyamide beams and mechanical resonators (metamaterials). The composite sandwich panels stand out because of their high strength characteristics combined with a low specific mass, the metamaterial in the control of vibrations and noise given their ability to attenuation of vibration for certain bands of frequency, called bandgap effect. Three experimental methods were analyzed in order to obtain the wave number, the first method uses the frequency response at three equally spaced points in the structure, the second method is called the Regressive Discrete Fourier Series (RDFS) method in which it uses the concept of spatial frequencies and discrete Fourier transform and the latter method employs points of the correlation coefficient to estimate the wave number. A preliminary analysis was performed applying these methods to experimental dynamic responses of a well-known structure, a steel beam. The instrumentation and the acquisition system were appropriately adopted to perform the experimental tests for each structure analyzed, considering factors of sensitivity, frequency range of excitation and relation between mass of the sample and mass of the transducers. For the one-dimensional structures the experimental results were compared to calculate analytical results taking into account their properties and geometries. For the two-dimensional composite panel, the experimental data are compared to numerical from the literature. The results founded in all of the methods are consistent with the analytical and numerical results. In the metamaterial case, it was possible to identify the bandgap effect in the frequency between 1500 Hz and 1800 Hz. However, the correlation method was more accurate and with fewer parameters to be determined in comparison to the other methods.

**Keywords:** *Wave Propagation; Metamaterial; Composite Panel.*

SUMÁRIO.....	VII
LISTA DE FIGURAS.....	VIII
LISTA DE TABELAS.....	XI
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	XII
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XIII
<b>1. Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1. Motivação.....	1
1.2. Objetivo.....	3
1.3. Metodologia.....	3
1.4. Estrutura do trabalho.....	4
<b>2. Revisão Teórica.....</b>	<b>5</b>
2.1. Metamaterial.....	5
2.2. Painéis Compósitos.....	6
2.3. Características de Ondas.....	8
2.4. Tipo de Ondas.....	11
2.5. Equações de Dispersão de Viga.....	13
2.6. Equação de Dispersão de Viga com Ressonadores.....	15
2.7. Equação de Placas Finas.....	17
2.8. Densidade Modal.....	20
2.9. Energia e Potência Mecânica.....	21
<b>3. Métodos de Estimações de Números de Ondas e Aparatos Experimentais</b>	<b>23</b>
3.1. Método FRF.....	23
3.2. Identificação do Número de Onda via Frequência Espacial.....	24
3.2.1. Método de Série de <i>Fourier</i> Discreta Regressiva.....	25
3.3. Método de Correlação.....	27
3.4. Máximo e Mínimo Número de Onda.....	28
3.5. Função de Coerência.....	28
3.6. Propriedades e Geometrias das Estruturas.....	30
3.6.1. Viga Metálica.....	30
3.6.2. Vigas Sintetizadas.....	30
3.6.3. Painel Compósito.....	32
3.7. Aparato Experimental.....	33
3.7.1. Configuração para a Viga Metálica.....	33
3.7.2. Configuração para as Vigas Sintetizadas.....	36
3.7.3. Configuração para o Painel Compósito.....	41
<b>4. Resultados.....</b>	<b>44</b>
4.1. Viga Metálica.....	44
4.1.1. Número de onda estimado através do Método FRF.....	44
4.1.2. Número de onda estimado através do Método RDFS.....	47
4.1.3. Número de onda estimado através do Método de Correlação.....	48
4.2. Vigas Sintetizadas.....	50
4.2.1. Número de onda estimado através do Método FRF.....	50
4.2.2. Número de onda estimado através do Método RDFS.....	53
4.2.3. Número de onda estimado através do Método de Correlação.....	54
4.3. Painel Compósito.....	58
4.3.1. Número de onda estimado através do Método RDFS.....	60
4.3.2. Número de onda estimado através do Método de Correlação.....	62
4.4. Considerações finais.....	65
<b>5. Conclusões.....</b>	<b>66</b>
5.1. Sugestões para trabalhos futuros.....	67
<b>Referências.....</b>	<b>68</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Fotografias de satélites artificiais: (a) <i>Sputnik I</i> – satélite soviético [1] e (b) SGDC – Satélite Geostacionario Brasileiro [2].	1
Figura 2. Painel compósito do tipo sanduíche: (a) disposição das camadas e (b) núcleo de <i>honeycomb</i> [5].	2
Figura 3. Tipos de periodicidade: (a) propriedades de material, (b) características geométricas, (c) condições de contorno e (d) adição de massas [23].	5
Figura 4. Típica curva de transmissividade de uma viga metálica com ressonadores periodicos, em destaque o efeito <i>bandgap</i> [24].	6
Figura 5. Ilustração que mostra a analogia entre painel sanduíche e viga com perfil I [29].	7
Figura 6. Tipos de núcleos de painéis sanduíches: (a) suporte unidirecional das faces, (b) suporte homogêneo das faces e (c) suporte bidirecional das faces [31].	8
Figura 7. Tipos de núcleos <i>honeycomb</i> com célula: (a) hexagonal, (b) quadrado e (c) triangular [32].	8
Figura 8. Tipos de ondas: (a) propagante, (b) atenuante e (c) evanescente.	9
Figura 9. Perturbação ao longo do tempo e espaço: (a) não dispersiva e (b) dispersiva [34].	10
Figura 10. Elemento de viga sujeito a onda: (a) longitudinal, (b) transversal e (c) flexural (___deformado e _ _ não-deformado) [33].	11
Figura 11. Relações de dispersão na direção $x$ : modos de onda puramente reais (___) ou imaginários (___); modos de onda com partes reais e imaginárias (___) [4].	12
Figura 12. Relações de dispersão na direção $y$ : modos de onda puramente reais (___) ou imaginários (___); modos de onda com partes reais e imaginárias (___) [4].	13
Figura 13. Diagrama de corpo livre de uma viga e flexão: (a) viga em flexão e (b) elemento infenitesimal.	13
Figura 14. Viga com ressonadores sob vibração flexural [24].	15
Figura 15. Elemento de placa com aplicações de forças e momentos [40].	17
Figura 16. Número de modos sob a curva $k(\omega)$ .	21
Figura 17. Representação do método de estimação do número de onda via três pontos de medições.	23
Figura 18. Exemplo de aplicação do método RDFS: (a) sinal original, (b) sinal contaminado e (c) sinal reestaurado.	26
Figura 19. Traçado da função de coerência [52].	29
Figura 20. Viga metálica de seção retangular.	30
Figura 21. Vigas sintetizadas: (a) simples e (b) com ressonadores.	31
Figura 22. Geometria: (a) ressonador mecânico e (b) célula unitária [54].	31
Figura 23. Painel compósito do tipo sanduíche com núcleo de <i>honeycomb</i> .	32
Figura 24. Aparato experimental da viga metálica, os números indicam equipamentos apresentados na Tabela 5.	33

Figura 25. Representação dos pontos de medição capturados no ensaio experimental da viga metálica. ....	34
Figura 26. Típicas curvas de: (a) forçamento e (b) aceleração medidos na viga metálica. ....	35
Figura 27. Típicas curvas de (a) amplitude e (b) fase da viga metálica. ....	35
Figura 28. Típica curva de coerência da viga metálica. ....	36
Figura 29. Aparato experimental da viga de poliamida: (a) simples e (b) com ressonadores, os números indicam equipamentos apresentados na Tabela 6. ....	37
Figura 30. Representação dos pontos de medições capturados no ensaio experimental das vigas sintetizadas. ....	38
Figura 31. Típicas curvas de: (a) forçamento e (b) aceleração medidos nas vigas de poliamidas. ....	38
Figura 32. Típicas curvas de: (a) amplitude e (b) fase da viga simples de poliamida. ....	39
Figura 33. Típica curva de coerência da viga simples de poliamida. ....	39
Figura 34. Típicas curvas de: (a) amplitude e (b) fase da viga de metamaterial. ....	40
Figura 35. Típica curva de coerência da vida de metamaterial. ....	40
Figura 36. Aparato experimental do painel compósito: (a) configuração geral e (b) detalhe do forçamento, os números indicam equipamentos apresentados na Tabela 7. ....	41
Figura 37. Representação da discretização do painel compósito. ....	42
Figura 38. Típica curva de coerência do painel compósito. ....	43
Figura 39. Números de ondas experimentais estimados nas posições: (a) 80 mm, (b) 220 mm e (c) 400 mm pelo método FRF e analíticos para viga metálica. ....	45
Figura 40. Números de ondas analíticos (___) e experimentais ( _ ) estimados pelo método FRF para espaçamento de: (a) 20 mm, (b) 40 mm, (c) 60 mm e (d) 80 mm para viga metálica. ....	46
Figura 41. Números de ondas analíticos (___) e experimentais ( _ ) estimados pelo método RDFS para $M$ iguais a: (a) 1.0, (b) 1.5, (c) 2.0 para viga metálica. ....	47
Figura 42. Número de onda estimado pelo método RDFS e FFT da ODS para a viga metálica. ....	48
Figura 43. Número de onda estimado pelo método de correlação para viga metálica. ....	48
Figura 44. Parâmetros calculados a partir do número de onda estimado pela técnica de correlação: (a) velocidade de grupo, (b) densidade e (c) potência injetada para viga metálica. ....	49
Figura 45. Números de ondas experimentais ( _ ), estimados nas posições: (a) 77 mm, (b) 176 mm e (c) 253 mm pelo método FRF, e analíticos (___) para viga simples de poliamida (coluna 1) e viga de metamaterial (coluna 2). ....	50
Figura 46. Números de ondas experimentais ( _ ), estimados pelo método FRF para espaçamentos de: (a) 11 mm, (b) 22 mm, (c) 33 mm e (d) 44 mm e analíticos (___) para viga simples de poliamida (coluna 1) e na viga de metamaterial (coluna 2). ....	52
Figura 47. Números de ondas experimentais ( _ ), estimados pelo método RDFS para valores de $M$ iguais a: (a) 1.0, (b) 1.5 e (c) 2.0, e analíticos (___) para viga simples de poliamida (coluna 1) e na viga de metamaterial (coluna 2). ....	53

Figura 48. Números de ondas estimados pelo método RDFS e FFT da ODS para: (a) viga de poliamida simples e (b) viga de metamaterial. ....	54
Figura 49. Números de ondas estimados para viga: (a) simples de poliamida e (b) metamaterial estimados pelo método de correlação. ....	55
Figura 50. Parâmetros de: (a) velocidade de grupo, (b) densidade modal e (c) potência injetada para viga simples de poliamida. ....	56
Figura 51. Parâmetros de: (a) velocidade de grupo, (b) densidade modal e (c) potência injetada para viga metamaterial. ....	57
Figura 52. Típica curva de amplitude painel compósito tipo sanduíche com núcleo <i>honeycomb</i> . ....	58
Figura 53. Formas modais numéricas (coluna 1) [57] e experimentais (coluna 2) para as primeiras frequências: (a) 146.9 Hz, (b) 186.5 Hz, (c) 371.1 Hz e (d) 613.7 Hz. ....	59
Figura 54. Números de ondas estimados pela técnica FFT da ODS (coluna 1) e pelo método RDFS (coluna 2) para quatro frequências: (a) 160 Hz, (b) 200 Hz e (c) 433 Hz do painel compósito. ....	61
Figura 55. Número de onda experimental, estimado pelo método de correlação, e numérico na: (a) direção <i>x</i> e (b) direção <i>y</i> do painel compósito. ....	62
Figura 56. Número de onda direcional experimental (coluna 1) e numérico (coluna 2) [58] para as frequências: (a) 146,9 Hz, (b) 186,5 Hz, (c) 371,1 Hz e (d) 613,7 Hz do painel compósito. ....	63
Figura 57. Velocidade de grupo: (a) direção <i>x</i> e (b) direção <i>y</i> do painel compósito. ....	64
Figura 58. Densidade modal do painel compósito. ....	64

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Nomenclatura utilizada para os modos de onda nas direções ortogonais $x$ e $y$ [4].....	12
Tabela 2. Propriedades e geometrias da viga de metal.....	30
Tabela 3. Propriedades e geometrias das vigas de poliamidas [54]. ....	31
Tabela 4. Propriedades e geometrias do painel <i>HexWeb</i> CRIII – AL 5056 – ¼” [55].....	32
Tabela 5. Modelos dos equipamentos utilizados no experimento da viga metálica.....	34
Tabela 6. Modelos dos equipamentos utilizados no experimento das vigas sintetizadas.....	37
Tabela 7. Modelos dos equipamentos utilizados no experimento do painel compósito.....	42
Tabela 8. Comparação das frequências naturais numéricas [4] e experimentais do painel compósito. 58	
Tabela 9. Comparação número de onda experimental estimado pelo método FFT da ODS e numérico [58] do painel compósito na direção $x$ .....	60
Tabela 10. Comparação número de onda experimental estimado pelo método FFT da ODS e numérico [58] do painel compósito na direção $y$ .....	60

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CR	<i>Corrosion Resistant</i>
FEA	<i>Finite Element Analysis</i>
FRF	<i>Frequency Response Function</i>
GDS	<i>Group of Dynamics Systems</i>
IWC	<i>Inhomogeneous Wave Correlation</i>
ODS	<i>Operating Deflection Shape</i>
RDFS	<i>Regressive Discrete Fourier Series</i>
SGDC	Satélite Geoescionário de Defesa e Comunicações
SLS	Sintetização a Laser Seletiva
VLD	Vibrômetro Laser <i>Doppler</i>
WFE	<i>Wave and Finite Element</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>Símbolos latinos</b>		<b>Unidades</b>
$\hat{A}$ e $\hat{B}$	Amplitudes complexas	[m]
$A$	Área	[m <sup>2</sup> ]
$a$	Deslocamento	[m]
$c_f$	Velocidade de fase	[m/s]
$c_g$	Velocidade de grupo	[m/s]
$d$	Distância	[m]
$E$	Módulo de elasticidade	[Gpa]
$E_c$	Energia cinética	[J]
$E_p$	Energia potencial	[J]
$F$	Forçamento externo	[N]
$h$	Espessura	[m]
$i$	Unidade imaginária	Adimensional
$I$	Momento de inércia	[m <sup>4</sup> ]
$k$	Número de onda	[rad/m]
$L$	Comprimento	[m]
$m$	Massa	[kg]
$n$	Densidade modal	
$M$	Momento fletor	[N,m]
$Q$	Esforço cortante	[N]
$t$	Tempo	[s]
$u$	Deslocamento	[m]
$v$	Velocidade	[m/s]
$w$	Deslocamento	[m]
$x$	Deslocamento	[m]
$\chi$	Deslocamento no espaço	[m]
$F$	Forçamento externo	[N]
$u$	Deslocamento	[m]
$\Pi$	Potência	[W]
$( )^H$	Conjugado transposto	
<b>Símbolos Gregos</b>		<b>Unidades</b>
$\alpha$	Constante de atenuação	[m <sup>-1</sup> ]
$\beta$	Constante de fase	[m <sup>-1</sup> ]
$\gamma$	Coerência	
$\varepsilon$	Ruído	[rad/m]
$\eta$	Fator de perda	
$\lambda$	Fator de atenuação	[m <sup>-1</sup> ]
$\theta$	Varição angular	[rad]
$\mu$	Densidade	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	Coefficiente de <i>poisson</i>	Adimensional
$\xi$	Deslocamento no tempo	[s]
$\rho$	Massa específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\varphi$	Deslocamento senoidal	[m/s]
$\omega$	Frequência angular	[rad/s]

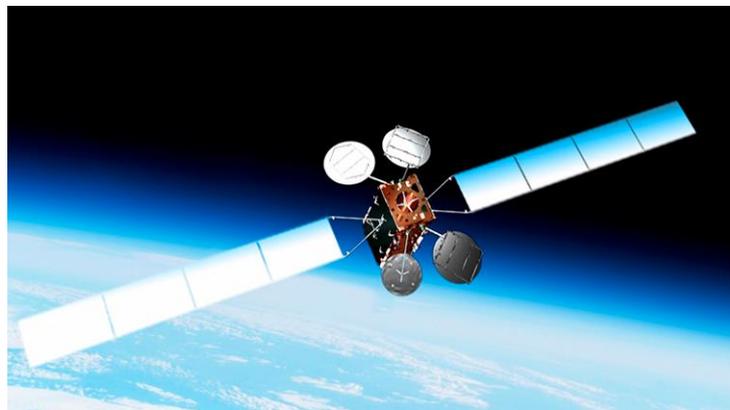
# 1. Introdução

## 1.1. Motivação

O primeiro satélite artificial da terra o Sputnik I lançado em 1957 pela antiga União Soviética, com a função básica de transmitir um sinal de rádio, era uma esfera pressurizada constituída basicamente de liga de alumínio pesando 84 kg, 58 cm de diâmetro interno, orbitou 22 dias antes de cair [1], Fig. 1 (a). Passados 60 anos, em maio de 2017 o Brasil lança o seu primeiro Satélite Geoestacionário de Defesa e Comunicações (SGDC) com o objetivo de fornecer acesso à banda larga e um canal de comunicação seguro as forças armadas, pesando 5.781 kg, com 7 metros de altura, vida útil estimada em 18 anos, formada por diversos materiais dentre eles compósitos e liga de alumínio [2], Fig. 1 (b). Diante disto, o avanço de materiais e processos utilizados para construir aeronaves, satélites e naves espaciais levou a evolução de estruturas de liga de alumínio simples a sistemas atuais eficientes e complexos.



(a)



(b)

Figura 1. Fotografias de satélites artificiais: (a) *Sputnik I* – satélite soviético [1] e (b) SGDC – Satélite Geoestacionario Brasileiro [2].

Os componentes estruturais aeroespaciais são constituídos por uma ampla variedade de matérias, no entanto um material que vem sendo largamente utilizado é o painel compósito do tipo sanduíche com núcleo de *honeycomb*, inclusive usado na estrutura do satélite SGDC, pois exibem altas taxas de rigidez / massa [3]. Estes painéis compósitos são materiais constituídos de pelo menos três camadas: duas lâminas finas externas separadas por uma camada interna grossa denominada núcleo; ambas unidas por um material adesivo como mostrado na Fig. 2. O núcleo contém células uniformemente espaçadas lembrando um favo de mel, tendo a função básica de aumentar o momento de inércia mantendo a baixa densidade específica. Já as faces tem a incumbência de resistir tensões normais de tração, compressão e cisalhamento planar [3] [4]. Logo, a incorporação destes materiais nas estruturas aeroespaciais possibilitam a redução de peso, estabilidade e maior rigidez ao sistema.

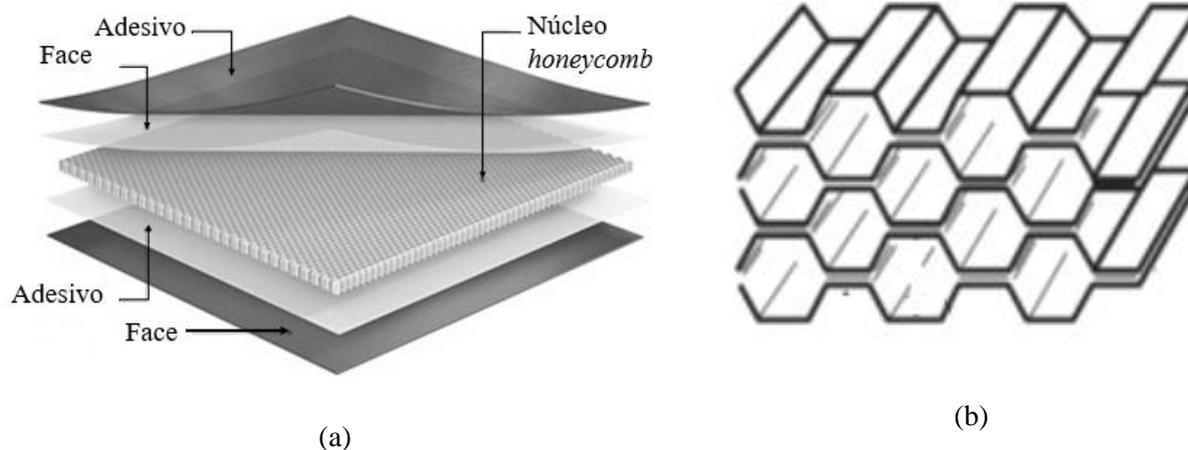


Figura 2. Painel composto do tipo sanduíche: (a) disposição das camadas e (b) núcleo de *honeycomb* [5].

Análogo aos painéis sanduíches, os metamateriais são um arranjo de elementos estruturais artificiais projetados para obter propriedades vantajosas e incomuns, suas aplicações abrangem os setores de aeroespacial, telecomunicações, sensoriamento por satélite, óptica e instrumentação médica [6]. Seja em antenas para aumentar o alcance de radares [7], absorvedores de faixas de frequências específicas [8] [9], camuflagem eletromagnética [10] ou sistemas convencionais de controle de cruzeiro e de segurança antes da colisão [6]. Entendem por metamaterial qualquer arranjo físico de um material que se obtém propriedades desejadas, nas quais estas não se assemelham a nenhum outro encontrado na natureza. Contudo, a capacidade de controlar e manipular ondas acústicas, eletromagnéticas e ópticas diferencia metamateriais dos materiais convencionais.

Durante o lançamento, as aeronaves e satélites são sujeitas a variações de pressões ambientais, temperatura e umidade. Nas últimas décadas foram registrados acidentes com descolamentos de faces/núcleo de painéis sanduíches em aeronaves com passageiros, uma vez que as diferenças de pressão interna e externa podem gerar estresse mecânico [11]. Acrescido do fato deste material não fornecer um bom isolamento acústico ou um bom amortecimento de vibrações e serem mais suscetíveis a ruídos do que em materiais convencionais, especialmente em alta frequência [4] [12]. Diante disto, torna-se fundamental a caracterização destes materiais uma vez que possui grande aplicabilidade, principalmente na indústria aeroespacial, a fim de obter a resposta dinâmica em uma ampla faixa de frequência.

A propagação de ondas em sólidos elásticos é amplamente utilizada em testes não destrutivos e diagnósticos técnicos em materiais compostos [12], metamateriais [13], estruturas de aeronaves [14] dentre outras. Ondas são perturbações que se propagam através da matéria ou espaço transportando energia sem que haja transferência de massa, os meios que elas transitam são denominados guias de ondas [4]. Contudo, técnicas de características de ondas guiadas dependem diretamente das propriedades do material e de sua geometria [15].

Numerosos métodos analíticos e numéricos são encontrados na literatura com objetivo de prever

o comportamento vibroacústico dos metamateriais e painéis sanduíche, como a Análise por Elementos Finitos (*Finite Element Analysis* - FEA) e o método de Ondas e Elementos Finitos (*Wave and Finite Element* - WFE), no entanto dificilmente os trabalhos publicam estudos com validação experimental [12] [4]. A propagação de ondas tem sido imensamente utilizada para descrever a resposta dinâmica destes materiais em termos de relação de dispersão, velocidade de fase e grupo, modos de onda e transmissão de energia [16]; incluindo técnicas experimentais como Transformada Discreta de *Fourier* (TDF) [4] [17], *Inhomogeneous Wave Correlation* (IWC) [18] [19] e a resposta em frequência [16] [20]. De maneira geral, estes métodos analíticos, numéricos e experimentais concentram em obter a curva de dispersão das estruturas, e a partir desta as demais propriedades, tais como, velocidade de grupo, densidade modal e potência.

## 1.2. Objetivos

Este trabalho tem por objetivo investigar experimentalmente as características de ondas em estruturas leves, uni e bidimensionais, utilizando diferentes técnicas de estimação. Bem como, vantagens e desvantagens das técnicas utilizadas serão discutidas para duas aplicações: vigas de metamaterial com propriedades localmente ressonantes e um painel compósito de aplicação aeroespacial do tipo sanduíche com núcleo *honeycomb*. Para tanto, serão utilizados métodos experimentais de estimação que permitem calcular quantidades relacionadas à propagação de ondas, tais como número de onda, velocidades de fase e de grupo, densidade modal e potência, além da resposta forçada.

## 1.3. Metodologia

Para alcançar os objetivos propostos, a metodologia é dividida em três principais fases. A primeira etapa consiste no estudo e comparação de diferentes métodos experimentais de estimação de número de onda disponíveis na literatura. Para os quais se empregou o método baseado na resposta em frequência (*Frequency Response Function* - FRF), o método de séries de *Fourier* discreta regressiva (*Regressive Discrete Fourier Series* – RDFS) e o método de correlação, onde se buscou compreender e discutir a influência de distintos parâmetros de cada método experimental. Com o objetivo de investigar os métodos, estes foram analisados em uma estrutura com propriedades bem conhecidas, no caso, viga metálica.

Dada a especificidade das estruturas analisadas, o aparato experimental se torna um desafio uma vez que estas são extremamente leves e suscetíveis a variabilidade experimental. Logo, é necessário que se tenha equipamentos e materiais com desenho apropriado para gerar resultados com acurácia. Os experimentos foram realizados no Laboratório de Dinâmica de Sistemas (*Group of Dynamics Systems* - GDS) da Universidade de Brasília (UnB), e para cada estrutura foi empregada um aparato experimental distinto, mas todas com testes de impacto. Para a viga metálica utilizou-se um martelo instrumentado e acelerômetro, para as vigas de metamaterial utilizou-se um mini-martelo instrumentado e um mini-acelerômetro e finalmente para o painel compósito utilizou-se um *shaker* e um Vibrômetro Laser

*Doppler (VLD).*

A última etapa tem-se como objetivo a validação dos resultados experimentais de número de ondas através de modelos analíticos e numéricos relatados na literatura. Para as vigas, o modelo analítico foi desenvolvido no *software Matlab*, por equações expostas no capítulo 2 e comparado diretamente aos resultados experimentais. Já para o painel compósito do tipo sanduíche com núcleo *honeycomb* um modelo numérico foi desenvolvido no trabalho de Sousa [4] através do Método de Ondas e Elementos Finitos (*Wave and Finite Element - WFE*), a partir do qual os resultados experimentais foram validados.

#### **1.4. Estrutura do trabalho**

Este trabalho divide-se em cinco capítulos. O capítulo 1 apresenta uma introdução, descrevendo as motivações que levaram à realização do presente estudo juntamente com os objetivos e sua metodologia. No capítulo 2, é apresentado uma revisão teórica dos principais atributos dos metamateriais e painéis sanduíches, fundamentos de propagação de ondas em sólidos elásticos e métodos de análise de propagação de ondas em estruturas unidimensionais e bidimensionais. No capítulo seguinte os métodos de estimação de número de onda são apresentados, assim como o arranjo experimental empregado para cada estrutura: a viga metálica, a viga simples de poliamida, a viga de metamaterial e o painel compósito. No capítulo 4, são apresentados e discutidos os resultados obtidos. E, finalmente, no capítulo 5 são expostas as conclusões e possibilidades de trabalhos futuros.

## 2. Revisão Teórica

Este capítulo apresenta as principais características dos metamateriais e painéis compósitos tipo sanduíche com núcleo *honeycomb*, assim como fundamentos de propagação de ondas em sólidos elásticos, como número de ondas, guias de ondas, densidade modal, energia, potência e dispersão. São apresentadas também soluções analíticas de viga simples, com ressonadores e em placas isotrópicas utilizando propagação de ondas nas quais serão posteriormente usadas para comparar as soluções experimentais utilizando o *software Matlab*. Por fim, o Método de Ondas e Elementos Finitos (*Wave and Finite Element - WFE*) é brevemente apresentado no contexto de aplicação a painéis compósitos do tipo *honeycomb*.

### 2.1. Metamaterial

Motivados pelos cristais fotônicos no eletromagnetismo, os pesquisadores estudaram arduamente tais materiais por seu alto potencial em filtrar e/ou direcionar ondas elásticas [21] [22] [23] [24] [25]. Os cristais fotônicos exibem um fenômeno denominado “*bandgaps*”, isto é, bandas de frequências onde certos tipos de ondas não se propagam devido aos efeitos de espalhamento de *Bragg*, com propriedades efetivas simultaneamente negativas de permissividade e permeabilidade magnética. Em problemas acústicos, análogo aos cristais fotônicos ocorre o fenômeno de atenuação de ondas mecânicas em uma banda de frequência devido ao mecanismo de ressonadores mecânicos, localmente ressonante, incorporado periodicamente a estrutura principal [13].

A periodicidade em metamateriais acústicos pode ser projetada para exibir o comportamento *bandgap*, variando ao longo do eixo principal características como: propriedades de material, características geométricas, condições de contorno e adição de massas concentradas, como mostrada na Fig. 3 [23].

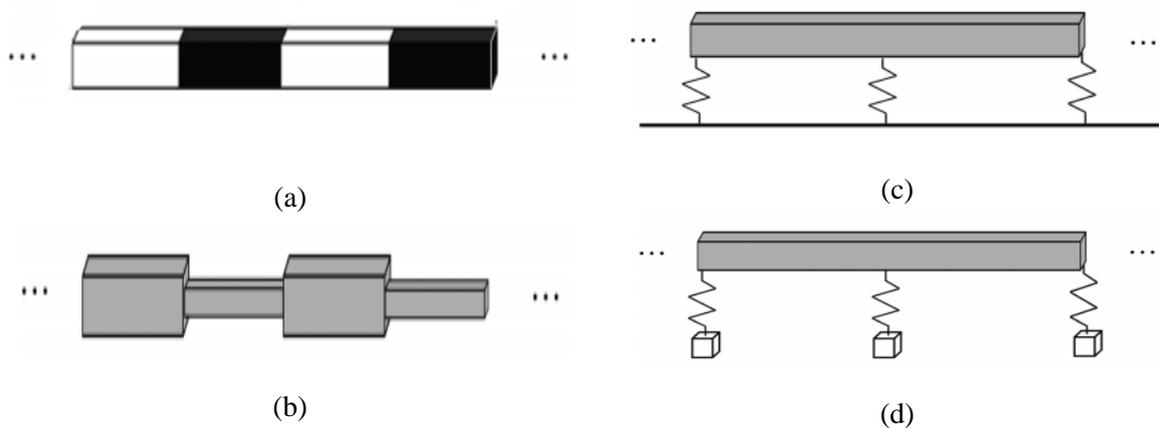


Figura 3. Tipos de periodicidade: (a) propriedades de material, (b) características geométricas, (c) condições de contorno e (d) adição de massas [23].

A incorporação da periodicidade estrutural ao eixo principal impede que as ondas harmônicas se propaguem no metamaterial quando as frequências de propagação são iguais as frequências de ressonâncias locais [26]. Isto se deve ao fato de que no *bandgap* a energia é retirada pela força motriz na forma de trabalho negativo, além da grande quantidade de energia que é armazenada temporariamente nas subestruturas e mais tarde retirada pela força motriz. Portanto, tal comportamento pode ser observado no gráfico de transmissividade da Fig. 4, onde têm uma região de aproximadamente 100 Hz a 125 Hz em que não há ressonâncias, ou seja, não há propagação de onda [24].

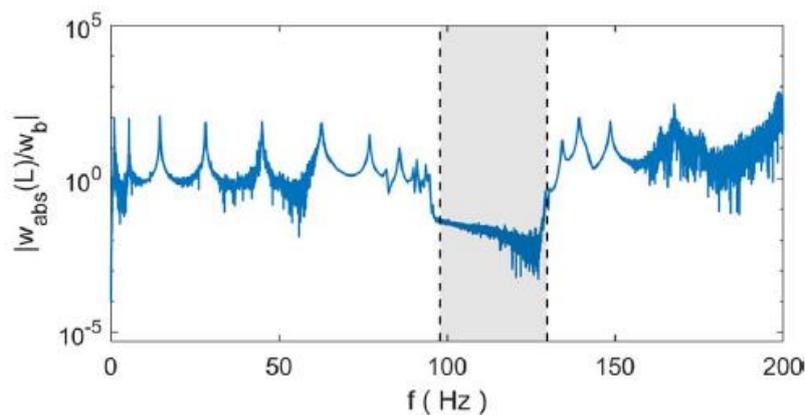


Figura 4. Típica curva de transmissividade de uma viga metálica com ressonadores periódicos, em destaque o efeito *bandgap* [24].

As propriedades superiores dos metamateriais são resultados de seu processo de fabricação, que na sua grande maioria são por manufatura aditiva [25]. Outra observação importante é quanto a variabilidade do material e as propriedades geométricas das células unitárias que influenciam diretamente na propagação de ondas na estrutura e, conseqüentemente, no efeito de atenuação de vibrações [22]. Portanto, apesar dos avanços na tecnologia de manufatura aditiva, sua estrutura ainda é um desafio para a indústria devido à necessidade de uma geometria mais complexa.

Em suma, os metamateriais acústicos ou estruturais são uma nova classe de compósitos que exibem propriedades excepcionais não observados na natureza de controle de passivo de ruídos e vibrações na frequência de *bandgap*. Essas estruturas apresentam diversas aplicações, além do controle de vibrações, como tecnologias para renderização de objetos invisíveis, ópticas para microscópios capazes de observar átomos, antenas menores, dentre outras [27].

## 2.2. Painéis Compósitos

Dado que as estruturas em sanduíche possuem altas propriedades mecânicas e multifuncionalidade inerente, elas têm sido utilizadas em uma grande variedade de aplicações, tais como, satélites, aeronaves, navios e sistemas de energia eólica [28]. As estruturas tipo sanduíche podem ser classificadas como materiais compósitos por se consistirem em dois ou mais componentes individuais de diferentes propriedades que, quando combinados, resultam em um material de alto

desempenho [4] [28]. Contudo, este fato se deve a sua propriedade de combinar alta rigidez, alta resistência e baixo peso, além de possuírem boas características de isolamento térmico e amortecimento acústico [29].

O modo de funcionamento e atuação de esforços internos na estrutura sanduíche pode ser interpretado através de uma viga, perfil I, como mostrada na Fig. 5. As mesas do perfil representam as faces e a alma o núcleo. Quando submetidas à flexão, as mesas sofrem compressão e tensão no plano, assim como as faces na estrutura sanduíche, e a alma sofre cisalhamento, como o núcleo na estrutura sanduíche [29].

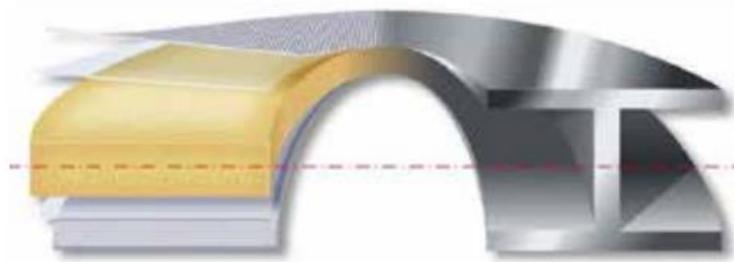


Figura 5. Ilustração que mostra a analogia entre painel sanduíche e viga com perfil I [29].

Tal como acontece com as vigas com perfil I quando as mesas estão mais afastadas, a estrutura ganha rigidez proporcional e os painéis sanduíche com núcleo mais espesso alcançam maiores níveis de rigidez. No entanto, o painel têm uma menor densidade geral quando comparado com uma viga perfil I, resultando em uma alta relação rigidez-peso [29] [28].

O painel sanduíche possui uma estrutura discreta constituída por três camadas principais: face, núcleo e face que são unidas por um material adesivo. Cada parte do sanduíche tem uma função específica. O adesivo mantém faces e o núcleo conectados e servindo de elemento de transição/dispersão de esforços entre eles. Logo, deve ter adequada compatibilidade de ligação com os materiais [29].

As faces carregam as tensões de tração e compressão, e a rigidez de flexão local é tão pequena que pode muitas vezes ser ignorado. Materiais convencionais como fibras, aço e alumínio são frequentemente usados para material de face [29].

O núcleo é responsável por apoiar as faces para que elas não se deformem e mantenham distância constante entre elas. Também deve ser rígido em cisalhamento para garantir que as faces não deslizem uma sobre as outras [28] [30]. Materiais convencionais de núcleo podem ser de espuma expandida e estrutura de *honeycomb*, de alumínio ou aço. Contudo, o núcleo tem que cumprir as demandas de forças em diferentes direções e baixa densidade. Geralmente os núcleos podem ter suporte unidirecional das faces Fig. 6 (a), suporte homogêneo das faces Fig. 6 (b) ou suporte bidirecional das faces Fig. 6 (c) [31].

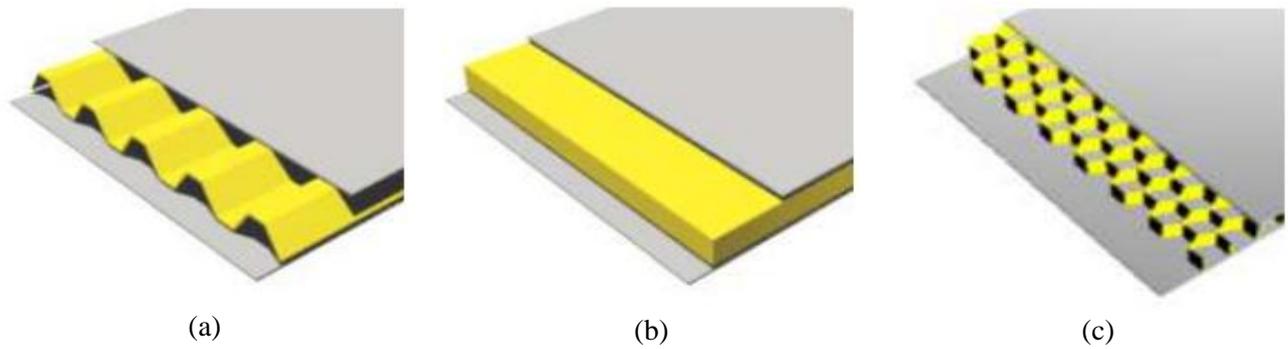


Figura 6. Tipos de núcleos de painéis sanduíches: (a) suporte unidirecional das faces, (b) suporte homogêneo das faces e (c) suporte bidirecional das faces [31].

Os núcleos heterogêneos do tipo *honeycomb* são constituídos por células abertas na direção transversal às faces e fechadas na direção perpendicular e podem apresentar diferentes topologias de células tais como hexagonal, como ilustrado na Fig. 7 (a), quadrado, na Fig. 7 (b), e triangular como na Fig. 7 (c). Um dos métodos de fabricação mais utilizados para criar as células hexagonais *honeycomb* resultam em uma duplicação da espessura de todas as paredes e como consequência surgem um comportamento anisotrópico mecânico [32].

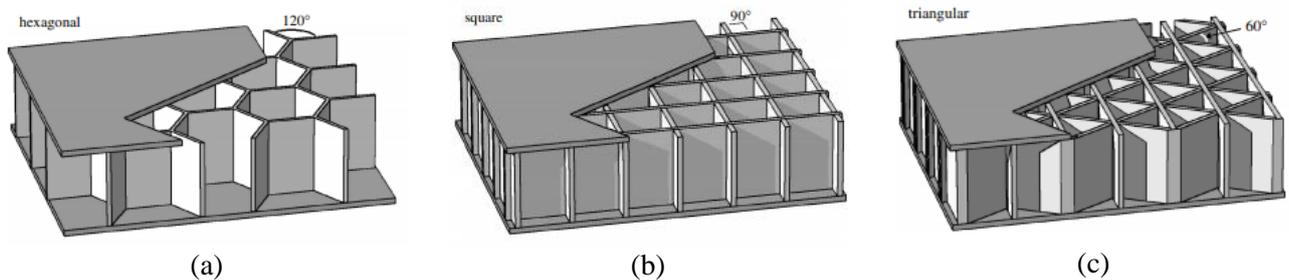


Figura 7. Tipos de núcleos *honeycomb* com célula: (a) hexagonal, (b) quadrado e (c) triangular [32].

A combinação de diferentes propriedades de materiais na construção de painéis sanduíche resulta em uma estrutura com características superiores as apresentadas pelas partes que a constituem quando analisadas individualmente. Todavia, ainda que a combinação mais empregada seja a de três camadas com dois materiais e há casos mais complexos com utilização de mais materiais de núcleo e faces. Este presente trabalho concentra-se em analisar painéis compostos do tipo sanduíche com núcleo de células hexagonais.

### 2.3. Características de Ondas

As ondas são funções no tempo e espaço cujos deslocamentos flexurais  $\varphi(x, t)$  na direção positiva e negativa em sólidos elásticos podem ser caracterizados pela seguinte combinação linear [4] [33],

$$\varphi(x, t) = \hat{A}e^{i(\omega t - kx)} + \hat{B}e^{i(\omega t + kx)}, \quad (2.1)$$

em que  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são as amplitudes complexas na direção positiva e negativa, respectivamente,  $\omega$  frequência e  $k$  o número de onda. Ou seja, em conformidade com o princípio de superposição de sistemas lineares, o deslocamento total seria a soma dos deslocamentos em cada direção.

O número de onda é a mudança de fase por unidade de comprimento medido em rad/m dada pela seguinte relação,

$$k = \alpha + i\beta, \quad (2.2)$$

onde,  $\beta$  é a constante de atenuação em que define o quanto a onda decai ao longo do espaço e  $\alpha$  é a constante de fase em que determina a mudança de fase por unidade de comprimento.

O número de onda é definido para cada tipo de onda podendo assumir valores reais, imaginários e complexos. Ondas propagantes possuem número de ondas puramente real, conforme ilustrada na Fig. 8 (a). Já ondas atenuantes, assumem o número de onda complexo e tem a forma de uma senoide exponencialmente amortecida, conforme ilustrada na Fig. 8 (b). E finalmente, ondas evanescentes têm número de ondas puramente imaginário e decaem exponencialmente com a distância, são significativos perto de discontinuidades e fontes de vibrações e não transmitem energia e se movem em fase, como mostra a Fig. 8 (c).

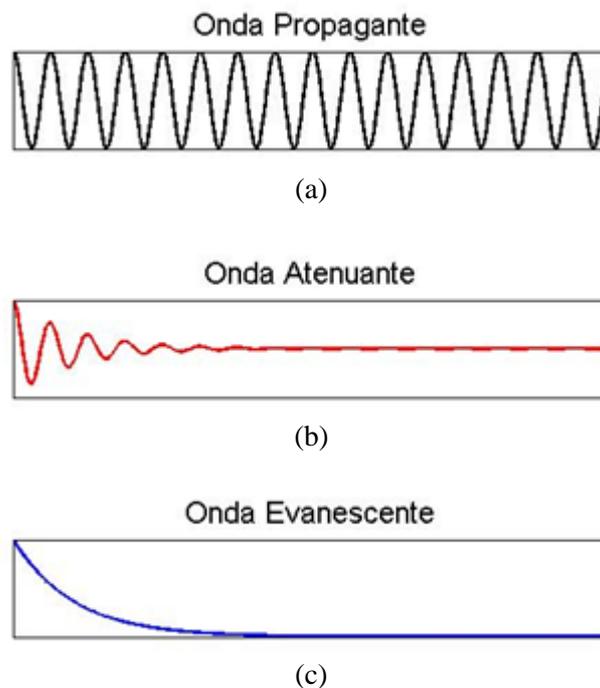


Figura 8. Tipos de ondas: (a) propagante, (b) atenuante e (c) evanescente.

Baseado nestas propriedades iniciais, a velocidade de fase consiste na relação entre frequência e número de ondas, na qual descreve a velocidade com que uma onda se move em função de um dado referencial descrito,

$$c_f = \frac{\omega}{k}. \quad (2.3)$$

A dependência entre número de ondas e frequência denomina-se relação de dispersão, onde se extrai informações tanto da onda quanto do meio em que se propaga. Quando esta relação é linear, o meio é não-dispersivo, ou seja, a forma de onda se conserva ao longo da propagação e as velocidades de grupo e fase são iguais. Pode-se observar esse comportamento na Fig. 9 (a), onde os atrasos de fase de todas as frequências do pulso gaussiano são iguais, e assim o pulso manterá sua forma inalterada. Contrariamente, se a relação for não-linear o meio é dispersivo, ou seja, a onda se deforma ao longo da propagação e velocidades de fase e grupos são distintas, este comportamento é mostrado na Fig. 9 (b), onde o mesmo pulso gaussiano apresenta um grande número de componentes em frequências somadas [34] [4].

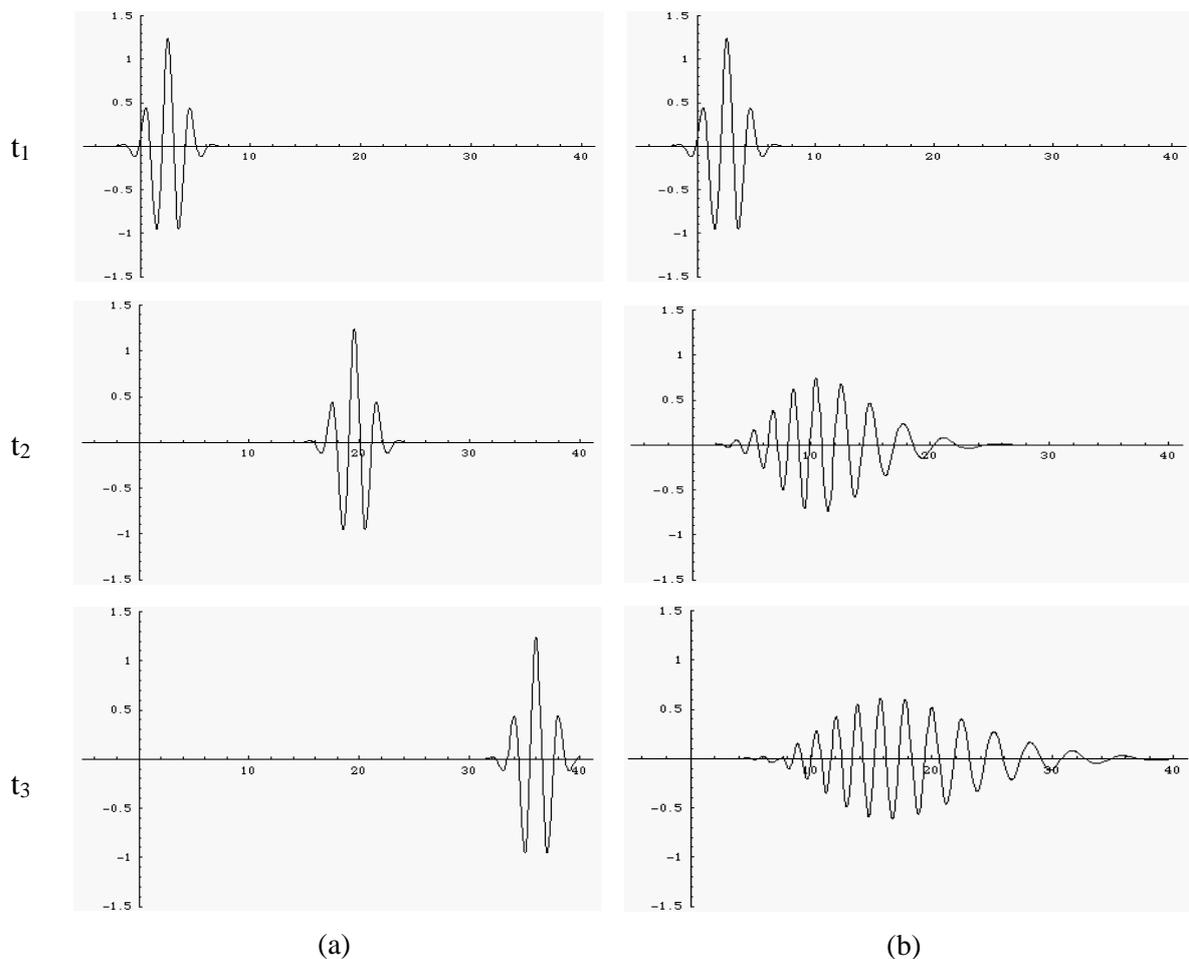


Figura 9. Perturbação ao longo do tempo e espaço: (a) não dispersiva e (b) dispersiva [34].

As perturbações em ambos os meios da Fig. 9, podem ser melhor entendidas através da velocidade com que a energia está sendo transportada, denominada velocidade de grupo e definida como [4] [34],

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (2.4)$$

Em sistemas dispersivos a velocidade de grupo é diferente velocidade de fase. O conhecimento da velocidade de grupo é útil em análises de vibração envolvendo do fluxo de energia das ondas [34].

## 2.4. Tipos de Ondas

Ondas mecânicas em sólidos são basicamente perturbações nos campos de velocidades propagando-se em um meio contínuo de diferentes formas e velocidades relativas e que carregam algum tipo de energia dependendo das movimentações das partículas [35] [4]. Cada tipo de onda pode ser caracterizado pela oscilação de uma ou mais variáveis físicas que se propagam através do espaço. Os guias de ondas em vigas podem ser classificados de acordo com suas direções dos vetores de deslocamentos em ondas longitudinais, transversais e de flexão.

As ondas longitudinais, também denominadas de ondas de expansão-compressão, são ondas na qual o deslocamento é coincidente com a direção de propagação e são não-dispersivas [35], como mostrado na Fig. 10 (a). Já as transversais, também denominadas ondas de cisalhamento, são deslocamentos perpendiculares a direção de propagação e também são não-dispersivas, como mostrada na Fig. 10 (b).

E, as ondas de flexão consistem no deslocamento que ocorre nas direções normais à propagação. São ondas dispersivas e principais responsáveis pela troca de energia e geração de ruído. Outra diferença dentre as ondas longitudinais e transversais é o aparecimento da onda evanescente devido ao número de onda puramente imaginário [35] [4], como se pode observar na Fig. 10 (c).

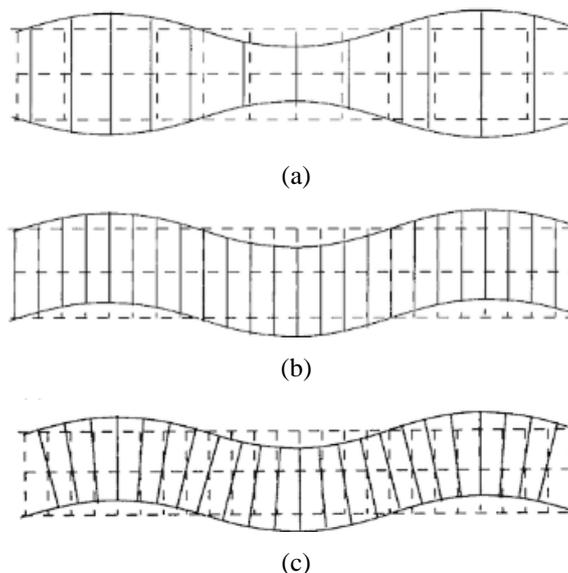


Figura 10. Elemento de viga sujeito a onda: (a) longitudinal, (b) transversal e (c) flexural (\_\_\_deformado e \_ \_ não-deformado) [33].

A propagação de ondas em painéis compósitos é complexa devido à natureza heterogênea das constituintes, anisotropia do material e a construção das diversas camadas. Portanto, o número de onda é macroscopicamente dependente da disposição do laminado, direção de propagação de onda, frequência e as condições de interface [37]. Outro ponto importante é a banda de frequência a ser analisada, que em conformidade com a Prática de Confiabilidade Preferíveis da NASA deve ser de 20 Hz a 10 kHz para aplicações aeroespaciais [4].

Os modos longitudinais e cisalhantes são influenciados pelas propriedades das faces e devido sua isotropia, são iguais nas direções  $x$  e  $y$ . Já os modos flexurais são influenciados pelo núcleo *honeycomb* e devido a sua natureza ortotrópica, as relações de dispersões são diferentes em ambas as direções [4]. Nas Figs. 11 e 12 são mostradas as relações de dispersões na direção  $x$  e  $y$  e as nomenclaturas para os modos de ondas são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Nomenclatura utilizada para os modos de onda nas direções ortogonais  $x$  e  $y$  [4].

Direção $x$		Direção $y$	
Modo de onda	Característica	Modo de onda	Característica
$C_x$	Cisalhante à direção $x$	$C_y$	Cisalhante à direção $y$
$L_x$	Longitudinal na direção $x$	$L_y$	Longitudinal na direção $y$
$F_x$	Flexural	$F_y$	Flexural
$FL_x1$	Complexo – Flexural/Long	$FL_y1$	Complexo - Flexural/Long
$FL_x2$	Complexo – Flexural/Long	$FL_y2$	Complexo - Flexural/Long

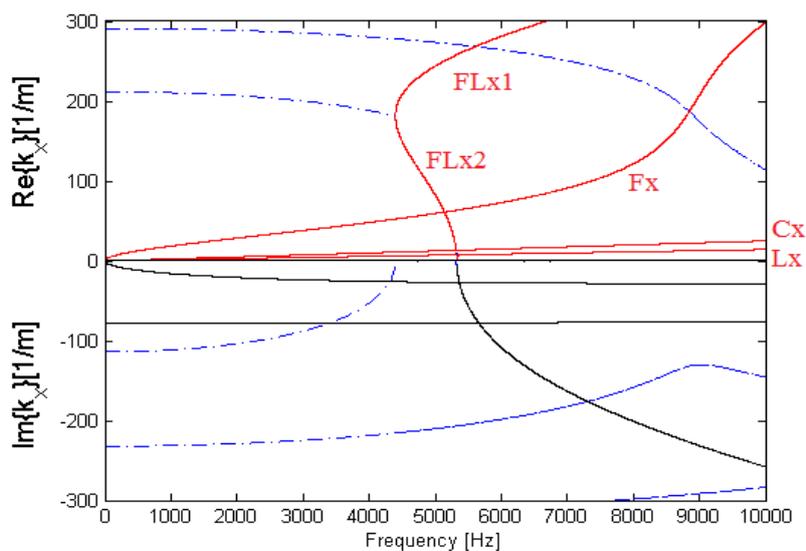


Figura 11. Relações de dispersão na direção  $x$ : modos de onda puramente reais (—) ou imaginários (---); modos de onda com partes reais e imaginárias (-.-) [4].

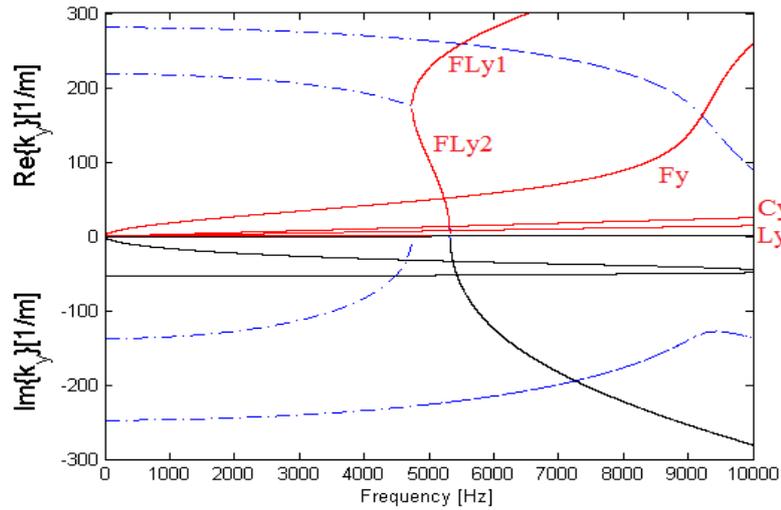


Figura 12. Relações de dispersão na direção  $y$ : modos de onda puramente reais (—) ou imaginários (---); modos de onda com partes reais e imaginárias (-.-) [4].

Observa-se que em baixas frequências o painel compósito se comporta como uma placa fina ortotrópica, com modo flexural sendo uma curva dispersiva, e os modos longitudinais e cisalhantes perpendiculares entre si sendo curvas não dispersivas [4]. Outro tipo de onda que aparece em sólidos elásticos são as ondas estacionárias na qual se forma na interferência de duas ondas senoidais com comprimentos de onda iguais e que se propagam em sentido opostos. Logo, a estrutura vibra sem mudança de fase, similarmente a um modo de vibrar.

## 2.5. Equação de Dispersão de Viga

Considerando uma viga em flexão, Fig. 13 (a), com distribuição contínua de massa pode-se obter a equação de onda fazendo uma análise dinâmica de um elemento infinitesimal  $dx$ , cujo diagrama de corpo livre é mostrado na Fig. 13 (b), sujeito a um forçamento externo  $F(x, t)$  distribuído ao longo da viga [38].

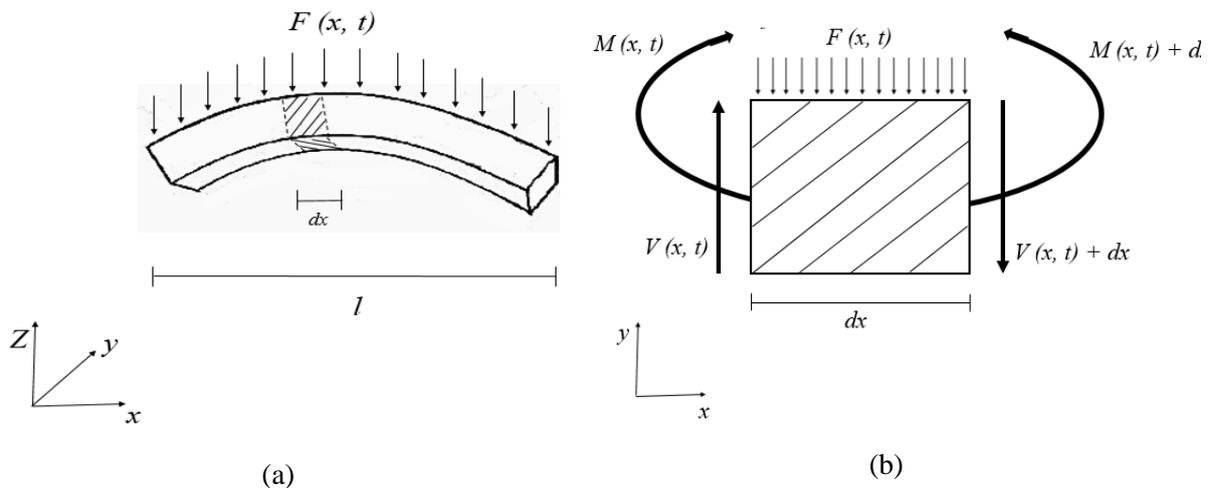


Figura 13. Diagrama de corpo livre de uma viga e flexão: (a) viga em flexão e (b) elemento infinitesimal.

Dado o momento de inércia da área da seção transversal da viga em relação ao eixo  $y$ ,

$$I = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

onde,  $\rho$  é densidade de massa e  $A(x)$  área transversal da viga. Sabendo-se que  $M(x, t)$  é o momento fletor e  $V(x, t)$  é a força de cisalhamento pode-se fazer o somatório de forças e momentos no elemento infinitesimal de viga obtendo-se as seguintes equações respectivamente,

$$V + F(x, t) - (V + dV) = I, \quad (2.6)$$

$$(M + dM) - (V + dV) + F(x, t) dx \frac{dx}{2} - M = 0. \quad (2.7)$$

Os diferenciais de esforços cisalhantes e momentos são,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \text{e} \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

Desconsiderando os termos de segunda ordem em  $dx$ , podemos reescrever as Eqs. (2.6) e (2.7) como,

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + F(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - V(x, t) = 0. \quad (2.9)$$

Da teoria de Euler-Bernoulli de viga em flexão tem-se a Eq. (2.10),

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.10)$$

onde,  $E$  é o módulo de Elasticidade. Da Eq. (2.9) temos  $V = \partial M / \partial x$  substituindo a Eq. (2.10) tem-se,

$$V(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right), \quad (2.11)$$

Pode-se substituir a relação (2.11) na Eq. (2.8) e obter a seguinte relação de movimento para a vibração lateral forçada e uniforme de uma viga,

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) + \rho A(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t), \quad (2.12)$$

O deslocamento  $u(x, t)$  pode ser reescrito como o produto entre duas funções  $u(x, t) = \xi(t)\chi(\omega)$ , uma com dependência somente no tempo e outra somente no espaço. Assumindo solução harmônica no tempo  $\xi(t) = e^{i\omega t}$  e no espaço  $\chi(\omega) = e^{ikx}$  obtém-se na seguinte relação de número de onda [38],

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \omega^2. \quad (2.13)$$

Nota-se que esta relação de número de onda possui quatro raízes, duas raízes reais e duas raízes imaginárias. Ou seja, existem ondas propagantes e ondas evanescentes deslocando para a direita e esquerda na viga. Além disto, há uma dependência da frequência concernindo uma relação dispersiva.

## 2.6. Equação de Dispersão de Viga com Ressonadores

Considerando um sistema contínuo com ressonadores periodicamente adicionados na estrutura, como mostrada na Fig. 14, é possível determinar a equação de número de onda por análise de propagação de ondas [39].

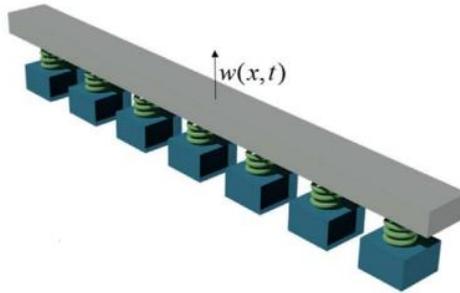


Figura 14. Viga com ressonadores sob vibração flexural [24].

A equação diferencial geral que governa a vibração  $w(x, t)$  do parâmetro distribuído, sob forçamento  $F(x, t)$  têm a seguinte forma,

$$L(x)w(x, t) + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \sum_{p=1}^S k_p u_p(t) \delta(x - x_p) = F(x, t), \quad (2.14)$$

onde,  $L(x)$  é o operador de rigidez,  $\mu$  densidade por unidade de comprimento,  $S$  o número total de ressonadores e  $u_p(t)$  é o deslocamento do ressonador. E a equação de movimento para os ressonadores,

$$m_p \ddot{u}_p(t) + k_p u_p(t) + m_p \ddot{w}(x_p, t) = 0, \quad P = 1, 2, \dots, S \quad (2.15)$$

Assumindo-se o movimento harmônico no tempo dos ressonadores  $u_p(t) = U_p e^{i\omega t}$  e da viga  $w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}$  e substituindo na Eq. (2.15),

$$m_p U_p (i\omega)^2 e^{i\omega t} + k_p U_p e^{i\omega t} + m_p W(x) (i\omega)^2 e^{i\omega t} = 0, \quad (2.16)$$

adotando  $\omega_p^2 = k_p/m_p$  como a frequência de ressonância do  $p$ -ésimo ressonador, pode-se obter a seguinte relação de amplitudes dos ressonadores,

$$U_p = \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} W(x_p). \quad (2.17)$$

Substituindo o operador de rigidez de uma viga em flexão  $L(x) = EI \partial^4 w / \partial x^4$  e  $u_p(t) = U_p e^{i\omega t}$  na Eq. (2.14) [24],

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \sum_{p=1}^S k_p U_p e^{i\omega t} \delta(x - x_p) = F(x, t). \quad (2.18)$$

Dado que  $k_p = \epsilon \mu \Delta L m_p$ , onde  $\epsilon$  é a razão entre a massa total da viga e dos ressonadores e  $\Delta L$  o comprimento da viga, substituindo a relação  $U_p$  da Eq. (2.17) na Eq. (2.18),

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \epsilon \mu m_p \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \sum_{p=1}^S W(x_p) \delta(x - x_p) \Delta L = F(x, t). \quad (2.19)$$

Assumindo ressonadores idênticos  $\omega_p = \omega_r$  e um número suficientemente grande de ressonadores então,

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^S W(x_p) \delta(x - x_p) \Delta L \approx \int_{-\infty}^{\infty} W(\zeta) \delta(\zeta - x) d\zeta = w(x). \quad (2.20)$$

Aplicando a relação da Eq. (2.20) e assumindo movimento harmônico no tempo e espaço  $W(x, t) = A e^{i\omega t} e^{ikx}$  pode-se reescrever a Eq.(2.19) como [24] [26],

$$EI k^4 - \mu \omega^2 - \epsilon \mu \omega^2 \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = F(x, t). \quad (2.21)$$

Considerando vibração livre obtém-se a relação de dispersão de uma viga com ressonadores,

$$k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \mu}{EI} \left( 1 + \epsilon \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 - \omega^2} \right)}. \quad (2.23)$$

## 2.7. Equação de Placas Finas

Para descrever a equação diferencial do movimento transversal em placas finas torna-se necessário estudar o efeito de diferentes variáveis de forças e momentos agindo sobre a mesma, mostrada na Fig. 15. Sabendo-se que  $w(x, y, t)$  representa o deslocamento normal,  $dxdy$  a área e  $\nu$  coeficiente de Poisson do elemento de placa isotrópico [33] [40].

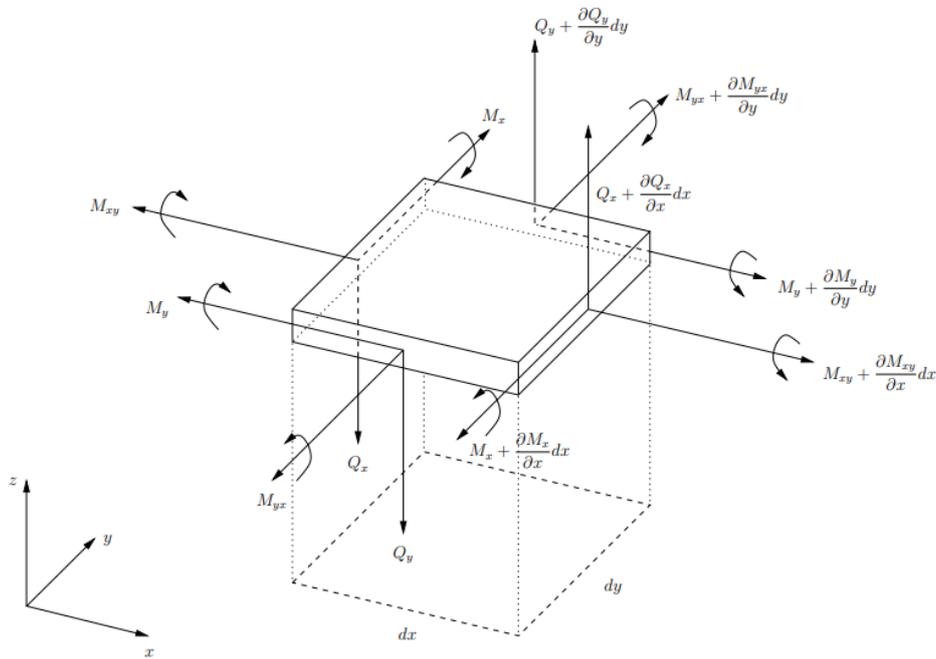


Figura 15. Elemento de placa com aplicações de forças e momentos [40].

Dado os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  por unidade de comprimento [40],

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.24)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.25)$$

Considerando os momentos torsores  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  são iguais nas direções  $x$  e  $y$ ,

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.26)$$

e, por fim a força cortante,

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (2.17)$$

$$Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (2.28)$$

onde,  $D$  representa a rigidez flexural dada por [40],

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2.29)$$

sendo,  $E$  o módulo de *Young* e  $h$  a espessura da placa. Fazendo o equilíbrio de forças cortantes e momentos torsores tem-se a forças cortantes equivalente  $V_x$  na direção  $x$  e  $V_y$  na direção  $y$  [40],

$$V_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad (2.30)$$

$$V_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Dadas as relações de equilíbrio [41],

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_y &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sabendo-se que  $M_{xy} = -M_{yx}$  e substituindo as Eqs. (2.30) e (2.31) na Eq. (2.32) obtêm-se a equação do movimento para placas finas,

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t). \quad (2.23)$$

Assumindo-se movimento harmônico do tipo,

$$w(x, y, t) = W e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (2.24)$$

onde,  $k_x$  e  $k_y$  são os números de ondas nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.23) tem-se,

$$D(k_x^4 - k_x^2 k_y^2 - k_y^4) - \rho h \omega^2 = 0. \quad (2.25)$$

Reescrevendo a Eq. (2.25) encontra-se o número de onda,

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega}{D}}, \quad (2.26)$$

onde, o número de onda  $k$  pode ser representado pela combinação entre o número de onda  $k_x$  na direção  $x$  e  $k_y$  na direção  $y$ ,

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (2.27)$$

Da relação de número de onda, pode-se obter a velocidade de fase e de grupo [33],

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt[4]{\frac{E h^2}{12 \rho (1 - \nu^2)}} \omega^2, \quad (2.28)$$

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \sqrt[4]{\frac{E h^2}{12 \rho (1 - \nu^2)}} \omega^2. \quad (2.29)$$

## 2.8. Densidade Modal

A densidade modal está relacionada com a capacidade de armazenamento de energia vibratória nas ressonâncias, assim indica a dimensão da estrutura em termos de números de modos e depende diretamente da dimensão física e velocidade de grupo do subsistema em estudo. Em baixas frequências, onde os modos estão suficientemente afastados entre si para serem claramente identificados, a densidade modal  $n(\omega)$  é definida como a razão entre o número de modos de vibração  $\Delta N$  presentes em uma banda de frequência  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , isto é [42],

$$n(\omega) = \frac{\Delta N}{\Delta\omega}. \quad (2.30)$$

No caso de frequências mais elevadas nas quais há alta sobreposição modal, isto é, um grande número de modos em uma faixa estreita de frequência, a abordagem utilizada é baseada em métodos de fechamento de fase. Mead [43] relaciona a existência de uma frequência de ressonância a cada mudança total de fase de uma onda, ou seja, quando esta for um múltiplo de um número inteiro de  $2\pi$ . Em estruturas unidimensionais de comprimento  $L$ , como em vigas, o fechamento de fase total  $\Phi_T$  é dado por,

$$\Phi_T = kL + \Phi_A + kL + \Phi_B, \quad (2.31)$$

onde,  $\Phi_A$  e  $\Phi_B$  são as mudanças de fases nas extremidades da viga. Em uma banda  $\delta\omega$ , a mudança de fase é definida por  $2\pi L$ , pois  $\Phi_A$  e  $\Phi_B$  geralmente variam lentamente com a frequência. Assim, dado que o número de modos é múltiplo de  $2\pi$ , tal que,

$$N = \frac{kL}{\pi}, \quad (2.32)$$

Da relação da Eq. (2.31) pode-se chegar à relação de densidade modal em estruturas unidimensionais,

$$n(\omega) = \frac{L}{\pi} \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{L}{\pi c_g}. \quad (2.33)$$

Em estruturas bidimensionais, como placas, com dimensões  $L_x$  e  $L_y$  na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente, o número de modos pode ser aproximado pela área sob a curva  $k(\omega)$ , mostrada na Fig.16, onde cada “+” indica a ocorrência de frequência natural [42].

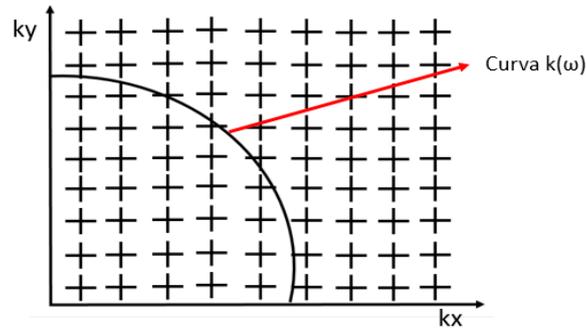


Figura 16. Número de modos sob a curva  $k(\omega)$ .

Uma frequência natural ocorre toda vez que  $k_x$  muda de  $\pi/L_x$  e que  $k_y$  muda de  $\pi/L_y$ , ou seja, a área no domínio  $k$  é igual a  $\pi^2/L_x L_y$ . Sabendo-se que a área sob a curva da Fig. 16 é igual a  $\pi k^2/4$ , pode-se calcular o número de modos, tal que,

$$N = \frac{k^2 A}{4\pi}, \quad (2.34)$$

onde,  $A$  é a área da superfície bidimensional.

Derivando a Eq.(2.34) em relação a  $\omega$ , tem-se a expressão para densidade modal,

$$n(\omega) = \frac{\partial N}{\partial \omega} = \frac{\partial N}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{kA}{2\pi c_g}, \quad (2.35)$$

A densidade modal é a capacidade de armazenamento de energia que depende da velocidade média com que as ondas propagam energia através do sistema e a dimensão global do sistema. O princípio de fechamento de fase assume que não há mais de um tipo de onda e que a presença das ondas evanescentes pode ser desprezada [42].

## 2.9. Energia e Potência Mecânica

Quando uma onda se propaga por um sólido elástico não somente ela é movimentada, como também a estrutura sofre deformações elásticas. Isto implica que a energia transmitida pela estrutura deve estar presente na forma de energia cinética, associada ao movimento, e na forma de energia potencial elástica, associada à deformação.

A energia cinética,  $E_c$ , está relacionada com o movimento dos corpos e está intrinsecamente ligada ao valor da massa do objeto e a velocidade de movimento,  $V$ . Para o caso de uma estrutura unidimensional definida em um domínio  $D$ , é possível definir sua energia cinética por,

$$E_c = \int_D \frac{1}{2} \mu |V(x, \omega)|^2 dx, \quad (2.36)$$

onde,  $\mu$  é a densidade por unidade de comprimento. A energia potencial,  $E_p$ , é aquela armazenada a partir de uma deformação elástica. Assumindo-se movimento harmônico, pode-se dizer que a  $E_c = E_p$  nas bandas de frequência onde a resposta ressonante é dominante. Pode-se definir a potência dissipada  $P_{diss}$  em uma região de ressonância com frequência central  $\omega_0$  como [44],

$$\Pi_{diss} = \omega_0 n E_T, \quad (2.37)$$

onde,  $E_T$  é a energia mecânica total e é definida como a soma das energias potência e cinética,

$$E_T = E_c + E_p \approx 2E_c. \quad (2.38)$$

Em condição de regime permanente, a potência injetada  $\Pi_{in}$  de um sistema é totalmente dissipada através de uma ou mais formas de amortecimento, tais como, absorção acústica e amortecimento estrutural, ou seja,  $\Pi_{diss} = \Pi_{in}$ . Pode-se mostrar que a potência injetada em um sistema em flexão é definida como,

$$\Pi_{in} = \frac{1}{4\rho A c_g}, \quad (2.37)$$

onde,  $\rho$  é a densidade e  $A$  é a área transversal. A potência dissipada em um subsistema depende do nível de energia e do fator de perda por amortecimento.

### 3. Métodos de Estimações de Números de Ondas e Aparatos Experimentais

Neste capítulo são apresentados os métodos experimentais de identificação de número de onda abordadas neste trabalho. O primeiro método utiliza a FRF (Função de Resposta em Frequência) em três pontos uniformemente espaçados na estrutura, o segundo utiliza o conceito de frequência espacial e transformada de *Fourier* e o último o método de correlação. Apresentam-se o aparato experimental, as propriedades mecânicas e geométricas das estruturas estudadas. Alguns conceitos, tais como, função de correlação, máximo e mínimo número de onda mensurável também são abordados.

#### 3.1. Método FRF

Este método foi aplicado por Muggleton *et al.* [45] que calcularam o número de onda usando respostas dinâmicas tomadas em três locais igualmente espaçados na estrutura. O mesmo se origina do fato que o estado de equilíbrio da resposta é a superposição das ondas que percorrem ao longo da estrutura. Como apenas um tipo de onda deveria ser propagado na estrutura, o número de onda pela direita é igual ao número de onda pela esquerda, ou seja,  $k^+ = k^-$  assim, pode-se derivar relações simples para sua estimativa [20].

A partir da equação geral da onda em vigas e considerando uma onda se propagando na direção  $x$ , o campo de deslocamento  $a(x, t)$  pode ser escrito considerando uma componente positiva  $a^+$  e uma negativa  $a^-$  de amplitude,

$$a(x, t) = a^+ e^{i(\omega t - kx)} + a^- e^{i(\omega t + kx)}. \quad (3.1)$$

Considerando três pontos de medidas  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  igualmente espaçados em  $x_1 = -d$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = d$ , como mostrado na Fig. 17.

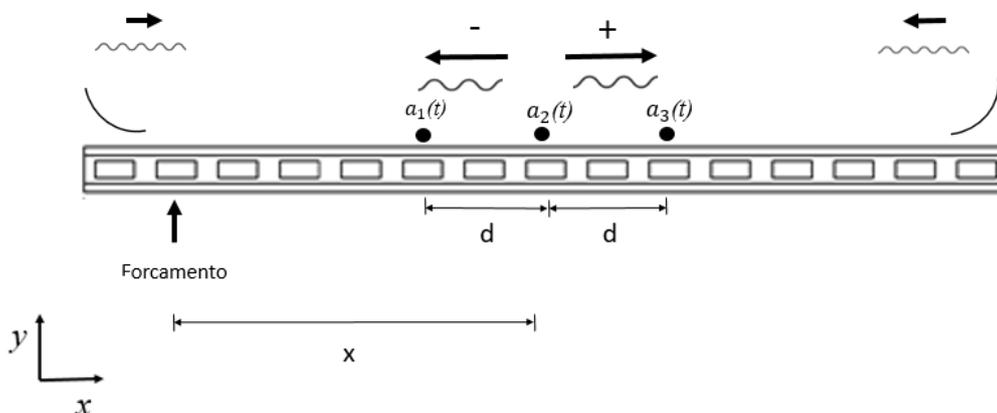


Figura 17. Representação do método de estimação do número de onda via três pontos de medições.

Os números de pontos de medidas localizadas na estrutura são iguais aos números de incógnitas. No caso, se tem três pontos de medidas cujo ponto central é  $a_2(x, t)$  localizada a uma distancia  $x$  do forçamento. Logo, seus respectivos deslocamentos são dados por,

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= -\omega^2(a^+ e^{ikd} + a^- e^{-ikd})e^{i\omega t} = A_1(\omega)e^{i\omega t}, \\ a_2(x, t) &= -\omega^2(a^+ + a^-)e^{i\omega t} = A_2(\omega)e^{i\omega t}, \\ a_3(x, t) &= -\omega^2(a^+ e^{-ikd} + a^- e^{ikd})e^{i\omega t} = A_3(\omega)e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A viga é sujeita a um forçamento arbitrário  $f(t)$  e assim se pode medir as velocidades de campo de cada ponto, ou seja, obter-se as FRFs dadas por  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . Fazendo a combinação das Eqs. (3.2) tem-se,

$$\frac{A_1(\omega) + A_3(\omega)}{A_2(\omega)} = \frac{a^+ e^{ikx} + a^- e^{-ikx} + a^+ e^{ikx} + a^- e^{-ikx}}{a^+ + a^-}. \quad (3.3)$$

Reorganizando e aplicando a relação de Euler,

$$\frac{A_1(\omega) + A_3(\omega)}{A_2(\omega)} = e^{ikx} + e^{-ikx} = \cos(kd). \quad (3.4)$$

Obtém-se a relação de número de onda a partir das respostas em frequências e dos espaçamentos do ponto de mediação [20] [45] [46],

$$k = \frac{\cos^{-1}\left(\frac{A_1(\omega) + A_3(\omega)}{2A_2(\omega)}\right)}{d}. \quad (3.5)$$

É importante observar que a precisão do método é fortemente dependente da posição da medida central e do espaçamento adequado entre os três pontos de medidas. Portanto, este método requer um conhecimento prévio dos comprimentos de ondas esperados [20] [45].

### 3.2. Identificação do Número de Onda via Frequência Espacial

A análise da Forma de Deflexão Operacional (*Operating Deflection Shape* - ODS) investiga a forma como uma estrutura vibra em um determinado instante de tempo ou frequência, obtida através de medições do campo de deslocamentos. O modo operacional é a combinação linear dos modos do sistema, portanto as frequências de vibrações não coincidem necessariamente com uma das frequências naturais. Qualquer movimento forçado da estrutura ao ser especificado define uma forma, denominada modo operacional e ao aplicar a Transformada *Fourier* na ODS obtém-se o número de onda a cada frequência.

### 3.2.1 Método de Séries de *Fourier* Discreta Regressiva

O método de Séries de *Fourier* Discreta Regressiva (RDFS) usa aproximações por mínimos quadrados para estimar os coeficientes de uma série de *Fourier* discreta. Desta forma, sabendo-se qual forma de onda propaga-se na estrutura (ODS) para cada frequência pode-se aplicar a RDFS e obter o número de onda, em estruturas unidimensionais e bidimensionais [47] [48].

Considerando uma estrutura bidimensional cuja transformada de *Fourier* discreta  $X(k, l)$  da ODS é definida como,

$$X(p, l) = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-i\left(\frac{2\pi}{M}\right)np} e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)nl}, \quad (3.6)$$

onde,  $p = 0, 1, \dots, N - 1$  e  $l = 0, 1, \dots, M - 1$  são as discretizações,  $m$  e  $n$  são índices inteiros,  $M$  e  $N$  são os períodos da série de *Fourier* discreta nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente e  $x(m, n)$  é a ODS dada por uma sequência discreta com valores somente para  $m = 0, 1, \dots, M - 1$  e  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ . Fazendo  $W_N = e^{j(2\pi/N)}$  e  $W_M = e^{j(2\pi/M)}$  pode-se reescrever a Eq.(3.6),

$$X(p, l) = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) W_M^{-np} W_N^{-nl}, \quad (3.7)$$

Considerando-se um período estendido em que  $MM > M$  e  $NN > N$  e um termo de ruído aditivo  $\varepsilon_{nm}$ , a inversa da Eq.(3.7) pode ser escrita como,

$$x = W_{NM} X W_{NM} + \varepsilon_{nm}. \quad (3.8)$$

A solução de mínimos quadrados é dada por,

$$\hat{X} = (W_{MM}^H W_{MM})^{-1} W_{MM}^H H W_{NN}^H (W_{NN}^H W_{NN})^{-1}, \quad (3.9)$$

sendo,  $( )^H$  o conjugado complexo das matrizes  $W_{NN}$  e  $W_{MM}$  e  $( )^{-1}$  a matriz inversa. O sinal suavizado é dado por [48] [49],

$$\hat{x} = W_{MM} \hat{X} W_{NN}, \quad (3.10)$$

Dada a superfície da Fig. 18 (a) obtida através da Eq. (3.11), em que é contaminada com um ruído aditivo  $\varepsilon(x, y)$ , Fig.18 (b). Aplicando o método RDFS é possível recuperar o sinal original com um erro de 10% como mostrado na Fig. 18 (c), adotando números de linhas espectrais iguais a  $M = 51$  e  $N = 41$ , e o período da série regressiva de  $P = 2$  e  $Q = 2$ .

$$z(x, y) = \sin(x) \cos(y) \quad (3.11)$$

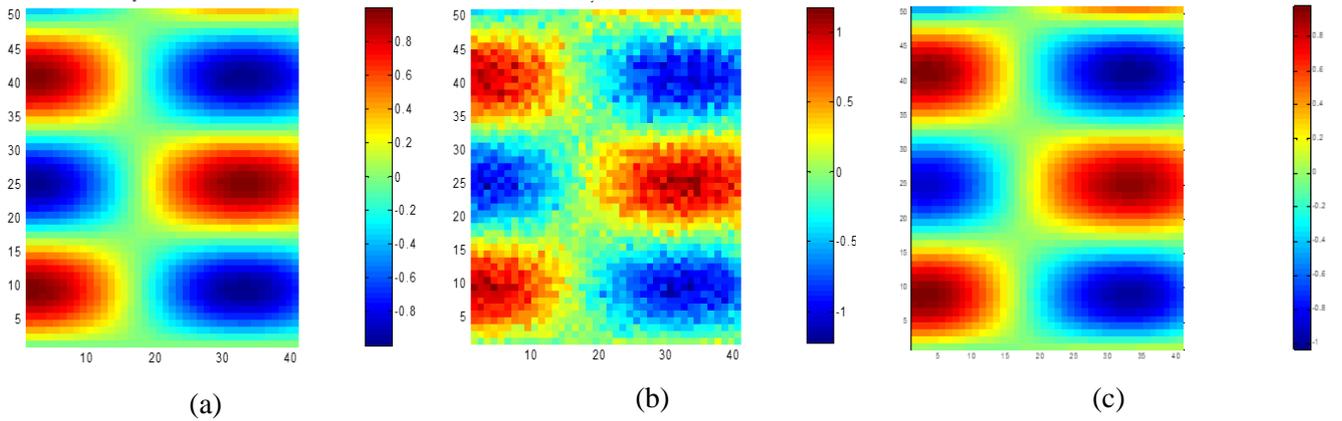


Figura 18. Exemplo de aplicação do método RDFS: (a) sinal original, (b) sinal contaminado e (c) sinal reestaurado.

Em superfícies unidimensionais, o procedimento é análogo ao apresentado anteriormente. Considerando a Transformada de *Fourier* Discreta de uma sequência finita  $x(n)$  com valores para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , i.e., somente para  $N$  pontos representada pela seguinte equação,

$$X(l) = \sum_{n=-P}^P x(n) e^{-i\left(\frac{2\pi}{M}\right)nl}, \quad (3.12)$$

onde,  $M$  é o período da série de *Fourier* discreta e  $P$  são as linhas de frequência. A solução via mínimos quadrados [26] [48],

$$\hat{X} = (W^H W)^{-1} W^H x, \quad (3.13)$$

sinal suavizado [26] [48],

$$\hat{x} = \hat{W} X. \quad (3.14)$$

A periodização pode introduzir componentes de alta frequência na suavização, o que pode prejudicar consideravelmente os métodos baseados em Transformada Discreta de *Fourier*. Este efeito é mais considerável em estruturas com condições de contornos livres. Outro ponto importante é que neste método é preciso definir o período da série regressiva, ou seja, comprimento da série e o número de linhas espectrais de frequência. Diante disto, necessita-se escolher corretamente estes parâmetros iniciais para a precisão do método [47] [48]. Na maioria dos casos, o período ideal situa-se entre o comprimento real dos dados e duas vezes esse comprimento, mas nesta metodologia a escolha deste parâmetro, assim como o número de linhas espectrais de frequência, ainda é ímpirica.

### 3.3. Método de Correlação

Também denominado *Inhomogeneous Wave Correlation (IWC)*, este método é o mais usado para estimar número de onda em estruturas unidimensionais e bidimensionais [26] [12] [50]. Considerando a propagação de ondas harmônicas  $\hat{w}(x, y)$  em uma estrutura bidimensional, como em placas retangulares, cujo a Transformada de *Fourier* é dada por [51],

$$w(x, y, \omega) = \int_0^{+\infty} \hat{w}(x, y) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.15)$$

O coeficiente de correlação  $\psi(k_x, k_y, \omega)$  atinge o máximo quando,

$$\psi(k_x, k_y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, \omega) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy, \quad (3.16)$$

onde,  $\omega$  frequência e  $k_x, k_y$  são os números de onda nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, que são escolhidos de maneira a maximizar a correlação e fornecer a melhor estimativa dos números de onda flexurais dominante [18] [50].

Sendo  $l_x$  e  $l_y$  as dimensões de uma placa retangular nas direções  $x$  e  $y$  pode-se reescrever a Eq. (3.16),

$$\psi(k_x, k_y, \omega) = \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} w(x, y, \omega) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy. \quad (3.17)$$

O campo de deslocamentos é medido em pontos discretizados uniformemente na estrutura  $(x_i, y_j)$  nas direções  $x$  e  $y$ , sendo  $N$  o número total de medidas em cada direção. A Eq. (3.17) pode ser reescrita como,

$$\psi(k_x, k_y, \omega) = \frac{l_x l_y}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w(x_i, y_j, \omega) e^{-ik_x x_i} e^{-ik_y y_j}. \quad (3.18)$$

Outra maneira de analisar o número de onda por esta técnica é fixar uma frequência e obter a correlação da resposta espacial  $\sigma_{k,\gamma,\theta}(x, y)$  dada por [19],

$$\sigma_{k,\gamma,\theta}(x, y) = e^{-ik(\theta)(1 + i\lambda(\theta))(x\cos\theta + y\sin\theta)}, \quad (3.19)$$

onde,  $\theta$  é o ângulo e  $\lambda$  é o fator de atenuação determinado por  $\gamma = \eta C_f / C_g$ , sendo  $\eta$  definido como fator de perda.

Para uma estrutura unidimensional, como uma viga, o coeficiente de correlação é calculado com procedimentos análogos. Considerando  $L$  o comprimento da estrutura,  $N$  o número de pontos medidos e  $k_x$  a estimativa do número de onda na direção  $x$ , o coeficiente de correlação é determinado por,

$$\psi(k_x, \omega) = \frac{L}{N} \sum_{i=1}^N w(x_i, \omega) e^{-ik_x x_i}. \quad (3.20)$$

### 3.4. Máximo e Mínimo Número de Onda Mensurável

Do teorema de amostragem de *Nyquist* tem-se que a frequência de amostragem deve ser, no mínimo, igual ao dobro da frequência máxima do sinal em análise, caso contrário, ocorre a sobreposição do espectro (*aliasing*) impossibilitando a recuperação do sinal original. Similarmente, a amostragem no espaço  $dx$  determina o máximo número de onda mensurável, dado pela seguinte relação,

$$k_{max} = \frac{\pi}{dx}. \quad (3.21)$$

O máximo número de onda é influenciado pela discretização espacial do sinal. Já o mínimo é determinado pela presença de ondas evanescentes e o comprimento de onda em baixas frequências, dado que o espaçamento entre os pontos de medição não são suficientemente grande para comportar adequadamente o comprimento de onda [20].

### 3.5. Função de Coerência

Os equipamentos de medições utilizados durante os testes de análise modal geralmente contêm componentes aleatórios que influenciam nos dados medidos de forma determinística, ou seja, ruído. Com o objetivo de diminuir ou eliminar estes componentes, testes idênticos são realizados e calcula-se a média a fim de aumentar a confiança nos dados experimentais. A Função Resposta em Frequência também pode ser relacionada à função de correlação cruzada  $R_{xy}$  entre dois sinais  $x(t)$  e  $y(t)$ , definida pela seguinte equação [52],

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(\tau - t) d\tau. \quad (3.22)$$

Aplicando-se a Transformada de *Fourier* na função de autocorrelação obtêm-se a densidade espectral de potência cruzada  $S_{xy}$ ,

$$S_{xy} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} dt. \quad (3.23)$$

As funções de densidade e correlação se relacionam com a FRF pelas seguintes relações,

$$H_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad (3.24)$$

$$H_2 = \frac{S_{yy}}{S_{yx}}, \quad (3.25)$$

$$H_T = \frac{S_{yy} - S_{xx} + \sqrt{(S_{xx} - S_{yy})^2 + 4S_{xy}^2}}{2S_{yx}}. \quad (3.26)$$

onde, o estimador  $H_1$  considera ruído na entrada e  $H_2$  considera ruído na saída, assim superestimando a FRF nas regiões de ressonância e anti-ressonância respectivamente. E o estimador  $H_T$  analisa ruído tanto na entrada quanto na saída. A função de coerência  $\gamma^2$  é definida como a razão entre os valores de  $H_1$  e  $H_2$  e determinada pela seguinte equação [52],

$$\gamma^2 = \frac{|S_{xy}|^2}{S_{xx}S_{yy}}. \quad (3.27)$$

A coerência é uma medida de ruído entre dois sinais, com valores entre 0 e 1. Se o valor de coerência é 0 (zero) o sinal é um ruído puro e quando o valor é igual a 1 (um) os dados não estão contaminados [52]. Quando traçado em função da frequência, perto das ressonâncias, o traçado é ruidoso e distante do valor unitário. Na Fig. 19, pode-se observar um típico gráfico de função de coerência.

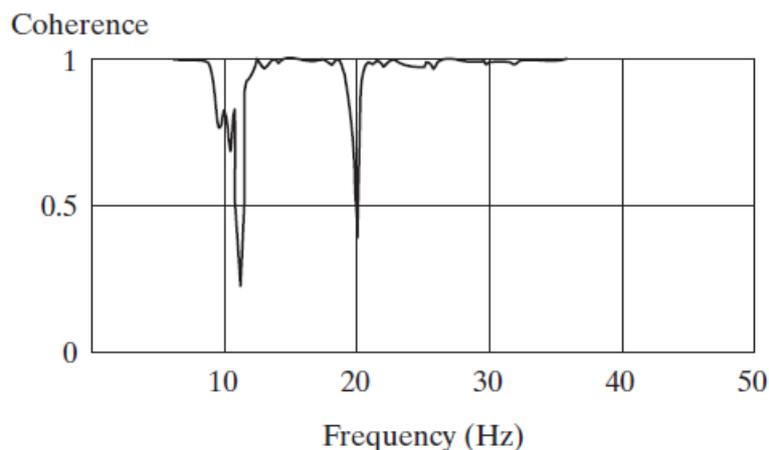


Figura 19. Traçado da função de coerência [52].

### 3.6. Propriedades e Geometrias das Estruturas

Neste trabalho foram testadas experimentalmente quatro estruturas: vigas de metal, de poliamida, de metamaterial e um painel compósito. A seguir, são apresentadas as propriedades e geometrias de cada estrutura.

#### 3.6.1. Viga Metálica

A primeira estrutura analisada neste trabalho é uma viga de aço com seção retangular, como pode ser observado na Fig. 20, e suas propriedades foram obtidas no trabalho de Travi [53] e mostradas na Tabela 2.



Figura 20. Viga metálica de seção retangular.

Tabela 2. Propriedades e geometrias da viga de metal.

<b>Propriedades e Geometrias</b>	
Módulo de Elasticidade [GPa]	181,81
Densidade [Kg/m <sup>3</sup> ]	7452,8
Comprimento [mm]	500,00
Largura [mm]	25,48
Altura [mm]	4,90
Peso [kg]	0,641

#### 3.6.2. Vigas Sintetizadas

As vigas de poliamidas foram produzidas a partir de métodos de impressão 3D via Sinterização Laser Seletiva (SLS), ambas com perfil I. Um dos modelos consiste em uma viga simples, Fig. 21 (a), e a outra possui ressonadores mecânicos, também denominada metamaterial, mostrada na Fig. 21 (b) [54].



Figura 21. Vigas sintetizadas: (a) simples e (b) com ressonadores.

Os ressoadores mecânicos foram periodicamente fixados em ambas laterais da estrutura, totalizando 15 unidades, e a geometria mostrada na Fig. 22.

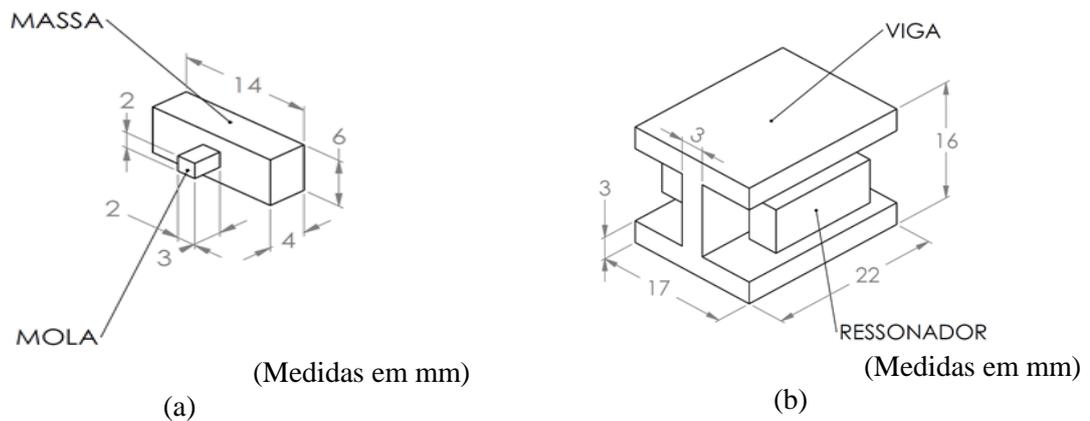


Figura 22. Geometria: (a) ressonador mecânico e (b) célula unitária [54].

Silva [54] analisou as propriedades e geometrias de ambas as vigas sintetizadas que são apresentadas na Tabela 3. A viga simples de poliamida e com ressonadores pesam aproximadamente 33,764 g e 46,933 g, respectivamente.

Tabela 3. Propriedades e geometrias das vigas de poliamidas [54].

Propriedades e Geometrias	Viga	Ressonador - massa	Ressonador - mola
Modulo de Elasticidade [GPa]	1,28	0,96	0,72
Densidade [Kg/m <sup>3</sup> ]	792,02	1000	700
Comprimento [mm]	330,00	14	2
Largura [mm]	16,95	4	3
Altura [mm]	15,94	6	4

### 3.6.3. Painel Compósito

Conforme apresentado no Capítulo 2, o painel compósito do tipo sanduíche com núcleo de *honeycomb* é composto por três camadas fundamentais: núcleo, face superior e face inferior. O painel em estudo possui faces e núcleo de liga de alumínio 2024 e com revestimento CRIII, fornecendo proteção para ambientes corrosivos, como mostrado na Fig. 23. Suas propriedades e geometrias estão apresentadas na Tabela 4, cujos dados estão disponíveis na página do fabricante [55].

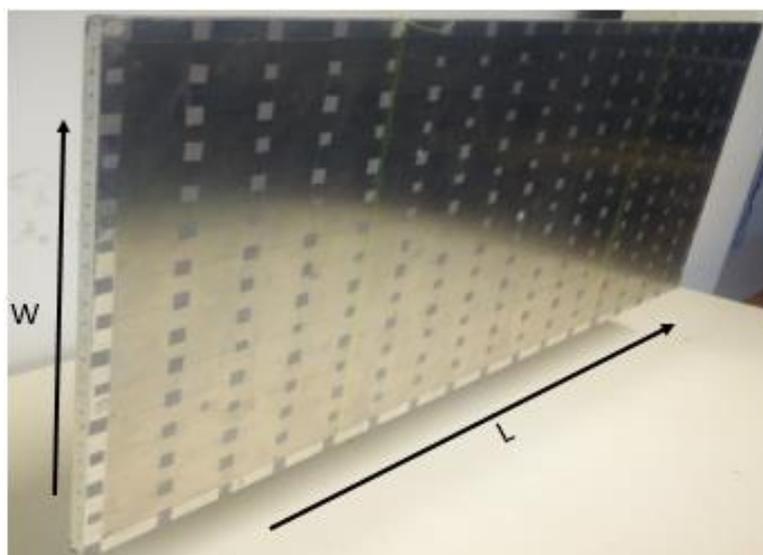


Figura 23. Painel compósito do tipo sanduíche com núcleo de *honeycomb*.

Tabela 4. Propriedades e geometrias do painel *HexWeb* CRIII – AL 5056 – ¼” [55].

<b>Propriedades e Geometrias</b>	
Módulo de Elasticidade [GPa]	70
Coefficiente de <i>Poisson</i>	0,33
Massa Específica [Kg/m <sup>3</sup> ]	2780
Espessura [mm]	10
Direção <i>L</i> [mm]	670
Direção <i>W</i> [mm]	300
Peso [kg]	0,489

O núcleo *honeycomb* possui característica ortotrópica com módulo de cisalhamento na direção *L* de 220 Mpa e na direção *W* de 103 Mpa com massa específica de 37 Kg/m<sup>3</sup>.

### 3.7. Aparato Experimental

Para que as análises experimentais de propagação de ondas em cada estrutura, anteriormente apresentadas, sejam capazes de representar os sistemas sob investigação de forma precisa e confiável é de fundamental importância que as instrumentações e configurações requeridas sejam adequadamente adotadas. A técnica experimental adotada para as vigas consiste em um ensaio de impacto onde a estrutura é excitada manualmente através de força impulsiva de curta duração empregada por uma batida de um martelo modal e a resposta dinâmica medida por um acelerômetro. Já o painel compósito foi excitado mecanicamente por um *shaker* eletromecânico e a resposta dinâmica foi medida por vibrômetro a laser. Na escolha dos equipamentos foram considerados alguns fatores, tais como: alcance dinâmico, amortecimento estrutural, inserção de variabilidade a medida, precisão e disponibilidade.

#### 3.7.1. Configuração para a Viga Metálica

A excitação da viga metálica foi gerada manualmente por um martelo instrumentado, com ponteiras de nylon a fim de excitar um número de frequências adequadas, procurou-se de forma impírica manter o mesmo ponto da batida na direção perpendicular a superfície. A resposta do sistema foi medida na forma de aceleração por um acelerômetro piezoelétrico fixado na estrutura utilizando cera de abelha. A condição de contorno livre-livre foi aplicada colocando a viga sobre uma espuma flexível de poliuretano. O arranjo experimental é mostrado na Fig. 24 e os modelos são especificados na Tabela 5. A faixa de frequência analisada foi de 0 a 2200 Hz, a frequência de amostragem de 6000 Hz e número de pontos de frequência de 2689.

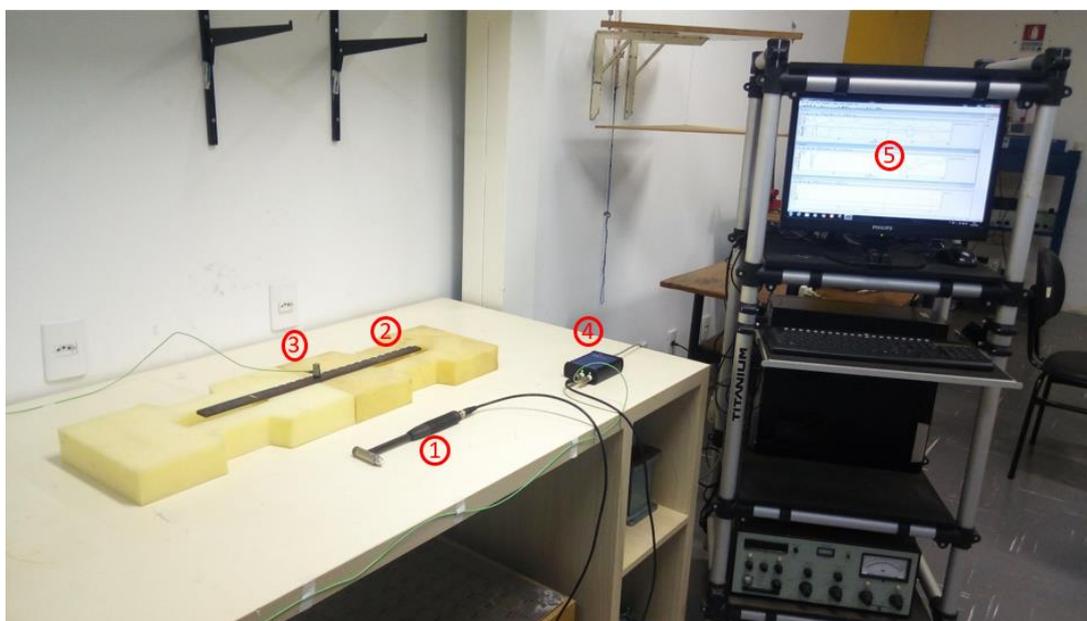
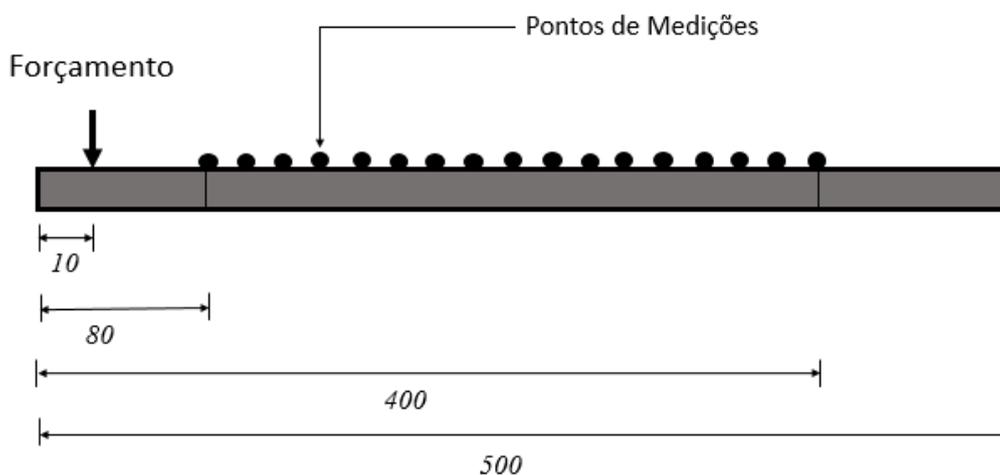


Figura 24. Aparato experimental da viga metálica, os números indicam equipamentos apresentados na Tabela 5.

Tabela 5. Modelos dos equipamentos utilizados no experimento da viga metálica.

Item	Equipamento	Modelo
1	Martelo modal	PCB086C01-Nylon
2	Viga	Aço
3	Acelerômetro	PCB352C33
4	Placa de aquisição	National Instrument - eDAQ 917
5	Software	Vibsolft 5.5

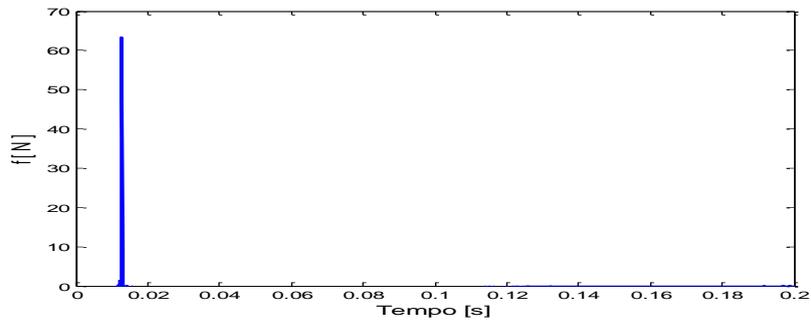
Como observado na Fig. 25, o ponto de excitação localiza-se a 10 mm da extremidade esquerda da viga com espaçamento mínimo entre as medidas realizadas pelo acelerômetro de 20 mm, totalizando 17 pontos de medições. Contudo, os deslocamentos nas extremidades não foram analisados devido à forte ocorrência de ondas evanescentes nestas regiões.



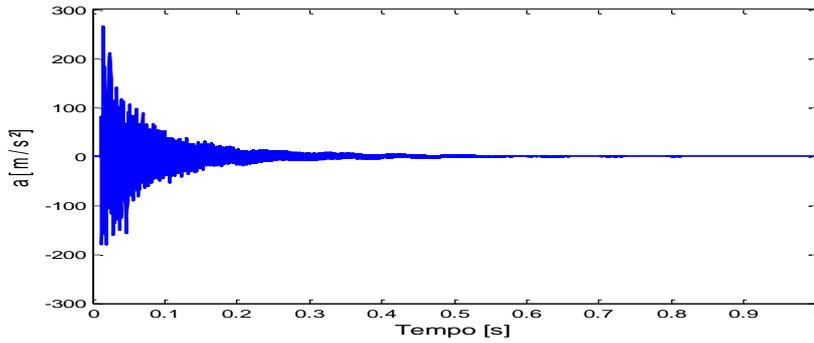
(Medidas em mm)

Figura 25. Representação dos pontos de medição capturados no ensaio experimental da viga metálica.

Na resposta medida pelo acelerômetro, utilizou-se uma janela exponencial devido ao transiente natural da excitação, e no sinal de entrada aplicou-se uma janela de força para eliminar ruídos de instrumentação presentes antes e/ou depois do impulso, como apresentado na Fig. 26. Foram realizadas três medidas e calculada a média para cada ponto de FRF capturado na estrutura com o objetivo de eliminar pequenas variações encontradas nos dados experimentais.



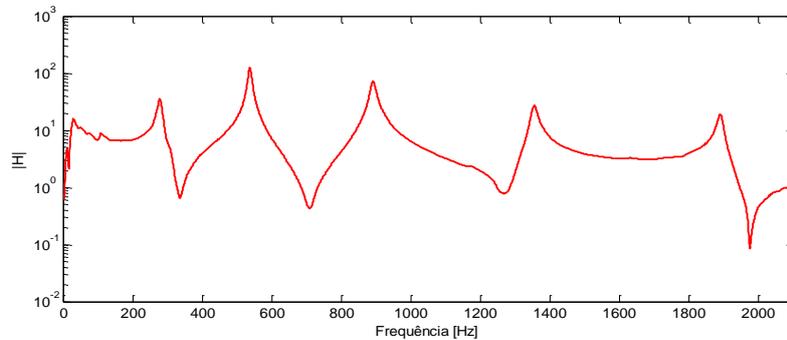
(a)



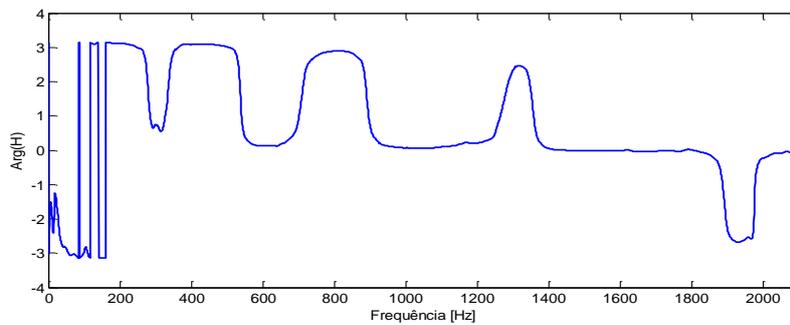
(b)

Figura 26. Típicas curvas de: (a) forçamento e (b) aceleração medidos na viga metálica.

É importante observar que não houve repique nos resultados de forçamentos, evitando a inserção de ruído aos dados experimentais. A Fig. 27 (a) mostra a curva de amplitude, onde é possível verificar os picos de ressonância e anti-ressonância, e a curva de fase (b) em que os ângulos não são exatamente  $0^\circ$  ou  $-180^\circ$  devido a presença de amortecimento.



(a)



(b)

Figura 27. Típicas curvas de (a) amplitude e (b) fase da viga metálica.

Na Fig. 28, é apresentada uma típica curva de coerência da viga de aço, onde é possível observar as variações nas regiões de anti-ressonância. Estas ocorrem devido à grande variação de fase nestas frequências, o que pode ser reduzido melhorando a resolução do estimador através da largura de banda. Além disso, o afastamento do valor unitário acima de 1900 Hz é devido ao conteúdo espectral do martelo que não é grande o suficiente para excitar todos os modos.

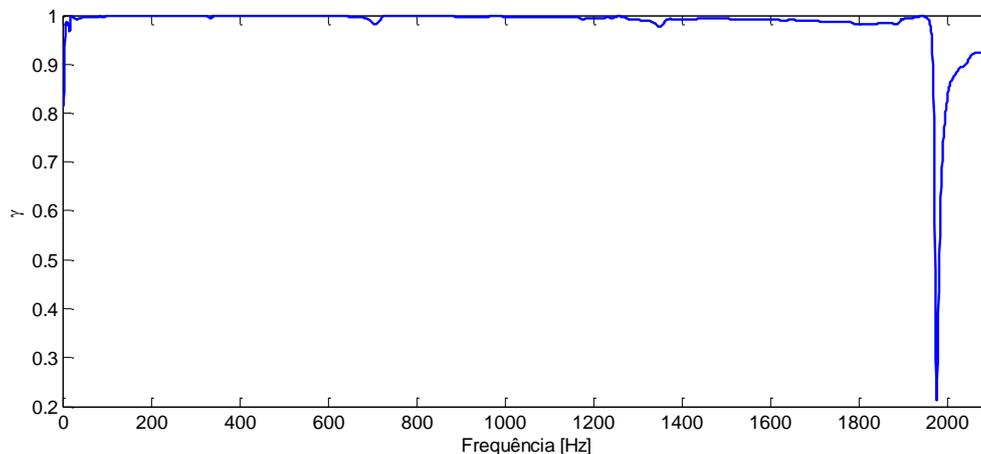
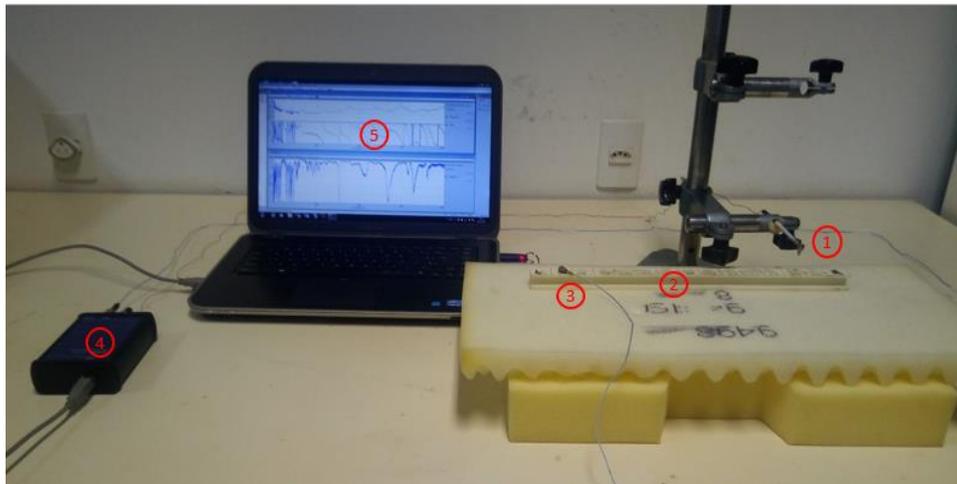


Figura 28. Típica curva de coerência da viga metálica.

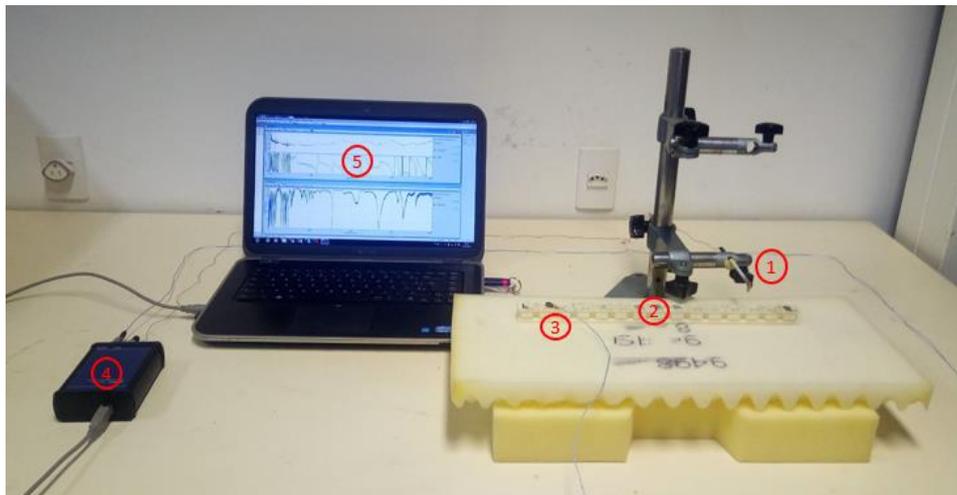
Observava-se nas Figs. 27 e 28 o efeito da condição de contorno, impregada pela espuma de espuma flexível de poliuretano, através das descontinuidades apresentadas em baixas frequências. A massa do acelerômetro é aproximadamente igual a 1,9 % da massa da amostra e então os efeitos de adição de massa podem ser descartados [56].

### 3.7.2. Configuração para as Vigas de Sintetizadas

Para as vigas sintetizadas, a excitação foi gerada manualmente através de um mini-martelo instrumentado. O ponto da batida foi garantido por meio de um aparato montado com um suporte universal ao qual o mini-martelo foi fixado, como apresentado na Fig. 29. A resposta dinâmica foi capturada por um mini-acelerômetro anexado à estrutura por meio de fina camada de cera de abelha. Análogo a viga metálica, a condição de contorno livre-livre foi aplicada colocando as vigas sobre uma espuma flexível de poliuretano. O aparato experimental é apresentado na Fig. 29 e os modelos especificados na Tabela 6. A faixa de frequência analisada foi de 0 a 2000 Hz, frequência de amostragem foi de 5120 Hz e números de pontos de frequência de 2560.



(a)



(b)

Figura 29. Aparato experimental da viga de poliamida: (a) simples e (b) com ressonadores, os números indicam equipamentos apresentados na Tabela 6.

Tabela 6. Modelos dos equipamentos utilizados no experimento das vigas sintetizadas.

Item	Equipamento	Modelo
1	Martelo modal	PCB084A17
2	Viga	Poliamida
3	Acelerômetro	352A21
4	Placa de aquisição	National Instrument - eDAQ 917
5	Software	Vibsoft 5.5

O ponto de excitação foi a 14 mm da extremidade esquerda da viga e o espaçamento mínimo entre as medidas foi de 11 mm, para ambas as vigas, totalizando 23 pontos de medição, como observado na Fig. 30.

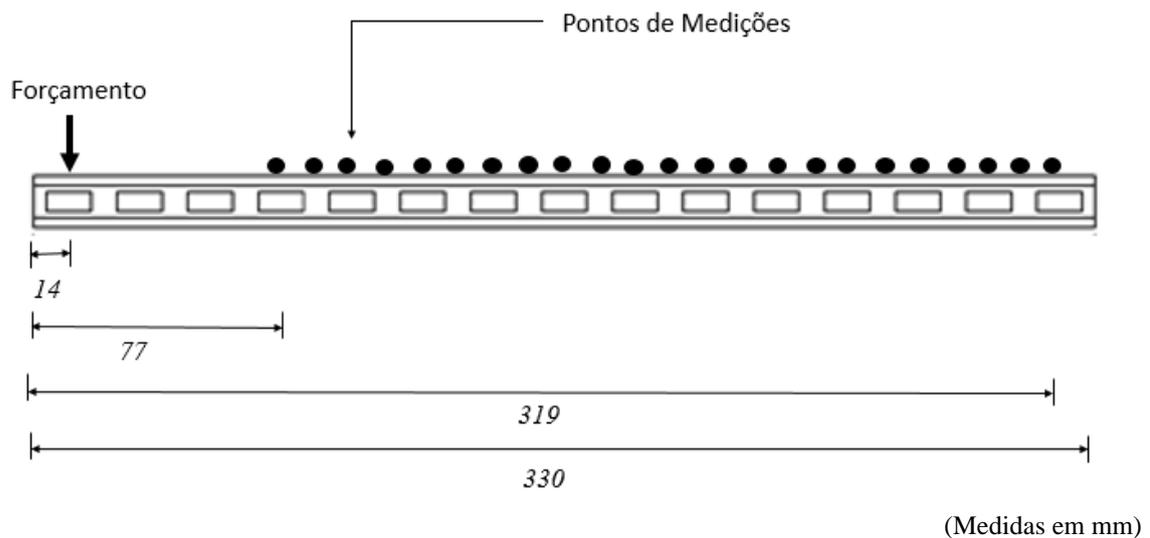


Figura 30. Representação dos pontos de medições capturados no ensaio experimental das vigas sintetizadas.

A Fig. 31 (a) mostra uma típica curva de excitação pontual realizada pelo mini-martelo nas vigas de poliamidas, no qual foi empregada uma janela de força. A característica unitária do pulso e a ausência de repique fomentam que o arranjo adotado na Fig. 29 foi satisfatório para uniformizar a direção e velocidade do impacto. A Fig. 31 (b) mostra os dados capturados em função do tempo pelo acelerômetro em que se utilizou uma janela exponencial.

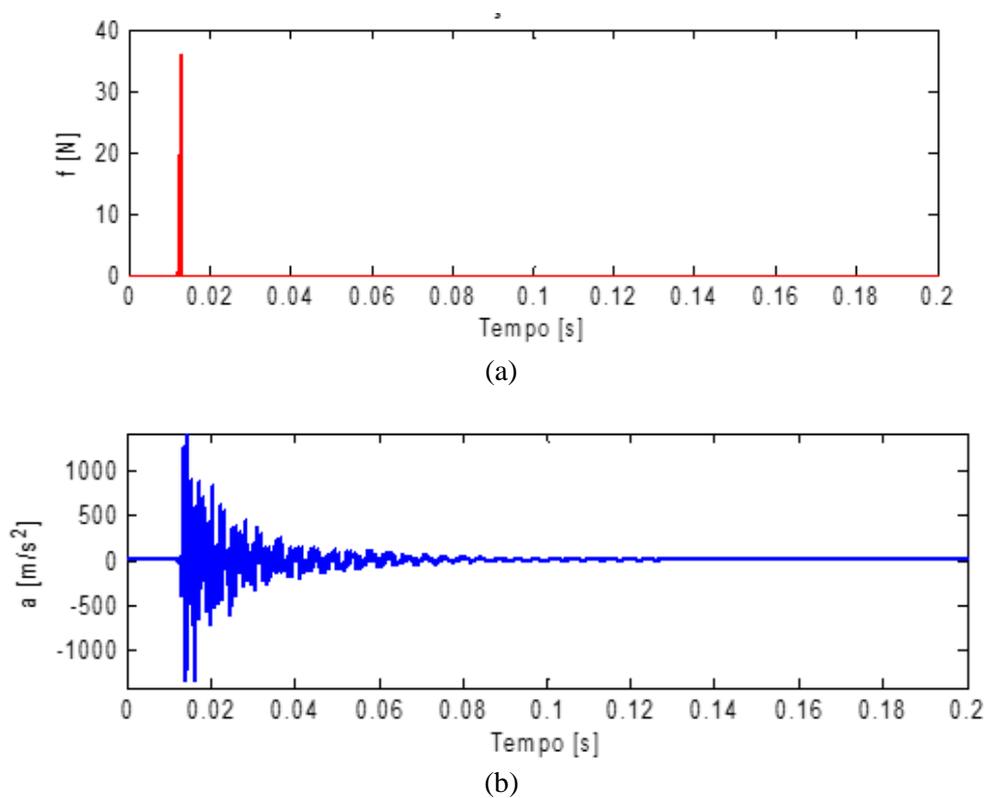


Figura 31. Típicas curvas de: (a) forçamento e (b) aceleração medidos nas vigas de poliamidas.

A Fig. 32 mostra os espectros de amplitudes e fase típicos da viga de poliamida simples. As FRFs de acelerações foram obtidas utilizando o estimador  $H_1$  na configuração realizada no software de aquisição. Nota-se que os picos de ressonância e anti-ressonância do sistema são acompanhados de mudanças de fase. Além disso, para frequências muito baixas, menores que 200 Hz, há descontinuidades devido a condição de contorno.

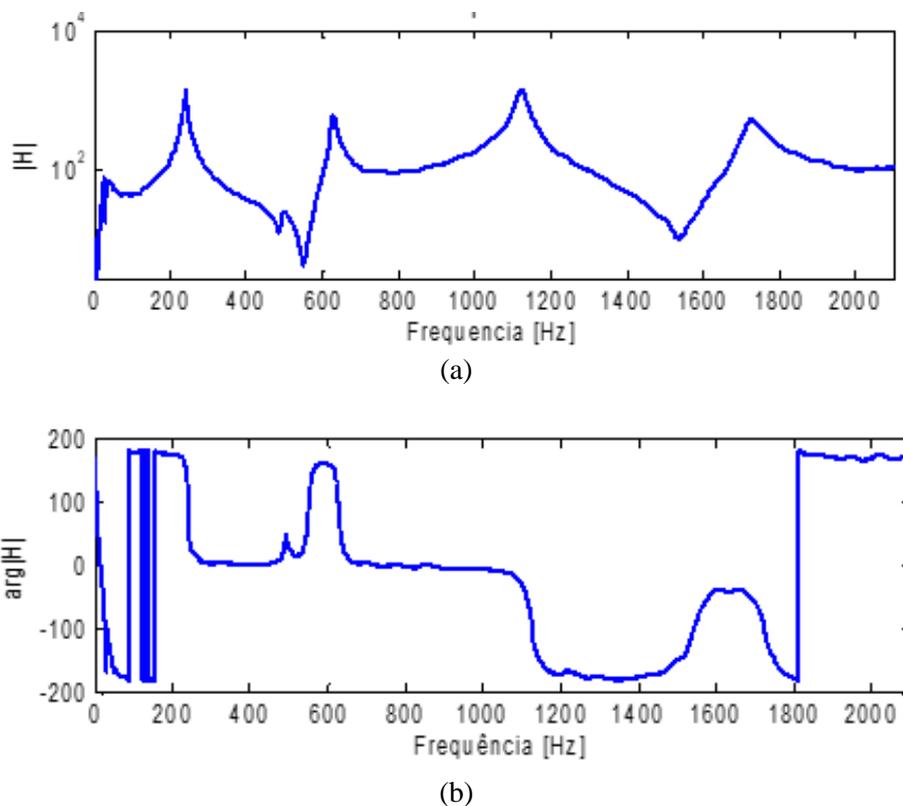


Figura 32. Típicas curvas de: (a) amplitude e (b) fase da viga simples de poliamida.

Na Fig. 33 pode-se observar a curva de coerência da viga simples de poliamida onde frequentemente tende ao valor unitário, com afastamento da relação linear somente em pontos de anti-ressonância e em baixas frequências devido a condição de contorno.

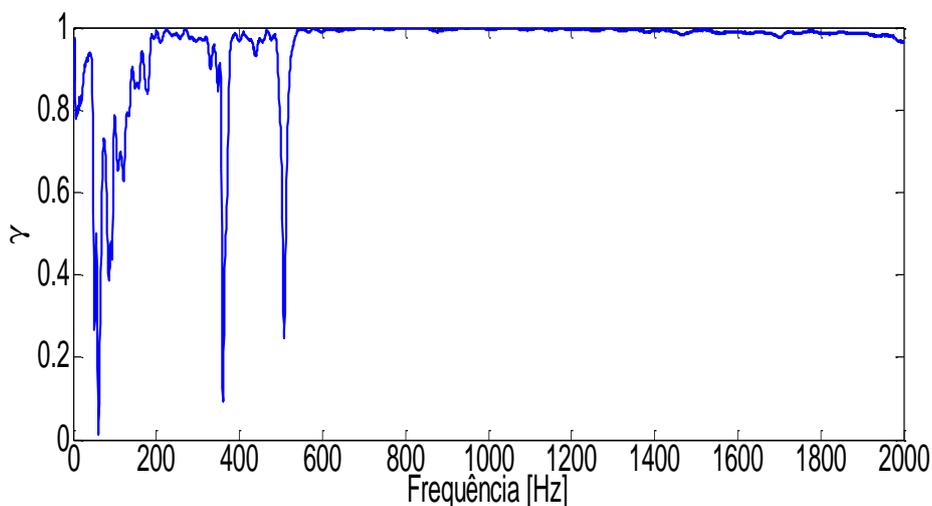


Figura 33. Típica curva de coerência da viga simples de poliamida.

A Fig. 42 apresenta a amplitude e fase de aceleração para a viga de metamaterial e a Fig. 43 mostra a curva de coerência, onde é possível identificar a ocorrência do fenômeno *bandgap* na região de 1500 Hz a 1800 Hz devido aos ressonadores periodicamente conectados a estrutura principal que causam a atenuação de vibrações e, conseqüentemente, tornam a amplitude de resposta muito pequena, igualando ao nível do ruído.

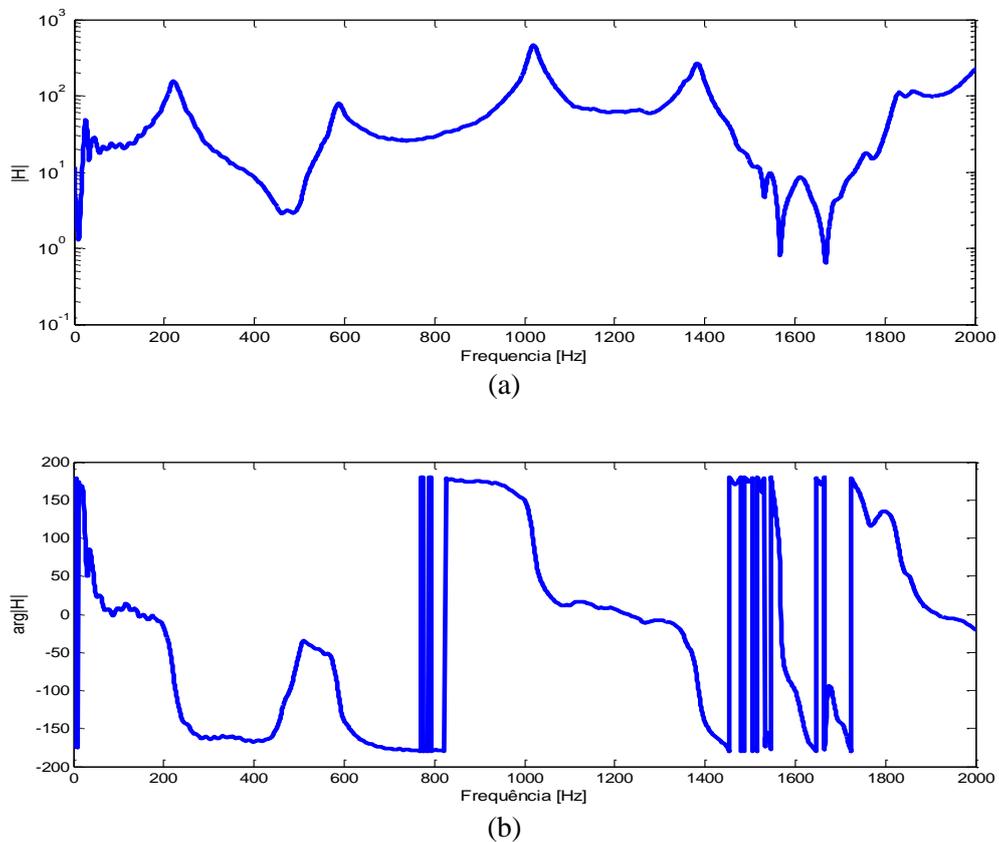


Figura 34. Típicas curvas de: (a) amplitude e (b) fase da viga de metamaterial.

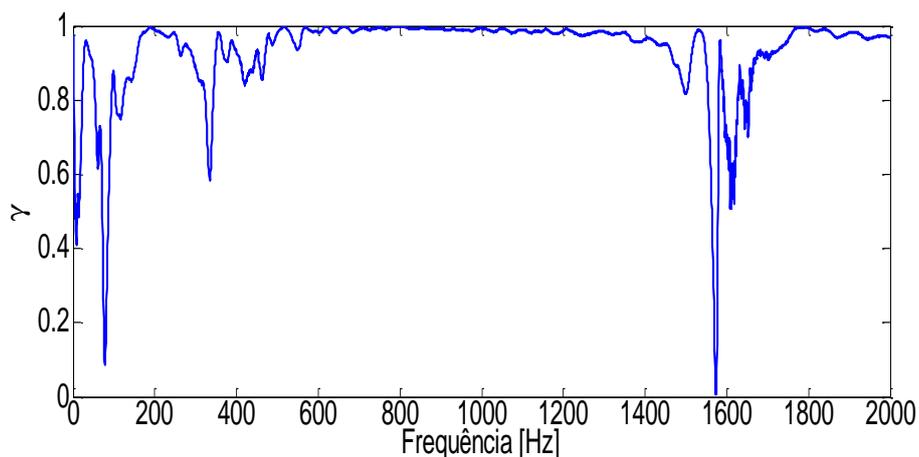


Figura 35. Típica curva de coerência da viga de metamaterial.

A massa do mini-acelerômetro é 1,77 % e 1,28 % da massa da viga simples e de metamaterial, assim pode desconsiderar ruídos por adição de massa [57].

### 3.7.3. Configuração para o Painel Compósito

O painel compósito com núcleo do tipo *honeycomb* foi excitado mecanicamente por um mini-*shaker*, ao qual foi empregado um sinal randômico do tipo ruído branco gaussiano com média zero e força imposta medida por um transdutor de força. Um vibrômetro a Laser de efeito *Doppler* (VLD) foi utilizado para medir a resposta dinâmica sem contato com a superfície, portanto eliminando a variabilidade das medidas causadas pela adição de massas. Semelhante ao experimento com as vigas, utilizou-se o sistema de aquisição da *National Instrument* e o *software Vibsoft 5.5*. O aparato experimental é apresentado na Fig. 36 e os modelos especificados na Tabela 7. A faixa de frequência analisada foi de 0 a 10.000 Hz, frequência de amostragem foi de 6000 Hz e números de pontos de frequência de 2650.



(a)



(b)

Figura 36. Aparato experimental do painel compósito: (a) configuração geral e (b) detalhe do forçamento, os números indicam equipamentos apresentados na Tabela 7.

Tabela 7. Modelos dos equipamentos utilizados no experimento do painel compósito.

Item	Equipamento	Modelo
1	Gerador de funções	Minipa - MFG4205B
2	Amplificador de potência	Tira - BAA60
3	<i>Shaker</i>	Tira – S50018
4	Célula de carga	PCB <i>piezotronics</i> - 208C03
5	Painel compósito	<i>HexWeb</i> CRIII – A1 5056
6	Vibrômetro	<i>Polytec</i> - PDV 100
7	Placa de aquisição de dados	<i>National Instrument</i> - eDAQ 917
8	<i>Software</i> de aquisição de dados	<i>Vibsoft</i> 5.5

O painel foi discretizado em uma malha retangular e para identificar os pontos, foram padronizadas colunas nomeadas com letras do alfabeto latino (A-Q) e cada linha foram atribuídos números de 1 a 15, totalizando 255 medidas. Em cada ponto de intersecção, foi colada uma fita reflexiva para a leitura do laser do vibrômetro. A Fig. 37 apresenta a discretização do painel compósito. O *Shaker* e a célula de carga foram posicionados no ponto A1 no painel e fixados por uma fina camada de cera de abelha. Trinta medições foram realizadas para cada ponto e a média foi automaticamente calculada pelo *software Vibsoft*.

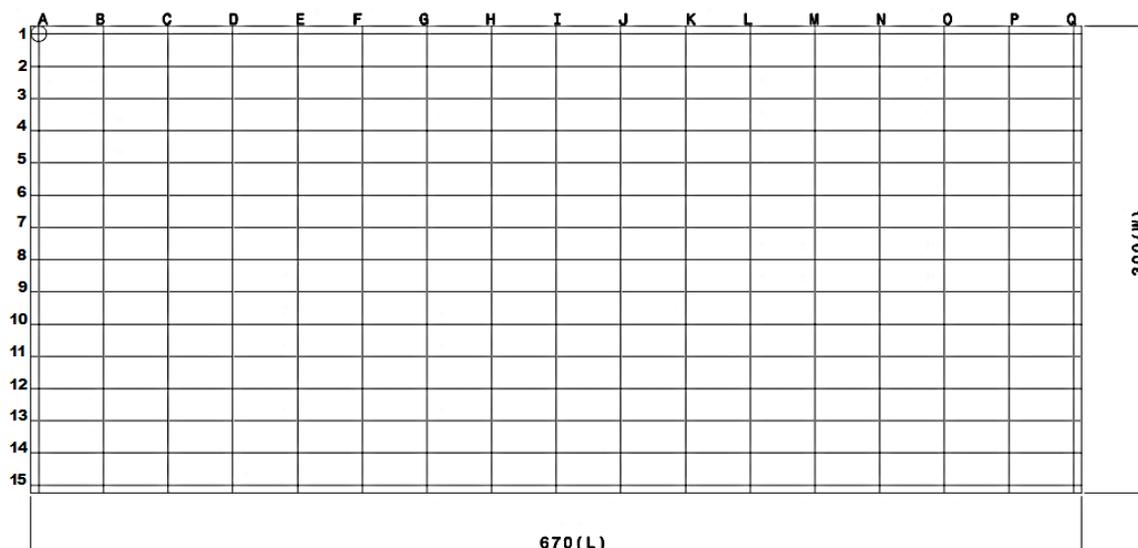


Figura 37. Representação da discretização do painel compósito.

Na Fig. 38, pode-se observar a curva de coerência do ensaio, no qual indica a qualidade dos dados obtidos em termos de contaminação por ruído. Os afastamentos dos valores unitários ocorrem próximos das ressonâncias por causa da amplitude do sinal nestas regiões e em altas frequências devido à alta sobreposição modal.

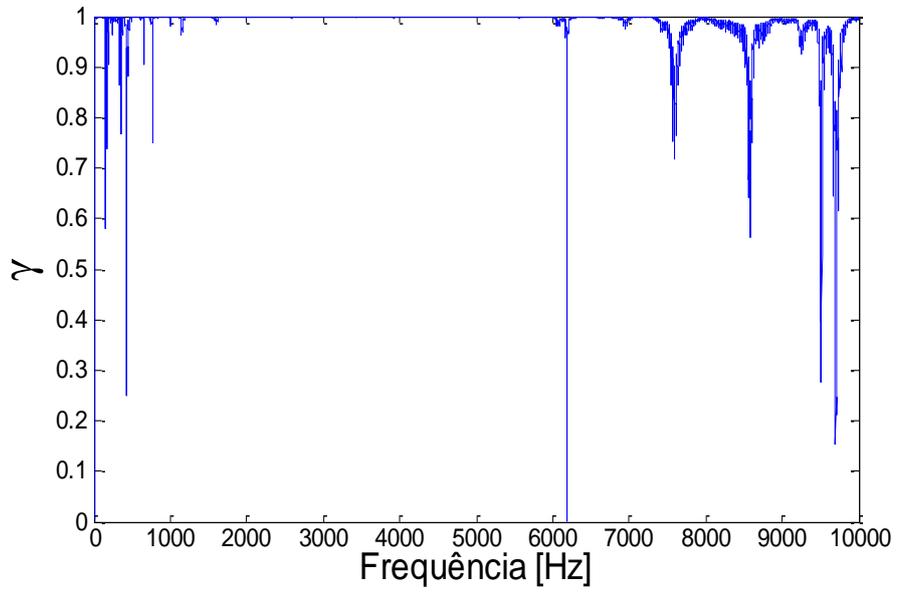


Figura 38. Típica curva de coerência do painel compósito.

## 4. Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados dos ensaios experimentais das quatro estruturas: viga de metal, de poliamida simples, de metamaterial e painel compósito. Os métodos de identificações de números de ondas são aplicados aos dados experimentais e comparados aos resultados analíticos e numéricos. Os parâmetros de velocidade de grupo, densidade modal e potência injetada também são explorados.

### 4.1. Viga Metálica

#### 4.1.1. Número de Onda estimado através do Método FRF

Diferentes fatores foram explorados para investigar o método de resposta em frequência, tais como, o posicionamento da medida central, o espaçamento entre os pontos de medição e os limites superiores e inferiores de frequência. O número de onda analítico foi calculado através da Eq. (2.13) inserindo as propriedades e geometrias da viga.

Com a configuração do método da Fig. 17, analisou-se a influência do posicionamento da medida central na estimativa  $x$  em pontos da extremidade direita, próximo ao forçamento, extremidade esquerda e no centro da viga metálica (80 mm, 220 mm e 400 mm), conforme mostra a Fig. 39. Em que o espaçamento entre as medidas  $d$  foi de 20 mm e máximo número de onda mensurável de 15,7 rad/m. Nota-se que todas as estimativas seguiram a resposta analítica, no entanto, para pontos em que a medida central encontra-se mais distante da origem de excitação há uma melhora significativa nos resultados.

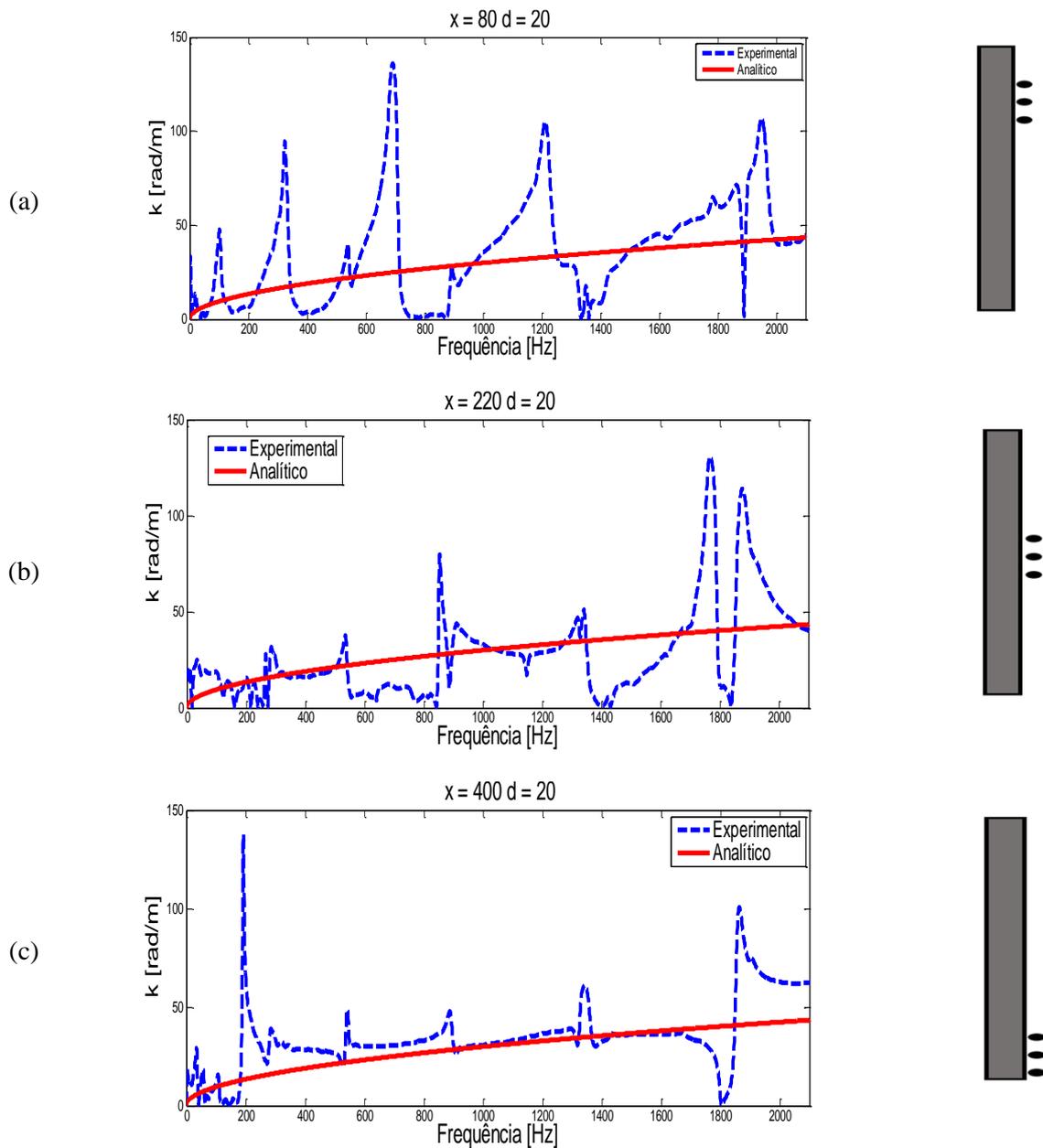


Figura 39. Números de ondas experimentais estimados nas posições: (a) 80 mm, (b) 220 mm e (c) 400 mm pelo método FRF e analíticos para viga metálica.

Para identificar a influência do espaçamento dos pontos de medições na estimativa do número de onda, a Fig. 40 mostra as curvas de dispersão para espaçamentos  $d$  de 20 mm, 40 mm, 60 mm e 80 mm com máximos números de ondas mensuráveis de  $k = 157,08 \text{ rad/m}$ ,  $k = 78,54 \text{ rad/m}$ ,  $k = 52,36 \text{ rad/m}$  e  $k = 39,27 \text{ rad/m}$ , respectivamente.

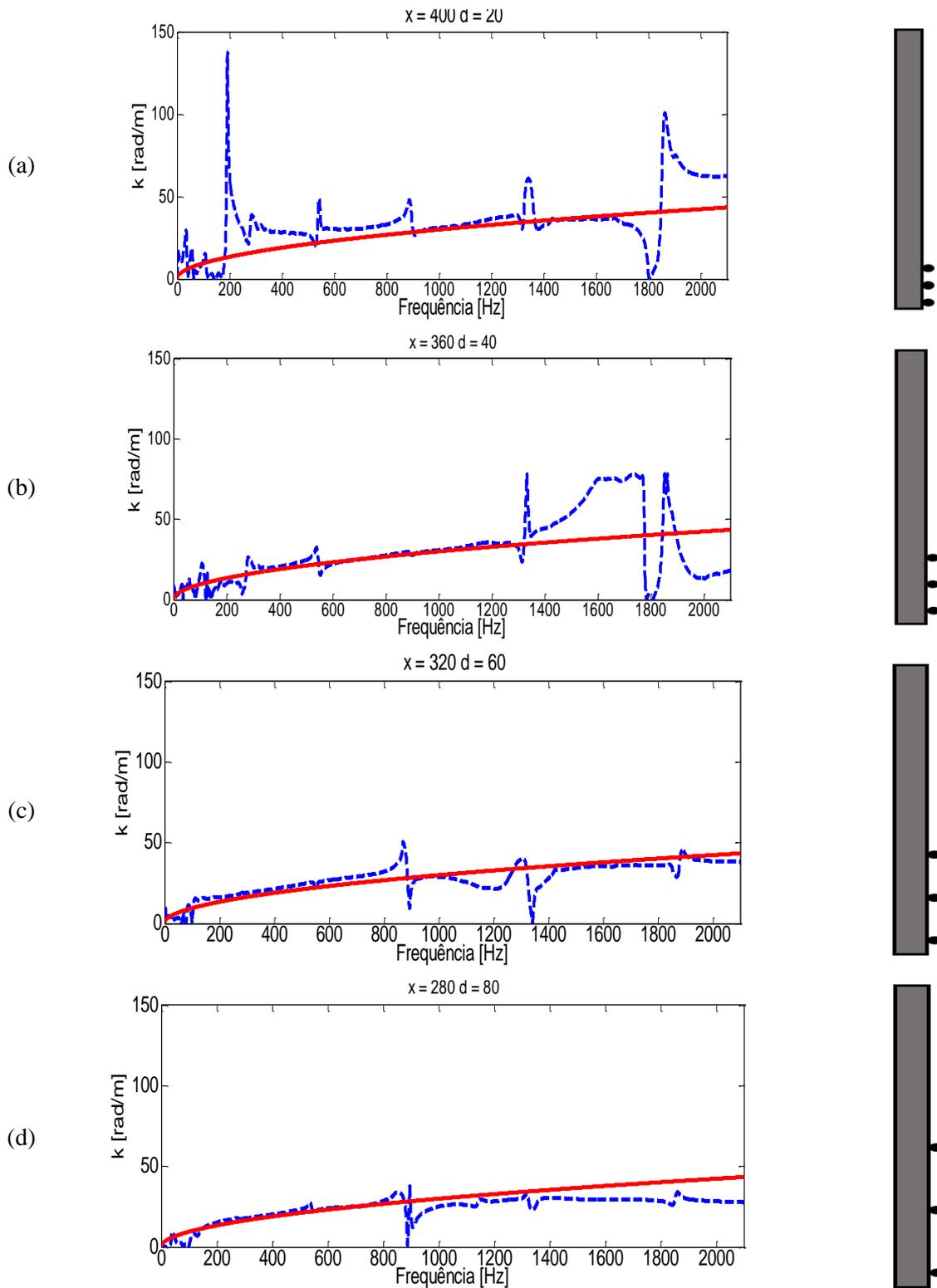


Figura 40. Números de ondas analíticos (—) e experimentais (---) estimados pelo método FRF para espaçamento de: (a) 20 mm, (b) 40 mm, (c) 60 mm e (d) 80 mm para viga metálica.

Observa-se que todas as estimativas de números de ondas seguem a curva analítica até o máximo número de onda, conforme discutido na seção 3.4, mas para pontos de medição com menores distâncias, a estimativa é menos precisa com maior número de oscilações na curva devido a presença de ruído.

### 4.1.2. Número de Onda estimado através do Método RDFS

No método RDFS, o número de linhas espectrais  $P$  é determinado pelo limite superior da transformada espacial do sinal e o período da série regressiva  $M$  é arbitrário, como mostrado na Eq. (3.12) no capítulo 3. A Fig. 41 apresenta a estimativa do número de onda experimental para número de linhas espectrais igual a 90 e valores de  $M$  iguais a 1.0, 1.5 e 2.0. Contudo, pode-se observar que não houve diferenças significativas com a mudança dos valores do período da série regressiva.

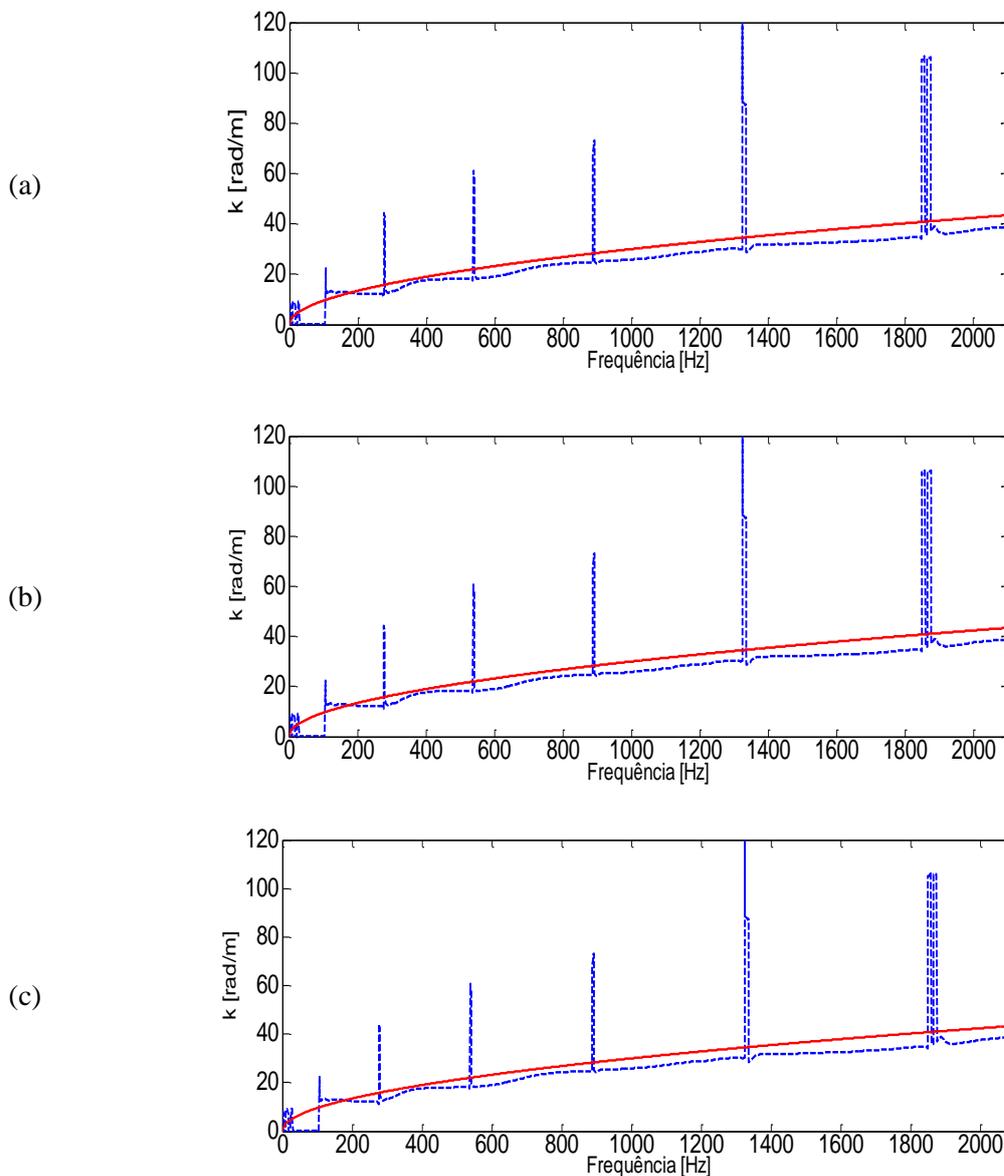


Figura 41. Números de ondas analíticos (—) e experimentais (---) estimados pelo método RDFS para  $M$  iguais a: (a) 1.0, (b) 1.5, (c) 2.0 para viga metálica.

No processo de obtenção da FRF, têm-se as amplitudes de vibrações ao longo da viga, denominada ODS. Aplicando-se a transformada discreta de *Fourier* na ODS têm-se as frequências espaciais no domínio do número de onda. Na Fig. 42, é possível comparar os resultados obtidos pelos métodos RDFS e FFT da ODS. Contudo, pode-se notar que não houve diferenças significativas entre ambos os métodos.

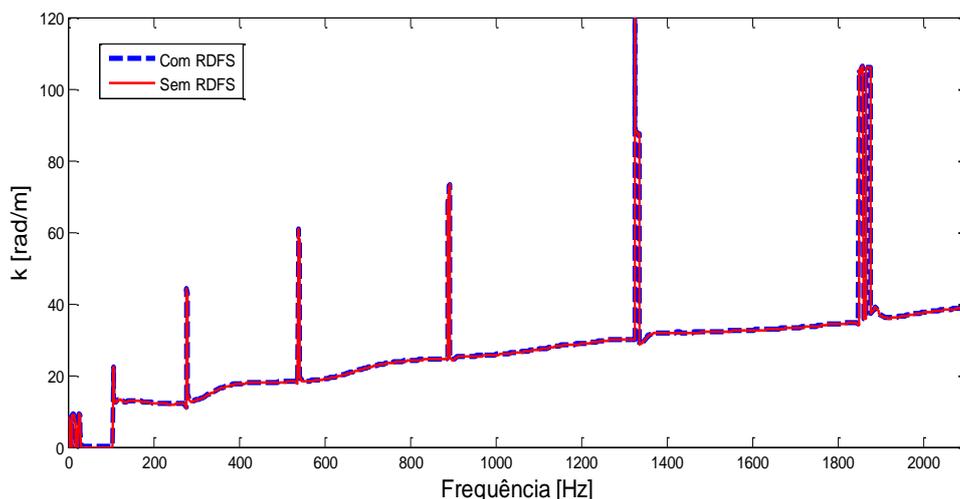


Figura 42. Número de onda estimado pelo método RDFS e FFT da ODS para a viga metálica.

#### 4.1.3. Número de Onda estimado através do Método de Correlação

Assumindo o máximo número de onda com o valor de 80 rad/m por meio da análise dos limites superiores das curvas de dispersões obtidas através dos métodos FRF e RDFS, a Fig. 43 apresenta a comparação entre o número de onda estimado pela técnica de correlação e o calculado analiticamente, onde apresentaram boa concordância.

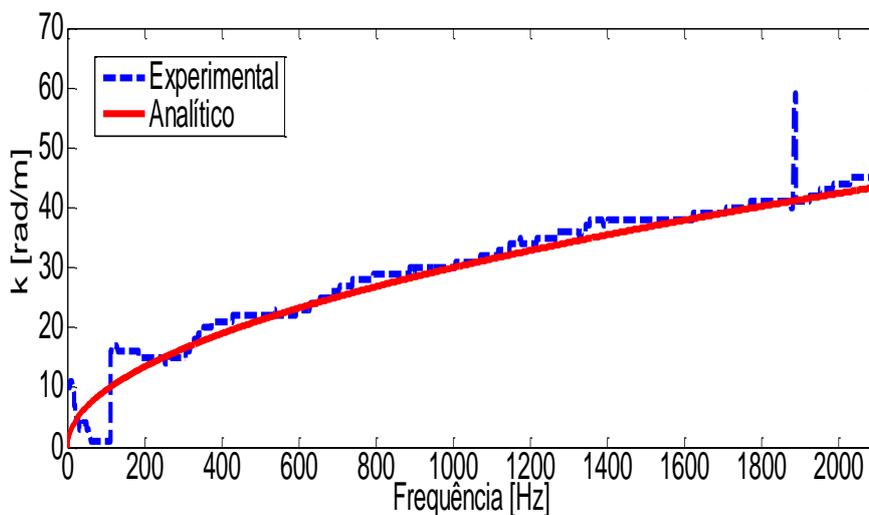
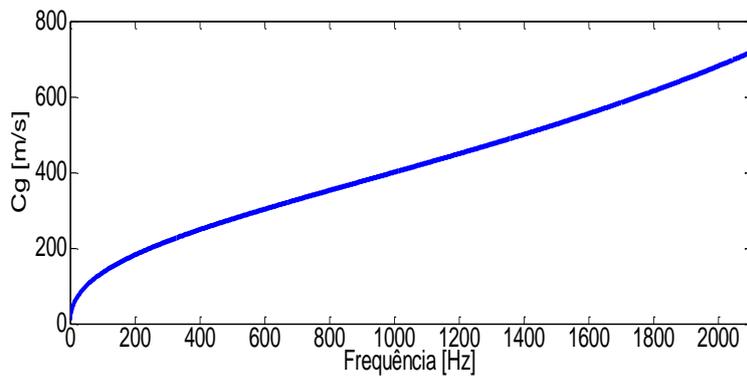
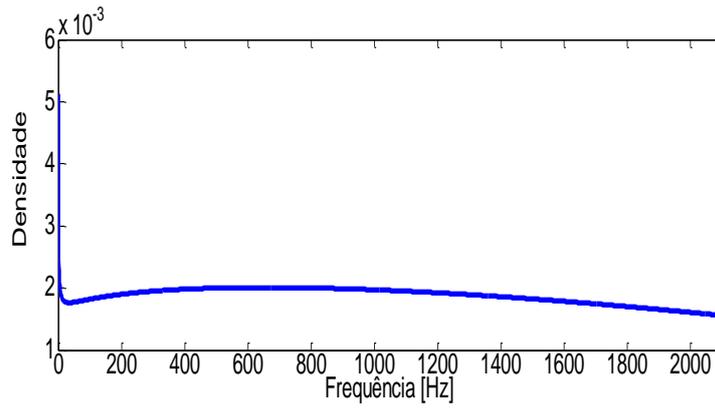


Figura 43. Número de onda estimado pelo método de correlação para viga metálica.

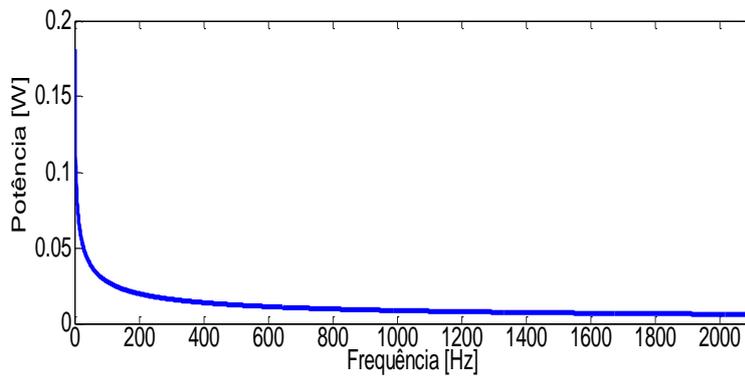
A partir de um ajuste polinomial da curva de dispersão experimental é possível calcular, através da Eq. (2.4), a velocidade de grupo, mostrada na Fig 44 (a), onde varia com a frequência devido às características dispersivas da viga metálica. A densidade modal é calculada a partir dos valores de número de onda e velocidade de grupo através da Eq. (2.33) e está relacionada com a capacidade de armazenar energia vibratória do sistema, como mostrada na Fig. 44 (b). Já a potência é calculada por meio da Eq. (2.37) e está relacionada com a energia dissipada pela viga.



(a)



(b)



(c)

Figura 44. Parâmetros calculados a partir do número de onda estimado pela técnica de correlação: (a) velocidade de grupo, (b) densidade e (c) potência injetada para viga metálica.

## 4.2. Vigas Sintetizadas

### 4.2.1. Número de Onda estimado através do Método FRF

Para investigar a influência do posicionamento da medida central  $x$  no método FRF a Fig. 45 apresenta as curvas de dispersão no ponto na extremidade direita, próximo ao forçamento, no centro e na extremidade esquerda para ambas as vigas de poliamidas (77 mm, 176 mm e 253 mm). Com espaçamento entre os pontos medidos  $d$  de 33 mm e máximo número de onda mensurável de 95,19 rad/m.

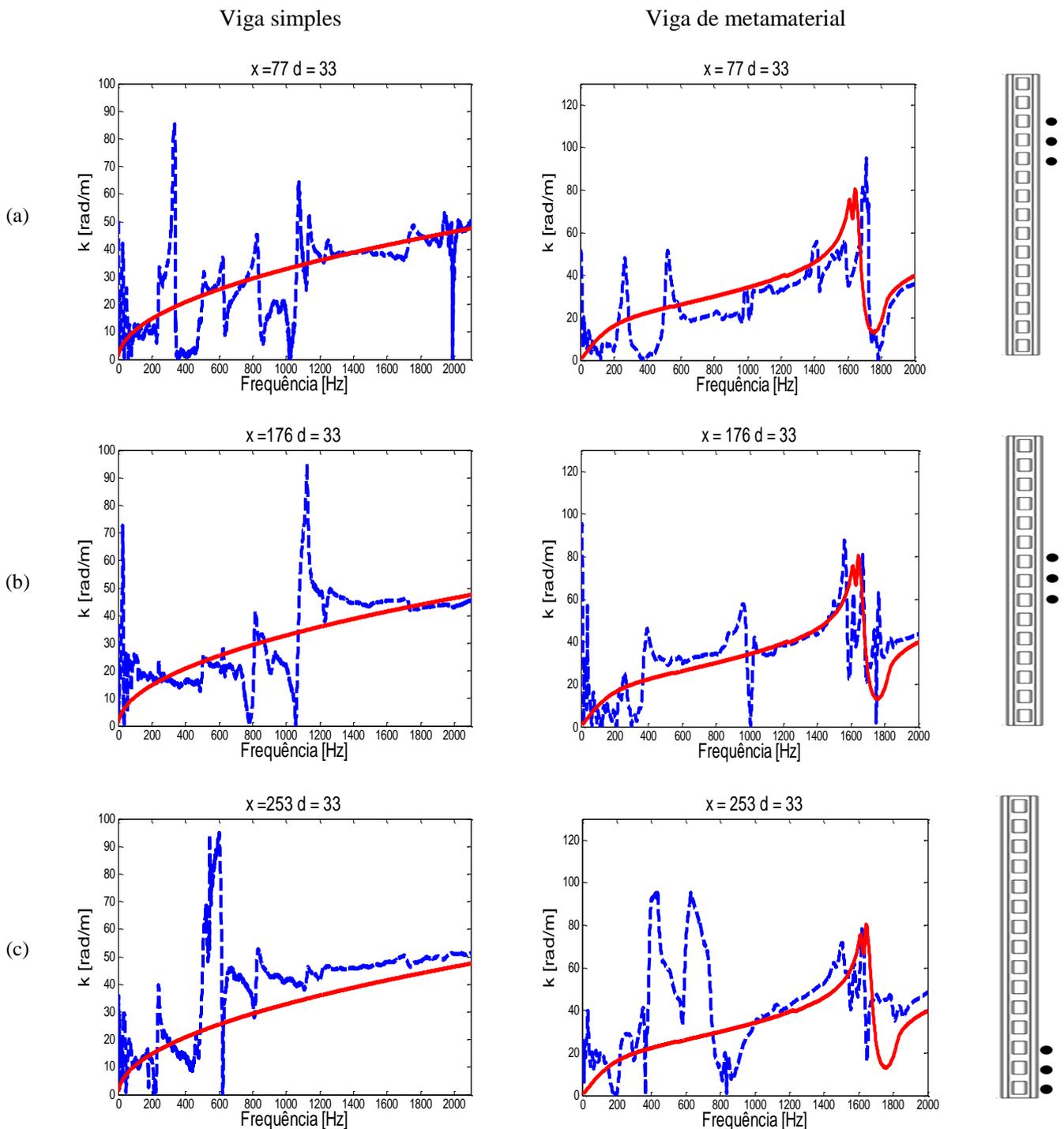


Figura 45. Números de ondas experimentais (—), estimados nas posições: (a) 77 mm, (b) 176 mm e (c) 253 mm pelo método FRF, e analíticos (—) para viga simples de poliamida (coluna 1) e viga de metamaterial (coluna 2).

As Eqs. (2.13) e (2.23) foram utilizadas para obter as curvas de números de ondas analíticas para a viga simples de poliamida e metamaterial, respectivamente. Observa-se pelas curvas de dispersão da Fig. 45, a mesma característica encontrada na viga metálica, onde todas as estimativas seguem a previsão analítica, porém quanto mais distante do ponto de excitação melhor a estimativa. Outro fenômeno a ser observado, é o de *bandgap* na região entre 1500 Hz a 1800 Hz nas curvas de dispersões da viga metamaterial.

Para identificar a influência do espaçamento entre as medidas  $d$ , a Fig. 46 mostra as curvas de dispersões para espaçamentos de 11 mm, 22 mm, 33 mm e 44 mm em ambas vigas cujos máximos números de ondas mensuráveis são 285,59 rad/s, 142,79 rad/s, 95,12 rad/s e 71,39 rad/s, respectivamente. A maioria das estimativas da Fig. 46 seguem a curva analítica, entretanto para espaçamentos menores há mais ondulações da curva estimada devido a presença de ruído. Observa-se que para distâncias menores entre os pontos de aquisição geram resultados mais ruidosos devido à sobreposição de ondas, uma vez que as diferenças de amplitudes entre os pontos estão no mesmo nível do ruído [20].

A partir da Eq. (3.5), observa-se que é necessário escolher uma combinação de pontos em que a medida central não tenha amplitude próxima de zero para qualquer frequência, pois a razão de amplitudes tende a infinito. O mínimo número de onda mensurável é limitado pela presença de ondas evanescentes, nas quais decaem exponencialmente com a posição e também pela propagação de ondas em baixas frequências. Este efeito é observado nas curvas experimentais apresentadas anteriormente onde apenas se aproximam da curva analítica a partir de números de onda em torno de  $k = 200$  rad /m.

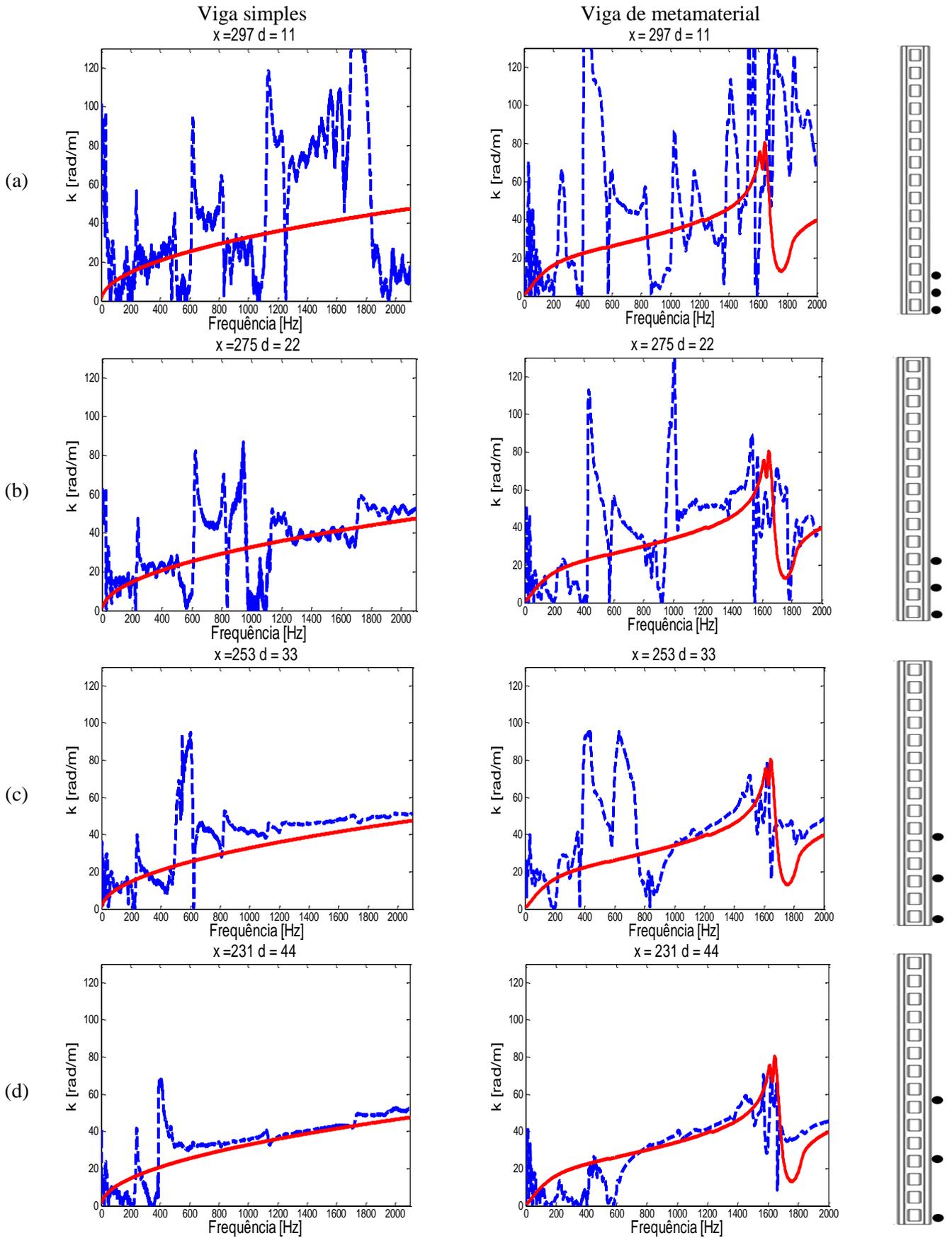


Figura 46. Números de ondas experimentais (—), estimados pelo método FRF para espaçamentos de: (a) 11 mm, (b) 22 mm, (c) 33 mm e (d) 44 mm e analíticos (—) para viga simples de poliamida (coluna 1) e na viga de metamaterial (coluna 2).

#### 4.2.2. Número de Onda estimado através do Método RDFS

A Fig. 47 apresenta números de ondas experimentais estimados pelo método RDFS e comparados as curvas analíticas para ambas as vigas de poliamidas. O número de linhas espectrais  $P$  adotado foi de 80 e período da série regressiva  $M$  foi novamente explorado para valores iguais a 1.0, 1.5 e 2.0, onde se mostram pouco relevantes à mudança deste fator.

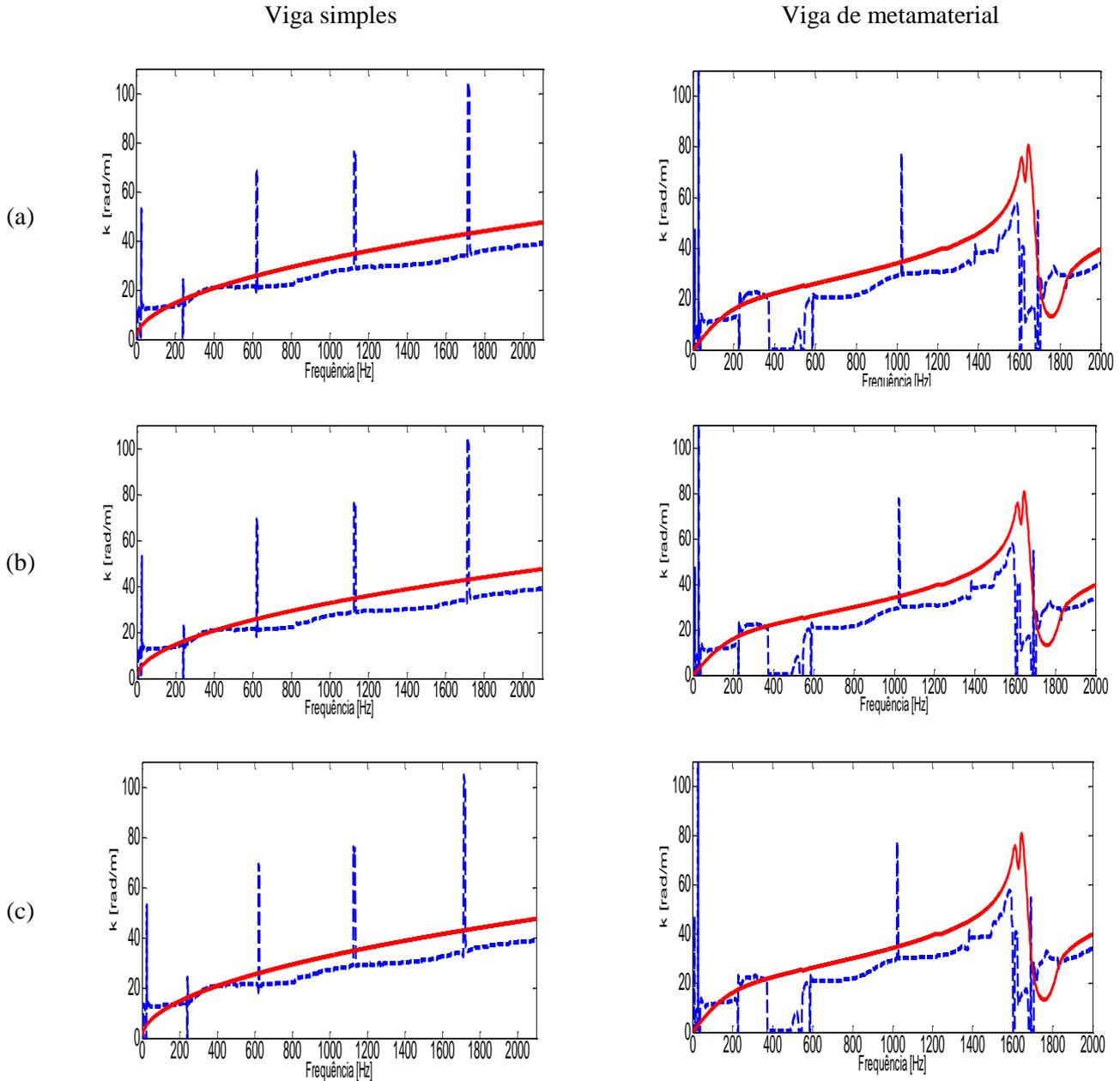
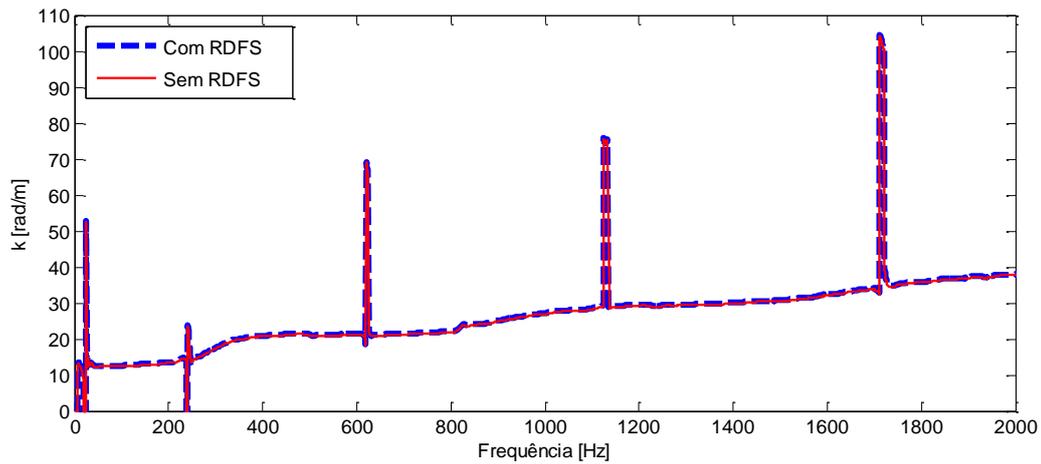
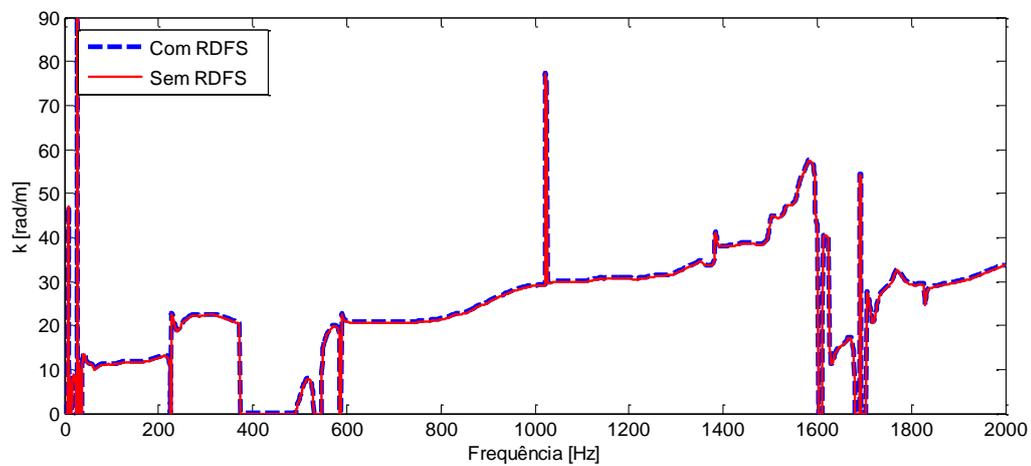


Figura 47. Números de ondas experimentais (—), estimados pelo método RDFS para valores de  $M$  iguais a: (a) 1.0, (b) 1.5 e (c) 2.0, e analíticos (—) para viga simples de poliamida (coluna 1) e na viga de metamaterial (coluna 2).

Na Fig. 48 é possível comparar os resultados obtidos pelos métodos RDFS e FFT da ODS para ambas as vigas, onde se observa que não há diferenças significativas entre os dois métodos, similarmente ao observado nos resultados na viga metálica.



(a)

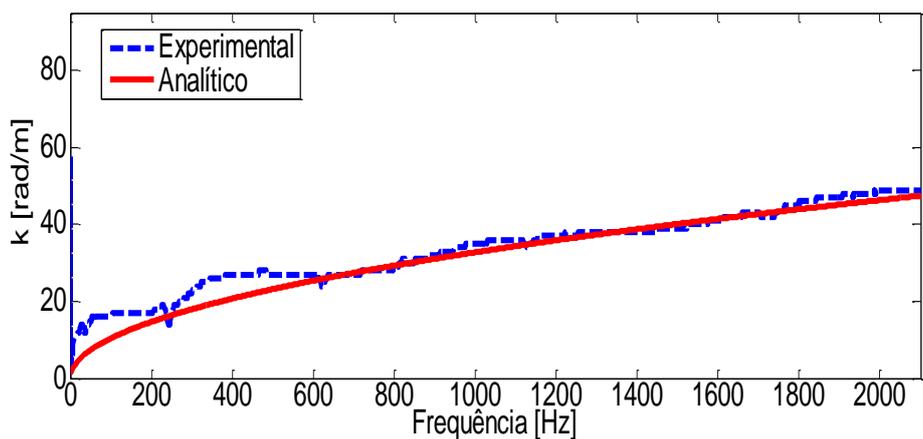


(b)

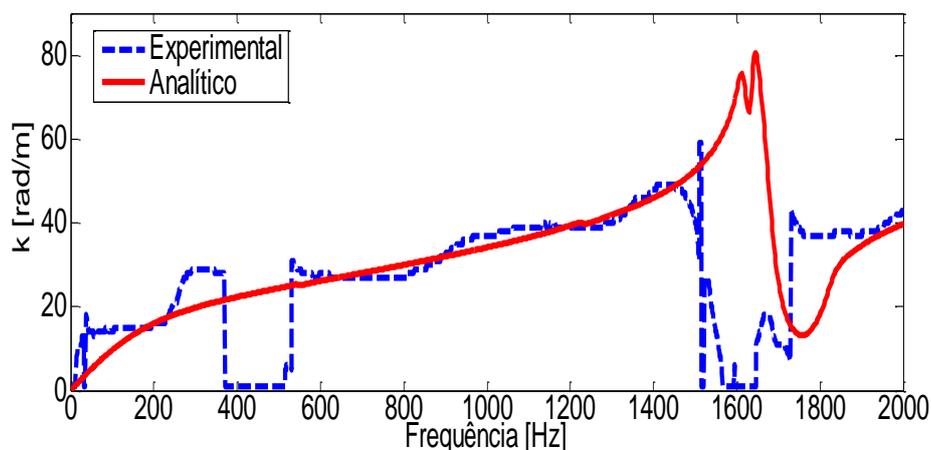
Figura 48. Números de onda estimados pelo método RDFS e FFT da ODS para: (a) viga de poliamida simples e (b) viga de metamaterial.

#### 4.2.3. Número de Onda estimado através do Método de Correlação

Os números de onda estimados pelo método de correlação estão mostrados na Fig. 49, onde apresentaram uma boa concordância com a curva analítica, principalmente em altas frequências. As maiores divergências são observadas em frequências abaixo de 400 Hz para viga simples de poliamida e 600 Hz para a viga com ressonadores, influenciado pelo mínimo número de onda mensurável. No algoritmo desenvolvido no *Matlab* foi utilizado o valor de máxima correlação de número de onda de 80 rad/m.



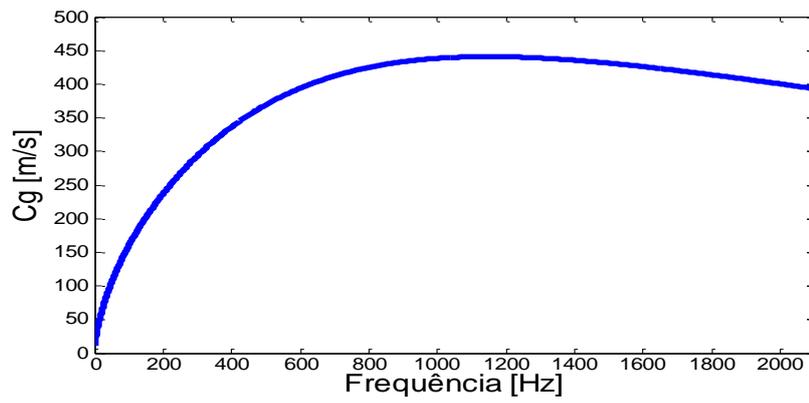
(a)



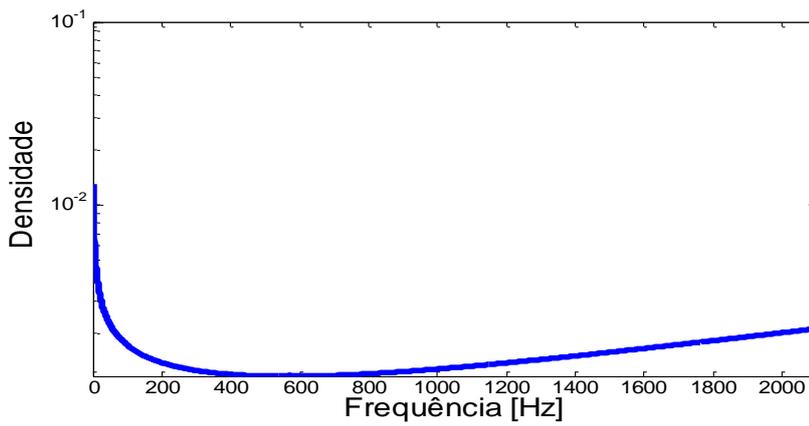
(b)

Figura 49. Números de ondas estimados para viga: (a) simples de poliamida e (b) metamaterial estimados pelo método de correlação.

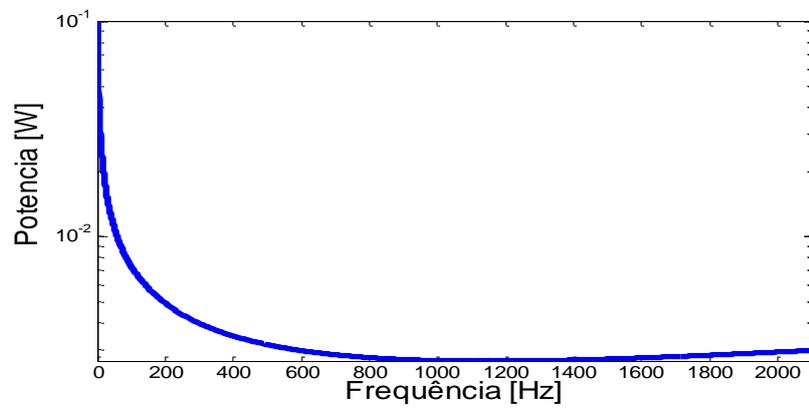
As Figs. 50 e 51 apresentam as velocidades de grupo, densidade modal e potência injetada em ambas as vigas de poliamidas, calculadas através das relações das Eq. (2.4), Eq. (2.33) e Eq. (2.37), respectivamente. Análogo a viga metálica, foi realizado um ajuste polinomial da curva de dispersão experimental para ambas as vigas. No entanto, para a viga de metamaterial este ajuste não foi eficaz de identificar o *bandgap* na curva de velocidade de grupo. Apesar disto, pode-se verificar que a velocidade de grupo varia com a frequência, pois a onda é dispersiva. Já a densidade modal e a potência injetada não são constantes e na região próxima a frequência zero há um aumento devido a relação inversa com a velocidade de grupo.



(a)

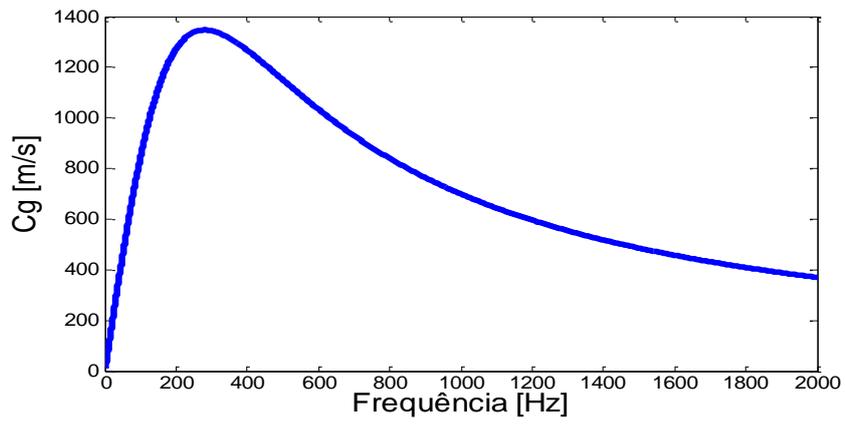


(b)

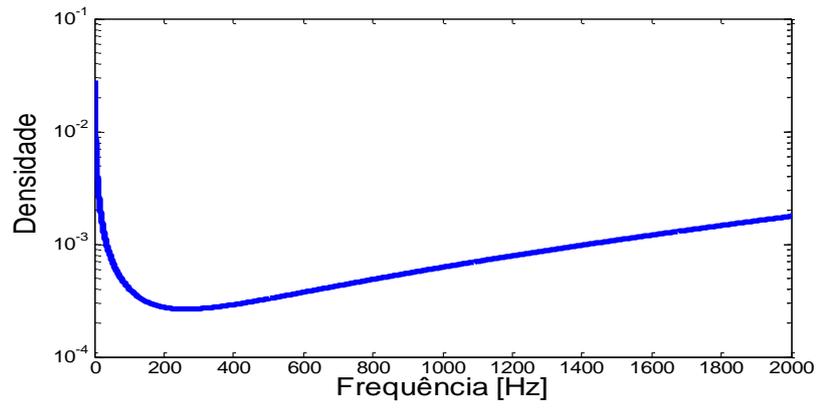


(c)

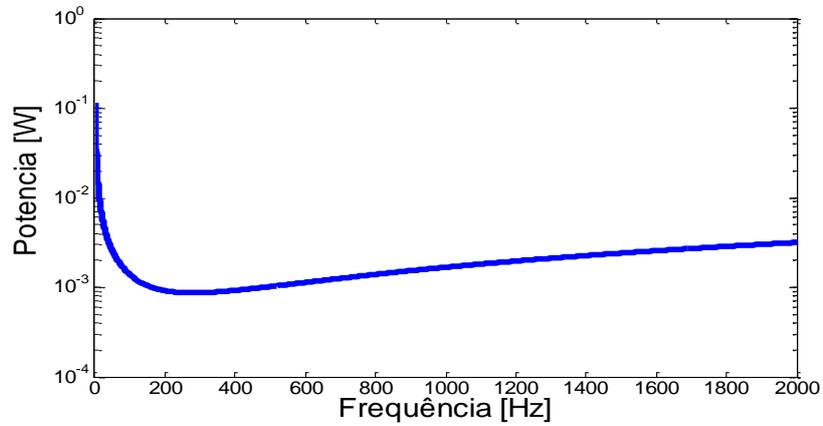
Figura 50. Parâmetros de: (a) velocidade de grupo, (b) densidade modal e (c) potência injetada para viga simples de poliamida.



(a)



(b)



(c)

Figura 51. Parâmetros de: (a) velocidade de grupo, (b) densidade modal e (c) potência injetada para viga metamaterial.

### 4.3. Painel Compósito

A curva de mobilidade do sistema composto pelo painel compósito é mostrada na Fig. 52, a mobilidade foi medida até 10 kHz. Para frequências abaixo de 1500 Hz, nota-se que picos de ressonância são bem distintos, ou seja, baixa sobreposição modal. Para frequências maiores que 1500 Hz não é possível distinguir modos individuais e resposta ressonante dominante, devido a grande sobreposição modal.

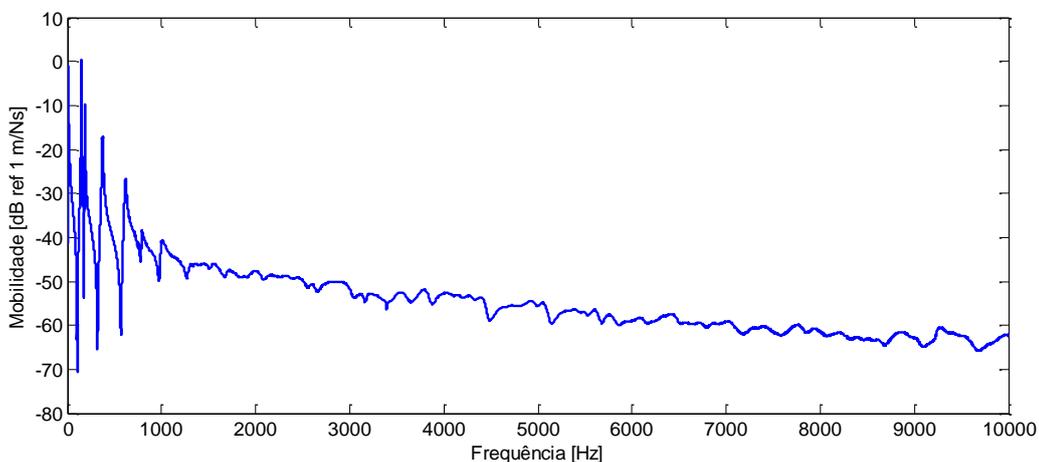


Figura 52. Típica curva de amplitude painel compósito tipo sanduíche com núcleo *honeycomb*.

Na Tabela 8, são apresentadas as dez menores frequências naturais experimentais e numéricas obtidas através de um modelo de elemento finito desenvolvido no trabalho de Sousa [4]. Nota-se que as frequências são próximas, com erros relativos menores de 16,12 %, mesmo considerando fatores de incertezas experimentais que influenciam na precisão dos resultados.

Tabela 8. Comparação das frequências naturais numéricas [4] e experimentais do painel compósito.

Modo	Frequências Naturais	
	Experimental [Hz]	Numérico [Hz]
1	146,9	158,56
2	186,5	204,66
3	371,1	433,05
4	613,7	730,32
5	754,7	756,06
6	780,5	857,43
7	992,6	1094,6
8	1230,0	1341,3
9	1336,0	1426,5
10	1506,0	1795,3

Em baixas frequências, a forma de deflexão operacional aproxima-se do modo de vibrar ressonante, devido à baixa sobreposição modal. Deste modo, pode-se observar na Fig. 53 que as formas operacionais obtidas experimentalmente se assemelham as formas modais obtidas no trabalho de Neves [57]. Apesar de não ser uma validação experimental, a similaridade entre as medidas experimentais e calculadas no modelo numérico aumenta a confiança entre o modelo numérico e os dados adquiridos.

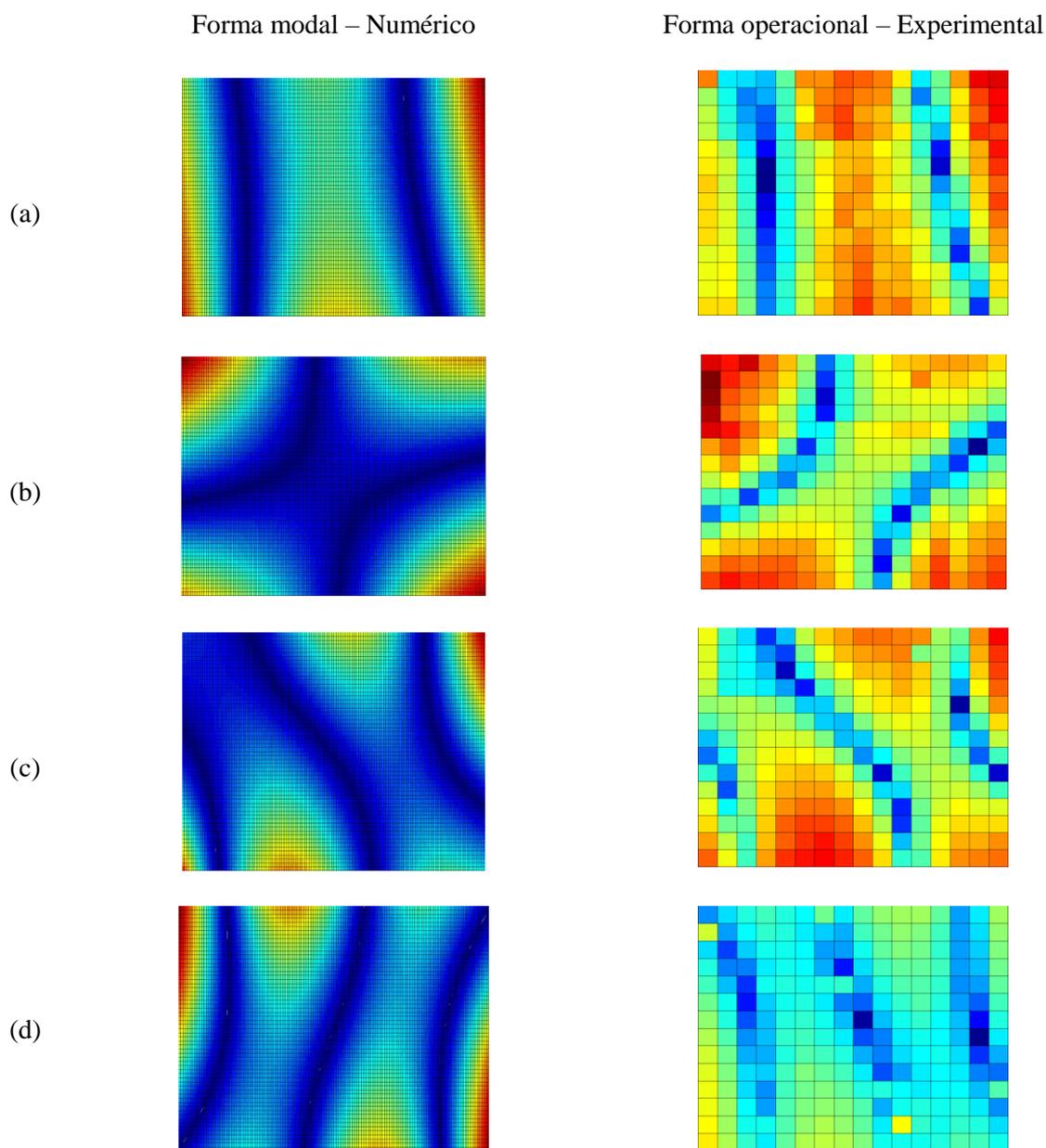


Figura 53. Formas modais numéricas (coluna 1) [57] e experimentais (coluna 2) para as primeiras frequências: (a) 146.9 Hz, (b) 186.5 Hz, (c) 371.1 Hz e (d) 613.7 Hz.

### 4.3.1. Número de Onda estimado através do Método RDFS

Aplicando-se a Transformada de *Fourier* bidimensional nos dados de deflexão operacional do painel  $u = (x, y, \omega)$ , obtém-se a relação de frequências espaciais,  $U = (k_x, k_y, \omega)$ . Nas Tabelas 9 e 10, encontram-se os números de ondas estimados pela técnica FFT da ODS e os numéricos, apresentados por Neves [58]. Os valores experimentais foram obtidos empiricamente das curvas de número de onda obtidas utilizando um algoritmo de FFT2D ao *software Matlab*.

Tabela 9. Comparação número de onda experimental estimado pelo método FFT da ODS e numérico [58] do painel compósito na direção  $x$ .

Frequência [Hz]	Número de Onda direção $x$		
	Experimental [rad/m]	Numérico [rad/m]	Erro [%]
160	9,38	6,93	35,34
200	9,35	7,75	20,64
433	18,76	11,44	63,99
2000	28,13	26,15	7,56
4000	56,89	39,74	43,15

Tabela 10. Comparação número de onda experimental estimado pelo método FFT da ODS e numérico [58] do painel compósito na direção  $y$ .

Frequência [Hz]	Número de onda direção $y$		
	Experimental [rad/m]	Numérico [rad/m]	Erro [%]
160	5,96	6,97	14,48
200	20,94	7,81	168,12
433	9,33	11,65	19,90
2000	20,94	28,33	26,07
4000	15,94	46,12	65,44

Observa-se que os valores estimados pelo método FFT da ODS não obtiveram boa concordância com os dados numéricos, mesmo em baixas frequências com os menores erros iguais a 20,64 % na direção  $x$  e 14,49 % na direção  $y$ . Para frequências acima de 2.0 kHz, os valores começaram a divergir exponencialmente devido a influência de mais de um tipo de modo de onda na estrutura.

Aplicando-se o método RDFS com período da série regressiva de 1,5 em ambas as direções e linhas em frequência de 4 e 2 nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, obtém-se curvas similares aos encontrados no método FFT da ODS, como observado na Fig. 54.

FFT da ODS

RDFS

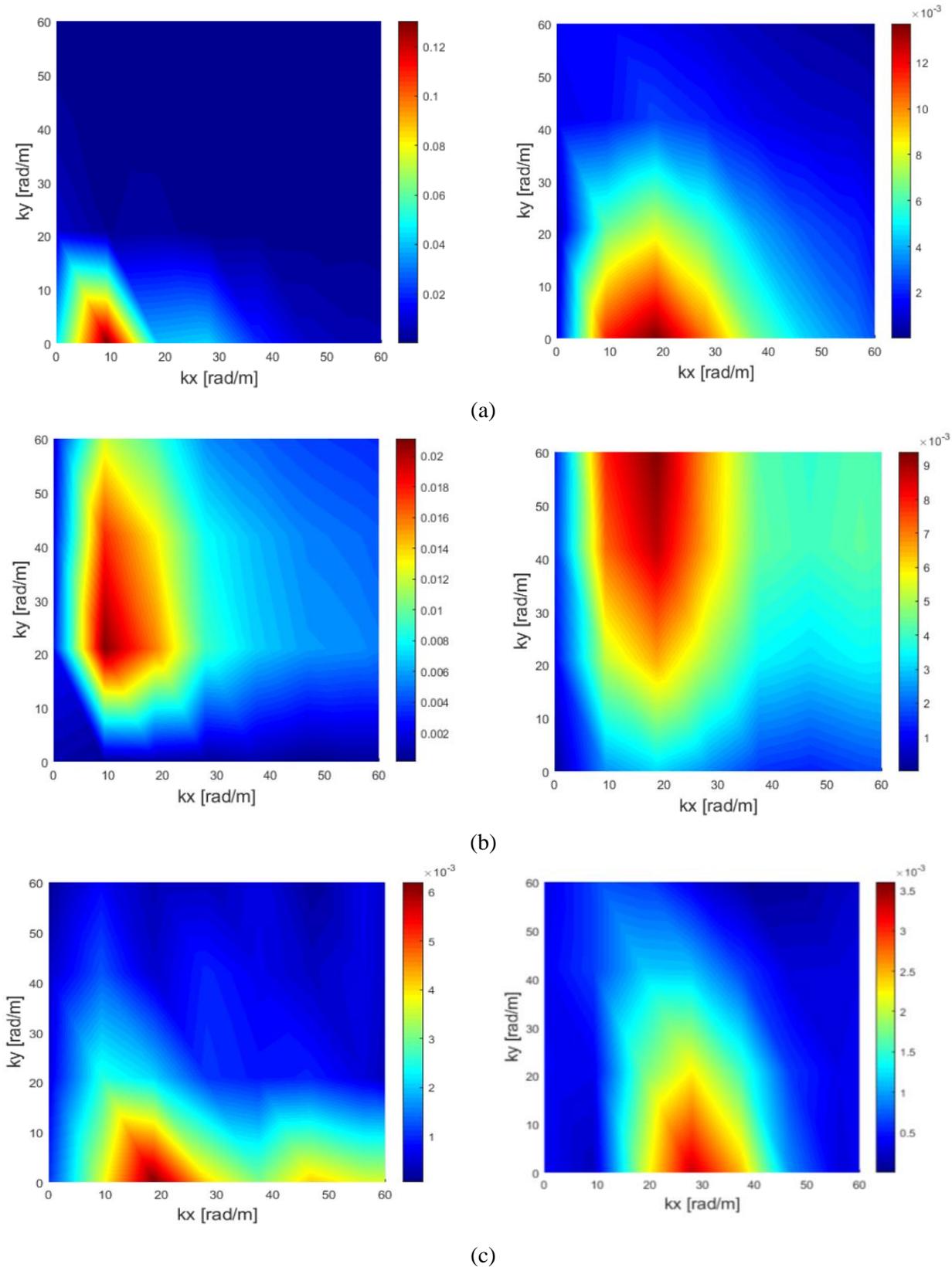
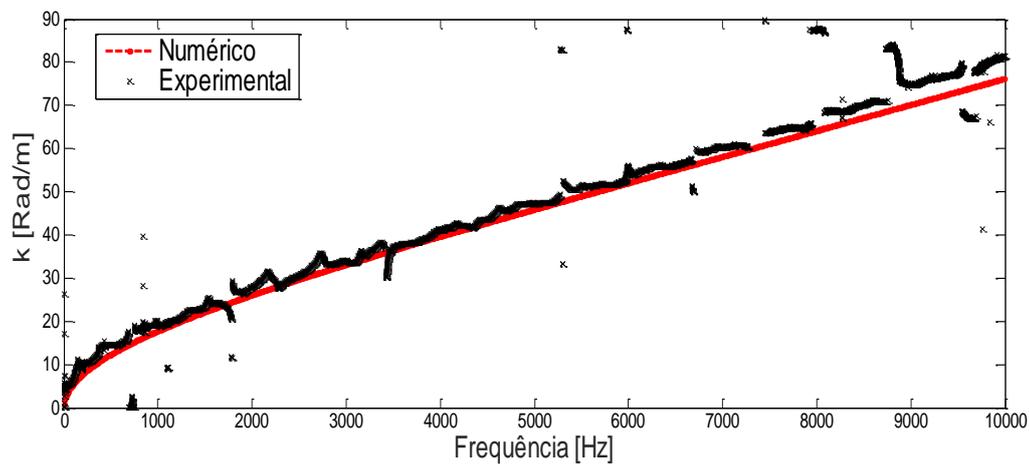


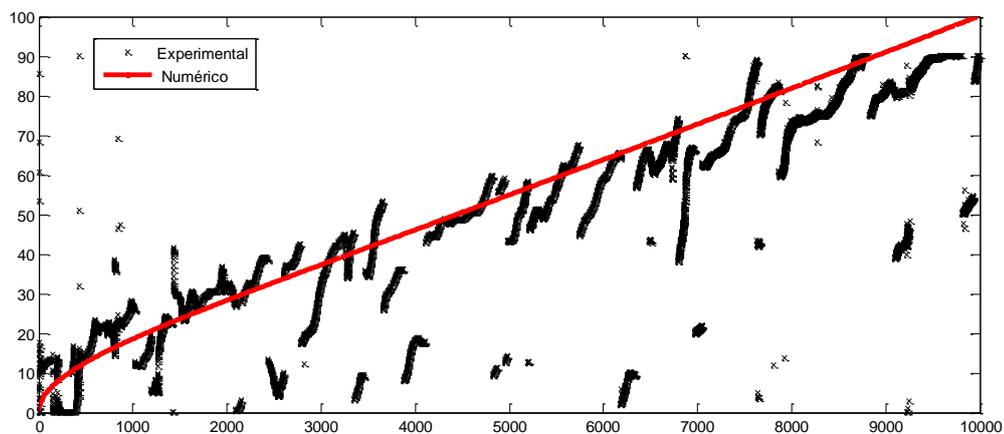
Figura 54. Números de ondas estimados pela técnica FFT da ODS (coluna 1) e pelo método RDFS (coluna 2) para quatro frequências: (a) 160 Hz, (b) 200 Hz e (c) 433 Hz do painel compósito.

### 4.3.2. Número de Onda estimado através do Método de Correlação

O método de correlação, apresentado no capítulo 2, para estimativa do número de onda foi aplicado aos dados experimentais. A Fig. 55 (a) mostra o número de onda na direção  $x$  e a Fig. 55 (b) o número de onda na direção  $y$ , ambos comparados aos resultados numéricos [58]. A máxima frequência espacial adotada foi de 90 rad/m em ambas as direções. As curvas apresentam dispersivas, mas diferentes na direção  $x$  e  $y$  devido a natureza ortotrópica do núcleo *honeycomb*.



(a)



(b)

Figura 55. Número de onda experimental, estimado pelo método de correlação, e numérico na: (a) direção  $x$  e (b) direção  $y$  do painel compósito.

A análise direcional do número de onda das quatro primeiras frequências naturais é mostrada na Fig. 56 e comparada à apresentada numericamente [58]. É possível observar a influência das propriedades ortotrópicas do painel à medida que a frequência cresce a curva de dispersão direcional vai ficando com um formato mais elipsoidal.

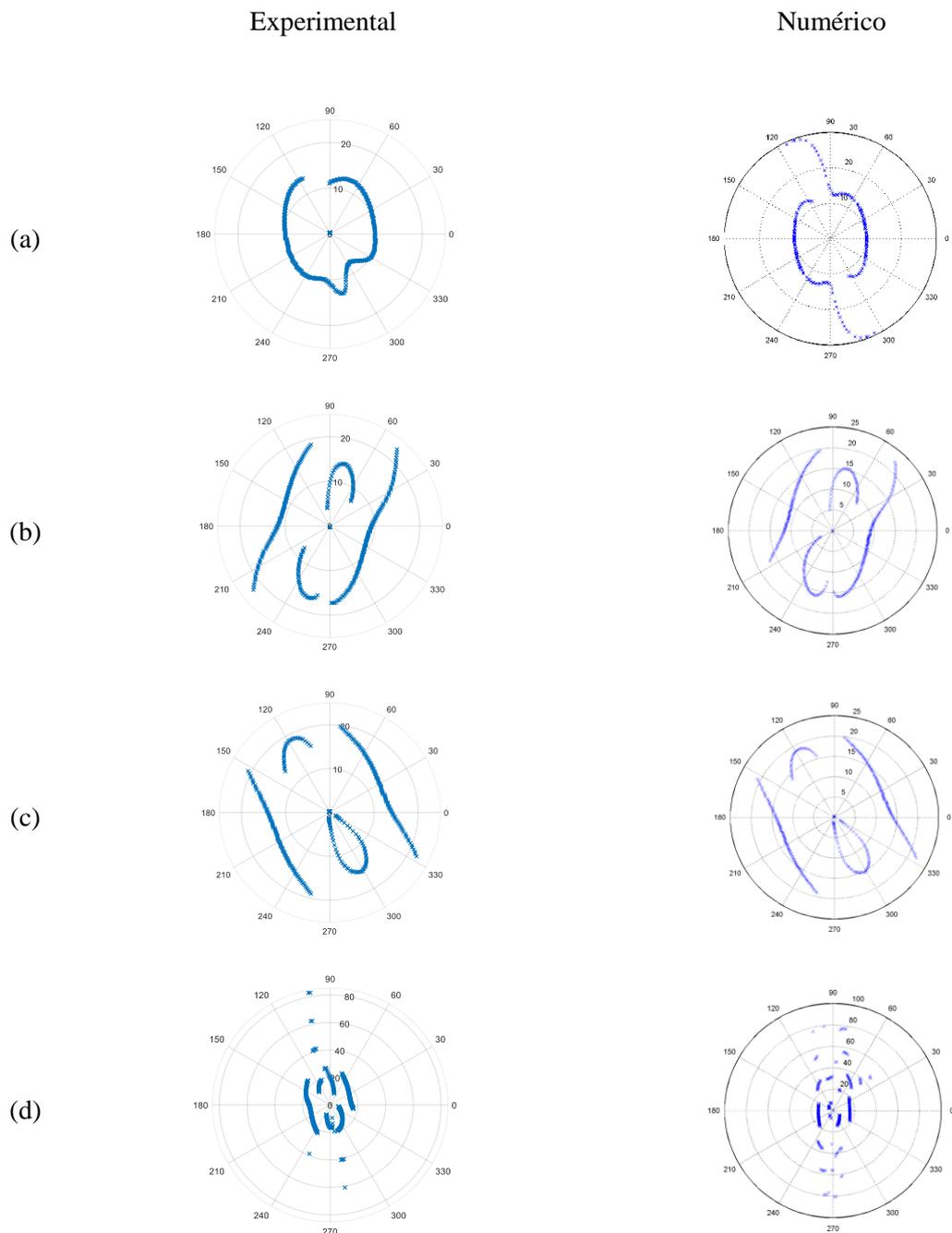
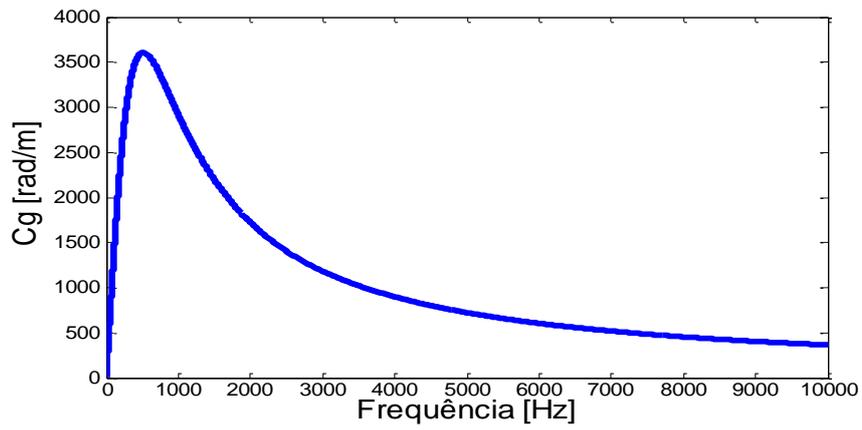
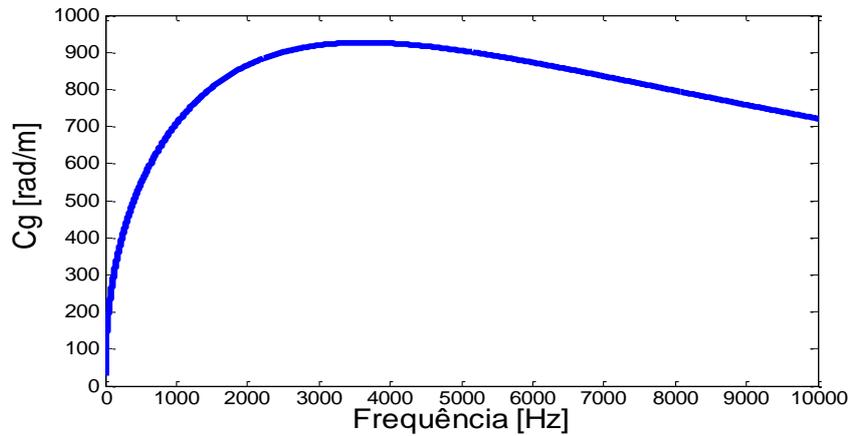


Figura 56. Número de onda direcional experimental (coluna 1) e numérico (coluna 2) [58] para as frequências: (a) 146,9 Hz, (b) 186,5 Hz, (c) 371,1 Hz e (d) 613,7 Hz do painel compósito.

Ao realizar um ajuste das curvas de dispersões experimentais da Fig. 55 a um polinômio de terceiro grau, semelhante ao procedimento adotado nas vigas, é possível estimar a velocidade de grupo em ambas as direções por meio da Eq. (2.4). O número de onda estimado é dispersivo, logo sua velocidade de grupo também irá variar com a frequência, como observado na Fig.57.



(a)



(b)

Figura 57. Velocidade de grupo: (a) direção  $x$  e (b) direção  $y$  do painel compósito.

Calculou-se a partir da velocidade de grupo o valor aproximado da densidade modal através da Eq. (2.35), mostrada na Fig. 57. Nota-se o crescimento exponencial da densidade modal a partir de 1500 Hz, assim como observado no gráfico de amplitudes da Fig. 58.

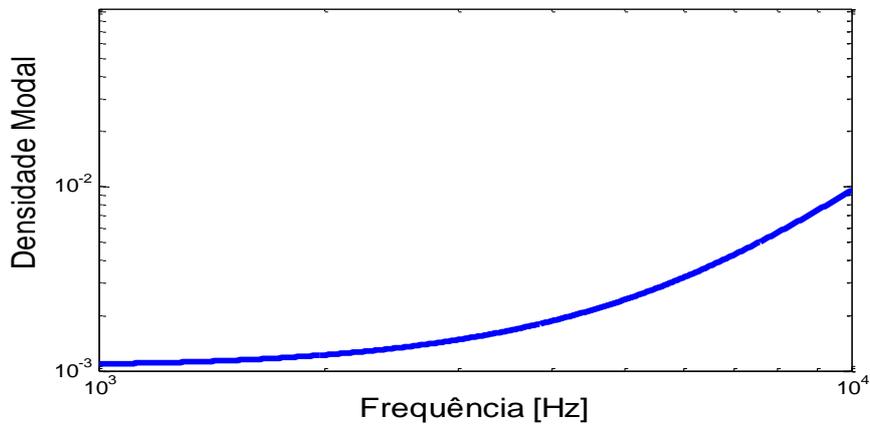


Figura 58. Densidade modal do painel compósito.

#### 4.4. Considerações finais

O método FRF foi aplicado somente para viga metálica e as vigas sintetizadas, onde foram investigados dois parâmetros principais, o posicionamento da medida central e o espaçamento dos pontos de medições. Contudo, os pontos em que a medida central está localizada mais distante do forçamento apresentaram melhores estimativas e para espaçamentos entre pontos de medições menores apresentaram-se mais ruidosas. Este comportamento se deve ao fato das grandes diferenças de amplitudes por causa da alta sobreposição de ondas nesta região.

No método RDFS, o número de linhas espectrais e período da série regressiva são parâmetros a serem definidos. Apesar destes fatores serem determinados de forma empírica neste trabalho, há trabalhos como Batista *et al.* [47] que empregam técnicas bem-sucedidas para determiná-los. Os métodos FFT da ODS e RDFS apresentaram resultados similares em todas as estruturas analisadas. No entanto, esta metodologia mostrou-se pouco eficaz para análise em uma ampla faixa de frequência em estruturas bidimensionais, porém próxima o suficiente para uma análise preliminar.

Por fim, o método de correlação apresentou-se a mais bem-sucedida técnica de estimação de número de onda dentre as analisadas, com resultados experimentais mais precisos comparados aos resultados analíticos e numéricos. Contudo, todos os métodos experimentais abordados neste trabalho são aplicáveis a qualquer condição de contorno, sendo influenciáveis somente fatores nas respostas do sistema, como amortecimento ou reflexão de onda.

## 5. Conclusões

Neste trabalho, realizou-se uma investigação experimental das características de ondas em estruturas leves, vigas de poliamidas e painel compósito, utilizando diferentes técnicas de estimação como o método de resposta em frequência, de séries de *Fourier* discretas regressivas e de correlação. Uma estrutura com propriedades conhecidas, viga metálica, foi inicialmente testada com o objetivo de validar os métodos de estimação a configuração experimental.

O aparato experimental foi um desafio tendo em vista a pequena massa das estruturas. Para as vigas de poliamidas, utilizou-se um mini-acelerômetro e mini-martelo, representando 1.77 % e 1.28 % da massa da viga simples de poliamida e com ressonadores, respectivamente. Já para o painel compósito, utilizou-se o vibrômetro a laser que elimina a variabilidade por adição de massas mas fica sujeito aos erros de desalinhamento e ajuste de foco. Contudo, os dados experimentais capturados apresentaram boas curvas de coerência.

O método FRF foi aplicado somente nas estruturas unidimensionais, viga metálica e vigas sintetizadas. Notou-se que a precisão da técnica depende imensamente do espaçamento e da posição central dos três pontos de medidas. Os espaçamentos entre os pontos determinam o máximo e mínimo número de onda detectável e a medida central determina a quantidade de singularidades na curva. Ainda que seja necessário conhecer os melhores pontos de medições, este método mostrou-se suficientemente preciso para análises preliminares.

O método FFT da ODS gerou resultados experimentais com boa aproximação comparados aos analíticos nas estruturas unidimensionais, já para o painel compósito não obteve o mesmo desempenho. A aplicação do RDFS apresentou pouca diferença comparada ao método FFT da ODS, em todas as estruturas analisadas. As filtragens pela escolha de número de linhas espectrais e aumento do período contribuem para suavizar a curva, principalmente em estruturas bidimensionais, mas não melhoraram a precisão do método.

O método de correlação apresentou excelentes resultados para todas as estruturas analisadas, com maior precisão, comparados aos resultados analíticos e numéricos. Sendo possível extrair parâmetros como velocidade de grupo, densidade modal e potência injetada com qualidade. No entanto, o custo computacional é maior visto que o mesmo realiza milhares de interações com o objetivo de chegar ao máximo valor de correlação para cada frequência.

## 5.1. Sugestões para trabalhos futuros

Com os resultados experimentais obtidos neste trabalho espera-se melhorar os modelos numéricos e analíticos, para que possam ser mais representativos e eficientes em termos da previsão do comportamento dinâmico das estruturas. Além de investigar parâmetros como fator de amortecimento por banda, coeficientes de transmissão e reflexão.

Também, espera-se melhorar o ajuste da curva de dispersão utilizada nos metamateriais para calcular a velocidade de grupo, a fim de identificar o efeito *bandgap*.

Alguns pontos no método RDFS ainda necessitam ser explorados, como a influência da variação do período da série regressiva e o número de linhas espectrais principalmente em estruturas bidimensionais.

## Referências

- [1] NASA, “Sputnik 1,” *Available:*  
[https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image\\_feature\\_924.html](https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_924.html). Accessed on:  
Jan., 11, 2018.
- [2] Agência Espacial Brasileira , “Lançamento do Satélite SGDC-1,” Disponível em:  
<http://www.aeb.gov.br/enviando-uma-nova-noticia/>. Acessado em: 10, Fev., 2017.
- [3] F. Leone, J. Bakuckas, . C. Davies and P. Shyprykevich, “Structural Testing and Analysis of Honeycomb Sandwich Composite Fuselage Panels,” *National Technical Information (NTI)*, 2008. [Online]. Available: <http://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/ar0851.pdf>. Accessed on: Nov., 4, 2018.
- [4] K. C. d. Sousa, “Modelagem de Painéis Sandwich Honeycomb Utilizando Método de Ondas e Elementos Infinitos,” Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2017.
- [5] Placore, “Understanding Honeycomb Panels,” *Available:*  
<https://www.plascore.com/honeycomb/honeycomb-panels/>. Accessed on: Nov., 25, 2017.
- [6] R. Liu, . C. J. Ji, . Z. Z. Zhao e T. Zhou, “Metamaterials: Reshape and Rethink,” *Engineering*, vol. 1, pp. 179-184, 2015.
- [7] S. He, Y. Cui, P. Zhang and Y. Jin, “Optical Nano-Antennas and Metamaterials,” *Materials Today*, vol. 12, pp. 16-24, 2009.
- [8] C. Xu, . S. Qu, Y. Pang, J. Wang, M. Yan, J. Zhang, Z. Wang and W. Wang, “Metamaterial Absorber for Frequency Selective Thermal Radiation,” *Infrared Physics & Technology*, vol. 88, pp. 133-138, 2017.
- [9] D. Shelton, “Tunable Infrared Metamaterials” Doctoral Thesis, Department of Mechanical, Materials, and Aerospace Engineering, University of Central Florida, Florida, United States of America, 2010.
- [10] P. Alitalo and S. Tretyakov, “Electromagnetic Cloaking with Metamaterials,” *Materials Today*, vol. 12, nº 3, pp. 22-19, março 2009.
- [11] M. Rinker , R. Krueger and J. Ratcliffe , “Analysis of an Aircraft Honeycomb Sandwich Panel with Circular Face Sheet/Core Disbond Subjected to Ground-Air Pressurization,” NASA Center for AeroSpace Information, 2013.[Online]. Available:  
<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20130011132.pdf>. Accessed on:  
Mar.,12, 2018.

- [12] R. Cherif and A. Noureddine , “Experimental Investigation of the Accuracy of a Vibroacoustic Model for Sandwich Composite Panels,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 137, p. 1541–1550, 2015.
- [13] S. J. Chen, Y.J. Huang and I.T. Chien, “Flexural Wave Propagation in Metamaterial Beams Containing Membrane-Mass Structures,” *International Journal of Mechanical Sciences*, pp. 500-506, 2017.
- [14] A. L. Abrahamson, “The Response of Periodic Structures to Aero-acoustic Pressures, with Particular Reference to Aircraft Skin-rib Spar Structures,” Doctoral Thesis, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton , United Kingdom, 1973.
- [15] D. E. Chirienti , “Guided Waves in Plates and their use in Materials Characterization,” *American Society of Mechanical Engineers*, vol. 50, pp. 247-283, 1997.
- [16] J. McDaniel and W. Shepard W.S, “Estimation of Structural Wavenumbers from Spatially Sparse Response Measurements,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, p. pp. 1674–82., 2000.
- [17] J. Bolton, Y. Kim and H. Song, “The Wavenumber Decomposition Approach to the Analysis of Tire Vibration,” *Publications of the Ray W. Herrick Laboratories*, 1998.
- [18] N. Ferguson N.S, C. Halkyard , B. Mace and K. Heron, “The Estimation of Wavenumbers in Two-Dimensional Structures,” 2002.
- [19] M. Ichchou, J. Berthaut and M. Collet, “Multi-Mode Wave Propagation in Ribbed Plates. Part II: Predictions and Comparisons,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, p. 1196–1216, 2008.
- [20] M. K. Kalkowski , J. M. Muggleton and E. Rustighi, “An Experimental Approach for the Determination of Axial and Flexural Wavenumbers in Circular Exponentially Tapered Bars,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 390, p. 67–85, 2016.
- [21] M. Ayzenberg-Stepanenکو, T. Cohen, G. Osharovich and O. Timoshenko, “Wave in Periodic Structures,” Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Be’er-Sheva, 2005.
- [22] A. T. Fabro, D. Beli, J. R. Arruda and B. R. Mace, “Uncertainty Analysis of Band Gaps for Beams with Periodically Distributed Resonators Produced by Additive Manufacturing,” *ISMA Noise and Vibration Engineering Conference*, 2016.
- [23] L. Liu and M. Hussein, “Wave Motion in Periodic Flexural Beams and Characterization of the Transition Between Bragg Scattering and Local Resonance,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 17, pp. 1-17, January 2012.

- [24] C. Surgino, Y. Xia, S. Leadenham, M. Ruzzene and A. Erturk, "A General Theory for Bandgap Estimation in Locally Resonant Metastructures," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 406, pp. 104-123, 2017.
- [25] F. Pai, "Metamaterial Based Broadband Elastic Wave Absorber," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 21, pp. 517-528, 2010.
- [26] P. H. Casado, "Caracterização Experimental do Número de Onda em Metamateriais Estruturais," Trabalho de conclusão de curso, Departamento de engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2017.
- [27] H. Sun and P. F. Pai, "Theory of Metamaterial Beams for Broadband Vibration Absorption," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 21, pp. 1085-1102, 2010.
- [28] N. Takeda, S. Minakuchi and Y. Okabe, "Smart Composite Sandwich Structures for Future Aerospace Application Damage Detection and Suppression: a Review," *Journal of Solid MEchanics and Materials Engineering*, vol. 1, pp. 3-17, 2007.
- [29] D. Group, "Guideline to Core and Sandwich," Available: <http://www.diabgroup.com/en-GB/Products-and-services/Core-Material>. Accessed on: Dec., 2, 2018.
- [30] J. N. Reddy, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [31] G. Escusa, J. Garzón Roca, H. Abdolpour, J. Sena Cruz, J. Barros , I. Valente , D. Martins , J. R. Correia e F. A. Branco, "Caracterização Experimental do Comportamento Mecânico de Paineis Sandwich com Lâminas de GFRP e Núcleo de Poliuretano," *5º Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas*, 2014.
- [32] H. N. Wadley, "Multifunctional Periodic Cellular Metals," *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 364, pp. 1-68, 2006.
- [33] F. J. Fahy and P. Gardonio, "Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response," London: Academic Press, 2<sup>a</sup> Edition, 2007.
- [34] D. A. Russell, "Acoustics and Vibration Animations," *The Pennsylvania State University*, Available: <https://www.acs.psu.edu/drussell/demos/dispersion/dispersion.html>. Accessed on: Jan, 03, 2019.
- [35] S. S. Rao, "Vibration of Continuous Systems," New Jersey: John Wiley & Sons, 1<sup>a</sup> Edition, 2007.
- [36] F. J. Fahy, "Foundations of Engineering Acoustics," London: Academic Press, 1<sup>a</sup> Edition ,2000.
- [37] L. Wang and F. Yuan, "Group Velocity and Characteristic Wave curves of Lamb Waves in Composites: Modeling and Experiments," *Composites Science and Technology*, vol. 67, p. 1370–1384, 2007.
- [38] S. S. Rao, "Vibrações Mecânicas," São paulo: Pearson Prentice Hall, 4<sup>a</sup> Edition, 2008.

- [39] A. T. Fabro and E. S. Sampaio, "Wave Attenuation in a Metamaterial Beam Assembly with Uncertainties," *proceeding of DINAME Dynamic Problems of Mechanics*, 2019.
- [40] J. Cuenca, "Wave Models for the Flexural Vibrations of Thin Plates," Doctoral Thesis, Department of Mechanical Engineering, Université du Maine, France, 2009.
- [41] K. F. Graff, "Wave Motion in Elastic Solids", New York: Dove Publications, 1975.
- [42] R. H. Lyon and R. G. Dejang, "Theory and Application of Statistical Energy Analysis", Cambridge: MIT Press, 2<sup>a</sup> Edition, 1994.
- [43] D. J. Mead, "Waves and Modes in Finite Beams: Application of the Phase-Closure Principle," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 17, pp. 695-702, 1994.
- [44] L. Cremer, M. Heckl and B. A. Petersson, "Structure - Borne Sound: Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies," Berlin: Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 3<sup>a</sup> Edition, 2005.
- [45] J. M. Muggeleton, M. J. Brennam and P. W. Linford, "Axisymmetric Wave Propagation in Fluid-Filled Pipes: Wavenumber Measurements in Vacuo and Buried Pipes," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 270, pp. 171-190, 2004.
- [46] D. A. Neves, A. T. Fabro and P. H. Casado, "Experimental Investigation of the Wave Propagation in Beams Undergoing Flexural Vibration," *CONEM Congresso de Nacional de Engenharia Mecânica*, 2018.
- [47] F. B. Batista, A. T. Fabro, J. F. Arruda and E. L. Albuquerque, "1D Smoothing Technique Associating Regressive Discrete Fourier Series and Empirical Mode Decomposition," [Online] Available: <https://www.researchgate.net/publication/287061751> 2010. Accessed on: Oct., 13, 2018.
- [48] J. R. F. Arruda, "A Robust One-Dimensional Regressive Discrete Fourier Series," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, p. 835–840, 2010.
- [49] J. R. Arruda, "Analysis of Non-Equally Spaced Data Using a Regressiva Discrete Fourier Series," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 156, pp. 571-574, 1992.
- [50] D. Chronopoulos , B. Troclet, O. Bareille and M. Ichchou, "Modeling the Response of Composite Panels by a Dynamic Stiffness Approach," *Composite Structures*, vol. 96, p. 111–120, 2013.
- [51] M. N. Ichchou , J. Berthaut and M. Collet, "Multi-mode Wave Propagation in Ribbed Plates: Part I, Wavenumber-Space Characteristics," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, p. 1179–1195, 2008.
- [52] D. J. Inman, "Engineering Vibration," New Jersey: Pearson Prentice Hall, 3<sup>a</sup> Edition 2008.
- [53] M. S. Travi and A. T. Fabro, "Experimental Study of the Dynamic Behavior of a Beam with Spatially Correlated Masses for Different Random Fields Models," *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia - RIPE*, pp. 32-41, Janeiro 2017.

- [54] T. A. L. d. Silva, “Investigação Experimental dos Efeitos da Variabilidade de Fabricação em Metamateriais Acústicos,” Trabalho de conclusão de curso, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2016.
- [55] HexWeb Corporation, “HexWeb Honeycomb Attributes and Properties,” Available: [https://www.hexcel.com/user\\_area/content\\_media/raw/HexWeb\\_CRIII\\_DataSheet.pdf](https://www.hexcel.com/user_area/content_media/raw/HexWeb_CRIII_DataSheet.pdf), Accessed on: Sep., 13, 2018.
- [56] PCB Piezotronics, Available: <http://www.pcb.com/Products.aspx?m=352C33>, Accessed on: Jan., 11, 2018.
- [57] PCB Piezotronics, Available: <http://www.pcb.com/Products.aspx?m=352A21>, Accessed on: Sep., 11, 2018.
- [58] D. A. Neves, K. Sousa and A. T. Fabro, “Experimental Investigation of Wave Propagation in Light Weight Structures Undergoing Flexural Vibration,” *em processo de publicação*, 2019.