



DISSERTAÇÃO

Estudo da dinâmica do plasma em propulsores do tipo Hall

Matheus Araújo Aguilár

Brasília, Março de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Física

DISSERTAÇÃO

Estudo da dinâmica do plasma em propulsores do tipo Hall

Matheus Araújo Aguilár

*Dissertação submetida ao Instituto de Física
como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Física*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ivan Soares Ferreira
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Geraldo José da Silva
Avaliador, IF/UnB

Profa. Dra. Adriane Beatriz Schelin
Avaliador, IF/UnB

FICHA CATALOGRÁFICA

AGUILAR, MATHEUS ARAÚJO

Estudo da dinâmica do plasma em propulsores do tipo Hall [Distrito Federal] 2019.

xvi, 51 p., 210 x 297 mm (IFD/UnB, Mestre, Mestrado em Física, 2019).

Dissertação - Universidade de Brasília, Instituto de Física.

1. Plasmas

3. Transporte de elétrons no plasma

I.IFD/UnB

2. Propulsores Hall

4. Dissertações da PG-IFD

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

AGUILAR, M. (2019). *Estudo da dinâmica do plasma em propulsores do tipo Hall*. Dissertação, Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 51 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Matheus Araújo Aguilar

TÍTULO: Estudo da dinâmica do plasma em propulsores do tipo Hall.

GRAU: Mestre em Física ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Dissertação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. Os autores reservam outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa Dissertação pode ser reproduzida sem autorização por escrito dos autores.

Matheus Araújo Aguilar

Instituto de Física - IFD

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

Agradecimentos

Eu gostaria agradecer ao meu professor e orientador, Ivan Ferreira, pelo auxílio, orientação e paciência ao longo desses anos.

Aos meus pais Osvaldo Aguilar e Kátia Marília, por todo o apoio, confiança e suporte.

Ao meu irmão Lukas Aguilar, por todo apoio e força que me deu e me mostrou ao longo da vida.

Aos meus irmãos Thiago Aguilar e Maurício Aguilar pela confiança e apoio.

A minha namorada Carolina Mieldazis pela confiança e paciência ao longo desses anos.

A todos os meus amigos que acreditaram em mim e contribuiu de algum jeito para que eu pudesse chegar até aqui.

E um agradecimento especial a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo seu apoio a pesquisa no Brasil.

Matheus Araújo Aguilar

RESUMO

O propulsor Hall é um dispositivo que usa uma configuração de campos cruzados, um campo elétrico perpendicular a um campo magnético, com o objetivo de confinar elétrons e acelerar íons. Os elétrons são confinados em um canal de aceleração onde a configuração de campo cruzado está presente. Um gás neutro é inserido nesse canal de forma que seus átomos sofrem colisões com os elétrons e são ionizados gerando assim o plasma, que é acelerado para fora do canal gerando empuxo para o propulsor. No presente trabalho, estudaremos os mecanismos de transporte no plasma bem como os seus aspectos no interior do canal de aceleração. Visando determinar onde a região de aceleração vai ocorrer, escrevemos as equações de movimento, via formalismo hamiltoniano, e analisamos essas equações. Dessas equações determinamos para diferentes configurações de campos magnéticos, a região de aceleração do propulsor com o objetivo de fornecer uma relação entre a configuração do campo magnético com as dimensões que o propulsor deve possuir.

Palavras-Chave: Propulsão Elétrica - Propulsor tipo Hall - Física de Plasmas.

ABSTRACT

The Hall Thruster is a device that uses a cross-field configuration, an electric field perpendicular to a magnetic field, with the goal of confining electrons and accelerating ions. Electrons are confined in an acceleration channel where the cross field configuration is present. A neutral gas is inserted into this channel so that its atoms collide with the electrons and are ionized thereby generating the plasma, which is accelerated out of the channel generating thrust to the Thruster. In the present work, we will study the transport mechanisms in the plasma as well as their aspects inside the acceleration channel. Aiming to determine where the acceleration region will occur, we write the equations of motion, via Hamiltonian formalism, and analyze these equations. From these equations we determine for different configurations of magnetic fields the region of acceleration of the thruster with the objective of providing a relation between the configuration of the magnetic field and the dimensions that the Thruster must possess.

Keywords: Electric Propulsion - Hall-Effect Thruster - Plasma Physics.

TABLE OF CONTENTS

1	OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	1
1.1	OBJETIVOS	1
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	1
2	SISTEMAS DE PROPULSÃO	2
2.1	TIPOS DE PROPULSÃO ESPACIAL.....	2
2.1.1	PROPULSÃO QUÍMICA	2
2.1.2	PROPULSÃO ELÉTRICA.....	2
2.1.3	TIPOS DE PROPULSORES ELÉTRICOS.....	2
2.2	PROPULSORES HALL.....	5
2.3	PARÂMETROS DE PERFORMANCE.....	6
2.3.1	EMPUXO	6
2.3.2	IMPULSO ESPECÍFICO	8
2.3.3	EQUAÇÃO DO FOGUETE.....	8
2.3.4	EFICIÊNCIA	9
3	O PLASMA	10
3.1	CARACTERIZAÇÃO DO PLASMA	10
3.2	COLISÕES NO PLASMA	12
4	ASPECTOS DO PLASMA EM UM PROPULSOR HALL	14
4.1	DINÂMICA DAS PARTÍCULAS CARREGADAS EM UM PLASMA.....	14
4.1.1	TEORIA ORBITAL	14
4.1.2	FORMULAÇÃO MAGNETO HIDRODINÂMICA.....	16
4.2	REGIÕES DENTRO DO CANAL DE ACELERAÇÃO	20
4.2.1	BAINHA DO ANODO	20
4.2.2	DIFUSÃO.....	21
4.2.3	IONIZAÇÃO.....	23
4.2.4	CONDUTIVIDADE	24
4.3	TRANSPORTE ANÔMALO.....	26
4.4	OSCILAÇÕES EM UM PROPULSOR DO TIPO HALL	27
4.4.1	BREATHING MODE: 1 À 20KHZ	28
4.4.2	ROTATING SPOKES 5 À 25KHZ.....	29
4.4.3	OSCILAÇÕES AZIMUTAIS INDUZIDAS POR GRADIENTES 20 À 60KHZ	29
4.4.4	OSCILAÇÕES DE TEMPO TRANSIENTE 50 À 700HZ	30
4.4.5	OSCILAÇÕES AZIMUTAIS DE ALTA FREQUÊNCIA 500KHZ-5MHZ.....	30
5	DESCRIÇÃO HAMILTONIANA DO PROPULSOR HALL	31

5.1	FORMALISMO HAMILTONIANO-LAGRANGIANO	31
5.2	CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE.....	35
5.3	CAMPO MAGNÉTICO GAUSSIANO	37
5.3.1	ANÁLISE PARA O ELÉTRON.....	37
5.3.2	VOLUME EFETIVO INTERCEPTADO PELO ELÉTRON	38
5.3.3	ANÁLISE PARA O ÍON	39
5.3.4	SEÇÃO DE ACELERAÇÃO E IONIZAÇÃO.....	39
5.4	CAMPO GERADO NO P-HALL	41
5.4.1	ANÁLISE PARA O ELÉTRON.....	44
5.4.2	VOLUME EFETIVO INTERCEPTADO PELO ELÉTRON	45
5.4.3	ANÁLISE PARA O ÍON	45
5.4.4	SEÇÃO DE ACELERAÇÃO E IONIZAÇÃO.....	47
6	CONCLUSÃO	48

LIST OF FIGURES

2.1	Esquemático de um Resistorjet (TUMMALA,2017)	3
2.2	Esquemático de um Arcjet(YILDIZ,2015)	3
2.3	Esquemático de funcionamento de um propulsor iônico , que utiliza gás xenônio como gás neutro(UPMPIASMLAB,2013)	4
2.4	Esquemático do foguete de magnetoplasma de impulso específico "VASMIR"(NASA,2018)	5
2.5	esquemático de um propulsor tipo Hall(BOEUF,2017)	6
4.1	Trajétórias de elétrons e íons na presença do campo eletromagnético.....	15
4.2	Esquema do canal de aceleração. 1)Bainha do Anodo;2)Região de Difusão; 3)Região de ionização 4) Região de aceleração. As setas indicam as espécies que circulam pelo canal. A intensidade da seta indica a abundância da espécie.(IVAN,2003)	20
4.3	Distribuição de ionização para diferentes campos magnéticos (LIQIU WEI,2013)..	24
4.4	Exemplos de trajetórias eletrônicas em um propulsor Hall, no plano radial-azimutal (r, h) (à esquerda) e no plano axial-radial (r, x) (à direita). Estas trajetórias foram calculadas pela integração das equações eletrônicas de movimento com uma dada distribuição de campo magnético e uma distribuição de campo elétrico obtida de um modelo híbrido (um módulo de Monte Carlo foi usado para colisões assumindo uma densidade de átomo neutra constante)(BOEUF,2017).	27
5.1	Campos elétrico axial e magnético radial obtidos por uma simulação PIC/MCC(ADAM,2008)	40
5.2	Campos magnéticos radiais gerados por ímãs permanentes obtidos utilizando elementos finitos	41
5.3	Campo magnético obtido experimentalmente utilizando uma sonda de Gauss	42

LIST OF TABLES

1 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

1.1 OBJETIVOS

O estudo do propulsor tipo Hall se justifica pelo fato de além de ter vasta aplicabilidade, a física no seu interior possui fenômenos de grande interesse na física como o transporte anômalo e turbulento.

O objetivo desse trabalho é compreender os fenômenos pertinentes à aceleração e geração do plasma dentro de um propulsor Hall. Com base nesse entendimento, elaborar critérios para construção e simulação de um propulsor Hall via formalismo Hamiltoniano, caracterizando suas regiões de maior importância dentro do propulsor.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esse trabalho é organizado na seguinte formatação:

No capítulo 2, trataremos dos sistemas de propulsão bem como os tipos de propulsão mais utilizados, apresentaremos o funcionamento do propulsor tipo Hall, e seus parâmetros de performance.

No capítulo 3 vamos apresentar a definição formal do plasma e explorar fenômenos como colisionais que ocorrem dentro do mesmo e também o processo de ionização.

No capítulo 4 primeiramente descreveremos os processos dinâmicos dentro do plasma, e com esse formalismo exploraremos fenômenos que acontecem dentro de plasma, ao final do capítulo discutimos sobre os mecanismos de perda que atrapalham o transporte de partículas dentro do plasma.

No capítulo 5 introduziremos o formalismo usado nesse trabalho e o utilizaremos para obter características importantes para o projeto do propulsor.

No capítulo 6 concluiremos o trabalho enfatizando os principais resultados obtidos.

2 SISTEMAS DE PROPULSÃO

Para entender o objetivo de estudar o propulsor Hall faremos uma introdução aos sistemas de propulsão caracterizando os diferentes tipos e suas aplicações. Posteriormente deduziremos os parâmetros de performance que são de vital importância para comparar as performances entre as fontes de plasma, com o intuito de determinar onde é a sua melhor aplicação.

2.1 TIPOS DE PROPULSÃO ESPACIAL

Existem diferentes tecnologias usadas para a propulsão espacial, cada uma delas possuem vantagens e desvantagens em relação à sua utilização. Serão destacados os dois tipos mais relevantes: propulsão química e elétrica.

2.1.1 Propulsão Química

A propulsão química pode ser resumida como uma força de reação entre dois propelentes diferentes, armazenados inicialmente em contêineres separados, que reagem em uma câmara de combustão produzindo um gás quente que será expelido pela tubeira. Essa expulsão gera uma reação no foguete que se iguala à força criada pelo gás, permitindo o movimento deste. Tal tecnologia fornece valores muito altos de potência e empuxo, sendo amplamente usada para o lançamento de veículos espaciais a partir da superfície da terra.

2.1.2 Propulsão Elétrica

A propulsão elétrica consiste na conversão de potência elétrica em empuxo, com o objetivo de acelerar veículos espaciais fora do planeta. Tendo em vista que os propulsores elétricos não podem ser operados a partir da superfície da terra, essa tecnologia não tem o intuito de substituir a propulsão química, mas sim complementar, já que a mesma perde muito propelente dificultando a aceleração do foguete fora da terra.

2.1.3 Tipos de Propulsores Elétricos

Os propulsores elétricos são separados pelo tipo de método utilizados para gerar o empuxo. Podemos classificar em três tipos que podem ser consultados abaixo.

2.1.3.1 Propulsores Eletrotérmicos

São dispositivos em que o campo eletromagnético é usado para gerar o plasma com o objetivo de aquecer o propelente. A energia térmica transferida para o propelente o acelera, produzindo o empuxo. Estes podem ser classificados em dois tipos: Resistorjet, que utiliza a potência elétrica para tal aquecimento, e Arcjet, que utiliza um arco elétrico para atingir o mesmo fim.

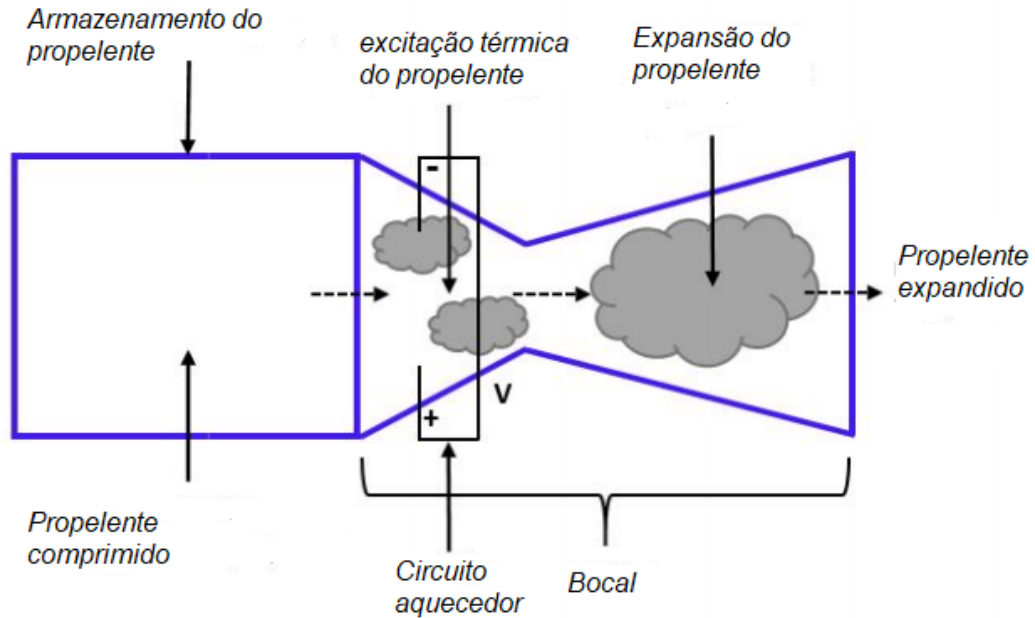


Figura 2.1: Esquemático de um Resistorjet (TUMMALA,2017)

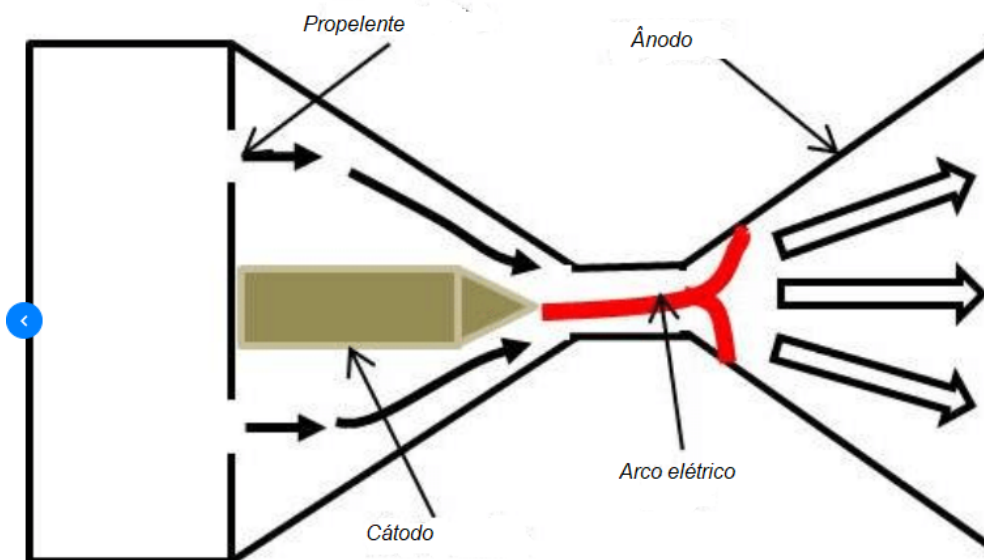


Figura 2.2: Esquemático de um Arcjet(YILDIZ,2015)

2.1.3.2 Propulsores Eletrostáticos

Nesse propulsor, os íons oriundos de uma fonte são acelerados por campos eletrostáticos. À justante dessa região, elétrons de outra fonte neutralizam o feixe de modo que, um feixe de carga líquida zero, sai do acelerador a uma determinada velocidade.

Dentro os propulsores eletrostáticos, pode-se apontar o propulsor iônico como o mais comum. O mesmo ioniza uma fração do propelente, utilizando grades no final da câmara de ionização para extração e aceleração do plasma, gerando empuxo.

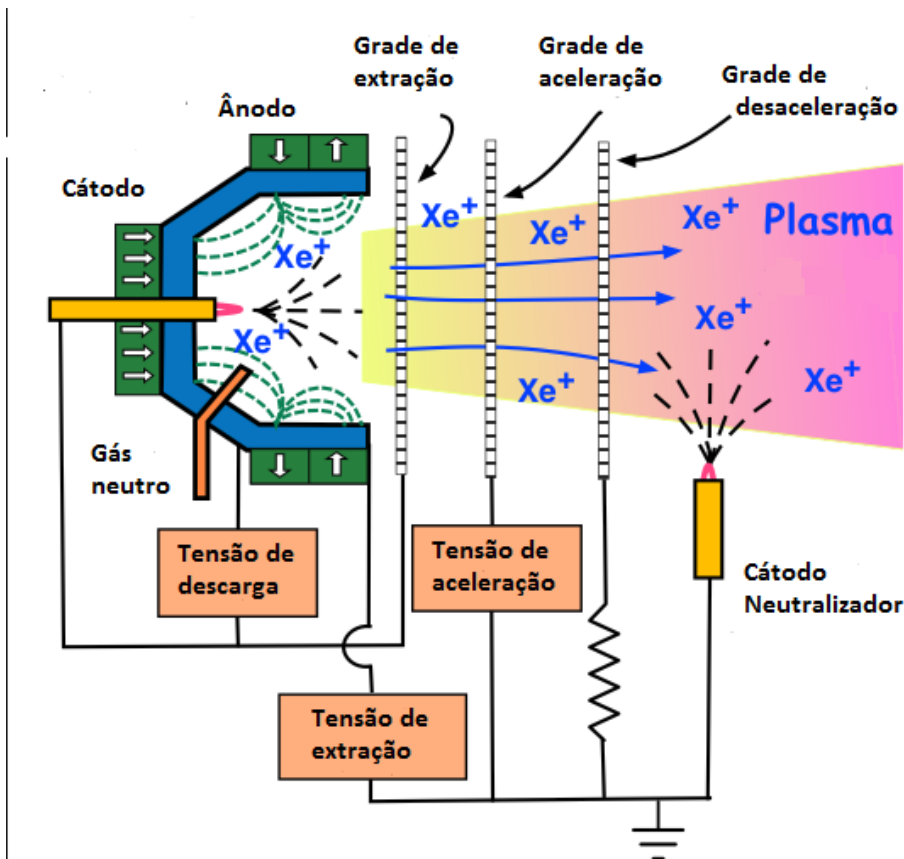


Figura 2.3: Esquemático de funcionamento de um propulsor iônico , que utiliza gás xenônio como gás neutro(UPMPIASMLAB,2013)

Esses dispositivos possuem a melhor eficiência dentre os propulsores elétricos e um grande impulso específico.

2.1.3.3 Propulsores Eletromagnéticos

Nesse tipo de propulsão, o plasma é acelerado por campos elétricos e magnéticos, perpendiculares entre si e ao plasma, onde a densidade de corrente perpendicular ao campo magnético gera uma força que acelera o plasma ao longo do canal.

Os propulsores eletromagnéticos podem produzir velocidades de exaustão maiores que os

eletrotérmicos e empuxos consideravelmente mais altos do que os eletrostáticos mas são fenomenologicamente mais complexos e mais difíceis de se tratar analiticamente. Dentre os propulsores eletromagnéticos podemos destacar os propulsores Hall (SPT), os propulsores Magneto-hidrodinâmicos (MHD), os propulsores a plasma pulsado e o foguete de magnetoplasma de impulso específico variável "VASIMR".

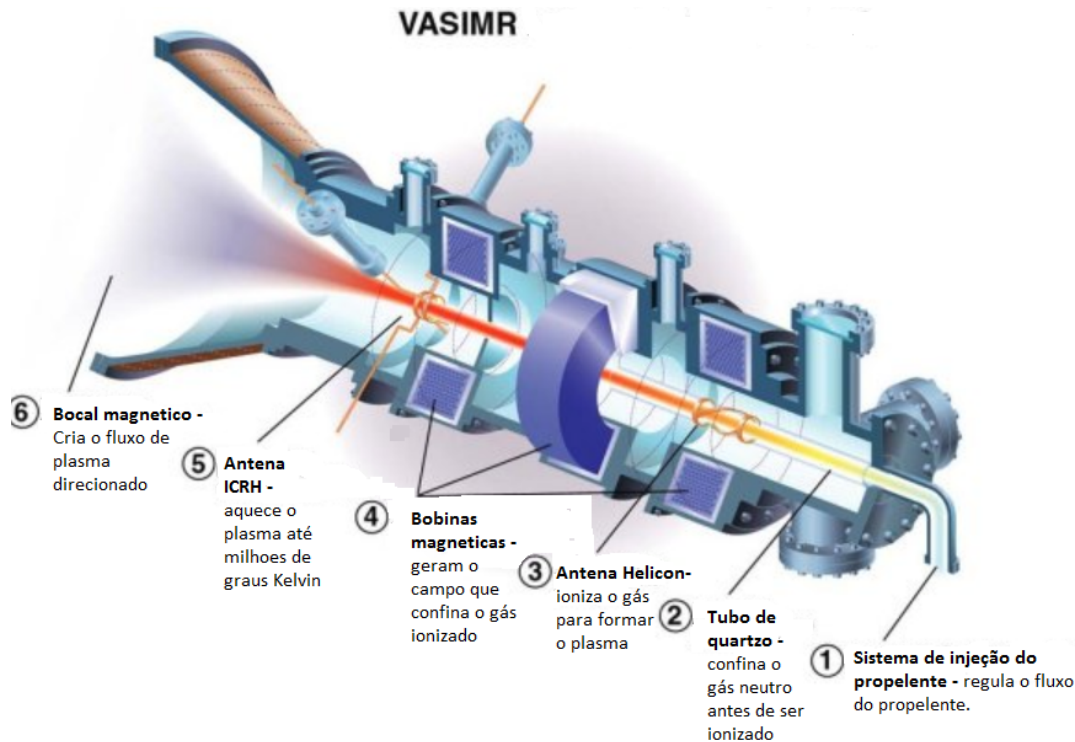


Figura 2.4: Esquemático do foguete de magnetoplasma de impulso específico "VASIMR"(NASA,2018)

2.2 PROPULSORES HALL

Nos propulsores Hall, o plasma é gerado em um canal entre dois cilindros dielétricos concêntricos de raios r_1 e r_2 , a largura do canal definida sendo $H = r_2 - r_1$, a figura 2.5 ilustra tal caracterização. Esse dispositivo possui um ânodo ao fim de seu canal e um cátodo emissor fora do canal. Os elétrons ionizam um gás neutro que é injetado no canal, em uma região próxima ao ânodo.

Os eletrodos são responsáveis pela geração de um campo elétrico e um par de bobinas magnéticas geram um campo magnético, predominantemente radial, no canal. Isso impede que os elétrons saindo do cátodo atravessem direto para o ânodo. Ao invés disso, grande parte dos elétrons ficam confinados em espiral ao longo das linhas de campo magnético na direção $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ao redor do canal. O resto dos elétrons difundem por processos colisionais para o ânodo e paredes

do canal.

O movimento dos elétrons formam uma densidade de corrente J_e , esses elétrons sofrem deflexão em sua trajetória, devido campo magnético B , formando assim uma densidade de corrente J_H na direção positiva do eixo azimutal, definida como densidade de corrente Hall, que é responsável pela ionização do gás neutro. Esses íons são acelerados axialmente pelo campo elétrico, para fora do canal, gerando o empuxo.

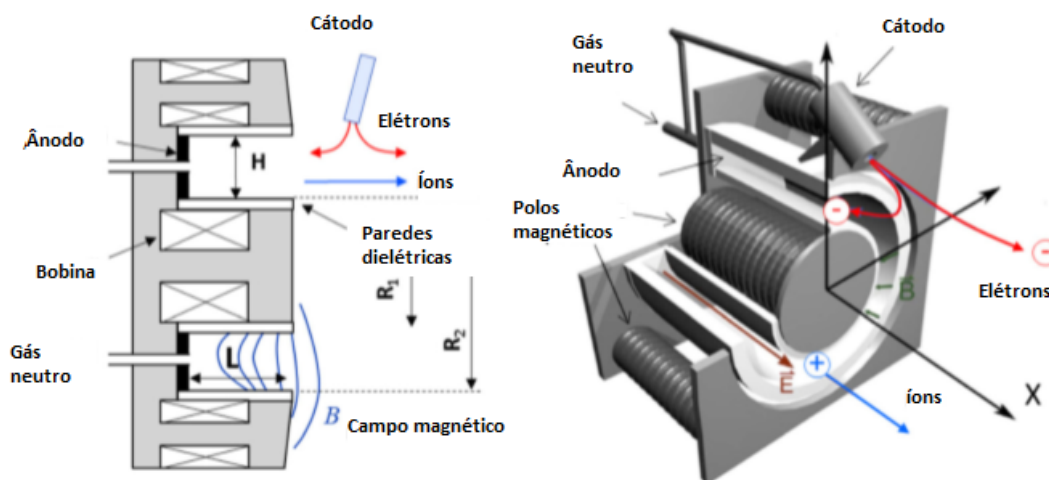


Figura 2.5: esquemático de um propulsor tipo Hall(BOEUF,2017)

2.3 PARÂMETROS DE PERFORMANCE

2.3.1 Empuxo

O empuxo é a força que o motor fornece ao foguete. Como a massa do foguete varia com o tempo, devido ao consumo do propelente, o empuxo é dado pela taxa de variação do momento em relação ao tempo da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = m_p \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \mathbf{v}_e \frac{dm_p}{dt} \quad (2.1)$$

Como a velocidade de exaustão do feixe não depende do tempo, podemos definir o empuxo no foguete sendo:

$$\mathbf{T} = \mathbf{v}_e \frac{dm_p}{dt}, \quad (2.2)$$

onde m_p é a massa do propelente e v_e é a velocidade de exaustão no referencial do foguete.

A variação da massa do propelente em relação ao tempo é dada por:

$$\dot{m}_p = QM, \quad (2.3)$$

onde Q é o fluxo de partículas e M é a massa da partícula.

A energia elétrica é convertida em energia cinética, com isso podemos definir a potência cinética do feixe como:

$$P = \frac{1}{2} \dot{m}_p v_{ex}^2 \quad (2.4)$$

Podendo ser escrita em termos do empuxo T :

$$P = \frac{T^2}{2\dot{m}_p} \quad (2.5)$$

Essa expressão nos mostra que aumentar o empuxo, mantendo a mesma taxa de variação de propelente, resulta em um aumento da potência. Como em um sistema real nem toda potência promove um empuxo, essa expressão nos fornece informação sobre o máximo de empuxo disponível.

Com o objetivo de caracterizar o empuxo de maneira mais eficaz em um foguete pode-se usar a definição de densidade de corrente, para uma corrente que foi medida empiricamente.

$$\mathbf{J} = qn\mathbf{v}_e, \quad (2.6)$$

onde q é a carga das partículas presentes no feixe e n sua densidade.

Pela definição de corrente:

$$i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.7)$$

Com isso temos a corrente dada por:

$$i = v_e A q n, \quad (2.8)$$

e o empuxo associado a essa corrente é:

$$T = i \frac{\dot{m}}{nqA}, \quad (2.9)$$

onde A é a área do canal.

Esse empuxo é considerado o empuxo empírico.

2.3.2 Impulso Específico

O impulso total, no foguete, é dado por:

$$I_t = \int T dt \quad (2.10)$$

A partir dele, podemos definir um parâmetro importante que caracteriza um sistema propulsor, o impulso específico, sendo que quanto maior seu valor, melhor a performance. Ele pode ser calculado com uma razão simples entre o impulso total e a taxa de consumo do propelente.

$$I_{sp} = \frac{\int_0^t T dt}{mg} \quad (2.11)$$

Logo, temos:

$$I_{sp} = \frac{v_e}{g}, \quad (2.12)$$

ou em termos do empuxo:

$$I_{sp} = \frac{T}{g\dot{m}} \quad (2.13)$$

Esse impulso específico pode ser interpretado como o tempo útil de um sistema de propulsão.

2.3.3 Equação do Foguete

Pela definição de empuxo apresentada acima, podemos especificar a relação entre a massa final do foguete e sua variação de velocidade, muitas vezes conhecida como equação do foguete.

Como já dito anteriormente o empuxo no foguete é igual e oposto a variação de momento do propelente

$$T = -v_e \frac{dm_p}{dt} \quad (2.14)$$

A massa total do foguete é dada pela massa de sua estrutura, também conhecida como massa seca, somada à massa do propelente, também conhecida como massa molhada.

$$M(t) = m_s + m_p \quad (2.15)$$

A massa do propelente varia no tempo, enquanto a massa da estrutura é fixa, então temos:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dm_p}{dt} \quad (2.16)$$

Substituindo a Eq. 2.16 na Eq.2.14 temos:

$$M \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dM}{dt} \quad (2.17)$$

Que pode ser escrita como:

$$dv = -v_e \frac{dM}{M} \quad (2.18)$$

A solução da Eq. 2.18, para uma movimento retilíneo de $(m_s + m_p)$ até m_s é dada por:

$$v_i - v_f = -v_e \ln \left(\frac{m_s}{m_s + m_p} \right) \quad (2.19)$$

A massa final do foguete após uma variação de velocidade Δv é de:

$$m_s = (m_s + m_p) e^{-\frac{\Delta v}{v_e}} \quad (2.20)$$

Essa equação nos mostra que a ordem de grandeza da velocidade de exaustão tem que ser comparável à variação de velocidade. Dessa forma, uma fração significativa de massa será transportada ao destino final.

Podemos escrever essa equação em termos do impulso específico:

$$\frac{m_p}{m_s} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp}g}} \quad (2.21)$$

Essa equação nos mostra que um maior impulso específico permite uma alta variação de velocidade com menor uso do propelente.

2.3.4 Eficiência

A eficiência do propulsor elétrico é definida pela razão entre a potência útil e a potência total:

$$\eta_T = \frac{P_u}{P_t} \quad (2.22)$$

Usando a definição de potência da equação 2.1, podemos escrever a eficiência como:

$$\eta_t = \frac{T^2}{2\dot{m}_p P} \quad (2.23)$$

3 O PLASMA

3.1 CARACTERIZAÇÃO DO PLASMA

Para um gás ionizado ser caracterizado como plasma é necessário que algumas condições sejam satisfeitas.

O comprimento de Debye é um importante parâmetro na caracterização do plasma, ele mede a distância que uma perturbação eletromagnética externa (como, por exemplo, um campo gerado por uma partícula) afeta o plasma. Para compreendermos tal parâmetro vamos imaginar que uma carga de teste seja aproximada do plasma. Como o plasma é constituído de íons e elétrons, irá se formar uma nuvem de partículas com carga oposta a carga teste, de modo que, o potencial gerado por essa perturbação, se anule em algum ponto no plasma. Esse ponto é no limite do comprimento de Debye e é dado por(CHEN,1984):

$$\lambda_D = \sqrt{\left(\frac{e_0 k_b T}{n e^2}\right)} \quad (3.1)$$

Onde K_b é a constante de Boltzman, T é a temperatura das partículas, e é a carga elementar e n é densidade de partículas. Para que possa ser caracterizado um plasma é necessário que a dimensão característica do plasma, L , seja muito maior que λ_D .

$$L \gg \lambda_D \quad (3.2)$$

Pode-se definir uma esfera onde os efeitos do potencial causam perturbações. Usando o raio dessa esfera, o comprimento de Debye λ_D , logo o número de partículas carregadas dentro da esfera de Debye é dada por:

$$N_E = \frac{4}{3}\pi \lambda_D^3 n = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{e_0 k_b T}{n^{\frac{1}{3}} e^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.3)$$

Para ser caracterizado como plasma, também é necessário que o número de elétrons dentro da esfera de Debye seja grande, ou seja, a distância média entre eles tem que ser bem menor do que o raio da esfera, formalmente temos:

$$n_e \lambda_D^3 \gg 1 \quad (3.4)$$

Podemos definir um parâmetro g , chamado de parâmetro de plasma, dado por:

$$g = \frac{1}{n_e \lambda_D^3} \quad (3.5)$$

A condição de $g \ll 1$ é chamada de aproximação de plasma.

Uma propriedade importante do plasma é a estabilidade de sua neutralidade macroscópica. Quando um plasma é instantaneamente perturbado da condição de equilíbrio, os campos a internos dão origem a movimentos de partículas coletivas que tendem a restaurar a neutralidade da carga original. Estes movimentos coletivos são caracterizados por uma frequência natural da oscilação conhecida como a frequência do plasma (CHEN, 1984; BITTENCOURT, 2013). Como essa perturbação se dá a uma distância λ_D e a velocidade térmica do elétron é dada por $V_e = \left(\frac{k_B T_e}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}$ podemos escrever a frequência eletrônica do plasma como:

$$\omega_{pe} = \frac{\left(\frac{k_B T_e}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_D} = \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Note que um campo aplicado com frequência menor que a frequência eletrônica do plasma ω_{pe} não penetra o plasma. Logo o plasma não é transparente a uma radiação eletromagnética de frequência $\omega < \omega_{pe}$. A frequência correspondente para os íons é definida como (BOYD, 2003):

$$\omega_{pi} = \frac{\left(\frac{k_B T_i}{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_D} = \left(\frac{n_i (Ze)^2}{\epsilon_0 m_i}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

As colisões entre os elétrons e as partículas neutras tendem a amortecer essas frequências coletivas então para ser caracterizado como plasma, é necessário que o tempo entre as colisões das partículas sejam muito maior do que a frequência natural do plasma, pois sem esse critério o meio se tornaria um gás neutro. Essa condição pode ser matematicamente escrita como:

$$\omega_p \tau > 1 \quad (3.8)$$

Onde τ é o período entre as colisões.

3.2 COLISÕES NO PLASMA

No propulsor por efeito Hall, a geração do plasma ocorre em meio a processos de colisões, entre as espécies, elétrons, íons e partículas neutras, entender essas colisões é de extrema importância para descrever parâmetros como, difusão, mobilidade eletrônica e resistividade do plasma, que são essenciais para entender o transporte de elétrons no interior do Propulsor.

Considere uma colisão entre uma partícula carregada e uma partícula neutra, a probabilidade dessa colisão ocorrer pode ser escrita em termos da seção de choque. O número de átomos neutros de densidade n_n , em uma região de área S e espessura dz é $n_n S dz$. Logo, a fração dessa região ocupada por partículas neutras de seção de choque σ é dada por:

$$\frac{n_n S dz \sigma}{S} = n_n \sigma dz \quad (3.9)$$

Um fluxo de partículas Γ_i que atravessa a superfície de área S , sem sofrer colisões, pode ser escrito como:

$$\Gamma(z) = \Gamma_i (1 - n_n \sigma dz) \quad (3.10)$$

Derivando em relação a z temos:

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = -\Gamma_i n_n \sigma \quad (3.11)$$

Que tem uma solução exponencial dada por:

$$\Gamma(z) = \Gamma_i e^{-n_n \sigma z} \quad (3.12)$$

Com isso, podemos definir a distância que uma partícula percorre sem sofrer colisões, também conhecida como livre caminho médio sendo:

$$\lambda = \frac{1}{n_n \sigma} \quad (3.13)$$

Dividindo o livre caminho médio pela velocidade da partícula podemos obter o tempo médio entre as colisões, que é dado por:

$$\tau = \frac{1}{v n_n \sigma} \quad (3.14)$$

Assumindo que o gás possui uma distribuição Maxwelliana de velocidades, podemos definir a frequência das colisões:

$$\nu = \bar{v}n_n\sigma \quad (3.15)$$

A distância que uma partícula neutra percorre no plasma, antes de ser ionizado por uma densidade de elétrons se movendo em velocidades relativamente maiores, é conhecida como distância de penetração e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{v_n}{n_e \langle \sigma_e v_e \rangle} \quad (3.16)$$

Onde os brackets devem ser uma média de todas as colisões relevantes.

O livre caminho médio é um parâmetro de notável importância para a escala do propulsor, uma vez que é necessário garantir que as colisões ocorram em geral dentro do canal do propulsor, ou seja, o comprimento característico do propulsor tem que ser relativamente maior que o livre caminho médio:

$$\frac{\lambda}{L} \ll 1 \quad (3.17)$$

4 ASPECTOS DO PLASMA EM UM PROPULSOR HALL

4.1 DINÂMICA DAS PARTÍCULAS CARREGADAS EM UM PLASMA

Como o plasma é produzido sobre a influência de campos eletromagnéticos externos precisamos entender como esses campos interagem com o plasma. Vamos investigar como se dá a aceleração do plasma segundo a teoria orbital, que muitas vezes é conveniente para a investigação de aspectos microscópicos do plasma, e segundo a teoria MHD, que nos permite uma investigação mais profunda de vários aspectos macroscópicos do plasma.

4.1.1 Teoria orbital

A dinâmica de uma partícula de carga q e velocidade \mathbf{v} sob influência de uma força \mathbf{F} devida a campo elétrico \mathbf{E} e um campo magnético \mathbf{B} , pode ser descrita pela a equação de Lorentz que tem a seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1)$$

Onde \mathbf{p} representa o momento da partícula e é dado por:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (4.2)$$

Onde m é a massa de repouso da partícula, γ é o fator de Lorentz definido como:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

E c é a velocidade da luz no vácuo. Com isso, a forma relativística da equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + q \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.4)$$

Lembrando que a taxa de variação da energia relativística $U = (\gamma m c^2)$ é $\frac{dU}{dt} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$ e $d\mathbf{p}/dt = d(U\mathbf{v}/c^2)/dt$ (BITTENCOURT, 2013)

No caso particular desse trabalho, os parâmetros de controle podem ser ajustados de modo que $v^2/c^2 \ll 1$ e m possa ser considerado constante, deste modo, podemos usar a forma não-relativística da equação que é dada por:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.5)$$

Resolvendo a equação 4.5, sem a presença do campo magnético, vemos que as partículas são aceleradas constantemente na direção de \mathbf{E} de módulo:

$$a = \frac{q}{m} E \quad (4.6)$$

Para a mesma equação 4.5, agora sem a presença do campo elétrico, vamos dividir a aceleração em duas componentes, uma paralela ao campo magnético e outra perpendicular a este campo, como $\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} = 0$, temos:

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \quad (4.7)$$

Resolvendo a 4.7 vemos que na direção paralela ao campo magnético não é alterada e na direção perpendicular ao campo a partícula fica confinada a uma órbita circular, de raio:

$$r_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (4.8)$$

Que é conhecido como raio de Larmor.

Para o caso onde se tem os campos elétrico e magnético ortogonais, que é a configuração usada em uma fonte tipo hall, temos uma superposição dos dois casos estudados anteriormente, assim os elétrons e íons na presença dessa configuração de campos descrevem uma trajetória cicloidial, como mostra a figura 4.1.

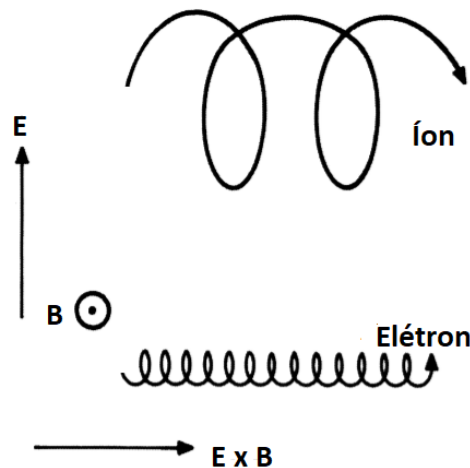


Figura 4.1: Trajetórias de elétrons e íons na presença do campo eletromagnético

Nesse caso a equação de Lorentz fica da seguinte forma:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.9)$$

Tirando o produto vetorial com \mathbf{B} em ambos os lados e isolando a velocidade para o caso em que \mathbf{v} é perpendicular a \mathbf{B} temos:

$$\mathbf{v}_H = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (4.10)$$

Vemos na equação 4.10 que uma configuração de campos cruzados causa uma deriva de direção $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Essa deriva é chamada de deriva Hall e sua velocidade está associada à corrente Hall, que é de suma importância para o funcionamento do propulsor estudado nesse trabalho .

4.1.2 Formulação magneto hidrodinâmica

A formulação magneto hidrodinâmica (MHD) consiste em considerar o plasma como sendo um fluido condutor sob ação de campos eletromagnéticos externos, tendo tal definição em vista, as equações do eletromagnetismo, somadas às equações da mecânica dos fluidos, descrevem o formalismo MHD.

O eletromagnetismo é descrito pelas equações de Maxwell, descritas abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.14)$$

As equações da mecânica dos fluidos podem ser obtidas através da equação geral do transporte (BITTENCOURT, 2013):

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = \frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha)_{coll} \quad (4.15)$$

Onde χ é alguma propriedade física das partículas α e o termo da direita é a taxa de variação das partículas α por unidade de volume, devido a colisões. Para deduzirmos a equação da continuidade basta aplicarmos o primeiro momento à equação geral do transporte, com isso fazendo

$\langle \chi \rangle_\alpha = m_\alpha$ temos:

$$\langle \chi \rangle_\alpha = m_\alpha \quad (4.16)$$

$$\langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha = m_\alpha u_\alpha \quad (4.17)$$

$$\nabla_u m_\alpha = 0 \quad (4.18)$$

Substituindo essas quantidades na equação 4.15, temos a continuidade da massa:

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} u_\alpha) = S_\alpha \quad (4.19)$$

Onde $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$, é a densidade de massa e S_α é o termo de colisão relacionado a algum mecanismo de produção e perda de partículas no plasma. Desprezando o termo de colisões e dividindo tudo por m_α , temos a continuidade em termos da densidade:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha u_\alpha) = 0 \quad (4.20)$$

Podemos achar também, a partir da equação 4.20, a continuidade da carga, basta multiplicá-la pela carga q_α :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot J_\alpha = 0 \quad (4.21)$$

Esta equação nos mostra como a ρ e J estão relacionados.

Para chegarmos à equação do momento, basta atribuir ao parâmetro físico $\langle \chi \rangle_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. Lembrando que $\mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$, ou seja, a velocidade é a soma da velocidade média do fluido com a velocidade aleatória das partículas e $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle$ pois a média das velocidades aleatórias é 0. Repetindo os mesmos passos feitos para derivar a equação da continuidade, temos a equação do momento:

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \overleftrightarrow{P}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \quad (4.22)$$

Onde \mathbf{A}_α representa variação do momento médio por unidade de volume devido a colisões. Fisicamente a equação 4.22 nos diz que a taxa de variação temporal do momento médio em cada elemento de fluidos é devido às forças externas aplicadas no fluido mais as forças viscosas e de pressão do próprio fluido mais as forças internas associadas às interações colisionais.

Desprezando os termos ligados às colisões A_α e S_α temos:

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_\alpha \quad (4.23)$$

Por fim, fazendo $\langle \chi \rangle_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2$, repetindo os passos feitos para os casos anteriores, temos a equação da energia:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) + \frac{3}{2} p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \left(\overleftrightarrow{\mathbf{P}} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \quad (4.24)$$

O primeiro termo da esquerda representa a taxa de variação total da densidade de energia térmica da partícula em um elemento de volume se movendo com velocidade u_α . O segundo termo do lado esquerdo representa a mudança da densidade de energia térmica devido a partículas entrando no elemento de volume com velocidade média u_α . O terceiro termo está relacionado ao trabalho no elemento de volume devido a diádica de pressão agindo em sua superfície, enquanto o quarto termo representa a mudança na densidade de energia térmica devido ao fluxo de calor. Os termos da direita representam a variação da densidade de energia térmica que são causadas por colisões. Assumindo que os termos de colisões são desprezíveis, temos:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) + \frac{3}{2} p_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \left(\overleftrightarrow{\mathbf{P}} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = 0 \quad (4.25)$$

$\overleftrightarrow{\mathbf{P}}$ é conhecida como a diádica de pressão que é um tensor de segunda ordem dado por: $\overleftrightarrow{\mathbf{P}} = \rho_{m\alpha} \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle$. Sendo p_α a pressão escalar, também conhecida como pressão hidrostática média, que é definida como o traço da diádica de pressão e \mathbf{q}_α é o vetor fluxo de calor.

Para obtermos a Lei de Ohm generalizada basta multiplicar a equação do momento por $\frac{q_\alpha}{m_\alpha}$ e somar sobre todas as espécies α , fazendo isso obtemos:

$$\mathbf{J} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{nq} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.26)$$

É possível continuar obtendo momentos repetindo esse procedimento atribuindo um novo valor de momento ao parâmetro físico χ , mas toda vez que é obtido um momento da equação geral do plasma, surge uma nova variável, dessa forma, um conjunto finito de equações de transporte não forma um conjunto fechado de equações, com isso é preciso fazer aproximações de modo a eliminar variáveis independentes e é comum truncar a equação em algum ponto de modo a obter um conjunto fechado de equações.

Para estudar o perfil que o campo magnético precisa possuir para gerar a corrente hall vamos usar a aproximação MHD simplificada, que consiste em desprezar as interações entre as partículas, a viscosidade e a condutividade térmica. Com isso, podemos escrever as equações MHD como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (4.29)$$

$$\mathbf{J} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{nq} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.30)$$

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (4.31)$$

$$\nabla p = V_s^2 \nabla n \quad (4.32)$$

Como queremos que \mathbf{J} , da Lei de Ampère seja a corrente Hall, e, como já foi dito anteriormente, que essa corrente Hall está na direção azimutal, temos a componente azimutal do rotacional como sendo:

$$\mathbf{J}_H = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} \quad (4.33)$$

Analisando a 4.33 concluímos que:

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} \neq 0, \quad (4.34)$$

ou:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} \neq 0 \quad (4.35)$$

e:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} \neq \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad (4.36)$$

geram uma corrente Hall.

Em geral, o campo magnético é predominantemente radial, de modo que a corrente Hall depende majoritariamente de $B_r(z)$:

$$\mathbf{J}_H = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} \right) \hat{\theta} \quad (4.37)$$

Com isso, a condição se reduz à componente B_r possuir uma dependência axial.

Escrevendo a equação do momento combinada com a Lei de Ampère e ignorando o termo de pressão, temos:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{n\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.38)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{n\mu_0} \left(\frac{B^2}{R_c} \hat{R}_c - \frac{1}{2} \nabla_{\perp} B^2 \right) \quad (4.39)$$

Concluimos que a aceleração dependerá da curvatura do campo magnético e do seu gradiente na direção axial. Com isso caracterizamos o perfil que o campo magnético tem que satisfazer para acelerar um corrente Hall no plasma.

4.2 REGIÕES DENTRO DO CANAL DE ACELERAÇÃO

A figura 4.2 nos mostras as diferentes regiões de importância no canal do propulsor Hall, que são definidas pela predominância do processo naquele volume.

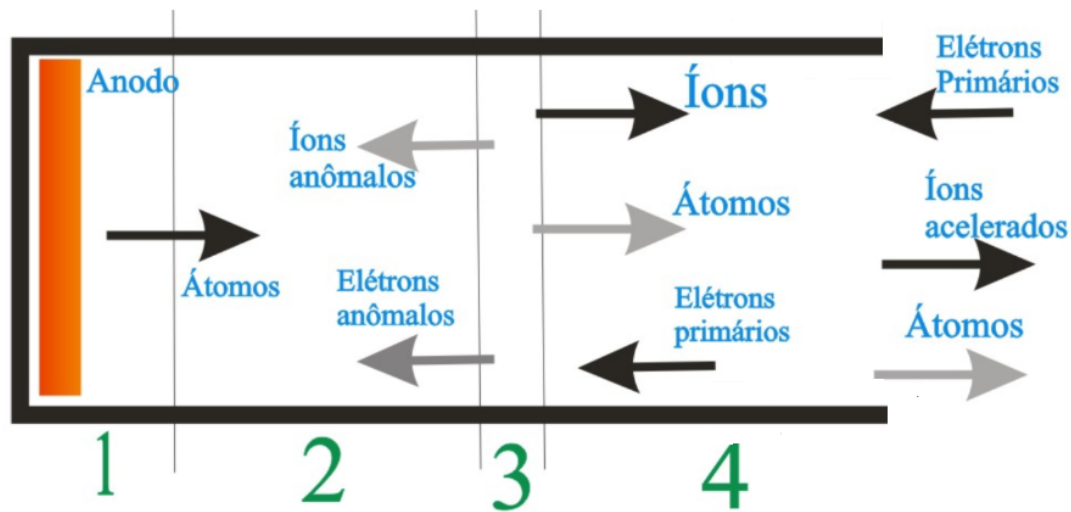


Figura 4.2: Esquema do canal de aceleração. 1)Bainha do Anodo;2)Região de Difusão; 3)Região de ionização 4) Região de aceleração. As setas indicam as especies que circulam pelo canal. A intensidade da seta indica a abundancia da espécie.(IVAN,2003)

4.2.1 Bainha do Anodo

A região 1 representa a bainha do anodo, que é um involucro envolvendo o anodo que limita a ação do seu campo elétrico a uma distancia delimitada pelo comprimento de Debye. A explicação

para a formação dessa bainha ainda não é compreendida perfeitamente. O que se conhece é o conjunto de condições de contorno em que essa bainha é formada e que é possível a operação de um propulsor Hall sem a presença da mesma(DORF,2002)

4.2.2 Difusão

A região 2 é caracterizada sendo a região de difusão, nessa região a contribuição do campo elétrico para a difusão das partículas é quase nula devido a proximidade com a bainha do anodo, nessa região as partículas difundem de devido a gradientes de pressão, que podem se traduzir em gradientes de densidade e de temperatura.

4.2.2.1 Difusão sem a presença do campo magnético

Visando uma melhor compreensão e para evidenciar o efeito do campo magnético na mobilidade e difusão das partículas, vamos, primeiramente, considerar um caso onde só o campo magnético está presente.

Assumindo que o plasma é isotérmico, que nos permite escrever a pressão em termos de gradiente de densidade, podemos grafar as equações de movimento para cada espécie como:

$$mn \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = qn\mathbf{E} - kT\nabla_n + mn\nu(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \quad (4.40)$$

Onde o ultimo termo da direita é referente as colisões e a frequência de colisões ν é uma constante.

Assumindo que a difusão ocorre em um regime permanente e é suficientemente rápida de modo que os termos advectivos podem ser negligenciados e que a velocidade das partículas de interesse \mathbf{v} é muito maior que as das especies mais lentas \mathbf{v}_0 , temos:

$$\mathbf{v} = \frac{q\mathbf{E}}{m\nu} - \frac{kT\nabla_n}{m\nu n} \quad (4.41)$$

O coeficiente do campo elétrico é chamado de mobilidade:

$$\mu = \frac{|q|}{m\nu} \quad (4.42)$$

O coeficiente do gradiente é chamado de coeficiente de difusão:

$$D = \frac{kT}{m\nu} \quad (4.43)$$

Multiplicando e dividindo a Eq.4.43 por kT podemos achar uma relação entre mobilidade e coeficiente de difusão:

$$\mu = \frac{|q|D}{kT} \quad (4.44)$$

Tal equação é conhecida como Relação de Einstein.

4.2.2.2 Difusão na presença do campo magnético

Agora vamos considerar os dois campos, elétrico e magnético. Considerando que os elétrons são isotérmicos, a equação de movimento para esses elétrons é dada por:

$$mn \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = qn (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) - kT_e \nabla n + mn\nu \mathbf{v}_\perp \quad (4.45)$$

Assumindo novamente regime permanente e que os termos advectivos podem ser negligenciados e que $B = B_z$, podemos escrever em coordenadas cartesianas as velocidades v_x e v_y :

$$v_y = \frac{qE_y}{m\nu} + \frac{q}{m\nu} v_x B_z - \frac{kT_e}{mn\nu} \frac{\partial n}{\partial y} \quad (4.46)$$

$$v_x = \frac{qE_x}{m\nu} + \frac{q}{m\nu} v_y B_z - \frac{kT_e}{mn\nu} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (4.47)$$

Definindo a frequência de ciclotron do elétron como:

$$\omega_e = \frac{eB}{m} \quad (4.48)$$

Resolvendo as Eqs. 4.46 e 4.47, temos:

$$\left[1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \right] v_x = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \frac{E_y}{B_z} - \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \frac{kT_e}{qB_z} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \quad (4.49)$$

$$\left[1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \right] v_y = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \frac{E_x}{B_z} - \frac{\omega_c^2}{\nu^2} \frac{kT_e}{qB_z} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (4.50)$$

Como o período médio de colisões é o inverso da frequência de colisões, $\tau = \frac{1}{\nu}$, temos a mobilidade e o coeficiente de difusão na direção perpendicular ao campo magnético:

$$\mu_\perp = \frac{\mu}{1 + \omega_c^2 \tau^2} = \frac{\mu}{1 + h^2} \quad (4.51)$$

$$D_\perp = \frac{D}{1 + \omega_c^2 \tau^2} = \frac{D}{1 + h^2} \quad (4.52)$$

Onde $h = \omega_e \tau$ é chamado de Fator Hall.

Essa difusão ainda pode ser obtida por uma equação tensorial.

Podemos também descrever a difusão de maneira tensorial como foi feito com a condutividade:

$$\Gamma_e = -\overleftrightarrow{D} \cdot \nabla_n \quad (4.53)$$

Onde $\Gamma_e = n_e \mathbf{u}_e$ é o fluxo de elétrons normalizados. Novamente os coeficientes podem ser entendidos como:

1. D_{\parallel} - Descreve a difusão de partículas na direção da componente paralela do campo elétrico e paralela ao campo magnético.
2. D_{\perp} - Descreve a difusão de partículas na direção da componente perpendicular do campo elétrico e normal ao campo magnético.
3. D_H - Descreve a difusão de partículas na direção normal ao campo elétrico e ao magnético.

$$\overleftrightarrow{D} = \begin{bmatrix} D_{\perp} & D_H & 0 \\ -D_H & D_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Onde:

$$D_{\perp} = \frac{D}{1 + h^2} \quad (4.55)$$

$$D_H = \frac{h}{1 + h^2} D \quad (4.56)$$

$$D_{\parallel} = D \quad (4.57)$$

4.2.3 Ionização

A região onde ocorre maior ionização é na área próxima ao máximo do campo magnético, também chamada de região de ionização, pois nessa região temos um número maior de elétrons confinados.

A taxa de ionização é uma parâmetro de vital importância para o propulsor Hall, uma vez que, quanto maior essa taxa, mais eficientemente o plasma é gerado.

A figura 4.3 é uma figura experimental que nos mostra que um B_{opt} ligeiramente maior que o B_{max} possui uma melhor taxa de ionização.

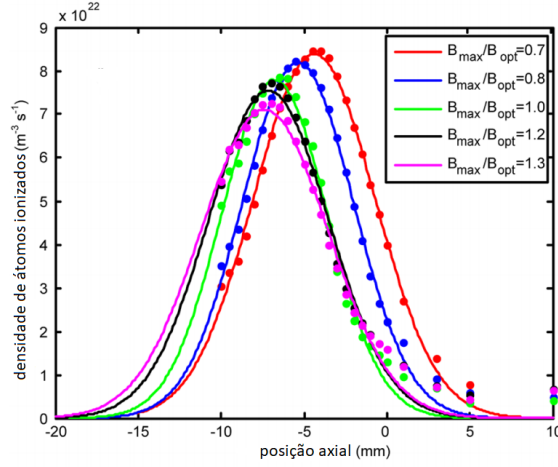


Figura 4.3: Distribuição de ionização para diferentes campos magnéticos (LIQIU WEI,2013)

A taxa de produção de íons por unidade de volume é dada por(RAIZER,1991):

$$\frac{dn_e}{dt} = n_i n_e \langle \sigma_i v_e \rangle \quad (4.58)$$

Onde σ_i é a seção de choque de ionização e os brackets são avaliados sobre a distribuição de velocidades.

É importante ressaltar que os processos de colisão entre partículas neutras e elétrons podem também excitar as partículas neutras, sem necessariamente ionizá-los. Essa taxa de excitação pode ser obtida de maneira semelhante a taxa de ionização:

$$\frac{dn^*}{dt} = \sum_i n_i n_e \langle \sigma^* v_e \rangle_i \quad (4.59)$$

Onde o somatório é feito sobre todos os estados excitados.

4.2.4 Condutividade

Para compreender os fenômenos que ocorrem nas regiões 3 e 4 vamos investigar a condutividade do plasma Depois de entender como o campo magnético se relaciona com a corrente Hall, podemos utilizar o formalismo MHD para investigar a influência do campo elétrico no propulsor Hall.

Para isso vamos escrever a Lei de Ohm generalizada na seguinte forma, uma vez que $\mathbf{J} = -en_e \mathbf{u}_e$:

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \left(\mathbf{E} - \frac{1}{n_e e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) \quad (4.60)$$

Resolvendo para cada componente e considerando $\mathbf{B} = B_r \hat{r}$ ficamos com as seguintes expressões:

$$J_r = \sigma_0 E_r \quad (4.61)$$

$$J_\theta = \frac{\sigma_0 E_\theta}{\left[1 + \frac{\sigma_0 B_r}{n_e e}\right]^2} - \frac{\sigma_0^2 B_r}{n_e e \left[1 + \left[\frac{\sigma_0 B_r}{n_e e}\right]^2\right]} (E_z + E_\theta) \quad (4.62)$$

$$J_z = \frac{\sigma_0}{\left[1 + \left[\frac{\sigma_0 B_r}{n_e e}\right]^2\right]} (E_z + E_\theta) \quad (4.63)$$

A corrente Hall também pode ser expressa em termos de um produto tensorial:

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} \overleftrightarrow{S}_{\alpha} \cdot \mathbf{E} \quad (4.64)$$

Onde $\overleftrightarrow{S}_{\alpha}$ é o tensor de condutividade para cada uma das espécies no plasma. Nesse trabalho, a condutividade para o movimento do íon não será explorada já que o propulsor em questão é projetado para que os íons não fiquem confinados e sim os elétrons, com isso a equação 4.64 se reduz à:

$$\mathbf{J} = \overleftrightarrow{S} \cdot \mathbf{E} \quad (4.65)$$

Para compreendermos o significado de cada componente do tensor \overleftrightarrow{S} é conveniente dividir o campo elétrico em uma componente paralela ao campo magnético e outra normal ao campo magnético, com isso temos:

1. σ_{\parallel} - Descreve o fluxo de corrente elétrica na direção da componente paralela do campo elétrico e paralela ao campo magnético.
2. σ_{\perp} - Descreve o fluxo de corrente elétrica na direção da componente perpendicular do campo elétrico e normal ao campo magnético.
3. σ_H - Descreve o fluxo de corrente elétrica na direção normal ao campo elétrico e magnético.

sabendo que:

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu} \quad (4.66)$$

$$\frac{\sigma_0 B_r}{n_e e} = \frac{e B_r}{m_e \nu} = \omega_{ce} \tau = h \quad (4.67)$$

Em termos do fatos Hall podemos escrever o tensor condutividade sendo:

$$\overleftrightarrow{S} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp} - \sigma_H & \sigma_H \\ 0 & \sigma_{\perp} & \sigma_{\perp} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Onde:

$$\sigma_{\perp} = \frac{\sigma_0}{1 + h^2} \quad (4.69)$$

$$\sigma_H = \frac{h}{1 + h^2} \sigma_0 \quad (4.70)$$

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_0 \quad (4.71)$$

Analisando esse tensor vemos que a densidade de corrente na direção azimutal não depende só de E_z mas também de E_{θ} . Até na situação ideal $h = 1$ (que em geral não ocorre pois o fator Hall no canal de aceleração é da ordem de 10^3) o tensor nos mostra que sempre teremos uma densidade de corrente Hall e uma densidade de corrente axial no canal da fonte de plasma.

Como $\overleftrightarrow{M}_e = \frac{1}{n_e e} \overleftrightarrow{S}$ podemos escrever a mobilidade eletrônica de maneira análoga:

$$\mathbf{u}_e = -\overleftrightarrow{M}_e \cdot \mathbf{E}, \quad (4.72)$$

onde as componentes podem ser escritas de maneira análoga com um significado adaptado pra mobilidade.

Com essas relações podemos observar que uma flutuação no campo elétrico pode alterar a condutividade do problema e, conseqüentemente, influenciar no transporte dos elétrons, o que de fato acontece no caso de oscilações azimutais, como será investigado ao final do capítulo.

4.3 TRANSPORTE ANÔMALO

As Eqs. 4.51 e 4.52, deduzidas na seção anterior, nos mostram que o coeficiente de difusão e a mobilidade eletrônica na direção paralela ao campo elétrico é fortemente reduzida em relação a uma configuração onde somente o campo elétrico esteja atuando.

Com isso temos que o coeficiente de difusão na direção perpendicular ao campo magnético varia com $\frac{1}{B^2}$ e é proporcional à frequência de colisão ν . No entanto muitos experimentos feitos com dispositivos de plasma, incluindo Hall thrusters, mostram que o coeficiente de difusão varia com $\frac{1}{B}$. Um coeficiente chamado de coeficiente de Bohm é utilizado para contornar esse

problema.

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{K_b T_e}{eB} \quad (4.73)$$

Mas só a compreensão dessa difusão anômala nos trará respostas satisfatórias para esse problema.

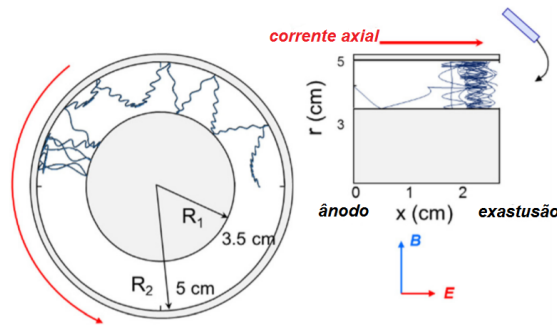


Figura 4.4: Exemplos de trajetórias eletrônicas em um propulsor Hall, no plano radial-azimutal (r, h) (à esquerda) e no plano axial-radial (r, x) (à direita). Estas trajetórias foram calculadas pela integração das equações eletrônicas de movimento com uma dada distribuição de campo magnético e uma distribuição de campo elétrico obtida de um modelo híbrido (um módulo de Monte Carlo foi usado para colisões assumindo uma densidade de átomo neutra constante)(BOEUF,2017).

A figura 4.4 nos mostra exemplos de trajetórias dos elétrons em um propulsor Hall. Podemos observar que os elétrons descrevem um movimento em espiral ao longo das linhas de campo magnético na região de exaustão e interagem bastante com as paredes enquanto derivam azimutalmente. Essas interações com as paredes, se associadas com a emissão secundária, podem interferir bastante no transporte de elétrons.

Outros fenômenos que podem contribuir para esse transporte são as oscilações e instabilidades que ocorrem no propulsor, embora não se saiba qual desses fenômenos tem um papel de maior relevância no transporte dos elétrons, uma vez que os mecanismos por trás de ambos não sejam bem descritos fisicamente, são atribuídos a eles o termo anômalo, como transporte anômalo, condutividade anômala e mobilidade anômala.

4.4 OSCILAÇÕES EM UM PROPULSOR DO TIPO HALL

Compreender as oscilações presentes em um propulsor do tipo Hall é de vital importância para melhorar o seu rendimento, pois, essas podem alterar o transporte de elétrons ao longo do canal, afetando assim os parâmetros de eficiência do propulsor.

São observadas diferentes oscilações e instabilidades que são fortemente dependentes das condições de operação e podem variar de 1Khz até dezenas de MHz(CHOUERI,2001). As condições de operação podem ser classificadas como:

1. Fluxo de massa e tipo do propelente.
2. Voltagem aplicada.
3. Evolução temporal da geometria.
4. Grau de contaminação do canal de descarga.
5. Localização e fluxo de massa do cátodo.
6. Características e processamento da PPU(Power Processing Unit).
7. Perfil e magnitude do campo magnético.

Podemos separar essas oscilações pela banda que elas são detectadas, como foi explorado nos subtítulos seguintes.

4.4.1 Breathing Mode: 1 à 20KHz

Esse tipo de oscilação, também conhecida como oscilação de "contorno" ou "loop", pode ser associada à processos de ionização.

Devido à forte ionização dos átomos próximos à saída do canal, onde o campo magnético é mais intenso, uma frente de partículas neutras se move para uma região onde o campo magnético é menos intenso e, conseqüentemente, a taxa de ionização é menor já que nessa região a mobilidade do elétron é maior.

Esse processo ocasiona uma redução da corrente em direção à saída do canal até a frente de partículas neutras ir de volta à região de exaustão. Essa deflexão e preenchimento de partículas neutras próximos à saída do canal causa uma oscilação que é observada em uma faixa de 1 à 20Khz.

Esse comportamento pode ser descrito por modelos analíticos (GOEBEL,2008) escrevendo a equação de conservação para os íons e para as partículas neutras:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = n_i n_n \langle \sigma_i v_e \rangle - \frac{n_i v_i}{L} \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} = n_i n_n \langle \sigma_i v_e \rangle - \frac{n_n v_n}{L} \quad (4.75)$$

Onde n_i e n_n são, respectivamente, as densidades dos íons e das partículas neutras, v_i e v_n suas velocidades, L é a largura da zona de ionização e o termo entre os brackets é a taxa de ionização local.

Linearizando as duas equações para pequenas perturbações, temos:

$$\frac{\partial^2 n'_i}{\partial t^2} = n_{i,0} n_{n,0} n'_i \langle \sigma_i v_e \rangle^2 \quad (4.76)$$

Onde os subíndices 0 denotam quantidades não perturbadas. Essa equação representa um oscilador harmônico de frequência (GOEBEL,2008):

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{n_{i,0} n_{n,0} \langle \sigma_i v_e \rangle^2} \approx \frac{v_i v_n}{2\pi L} \quad (4.77)$$

Esse tipo de oscilação é observada em grande parte dos propulsores do tipo Hall inclusive no PHALL e , em geral, é bem caracterizada e compreendida. Existem vários trabalhos na literatura que medem e caracterizam satisfatoriamente esse tipo de oscilação(BARRAL,2009;LOBBIA,2010).

4.4.2 Rotating Spokes 5 à 25KHz

Essas oscilações foram observadas pela primeira vez por (JANES,1966) e estão associadas a raios rotativos que são formados na região do ânodo. São de extrema importância porque essas flutuações na corrente elétrica azimutal podem contribuir para o transporte dos elétrons, tendo em vista que o campo elétrico E_θ interage com o campo magnético radial B_r produzindo uma velocidade de deriva na direção z, . O valor médio dessa densidade de corrente é dado por (JANES,1966;BOEUF,2017):

$$\bar{J}_{ez} = e \int n \frac{E_\theta}{B} dA/A \quad (4.78)$$

Onde A é a área de aceleração.

Apesar de diversos trabalhos estarem disponíveis na literatura a compreensão dessas oscilações ainda é insuficiente e os mecanismos de criação desses raios rotativos ainda não são bem explorados embora sua importância seja clara, uma vez que a sua compreensão pode ajudar a descrever com maior perfeição o transporte de elétrons dentro do propulsor tipo Hall.

4.4.3 Oscilações Azimutais Induzidas por Gradientes 20 à 60KHz

Na banda de 20 à 60KHz temos modos azimutais que não estão diretamente associados com os processos de ionização e, sim, à instabilidades de deriva associadas aos gradientes de densidade e campo magnético. São chamadas de oscilações induzidas por gradientes e sua amplitude depende fortemente do perfil do campo magnético.

Essas oscilações se mostram presentes em regiões onde existem um gradiente negativo do campo. Sua relação de dispersão foi obtida usando um modelo ideal de dois fluidos sem a equação da energia, assumindo íons não magnetizados e o plasma fracamente não-homogêneo (CHOUERI,2001;ESIPCHUK,1974).

$$1 - \frac{\omega_{pi}}{\omega - k_x u_i} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci} + \omega_{ce}} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 + v_A} - \frac{\omega_{pi}^2 - k_y(u_{dey} - u_B)}{k^2 u_i^2 (\omega - k_y u_{dey})} = 0 \quad (4.79)$$

Onde ω_{pi} é a frequência iônica de plasma, ω_{ci} e ω_{ce} são respectivamente as frequências ciclotrônicas de íons e elétrons, ω é a frequência da oscilação, u_i é a velocidade iônica de deriva, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda, $v_A = \frac{B^2}{\mu_0 M_i n_i}$ é a velocidade de Alfvén, onde M_i é massa do íon e u_{dey} é a velocidade de deriva eletrônica. Um parâmetro de destaque nessa equação é a velocidade magnética dada por:

$$v_B = \frac{u_i^2}{\omega_{ci} L_{\nabla B}} \quad (4.80)$$

Onde $L_{\nabla B} = \left| \frac{\partial}{\partial x} (\ln B_r) \right|^{-1}$ é o comprimento característico do gradiente de campo magnético.

Com algumas aproximações para baixas frequências (ESIPCHUK, 1974), pode se concluir que esse tipo de oscilação se trata de uma onda eletrostática de baixa frequência, que se propaga na direção azimutal provocada por gradientes negativos do campo magnético.

Esse tipo de oscilação não se faz presente na maioria dos propulsores modernos pois no regime ótimo de operação dos mesmos essas onda não são comumente observadas.

4.4.4 Oscilações de Tempo Transiente 50 à 700Hz

Na banda de 50 à 700KHz oscilações são comumente chamadas de oscilações de tempo transiente. Foram previstas e caracterizadas pela primeira vez por (ESIPCHUK, 1974), sendo mais comuns para campos magnéticos radiais mais intensos. Sua amplitude de distribuição sobre o canal depende fortemente do perfil do campo magnético radial B_r e seu espectro global não depende significativamente do fluxo de massa para uma tensão de descarga fixa.

Essas oscilações são ondas que se propagam em uma direção quasi-axial, são relativamente turbulentas e são essenciais para descrição difusão anômala que ocorre para valores de B_r mais altos.

4.4.5 Oscilações azimutais de alta frequência 500KHz-5MHz

Em altas frequências o tipo mais relevante de oscilações é também azimutal e é mais proeminente em regiões onde o campo magnético é maior, assim como as oscilações de tempo transiente.

Esse tipo de oscilação é prevista pela mesma relação de dispersão das oscilações induzidas por gradientes 4.79 e também descreve um papel importante no transporte anômalo do elétron, uma vez que essas causam flutuações no campo elétrico azimutal.

5 DESCRIÇÃO HAMILTONIANA DO PROPULSOR HALL

Nesse capítulo vamos apresentar um modelo analítico para prever onde as regiões 3 e 4, apresentadas no capítulo anterior, vão ocorrer. A determinação dessas regiões é de extrema importância para o projeto do propulsor Hall uma vez que efeitos de vital importância para o propulsor ocorrem nessas regiões. O modelo não engloba os fenômenos presentes na região de difusão uma vez que estes não são bem compreendidos e nem mecanismos de perdas que foram explorados ao final do capítulo 4.

5.1 FORMALISMO HAMILTONIANO-LAGRANGIANO

A dinâmica das partículas, em uma configuração de campos eletromagnéticos, também pode ser descrita por um formalismo Hamiltoniano-Lagrangiano que é equivalente a descrição via equação de Lorentz, porém mais conveniente para investigar simetrias de espaço e de tempo.

Vamos assumir que exista uma função L , chamada de lagrangiana, contém toda a dinâmica da partícula e que dependa somente de suas coordenadas generalizadas $q_i(t)$ e $\dot{q}_i(t)$, possivelmente uma dependência explícita no tempo.

Se essa função existe, então a informação sobre a dinâmica do sistema é recuperada pela manipulação da integral da ação.

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (5.1)$$

Pelo princípio da mínima ação dentre todas as trajetórias que a partícula pode realizar, a que minimiza a ação é a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória.

Tendo tal conceito em vista, vamos minimizar a ação de modo a obter as equações de movimento.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (5.2)$$

Igualando:

$$\delta q(t)_i = \alpha \eta_i(t) \quad (5.3)$$

Onde α é um parâmetro infinitesimal e $\eta(t)$ é uma função que se anula nos limites t_1 e t_2 .

Temos que:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t) + \alpha\eta_i(t), \dot{q}_i(t) + \alpha\dot{\eta}_i(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (5.4)$$

Expandindo a equação 4.9 até a segunda ordem de α , temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\alpha\eta_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\alpha^2\eta_i(t)^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2} + \eta_i(t) \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\alpha^2\dot{\eta}_i(t)^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i^2} dt \right) = 0 \quad (5.5)$$

Desprezando a segunda ordem, temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\alpha\eta_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i} + \alpha\dot{\eta}_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt = 0 \quad (5.6)$$

Eliminando o parâmetro α e fazendo uma integração por partes, obtemos:

$$\left[\eta_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta_i(t) \frac{\partial L}{\partial q_i} - \eta_i(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt = 0 \quad (5.7)$$

Por construção, η_i é uma função que se anula em t_1 e t_2 , com isso chegamos na equação de Lagrange desejada:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (5.8)$$

O momento canônico conjugado a coordenada q_i é definido como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.9)$$

Reescrevendo a equação em termos do momento conjugado, temos a seguinte relação:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (5.10)$$

A equação 5.10 nos mostra que se a lagrangiana não depende da coordenada, o momento conjugado à essa coordenada é uma constante de movimento $\frac{dp_i}{dt} = 0$ e a coordenada q_i é chamada de cíclica ou ignorável. Esse resultado é muito poderoso porque nos mostra relações de simetria no sistema.

A descrição hamiltoniana envolve a substituição das variáveis (q_i, \dot{q}_i) pelas variáveis (q_i, p_i) em todas as grandezas mecânicas e a introdução de uma função $H(q_i, p_i, t)$ em lugar da lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ para gerar a dinâmica. Tal mudança de descrição é feita por meio de uma transformação de Legendre que, no presente contexto, consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas na introdução da hamiltoniana

$H(q_i, p_i, t)$ (NIVALDO,2007) definida por:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (5.11)$$

Diferenciando ambos os lados da equação 5.11 e usando as definições das equações 5.10 e 5.9 temos as equações de Hamilton:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (5.12)$$

Essas equações formam um conjunto de $2n$ equações de primeira ordem e por cada ponto do espaço de fase, o espaço formado pelas variáveis generalizadas (q,p) , passa uma única trajetória dinâmica.

Outra relação obtida é :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (5.13)$$

a 5.13 aponta que quando a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo, H é uma constante de movimento e pode ser identificada, na maioria dos casos, como a energia do sistema.

A Lagrangiana para uma partícula carregada imersa em um campo eletromagnético é dada por(GOLDSTEIN,2002):

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \quad (5.14)$$

Usando a equação 5.9, obtemos o momento conjugado que é dado por:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \quad (5.15)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + q\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{A}\right) \quad (5.16)$$

Com o intuito de chegar na equação de Lorentz, vamos derivar parcialmente a Lagrangiana em relação à coordenada generalizada:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = q(\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{A}) - q\nabla\phi \quad (5.17)$$

Lembrando que o campo magnético se relaciona com o potencial da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.18)$$

E o campo elétrico se relaciona:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.19)$$

Com isso, a 5.17 pode ser escrita como:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.20)$$

Que é a equação de Lorentz.

Escolhendo o sistema de coordenadas cilíndricas, temos a lagrangiana da partícula dada por:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - q\phi(\mathbf{r}, t) + q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \quad (5.21)$$

E os momentos são dados por:

$$p_r = m\dot{r} + qA_r p_\theta = mr^2\dot{\theta} + qA_\theta p_z = m\dot{z} + qA_z \quad (5.22)$$

Dessa forma, a velocidade é:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \quad (5.23)$$

Finalmente temos a hamiltoniana para a partícula sob influência de um campo eletromagnético:

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi \quad (5.24)$$

$$H = \frac{1}{2m}(P_r - qA_r)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{P_\theta}{r} - qA_\theta\right)^2 + \frac{1}{2m}(P_z - qA_z)^2 + q\phi \quad (5.25)$$

5.2 CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

Uma descrição da dinâmica do elétron via formalismo Hamiltoniano é feita por (Marini,2017), onde os campos utilizados são dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{b_r}{r}\hat{r} + b_\theta\hat{\theta} + b_z\hat{z} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{E} = e_z\hat{z} \quad (5.27)$$

e os potenciais que satisfazem esses campos são dados por:

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{z}{r}b_r + \frac{r}{2}b_z\right)\hat{\theta} - rb_\theta\hat{z} \quad (5.28)$$

$$\phi = -ze_z \quad (5.29)$$

Com isso a Hamiltoniana do problema pode ser escrita como:

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{z}{r}qb_r - r\frac{qb_z}{2} \right)^2 + \frac{P_z^2}{2m} - zqe_z \quad (5.30)$$

Esse Hamiltoniano gera as seguintes equações de movimento:

Na direção radial:

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = +\frac{1}{m} \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{z}{r}qb_r - r\frac{qb_z}{2} \right) \left(\frac{P_\theta}{r^2} + \frac{zqb_r}{r^2} + \frac{qb_z}{2} \right) \quad (5.31)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m} \quad (5.32)$$

Na direção azimutal:

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (5.33)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{1}{rm} \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{z}{r}qb_r - r\frac{qb_z}{2} \right) \quad (5.34)$$

Na direção axial:

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{qb_r}{mr} \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{z}{r}qb_r - r\frac{qb_z}{2} \right) - qe_z \quad (5.35)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m} \quad (5.36)$$

O autor normaliza esse Hamiltoniano e analisa o comportamento caótico do sistema. Para esse trabalho vamos descrever o movimento do elétron usando o mesmo formalismo Hamiltoniano mas com o intuito de caracterizar parâmetros de escala, como as regiões de ionização e aceleração, que são de vital importância para o projeto e simulação do propulsor Hall.

5.3 CAMPO MAGNÉTICO GAUSSIANO

Em simulações o campo magnético comumente usado tem a forma gaussiana, tendo em vista isso, vamos considerar um campo gaussiano da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = B_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} \hat{r} + \frac{1}{r} \int B_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} dz \hat{z} \quad (5.37)$$

Um potencial vetor que satisfaz esse campo é dado por:

$$\mathbf{A} = \int B_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} dz \quad (5.38)$$

Vamos considerar uma simulação feita em uma dimensão como pode ser encontrada em (HALLIS,2017). Como dito anteriormente, a componente axial do campo magnético radial tem papel predominante no transporte de elétrons no propulsor. Tendo em vista, isso somente componente radial do campo magnético vai ser considerada nessa análise. A densidade de corrente Hall para esse problema é dada por:

$$J_H = \frac{1}{\mu_0} \left(B_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{(z-z_0)}{\sigma^2} \right) \hat{\theta} \quad (5.39)$$

O campo elétrico pode ser escrito em termos da corrente Hall e do campo magnético:

$$\mathbf{E} = +\frac{1}{n_e e} B_r J_H \hat{z} \quad (5.40)$$

E seu potencial é dado por:

$$\phi = -\frac{1}{n_e \mu_0 e} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)}{\sigma^2} r \right] \quad (5.41)$$

E o seu Hamiltoniano pode ser escrito na forma:

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{P_\theta}{r} + q \int B_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} dz \right)^2 + \frac{P_z^2}{2m} - q \frac{1}{n_e \mu_0 e} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)}{\sigma^2} r \right] \quad (5.42)$$

5.3.1 Análise para o elétron

Para o caso do elétron temos $m = m_e$ e $q = -e$ com isso temos o seguinte Hamiltoniano:

$$H = \frac{P_r^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} \left(\frac{P_\theta}{r} - e \int B_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} dz \right)^2 + \frac{P_z^2}{2m_e} + \frac{1}{n_e \mu_0} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)}{\sigma^2} r \right] \quad (5.43)$$

Desse Hamiltoniano podemos escrever as equações de movimento que descrevem o sistema:

Na direção radial:

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{n_e\mu_0} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)}{\sigma^2} \right] \quad (5.44)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m_e} \quad (5.45)$$

Na direção azimutal:

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (5.46)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{1}{m_e r} \left(\frac{P_\theta}{r} - e \int B_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} dz \right) \quad (5.47)$$

Na direção axial:

$$\dot{P}_z = \frac{1}{n_e\mu_0} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)^4}{\sigma^6} r \right] \quad (5.48)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m_e} \quad (5.49)$$

5.3.2 Volume efetivo interceptado pelo elétron

Um parâmetro importante para se obter da dinâmica do elétron é seu volume efetivo de ionização, para determinar esse volume vamos supor que um elemento diferencial desse volume é dado por:

$$dV = \sigma dt \dot{z} \quad (5.50)$$

onde σ é a seção de choque. Como o campo magnético não gera trabalho no elétron, a energia cinética do elétron vem toda do potencial escalar. Substituindo \dot{z} , e isolando no Hamiltoniano considerando só o termo do potencial escalar temos:

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{-2e\phi}{m_e}} \quad (5.51)$$

Com isso podemos escrever o volume efetivo de ionização para o Hamiltoniano

$$\dot{V} = \sigma \sqrt{-2e\phi} \quad (5.52)$$

$$\dot{V} = \sigma \sqrt{\frac{-2}{\mu_0 n_e m_e} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)}{\sigma^2} r \right]} \quad (5.53)$$

Dependendo do gás a ser utilizado e da geometria do propulsor a ser projetado a constante B_0 pode ser ajustada de modo em que o volume efetivo interceptado pelo elétron atinga uma fração importante do volume ocupado pelo gás neutro.

5.3.3 Análise para o íon

Para a dinâmica iônica considerando o fato de que o propulsor é projetado apenas para confinar os elétrons, o campo magnético não atua diretamente nos íons de modo que seu Hamiltoniano pode ser escrito da seguinte forma.

$$H = \frac{P_r^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} \left(\frac{P_\theta}{r} \right)^2 + \frac{P_z^2}{2m_e} + \frac{1}{n_e \mu_0} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)}{\sigma^2} r \right] \quad (5.54)$$

Onde a energia é uma constante de movimento, e o momento conjugado a coordenada θ , P_θ também é uma constante de movimento.

5.3.4 Seção de aceleração e ionização

Tendo em vista que o projeto de propulsores Hall, de diferentes tamanhos e potências, é bastante empírico uma vez que o transporte dos elétrons ao longo do canal não é totalmente compreendido, é de vital importância a determinação da região aceleração dos íons e de ionização das partículas neutras.

A região de ionização pode ser determinada nas proximidades do ponto onde B_z é máximo, no caso do campo gaussiano é em $z = z_0$.

A região de aceleração é esperada nas proximidades de onde a aceleração dos íons é máxima. Para isso vamos dividir a equação de movimento na direção axial 5.48 pela massa do íon (m_i):

$$\frac{\dot{P}_z}{m_i} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{n_e \mu_0 m_i} \left[B_0^2 e^{-\frac{(z-z_0)^4}{4\sigma^4}} \frac{(z-z_0)^4}{\sigma^6} r \right] \quad (5.55)$$

tirando a segunda derivada temos a seguinte relação:

$$-\frac{(z-z_0)^7}{\sigma^{10}} + 4\frac{(z-z_0)^3}{\sigma^6} = 0 \quad (5.56)$$

Dentre as soluções da Eq. 5.56 as soluções possíveis são:

$$z_1 = z_0 \quad (5.57)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\sigma + z_0 \quad (5.58)$$

$$z_3 = -\sqrt{2}\sigma + z_0 \quad (5.59)$$

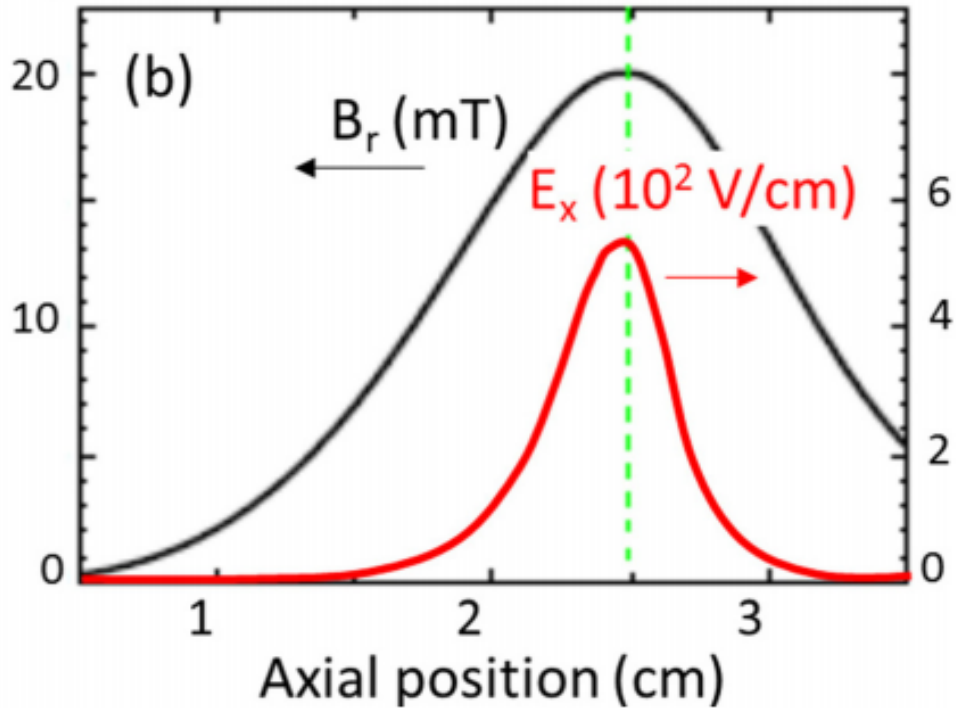


Figura 5.1: Campos elétrico axial e magnético radial obtidos por uma simulação PIC/MCC(ADAM,2008)

A figura 5.1 nos mostra uma simulação usando o método de monte carlo onde a linha verde é a região de aceleração, podemos observar que o modelo proposto nos deu uma previsão satisfatória da região de aceleração pois a mesma ocorre na vizinhança dos pontos onde a aceleração é máxima.

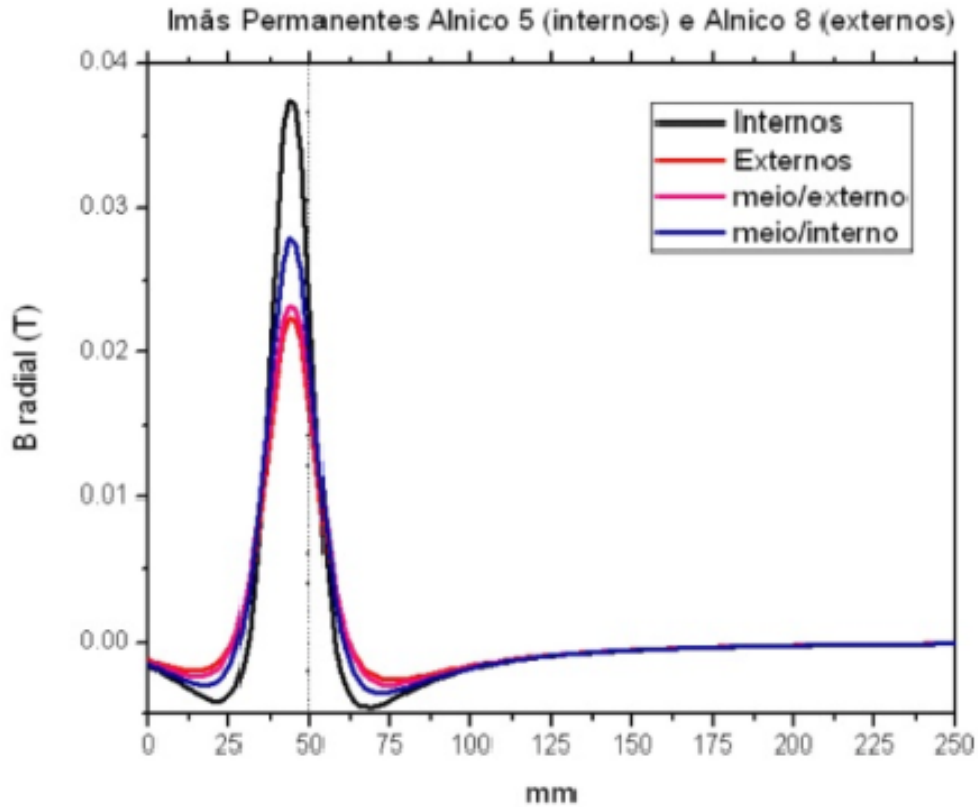


Figura 5.2: Campos magnéticos radiais gerados por ímãs permanentes obtidos utilizando elementos finitos

A figura 5.2 nos mostra uma simulação para um campo gaussiano gerado por Ímãs permanentes no PHALL-UnB feita usando o método de elementos finitos, onde a linha tracejada marca o fim do canal. Como podemos observar a região prevista pelo modelo proposto nesse trabalho está de acordo com a simulação apresentada na figura 5.2 onde a região de aceleração está de fato localizada próxima ao ponto máximo da gaussiana.

5.4 CAMPO GERADO NO P-HALL

A distribuição axial da componente radial do campo magnético é de extrema importância no propulsor Hall, uma vez que ela controla a condutividade do elétron e consequentemente o campo elétrico axial. Parâmetros como ionização, transporte de elétrons e a distribuição do campo elétrico estão diretamente relacionados com a distribuição do campo magnético. Além disso, a distribuição do campo magnético controla a divergência do feixe de íons através da distribuição potencial e controla a erosão da parede por íons.(BOEUF,2017)

Outro aspecto importante é que as linhas de campo magnético tendem a ser equipotenciais e, por isso, tem papel fundamental nas trajetórias de aceleração dos íons e na divergência do feixe de

plasma.

Tendo isso em mente, utilizaremos um perfil de campo magnético que pode ser ajustado a um campo obtido experimentalmente esse campo é dado por:

$$\mathbf{B} = \sum_{n=0}^5 c_n z^n \hat{r} + \sum_{n=0}^5 \left(-\frac{c_n z^{n+1}}{(n+1)r} - 2k_0 \right) \hat{z} \quad (5.60)$$

Essas constantes c_n e k_0 podem ser ajustadas para que esse campo possa se adequar a um campo magnético obtido experimentalmente como o da figura 5.3

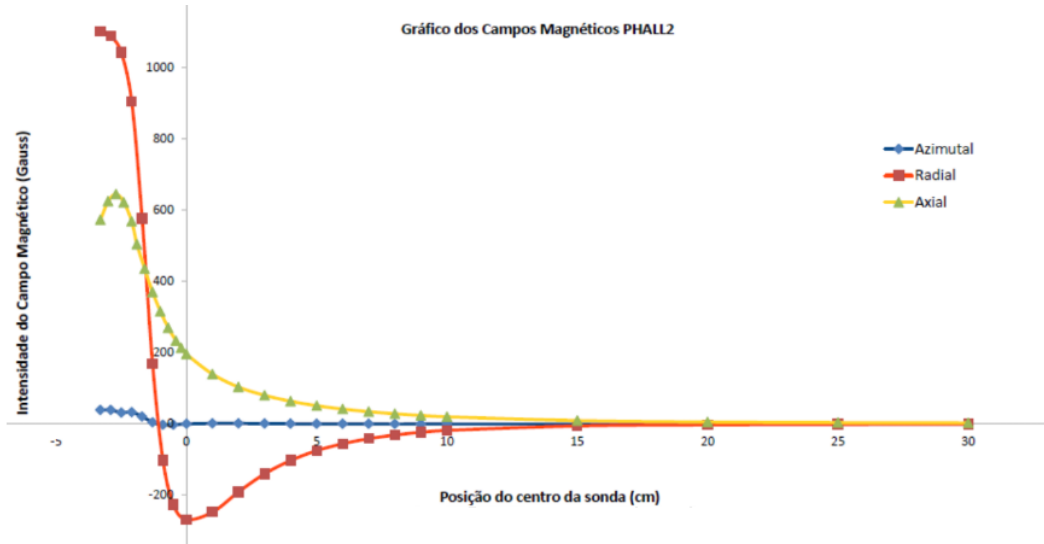


Figura 5.3: Campo magnético obtido experimentalmente utilizando uma sonda de Gauss

Pela lei de Ampère vemos que o a densidade de corrente Hall é dada por:

$$\mathbf{J}_H = \frac{1}{\mu_0} \left(\sum_{n=1}^5 n c_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^5 c_n \frac{z^{n+1}}{r^2(n+1)} \right) \hat{\theta} \quad (5.61)$$

Um potencial vetorial que satisfaz esse campo magnético e a densidade de corrente é:

$$\mathbf{A} = - \left(\sum_{n=0}^5 \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} \hat{r} + k_0 r \right) \hat{\theta} \quad (5.62)$$

O campo elétrico pode ser escrito em termos de \mathbf{J}_H e \mathbf{B} usando a Lei de Ohm generalizada considerando um plasma não-colisional:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{n_e e} B_z J_H \hat{r} + \frac{1}{n_e e} B_r J_H \hat{z} \quad (5.63)$$

onde n_e é a densidade de elétrons e e sua carga. Note que esse campo não é o campo elétrico

externo usado na configuração de campos cruzados, mas sim um campo elétrico induzido pelo acúmulo de elétrons que formam a corrente Hall, que tem maior importância na região de aceleração. Utilizando os valores de B_z , B_r e J_H temos:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{n_e e \mu_0} \left[\sum_{n=0}^5 \frac{1}{(n+1)^2} \frac{c_n^2}{r^3} z^{2n+2} + \sum_{n=0}^5 \frac{2}{(n+1)} \frac{c_n k_0}{r^2} z^{n+1} - \sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)} \frac{c_n^2}{r} z^{2n} - \sum_{n=1}^5 2n c_n z^{n-1} \right] \hat{r} + \frac{1}{n_e e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 n c_n^2 z^{2n-1} - \sum_{n=0}^5 \frac{c_n^2}{r^2(n+1)} z^{2n+1} \right] \hat{z} \quad (5.64)$$

E com o auxílio da equação 5.19 podemos escrever o potencial escalar como sendo:

$$\phi = -\frac{1}{n_e e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)} c_n^2 z^{2n} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2n c_n k_0 r z^{n-1} + \sum_{n=0}^5 \frac{2c_n k_0}{r(n+1)} z^{n+1} + \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2} c_n^2 z^{2n} \right] \quad (5.65)$$

Com isso podemos escrever o Hamiltoniano:

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{P_\theta}{r} + \sum_{n=0}^5 q \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} + q k_0 r \right)^2 + \frac{P_z^2}{2m} - \frac{q}{n_e \mu_0 e} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)} c_n^2 z^{2n} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2n c_n k_0 r z^{n-1} + \sum_{n=0}^5 \frac{2c_n k_0}{r(n+1)} z^{n+1} + \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2} c_n^2 z^{2n} \right] \quad (5.66)$$

Note que esse Hamiltoniano não depende da coordenada θ , com isso podemos concluir que o momento conjugado a ela P_θ é uma constante de movimento. Além disso, não temos uma dependência explícita no tempo, sendo assim, o Hamiltoniano também é uma constante de movimento e pode ser identificada como a energia do sistema (GOLDSTEIN, 2002; NIVALDO, 2007).

Com o Hamiltoniano em mãos podemos fazer a análise para cada espécie, como os campos eletromagnéticos só atuam nos elétrons e íons, vamos desconsiderar as partículas neutras em nossa análise

5.4.1 Análise para o elétron

Primeiramente vamos analisar a dinâmica do elétron dentro do propulsor, pois como se trata de um plasma magnetizado, ou seja, só os elétrons são confinados, descrever sua dinâmica é de vital importância. Para o caso do elétron, temos que $m = m_e$ e $q = -e$, com isso o Hamiltoniano toma a seguinte forma:

$$H = \frac{P_r^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} \left(\frac{P_\theta}{r} + \sum_{n=0}^5 -e \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} - ek_0 r \right)^2 + \frac{P_z^2}{2m_e} + \frac{1}{n_e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)} c_n^2 z^{2n} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2nc_n k_0 r z^{n-1} + \sum_{n=0}^5 \frac{2c_n k_0}{r(n+1)} z^{n+1} + \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2} c_n^2 z^{2n} \right] \quad (5.67)$$

considerando $z = 0$ na posição inicial do cátodo, vamos considerar que o elétron sai com uma energia térmica suficientemente pequena que pode ser desprezada, que é bastante razoável tendo em vista que na maioria dos propulsores tipo Hall a energia de aceleração é muitas vezes maior que a energia inicial do elétron. Com isso temos que em $z = 0$, $H = 0$ logo:

$$P_\theta = ek_0 r_0^2 \quad (5.68)$$

onde r_0 é o raio inicial do elétron,

Usando as equações de Hamilton, temos que as equações que descrevem a dinâmica do elétron dentro do propulsor Hall, que são dadas por: Na direção radial:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m_e} \quad (5.69)$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{m_e} \left(\frac{ek_0 r_0^2}{r} + \sum_{n=0}^5 -e \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} - ek_0 r \right) \left(-\frac{ek_0 r_0^2}{r^2} - ek_0 \right) - \frac{1}{n_e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)r} c_n^2 z^{2n} + \sum_{n=1}^5 2nc_n k_0 z^{n-1} - \sum_{n=0}^5 \frac{2c_n k_0}{r^2(n+1)} z^{n+1} \right] \quad (5.70)$$

Na direção azimutal:

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (5.71)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{1}{m_e r} \left(\frac{ek_0 r_0^2}{r} + \sum_{n=0}^5 -e \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} - ek_0 r \right) \quad (5.72)$$

Na direção axial:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m_e} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = & -\frac{1}{m_e} \left(\frac{ek_0 r_0^2}{r} + \sum_{n=0}^5 -e \frac{c_n z^{n+1}}{n+1} - ek_0 r \right) \left(\sum_{n=1}^5 -ec_n z^n \right) - \\ & \frac{1}{n_e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{2n^2}{(n+1)} c_n^2 z^{2n-1} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2n(n-1)c_n k_0 r z^{n-2} + \sum_{n=1}^5 \frac{2c_n k_0}{r} z^n + \sum_{n=1}^5 n c_n^2 z^{2n-1} \right] \end{aligned} \quad (5.74)$$

Note que o Hamiltoniano para o elétron possui dois graus de liberdade já que $\hat{\theta}$ pode ser escrito em termos de (r, z, P_r, P_z) , com isso integrando as equações na direção axial e radial podemos descrever a dinâmica do elétron dentro do propulsor.

5.4.2 Volume efetivo interceptado pelo elétron

Como feito anteriormente o volume efetivo de ionização é dado por:

$$\dot{V} = \sigma \sqrt{\frac{-2}{\mu_0 n_e m_e} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)} c_n^2 z^{2n} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2n c_n k_0 r z^{n-1} + \sum_{n=0}^5 \frac{2c_n k_0}{r(n+1)} z^{n+1} + \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2} c_n^2 z^{2n} \right]} \quad (5.75)$$

Com o ajuste adequado das constantes para a topologia do campo magnético desejada a Eq.5.75 integrada ao longo da trajetória, ou seja em conjunto com as equações de movimento obtidas acima, nos dá a informação sobre o volume efetivo interceptado pelo elétron que é de vital importância para o projeto do propulsor.

5.4.3 Análise para o íon

Como no propulsor Hall só o elétron é confinado, o campo magnético não atua diretamente nos íons de maneira que a seu Hamiltoniano pode ser escrito da seguinte forma:

$$H = \frac{P_r}{2m_i} + \frac{1}{2m_i} \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_z^2}{2m_i} + e\phi \quad (5.76)$$

onde m_i é a massa do íon e e sua carga. Como o potencial elétrico que o íon está submetido é o mesmo que o elétron, podemos escrever o seu Hamiltoniano sendo:

$$H = \frac{P_r}{2m_i} + \frac{1}{2m_i} \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_z^2}{2m_i} - \frac{1}{n_e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)} c_n^2 z^{2n} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2nc_n k_0 r z^{n-1} + \sum_{n=0}^5 \frac{2c_n k_0}{r(n+1)} z^{n+1} + \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2} c_n^2 z^{2n} \right] \quad (5.77)$$

Semelhantemente ao caso do elétron o Hamiltoniano para o íon não depende de θ e explicitamente de t , com isso temos que a energia e o momento P_θ são constantes de movimento. . As equações que descrevem a dinâmica do íon são obtidas a partir de 5.20:

Na direção radial:

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{n_e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{n}{(n+1)r} c_n^2 z^{2n} + \sum_{n=1}^5 2nc_n k_0 z^{n-1} - \sum_{n=0}^5 \frac{2c_n k_0}{r^2(n+1)} z^{n+1} \right] \quad (5.78)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m_i} \quad (5.79)$$

Na direção azimutal:

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (5.80)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{1}{rm_i} \left(\frac{P_\theta}{r} - e \sum_0^2 a_n r^n z - eb_0 z - e \sum_0^5 \frac{c_m z^{m+1}}{m+1} \right) \quad (5.81)$$

Na direção axial:

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{n_e \mu_0} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{2n^2}{(n+1)} c_n^2 z^{2n-1} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2n(n-1)c_n k_0 r z^{n-2} + \sum_{n=1}^5 \frac{2c_n k_0}{r} z^n + \sum_{n=1}^5 n c_n^2 z^{2n-1} \right] \quad (5.82)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m_i} \quad (5.83)$$

5.4.4 Seção de aceleração e ionização

Para achar a região de aceleração podemos utilizar o mesmo método para o campo gaussiano para isso vamos dividir a equação de movimento na direção axial 5.82 pela massa do íon (m_i):

$$\frac{\dot{P}_z}{m_i} = \frac{1}{n_e \mu_0 m_i} \left[\sum_{n=1}^5 \frac{2n^2}{(n+1)} c_n^2 z^{2n-1} \ln(r) + \sum_{n=1}^5 2n(n-1) c_n k_0 r z^{n-2} + \sum_{n=1}^5 \frac{2c_n k_0}{r} z^n + \sum_{n=1}^5 n c_n^2 z^{2n-1} \right] \quad (5.84)$$

Maximizando a equação 5.84 em relação a z , nos dá a coordenada axial onde a aceleração do íon é máxima, com isso podemos ter uma previsão de qual deve ser a largura do canal, para essa configuração de campos eletromagnéticos. Esse ponto não será obtido nesse trabalho pois a solução numérica depende do ajuste das constantes experimentais que variam de acordo com a configuração de campo magnético desejada o objetivo aqui foi mostrar como deve ser feito para uma vasta configuração de campos que por meio do ajuste das constantes se enquadram no perfil do campo magnético explorado nesse trabalho.

6 CONCLUSÃO

No decorrer desse trabalho foram explorados modelos físicos que nos permitiram caracterizar o perfil do campo magnético necessário para ocorrer o transporte de elétrons no plasma, assim como, analisar aspectos físicos que ocorrem dentro do plasma. Foram caracterizados os parâmetros que causam perdas nos propulsores Hall. Dentro dessa formulação, foram explorados fenômenos relevantes para a física dos plasmas, como a difusão e o transporte anômalo, e mostramos como esses fenômenos estão relacionados com a dinâmica no propulsor em questão.

Com o auxílio desses resultados foi feita uma descrição dinâmica do propulsor, via formalismo hamiltoniano com dois campos magnéticos de real importância para o transporte de elétrons. Tal formalismo também foi utilizado no desenvolvimento de um modelo relacionando a dinâmica dos elétrons e íons no propulsor, tornando-nos, dessa forma, capazes de escrever as equações de movimento que governam o sistema para as diferentes configurações de campo magnético. Através dessas equações, conseguimos mostrar como determinar parâmetros importantes para o projeto de um propulsor Hall, como a posição axial da região de aceleração e de ionização e o volume efetivo do interceptado pelo elétron. Com um campo magnético comumente usado para modelagem de propulsores Hall, testamos o modelo desenvolvido, o qual trouxe resultados satisfatórios, de acordo com a literatura, para o propulsor em questão.

Bibliografia

AHEDO, E.; MARTINEZ-CEREZO, P.; MARTINEZ-SANCHEZ, M. One-dimensional model of the plasma flow in a hall thruster. *Physics of Plasmas*, v. 8, n. 6, p. 3058–3068, 2001.

Albergante, M., Graves, J. P., Fasoli, A., Jenko F., and Dannert, T. Anomalous transport of energetic particles in iter relevant scenarios. *Physics of Plasmas*, 16(11):112301, 2009.

BARRAL, S.; AHEDO, E. Low-frequency model of breathing oscillations in Hall discharges. Institute of Plasma Physics and Laser Microfusion, Warsaw, Poland, 2009

Bellan, P. (2006). *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511807183.

Bittencourt, J.A. *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer New York, 2013.

Braginskii, S. I. Transport Processes in a Plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1:205, 1965.

BOEUF, J. P.; GARRIGUES, L. Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster. *Journal of Applied Physics*, v. 84, n. 7, p. 3541–3554, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.368529>>

Chen, Francis F., 1929-. (1984). *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. New York ::Plenum Press,

CHOEIRI, E. Y. Plasma oscillations in Hall thrusters. Electric Propulsion and Plasma Dynamics Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey, 2001.

Dorf, L Semenov, Vladimir Raitses, Y Fisch, Nathaniel. (2002). The possibility of a Hall thruster operation in the absence of the anode sheath.

Dorland, W., Jenko, F., Kotschenreuther, M., and Rogers, B. N. Electron temperature gradient turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 85:5579–5582, Dec 2000.

ESIPCHUCK, Y.; MOROZOV, A.; TILININ, G.; TROFIMOV, A. *Sov. Phys. Tech. Phys.* 18, 928 (1974).

Goldstein, Herbert, et al. Classical Mechanics. 3rd ed., Addison Wesley, 2002.

GOEBEL, D.; KATZ, I. Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters. New Jersey: John Wiley Sons, 2008.

<http://www.thescinewsreporter.com/2018/07/nasas-new-vasimr-plasma-engine-could.html>

<http://plasmalab.aero.upm.es/plasmalab/information/Research/ElectricPropulsion.html>

<https://www.hallis-model.com/>

Hastie, R. J., and Taylor, J. B. Stability theory of general plasma equilibria. ii. multipoles. Plasma Physics, 13(4):265, 1971.

Helander, Per. Theory of plasma confinement in non-axisymmetric magnetic fields. Reports on Progress in Physics, 77(8):087001, 2014.

FERREIRA, J. L.; Absi Alfro, S.C.; ROSA, J. M.. Caracterização experimental de uma fonte aceleradora de plasma por efeito hall com ímãs permanentes. 2003.

Lyman Spitzer Jr. The stellarator concept. The Physics of Fluids, 1(4):253–264, 1958. 75

LOBBIA, R. B. A Time-Resolved Investigation of the Hall Thruster Breathing Mode. Tese (PhD Thesis) — University of Michigan, 2010.

Morozov, A.I. Introduction to Plasma Dynamics. CRC Press, 2012.

Mecânica Analítica ,2a. ed., NIVALDO A. LEMOS, 2007.

Pueschel, M. J., Terry, P. W., Jenko, F., Hatch, D. R., Nevins, W. M., Görler, T., and Told, D. Extreme heat fluxes in gyrokinetic simulations: A new critical . Phys. Rev. Lett., 110:155005, Apr 2013.

Pusztai, Istvan. Turbulent and Neoclassical transport in tokamak plasmas. PhD Thesis. Chalmers University of Technology, 2011.

Raizer, Y.P. (1991) Gas Discharge Physics. Springer-Verlag, New York.

Rogers, B. N., Kobayashi, S., Ricci P., Dorland W., Drake J., and Tatsuno, T. Physics of Plasmas (1994-present) 14, 092110 (2007)

S. Mazouffre, S. Tsikata, and J. Vaudolon, J. Appl. Phys. 116, 243302 (2014).

S. Marini and R. Pakter, Phys. Plasmas 24, 053507 (2017).

Shafranov, V. D. Equilibrium of a toroidal plasma in a magnetic field. Journal of Nuclear Energy. Part C, Plasma Physics, Accelerators, Thermonuclear Research, 5(4):251, 1963.

Singh, R., Kaw, P.K., and Weiland, J. Non-linear features of the electron temperature gradient mode and electron thermal transport in tokamaks. Nuclear Fusion, 41(9):1219, 2001.

T. J. Boyd, T. J. M. Boyd, J. J. Sanderson. The physics of Plasmas, 2003.

J. C. Adam et al., "Physics, simulation and diagnostics of Hall effect thrusters," Plasma Phys. Controlled Fusion 50, 124041 (2008).

Tummala, A.R.; Dutta, A. An Overview of Cube-Satellite Propulsion Technologies and Trends. Aerospace 2017, 4, 58.

yıldız, Serhan Nadi Ünal, Ali Ozkan, Omer Koç, Ibrahim Celik, Murat. (2015). Electrothermal Propulsion System Selection for Communication Satellite NSSK Maneuver Using Multi Criteria Decision Making Method. 10.1109/RAST.2015.7208412.