UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Alguns problemas de Mahler sobre funções transcendentes e resultados relacionados

por

Elaine Cristine de Souza Silva

Brasília
2019

Elaine Cristine de Souza Silva

Alguns problemas de Mahler sobre funções transcendentes e resultados relacionados

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira.

Brasília

2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586a Silva, Elaine Cristine de Souza
Alguns problemas de Mahler sobre funções transcendentes e resultados relacionados / Elaine Cristine de Souza Silva; orientador Diego Marques Ferreira. -- Brasília, 2019.
63 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2019.

1. Problemas de Mahler. 2. Funções transcendentes. 3. Números de Liouville. 4. Séries de potências lacunárias. 5. Conjuntos excepcionais. I. Ferreira, Diego Marques, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Alguns problemas de Mahler sobre funções transcendentes e resultados relacionados

Por

Elaine Cristine de Souza Silva*

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTORA EM MATEMÁTICA

Brasília, 11 de janeiro de 2019.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira (MAT-UnB)

Prof. Dr. Leandro Martins Cioletti (MAT-UnB)

Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves (UFG)

Prof. Dr. André Luís Contiero (UFMG)

* A autora foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração desta tese.

À minha mãe e aos meus avós.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e inspiração de todos os momentos, nas pessoas do Pai, do Filho e do Espírito Santo. Agradeço a Nossa Senhora por sua divina providência. Sem eles, eu não estaria aqui e nada disso seria possível.

Agradeço à minha família por sempre me encorajar a seguir em frente quando preciso ir, mas deixar as portas abertas se eu precisar voltar. Em especial, agradeço à minha mãe Maria Eliane por todas as nossas conversas, pela confiança, pelo amor e, principalmente, por ser meu principal exemplo de força e determinação. Agradeço ao meu padrasto Francisco Junior, aos meus avós Antonia (Tieta) e Francisco (Ném), ao meu sobrinho/afilhado Éverton Jesus e aos meus irmãos Erick Jhone e Erika Joyce por todo carinho e atenção ao longo da minha caminhada.

Agradeço ao meu orientador de mestrado e doutorado Diego Marques pela oportunidade única de trabalhar sob sua orientação, me possibilitando uma experiência grandiosa nos últimos 6 anos. Agradeço pela paciência, dedicação e por todo o apoio ao longo desses anos.

Agradeço aos demais membros da banca examinadora Leandro Cioletti, Ana Paula Chaves e André Contiero por todas as correções e sugestões, que fizeram com acuidade, enriquecendo este trabalho.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro na realização de pesquisas, participação de eventos e por tantos sonhos que me possibilitaram realizar.

Agradeço a todos os funcionários do departamento de Matemática da UnB por toda a eficiência na execução de seus trabalhos.

Agradeço a todos os professores, desde a creche até a pós-graduação, que tanto contribuíram para minha formação humana, acadêmica e profissional.

Agradeço a todos os colegas de curso e a todos os meus amigos. Em especial, aos meus amigos Alan Góis, Genildo, Herlisvaldo, John Freddy, Laís, Marcos e Valter com quem compartilhei não apenas sala durante o doutorado, mas também muitos momentos importantes da minha vida. Às minhas amigas Edna e Nathália pela parceria na representação discente. Às minhas queridas flores do Nordeste Ariza (Visa), Cris Nascimento, Denise (DD), Francilene (Dra. Fran), Iraneide, Josiane (Josi), Lia Sena, Luana e Paulinha por tantos momentos especiais que vivemos. Ao senhor Oswaldo (Viso) por tantos conhecimentos compartilhados comigo nesses últimos anos. Aos meus amigos Amara e Jamer, pela grande ajuda nos estudos para os exames de qualificação. Aos professores Eduardo e Jânio pela disponibilidade em ler este trabalho. Agradeço ainda aos meus amigos Alessandra, Carol Lafetá, Gérsica, Jean, Josimar, Matheus Bernardini, Anna (ou Carol), Bruno Miranda, Daiane, Filipe, Lucimeire, Vinícius, Alancoc, Erickson, Fábio Nunes, Geovane, Grasielle (Grasi), José Siqueira (Dr. José), Laena, Leonardo Melo (Léo), Lindauriane, Lumena, Ricardo Lima, Rodolfo Ferreira (Rodolfinho), Samuel Honório, Túlio, Andrés Chirre, Davi Lima, Letícia Alves, Lucas Garcia, Alailson, Dona Dione e a tantos outros que acompanharam a minha trajetória, que me deram apoio e oraram por mim.

Eu tenho muito a agradecer. Em cada momento de minha vida, Deus colocou muitos anjos no meu caminho que, às vezes sem que eles percebessem, me deram a força que eu precisava. Mesmo quando eu precisava de um simples sorriso, foi exatamente isso que Deus me enviou. Meu sentimento de gratidão é imenso. Muito Obrigada a todos!

"Não tenhas medo, basta ter fé."

Mc 5,36b

"Sem sonhos, as perdas se tornam insuportáveis,

as pedras do caminho se tornam montanhas,

os fracassos se transformam em golpes fatais.

Mas, se você tiver grandes sonhos...

Seus erros produzirão crescimento,

seus desafios produzirão oportunidades,

seus medos produzirão coragem.

Por isso, meu ardente desejo é que você

NUNCA DESISTA DE SEUS SONHOS."

Augusto Cury

(Nunca desista de seus sonhos, 2004)

Resumo

Em 1844, Liouville explicitou os primeiros exemplos de números transcendentes. Eles são conhecidos como números de Liouville. Em 1906, Maillet provou que a imagem de um número de Liouville por uma função racional não constante (com coeficientes racionais) é também um número de Liouville (lembre-se que funções racionais são exemplos de funções algébricas). Em 1984, Mahler perguntou sobre a existência de funções transcendentes com essa propriedade. Neste trabalho, apresentamos uma condição suficiente, devido a Marques e Moreira, que implica nesta questão e, entre outros resultados, provamos um resultado que implica que a condição dada por eles não é satisfeita por séries de potências lacunárias com coeficientes racionais. Na segunda parte do nosso trabalho, obtemos um resultado relacionado a outro problema proposto por Mahler, para o qual seguiremos de forma mais construtiva, a fim de mostrar a existência de funções transcendentes com coeficientes inteiros com alguns conjuntos excepcionais prescritos.

Palavras-chave: Problemas de Mahler. Funções transcendentes. Números de Liouville. Séries de potências lacunárias. Conjuntos excepcionais.

Abstract

In 1844, Liouville explicited the first examples of transcendental numbers. They are known as Liouville numbers. In 1906, Maillet proved that the image of a Liouville number by a non constant rational function (with rational coefficients) is also a Liouville number (recall that rational functions are examples of algebraic functions). In 1984, Mahler asked about the existence of transcendental functions with this property. In this work, we present a sufficient condition due to Marques and Moreira which implies in this question and, among other results, we prove a result which implies that the condition given by them is not satisfied by lacunary power series with rational coefficients. In the second part of our work we obtain a result related to another problem proposed by Mahler, for which we will follow a more constructive way, in order to show the existence of transcendental functions with integer coefficients with some prescribed exceptional sets.

Keywords: Mahler's problems. Transcendental functions. Liouville numbers. Lacunary power series. Exceptional sets.

Sumário

Introdução

Um número α é dito *algébrico* se é raiz de algum polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Caso contrário, dizemos que α é um número transcendente. A definição de número *transcendente* é do século XVIII e, segundo Euler, esses números são chamados transcendentes porque "transcendem"as operações algébricas. Contudo, apenas no século seguinte, verificou-se sua existência quando, em 1844, Liouville explicitou os primeiros exemplos.

Para provar a existência desses números, Liouville teve a seguinte idéia: ele encontrou uma propriedade que era satisfeita por todos os números algébricos (reais e irracionais) e assim um número que não satisfizesse tal propriedade seria, necessariamente, transcendente. Tal resultado, chamado *Teorema de Liouville*, foi utilizado para provar a transcendência dos números que hoje são conhecidos como *números de Liouville*. Esse foi o primeiro grande resultado em Teoria dos Números Transcendentes.

O conjunto dos números de Liouville tem diversas propriedades interessantes, dentre elas, é um conjunto que tem medida (de Lebesgue) nula, é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$ (isto é, esse conjunto é a interseção enumerável de abertos densos de $\mathbb{R}$) e, em particular, é não enumerável.

Em 1906, Maillet [17] provou que funções racionais não contantes com coeficientes racionais levam o conjunto dos números de Liouville nele mesmo, ou seja, a imagem de qualquer número de Liouville por esse tipo de função é um número de Liouville também. Funções racionais são exemplos de funções algébricas.

Tendo em vista esse resultado, questiona-se sobre a existência de funções transcendentes que preservam o conjunto dos números de Liouville. Em um de seus últimos artigos, Malher (1903-1988) propôs o seguinte problema:

Existem funções inteiras transcendentes f(z) tais que se ξ é um número de Liouville qualquer, então $f(\xi)$ também o é?

Embora o problema proposto por Mahler ainda não tenha sido completamente resolvido, em 2015, Marques e Moreira [22] construíram um conjunto $G \subseteq \mathbb{L}$ subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$ e provaram a existência de uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes para as quais $f(G) \subseteq G$. A prova deles mostra que a questão de Mahler tem uma resposta afirmativa se a resposta para a seguinte questão também for "sim", denotando por $\text{den}(z)$ o denominador do número racional z.

Problema 1.33. *Existem funções inteiras transcendentes $f(z)$ tais que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}(f(p/q)) \ll q^\nu$, para algum $\nu \geq 0$ e para todo q suficientemente grande?*

No contexto do Problema 1.33, obtivemos o Teorema A e o Teorema B.

Teorema A. *Se ν é um número real positivo, então não existe função inteira com série de potências lacunária $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}(f\,(p/q)) \ll q^\nu$, para todo q suficientemente grande.*

Portanto, o Teorema A garante que a resposta para o Problema 1.33 é "não" para funções inteiras tais que suas séries de potências são lacunárias e seus coeficientes são racionais.

Teorema B. *Não existe uma função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}\,(f\,(p/q)) = o(q)$.*

Em particular, isso implica que o Problema 1.33 tem resposta negativa para $\nu < 1$. Vale ressaltar que o resultado provado por Marques e Moreira mostra ainda que, se obtivermos uma resposta afirmativa para a questão abaixo, obteremos uma resposta afirmativa para a questão proposta por Mahler:

Problema 2.11. *Existem funções inteiras transcendentes $f(z)$ tais que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\text{den}(f(p/q)) \leq F(q)$, para algum polinômio fixado $F(z) \in \mathbb{Z}[z]$ e para todo q suficientemente grande?*

Na direção desse problema, obtivemos o seguinte resultado.

Teorema C. *Não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$*

e $\mathrm{den}(f(p/q)) = F(q)$*, para todo* q *suficientemente grande, onde* $F(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Mahler [15] propõe outros problemas relacionados ao comportamento de funções transcendentes, os quais foram denominados problemas A, B e C.

O Problema A, ainda está em aberto. Por outro lado, os Problemas B e C foram resolvidos completamente por Marques e Moreira (ver [21] e [20], respectivamente).

Nosso último resultado principal, está relacionado ao Problema C de Malher.

Teorema D. *Seja* $A \subseteq B(0,1)\backslash\{0\}$ *enumerável e fechado para conjugação complexa. Defina, para cada* $s \geq 0$ *e para cada* $\alpha \in A$*, um conjunto* $E_{(\alpha,s)} \subseteq \mathbb{C}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $E_{(\alpha,s)}$ *é denso em* $\mathbb{C}$*;*

(ii) $E_{(\alpha,s)} \cap \mathbb{R}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*;*

(iii) $E_{(\alpha,s)}$ *é fechado para a conjugação complexa;*

(iv) $E_{(\overline{\alpha},s)} = E_{(\alpha,s)}$.

Então, existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ *tais que* $f^{(s)}(\alpha) \in E_{(\alpha,s)}$*, para cada* $\alpha \in A$ *e cada* $s \geq 0$.

Neste trabalho, veremos algumas consequências desse resultado, dentre elas uma versão para séries com coeficientes inteiros dos teoremas de Faber, Stäckel e do Problema C de Mahler.

Capítulo 1

Números de Liouville e um Problema de Mahler

O objetivo principal deste capítulo é apresentar um problema de Mahler relacionado ao conjunto dos números de Liouville.

Inicialmente, apresentaremos algumas definições e resultados preliminares em Teoria dos Números Transcendentes, com foco nos números de Liouville. Veremos alguns teoremas importantes, dentre eles o Teorema de Maillet. Por fim, veremos um problema baseado nesse teorema e proposto por Mahler [16], em 1984.

1.1 Números algébricos e transcendentes

Definição 1.1 *Um número complexo α é chamado* ***algébrico*** *se é raiz de algum polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Caso contrário, dizemos que α é* ***transcendente****.*

Como números racionais[1] são raízes de polinômios com coeficientes inteiros que têm grau 1, vemos que esses números são exemplos triviais de algébricos (a saber *algébricos de grau 1*). Observe que esse fato implica na **densidade** do conjunto dos números algébricos reais em $\mathbb{R}$.

[1] Enfatizamos que, ao longo deste trabalho, vamos considerar números racionais a/b de modo que a e b sejam números inteiros tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ e $b \geq 1$.

Existem também números algébricos que não são racionais, por exemplo os números $\sqrt{2}$ e i, que são soluções das equações quadráticas $x^2 - 2 = 0$ e $x^2 + 1 = 0$, respectivamente. Esses dois números são denominados *algébricos de grau 2*. Mais geralmente,

Definição 1.2 *Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é um número algébrico, definimos o* ***polinômio minimal*** *de α como o polinômio mônico (isto é, com coeficiente líder igual a 1) de menor grau, com coeficientes racionais, que tem α como raiz. Nesse caso, o* ***grau de*** *α é definido como o grau do seu polinômio minimal.*

O conjunto dos números algébricos é denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$, que constitui, na verdade, um **corpo** (ver [19, p.70]), o que implica trivialmente na **densidade** desse conjunto em $\mathbb{C}$. Esse fato também implica que, se t é transcendente, então $t + \alpha$ é transcendente, para cada $\alpha \in \mathbb{Q}[i]$. Logo,

$$\overline{\mathbb{Q}}^c \neq \emptyset \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^c \textbf{ denso} \text{ em } \mathbb{C}$$

e, analogamente,

$$\overline{\mathbb{Q}}^c \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^c \cap \mathbb{R} \textbf{ denso} \text{ em } \mathbb{R}.$$

A seguinte proposição nos possibilita verificar a existência de números transcendentes, mesmo sem exibir exemplos explícitos.

Proposição 1.3 *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Ver [19, p. 66].

□

Em particular, $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ é enumerável e, portanto, existe uma quantidade não enumerável de números transcendentes reais (e, consequentemente, complexos).

Embora a definição de números transcendentes tenha surgido no século $XVIII$, foi apenas no século seguinte que verificou-se, de fato, a existência desses números quando, em 13 de maio de 1844, Liouville apresentou os primeiros exemplos de números transcendentes, atualmente conhecidos como *números de Liouville*, que veremos na próxima seção.

A seguir, relembramos a definição de conjuntos de medida (de Lebesgue) nula em $\mathbb{R}$.

Definição 1.4 *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tem* ***medida (de Lebesgue) nula****, e escrevemos $m(A) = 0$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma quantidade enumerável de intervalos abertos $(I_n)_{n \geq 1}$ tais que $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} I_n$ e $\sum_{n \geq 1} |I_n| < \varepsilon$.*

Proposição 1.5 *Se $E \subseteq \mathbb{R}$ é enumerável, então, E tem medida nula.*

Demonstração. Ver [19, p. 67].

□

Dizemos que uma condição é satisfeita por **quase todos os números reais**, se o subconjunto de $\mathbb{R}$ dos elementos que não satisfazem tal condição tem medida nula.

Proposição 1.6 *Quase todo número real é transcendente.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3, segue que, em particular, o conjunto dos números algébricos reais é enumerável. Além disso, pela Proposição 1.5, esse conjunto tem medida nula. Com isso concluímos que quase todo número real é transcendente.

□

Na próxima seção, apresentaremos o Teorema de Liouville, a definição de números de Liouville e a demonstração da transcendência desses números.

1.2 Teorema de Liouville e os primeiros números transcendentes

Teorema 1.7 (Liouville) *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um número algébrico de grau $n \geq 2$. Então, existe uma constante $A = A(\alpha) > 0$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n},$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Ver [19, p.82].

□

Sabemos que o conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Logo, é possível aproximar qualquer número real por números racionais. Contudo, o Teorema de Liouville afirma que números algébricos (reais) não racionais não podem ser muito "bem aproximados" por racionais, no sentido em que qualquer aproximação tem que respeitar esse comportamento. O que Liouville fez depois foi construir números reais não racionais que podem ser muito "bem aproximados" por racionais e, portanto, não são algébricos.

Definição 1.8 *Um número real ξ é chamado* ***número de Liouville*** *se existir uma sequência infinita de racionais $(p_j/q_j)_{j\geq 1}$ tal que $q_j > 1$ e*

$$0 < \left| \xi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j},$$

para todo $j \geq 1$. Denotamos por $\mathbb{L}$ o conjuntos dos números de Liouville.

Observação 1.9 *Diremos que uma sequência é infinita se possuir uma subsequência de termos distintos.*

A seguir, apresentamos alguns resultados que serão utilizados para garantir a transcendência dos números de Liouville.

Proposição 1.10 *A sequência $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que a sequência $(q_j)_{j\geq 1}$ é limitada por uma constante positiva C. Assim, $1 < q_j \leq C$, para todo $j \geq 1$. Como

$$0 < \left| \xi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j} < 1,$$

temos

$$|p_j| - |q_j \xi| \leq |q_j \xi - p_j| < q_j,$$

que implica

$$|p_j| < q_j\, |\xi| + q_j \leq (|\xi| + 1)C.$$

Portanto, a sequência $(p_j)_{j\geq 1}$ é limitada, que é uma contradição, uma vez que a sequência $(p_j/q_j)_{j\geq 1}$ é infinita.

□

Proposição 1.11 *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe $p/q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{L}$. Assim, existem infinitos p_j/q_j, tais que

$$0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Como $|pq_j - qp_j|$ deve ser um número inteiro positivo, então

$$\frac{1}{|q|q_j} \leq \left| \frac{pq_j}{qq_j} - \frac{qp_j}{qq_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Portanto, $q_j^{j-1} < |q|$, que contradiz a Proposição 1.10.

□

Teorema 1.12 *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração. Seja ξ um número de Liouville. Vamos supor, por absurdo, que ξ é algébrico. Pela Proposição 1.11, ξ tem grau n maior do que 1. Assim, pelo Teorema de Liouville, existe uma constante $A > 0$ tal que, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}.$$

Em particular,

$$\frac{A}{q_j^n} < \left| \xi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j},$$

para todo $j \geq 1$. Em vista disso, $q_j^{j-n} < 1/A$. Isso contradiz a Proposição 1.10.

□

A seguir, exibimos nosso primeiro exemplo de número de Liouville, conhecido como a **constante de Liouville**.

Exemplo 1.13 ***(Constante de Liouville)*** *O número*

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

é um número de Liouville. Para provar isso, consideramos as sequências de inteiros

$$p_j = \sum_{n=1}^{j} 10^{j!-n!} \text{ e } q_j = 10^{j!}.$$

Observe que, $(p_j/q_j)_{j\geq 1}$ *é uma sequência infinita de racionais. Além disso,*

$$\begin{aligned}\left|\ell - \frac{p_j}{q_j}\right| &= \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-(j+n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{-(j+1)!}}{10^{(j+n)!-(j+1)!}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{-(j+1)!}}{10^{n}} = \frac{10}{9\cdot 10^{(j+1)!}} < \frac{1}{10^{(j+1)!-1}} \leq \frac{1}{10^{j\cdot j!}} = \frac{1}{q_j^{j}}.\end{aligned}$$

Observação 1.14 *Argumentos similares aos vistos no exemplo anterior podem ser utilizados para provar que* $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n!}$ *é um número de Liouville, para cada inteiro* $a \geq 2$*. Isso garante que existem infinitos números de Liouville, uma vez que a função* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n!}$ *é tal que* $f(\{2, 3, \ldots\})$ *é um subconjunto infinito de* $\mathbb{R}$*.*

Com base nos resultados anteriores, sabemos que todo número de Liouville é transcendente e que existem infinitos números de Liouville. Em vista disso, surge um questionamento natural:

Todo número transcendente é de Liouville?

Com a finalidade de responder essa pergunta, apresentaremos o seguinte resultado.

Teorema 1.15 *O conjunto dos números de Liouville tem medida nula em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. Ver [19, p. 85].

$\square$

Com esse último resultado, vemos que, se todo número transcendente fosse de Liouville, teríamos $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}) \cup \mathbb{L} = \mathbb{R}$ e, assim, o conjunto dos números reais teria medida nula, o que é uma contradição.

Os números e e π são exemplos de números transcendentes que não são de Liouville (ver [29, p. 330]). Na verdade, com o teorema anterior, concluímos que apesar de quase todo número real ser transcendente, "quase nenhum" é de Liouville. Isso significa que o conjunto dos números de Liouville é pequeno em $\mathbb{R}$, do ponto de vista da medida de Lebesgue.

1.3 Teorema de Erdös e a propriedade G_δ

Não é difícil provar que qualquer número real pode ser decomposto como soma de dois números transcendentes, contudo, esse não é um resultado tão interessante, visto que quase todo número real é transcendente. Nesta seção, veremos que qualquer número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville. Esse resultado é bem interessante, uma vez que o conjunto dos números de Liouville tem medida nula em $\mathbb{R}$. Segundo Marques (Ver [19, p. 86]), podemos pensar então que, mesmo sendo um conjunto "invisível", os números de Liouville estão estrategicamente posicionados na reta real.

Erdös provou esse resultado em 1962, no artigo *Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers*. Nesse artigo, ele deu uma prova construtiva, onde os números de Liouville são explicitados (Ver [19, p. 86]), e uma prova não construtiva, em que ele utiliza as propriedades de subconjunto G_δ. Com a finalidade de destacar essa propriedade do conjunto dos números de Liouville, optamos por apresentar aqui a prova não construtiva.

Em vista disso, vamos relembrar a definição de subconjunto G_δ e algumas propriedades de subconjuntos desse tipo.

Definição 1.16 *Seja X um espaço topológico, diremos que $G \subseteq X$ é um subconjunto G_δ de X, se G é a interseção de uma família enumerável de abertos densos*[2] *em X.*

Observação 1.17 *Pode-se observar que a interseção enumerável de subconjuntos G_δ de X ainda é um subconjunto G_δ de X (ver [30, p. 29]).*

Exemplo 1.18 *O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$, pois,*

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcap_{x\in\mathbb{Q}} \mathbb{R}\backslash\{x\}.$$

[2] Alguns livros de Topologia definem conjunto G_δ como uma intersecção enumerável de abertos, não necessariamente densos. Entretanto, tendo em vista os objetivos deste trabalho, vamos considerar a definição como acima.

Analogamente, podemos mostrar que o complementar de qualquer subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é um subconjunto G_δ. O seguinte lema será utilizado para provar que, apesar de seu complementar ser não enumerável, o conjunto dos números de Liouville é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$.

Lema 1.19 (Equivalência para a definição de número de Liouville) *O número real ξ é de Liouville se, e somente se, para todo $n \geq 1$, existe $p/q \in \mathbb{Q}$, tal que $q > 1$ e*

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Demonstração. Se ξ é um número de Liouville, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $p = p_n$ e $q = q_n$. Reciprocamente, dado $n \in \mathbb{N}$, vamos escolher $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ de modo que $q_n > 1$ e

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Seja

$$A = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}.$$

Se A for finito, então existe $p/q \in A$ tal que $p/q = p_n/q_n$, para $n \in \mathbb{N}'$, com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito. Logo, $|\xi - p/q| < q^{-n}$, para $n \in \mathbb{N}'$. Assim, $\xi = p/q$, contradizendo $|\xi - p/q| > 0$. Portanto, A é infinito. Concluímos que ξ é um número de Liouville.

□

Observação 1.20 *Mais geralmente, podemos obter a seguinte equivalência para a definição de número de Liouville: O número real ξ é de Liouville se, e somente se, para todo número real positivo ω, existe uma quantidade infinita de racionais p/q, tal que $q > 1$ e*

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\omega}.$$

Proposição 1.21 *O conjunto dos números de Liouville é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Mostraremos que $\mathbb{L} = \bigcap_{n \geq 1} U_n$, com

$$U_n = \bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}$$

e que cada U_n é aberto denso em $\mathbb{R}$. De fato, seja $\xi \in \mathbb{L}$, pelo Lema 1.19, dado $n \geq 1$, existe $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q \geq 2$ tal que

$$\xi \in \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}$$

e, consequentemente,

$$\xi \in \bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}.$$

Como $n \geq 1$ foi tomado arbitrariamente, temos

$$\xi \in \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}\right) = \bigcap_{n\geq 1} U_n.$$

Reciprocamente, seja $x \in \bigcap\limits_{n\geq 1} U_n$. Temos que, para cada $n \geq 1$,

$$x \in \bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}.$$

Desse modo, para cada $n \geq 1$ existem $q \geq 2$ e $p \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x \in \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}.$$

Isto é, para cada $n \geq 1$ existe $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q \geq 2$, tal que

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Portanto, $x \in \mathbb{L}$. Assim, provamos a primeira parte.

Observe que

$$U_n = \bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \bigcap \left(\left\{\frac{p}{q}\right\}^c\right)\right),$$

consequentemente, aberto, para cada $n \geq 1$, já que é uma união enumerável de abertos. Logo,

$$\overline{U_n} = \overline{\bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}} \supset \bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\}}$$

para cada $n \geq 1$ (aqui $\overline{A}$ denota o fecho topológico de A em $\mathbb{R}$).

Agora, como

$$\bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\overline{\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)\setminus\left\{\frac{p}{q}\right\}}=\bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left[\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right]\supset\bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{p}{q}\right\},$$

obtemos, para cada $n \geq 1$,

$$\overline{U_n}\supset\bigcup_{q\geq 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{p}{q}\right\}\supset\mathbb{Q}.$$

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, segue que U_n é denso, para cada $n \geq 1$. Conclui-se que $\mathbb{L}$ é dado pela intersecção enumerável de abertos densos e, portanto, é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$.

□

Em [30], podem ser vistas diversas propriedades interessantes de subconjuntos G_δ. Vamos listar algumas, das quais obteremos outras propriedades do conjunto dos números de Liouville.

A seguir, relembramos a definição de espaços de Baire.

Definição 1.22 *Um espaço topológico no qual todo conjunto magro* [3] *tem interior vazio é chamado de* ***espaço de Baire****.*

Proposição 1.23 *Se X é um espaço de Baire, então todo subconjunto G_δ de X é denso em X.*

Demonstração. Seja G um subconjunto G_δ de X. Assim, G^c é uma reunião enumerável de conjuntos fechados com interior vazio. Se X é um espaço de Baire, então G^c tem interior vazio, consequentemente, G é denso em X.

□

Teorema 1.24 (Teorema de Baire) *Todo espaço métrico completo com a topologia induzida pela métrica é um espaço de Baire.*

[3] Dizemos que $A \subseteq X$ é um *conjunto magro* em X se A é uma reunião enumerável de conjuntos fechados com interior vazio.

Demonstração. Ver [10, p. 164]. □

Segue, em particular, que $\mathbb{R}$ é um espaço de Baire. Logo, o conjunto dos números de Liouville é **denso** em $\mathbb{R}$.

Proposição 1.25 *Seja $X \neq \emptyset$ um espaço métrico completo, sem pontos isolados, e seja E um subconjunto G_δ de X. Seja F um subconjunto enumerável de E. Então, $E \backslash F$ é um subconjunto G_δ de X.*

Demonstração. Ver [30, p. 32]. □

Portanto, o conjunto dos números de Liouville é **não enumerável**, uma vez que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo (não vazio), sem pontos isolados.

A seguir, mostraremos que dado um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$, qualquer número real pode ser escrito como soma de dois elementos desse subconjunto.

Lema 1.26 *Se $G \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto G_δ, então dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existem $x, y \in G$ tais que $x + y = \alpha$.*

Demonstração. Sabemos que

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

onde A_n é aberto denso em $\mathbb{R}$, para cada n.

AFIRMAÇÃO 1: $\alpha - G = \{\alpha - s \mid s \in G\}$ é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$.

Inicialmente, mostraremos que

$$\alpha - G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\alpha - A_n)$$

em que $\alpha - A_n = \{\alpha - s \mid s \in A_n\}$. Note que, dado $t \in \alpha - G$, existe $s \in G$, tal que $t = a - s$. Como $s \in G$, tem-se $s \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim, $t = \alpha - s \in \alpha - A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\alpha - A_n).$$

Reciprocamente, dado

$$t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\alpha - A_n),$$

tem-se $t \in \alpha - A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $s_n \in A_n$ tal que $t = \alpha - s_n$. Pela unicidade do inverso aditivo, $s_i = s_j$ mesmo que $i \neq j$, defina $s = s_1$. Desse modo,

$$t = \alpha - s \in \alpha - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \alpha - G.$$

Agora, observe que A_n é aberto e denso para cada $n \in \mathbb{N}$, desse modo, $\alpha - A_n$ é aberto e denso, consequentemente $\alpha - G$ é G_δ. E a *Afirmação 1* está provada.

Como G e $\alpha - G$ são conjuntos G_δ, então, $G \cap (\alpha - G)$ é G_δ e, consequentemente, não vazio. Conclui-se que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $y \in G \cap (\alpha - G)$. Desse modo, $y \in G$ e $y \in \alpha - G$. Assim, existe $x \in G$ tal que $y = \alpha - x$.

Portanto, existem $x, y \in G$ tais que $x + y = \alpha$, como queríamos demonstrar.

$\square$

Teorema 1.27 (Erdös) *Todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 1.21 e do Lema 1.26.

$\square$

1.4 Teorema de Maillet e um problema proposto por Mahler

Outro resultado interessante sobre o conjunto dos números de Liouville foi provado, em 1906, por Maillet [17]:

Teorema 1.28 (Maillet) *Se $f \in \mathbb{Q}(x)$ é uma função racional não constante. Então, $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$.*

Demonstração. Sejam $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $f(x) = P(x)/Q(x)$. Dado $\xi \in \mathbb{L}$, existe $I \subseteq [\xi - 1, \xi + 1]$ um intervalo fechado tal que $\xi \in I$ e $Q(x) \cdot f'(x) \neq 0$, para cada $x \in I$. Podemos supor que existe uma sequência $(p_j/q_j)_{j \geq 1}$ de racionais distintos, com $p_j/q_j \in I$, $q_j > 1$ e

$$\left|\xi - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Para cada $j \geq 1$, utilizaremos o Teorema do Valor Médio para o intervalo com extremos ξ e p_j/q_j. Assim, existe ζ_j nesse intervalo tal que

$$f(\xi) - f\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = f'(\zeta_j)\left(\xi - \frac{p_j}{q_j}\right).$$

Pelo Teorema de Weierstrass, existe $\alpha \in I$ tal que $|f'(\alpha)| \geq |f'(x)|$ para todo $x \in I$. Em particular, $|f'(\alpha)| \geq |f'(\zeta_j)|$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$0 < \left|f(\xi) - f\left(\frac{p_j}{q_j}\right)\right| \leq |f'(\alpha)|\left|\xi - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{|f'(\alpha)|}{q_j^j}. \tag{1.1}$$

Observe que, se $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, então,

$$f\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = \frac{q_j^m(a_0 q_j^n + a_1 p_j q_j^{n-1} + \cdots + a_n p_j^n)}{q_j^n(b_0 q_j^m + b_1 p_j q_j^{m-1} + \cdots + b_m p_j^m)}.$$

Tome

$$A_j = q_j^m(a_0 q_j^n + a_1 p_j q_j^{n-1} + \cdots + a_n p_j^n)(-1)^{\sigma_j}$$

e

$$B_j = q_j^n(b_0 q_j^m + b_1 p_j q_j^{m-1} + \cdots + b_m p_j^m)(-1)^{\sigma_j},$$

onde

- $\sigma_j = 0$, se $q_j^n(b_0 q_j^m + b_1 p_j q_j^{m-1} + \cdots + b_m p_j^m) \geq 1$;
- $\sigma_j = 1$, se $q_j^n(b_0 q_j^m + b_1 p_j q_j^{m-1} + \cdots + b_m p_j^m) \leq -1$.

Note que

$$f\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = \frac{A_j}{B_j} \tag{1.2}$$

e que $(B_j)_{j\geq 1}$ não pode ser limitada, já que $(q_j)_j \geq 1$ é ilimitada e

$$b_0 q_j^m + b_1 p_j q_j^{m-1} + \ldots + b_m p_j^m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Agora, de $|\xi - p_j/q_j| < 1$, segue que $|p_j| < (1+|\xi|)q_j$. Assim,

$$\begin{aligned}
|B_j| &= |q_j^n(b_0q_j^m + b_1p_jq_j^{m-1} + cldots + b_mp_j^m)| \\
&\leq |b_0q_j^{n+m}| + |b_1p_jq_j^{n+m-1}| + cldots + |b_mp_j^mq_j^n| \\
&< |b_0||q_j^{n+m}| + |b_1|(1+|\xi|)|q_j^{n+m}| + cldots + |b_m|(1+|\xi|)^m|q_j^{n+m}| \\
&\leq L(Q)\theta^m q_j^{m+n},
\end{aligned}$$

onde $L(Q) = |b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m|$ e $\theta = 1 + |\xi|$.

$$B_j \leq L(Q)\theta^m q_j^{m+n}. \tag{1.3}$$

Utilizando (1.3) e (1.1),

$$0 < \left|f(\xi) - f\left(\frac{p_j}{q_j}\right)\right| < \frac{|f'(\alpha)|}{q_j^j} \leq \frac{|f'(\alpha)|}{\left(\frac{B_j}{L(Q)\theta^m}\right)^{\frac{j}{m+n}}} = \frac{|f'(\alpha)|\,(L(Q)\theta^m)^{\frac{j}{m+n}}}{B_j^{\frac{j}{m+n}}}. \tag{1.4}$$

Como $(B_j)_j \geq 1$ é ilimitada, temos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|f'(\alpha)|(L(Q)\theta^m)^{\frac{j}{m+n}}}{B_j^{\frac{j}{2(m+n)}}} = 0$$

e, portanto, existe $C > 0$, tal que

$$\left|\frac{|f'(\alpha)|(L(Q)\theta^m)^{\frac{j}{m+n}}}{B_j^{\frac{j}{2(m+n)}}}\right| < C. \tag{1.5}$$

Utilizando (1.2) a (1.5),

$$0 < \left|f(\xi) - \frac{A_j}{B_j}\right| = \left|f(\xi) - f\left(\frac{p_j}{q_j}\right)\right| < \frac{C}{B_j^{\frac{j}{2(m+n)}}}.$$

Para mostrar que $f(\xi)$ é um número de Liouville, vamos construir uma sequência infinita $(c_i/d_i)_{i\geq 1}$ através da sequência $(A_j/B_j)_j$, de modo que,

$$0 < \left|f(\xi) - \frac{c_i}{d_i}\right| < \frac{1}{d_i^i}.$$

Inicialmente, escolhemos j_1, de modo que $C < B_{j_1}^{\frac{j_1}{2(m+n)}-1}$ e, para cada $i > 1$, escolhemos j_i, de modo que $j_i > j_{i-1}$, $B_{j_i} \notin \{B_{j_1}, \ldots, B_{j_{n-1}}\}$ e $C < B_{j_i}^{\frac{j_i}{2(m+n)}-i}$.

Assim, definimos $\dfrac{c_i}{d_i} = \dfrac{A_{j_i}}{B_{j_i}}$ e obtemos

$$0 < \left| f(\xi) - \frac{c_i}{d_i} \right| = \left| f(\xi) - \frac{A_{j_i}}{B_{j_i}} \right| < \frac{C}{B_{j_i}^{\frac{j_i}{2(m+n)}}} < \frac{1}{B_{j_i}^{i}} = \frac{1}{d_i^{i}}.$$

Portanto, $f(\xi)$ é um número de Liouville.

□

Exemplo 1.29

- *Observe que, em particular,* $\alpha + \dfrac{p}{q}$ *é um número de Liouville, para cada* α *de Liouville e* $\dfrac{p}{q}$ *racional. Esse fato nos fornece outra maneira de verificar que o conjunto dos números de Liouville é denso em* $\mathbb{R}$*.*

- *Observe ainda que, se* f *é um polinômio não constante com coeficientes racionais, então* $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$*.*

No próximo capítulo, veremos as definições de funções *algébricas* e *transcendentes.* Veremos também que funções racionais são funções algébricas. Foi baseado nesse fato e no Teorema de Maillet que Mahler [16] levantou o seguinte questionamento: "Quais funções analíticas $f(z)$ têm a propriedade que se ξ é um número de Liouville qualquer, então $f(\xi)$ também o é? Em particular, existem funções inteiras transcendentes com essa propriedade?".

O Teorema de Maillet garante a existência de funções analíticas algébricas tais que $f(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$, bem como a existência de funções inteiras algébricas com essa propriedade. Em vista disso, o foco principal da primeira parte de nosso trabalho será o seguinte problema:

Problema 1.30 (Mahler) *Existem funções inteiras transcendentes* $f(z)$ *tais que se* ξ *é um número de Liouville qualquer, então* $f(\xi)$ *também o é?*

Tal problema ainda não foi completamente resolvido, entretanto, apresentaremos no próximo capítulo alguns passos em sua direção.

Recentemente, alguns autores (ver [22, 25, 27]) construíram grandes[4] subconjuntos de $\mathbb{L}$ que são levados em $\mathbb{L}$ por funções inteiras transcendentes. Por exemplo, para provar isso, Marques e Moreira [22] mostraram o seguinte resultado.

[4]No sentido topológico.

Teorema 1.31 (Marques, Moreira) *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ com $1/2 < f'(x) < 3/2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tais que* $\mathrm{den}(f(p/q)) < q^{8q^2}$, *para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 1$.*

Observação 1.32 *Lembre-se que* $\mathrm{den}(z)$ *denota o* ***denominador*** *do número racional z, em que $z = a/b$, com a e b números inteiros tais que* $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ *e* $b \geq 1$

A prova deles mostra que o Problema 1.30 de Mahler tem uma resposta afirmativa se a resposta para o seguinte problema também for "sim":

Problema 1.33 *Existem funções inteiras transcendentes $f(z)$ tais que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e den$(f(p/q)) \ll q^\nu$, para algum $\nu \geq 0$ e para todo q suficientemente grande?*

Observação 1.34 *Ao longo deste trabalho, a constante implícita em $\ll$ depende somente de f.*

No próximo capítulo, veremos que o Teorema 1.31 implica que existem funções inteiras transcendentes $f(z)$ tais que $f(G) \subseteq G$, para algum $G \subseteq \mathbb{L}$, com G subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$ (em particular, G é não enumerável). Além disso, apresentaremos alguns resultados relacionados ao Problema 1.33. O primeiro deles garante que esse problema tem resposta negativa para séries de potências lacunárias com coeficientes racionais. O segundo garante que o Problema 1.33 tem resposta negativa para $\nu < 1$.

Capítulo 2

Sobre Funções Inteiras Transcendentes que Levam Racionais em Racionais

Neste capítulo, mostraremos que a resposta para o Problema 1.33 é "não" para séries de potências lacunárias com coeficientes racionais. Além disso, apresentaremos uma solução para esse problema quando $\nu < 1$.

2.1 Funções algébricas e transcendentes

Definição 2.1 *Uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$, é chamada **algébrica** se existe um polinômio não-nulo com coeficientes complexos $P(x, y)$ tal que*

$$P(z, f(z)) = 0, \text{ para todo } z \in D.$$

*Caso contrário, dizemos que f é **transcendente**.*

Claramente, toda função racional é algébrica. Em particular, qualquer polinômio com coeficientes complexos é uma função algébrica, independente da natureza aritmética de seus coeficientes. Por outro lado, as funções trigonométricas, exponenciais e suas inversas são exemplos de funções transcendentes.

Note que a definição de *função algébrica* se assemelha à definição de *número algébrico*, no sentindo que a existência de um polinômio não nulo com coeficientes complexos $P(x, y)$ tal que

$$P(z, f(z)) = 0, \text{ para todo } z \in D$$

é equivalente à existência de um polinômio não nulo $A(w)$ com coeficientes em $\mathbb{C}[z]$ tal que

$$A(f(z)) = 0, \text{ para todo } z \in D.$$

Seja $0 < r \leq \infty$, denotaremos por $B(0, r)$, a bola aberta de centro 0 e raio r no plano complexo, isto é, $B(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z| < r\}$. No caso em que $r = \infty$, $B(0, r)$ corresponde a todo o plano complexo. Além disso, dada uma função f analítica em $B(0, r)$, para algum $0 < r \leq \infty$, denominaremos **coeficientes** dessa função, os coeficientes de sua série de Taylor centrada em $z = 0$ (isto é, de sua série de Maclaurin).

Dado $K \subseteq \mathbb{C}$, denotaremos por $K[[z]]$ o conjunto das **séries de potências** com coeficientes em K. O seguinte teorema nos permite concluir que existe apenas uma quantidade **enumerável** de funções analíticas algébricas em $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ (e, em particular, com coeficientes racionais ou inteiros).

Teorema 2.2 *Sejam K um subcorpo de $\mathbb{C}$ e $f(z) \in K[[z]]$ uma função analítica, com raio de convergência $0 < r_f \leq \infty$. Assuma que existe um polinômio não nulo $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que*

$$P(z, f(z)) = 0, \textit{ para todo } z \in B(0, r_f).$$

Então, existe também um polinômio não nulo $P_0(x, y) \in K[x, y]$ tal que

$$P_0(z, f(z)) = 0, \textit{ para todo } z \in B(0, r_f).$$

Demonstração. Ver [15, p. 35].

□

A seguir, apresentamos um resultado bem conhecido e que será útil no decorrer deste trabalho.

Teorema 2.3 *Uma função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio.*

Demonstração. Ver [18, p. 36].

□

Alguns critérios para verificar a transcendência de funções não necessariamente inteiras podem ser encontrados em [15]. De fato, nesse livro, Mahler define transcendência para séries de Laurent formais e estabelece critérios sem uma preocupação explícita com sua convergência. A seguir, veremos a definição de séries de potências lacunárias, cuja transcendência está estabelecida em [15, p. 42], mas uma demonstração bem simples pode ser feita no caso em que essa série de potências representa uma função inteira.

Definição 2.4 *Uma série de potências* $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *é chamada* ***lacunária*** *se existem duas sequências de inteiros* $(s_n)_{n\geq 1}$ *e* $(t_n)_{n\geq 0}$ *tais que*

(i) $0 = t_0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots;$

(ii) $a_{s_n} a_{t_n} \neq 0$*, para* $n \geq 1$*;*

(iii) $a_k = 0$*, para* $s_n < k < t_n$*;*

(iv) $\lim_{n\to\infty} (t_n - s_n) = \infty$.

Observação 2.5 *Em particular, se* $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *é uma série de potências lacunária, então,*

$$\begin{aligned} f(z) = a_{t_0} &+ a_{t_0+1} z^{t_0+1} + \dots + a_{s_1-1} z^{s_1-1} + a_{s_1} z^{s_1} + 0 + \dots + 0 + \\ a_{t_1} z^{t_1} &+ a_{t_1+1} z^{t_1+1} + \dots + a_{s_2-1} z^{s_2-1} + a_{s_2} z^{s_2} + 0 + \dots + 0 + \\ a_{t_2} z^{t_2} &+ a_{t_2+1} z^{t_2+1} + \dots + a_{s_3-1} z^{s_3-1} + a_{s_3} z^{s_3} + 0 + \cdots , \end{aligned}$$

com $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ *e* $a_{t_n} \neq 0$*, para cada* $n \geq 1$*. Consequentemente,* $f(z)$ *não pode ser um polinômio. E, portanto, uma função inteira com série de potências lacunária é, necessariamente, uma função transcendente.*

2.2 Uma variação do Problema 1.30 de Mahler

Em 2014, Kumar, Thangadurai e Waldschmidt [7] utilizaram a seguinte proposição (provada por Alniaçik e Saias [1], em 1994) de modo a obter diversos resultados sobre o comportamento dos números de Liouville sob a ação de funções contínuas.

Proposição 2.6 (Alniaçik, Saias) *Sejam I um intervalo (não degenerado) de $\mathbb{R}$, G um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$ e $(f_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de funções definidas em I, que são contínuas e não-localmente constantes [1]. Então*

$$\bigcap_{n\geq 0} f_n^{-1}(G)$$

é um subconjunto G_δ de I.

Observação 2.7 *Nas hipóteses da Proposição 2.6, se $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f_n = \varphi$, para cada $n \geq 0$, então, $\varphi^{-1}(G)$ é um subconjunto G_δ em I, para cada G subconjunto G_δ em $\mathbb{R}$. Isto é, a imagem inversa pela função φ de todo subconjunto G_δ em $\mathbb{R}$ é G_δ em I. Isso ocorre porque a continuidade de φ garante que a imagem inversa dos abertos (da interseção) vão ser subconjuntos abertos de I e a densidade decorre por φ ser não-localmente constante.*

A seguir, relembramos o princípio da continuação analítica.

Teorema 2.8 (Princípio da continuação analítica) *Sejam f e g funções analíticas em um domínio [2] $D \subseteq \mathbb{C}$. Então, $f = g$ em D se, e somente se, o conjunto*

$$\{z \in D : f(z) = g(z)\}$$

tem um ponto de acumulação em D.

Demonstração. Ver [2, p. 79].

□

Observe que, se a resposta para o Problema 1.30 de Mahler for "sim", isto é, se existe uma função f inteira transcendente tal que $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$, então a transcendência

[1] Diremos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é **não-localmente constante** se, para todo subintervalo (não degenerado) $J \subseteq I$, a restrição de f a J é não constante.

[2] Relembramos que um domínio $D \subseteq C$ é um aberto simplesmente conexo.

e a continuidade dessa função implicam que ela é não constante e que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, respectivamente.

Por outro lado, podemos utilizar o princípio da continuação analítica e a Observação 2.7, para mostrar que, para qualquer função inteira não constante f tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, temos que $f^{-1}(\mathbb{L})$ é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$. E, como a interseção de dois subconjuntos G_δ de $\mathbb{R}$ também tem essa propriedade, podemos garantir que existe um subconjunto $G \subseteq \mathbb{L}$ que é G_δ em $\mathbb{R}$ tal que $f(G) \subseteq \mathbb{L}$.

O Problema 1.30 de Mahler questiona a existência de funções inteiras transcendentes tais que $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ e, por sua vez, o Teorema de Maillet implica que isso vale para polinômios não constantes com coeficientes racionais.

No entanto, a partir das observações anteriores, não podemos garantir nem mesmo a existência de funções inteiras transcendentes para as quais $f(G) \subseteq G$, para algum $G \subseteq \mathbb{L}$ subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$. A seguir, veremos um resultado provado por Marques e Moreira [22], que garante a existência de uma quantidade não enumerável de funções com essa propriedade.

Primeiramente, considere as funções $\exp^{[0]}(x) = x$ e

$$\exp^{[n]}(x) = \exp(\exp^{[n-1]}(x)), \text{ para cada } n \geq 1.$$

Definição 2.9 *Um número real ξ é chamado **ultra-Liouville** se para qualquer inteiro positivo k, existe uma quantidade infinita de números racionais p/q tais que $q > 1$ e*

$$0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(q)}.$$

*O conjunto dos números **ultra-Liouville** será denotado por $\mathbb{L}_{ultra}$.*

Observe que o conjunto dos números ultra-Liouville está contido no conjunto dos números de Liouville e também é um subconjunto G_δ de $\mathbb{R}$. Marques e Moreira utilizaram o seguinte resultado para garantir a existência de uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes $f(z)$ tais que $f(\mathbb{L}_{\text{ultra}}) \subseteq \mathbb{L}_{\text{ultra}}$.

Teorema 2.10 (Marques, Moreira) *Existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ com $1/2 < f'(x) < 3/2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tais que $den(f(p/q)) < q^{8q^2}$, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 1$.*

Demonstração. Ver [8, p. 22].

$\square$

Os detalhes dessa demonstração podem ser encontrados em [8, p. 22], onde observa-se que, dado um número ultra-Liouville ξ e um inteiro positivo k, existe uma infinidade de números racionais p/q com $q \geq 7$ tais que

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\exp^{[k+2]}(q)}.$$

Se f é uma função como no Teorema 2.10, segue do Teorema do Valor Médio que

$$\left| f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \frac{3}{2} \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{3}{2\exp^{[k+2]}(q)}.$$

Por fim, verifica-se que $f(p/q) = a/b$ implica $\frac{3}{2}\exp^{[k]}(b) < \exp^{[k+2]}(q)$, para cada $k \geq 1$. Assim,

$$\left| f(\xi) - \frac{a}{b} \right| = \left| f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| < \frac{3}{2} \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\exp^{[k]}(b)}.$$

Portanto, $f(\xi) \in \mathbb{L}_{\text{ultra}}$, para cada $\xi \in \mathbb{L}_{\text{ultra}}$.

Observe que o Problema 1.33 surge naturalmente a partir dessa demonstração. De fato, suponha que para algum $\nu > 0$, existe uma função $f(z)$ inteira transcendente tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\operatorname{den}(f(p/q)) \ll q^{\nu}$, para todo q suficientemente grande. Então, dados ξ e uma sequência infinita de racionais $(p_j/q_j)_{j\geq 1}$ tal que $q_j > 1$ e

$$0 < \left| \xi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j},$$

para todo $j \geq 1$, denotamos por $f(p_j/q_j) = a_j/b_j$ e procedendo de maneira análoga à demonstração anterior, obtemos, para todo $j \geq 1$,

$$\left| f(\xi) - \frac{a_j}{b_j} \right| = \left| f(\xi) - f\left(\frac{p_j}{q_j}\right) \right| \ll \frac{1}{q_j^j} \ll \frac{1}{b_j^{j/\nu}},$$

para todo q suficientemente grande, que implica $f(\xi) \in \mathbb{L}$.

Isso mostra que, se existe uma função f inteira transcendente tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\operatorname{den}(f(p/q)) \ll q^{\nu}$, para todo q suficientemente grande (isto é, se a resposta para o Problema 1.33 for "sim"), então f é tal que $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ (isto é, a resposta para o Problema 1.30 de Mahler também será "sim").

O primeiro resultado deste trabalho mostra que a resposta para o Problema 1.33 é "não" para funções inteiras tais que suas séries de potências são lacunárias e seus coeficientes são racionais.

2.3 Um resultado relacionado a séries de potências lacunárias

Observe que, no ambiente das funções transcendentes, as séries de potências lacunárias podem ser vistas como análogas de certos números de Liouville, no sentido em que elas apresentam blocos cada vez maiores de zeros em sua representação. Em vista disso, essas funções poderiam ser vistas como candidatas naturais a resolver o Problema 1.30, de Mahler. Por esse motivo, buscamos averiguar se essas funções resolveriam o Problema 1.33 e, consequentemente, o Problema 1.30. Isto posto, apresentaremos o primeiro resultado principal deste trabalho.

No contexto do Problema 1.33, em [26] obtemos o seguinte resultado.

Teorema A. *Se ν é um número real positivo, então não existe função inteira com série de potências lacunária $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\operatorname{den}(f(p/q)) \ll q^{\nu}$, para todo q suficientemente grande.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que, para algum $\nu > 0$, existe uma tal função, digamos

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Sejam $(t_n)_n$ e $(s_n)_n$ as sequências definindo as lacunas dessa série de potências lacunária (de acordo com a Definição 2.4). Em particular, existe um inteiro positivo N tal que $t_N - s_N > \nu + 1$.

Defina

$$f_N(z) = \sum_{k=0}^{s_N} a_k z^k.$$

Afirmamos que $f_N(1/q) \neq f(1/q)$ para infinitos $q \geq 2$.

De fato, suponha o contrário, então, $f\left(1/q\right) - f_N\left(1/q\right) = 0$, para todo q suficientemente grande. Assim,

$$0 = q^{t_N}\left(f\left(1/q\right) - f_N\left(1/q\right)\right) = a_{t_N} + \frac{a_{t_{N+1}}}{q} + \frac{a_{t_{N+2}}}{q^2} + \cdots,$$

para todo q suficientemente grande. Logo,

$$-a_{t_N} = \frac{a_{t_{N+1}}}{q} + \frac{a_{t_{N+2}}}{q^2} + \cdots = \sum_{k\geq 1} a_{t_N+k}\left(1/q\right)^k.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{k\geq 1} a_{t_N+k}\left(1/q\right)^k = 0.$$

Com esse objetivo, definimos

$$g(z) = \sum_{k\geq 1} a_{t_N+k} z^k$$

e provamos a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO 1: $\lim_{z\longrightarrow 0} g(z) = 0.$

Note que

$$g(z) = \frac{f(z) - f_N(z)}{z^{t_N}} - a_{t_N},$$

que é uma função inteira. Em particular, a série

$$\sum_{k\geq 1} a_{t_N+k} z^k$$

converge uniformemente em $\overline{B(0,1)}$. Consequentemente,

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \sum_{k\geq 1} a_{t_N+k} z^k = \sum_{k\geq 1} a_{t_N+k} 0^k = 0.$$

A *Afirmação 1* está provada.

Segue que

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{k\geq 1} a_{t_N+k}\left(1/q\right)^k = \lim_{q\to\infty} g\left(1/q\right) = \lim_{z\to 0} g(z) = 0.$$

Em particular, $-a_{t_N} = 0$, que é uma contradição. Portanto, $f_N\left(1/q\right) \neq f\left(1/q\right)$ para infinitos $q \geq 2$.

Seja q um tal inteiro. Note que,

$$f_N\left(1/q\right) = \frac{A_{N,q}}{c \cdot q^{s_N}} \in \mathbb{Q},$$

onde $c = \mathrm{den}(a_0) \cdot \mathrm{den}(a_1) \cdots \mathrm{den}(a_{s_N})$ e $A_{N,q} \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Como $f\left(1/q\right)$ é um número racional,

$$|f\left(1/q\right) - f_N\left(1/q\right)| \geq \frac{1}{c \cdot \mathrm{den}\left(f\left(1/q\right)\right) \cdot q^{s_N}}. \tag{2.1}$$

Por outro lado, como $q \geq 2$ e a sequência (a_n) é limitada (pois, f é inteira), temos

$$|f\left(1/q\right) - f_N\left(1/q\right)| \leq \frac{1}{q^{t_N}}\left(|a_{t_N}| + \frac{|a_{t_{N+1}}|}{q} + \frac{|a_{t_{N+2}}|}{q^2} \cdots\right) \leq \frac{M}{q^{t_N}}, \tag{2.2}$$

para alguma constante $M > 0$.

Combinando (2.1), (2.2) e usando a suposição sobre f, temos

$$\frac{1}{c \cdot \mathrm{den}\left(f\left(1/q\right)\right) \cdot q^{s_N}} \leq \frac{1}{q^{t_N}},$$

para infinitos q.

Em particular, $q^{t_N - s_N} \ll \mathrm{den}(f\left(1/q\right))$ para infinitos q. Como N foi escolhido de modo que $q^{t_N - s_N} > q^{\nu+1}$ e $\mathrm{den}(f\left(1/q\right)) \ll q^{\nu}$, concluímos que $q^{\nu+1} \ll q^{\nu}$, para infinitos $q \geq 2$, que é uma contradição.

□

Na próxima seção, veremos que, através de uma demonstração similar, podemos solucionar o Problema 1.33 para $\nu < 1$.

2.4 Solução do Problema 1.33 para $\nu < 1$

Dizemos que a função real $\varphi(x)$ é tal que $\varphi(x) = o(x)$, se

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0.$$

Teorema B. *Não existe uma função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\mathrm{den}\left(f\left(p/q\right)\right) = o(q)$.*

Demonstração. Suponha que tal função existe, digamos

$$f(z)=\sum_{k\geq 0}a_kz^k\in\mathbb{Q}[[z]].$$

Tome

$$f_N(z)=\sum_{k=0}^{N}a_kz^k,$$

tal que $a_{N+1}\neq 0$. Como na demonstração do Teorema A podemos mostrar que,

$$\sum_{k\geq N+1}a_kz^k=f\left(1/q\right)-f_N\left(1/q\right)\neq 0$$

para todo q suficientemente grande (sem perda de generalidade) e, assim,

$$\left|f\left(1/q\right)-f_N\left(1/q\right)\right|\gg\frac{1}{\mathrm{den}(f(1/q))\cdot q^N}. \tag{2.3}$$

Além disso,

$$\left|f\left(1/q\right)-f_N\left(1/q\right)\right| \;\leq\; \frac{1}{q^{N+1}}\left(|a_{N+1}|+\frac{|a_{N+2}|}{q}+\frac{|a_{N+3}|}{q^2}+\cdots\right)\ll\frac{1}{q^{N+1}}.$$

Logo,

$$\frac{1}{\mathrm{den}(f(1/q))\cdot q^N}\ll\frac{1}{q^{N+1}}.$$

Assim,

$$q\ll\mathrm{den}(f(1/q))=o(q),$$

que é uma contradição.

□

Em particular, para quaisquer $\nu<1$ e $c>0$ dados, não existe função inteira transcendente $f(z)\in\mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$ e $\mathrm{den}(f(p/q))\leq c\cdot q^{\nu}$, para todo q suficientemente grande.

De fato,

$$\lim_{q\to\infty}c\cdot\frac{q^{\nu}}{q}=c\cdot\lim_{q\to\infty}q^{\nu-1}=0.$$

Ou seja, se $\nu<1$ e $c>0$, então $c\cdot q^{\nu}=o(q)$. Isso resolve o caso $\nu<1$, no Problema 1.33.

Para finalizar a primeira parte de nosso trabalho, apresentaremos um resultado relacionado a uma reformulação do Problema 1.33.

2.5 Uma reformulação do Problema 1.33 e um resultado relacionado

Vale ressaltar que o Teorema 2.10 mostra ainda que, se obtivermos uma resposta afirmativa para o problema abaixo, obteremos uma resposta afirmativa para o Problema 1.30 de Mahler.

Problema 2.11 *Existem funções inteiras transcendentes $f(z)$ tais que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e*

$$\mathrm{den}(f(p/q)) \leq F(q),$$

para algum polinômio fixado $F(z) \in \mathbb{Z}[z]$ e para todo q suficientemente grande?

Em uma tentativa de responder ao problema anterior, um problema natural surge: "*Existem funções inteiras transcendentes $f(z)$ tais que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e*

$$\mathrm{den}(f(p/q)) = F(q),$$

para algum polinômio fixado $F(z) \in \mathbb{Z}[z]$ e para todo q suficientemente grande?".

No contexto desse problema, em [28] obtemos o seguinte resultado.

Teorema C. *Não existe função inteira transcendente $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ e $\mathrm{den}(f(p/q)) = F(q)$, para todo q suficientemente grande, onde $F(z) \in \mathbb{Z}[z]$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que para algum $F(z) \in \mathbb{Z}[z]$, existe uma tal função, digamos

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Primeiramente, observe que o Teorema B garante que o polinômio $F(z) \in \mathbb{Z}[z]$ não pode ser constante, caso contrário teríamos $F(q) = o(q)$ e, consequentemente, $\mathrm{den}(f(p/q)) = o(q)$, que é uma contradição. Logo, podemos supor que F tem grau $m \geq 1$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}$ (caso contrário, basta multiplicar por $A = \mathrm{den}(a_0) \cdot \mathrm{den}(a_1) \cdots \mathrm{den}(a_{m-1})$).
Agora, observe que para todo q suficientemente grande, temos

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{q^k} \tag{2.4}$$

e

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{n(q)}{F(q)}, \tag{2.5}$$

onde $n(q) \in \mathbb{Z}$. Assim, (2.4) e (2.5) implicam

$$\frac{n(q)}{F(q)} = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{q^k} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{q^k} + \frac{a_m}{q^m} + \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k}{q^k} = \frac{C(q)}{q^{m-1}} + \frac{a_m}{q^m} + \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k}{q^k},$$

de modo que $C(q) \in \mathbb{Z}[z]$ e tem grau menor ou igual a $m-1$. Logo,

$$n(q) - \frac{C(q)F(q)}{q^{m-1}} \quad = \quad \frac{a_m F(q)}{q^m} + \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k F(q)}{q^k}.$$

Portanto,

$$n(q) - \frac{D(q)}{q^{m-1}} \quad = \quad \frac{a_m F(q)}{q^m} + \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k F(q)}{q^k}, \tag{2.6}$$

onde $D(z) \in \mathbb{Z}[z]$ tem grau menor ou igual a $2m-1$.

Note que, dividindo $D(q)$ por q^{m-1}, podemos escrever

$$D(q) = G(q)q^{m-1} + E(q), \tag{2.7}$$

onde $E, G \in \mathbb{Z}[z]$ são tais que:

- $E = 0$ ou o grau de E é menor ou igual a $m-2$ e
- o grau de G é menor ou igual a m.

Substituindo (2.7) em (2.6), obtemos:

$$n(q) - G(q) - \frac{E(q)}{q^{m-1}} \quad = \quad \frac{a_m F(q)}{q^m} + \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k F(q)}{q^k}, \tag{2.8}$$

que implica

$$n(q) - G(q) = \frac{E(q)}{q^{m-1}} + \frac{a_m F(q)}{q^m} + \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k F(q)}{q^k}. \tag{2.9}$$

Vamos analisar o que ocorre com cada uma dessas parcelas quando $q \to \infty$.

AFIRMAÇÃO 1: $\lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{E(q)}{q^{m-1}} = 0$.

Isso segue, pois $E = 0$ ou o grau de E é menor ou igual a $m - 2$.

AFIRMAÇÃO 2: $\lim_{q\to\infty} \frac{a_m F(q)}{q^m} = a_m\varepsilon$, *onde* ε *é o coeficiente líder de* F.

De fato, como o grau de F é igual a m, $\lim_{q\to\infty} \frac{F(q)}{q^m} = \varepsilon$. Portanto,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{a_m F(q)}{q^m} = a_m\varepsilon.$$

AFIRMAÇÃO 3: $\lim_{q\to\infty} \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k F(q)}{q^k} = 0.$

Tome $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \delta < 1/\varepsilon \leq 1$$

(pois ε deve ser um inteiro positivo, uma vez que $F(q) = \mathrm{den}(f(p/q))$ para q suficientemente grande). Então,

$$\delta^k \leq \delta < 1/\varepsilon,$$

para todo $k \geq m+1$. Logo, $\varepsilon < 1/\delta^k$, para todo $k \geq m+1$. Portanto,

$$\frac{q^k}{\delta^k} \geq \frac{q^{m+1}}{\delta^k} > qF(q),$$

para todo q suficientemente grande. Consequentemente,

$$\frac{|F(q)|}{q^k} = \frac{F(q)}{q^k} < \frac{1}{q\delta^k},$$

para todo q suficientemente grande. E, então,

$$\left|\sum_{k\geq m+1} \frac{a_k F(q)}{q^k}\right| \leq \sum_{k\geq m+1} \frac{|a_k||F(q)|}{q^k} \leq \frac{1}{q} \sum_{k\geq m+1} \frac{|a_k|}{\delta^k} = \frac{1}{q} \sum_{k\geq m+1} \left|\frac{a_k}{\delta^k}\right|.$$

Agora observe que

$$\sum_{k\geq m+1} \left|\frac{a_k}{\delta^k}\right| < \infty,$$

pois f é inteira. Além disso, essa série não depende de q . Logo,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{k\geq m+1} \left|\frac{a_k}{\delta^k}\right| = 0.$$

E, portanto,

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{k\geq m+1} \frac{a_k F(q)}{q^k} = 0.$$

Isso prova a validade da *Afirmação 3*.

Utilizando (2.9) e as afirmações 1, 2 e 3, obtemos:

$$\lim_{q\to\infty}[n(q) - G(q)] \quad = \quad \lim_{q\to\infty}\left[\frac{E(q)}{q^{m-1}} + \frac{a_m F(q)}{q^m} + \sum_{k\geq m+1}\frac{a_k F(q)}{q^k}\right] = a_m\varepsilon.$$

Portanto, para q suficientemente grande, vale

$$0 \leq |n(q) - G(q)| \leq |a_m|\varepsilon + 1.$$

Assim, existem $t \in \mathbb{Z}$ e um conjunto infinito $S \subseteq \mathbb{N}$, tais que, para cada $q \in S$,

$$n(q) - G(q) = t.$$

Logo, para $q \in S$, temos

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{n(q)}{F(q)} = \frac{G(q)+t}{F(q)} = \frac{e_0 + e_1 q + \cdots + e_n q^m}{d_0 + d_1 q + \cdots + d_m q^m}, \tag{2.10}$$

onde $e_i, d_i \in \mathbb{Z}$.

Sejam

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{m} d_i z^{m-i}$$

e

$$P(z) = \sum_{i=0}^{m} e_i z^{m-i}.$$

Observe que $Q(0) = d_m = \varepsilon \neq 0$,

$$Q\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q^m}(d_0 + d_1 q + \cdots + d_m q^m)$$

e

$$P\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q^m}(e_0 + e_1 q + \cdots + e_m q^m).$$

Considere $r > 0$, tal que

$$r < \min\{|z| : Q(z) = 0\}.$$

Então, a função

$$h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

é analítica em $B(0,r)$. Além disso, por (2.10), temos que as funções analíticas $f(z)$ e $h(z)$ coincidem no conjunto

$$\left\{\frac{1}{q} : q \in S \cap (1/r, \infty)\right\} \subseteq B(0,r),$$

que tem ponto de acumulação em $B(0,r)$. Portanto, pelo princípio da continuação analítica, temos $f(z) = h(z)$ em $B(0,r)$.

Em particular, as funções inteiras $Q(z)f(z)$ e $P(z)$ coincidem em $B(0,r)$ e, pelo mesmo princípio, coincidem em cada $z \in \mathbb{C}$.

Consequentemente, a função $f(z)$ satisfaz $P(z, f(z)) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $P(x,y) = Q(x)y - P(x)$, que é um polinômio não nulo. O que contradiz a transcendência de f. Isso completa a prova.

$\square$

No próximo capítulo, veremos um resultado na direção de outro problema proposto por Mahler, para o qual faremos uma prova por um viés mais construtivo, com o intuito de mostrar a existência de funções transcendentes satisfazendo certas condições.

Capítulo 3

Um Resultado Relacionado ao Problema C de Mahler

Neste capítulo, apresentaremos um resultado que, dentre outras consequências, implica uma versão para séries com coeficientes inteiros dos teoremas de Faber, Stäckel e de um problema proposto por Mahler.

3.1 Conjuntos excepcionais e o Problema C de Mahler

Primeiramente, apresentaremos o Teorema de Hermite-Lindemann e algumas de suas consequências.

Teorema 3.1 (Hermite-Lindemann) *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.*

Demontração. Ver [19, p.165].

□

Dado um número algébrico não nulo α, podemos fazer $m = 2$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha$. Desse modo, α_1 e α_2 satisfazem as hipóteses do Teorema de Hermite-Lindemann e, obtemos o seguinte caso particular que é conhecido como Teorema de Lindemann.

Corolário 3.2 *Se α é algébrico não nulo, então e^{α} é transcendente.*

Utilizando a Identidade de Euler, a saber $e^{i\pi} + 1 = 0$, vemos que o Teorema de Hermite-Lindemann também implica na transcendência do número π. A seguinte proposição enfatiza outras consequências importantes desse teorema.

Proposição 3.3 *Os seguintes números são transcendentes:*

(i) $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \sinh\alpha, \cosh\alpha, \tanh\alpha$, *para todo* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0\}$*;*

(ii) $\log\alpha, \operatorname{arcsen}\alpha$, *e em geral as funções inversas do item (i), para todo* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Demonstração. Ver [19, p. 108]

□

Observe que as funções da proposição anterior são transcendentes, bem como a imagem em todos os pontos algébricos, exceto possivelmente em $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Isso nos direciona ao seguinte questionamento:

Com exceção de apenas "alguns" pontos, uma função analítica transcendente sempre assume valores transcendentes em pontos algébricos?

Por exemplo, quando consideramos a função exponencial e^z, o ponto $z = 0$ seria essa "exceção". É claro que o Teorema de Hermite-Lindemann dá um indício de que ao avaliarmos uma função transcendente em um ponto algébrico de seu domínio, encontraremos um número transcendente, ao passo em que podem existir algumas exceções. Todas essas exceções constituem o chamado **conjunto excepcional**, denotado por S_f. Em outras palavras, dada uma função f analítica em $B(0, r_f)$, onde $0 < r_f \leq \infty$ é o seu raio de convergência, definimos:

$$S_f = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0, r_f) : f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

Em 1886, Strauss tentou provar que uma função f analítica e transcendente não pode assumir valores racionais em todos os pontos racionais de seu círculo de convergência. No entanto, Weierstrass forneceu um contraexemplo e também afirmou que existem funções inteiras transcendentes que assumem valores algébricos em todos os pontos algébricos. Essa afirmação foi provada por Stäckel (ver [31]), que estabeleceu o seguinte teorema mais geral.

Teorema 3.4 (Stäckel, 1895) *Sejam Σ um conjunto enumerável e T um conjunto denso no plano complexo. Então, existe um função inteira e transcendente $f(z)$ tal que $f(\Sigma) \subseteq T$.*

Observação 3.5

- *Quando $\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$, obtemos a afirmação de Weierstrass.*
- *Se o conjunto dos números de Liouville fosse enumerável, o Teorema de Stäckel poderia ser utilizado para resolver o Problema 1.30 de Mahler. De fato, segundo Mahler [16] "a dificuldade desse problema consiste, é claro, no fato de que o conjunto de todos os números de Liouville é não enumerável".*

Mais tarde, Faber [4] provou o seguinte resultado.

Teorema 3.6 (Faber, 1904) *Existe uma função inteira transcendente*

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h z^h$$

com coeficientes racionais tal que $f(z)$ e todas as suas derivadas assumem valores algébricos em todos os pontos algébricos.

Assim, esse teorema garante que existem funções inteiras transcendentes tais que $S_{f^{(t)}} = \overline{\mathbb{Q}}$, para todo $t \geq 0$.

Em 2010, Huang, Marques e Mereb [6] mostraram que qualquer subconjunto de números algébricos é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes. De fato, eles estabeleceram o seguinte resultado.

Teorema 3.7 (Huang, Marques, Mereb) *Seja $A \subseteq \mathbb{C}$ enumerável. Defina, para cada $s \geq 0$ e para cada $\alpha \in A$, um conjunto denso $E_{(\alpha,s)} \subseteq \mathbb{C}$. Então, existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes f tais que $f^{(s)}(\alpha) \in E_{(\alpha,s)}$, para todo $\alpha \in A$ e $s \geq 0$.*

No entanto, a única informação com relação à natureza aritmética dos coeficientes da série de Taylor de f obtida nessa construção é que, no máximo, eles devem estar em $\mathbb{Q}[i]$.

No Capítulo 3 do livro *Lectures on Transcendental Numbers*, Mahler [15] definiu, para cada $0 < r \leq \infty$, o conjunto T_r de todas as séries de potências transcendentes, com coeficientes racionais, que têm raio de convergência igual a r. Além disso, considerando $S \subseteq B(0,r) \cap \overline{\mathbb{Q}}$, ele propôs o seguinte problema:

Problema C. *Existe para cada escolha de S uma série f em T_r que assume valores algébricos em todos os pontos de S e em nenhum outro ponto algébrico?*

Em seguida, Malher apresentou um resultado provado por ele em [14] que garante uma resposta afirmativa para esse problema, quando S é fechado para conjugação algébrica em $B(0,r)$ (isto é, se $\alpha \in S$ e $\alpha' \in B(0,r)$ é um conjugado algébrico de α, então $\alpha' \in S$).

Observe que, para qualquer função $f \in T_r$ temos que $f(0) \in \mathbb{Q}$ e, para qualquer $\alpha \in B(0,r)$, $\overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$. Logo, "$S$ ser fechado para conjugação complexa" e "$0 \in S$" são condições necessárias para que o Problema C de Mahler possa ter resposta afirmativa.

Nessas condições, Marques e Ramirez [24] mostraram que esse problema tem resposta afirmativa para $r = \infty$. Mais recentemente, Marques e Moreira [20] resolveram completamente esse problema provando que, dado $0 < r \leq \infty$, qualquer subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,r)$, que é fechado para conjugação complexa e que contém o elemento 0, é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentes com coeficientes racionais e raio de convergência r.

Outro tipo de problema surge quando exigimos que os coeficientes sejam inteiros. Segundo Marques e Moreira [23], a questão para coeficientes inteiros é consideravelmente mais difícil, uma vez que $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{R}$.

Mahler [14] chegou a estudar o comportamento aritmético de funções transcendentes com coeficientes inteiros. De fato, ele provou que todo conjunto $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$, que é fechado para conjugação algébrica e tal que $0 \in S$, é excepcional de alguma função transcendente em $\mathbb{Z}\{z\}$ (onde $\mathbb{Z}\{z\}$ denota o **conjunto das séries de potências com coeficientes inteiros** e que são **analíticas** em $B(0,1)$).

Observação 3.8 *Lembre-se que o Teorema 2.2 implica que o conjunto das funções algébricas em $\mathbb{Z}\{z\}$ é enumerável.*

Definindo o conjunto excepcional de uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$, como

$$S_f = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1) : f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\},$$

Marques e Moreira [23] resolveram a seguinte versão do Problema C de Mahler.

Problema C para funções em $\mathbb{Z}\{z\}$. *Existe para qualquer $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ (fechado para conjugação complexa e tal que $0 \in S$) uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ para a qual $S_f = S$?*

Mais especificamente eles provaram que

Teorema 3.9 (Marques, Moreira) *Seja $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ fechado para conjugação complexa, com $0 \in S$. Então, existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes em $\mathbb{Z}\{z\}$ tais que $S_f = S$.*

Na proxima seção veremos o Teorema D, que será provado na Seção 3.4 e teve sua construção baseada na demonstração desse teorema de Marques e Moreira.

3.2 O Teorema D e algumas consequências

Teorema D. *Seja $A \subseteq B(0,1)\backslash\{0\}$ enumerável e fechado para conjugação complexa. Defina, para cada $s \geq 0$ e para cada $\alpha \in A$, um conjunto $E_{(\alpha,s)} \subseteq \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $E_{(\alpha,s)}$ *é denso em* $\mathbb{C}$;

(ii) $E_{(\alpha,s)} \cap \mathbb{R}$ *é denso em* $\mathbb{R}$;

(iii) $E_{(\alpha,s)}$ *é fechado para a conjugação complexa;*

(iv) $E_{(\overline{\alpha},s)} = E_{(\alpha,s)}$.

Então, existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que $f^{(s)}(\alpha) \in E_{(\alpha,s)}$, para cada $\alpha \in A$ e cada $s \geq 0$.

A demonstração desse resultado será apresentada na Seção 3.4.

Veremos que, embora nossa construção tenha sido feita com a hipótese

$$A \subseteq B(0,1)\backslash\{0\},$$

a função obtida é tal que

$$f^{(s)}(0) \in s!\mathbb{Z},$$

para cada $s \geq 0$, uma vez que $f \in \mathbb{Z}\{z\}$. Em vista disso, podemos obter a seguinte reformulação do Teorema D para o caso em que $0 \in A$.

Teorema E. *Seja $A \subseteq B(0,1)$ enumerável, com $0 \in A$, e fechado para conjugação complexa. Defina, para cada $s \geq 0$ e para cada $\alpha \in A$, um conjunto $E_{(\alpha,s)} \subseteq \mathbb{C}$, de modo que $s!\mathbb{Z} \subseteq E_{(0,s)}$ e, para $\alpha \neq 0$,*

(i) $E_{(\alpha,s)}$ *é denso em* $\mathbb{C}$*;*

(ii) $E_{(\alpha,s)} \cap \mathbb{R}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*;*

(iii) $E_{(\alpha,s)}$ *é fechado para a conjugação complexa;*

(iv) $E_{(\overline{\alpha},s)} = E_{(\alpha,s)}$.

Então, existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que $f^{(s)}(\alpha) \in E_{(\alpha,s)}$, para cada $\alpha \in A$ e cada $s \geq 0$.

Fazendo $A = \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ e $E_{(\alpha,s)} = \mathbb{Q}(i)$, para cada $\alpha \in A$, no Teorema E, obtemos seguinte versão do Teorema de Faber para funções em $\mathbb{Z}\{z\}$.

Corolário 3.10 (Versão do Teorema de Faber para funções em $\mathbb{Z}\{z\}$) *Existe uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que*

$$f^{(s)}(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \mathbb{Q}(i),$$

para cada $s \geq 0$.

Veremos que em nossa construção os coeficientes não são *a priori* limitados. Na verdade, o Problema A de Mahler [15] questiona exatamente *a existência funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com coeficientes limitados tais que*

$$f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}.$$

Vale ressaltar que esse ainda é um problema em aberto.

Outra consequência dos Teoremas D e E é a seguinte versão do Teorema de Stäckel para funções em $\mathbb{Z}\{z\}$ (enfatizamos que não existe qualquer informação com relação aos coeficientes das funções na construção original de Stäckel).

Corolário 3.11 (Versão do Teorema de Stäckel para funções em $\mathbb{Z}\{z\}$) *Seja $\Sigma \subseteq B(0,1)$ um conjunto enumerável e seja T um subconjunto denso de $\mathbb{C}$, ambos fechados para conjugação complexa*[1]*. Suponha que se $0 \in \Sigma$, então $\mathbb{Z} \subseteq T$. Então, existe uma função transcendente $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que $f^{(s)}(\Sigma) \subseteq T$, para cada $s \geq 0$.*

Por fim, veremos que os teoremas D e E implicam em uma generalização do Teorema 3.9 provado por Marques e Moreira e, consequentemente, uma resposta afirmativa para o Problema C de Mahler para funções em $\mathbb{Z}\{z\}$.

Corolário 3.12 *Se $S \subseteq \overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)$ é fechado para conjugação complexa e $0 \in S$. Então, existe uma quantidade não enumerável de funções transcendentes em $\mathbb{Z}\{z\}$ tais que $S_{f^{(t)}} = S$, para cada $t \geq 0$.*

Demonstração. De fato, seja S um tal conjunto. Defina, para cada $t \geq 0$ e, para cada $\alpha \in S$,

$$\begin{cases} E_{(\alpha,t)} = \overline{\mathbb{Q}}, \text{ se } \alpha \in S; \\ E_{(\alpha,t)} = \mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{Q}}, \text{ se } \alpha \in S^c \cap \overline{\mathbb{Q}}. \end{cases} \tag{3.1}$$

□

Na próxima seção, veremos alguns lemas importantes para a demonstração do Teorema D.

3.3 Lemas auxiliares

Nossa construção para a demonstração do Teorema D foi baseada na construção de Marques e Moreira em [23]. Inicialmente, vejamos o Lema de Harbater.

[1]Enfatizamos que essa hipótese é importante, pois desejamos obter funções analíticas em $B(0,1)$ com coeficientes inteiros, em particular, reais.

Lema 3.13 (Harbater, 1984) *Seja r um número real positivo menor do que 1 e seja λ um número complexo não-nulo de valor absoluto no máximo r. Então, existe uma função $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que*

(i) $f(0) = 1$;

(ii) f *se anula com ordem* 1 *em* λ *e em seu conjugado complexo;*

(iii) f *não se anula em nenhum outro ponto* $z \in \overline{B(0,r)}$.

Demonstração. Ver [5, p. 810].

□

O próximo lema é um caso particular do Lema 3.13 de Harbater, que apareceu em [23], mas aqui também estamos interessados no fato de que $f'(\alpha)$ não se anule. *A posteriori* veremos que esse fato tem grande utilidade em nossa construção.

Lema 3.14 *Sejam $\alpha, \beta \in B(0,1)$, com $\beta \notin \{\alpha, \overline{\alpha}\}$. Então, existe uma função $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que*

(i) f *se anula com ordem* 1 *em* α *e em seu conjugado complexo;*

(ii) $f(\beta) \neq 0$.

Além disso, existe uma constante $C > 1$ dependendo de α e β tal que

$$|f(z)| \leq \frac{C}{1 - |z|},$$

para todo $z \in B(0,1)$.

Demonstração. Tome

$$r = \frac{\max\{|\alpha|, |\beta|\} + 1}{2}$$

e $\lambda = \alpha$ no Lema 3.14 de Harbater.

Isso implica na existência de uma função $f \in \mathbb{Z}\{z\}$, com $f(0) = 1$ tal que os únicos zeros de f na bola $B(0,r)$ são α e $\overline{\alpha}$ (e se anula com ordem 1 nesses pontos).

Como $\beta \in B(0,r)$, então $f(\beta) \neq 0$. A construção de Harbater fornece uma função da forma

$$f(z) = f_s(z)(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots),$$

onde $f_s(z)$ é um polinômio com coeficientes dependendo de α e $\overline{\alpha}$, de modo que $f_s(0) = 1$, e $|b_i| \leq 1/2$. Portanto, os coeficientes de f são limitados por $L(f_s)/2$ (onde $L(f)$ denota o *comprimento*[2] do polinômio f) e $L(f_s)$ depende somente de α, $\overline{\alpha}$ e

$$s = \left\lfloor \frac{\log(2(1-r))}{\log r} \right\rfloor + 1.$$

Isso nos fornece o limitante desejado.

□

Para o próximo lema não é possível utilizar o Lema 3.14 diretamente, uma vez que o conjunto A pode ter ponto de acumulação em $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Lema 3.15 *Seja $A \subseteq B(0,1)\backslash\{0\}$ enumerável e fechado para conjugação complexa e seja $\alpha \in A$. Então, existe uma função $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que*

(i) $f(0) = 1$*;*

(ii) $f(z) = 0$ *para* $z \in A$ *se, e somente se,* $z \in \{\alpha, \overline{\alpha}\}$*;*

(iii) $f'(\alpha) \neq 0$.

Além disso, existe uma constante positiva C, tal que

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)^4},$$

para todo $z \in B(0,1)$.

Demonstração. Escreva $(A \cup \{0\})\backslash\{\alpha, \overline{\alpha}\} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\} \cup \{\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}, \ldots\}$, com

$$\begin{cases} \beta_1 = \overline{\beta_1} = 0; \\ \beta_i \notin \{\beta_j, \overline{\beta_j}\}, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Pelo Lema 3.14, para todo $j \geq 1$, existe uma função $f_j \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que

$$\begin{cases} f_j(0) = 1; \\ f_j(\alpha) = 0; \\ f_j'(\alpha) \neq 0; \\ f_j(\beta_j) \neq 0. \end{cases}$$

[2]O **comprimento** de um polinômio é definido como a soma dos valores absolutos de seus coeficientes.

Existe uma constante $C_j > 1$ tal que

$$|f_j(z)| \leq \frac{C_j}{1-|z|},$$

para todo $z \in B(0,1)$.

A função f será definida por

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{k \geq 2} z^{t_k}(f_k(z))^2,$$

onde $(t_k)_k$ é uma sequência crescente de números naturais a ser escolhida posteriormente, satisfazendo:

$$\begin{cases} t_1 = 0; \\ t_k \geq {C_k}^2 + k, \text{ para todo } k \geq 2. \end{cases}$$

AFIRMAÇÃO 1: $f(0) = 1$.

De fato, $f_1(0) = 1$ implica

$$f(0) = f_1(0) + \sum_{k \geq 2} 0^{t_k}(f_k(0))^2 = f_1(0) = 1.$$

AFIRMAÇÃO 2: $f(\alpha) = f(\overline{\alpha}) = 0$.

De fato, $f_j(\alpha) = 0$, para todo $j \geq 1$, implica

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) + \sum_{k \geq 2} \alpha^{t_k}(f_k(\alpha))^2 = 0.$$

Analogamente, $f(\overline{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} = 0$.

AFIRMAÇÃO 3: $f'(\alpha) \neq 0$.

De fato,

$$f'(\alpha) = f_1'(\alpha) + \sum_{k \geq 2} t_k \alpha^{t_k - 1}(f_k(\alpha))^2 + \sum_{k \geq 2} \alpha^{t_k} 2 f_k(\alpha) f_k'(\alpha) = f_1'(\alpha) \neq 0.$$

AFIRMAÇÃO 4: Existe uma constante positiva C tal que

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)^4},$$

para todo $z \in B(0,1)$.

A prova desta afirmação será dividida em dois casos.

Caso 1: $z = 0$

Neste caso, considere $\tilde{C}_1 = 2$. Assim, $|f(0)| = 1 < 2 = \tilde{C}_1/(1-|0|)^4$.

Caso 2: $0 < |z| < 1$

Neste caso, a função $x \mapsto x|z|^x$ tem máximo em $x = 1/|\log|z||$. Em particular,

$$C_k{}^2|z|^{C_k{}^2} \leq \frac{1}{|\log|z||}\cdot|z|^{\frac{1}{|\log|z||}} = \frac{1}{|\log|z||}\cdot e^{|\log|z||^{-1}\cdot\log|z|} = \frac{1}{|\log|z||}\cdot e^{-|\log|z||^{-1}\cdot|\log|z||},$$

em que utilizamos $|\log|z|| = -\log|z|$, para $0 < |z| < 1$, na última igualdade.

Segue que

$$C_k{}^2|z|^{C_k{}^2} \;\leq\; \frac{1}{|\log|z||}\cdot e^{-1}. \tag{3.2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq |f_1(z)| + \sum_{k\geq 2}|z|^{t_k}\cdot|f_k(z)|^2 \\
&\leq \frac{C_1}{1-|z|} + \sum_{k\geq 2}|z|^{C_k^2+k}\cdot\frac{C_k^2}{(1-|z|)^2} \\
&= \frac{C_1}{1-|z|} + \sum_{k\geq 2}C_k^2|z|^{C_k^2}\cdot|z|^k\cdot\frac{1}{(1-|z|)^2}.
\end{aligned}$$

De (3.2), segue que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{C_1}{1-|z|} + \sum_{k\geq 2}\frac{1}{|\log|z||}\cdot e^{-1}\cdot|z|^k\cdot\frac{1}{(1-|z|)^2} \\
&\leq \frac{C_1}{1-|z|} + \frac{(|\log|z||\cdot e)^{-1}}{(1-|z|)^2}\cdot\sum_{k\geq 0}|z|^k \\
&\leq \frac{C_1}{1-|z|} + \frac{1}{|\log|z||\cdot e\cdot(1-|z|)^2}\cdot\frac{1}{1-|z|} \\
&= \frac{1}{1-|z|}\cdot\left(C_1 + \frac{1}{|\log|z||\cdot e\cdot(1-|z|)^2}\right).
\end{aligned}$$

Agora, observe que a função $x \mapsto x - \log x - 1$, definida para todo $x > 0$, tem mínimo em $x = 1$. Em particular, para $0 < |z| < 1$, temos $|z| - \log|z| - 1 \geq 0$, que implica

$$|\log|z|| \geq 1 - |z|. \tag{3.3}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \left(C_1 + \frac{1}{(1-|z|)^3} \right) \\
&= \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{C_1 \cdot (1-|z|)^3 + 1}{(1-|z|)^3} \\
&\leq \frac{1}{1-|z|} \cdot \frac{C_1 + 1}{(1-|z|)^3}.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos definir $\tilde{C}_2 = C_1 + 1/e > 1$. Assim,

$$
|f(z)| \leq \frac{\tilde{C}_2}{(1-|z|)^4},
$$

para $0 < |z| < 1$.

Definindo $C = \max\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}$, obtemos

$$
|f(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)^4},
$$

para todo $z \in B(0,1)$. E a *Afirmação 4* está provada.

AFIRMAÇÃO 5: $f(\beta_k) \neq 0$, para cada $k \geq 1$.

Inicialmente, considere a sequência $(\hat{\mathrm{t}}_k)_k$ dada por $\hat{\mathrm{t}}_1 = 0$ e, para $k > 1$,

$$
\hat{\mathrm{t}}_k = \max\left\{ C_k^2 + k \ , \ \hat{\mathrm{t}}_{k-1} + \frac{(k\log 2 + \log C_k^2) + \max_{1<r\leq k} |\log |C_r^{-2}(f_r(\beta_r))^2(1-|\beta_r|)^2||}{\min_{1<r\leq k} |\log|\beta_r||} \right\}.
$$

Essa sequência $(\hat{\mathrm{t}}_k)_k$ é crescente e satisfaz, para $k > n > 1$,

$$
\hat{\mathrm{t}}_k - \hat{\mathrm{t}}_n \geq \hat{\mathrm{t}}_k - \hat{\mathrm{t}}_{k-1} \geq \frac{(k\log 2 + \log C_k^2) + |\log|C_n^{-2}(f_n(\beta_n))^2(1-|\beta_n|)^2||}{|\log|\beta_n||}.
$$

Isto é, para cada $k > n > 1$, temos

$$
\hat{\mathrm{t}}_k - \hat{\mathrm{t}}_n \geq -\frac{\log(2^k C_k^2)}{\log|\beta_n|} - \frac{|\log|C_n^{-2}(f_n(\beta_n))^2(1-|\beta_n|)^2||}{\log|\beta_n|}. \tag{3.4}
$$

O Lema 3.14 implica que $|C_n^{-2}(f_n(\beta_n))^2(1-|\beta_n|)^2| \leq 1$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathrm{t}}_k - \hat{\mathrm{t}}_n &\geq -\frac{\log(2^k C_k^2)}{\log|\beta_n|} + \frac{\log|C_n^{-2}(f_n(\beta_n))^2(1-|\beta_n|)^2|}{\log|\beta_n|} \\
&\geq \log_{|\beta_n|}^{(2^{-k}C_k^{-2})} + \log_{|\beta_n|}^{|C_n^{-2}(f_n(\beta_n))^2(1-|\beta_n|)^2|}.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$
|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_k - \hat{\mathrm{t}}_n} \leq 2^{-k} C_k^{-2} C_n^{-2} |(f_n(\beta_n))|^2 (1-|\beta_n|)^2.
$$

E, como $C_n > 1$,

$$|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_k-\hat{\mathrm{t}}_n} \;\leq\; 2^{-k}C_k^{-2}|(f_n(\beta_n))|^2(1-|\beta_n|)^2,$$

que implica

$$|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_k}C_k^2(1-|\beta_n|)^{-2} \;\leq\; |\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_n}2^{-k}|(f_n(\beta_n))|^2. \tag{3.5}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.14, temos que

$$\left|\sum_{k\geq n+1}\beta_n^{\hat{\mathrm{t}}_k}(f_k(\beta_n))^2\right| \leq \sum_{k\geq n+1}|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_k}|f_k(\beta_n)|^2 \leq \sum_{k\geq n+1}|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_k}C_k^2(1-|\beta_n|)^{-2}.$$

E, utilizando (3.5), obtemos, para $k > n > 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k\geq n+1}\beta_n^{\hat{\mathrm{t}}_k}(f_k(\beta_n))^2\right| &\leq \sum_{k\geq n+1}|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_n}2^{-k}|(f_n(\beta_n))|^2 \\
&= |\beta|^{\hat{\mathrm{t}}_n}|(f_n(\beta_n))|^2\sum_{k\geq n+1}2^{-k} \\
&= 2^{-n}|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_n}|(f_n(\beta_n))|^2 \\
&\leq \frac{1}{4}|\beta_n|^{\hat{\mathrm{t}}_n}|f_n(\beta_n)|^2.
\end{aligned}$$

Agora, modificaremos, se necessário, a sequência $(\hat{\mathrm{t}}_k)_k$ de modo a obter uma sequência $(t_k)_k$ tal que, para qualquer $N \geq 2$,

$$\left|f_1(\beta_N)+\sum_{k=2}^{N}\beta_N^{t_k}(f_k(\beta_N))^2\right| > \frac{1}{2}|\beta_N|^{t_N}|f_N(\beta_N)|^2. \tag{3.6}$$

Tome inicialmente $t_n = \hat{\mathrm{t}}_n$ para todo $n \geq 1$. A construção da sequência $(t_k)_k$ será feita indutivamente de modo que no n-ésimo passo modificaremos seu n-ésimo termo e os termos subsequentes, mas não os anteriores.

CASO $N = 2$: Seja $t_n = \hat{\mathrm{t}}_n$, para todo $n \geq 1$. Se

$$\left|f_1(\beta_2)+\beta_2^{t_2}(f_2(\beta_2))^2\right| > \frac{1}{2}|\beta_2|^{t_2}|f_2(\beta_2)|^2, \tag{3.7}$$

não há o que fazer. Suponha então que a desigualdade (3.7) não é válida. Assim,

$$\left|f_1(\beta_2)+\beta_2^{t_2}(f_2(\beta_2))^2\right| \leq \frac{1}{2}|\beta_2|^{t_2}|f_2(\beta_2)|^2.$$

Logo,

$$\left|\beta_2^{t_2}(f_2(\beta_2))^2\right| - |f_1(\beta_2)| \leq \frac{1}{2}|\beta_2|^{t_2}|f_2(\beta_2)|^2,$$

que implica

$$|f_1(\beta_2)| \geq \frac{1}{2}|\beta_2|^{t_2}|f_2(\beta_2)|^2. \tag{3.8}$$

Agora, vamos redefinir a sequência $(t_k)_k$.

Seja ℓ o menor inteiro positivo tal que $|\beta_2|^\ell < 1/4$. Afirmamos que, se substituímos t_2 por $\tilde{t}_2 = t_2 + \ell$, então (3.7) vale. De fato, primeiro observe que

$$4|\beta_2|^{\tilde{t}_2}|f_2(\beta_2)|^2 = 4|\beta_2|^{t_2}|\beta_2|^\ell|f_2(\beta_2)|^2 < |\beta_2|^{t_2}|f_2(\beta_2)|^2. \tag{3.9}$$

E, portanto,

$$\begin{aligned}
\left|f_1(\beta_2) + \beta_2^{\tilde{t}_2}(f_2(\beta_2))^2\right| &\geq |f_1(\beta_2)| - |\beta_2^{\tilde{t}_2}(f_2(\beta_2))^2| \\
&\geq \frac{1}{2}|\beta_2|^{t_2}|f(\beta_2)|^2 - |\beta_2^{\tilde{t}_2}(f_2(\beta_2))^2| \\
&> 2|\beta_2^{\tilde{t}_2}(f_2(\beta_2))^2| - |\beta_2^{\tilde{t}_2}(f_2(\beta_2))^2| \\
&= |\beta_2^{\tilde{t}_2}(f_2(\beta_2))^2| \\
&> \frac{1}{2}|\beta_2^{\tilde{t}_2}(f_2(\beta_2))^2|,
\end{aligned}$$

em que utilizamos (3.8) e (3.9), na segunda e na terceira desigualdade, respectivamente. Além disso, utilizamos que $\beta_2 \neq 0$ e que a função f_2 foi escolhida de modo que $f_2(\beta_2) \neq 0$.

Isso prova a desigualdade (3.7).

Agora, substituímos t_m por $t_m + \ell$ para todo $m \geq 2$.

CASO $N > 2$: Suponha, por hipótese de indução, que (3.6) vale para todo $2 \leq j \leq N$.

Agora, precisamos escolher t_N.

Se (3.6) é válida, não há nada a fazer. Então, supondo o contrário, obtemos

$$\left|f_1(\beta_N) + \left(\sum_{k=2}^{N-1} \beta_N^{t_k}(f_k(\beta_N))^2\right) + \beta_N^{t_N}(f_N(\beta_N))^2\right| \leq \frac{1}{2}|\beta_N|^{t_N}|f_N(\beta_N)|^2.$$

Assim,

$$|\beta_N^{t_N}(f_N(\beta_N))^2| - \left|f_1(\beta_N) + \left(\sum_{k=2}^{N-1} \beta_N^{t_k}(f_k(\beta_N))^2\right)\right| \leq \frac{1}{2}|\beta_N|^{t_N}|f_N(\beta_N)|^2.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}|\beta_N|^{t_N}|f_N(\beta_N)|^2 \leq \left|f_1(\beta_N) + \left(\sum_{k=2}^{N-1} \beta_N^{t_k}(f_k(\beta_N))^2\right)\right|. \tag{3.10}$$

Seja ℓ o menor inteiro positivo tal que $|\beta_N|^\ell < \frac{1}{4}$. Devemos provar que, se substituímos t_N por $\tilde{\mathrm{t}}_N = t_N + \ell$, então (3.6) vale. De fato, primeiro observe que

$$4|\beta_N|^{\tilde{\mathrm{t}}_N}|f_N(\beta_N)|^2 = 4|\beta_N|^{t_N}|\beta_N|^\ell|f_N(\beta_N)|^2 < |\beta_N|^{t_N}|f_N(\beta_N)|^2. \tag{3.11}$$

E, portanto,

$$\begin{aligned}
\left|f_1(\beta_N) + \sum_{k=2}^{N-1} \beta_N^{t_k}(f_k(\beta_N))^2 + \beta_N^{\tilde{\mathrm{t}}_N}(f_N(\beta_N))^2\right| &\geq \left|f_1(\beta_N) + \sum_{k=2}^{N-1} \beta_N^{t_k}(f_k(\beta_N))^2\right| \\
&\quad -|\beta_N^{\tilde{\mathrm{t}}_N}(f_N(\beta_N))^2| \\
&\geq \frac{1}{2}|\beta_N|^{t_N}|f_N(\beta_N)|^2 - |\beta_N^{\tilde{\mathrm{t}}_N}(f_N(\beta_N))^2| \\
&> 2|\beta_N^{\tilde{\mathrm{t}}_N}(f_N(\beta_N))^2| - |\beta_N^{\tilde{\mathrm{t}}_N}(f_N(\beta_N))^2| \\
&> \frac{1}{2}|\beta_N|^{\tilde{\mathrm{t}}_N}|(f_N(\beta_N))|^2,
\end{aligned}$$

em que utilizamos (3.10) e (3.11), na segunda e na terceira desigualdade, respectivamente. Isso prova a desigualdade (3.6).

Agora, substitua t_m por $t_m + \ell$ para todo $m \geq N$, e repita este processo indutivamente, substituindo N por $N+1$ na construção acima.

Observe que, no final, obtemos a sequência $(t_k)_k$ que ainda satisfaz (3.4), e então, para todo $N > 1$,

$$\left|\sum_{k \geq N+1} \beta_N^{t_k}(f_k(\beta_N))^2\right| \leq \frac{1}{4}|\beta_N|^{t_N}|f_N(\beta_N)|^2. \tag{3.12}$$

Assim, temos pelas desigualdades em (3.6) e em (3.12),

$$\begin{aligned} |f(\beta_N)| &= \left| f_1(\beta_N) + \sum_{k=2}^{N} \beta_N^{t_k} (f_k(\beta_N))^2 + \sum_{k \geq N+1} \beta^{t_k} (f_k(\beta_N))^2 \right| \\ &\geq \left| f_1(\beta_N) + \sum_{k=2}^{N} \beta_N^{t_k} (f_k(\beta_N))^2 \right| - \left| \sum_{k \geq N+1} \beta^{t_k} (f_k(\beta_N))^2 \right| \\ &> \frac{1}{2} |\beta_N|^{t_N} |f_N(\beta_N)|^2 - \frac{1}{4} |\beta_N|^{t_N} |f_N(\beta_N)|^2 \\ &= \frac{1}{4} |\beta_N|^{t_N} |f_N(\beta_N)|^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, $|f(\beta_N)| > 0$ e, portanto, $f(\beta_N) \neq 0$, para todo $N > 1$.

□

O próximo lema é um resultado provado por Lekkerkerker, que também será utilizado fortemente em nossa construção.

Lema 3.16 (Lekkerkerker, 1949) *Sejam* $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ *pares de números complexos que satisfazem as seguintes condições:*

(i) Os números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *são todos distintos;*

(ii) $0 < |\alpha_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$*;*

(iii) Sempre que α_k *é real, então* β_k *é real;*

(iv) Quando α_k *não é real, existe um índice* l *tal que* α_l *e* β_l *são conjugados complexos de* α_k *e* β_k*, respectivamente.*

Então existe uma série de potências $g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} g_h z^h$ *com coeficientes inteiros limitados tais que* $g(\alpha_k) = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração. Ver [15, p. 56].

□

É importante enfatizar que o limitante dos coeficientes da série

$$g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} g_h z^h$$

do Lema 3.16 depende somente dos números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Veremos que o fato de não depender dos números $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ será importante para a nossa construção.

3.4 Prova do Teorema D

Seja $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots\}$, com $\alpha_i \notin \{\alpha_j, \overline{\alpha_j}\}$, se $i \neq j$.

A construção será feita indutivamente de modo que no n-ésimo passo construiremos as funções $f_{(n,0)}, \ldots, f_{(n,n-1)} \in \mathbb{Z}\{z\}$ tais que, para cada $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$\begin{cases} f^{(s)}_{(n,m)}(\alpha_n) \in E_{(\alpha_n,s)}, \text{ para } 0 \leq s \leq m; \\ f^{(s)}_{(n,m)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}, \text{ para } 1 \leq k \leq n-1 \text{ e } 0 \leq s \leq n-1. \end{cases} \tag{3.13}$$

Com esse objetivo, seguiremos os passos descritos abaixo:

Passo 1: Será construída a função $f_{(1,0)}$ de modo que

$$f_{(1,0)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,0)}.$$

Passo 2: Serão construídas as funções $f_{(2,0)}$ e $f_{(2,1)}$, satisfazendo:

- $f_{(2,0)}(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,0)}$;
  $f_{(2,0)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,0)}, f'_{(2,0)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,1)}$.
- $f_{(2,1)}(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,0)}, f'_{(2,1)}(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,1)}$;
  $f_{(2,1)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,0)}, f'_{(2,1)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,1)}$.

Passo 3: Serão construídas as funções $f_{(3,0)}$, $f_{(3,1)}$ e $f_{(3,2)}$ satisfazendo:

- $f_{(3,0)}(\alpha_3) \in E_{(\alpha_3,0)}$;
  $f^{(s)}_{(3,0)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}$, para $1 \leq k \leq 2$ e $0 \leq s \leq 2$.
- $f_{(3,1)}(\alpha_3) \in E_{(\alpha_3,0)}, f'_{(3,1)}(\alpha_3) \in E_{(\alpha_3,1)}$;
  $f^{(s)}_{(3,1)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}, 1 \leq k \leq 2$ e $0 \leq s \leq 2$.
- $f^{(s)}_{(3,2)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}, 1 \leq k \leq 3$ e $0 \leq s \leq 2$.

E assim por diante, de modo que, no *Passo* n sejam construídas as funções

$$f_{(n,0)} \ , \ f_{(n,1)} \ , \ \ldots \ , \ f_{(n,n-1)}$$

satisfazendo (3.13), para cada $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, Em particular,

$$\begin{cases} f_{(n+1,0)}(\alpha_{n+1}) \in E_{(\alpha_{n+1},0)}; \\ f^{(s)}_{(n+1,0)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}, \text{ para } 1 \leq k \leq n \text{ e } 0 \leq s \leq n. \end{cases}$$

Ao final, veremos que a função $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ tal que $f^{(s)}(\alpha) \in E_{(\alpha,s)}$, para cada $\alpha \in A$ e cada $s \geq 0$, será definida por $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_{(n+1,0)}(z)$.
Em nossa construção, considere, para cada $j \geq 1$, a função f_j como no Lema 3.15 , isto é, $f_j \in \mathbb{Z}\{z\}$ é tal que

(i) $f_j(0) = 1$;

(ii) $f_j(z) = 0$ para $z \in A$ se, e somente se, $z \in \{\alpha_j, \overline{\alpha_j}\}$;

(iii) $f'(z) \neq 0$, se $z \in \{\alpha_j, \overline{\alpha_j}\}$,

com

$$|f_j(z)| \leq \frac{C_j}{(1-|z|)^4},$$

para todo $z \in B(0,1)$.

Passo 1: Iniciamos nossa construção escolhendo $f_{(1,0)}$ com coeficientes inteiros limitados como no Lema 3.16, de modo que:

$$\begin{cases} f_{(1,0)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,0)}; \\ f_{(1,0)}(\overline{\alpha_1}) \in E_{(\overline{\alpha_1},0)}. \end{cases}$$

Passo 2: Agora, defina $f_{(2,0)}(z)$ como

$$f_{(2,0)} = f_{(1,0)}(z) + z^{t_1} f_1(z) g_1(z),$$

em que $t_1 \geq 1$ será escolhido posteriormente e g_1 é escolhida utilizando o Lema 3.16

$$f_{(1,0)}(\alpha_2) + \alpha_2^{t_1} f_1(\alpha_2) g_1(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,0)}.$$

e

$$f'_{(1,0)}(\alpha_1) + \alpha_1^{t_1} f'_1(\alpha_1) g_1(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,1)},$$

em que utilizamos que $f_1(\alpha_2) \neq 0$, $f'_1(\alpha_1) \neq 0$ e, *a priori*, a densidade de $E_{(\alpha_2,0)}$ e $E_{(\alpha_1,1)}$ em $\mathbb{C}$ (é claro que se $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, por exemplo, então, $f_{(1,0)}(\alpha_2), \alpha_2^{t_1}$ e $f_1(\alpha_2)$

seriam ambos números reais. Neste caso, utilizamos a densidade de $E_{(\alpha_2,0)} \cap \mathbb{R}$ para escolher a imagem de $g_1(\alpha_2) \in \mathbb{R}$, através do Lema 3.16, analogamente para α_1). Enfatizamos que, embora a escolha de g_1 dependa de t_1, o limitante de seus coeficientes depende apenas de α_1 e α_2.

Assim,

$$\begin{cases} f_{(2,0)}(\alpha_1) = f_{(1,0)}(\alpha_1) + 0 \in E_{(\alpha_1,0)}; \\ f_{(2,0)}(\overline{\alpha_1}) = f_{(1,0)}(\overline{\alpha_1}) + 0 \in E_{(\overline{\alpha_1},0)}; \\ f_{(2,0)}(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,0)}; \\ f_{(2,0)}(\overline{\alpha_2}) = \overline{f_{(2,0)}(\alpha_2)} \in E_{(\alpha_2,0)} = E_{(\overline{\alpha_2},0)}; \\ f'_{(2,0)}(\alpha_1) = f'_{(1,0)}(\alpha_1) + 0 + \alpha_1^{t_1} \cdot f'_1(\overline{\alpha_1}) \cdot g_1(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,1)}; \\ f'_{(2,0)}(\overline{\alpha_1}) = f'_{(1,0)}(\overline{\alpha_1}) + 0 + \overline{\alpha_1}^{t_1} \cdot f'_1(\overline{\alpha_1}) \cdot g_1(\overline{\alpha_1}) \in E_{(\overline{\alpha_1},1)}. \end{cases}$$

Agora, defina $f_{(2,1)}$ como

$$f_{(2,1)}(z) = f_{(2,0)}(z) + z^{t_2}[f_1(z)]^2 f_2(z) g_2(z),$$

em que $t_2 > t_1$ será escolhido posteriormente e g_1 é escolhida utilizando o Lema 3.16 de modo que

$$f'_{(2,0)}(\alpha_2) + \alpha_2^{t_2}[f_1(\alpha_2)]^2 f'_2(\alpha_2) g_2(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,1)},$$

em que utilizamos que $f_1(\alpha_2) \neq 0$, $f'_2(\alpha_2) \neq 0$ e, *a priori*, a densidade de $E_{(\alpha_2,1)}$ em $\mathbb{C}$ (é claro que se $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, por exemplo, então, $f'_{(2,0)}(\alpha_2), \alpha_2^{t_2}$, $[f_1(\alpha_2)]^2$ e $f'_2(\alpha_2)$ seriam ambos números reais. Neste caso, utilizamos a densidade de $E_{(\alpha_2,1)} \cap \mathbb{R}$ para escolher a imagem de $g_2(\alpha_2) \in \mathbb{R}$, através do Lema 3.16). Enfatizamos que, embora a escolha de g_2 dependa de t_2, o limitante de seus coeficientes depende apenas de α_2.

Segue então que

$$\begin{cases} f_{(2,1)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,0)}; \\ f_{(2,1)}(\overline{\alpha_1}) \in E_{(\overline{\alpha_1},0)}; \\ f_{(2,1)}(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,0)}; \\ f_{(2,1)}(\overline{\alpha_2}) \in E_{(\overline{\alpha_2},0)}; \\ f'_{(2,1)}(\alpha_1) \in E_{(\alpha_1,1)}; \\ f'_{(2,1)}(\overline{\alpha_1}) \in E_{(\overline{\alpha_1},1)}; \\ f'_{(2,1)}(\alpha_2) \in E_{(\alpha_2,1)}; \\ f'_{(2,1)}(\overline{\alpha_2}) \in E_{(\overline{\alpha_2},1)}. \end{cases}$$

Passo n: Suponha que no Passo n, obtemos a função $f_{(n,n-1)}$ de modo que

$$f^{(s)}_{(n,n-1)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}, \tag{3.14}$$

para $1 \leq k \leq n$ e $0 \leq s \leq n-1$.

Passo n+1: Defina a função $f_{(n+1,0)}$ de modo que

$$f_{(n+1,0)}(z) = f_{(n,n-1)}(z) + z^{t_i}[f_1(z)]^n \cdots [f_n(z)]^n g_i(z),$$

em que $t_i > t_{i-1}$, com

$$i = (2 + \cdots + n) + 1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

será escolhido posteriormente e g_i é escolhida utilizando o Lema 3.16 de modo que

$$f_{(n,n-1)}(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{t_i}[f_1(\alpha_{n+1})]^n \cdots [f_n(\alpha_{n+1})]^n g_i(\alpha_{n+1}) \in E_{(\alpha_{n+1},0)}$$

e

$$f^{(n)}_{(n,n-1)}(\alpha_k) + n!\alpha_k^{t_i}[f_1(\alpha_k)]^n \cdots [f'_k(\alpha_k)]^n \cdots [f_n(\alpha_k)]^n g_i(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,n)},$$

para $k = 1, \ldots, n$. Observe que esse último termo, a saber

$$f^{(n)}_{(n,n-1)}(\alpha_k) + n!\alpha_k^{t_i}[f_1(\alpha_k)]^n \cdots [f'_k(\alpha_k)]^n \cdots [f_n(\alpha_k)]^n g_i(\alpha_k),$$

corresponde exatamente à n-ésima derivada de $f_{(n+1,0)}$ aplicada em α_k, para cada $k = 1, \ldots, n$.

Observe também que, para garantir a existência dessa função g_i, utilizamos para $j = 1, 2, \ldots, n$:

- $f_j(\alpha_{n+1}) \neq 0$,
- $f_j(\alpha_k) \neq 0$, para $k = 1, \ldots, n$, $k \neq j$,
- $f_j'(\alpha_j) \neq 0$,

bem como argumentos de densidade, como nos casos iniciais. Enfatizamos mais uma vez que, embora a escolha de g_i dependa de t_i, o limitante de seus coeficientes depende apenas de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$.

E assim,

$$\begin{cases} f_{(n+1,0)}(\alpha_{n+1}) \in E_{(\alpha_{n+1},0)}; \\ f^{(s)}_{(n+1,0)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}, \text{ para } 1 \leq k \leq n \text{ e } 0 \leq s \leq n. \end{cases}$$

Defina $f_{(n+1,1)}$ como

$$f_{(n+1,1)}(z) = f_{(n+1,0)}(z) + z^{t_{i+1}}[f_1(z)]^{n+1} \cdots [f_n(z)]^{n+1} f_{n+1}(z) g_{i+1}(z),$$

em que $t_{i+1} \geq t_i$ será escolhido posteriormente e g_{i+1} é escolhida utilizando o Lema 3.16 de modo que

$$f'_{(n+1,0)}(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{t_{i+1}}[f_1(\alpha_{n+1})]^{n+1} \cdots [f_n(\alpha_{n+1})]^{n+1} f'_{n+1}(\alpha_{n+1}) g_{i+1}(\alpha_{n+1})$$

seja um elemento de $E_{(\alpha_{n+1},1)}$.

Segue então que

$$\begin{cases} f_{(n+1,1)}(\alpha_{n+1}) \in E_{(\alpha_{n+1},0)}; \\ f_{(n+1,1)}(\overline{\alpha_{n+1}}) \in E_{(\overline{\alpha_{n+1}},0)}; \\ f'_{(n+1,1)}(\alpha_{n+1}) \in E_{(\alpha_{n+1},1)}; \\ f'_{(n+1,1)}(\overline{\alpha_{n+1}}) \in E_{(\overline{\alpha_{n+1}},1)}; \\ f^{(s)}_{(n+1,1)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)}, \ \text{ para } 1 \leq k \leq n \text{ e } 0 \leq s \leq n; \\ f^{(s)}_{(n+1,1)}(\overline{\alpha_k}) \in E_{(\overline{\alpha_k},s)}, \ \text{ para } 1 \leq k \leq n \text{ e } 0 \leq s \leq n. \end{cases}$$

Por fim, definimos recursivamente

$$f_{(n+1,r)} = f_{(n+1,r-1)}(z) + z^{t_{i+r}}[f_1(z)]^{n+1} \cdots [f_n(z)]^{n+1} [f_{n+1}(z)]^r g_{i+r}(z),$$

para $2 \leq r \leq n$, em que $t_{i+r} \geq t_{i+r-1}$ será escolhido posteriormente e g_{i+r} é escolhida utilizando o Lema 3.16 de modo que

$$f'_{(n+1,r-1)}(\alpha_{n+1}) + r!\alpha_{n+1}^{t_{i+r}}[f_1(\alpha_{n+1})]^{n+1} \cdots [f_n(\alpha_{n+1})]^{n+1}(f'_{n+1})^{r-1}(\alpha_{n+1})g_{i+r}(\alpha_{n+1})$$

seja um elemento de $E_{(\alpha_{n+1},r)}$. Portanto,

$$f^{(s)}_{(n+1,n)}(\alpha_k) \in E_{(\alpha_k,s)},$$

para $1 \leq k \leq n+1$ e $0 \leq s \leq n$. Agora, seja f definida por

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_{(n+1,0)}(z),$$

para cada $z \in B(0,1)$.

A seguir, ilustraremos como pode ser feita uma escolha para a sequência $(t_k)_k$ de modo que $f(z)$ seja analítica em $B(0,1)$.

De acordo com nossa construção,

$$\begin{aligned} f(z) = f_{(1,0)}(z) \quad &+ \quad z^{t_1} f_1(z)g_1(z) + z^{t_2}[f_1(z)]^2 f_2(z)g_2(z) + z^{t_3}[f_1(z)]^2[f_2(z)]^2 g_3(z) \\ &+ \quad z^{t_4}[f_1(z)]^3[f_2(z)]^3[f_3(z)]g_4(z) + z^{t_5}[f_1(z)]^3[f_2(z)]^3[f_3(z)]^2 g_5(z) \\ &+ \quad z^{t_6}[f_1(z)]^3[f_2(z)]^3[f_3(z)]^3 g_6(z) + z^{t_7}[f_1(z)]^4[f_2(z)]^4[f_3(z)]^4[f_4(z)]g_7(z) \\ &+ \quad z^{t_8}[f_1(z)]^4[f_2(z)]^4[f_3(z)]^4[f_4(z)]^2 g_8(z) + \cdots . \end{aligned}$$

Sabemos que os coeficientes de cada g_i são limitados e dependem, no máximo, de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$. Além disso, para cada $j \geq 1$,

$$|f_j(z)| \leq \frac{C_j}{(1-|z|)^4},$$

para todo $z \in B(0,1)$. Assim, existem contantes

$$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha_1), \lambda_1 = \lambda_1(\alpha_1,\alpha_2), \lambda_2 = \lambda_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \lambda_3 = \lambda_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4), \ldots$$

tais que

$$\begin{aligned} |f(z)| \leq \frac{\lambda_0}{1-|z|} \quad &+ \quad \frac{\lambda_1}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{t_1}}{(1-|z|)^4} + \frac{\lambda_2}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{t_2}}{(1-|z|)^{4(2+1)}} + \frac{\lambda_3}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{t_3}}{(1-|z|)^{4(2+2)}} \\ &+ \quad \frac{\lambda_4}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{t_4}}{(1-|z|)^{4(3+3+1)}} + \frac{\lambda_5}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{t_5}}{(1-|z|)^{4(3+3+2)}} + \cdots . \end{aligned}$$

Assim,

$$|f(z)| \leq \frac{\lambda_0}{1-|z|} + \lambda_1|z|^{\lambda_1}\frac{|z|^{t_1-\lambda_1}}{(1-|z|)^{4+1}} + \lambda_2|z|^{\lambda_2}\frac{|z|^{t_2-\lambda_2}}{(1-|z|)^{4\cdot 2^2+1}} + \lambda_3|z|^{\lambda_3}\frac{|z|^{t_3-\lambda_3}}{(1-|z|)^{4\cdot 3^2+1}}$$
$$+ \lambda_4|z|^{\lambda_4}\frac{|z|^{t_4-\lambda_4}}{(1-|z|)^{4\cdot 4^2+1}} + \lambda_5|z|^{\lambda_5}\frac{|z|^{t_5-\lambda_5}}{(1-|z|)^{4\cdot 5^2+1}} + \cdots .$$

Escolhendo $(t_k)_k$ de modo que $t_k - \lambda_k > 4k^3$, obtemos

$$|f(z)| \leq \frac{\lambda_0}{1-|z|} + \lambda_1|z|^{\lambda_1}\frac{|z|^{4\cdot 1^3}}{(1-|z|)^{4+1}} + \lambda_2|z|^{\lambda_2}\frac{|z|^{4\cdot 2^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 2^2+1}} + \lambda_3|z|^{\lambda_3}\frac{|z|^{4\cdot 3^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 3^2+1}}$$
$$+ \lambda_4|z|^{\lambda_4}\frac{|z|^{4\cdot 4^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 4^2+1}} + \lambda_5|z|^{\lambda_5}\frac{|z|^{4\cdot 5^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 5^2+1}} + \cdots .$$

Logo, fixando $0 < R < 1$, segue que, para $z \in \overline{B(0,R)}$,

$$|f(z)| \leq \frac{\lambda_0}{1-|z|} + \frac{1}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{4\cdot 1^3}}{(1-|z|)^{4+1}} + \frac{1}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{4\cdot 2^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 2^2+1}}$$
$$+ \frac{1}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{4\cdot 3^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 3^2+1}} + \frac{1}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{4\cdot 4^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 4^2+1}}$$
$$+ \frac{1}{1-|z|}\cdot\frac{|z|^{4\cdot 5^3}}{(1-|z|)^{4\cdot 5^2+1}} + \cdots .$$

Assim,

$$|f(z)| \leq \frac{\lambda_0}{1-|z|} + \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2\cdot\left(\frac{|z|}{1-|z|}\right)^4 + \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2\cdot\left(\frac{|z|^2}{1-|z|}\right)^{4\cdot 2^2}$$
$$+ \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2\cdot\left(\frac{|z|^3}{1-|z|}\right)^{4\cdot 3^2} + \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2\cdot\left(\frac{|z|^4}{1-|z|}\right)^{4\cdot 4^2}$$
$$+ \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2\cdot\left(\frac{|z|^5}{1-|z|}\right)^{4\cdot 5^2} + \cdots .$$

Então, para $z \in \overline{B(0,R)}$,

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq \frac{\lambda_0}{1-|z|} + \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^2\cdot\sum_{k\geq 1}\left(\frac{|z|^k}{1-|z|}\right)^{4k^2}\\ &\leq \frac{\lambda_0}{1-|R|} + \left(\frac{1}{1-|R|}\right)^2\sum_{k\geq 1}\left(\frac{R^k}{1-R}\right)^{4k^2},\end{aligned}$$

em que utilizamos, na segunda desigualdade, o fato de $x \longmapsto x^k/(1-x)$ ser crescente para $0 \leq x < 1$.

Como $|R|^k < \dfrac{1-|R|}{2}$, para $k > \dfrac{\log(1-R)-\log 2}{\log R} =: \tilde{k}(R)$,

$$|f(z)| \leq \frac{\lambda_0}{1-|R|} + \left(\frac{1}{1-|R|}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\lfloor \tilde{k}(R) \rfloor} \left(\frac{R^k}{1-R}\right)^{4k^2} + \sum_{k \geq \tilde{k}(R)} \left(\frac{1}{2}\right)^{4k^2} \right)$$

para todo $z \in \overline{B(0,R)}$, para cada $0 < R < 1$. Fazendo

$$\lambda(R) = \sum_{k=1}^{\lfloor \tilde{k}(R) \rfloor} \left(\frac{R^k}{1-R}\right)^{4k^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{\lambda_0}{1-|R|} + \left(\frac{1}{1-|R|}\right)^2 \left(\lambda(R) + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \frac{\lambda_0}{1-|R|} + \frac{\lambda(R)+1}{(1-R)^2} < \infty, \end{aligned}$$

para todo $z \in \overline{B(0,R)}$, para cada $0 < R < 1$.

Segue que, para essa escolha apropriada de $(t_k)_k$, f converge em $\overline{B(0,R)}$, para cada $0 < R < 1$, que implica f analítica em $B(0,1)$.

Além disso, por construção,

$$f^{(s)}(\alpha) \in E_{(\alpha,s)},$$

para cada $\alpha \in A$ e para cada $s \geq 0$.

Por fim, podemos observar que ao escolhermos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, temos diferentes possibilidades para a escolha de t_{n+1}, os quais fornecem valores diferentes para $f(\alpha_{n+1})$ (que não dependem das escolhas de t_k, para $k > n$). Consequentemente, existe uma árvore binária de diferentes possibilidades para f. E, portanto, podemos construir uma quantidade não enumerável de possíveis funções, o que completa a demonstração, uma vez que o conjunto das funções algébricas em $\mathbb{Z}\{z\}$ é enumerável.

$\square$

Conclusão

Na primeira parte de nosso trabalho, o Teorema A mostra que a resposta para o Problema 1.33 é "não" para funções inteiras tais que suas séries de potências são lacunárias e seus coeficientes são racionais. Isso nos possibilita eliminar uma classe de funções que poderiam fornecer uma resposta afirmativa para esse problema. Uma direção de pesquisa em torno desse teorema é estudar outras classes de funções, agora entre as séries de potências com coeficientes racionais não lacunárias. Além disso, espera-se melhorar o expoente $8q^2$ (em ordem) obtido por Marques e Moreira no Teorema 1.31, de modo a obter classes ainda maiores de números de Liouville que são levadas, por funções inteiras transcendentes, no conjunto dos números de Liouville.

O Teorema B garante que o Problema 1.33 tem resposta negativa para $\nu < 1$. Um caminho natural para a realização de pesquisas relacionadas a esse teorema é verificar o que ocorre quando $\nu \geq 1$, buscando verificar se existe algum ν a partir do qual a resposta para o Problema 1.33 seja afirmativa e, consequentemente, para o Problema 1.30 de Mahler.

No Teorema C, provamos um resultado relacionado à reformulação do Problema 1.33, no qual mostramos que sob certas condições, o denominador de $f(p/q)$ não pode ser um polinômio em q (com coeficientes inteiros), para todo q suficientemente grande. Mais resultados interessantes podem surgir ao averiguarmos se a resposta pode ser afirmativa para determinadas classes de polinômios com coeficientes inteiros.

Por fim, os Teoremas D e E nos deram, dentre outras consequências na teoria das funções transcendentes em $\mathbb{Z}\{z\}$, uma generalização para o Teorema 3.9 obtido por Marques e Moreira, no qual os autores provam uma versão forte do Problema C de Mahler para funções em $\mathbb{Z}\{z\}$. Por outro lado, vimos que em nossa construção os coeficientes não são *a priori* limitados. Então, em pesquisas futuras, seria interessante verificar se é possível modificar algumas hipóteses de modo obter esse resultado com coeficientes limitados ou ao menos com fatores primos limitados. Enfatizamos que um resultado desse tipo poderia nos proporcionar novos avanços com relação ao Problema A de Mahler [15], o qual questiona exatamente a existência funções transcendentes $f \in \mathbb{Z}\{z\}$ com coeficientes limitados tais que $f(\overline{\mathbb{Q}} \cap B(0,1)) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.

Referências Bibliográficas

[1] K. Alniaçik, E. Saias, Une remarque sur les G_δ-denses, *Arch. Math.*, **62** (5) (1994), 425–426.

[2] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, 2 ed., New York: Springer-Verlang, 1978.

[3] P. Erdös, Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers, *Michigan Math. J.*, **9** (1962), 59–60.

[4] G. Faber, Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen, *Math. Ann.*, **58** (1904), 545–557.

[5] D. Harbater, Convergent arithmetic power series, *Amer. J. Math.*, **106** (4) (1984), 801–846.

[6] J. Huang, D. Marques, M. Mereb, Algebraic values of transcedental functions at algebraic points, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **82** (2010), 322–327.

[7] K. S. Kumar, R. Thangadurai, M. Waldschmidt, Liouville numbers and Schanuel's Conjecture, *Arch. Math.*, **102** (1) (2014), 59–70.

[8] A. C. M. M. Lafetá, *Conjuntos Excepcionais e Alguns Problemas de Mahler*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasil, 2017.

[9] E. L. Lima, *Curso de Análise*, 14 Ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Volume 1.

[10] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

[11] J. Liouville, Remarques relatives à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1844), 883–885.

[12] J. Liouville, Nouvelle démonstration du'n théorème sur irrationnelles algébriques inséré dans le compte rendu de la dernière séance, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1844), 910–911.

[13] J. Liouville, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *J. Math. Pures Appl.*, **16** (1851), no. 1, 133–142.

[14] K. Mahler, Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients, *J. Austral. Math. Soc.*, **5** (1965), 56–64.

[15] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Lecture Notes in Math., **546**, Berlin: Springer-Verlang, 1976.

[16] K. Mahler, Some suggestions for further research, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **29** (1984), 101–108.

[17] E. Maillet, *Introduction à la Théorie des Nombres Transcendants et des Propriétés Arithmétiques des Fonctions*. Gauthier-Villars, Paris (1906).

[18] D. Marques, *O problema de Lang e uma generalização dos Teoremas de Stäckel*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasil, 2009.

[19] D. Marques, *Teoria dos Números Transcendentes*, 1 ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[20] D. Marques, C. G. Moreira, A note on a complete solution of a problem posed by K. Mahler, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **98** (2018) 60–63.

[21] D. Marques, C. G. Moreira, A positive answer for a question proposed by K. Mahler, *Math. Ann.*, **367** (2017) 1–4.

[22] D. Marques, C. G. Moreira, A variant of a question proposed by K. Mahler concerning Liouville numbers, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **91** (2015) 29–33.

[23] D. Marques, C. G. Moreira, On exceptional sets of transcendental functions with integer coefficients: solution of a Mahler's problem. A aparecer em: *Acta Arith.*

[24] D. Marques, J. Ramirez, On exceptionals sets: the solution of a problem posed by K. Malher, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **94** (2016), 15–19.

[25] D. Marques, J. Ramirez, On transcendental analytic functions mapping an uncountable class of U-numbers into Liouville numbers, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **91** (2015), 25–28.

[26] D. Marques, J. Ramirez, E. Silva, A note on lacunary power series with rational coefficients, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **93** (2016), 1–3.

[27] D. Marques, J. Schleischitz, On a problem posed by Mahler, *J. Austral. Math. Soc.* **100** (2016), 86–107.

[28] D. Marques, E. Silva, A note on transcendental power series mapping the set of rational numbers into itself, *Comm. Math.*, **25(1)** (2017), 1–4.

[29] P. Ribenboim, *My Numbers, My Friends: Popular Lectures on Number Theory*, Springer-Verlag, 2000.

[30] E. C. S. Silva, *Alguns resultados relacionados a números de Liouville*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasil, 2015.

[31] P. Stäckel, Ueber arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen, *Math. Ann.*, **(46)** (1895), 513–520.