UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Sequências de Soma Zero em Algumas Famílias de Grupos Abelianos Finitos

POR

LUCIMEIRE ALVES DE CARVALHO

BRASÍLIA, DF
2018

Sequências de Soma Zero em Algumas Famílias de Grupos Abelianos Finitos

LUCIMEIRE ALVES DE CARVALHO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Teoria dos Números.
Orientador: Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho
Coorientador: Prof. Dr. Martino Garonzi

BRASÍLIA, DF
2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AC331s Alves de Carvalho, Lucimeire
Sequências de Soma Zero em Algumas Famílias de Grupos Abelianos Finitos / Lucimeire Alves de Carvalho; orientador Hemar Teixeira Godinho; co-orientador Martino Garonzi. -- Brasília, 2018.
91 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Sequências de Soma Zero. 2. Grupos Abelianos. 3. Constante EGZ. I. Teixeira Godinho, Hemar , orient. II. Garonzi, Martino, co-orient. III. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sequências de Soma Zero em Algumas Famílias de Grupos Abelianos Finitos.

Por

Lucimeire Alves de Carvalho*

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTORA EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de julho de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Hemar Teixeira Godinho (MAT-UnB)

Prof. Dr. Diego Marques Ferreira (MAT-UnB)

Prof. Dr. José Plinio de Oliveira Santos (UNICAMP)

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues (UFG)

* A autora foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração desta tese.

Aos meus pais Maria Alves de Carvalho e Lázaro de Carvalho

Agradecimentos

Como dizia Guimarães Rosa: Junto dos bão é que a gente fica mió.

Agradeço primeiramente meus queridos pais Lázaro e Maria por me apoiarem e darem suporte para que essa fase fosse possível.

Aos professores Diego Marques e Maurício Ayala Rincón.

Em especial agradeço ao meu orientador, Hemar Godinho, por acreditar em mim e por ter tido paciência e sabedoria para me orientar.

Não tenho palavras pra agradecer ao professor, mais que isso ao grande amigo Martino Garonzi, por me coorientar e por ser o amigo mais presente e mais sincero que pude ter.

Ao professor Ricardo Ruviaro, por ser o cara mais legal e mais trabalhador do departamento de Matemática.

Agradeço também ao IFG, principalmente a todos do campus Valparaíso por apoiar e proporcionar que fosse possível concluir o doutorado concomitante com meu trabalho.

Aos grandes amigos que fiz na computação, Jeremias, Junior, Henrique, Gustavo e Daniel.

Muito obrigada a minha amiga, que virou uma irmã pra mim, Gérsica Valesca.

Ao amigo Bruno que me fez andar vários quilômetros por Brasília e que sempre me faz sorrir.

Obrigada Josimar por todos os momentos felizes, por todos os chopps delírius e por ser um exemplo de superação.

Obrigada Yerko pela amizade, pela ajuda nos estudos, nos jantares que fizemos e pela companhia nos muitos momentos de diversão.

Agradeço também aos vários outros amigos que fiz e que guardarei pra sempre na memória, Jean, fofinho, Teló, Camila, Daiane, Joel, Igor, Emerson, Carol, Elaine, Laís, Fábio, Carmine, Cid, Henrique, Danilo, Alessandra, Filipe, Jhoel e Hiuri.

Aos meus amigos de longa data, Daniel, Mariana, Sancler e Marcelo Almeida, que mesmo com a distância e o tempo escasso vieram na minha defesa e estarão sempre comigo.

Aqueles que sempre fazem parte de toda minha história e que nunca esquecerei Saieny, Beth e Udson.

Por fim, agradeço a Thiago Almeida pelo companheirismo.

De um modo geral agradeço a todos por me proporcionar os melhores anos que já tive, por todas as novas pessoas que conheci, todas as experiências que pude viver. Não há nada mais importante em nossa vida que as pessoas ao nosso redor.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um resultado para grupos da forma $G = H \oplus K$, com $(exp(H), exp(K)) = 1$. Provamos sob certas hipóteses que, se para todas sequências T em $\mathcal{F}(G)$ de tamanho constante $|T| = \alpha$, com soma zero na componente H e soma constante em K tem-se que $|supp(\psi(T))| = 1$, onde ψ representa a função projeção de G em K.

Fazemos uma classificação para a estrutura de todas as sequências de $G' = C_3^2$ de tamanho $s(G') - 1$ que não possuem subsequências de tamanho $exp(G')$ e soma zero. Dado o grupo abeliano finito de posto quatro, $G = C_2^4 \oplus C_3^2$, com o resultado anterior tem-se:

$$29 \leqslant s(C_2^4 \oplus C_3^2) \leqslant 31.$$

Também apresentamos o valor exato para $s(G)$, onde $G = C_2^3 \oplus C_3^2$, mais precisamente,

$$s(C_2^3 \oplus C_3^2) = 25.$$

Por fim melhoramos a cota superior da família de grupos abelianos $G = C_3^2 \oplus C_n$, com $(n, 3) = 1$ e $n \geqslant 7$. Obtemos que

$$s(C_3^2 \oplus C_n) \leqslant 6n + 12.$$

Palavras-Chave: Soma Zero, Constante EGZ, Grupos Abelianos Finitos.

Abstract

In this work we present a result for groups of the form $G = H \oplus K$, with $(exp(H), exp(K)) = 1$. We prove under certain hipotheses that, if for all sequence T in $\mathcal{F}(G)$ of constant length $|T| = \alpha$, with sum equal to zero in the component H and constant sum in the component K we have $|supp(\psi(T))| = 1$, where ψ represents the projection function from G to K.

We obtain a classification for the structure of all the sequences of $G' = C_3^2$ of length $s(G') - 1$ that do not have subsequences of length $exp(G')$ and sum equal to zero. Given the finite abelian group of rank four $G = C_2^4 \oplus C_3^2$, using the previous result we have:

$$29 \leqslant s(C_2^4 \oplus C_3^2) \leqslant 31.$$

We also present the exact value of $s(G)$, where $G = C_2^3 \oplus C_3^2$, more precisely,

$$s(C_2^3 \oplus C_3^2) = 25.$$

Finally we improve the upper bound of the family of abelian groups $G = C_3^2 \oplus C_n$, with $(n, 3) = 1$ and $n \geqslant 7$. We obtain that

$$s(C_3^2 \oplus C_n) \leqslant 6n + 12.$$

Key words: Zero sum, EGZ constant, Finite Abelian Groups.

Sumário

Introdução

Uma das áreas de pesquisa na Teoria de Números é o estudo de problemas de soma zero, o qual será o objeto de estudo desta tese. Estes problemas são de certa forma um tipo de problema de combinatória sob a estrutura de um grupo, mais precisamente, dado um grupo G e um número positivo n, procuramos pelo menor inteiro k tal que para toda sequência de elementos em G de tamanho k contém n termos cuja soma é zero em G.

Um resultado clássico desta área é um teorema de 1961 (Ver [2]) de Paul Erdös, Abraham Ginzburg, e Abraham Ziv. Eles demonstraram que, se G é o grupo cíclico finito $G = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ de expoente n, então toda sequência de tamanho $k = 2n - 1$ tem uma subsequência de tamanho n e soma zero. Este resultado estimula a definir a seguinte constante: Dado um grupo G abeliano, finito e com $exp(G) = n$, seja $s(G)$ o menor inteiro l tal que, toda sequência de elementos em G de comprimento maior de que ou igual a l, contém uma subsequência de tamanho exatamente n de soma zero (aqui sempre que dizemos soma zero, significa que a soma será o elemento neutro do grupo). Esta constante é conhecida por constante EGZ, em homenagem a Paul Erdös, Abraham Ginzburg, e Abraham Ziv.

Neste mesmo período temos a influência de um grande estudioso da Teoria dos números, Harold Davenport (1907-1969). Uma das importantes definições dentro dos problemas de soma zero ganhou seu nome: Seja G um grupo abeliano finito, a constante $D(G)$ é o menor inteiro positivo l tal que para toda sequência de elementos em G de comprimento maior ou igual a l , esta sempre possui uma subsequência de soma zero Este número é denominado *constante de Davenport.* Observe que esta constante sempre existe, pois a soma de todos elementos do grupo é uma soma zero.

Davenport, no ano de 1966 em uma conferência levantou a seguinte questão:

Seja R o anel dos números inteiros de um corpo de números algébricos F, qual é o número maximal de classes de ideais primos (contando a multiplicidade) na decomposição em ideais primos de aR para um inteiro irredutível a em R?

Em 1969, J. Olson (ver [6]) no trabalho intitulado por *A combinatorial problem on finite Abelian groups I,* apresentou o valor para a constante de Davenport para p-grupos abelianos finitos, mais especificamente ele mostrou que se $G = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus \cdots G_{n_r}$, com $n_1|n_2|\cdots|n_r$ é um p-grupo, então a constante de Davenport $D(G)$ é dada por

$$D(G) = 1 + \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1).$$

Ainda no ano de 1969, em outro trabalho, J.Olson (ver [7]) mostra que em todo grupo abeliano finito da forma $C_n \oplus C_m$ com $n|m$ tem-se

$$D(G) = m + n - 1.$$

No ano de 1973, temos um importante artigo em alemão, escrito por Heiko Harborth (Ver [8]) em que se demonstra a desigualdade:

$$(n-1)2^r + 1 \leqslant s(C_n^r) \leqslant (n-1)n^r + 1.$$

Observe que deste resultado obtém-se o valor exato da constante EGZ para 2-grupos finitos:

$$s(C_2^r) = 2^r + 1.$$

Neste mesmo artigo temos vários outros resultados interessantes, em algum deles temos uma nova constante que denotamos neste trabalho por $g(G)$. Esta constante é dada pelo menor valor t (inteiro positivo) tal que toda sequência S em G livre de quadrados, (ou seja, uma sequência que não há repetição de elementos) contém uma subsequência de soma zero e comprimento exp(G). Esta nova constante é uma versão da constante $s(G)$, mas para sequências livre de quadrados, assim obviamente sempre vale que $g(G) \leqslant s(G)$.

Neste trabalho de Heiko Harborth temos uma importante relação entre as constantes $s(G)$ e $g(G)$ quando o grupo G é da forma $G = C_3^r$. Ela é dada por:

$$s(C_3^r) = 2g(C_3^r) - 1.$$

Ainda neste trabalho Harborth calcula o valor de $g(G)$ para alguns 3-grupos, ele mostra por exemplo que

$$g(C_3^2) = 5 \quad \text{e} \quad g(C_3^3) = 10.$$

Já em 1983 temos a contribuição de Kemnitz ([9]) que encontra o valor exato para $g(G)$ para o caso em que G é cíclico, ele mostra que vale

$$g(C_n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n+1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Note que o caso em que a constante $g(G)$ é $n + 1$, significa que não existe nenhum conjunto com a propriedade desejada. De modo mais geral, é conhecido (Ver [10, Lemma 10.1]) que $g(G) = |G| + 1$ se, e somente se, G é 2-grupo abeliano elementar ou um grupo cíclico de ordem par. Além desse resultado Kemnitz também conseguiu encontrar o valor de $g(G)$ para alguns grupos de posto dois, especificamente ele mostrou que $g(C_p^2) = 2p - 1$ para $p \in \{3, 5, 7\}$ e em [12] Gao, Geroldinger e Schmid mostram que $g(C_p^2) = 2p - 1$ para todos os primos $p \geqslant 47$. Nesta mesma direção Gao e R. Thangadurai em [11] mostraram que $g(G_4^2) = 9$ e fizeram a seguinte conjectura:

$$g(C_n^2) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2n + 1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Há muito o que fazer com relação a constante $g(G)$. Por exemplo, ainda não é possível até o presente momento determinar o valor desta constante para todos os grupos de posto 2, apenas para algumas famílias específicas. Das constantes citadas até o momento $g(G)$ é a que apresenta um menor número de resultados demonstrados.

Em 2007 temos o importante artigo de C. Reiher (Ver [16]) em que se demonstra o valor da constante $s(G)$ para todos os grupos abelianos de posto 2. Ele demonstra que, se $G = C_n \oplus C_m$ com $n|m$ tem-se

$$s(C_n \oplus C_m) = 2m + 2n - 3.$$

Infelizmente ainda não há um resultado geral como este para grupos de posto maiores ou iguais a três.

Além do estudo de sequências que possuem subsequências de soma zero de um determinado comprimento, há também um esforço no sentido contrário, ou seja, de determinar a estrutura de sequências que não possuem tais subsequências. Temos o seguinte resultado neste sentido para grupos cíclicos:

Lema 0.0.1. *[4, Lemma 2.4] Seja G um grupo cíclico de ordem $n \geqslant 2$. Seja S uma sequência de G de tamanho $|S| = s(G) - 1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
a) S não tem nenhuma sequência de soma zero e tamanho n.
b) $S = (gh)^{n-1}$ onde $g, h \in G$ com $ord(g - h) = n$.

Vamos utilizar nesta tese a maior parte dos resultados citados acima, além de alguns outros que aparecerão no decorrer do trabalho. Para maior compreensão do desenvolvimento das ideias, dividimos a tese em quatro capítulos.

No primeiro capítulo apresentamos definições e notações que serão utilizadas ao longo do trabalho e também vários resultados já demonstrados. Apresentamos também alguns valores já conhecidos para as constante relacionadas a problemas de soma zero e algumas cotas existentes.

No capítulo dois apresentamos um resultado para grupos da forma $G = H \oplus K$, com $(exp(H), exp(K)) = 1$. Provamos sob certas hipóteses que, se para todas sequências T em $\mathcal{F}(G)$ de tamanho constante $|T| = \alpha$, com soma zero na componente H e soma constante em K tem-se que $|supp(\psi(T))| = 1$, onde ψ representa a função projeção de G em K.

No capítulo três começamos com um teorema onde apresentamos uma classificação para a estrutura de todas as sequências de $G' = C_3^2$ de tamanho $s(G') - 1$ que não possuem subsequências de tamanho $exp(G')$ e soma zero. Este resultado nos permite encontrar limitantes inferior e superior para o grupo de posto quatro, $G = C_2^4 \oplus C_3^2$, encontramos os seguintes valores:

$$29 \leqslant s(C_2^4 \oplus C_3^2) \leqslant 31.$$

Observe que as cotas estão bem próximas, faltando pouco para chegar no valor exato de $s(G)$. Também conseguimos o valor exato para $s(G)$, onde $G = C_2^3 \oplus C_3^2$, mais precisamente, concluímos que $s(C_2^3 \oplus C_3^2) = 25$. Conseguimos também com o auxílio do programa GAP-Groups, Algorithms, Programming (um programa desenvolvido para cálculos em Álgebra discreta com ênfase em desenvolvimento de computação em teoria de grupos) classificar no grupo $G' = C_3^2$ todas as sequências de tamanho $s(G') - 2$ livre de soma zero e tamanho $exp(G')$.

Já no quarto e último capítulo melhoramos a cota superior da família de grupos abelianos $G = C_3^2 \oplus C_n$, com $(n, 3) = 1$ e $n \geqslant 7$. Sabe-se de [14, Lemma 4.2.5] que se $K \subset G$ com $exp(G) = exp(K)exp(G/K)$, então

$$s(G) \leqslant (s(K) - 1)exp(G/K) + s(G/K).$$

Utilizando este resultado conclui-se que $s(C_3^2 \oplus C_n) \leqslant 6n+13$, conseguimos diminuir esta cota em uma unidade, ou seja, mostramos neste capítulo que

$$s(C_3^2 \oplus C_n) \leqslant 6n + 12.$$

Este último resultado foi obtido principalmente do fato de conhecermos os valores de $g(C_3^2) = 10$ e também do fato que $s(C_n) = 2n - 1$.

A obtenção de resultados mais precisos para as constantes $s(G), \eta(G), g(G)$ e $D(G)$ envolve a solução de problemas combinatórios complexos. Isso se reflete na escassez de resultados para grupos abelianos finitos quaisquer. Outra consequência é que mesmo uma pequena melhora em cota existente demanda grande esforço técnico e computacional.

CAPÍTULO 1

Alguns Resultados Conhecidos Sobre Problemas de Soma Zero

O nosso interesse neste trabalho é estudar, dentro da estrutura de grupos abelianos finitos sequências finitas de seus elementos. Mais especificamente, procuramos informações sobre sequências que possuam subsequências de tamanho específico cuja soma seja zero no grupo. Apresentamos neste capítulo algumas definições e alguns resultados relacionados a problemas de soma zero. A maioria dos resultados expostos neste capítulo são bem conhecidos, motivo pelo qual muitas das suas provas serão omitidas.

Seja G um grupo abeliano finito, então pelo Teorema Fundamental dos Grupos abelianos G é isomorfo ao grupo

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_r}$$

onde $n_1|n_2|\cdots|n_r = n$, onde n é o expoente do grupo e r é o posto.

Uma sequência S em G é dada por $g_1 g_2 \cdots g_l$ onde $g_i \in G$ para todo $i \in [1, l]$. Em alguns momentos também vamos escrever a sequência S na forma de produto, da seguinte forma:

$$\prod_{i=1}^{l} g_i = \prod_{g \in G} g^{\nu_g(S)}$$

onde $\nu_g(S)$ nos dá a multiplicidade de g em S. Se $\nu_g(S) \leqslant 1$ para todo $g \in G$ então dizemos que a sequência S é livre de quadrados.

O conjunto de todas as sequências, que denotamos por $\mathcal{F}(G)$, é um monoide abeliano,onde a multiplicação de duas sequências $S = \prod_{g \in G} g^{\nu_g(S)}$ e $S' = \prod_{g \in G} g^{\nu_g(S')}$ é dada por

$$S \cdot S' = \prod_{g \in G} g^{\nu_g(S) + \nu_g(S')}.$$

Lembrando que um monóide é um conjunto não-vazio com uma operação binária, fechada, associativa com elemento neutro. No caso do conjunto $\mathcal{F}(G)$, o elemento neutro é dado pela sequência vazia.

Dada uma sequência $S \in \mathcal{F}(G)$ dizemos que S' é uma subsequência de S se existir uma sequência $S'' \in \mathcal{F}(G)$ tal que $S = S' \cdot S''$ e usamos a notação $S'|S$. Também podemos definir o comprimento de uma sequência S, como

$$|S| = \sum_{g \in G} \nu_g(S) = l \in \mathbb{N}_0$$

onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definição 1.0.1. *Para $S = \prod_{i=1}^{l} g_i$, definimos*

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^{l} g_i$$

como a soma dos elementos da sequência S. Também definimos o conjunto

$$supp(S) = \{g \in G \mid v_g(S) > 0\} \subset G,$$

denominado de suporte de S.

A seguir definimos as principais constantes relacionadas a problemas de soma zero.

Definição 1.0.2. *Seja G um grupo abeliano finito.*

- *$D(G)$ é o menor inteiro t tal que toda sequência S de G com $|S| \geqslant t$ tem uma subsequência não vazia de soma zero. Essa constante é conhecida como constante de Davenport.*

- *$\eta(G)$ é o menor inteiro t tal que toda sequência S de G com $|S| \geqslant t$ tem uma subsequência não vazia de soma zero e de comprimento menor de que ou igual a $exp(G)$.*

- *$s(G)$ é o menor inteiro t tal que toda sequência S de G com $|S| \geqslant t$ tem uma subsequência de soma zero e comprimento exatamente $exp(G)$. Conhecida como constante de EGZ.*

- *$g(G)$ é o menor inteiro l tal que toda sequência $S \in \mathcal{F}(G)$ livre de quadrados de comprimento $|S| \geqslant l$ tem uma subsequência T de soma zero e comprimento $|T| = exp(G)$.*

O próximo teorema diz que a constante de Danvenport para p-grupos abelianos finitos já está determinada. Este resultado foi provado por Olson e sua demonstração é encontrada em [6].

Teorema 1.0.3. *Se G é um p-grupo abeliano finito $G \cong C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$, onde $r = r(G)$, então*

$$D(G) = 1 + \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1).$$

Agora, se o grupo em questão é cíclico, temos os valores para as constantes $D(G), \eta(G)$ e $s(G)$.

Teorema 1.0.4. *Se G é cíclico então $D(G) = \eta(G) = |G|$ e $s(G) = 2|G| - 1$.*

No ano de 2007 Reiher (Ver [16]) mostrou que é possível determinar a constante $s(G)$ para grupos da forma C_n^2. Ele provou que $s(C_n^2) = 4n - 3$.

A partir do resultado acima ele provou o caso mais geral de grupos de posto 2.

Teorema 1.0.5. *Se $G = C_m \oplus C_n$ com $1 \leqslant m|n$, então*

$$s(G) = \eta(G) + n - 1 = 2m + 2n - 3.$$

Infelizmente não há até o momento um resultado geral para $s(G)$ onde $G = C_n^r$. Somente alguns casos foram determinados, citamos alguns deles.

1. Seja $l = 3^a 5^b$, com $a, b \in \mathbb{N}_0$. Então $s(C_l^3) = 9l - 8$, em particular,

$$s(C_3^3) = 19 \quad \text{e} \quad s(C_5^3) = 37.$$

2. $s(C_{3^a 5^b}^3) = 9(3^a 5^b - 1) + 1$, onde $a + b \geqslant 1$, em particular

$$s(C_3^3) = 19.$$

3. $s(C_{3^a}^4) = 20(3^a - 1) + 1$, onde $a \geqslant 1$, em particular

$$s(C_3^4) = 41.$$

4. $s(C_3^5) = 91$ e $s(C_3^6) = 225$.

5. $s(C_{2^a 3}^3) = 8(2^a 3 - 1) + 1$, onde $a \geqslant 1$.

6. Para todo r natural,

$$\eta(C_2^r) = 2^r \text{ e } s(C_2^r) = 2^r + 1.$$

Os resultados dos cinco primeiros itens acima podem ser encontrados nos artigos de Y. Fan, W. Gao, L. Wang e Q. Zhong (Ver [17] e [18]). Já o último está em um trabalho de H. Harborth de 1973 (Ver [8]).

A constante $g(G)$ é uma constante bem particular uma vez que é restrita a sequências livres de quadrados com subsquências de tamanho $exp(G)$. Em comparação com as outras constantes citadas neste trabalho, existem menos resultados gerais relacionados a esta constante. Citemos aqui alguns desses resultados:

1.
$$g(C_n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n+1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

2. $g(C_3^2) = 5$ e $g(C_3^3) = 10$;

3. $g(C_p^2) = 2p - 1$ com $p \leqslant 47$ primo.

O primeiro resultado da lista acima é encontrado em um artigo de Kemnitz ([9]), já as constantes apresentadas no segundo item foram calculadas em um importante artigo de 1973 de H. Harborth. O último resultado da lista é demosntrado por Gao, Geroldinger e Schmid em [12].

Apresentamos agora uma propriedade relativa a sequências de um tamanho específico que não possui subsequências de soma zero e tamanho expoente do grupo.

Propriedade D 1.0.6. *Toda sequência $S \in \mathcal{F}(G)$ de tamanho $|S| = s(G) - 1$ que não tenha nenhuma sequência com soma zero de tamanho n tem a forma $S = T^{n-1}$ para alguma sequência $T \in \mathcal{F}(G)$.*

O próximo lema apresenta uma coleção de resultados sobre relações existentes entre as constantes $\eta(G)$, $s(G)$ e $g(G)$. O leitor pode encontrar todas as demonstrações em [1, Lemma 2.3].

Lema 1.0.7. *Seja G um grupo abeliano com $exp(G) = n \geqslant 2$, $S \in \mathcal{F}(G)$ uma sequência que não tenha subsequência de soma zero e comprimento n, e seja $h = max\{v_g(S) \mid g \in G\}$. Então,*

1. $D(G) \leqslant \eta(G) \leqslant s(G) - n + 1$.

2. *Se* $h = n-1$, *então* $\eta(G) \leqslant |S| - n + 2$. *Em particular, se* $|S| = s(G) - 1$,

$$\eta(G) = s(G) - n + 1.$$

3. $g(G) \leqslant s(G) \leqslant (g(G)-1)(n-1)+1$. *Se* $G = C_n^r$, *com* $n \geqslant 2$ *e* $r \in \mathbb{N}$, *e* $s(G) = (g(G)-1)(n-1)+1$, *então* G *tem a Propriedade D.*

4. *Se* H *é um grupo abeliano finito com* $|H| \geqslant h$ *e* $f : [1,h] \to H$ *é uma função injetiva, então*

$$\prod_{g \in G} \prod_{i=1}^{v_g(S)} (g + f(i)) \in \mathcal{F}(G \oplus H)$$

é uma sequência livre de quadrados que não tem subsequência de soma zero e comprimento n. *Em particular, se exp*$(H)|n$, *então* $g(G \oplus H) \leqslant s(G)$, *e* $g(C_n^{r+1}) \geqslant s(C_n^r)$.

Os próximos Teoremas apresentam resultados sobre cotas superiores e inferiores para algumas constantes.

Teorema 1.0.8. *Seja* G *um grupo abeliano finito com exp*$(G) = n \geqslant 2$ *e seja* $G = H \oplus \langle e \rangle$, *onde* $H \subset G$ *é um subgrupo e* $e \in G$ *com ord*$(e) = n$. *Então*

$$\eta(G) \geqslant n + 2D(H) - 2.$$

Teorema 1.0.9. *Seja* H *um grupo abeliano finito com* $exp(H) = u \geqslant 2$, *e seja* $G = C_{uv} \oplus H$. *Se* $v \geqslant max\{u|H| + 1, 4|H| + 2u\}$, *então* $s(G) = \eta(G) + exp(G) - 1$

A demonstração do Teorema 1.0.8 é encontrada no artigo [1, Lemma 3.2] e do Teorema 1.0.9 encontra-se em [17].

Dado um grupo $G = H \oplus K$, é interessante descobrir relações entre as constantes $s(G), s(H)$ e $s(K)$, nesta direção temos os próximos dois lemas encontrados no trabalho de A. Geroldinger (Ver [14], Lemma 4.2.4 e Lemma 4.2.5).

Lema 1.0.10. *Seja $\varphi : G \longrightarrow \overline{G}$ um homomorfismo de grupos e seja $k \in \mathbb{N}$*

1. *Se $S \in \mathcal{F}(G)$ e $|S| \geqslant (k-1)exp(\overline{G}) + s(\overline{G})$, então S admite uma decomposição na forma $S = S_1S_2 \ldots S_kS'$, onde $S_1, S_2, \ldots, S_k, S' \in \mathcal{F}(G)$ e para todo $i \in [1, k]$, $\varphi(S_i)$ tem soma zero e tamanho $|S_i| = exp(\overline{G})$.*
2. *Se $S \in \mathcal{F}(G)$ e $|S| \geqslant (k-1)exp(\overline{G}) + \eta(\overline{G})$, então S admite uma decomposição da forma $S = S_1S_2 \ldots S_kS'$, onde $S_1, S_2, \ldots, S_k, S' \in \mathcal{F}(G)$ e para todo $i \in [1, k]$, $\varphi(S_i)$ tem soma zero e tamanho $|S_i| \in [1, exp(\overline{G}]$.*

Demonstração. 1. De fato, se para algum $j \in [0, k-1]$ encontramos uma decomposição da forma $S = S_1S_2 \ldots S_jS'$, onde para cada $i \in [1, j]$, $\varphi(S_i)$ tem soma zero e comprimento $|S_i| \in [1, exp(K)]$, então

$$|\varphi(S')| = |S'| = |S| - jexp(K) \geqslant (k-1-j)exp(K) + s(K) \geqslant s(K),$$

e então a sequência S' tem uma subsequência S_{j+1} tal que $\varphi(S_{j+1})$ tem soma zero e $|\varphi(S_{j+1})| = exp(K)$. O resultado segue por indução sobre j.

2. Segue a mesma ideia do primeiro item.

□

Lema 1.0.11. *Seja K um subgrupo de G.*

1. *Se $S \in \mathcal{F}(G)$ e $|S| \geqslant (s(K)-1)exp(G/K)+s(G/K)$ então S tem uma subsequência T de soma zero e tamanho $|T| = exp(K)exp(G/K)$. Em particular, se $exp(G) = exp(K)exp(G/K)$, então*

$$s(G) \leqslant (s(K)-1)exp(G/K)+s(G/K).$$

2. *Se $S \in \mathcal{F}(G)$ e $|S| \geqslant (\eta(K)-1)exp(G/K)+\eta(G/K)$ então S tem uma subsequência T de soma zero e tamanho $|T| = exp(K)exp(G/K)$. Em particular, se $exp(G) = exp(K)exp(G/K)$, então*

$$\eta(G) \leqslant (\eta(K)-1)exp(G/K)+\eta(G/K).$$

Demonstração. 1. Seja $\varphi : G \longrightarrow G/K$ o epimorfismo natural. Se $K = \{0\}$ então o resultado segue. Suponha então que $K \neq \{0\}$. Seja $S \in \mathcal{F}(G)$ uma sequência de tamanho $|S| \geqslant (s(K)-1)exp(G/K)+s(G/K)$. Pelo lema anterior podemos decompor a sequência S da forma

$$S = S_1S_2\dots S_{s(K)}S',$$

com $i \in [1, s(K)]$, $\varphi(S_i)$ tem soma zero e comprimento $|S_i| = exp(G/K)$. Então a sequência $\sigma(S_1)\cdot\ldots\cdot\sigma(S_{s(K)}) \in \mathcal{F}(K)$ tem uma subsequência V de soma zero e comprimento $|V| = exp(K)$, podemos considerar esta sequência da forma

$$V = \prod_{i\in I}\sigma(S_i), \quad \text{onde} \quad I \subset [1, s(K)] \ \text{ e } \ |I| = exp(K).$$

Então a sequência $T = \prod_{i \in I} S_i$ é uma subsequência de S de soma zero e tamanho $T = |I|exp(G/K) = exp(K)exp(G/K)$.

2. A demonstração é análoga à anterior.

□

Em seguida, temos dois teoremas interessantes sobre a estrutura de sequências de tamanho $s(G) - 1$ que são livre de soma zero e tamanho $exp(G)$. Estes resultados de certa forma facilitam as demonstrações em que precisamos construir sequências livre de soma zero com tamanho fixo $s(G) - 1$.

O primeiro resultado diz que uma sequência livre de soma zero e de tamanho $s(G) - 1$ em um grupo cíclico tem necessariamente em seu suporte somente dois elementos. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4, Lemma 2.4].

Teorema 1.0.12. *Seja G um grupo cíclico de ordem $n \geqslant 2$. Seja S uma sequência de G de tamanho $|S| = s(G) - 1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
a) S não tem nenhuma sequência de soma zero e tamanho n.
b) $S = (gh)^{n-1}$ onde $g, h \in G$ com $ord(g - h) = n$.

O Próximo teorema apresenta a estrutura de uma sequência livre de soma zero e tamanho exponte de G, onde $G = C_3^r$. Este resultado é demonstrado em [1, Lemma 5.2].

Teorema 1.0.13. *Seja $G = C_3^r$ com $r \in \mathbb{N}$. Toda sequência $S \in \mathcal{F}(G)$ de tamanho*
$|S| = s(G) - 1$ que não tem subsequência de tamanho 3 e soma zero, tem a forma $S = T^2$ onde T é livre de quadrados em G. Reciprocamente, se $T \in \mathcal{F}(G)$ é uma sequência livre de quadrados e não tem nenhuma sequência de tamanho 3 e soma zero, então T^2 também não tem nenhuma sequência de tamanho 3 e soma zero.

A próxima proposição, que é encontrada em [1, Proposition 3.1]. Apresentamos aqui a demonstração desta proposição pois seguiremos seus passos para a construção de uma sequência no Capítulo 3 deste trabalho, mais especificamente na seção 3.3. Em seguida temos um corolário desta proposição que será utilizado para determinar uma cota inferior para o grupo $C_2^3 \oplus C_3^2$ apresentado na seção 3.1.

Proposição 1.0.14. *Seja $G = C_{n_1} \oplus \cdots \oplus C_{n_r}$, onde $r = r(G)$ e $1 < n_1 | n_2 | \cdots | n_r$, e seja $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ uma base de G com $ord(e_i) = n_i$ para todo $i \in [1, r]$. Para um subconjunto $I \subset [1, r]$, considere $e_I = \sum_{i \in I} e_i$.*

1. *Defina*
$$U = \prod_{k=1}^{r} \prod_{I \subset [k+1, r]} (e_k + e_I)^{n_k - 1} \in \mathcal{F}(G)$$
então as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) U não tem subsequência de soma zero;

   (b) $r = 1$ ou ($r \geqslant 2$ e $n_2 = n_r$).

2. *Seja H um grupo abeliano finito com $exp(H) = n$, n um múltiplo de n_r e $T \in \mathcal{F}(H)$ tal que T^{n-1} não tenha subsequência de soma zero e tamanho n. Então a sequência*

$$S = \prod_{g \in T} \left(g^{n-1} \prod_{i=1}^{r} (g + e_i)^{n_i - 1} \right) \quad \in \quad \mathcal{F}(G \oplus H)$$

não tem subsequência de soma zero e tamanho n, então

$$s(G \oplus H) \geqslant \eta(G \oplus H) + n - 1 \geqslant 1 + |T| \left(n - 1 + \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1) \right).$$

Além disso, se $m \in \mathbb{N}$ e $I_1, I_2, \ldots, I_m \subset [1, r]$ são aos pares conjuntos distintos, com $\sum_{i \in I_\mu} (n_i - 1) \geqslant n$ para todo $\mu \in [1, m]$, então

$$\overline{S} = S \prod_{g \in T} \prod_{\mu=1}^{m} (g + e_{I_\mu}) \quad \in \quad \mathcal{F}(G \oplus H)$$

não tem subsequência de soma zero e comprimento n.

3. *Se $\overline{G} = G \oplus C_n^k$ com $k, n \in \mathbb{N}$ e $n_r | n$, então*

$$s(\overline{G}) \geqslant \eta(\overline{G}) + n - 1 \geqslant 1 + 2^k \left(n - 1 + \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1) \right).$$

Demonstração. 1. $(a) \Rightarrow (b)$ Se $r \leqslant 2$, não há nada que demonstrar. Se $r \geqslant 3$ e $n_2 < n_r$, então

$$U' = e_r^{n_r - n_2 - 1} (e_2 + e_r)^{n_2 - n_1 + 1} (e_1 + e_r)(e_1 + e_2 + e_r)^{n_1 - 1}$$

é uma subsequência de U livre de soma zero, o que é uma contradição.

$(b) \Rightarrow (a)$ Se $r = 1$, então a afirmação é clara. Suponha que $r \leqslant 2$ e $n_2 = n_r = n$. Então

$$U = \prod_{I \subset [2,r]} (e_1 + e_I)^{n_1 - 1} \prod_{\emptyset \neq I \subset [2,r]} e_I^{n-1} \quad \in \quad \mathcal{F}(G)$$

e consideramos a subsequência de U de soma zero

$$U' = \prod_{v=1}^{k} (e_1 + e_{I_v}) \prod_{v=k+1}^{l} e_{I_v}$$

com $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$ subconjuntos $I_1, \ldots, I_k \subset [2, r]$ e conjuntos não vazios $I_{k+1}, \ldots, I_l \subset [2, r]$. Vamos mostrar que $|U'| = l = 0$. Assuma o contrário, ou seja, que $l \geqslant 1$. Como $v_{e_1}(U') \leqslant v_{e_1}(U) = n_1 - 1$, existe algum $v \in [1, l]$ tal que I_v é não-vazio. Seja $i \in I_v$ e

$$\alpha = |\{j \in [1, l] | i \in I_j\}|.$$

Como $\alpha \equiv 0 \bmod n$ e $1 \leqslant \alpha \leqslant l \leqslant n$, segue que $\alpha = l = n$. Como U' tem soma zero concluímos que $I_1 = \cdots = I_n$, então

$$U' = (e_1 + e_{I_1})^k e_{I_1}^{n-k}.$$

Logo $k \equiv 0 \bmod n_1$ e $k \leqslant v_{e_1 + e_{I_1}}(U) = n_1 - 1$ o que implica que $k = 0$, então $U' = e_{I_1}^n$ é uma subsequência de U, uma contradição.

2. Suponha o contrário, suponha que S tem uma subsequência S' de soma zero de tamanho n. Como para qualquer $m \geqslant n$, toda subsequência de

T^m de soma zero e tamanho n tem a forma g^n para algum $g \in$ supp(T), segue que a sequência S' tem a forma

$$S' = g^{l_g} \prod_{i=1}^{r} (g + e_i)^{l_i},$$

com $g \in$ supp(T), $l_g \in [0, n-1]$ e $l_i \in [0, n_i - 1$ para todo $i \in [1, r]$. Mas $l_g < n$ implica que existe algum $i \in [1, r]$ com $l_i \in [1, n_i - 1]$, e então $\sigma(S') \neq 0$, uma contradição. Agora o resultado segue das cotas inferiores de $s(G \oplus H)$ e $\eta(G \oplus H)$ no Lema 1.0.7.

Se $\overline{S}$ tem uma subsequência $\overline{S}'$ de tamanho n, então

$$\overline{S}' = g^{l_g} \prod_{i=1}^{r} (g + e_i)^{l_i} \prod_{\mu=1}^{m} (g + e_{I_\mu})^{\delta_\mu},$$

com $\delta_\mu \in \{0, 1\}$ e todos os outros parâmetros como antes.Como $\overline{S}'$ não é uma subsequência de S, então existe algum $\mu \in [1, m]$ com $\sigma_\mu = 1$. Isto implica que $\overline{S}'$ deve conter a sequência

$$\overline{S}'' = (g + e_{I_\mu}) \prod_{i \in I_\mu} (g + e_i)^{n_i - 1},$$

e então $n = |\overline{S}'| \geqslant |\overline{S}''| \geqslant 1 + \sum_{i \in I_\mu} (n_i - 1) \geqslant n + 1$, uma contradição.

3. Aplicando (1) ao grupo C_n^k, obtemos uma sequência $T = 0T'$ de comprimento $|T| = 2^k$ tal que $U = T'^{n-1}$ não tem nenhuma sequência de soma zero e tamanho no máximo n e então T^{n-1} não tem nenhuma sequência de soma zero e tamanho n. Então (2) nos dá uma sequência $S \in \mathcal{F}(G)$ de comprimento $|S| = |T|(n - 1 + \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1))$, que não tem subsequência de tamanho n e soma zero. Agora a afirmação segue do Lema 1.0.7.

$\square$

Corolário 1.0.15. *Seja* $G = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus C_{n_3}$*, onde* $1 < n_1 | n_2 | n_3$*, e seja* $P \subset \mathbb{P}$ *o conjuntos dos primos que dividem* n_3*.*

1. *Se* $s(C_p^3) \leqslant 9p - 8$ *para todos* $p \in P$*, então* $s(G) \leqslant 5n_1 + 2n_2 + 2n_3 - 8$*. Se* $n_2 = n_3$*, então* $4n_1 + 4n_3 - 7 \leqslant s(G)$*.*

2. *Se* G *é um 2-grupo, então* $s(G) \leqslant 4n_1 + 2n_2 + 2n_3 - 7$ *e a igualdade vale se* $n_2 = n_3$*.*

CAPÍTULO 2

Sequências de Soma Constante

Neste capítulo apresentamos um resultado para grupos abelianos da forma $H \oplus K$, com $(exp(H), exp(K)) = 1$. Este resultado nos garante que, sob certas condições, se neste grupo temos que todas as sequências S de um determinado comprimento $|S| = \alpha$ tem soma zero na componente H e a mesma soma T_α em K então os elementos de S nas componentes de K são todos iguais.

Para a demonstração do teorema primeiramente provamos um lema que nos garante, satisfazendo algumas hipóteses, se S é um subconjunto de H^* com k elementos, vão existir t elementos fora de S dois a dois distintos cuja soma é zero.

Em seguida apresentamos um corolário onde tomamos o caso especial onde $T_{\alpha=0}$, ou seja, onde temos uma soma zero no grupo H.

Lema 2.0.1. *Seja H um grupo abeliano finito aditivo de ordem m ímpar. Seja S um subconjunto de $H^* = H - \{0\}$ com $|S| = k$. Se $m \geqslant 2(k+t) - 2$ com $t \geqslant 2$, então existem t elementos dois a dois distintos em $H^* - S$ cuja soma é zero.*

Demonstração. Observe que, como $t \geqslant 2$ temos

$$|H^* - S| = m - 1 - k \geqslant 2(k+t) - 2 - 1 - k = k + 2t - 3 > t - 2$$

logo existem $v_1, \dots, v_{t-2}$ elementos dois a dois distintos em $H^* - S$. Seja $T = \{v_1, \dots, v_{t-2}\}$. Queremos um elemento $v_{t-1} \in H^* - (S \cup T)$ com a propriedade que $-v_1 - \dots - v_{t-1} \notin S \cup T$, ou seja

$$v_{t-1} \notin \{-v_1 - \dots - v_{t-2} - x \ : \ x \in S \cup T\} = R.$$

Precisamos mostrar que $H^* - (S \cup T \cup R) \neq \emptyset$, mas isso é verdade porque $|S \cup T| = |R| = k + t - 2$, logo

$$|H^* - (S \cup T \cup R)| = m - 1 - 2(k+t-2) \geqslant 2(k+t) - 3 - 2(k+t) + 4 = 1.$$

Temos então que $v_1, \dots, v_{t-1}, v_t = -v_1 - \dots - v_{t-1}$ são os t elementos não nulos dois a dois distintos que queremos. $\square$

Teorema 2.0.2. *Seja $G = H \oplus K$ onde H e K são grupos abelianos finitos de ordens coprimas $|H| = m$, $|K| = n$ com $m \geqslant 11$ ímpar e com $e \leqslant (m+2)/3$ onde e é o expoente de H. Seja $H^* = H - \{0\}$. Seja $f : H^* \to K$ uma função. Se α é um número natural dizemos que f satisfaz a propriedade $P(\alpha)$ se existir $T_\alpha \in K$ tal que cada vez que $u_1, \dots, u_\alpha \in H^*$ são dois a dois distintos e $u_1 + \dots + u_\alpha = 0$ temos $f(u_1) + \dots + f(u_\alpha) = T_\alpha$. Suponha que $\alpha < \frac{m-2}{6}$. Então f satisfaz $P(\ell)$ para todo número natural ℓ com $2 \leqslant \ell \leqslant \alpha$. Se além disso $\alpha \geqslant \max\{6, \exp(H)\}$ então f é uma função constante, ou seja, existe $c \in K$ com $f(h) = c$ para todo $h \in H^*$.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que se $\alpha < \frac{m-2}{6}$ então o fato que f satisfaz $P(\alpha)$ implica que f satisfaz $P(\ell)$ para todo $2 \leqslant \ell \leqslant \alpha$. Fixe $\ell \in \{2, \ldots, \alpha\}$ e sejam $u_1, \ldots, u_\ell$, $w_1, \ldots, w_\ell$ duas sequências disjuntas livres de quadrados de elementos não nulos de H cuja soma é zero, a existências dessas sequências é garantida pelo Lema (2.0.1). Seja $S = \{u_1, \ldots, u_\ell, w_1, \ldots, w_\ell\}$. Temos $|S| \leqslant 2\ell$.

Seja $t = \alpha - \ell$. Queremos encontrar $v_1, \ldots, v_t \in H^* - S$ dois a dois distintos cuja soma é zero. Vamos distinguir dois casos.

- t **é par**. Neste caso a estratégia é de encontrar $t/2$ pares de elemento da forma $v, -v$ (observe que $v \neq -v$ sendo m ímpar). Para encontrar o primeiro par precisamos garantir que existe um elemento $v \in H^* - S$ com $-v \notin S$, e como $|S| \leqslant 2\ell$ para isso é suficiente que seja $m - 1 - 2\ell > 2\ell$ (porque se $-v \in S$ para todo $v \in H^* - S$ então com certeza $|H^* - S| \leqslant |S|$), ou seja, $m > 1 + 4\ell$, que é verdade pois $m > 2 + 4\alpha \geqslant 2 + 4\ell$. Para encontrar o próximo par precisamos garantir que
  $m - 1 - (2\ell + 2) > 2\ell$, e assim até o $t/2$-esimo par, o qual precisamos garantir que $m - 1 - (2\ell + 2(t/2 - 1)) > 2\ell$, o que implica que $m > 4\ell - 1 + t$. Observe que para o i-esimo par temos $m - 1 - (2\ell + 2(i - 1)) > 2\ell$ ou seja $m > 4\ell - 1 + 2i$. Obviamente isso é implicado por $m > 4\ell - 1 + t$ para $i \leqslant t/2$. Agora $t = \alpha - \ell$ logo precisamos que seja $m > 3\ell + \alpha - 1$ e como $\ell \leqslant \alpha$ para isso é suficiente ter $m > 4\alpha - 1$ o que é verdade por hipótese (sendo $m > 6\alpha + 2$).

- t **é ímpar**. Neste caso a estratégia é de encontrar três elementos dois a dois distintos em $H^* - S$ com soma zero (uma "tripla") e depois alcançar t adicionando pares $v, -v$ como no item anterior. Suponha que não seja possível encontrar três elementos dois a dois distintos u, v, w em $H^* - S$ com soma zero (observe que $w = -u - v$ é unicamente determinado por u e v). Dado $u \in H^* - S$ para toda escolha de $v \in H^* - S$ precisamos ter $v = u_i$ ou $v = w_i$ para algum i, ou $-u - v = u_i$ ou $-u - v = w_i$ para algum i, em outras palavras temos no máximo 4ℓ escolhas ruins para v. Logo para garantir que v possa ser escolhido de uma maneira "boa" precisamos garantir que $m - 1 - 2\ell > 4\ell$, ou seja $m > 1 + 6\ell$, e isso é verdade pois $m > 1 + 6\alpha$ e $\alpha \geqslant \ell$. Depois de fazer isso precisamos garantir que existam $t - 3$ elementos dois a dois distintos fora de $S \cup \{u, v, -u - v\}$ com soma zero, e sendo $t - 3$ par isto é possível pelo item anterior se $m - 1 - (2\ell + 3 + 2((t - 3)/2 - 1)) > 2\ell + 3$ ou seja $m > 3\ell + \alpha + 2$ que é verdade sendo $m > 6\alpha + 2 \geqslant 4\ell + 2$ (porque $\alpha \geqslant \ell$).

Agora, temos obviamente que $\sum_{i=1}^{t} v_i + \sum_{i=1}^{\ell} u_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{t} v_i + \sum_{i=1}^{\ell} w_i = 0$ logo aplicando a hipótese temos

$$\sum_{i=1}^{t} f(v_i) + \sum_{i=1}^{\ell} f(u_i) = \sum_{i=1}^{t} f(v_i) + \sum_{i=1}^{\ell} f(w_i).$$

Cancelando os termos comuns obtemos $\sum_{i=1}^{\ell} f(u_i) = \sum_{i=1}^{\ell} f(w_i)$. Isso mostra que f satisfaz $P(\ell)$.

Em outras palavras temos os elementos $T_2, \ldots, T_\alpha \in K$ como no enunciado, onde todo T_ℓ depende apenas de ℓ. Mostraremos agora que para todo tal ℓ temos $T_\ell = \ell c$ onde $c = T_3 - T_2$. Primeiro mostraremos isso no caso

$\ell = 2$, neste caso a igualdade enunciada é $3T_2 = 2T_3$ que é verdade porque $3T_2 = T_6 = 2T_3$ (observe que faz sentido escrever T_6 exatamente porque $\alpha \geqslant 6$). De fato:

- Podemos encontrar três pares disjuntos de elementos não nulos, livres de quadrados de soma nula. Para o primeiro par aplicando o lema 2.0.1 com $k = 1, t = 2$ temos $m \geqslant 2(k+t) - 3 = 3$, para o segundo par escolhendo $k = 3, t = 2$ temos $m \geqslant 2(k+t) - 3 = 7$ e para o terceiro par escolhendo $k = 5, t = 2$ temos $m \geqslant 2(k+t) - 3 = 11$.

- Podemos encontrar duas triplas disjuntas de elementos não nulos, livres de quadrados de soma nula. Para a primeira tripla aplicando o lema 2.0.1 com $k = 1, t = 3$ temos $m \geqslant 2(k+t) - 3 = 5$ e para a segunda tripla escolhendo $k = 4, t = 3$ temos $m \geqslant 2(k+t) - 3 = 11$.

Para provar o caso geral suponha $\ell \geqslant 3$. Se ℓ é par então $T_\ell = (\ell/2)T_2 = (\ell/2)2(T_3 - T_2) = \ell(T_3 - T_2)$. Se ℓ é ímpar então $T_\ell = T_3 + ((\ell-3)/2)T_2 = T_3 + (\ell-3)(T_3 - T_2) = \ell(T_3 - T_2) + 3T_2 - 2T_3 = \ell(T_3 - T_2)$.

O nosso objetivo é agora mostrar que $f(v) = c = T_3 - T_2$ para todo $v \in H^*$. Seja e o expoente de H. Seja $s = (e-1)/2$ (é um inteiro porque e é ímpar, sendo m ímpar) e sejam $x_1, \ldots, x_s$ elementos não nulos de H com as propriedades seguintes.

- $x_i \notin \{v, -v, 2v, -2v, v/2, -v/2\}$ para todo $i = 1, \ldots, s$.

- $x_i \neq \pm x_j$ para todo $i \neq j$ em $\{1, \ldots, s\}$.

- $x_i \neq v \pm x_j$ para todo $i \neq j$ em $\{1, \ldots, s\}$.

- $x_i \neq -v \pm x_j$ para todo $i \neq j$ em $\{1, \ldots, s\}$.

Supondo de ter escolhido $x_1, \ldots, x_i$ a condição sobre x_{i+1} é que seja

$$x_{i+1} \notin \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} \{x_j, -x_j, v + x_j, v - x_j, -v + x_j, -v - x_j\}.$$

Isso significa que cada x_i exclui no máximo 6 elementos da possível escolha de cada um dos elementos seguintes, logo para encontrar todos os x_i precisamos que seja $|H^*| \geqslant 6s$ ou seja $m-1-6s \geqslant 0$, ou seja, lembrando que $s = (e-1)/2$, precisamos que seja $e \leqslant (m+2)/3$, o que é verdade por hipótese. No sistema seguinte por construção dos elementos x_i temos que cada linha consiste de elementos dois a dois distintos.

$$\begin{array}{cccccccc}
v & +(v+x_1) & +(v-x_1) & +(v+x_2) & +\ldots & +(v+x_s) & +(v-x_s) & =0 \\
v & +(-v+x_1) & +(-x_1) & +x_2 & +\ldots & +x_s & +(-x_s) & =0 \\
v & +x_1 & +(-v-x_1) & +x_2 & +\ldots & +x_s & +(-x_s) & =0 \\
v & +x_1 & +(-x_1) & +(-v+x_2) & +\ldots & +x_s & +(-x_s) & =0 \\
v & +x_1 & +(-x_1) & +x_2 & +\ldots & +x_s & +(-x_s) & =0 \\
\vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
v & +x_1 & +(-x_1) & +x_2 & +\ldots & +(-v+x_s) & +(-x_s) & =0 \\
v & +x_1 & +(-x_1) & +x_2 & +\ldots & +x_s & +(-v-x_s) & =0
\end{array}$$

Aplicando f e usando $f(x_i) = 2c - f(-x_i)$, $f(-v + x_i) = 2c - f(v - x_i)$ e $f(-v - x_i) = 2c - f(v + x_i)$ obtemos, depois de somar todas as linhas obtidas e lembrando que $\alpha \geqslant e = \exp(H)$,

$$ef(v) + (e-2)2cs + 2s2c = T_e + T_e + \ldots + T_e = eT_e = e^2c$$

e lembrando que $s = (e-1)/2$ obtemos

$$ef(v) + (e-1)(e-2)c + (e-1)2c = e^2c$$

$$ef(v) + (e-1)ec = e^2c$$

$$ef(v) = ec$$

Podemos dividir por e porque $(m, n) = 1$, e obtemos $f(v) = c$. □

Deste resultado segue o seguinte corolário:

Corolário 2.0.3. *Seja $G = H \oplus K$ onde H e K são grupos abelianos finitos de ordens coprimas $|H| = m$, $|K| = n$ com $m \geqslant 11$ ímpar e com $e \leqslant (m+2)/3$ onde e é o expoente de H. Seja $H^* = H - \{0\}$. Suponha que α é um número natural coprimo com $|K|$ tal que*

$$\max\{6, \exp(H)\} \leqslant \alpha < \frac{m-2}{6}.$$

A única função $f : H^* \to K$ que leva sequências livres de quadrados de soma nula de comprimento α para sequências de soma nula é a função nula.

Demonstração. Uma tal função f verifica $P(\alpha)$ com $T_\alpha = 0$, logo f é uma função constante, assim para todo $v \in H^*$ temos $f(v) + \ldots + f(v) = \alpha f(v) = 0$ e sendo α coprimo com $|K|$ deduzimos $f(v) = 0$. □

CAPÍTULO 3

Sequências de Soma Zero nos Grupos Abelianos $C_2^3 \oplus C_3^2$ e $C_2^4 \oplus C_3^2$

No primeiro capítulo deste trabalho o Teorema 1.0.12 nos deu a estrutura de uma sequência de tamanho $s(G) - 1$ que não tinha subsequência de tamanho n e soma zero no caso em que G é cíclico. Agora, pretendemos fazer o mesmo para o caso em que o grupo em questão é $G = C_3^2$.

Em seguida, vamos nos concentrar em demonstrar que $s(C_2^3 \oplus C_3^2) = 25$ e posteriormente mostrar que $29 \leqslant s(C_2^4 \oplus C_3^2) \leqslant 31$. Para demonstração destes resultados iniciamos com a definição de translação de sequência que preserva soma zero. Essas translações ajudam a mudar a sequência inicial para uma nova sequência que ainda preserva a propriedade de ter (ou não) subsequência de soma zero.

Definição 3.0.1. *Seja G um grupo abeliano finito. Dada uma sequência S em $\mathcal{F}(G)$ e um elemento $g \in G$ dizemos que a sequência $S' = S + g$, obtida somando g a todos elementos de S, é uma translação da sequência S que preserva soma zero se valer a propriedade: a sequência S tem subsequência de soma zero de tamanho k se, e somente se, S' tem subsequência de soma zero e tamanho k.*

O próximo teorema nos diz que a menos de uma translação adequada todas as sequências em $G = C_3^2$ de tamanho $s(G) - 1$ tem a mesma estrutura. Mais precisamente demonstramos o seguinte resultado:

Lema 3.0.2. *No grupo abeliano $G = C_3^2$ as sequências de tamanho $s(G) - 1 = 8$ que são livres de soma zero de tamanho $exp(G) = 3$ são, a menos de translações da forma:*

$$(0 \ \ a \ \ b \ \ a + b)^2,$$

onde a e b são geradores de C_3^2.

Demonstração. Sabemos pelo Teorema 1.0.13 que para o grupo em questão as sequências de tamanho oito que são livres de subsequências de soma zero e tamanho três são aquelas da forma T^2 onde T é livre de quadrados. Assim vamos buscar classificar as sequências livres de quadrados de tamanho 4, que denotaremos por

$$T = x \ \ y \ \ z \ \ w$$

Tomando o elemento x da sequência, temos que algum dos outros elementos restantes em T não é gerado por x, pois caso isso ocorresse teríamos a repetição de algum elemento uma vez que $\langle x \rangle = \{0, x, 2x\}$ só tem três elementos. Daí podemos supor, sem perda de generalidade, que x e y são geradores.

Agora, fixados os geradores x e y vamos analisar as possibilidades para os elementos z e w. Note primeiramente que z não pode ser o elemento $2x + 2y$ pois neste caso teríamos a subsequência de T com soma zero com os elementos $x, y, 2x + 2y$.

Primeiramente vamos mostrar que estas sequências podem ser de um dos tipos:

1. $(0 \;\; a \;\; b \;\; a+b)^2$

2. $(a \;\; b \;\; 2a \;\; 2b)^2$

3. $(a \;\; b \;\; a+b \;\; 2a)^2$

e depois vamos concluir que é possível com uma translação adequada transformar sequências dos tipos (3) e (2) em sequências do tipo (1).

1. Tome $z = 0$. Neste caso, pelo que já foi dito $w \notin \{0, x, y, 2x + 2y\}$, observe que se $w \in \{2x, 2y\}$ também temos subsequências de soma zero e tamanho três, logo $w \in \{x + y, x + 2y, 2x + y\}$.

   (a) Se $w = x + y$ temos que a sequência T tem a forma $T = 0 \;\; x \;\; y \;\; x+y$, que é do tipo (1).

   (b) Se $w = x + 2y$ então

   $$T = 0 \;\; x \;\; y \;\; x + 2y.$$

   Nesta sequência podemos fazer uma mudança de geradores da forma $C_3^2 = \langle y, x + 2y \rangle$, tomando $a = y$ e $b = x + 2y$ temos que $T = 0 \;\; a \;\; b \;\; a + b$. Observe que por simetria o mesmo vale quando $w = 2x + y$.

2. Fixe $z = 2x$. Inicialmente já temos que $w \notin \{x, y, 2x, 2x + 2y\}$ e também já analisamos o caso em que $w = 0$, e se $w = x+2y$ temos uma sequência de soma zero formada pelos elementos $y, 2x, x + 2y$ logo $w \in \{2x + y, 2y, x + y\}$.

(a) Se $w = 2y$ temos a sequência

$$T = x \;\; y \;\; 2x \;\; 2y$$

que é do tipo (2).

(b) Se $w = 2x + y$ temos a sequência

$$T = x \;\; y \;\; 2x \;\; 2x + y$$

mudando os geradores $C_3^2 = \langle 2x, y \rangle$ temos que T é da forma $T = a \;\; b \;\; 2a \;\; a + b$, sendo então do tipo (3).

(c) Tomando $w = x + y$, a sequência T é da forma $T = x \;\; y \;\; 2x \;\; x + y$ que é também da forma $a \;\; b \;\; 2a \;\; a + b$.

A demonstração do caso $z = 2y$ segue da mesma forma.

3. Fixe $z = x+y$. Neste caso temos que $w \notin \{0, x, y, x+y, 2x+2y\}$. Observe que se $w = 2x+y$ temos a subsequência de soma zero $T' = y \;\; x+y \;\; 2x+y$ e se $w = x+2y$ temos a subsequência de soma zero $T' = x \;\; x+y \;\; x+2y$. Logo só restam as sequências do terceiro tipo

$$T = x \;\; y \;\; x + y \;\; 2x$$

ou

$$T = x \;\; y \;\; x + y \;\; 2y.$$

4. Por fim, fixe $z = 2x + y$. Observe que $w \notin \{0, x, y, 2x + y, 2x + 2y\}$. Se $w \in \{2y, x + y\}$ podemos montar uma sequência de tamanho três e soma zero.

(a) Se $w = x + 2y$ temos a sequência

$$T = x \;\; y \;\; 2x + y \;\; x + 2y$$

fixando os geradores $C_3^2 = \langle x + 2y, y\rangle$ temos que a sequência T é da forma $a \;\; b \;\; a + b \;\; 2a$.

(b) Se $w = 2x$ então temos $T = x \;\; y \;\; 2x + y \;\; 2x$. Tomando $C_3^2 = \langle x, 2x + y\rangle$ observamos que T é novamente da forma $T = a \;\; b \;\; a + b \;\; 2a$.

O caso $x + 2y$ segue a mesma demonstração.

Para demonstrar a última parte, suponha que a sequência $\sigma(S_1)\cdots\sigma(S_8)$ seja do segundo tipo, ou seja,

$$\sigma(S_1)\cdots\sigma(S_8) = (a \;\; b \;\; 2a \;\; 2b)^2.$$

Daí somando a esta sequência $2a$ obtemos a sequência

$$(0 \;\; 2a + b \;\; a \;\; 2a + 2b)^2$$

observe que esta sequência é do tipo (1), basta tomar o par de geradores $g_1 = 2a + b$ e $g_2 = 2a + 2b$. De modo análogo, podemos concluir que as sequências do tipo (3) se tornam do tipo (1), bastando somar o elemento $2b$ a sequência. Com a mesma técnica podemos converter as sequências em qualquer um dos outros dois tipos.

$\square$

Este resultado também pode ser obtido utilizando o GAP. A utilização do

GAP é interessante em outros casos, onde não se tem um Teorema como 1.0.13.

3.1 Constante EGZ para o Grupo $C_2^3 \oplus C_3^2$

Como vimos no Capítulo 1, a constante EGZ, cuja notação é $s(G)$, já foi determinada para todos os grupos cíclicos e também para todos os grupos de posto 2. Ainda não há até o presente momento um resultado geral para grupos de posto maiores que dois. Em geral, não é uma tarefa fácil encontrar o valor exato desta constante. O que vamos fazer nesta seção é encontrar o valor de $s(G)$ para o grupo de posto três $C_2^3 \oplus C_3^2$.

Teorema 3.1.1. *Considere o grupo* $G = C_2^3 \oplus C_3^2$ *de expoente 6, então* $s(G) = 25$.

Demonstração. Vamos primeiramente usar o Corolário 1.0.15 para encontrar bons resultados para as cotas superior e inferior do grupo dado. Observe que podemos escrever o grupo $G = C_2^3 \oplus C_3^2$ da forma $C_2 \oplus C_6 \oplus C_6$. Neste caso temos que o conjunto de primos que dividem a ordem de G é o conjunto $P = \{2, 3\}$ e sabemos que $s(C_3^3) = 19 = 9 * 3 - 8$, $s(C_2^3) = 2^3 + 1 = 9 < 9 * 2 - 8 = 10$ e também é satisfeita a hipótese que $n_2 = n_3$, logo pelo corolário temos que

$$25 = 4 * 2 + 4 * 6 - 7 \leqslant s(C_2^3 \oplus C_3^2) \leqslant 5 * 2 + 2 * 6 + 2 * 6 - 8 = 26.$$

Daí obtemos duas cotas, uma superior e uma inferior bem próximas, vamos agora provar que $s(G) \leqslant 25$.

Para encontrar a cota superior, defina $H \cong C_2^3$ e $K \cong C_3^2$, considere ϕ a projeção de G em H e ψ a projeção de G em K. Seja S uma sequência em G tal que $|S| = 25$. Vamos reescrever essa sequência na forma $S = S_1 S_2 \ldots S_k S'$

onde $\sigma(\phi(S_i)) = 0$, $|S_i| = 2$ para todos $i \in [1, k]$ e a sequência S' é tal que a sequência $\phi(S')$ é livre de quadrados.

Agora temos a desigualdade $25 = 2k + |S'| \leqslant 2k + 8$ o que implica $17 \leqslant 2k$ como k é inteiro isso nos dá $k \geqslant 9$. Como $s(C_3^2) = 9$ e a sequência $\sigma(S_1)\sigma(S_2)\ldots\sigma(S_9)$ é uma sequência em C_3^2, temos que existe uma subsequência de tamanho 3 soma zero, logo em $S_1S_2\ldots S_9$ existe uma subsequência de tamanho 6 e soma zero, daí temos que $s(C_3^2) \leqslant 25$.

O que nos dá juntamente com o Corolário 1.0.15 que $s(G) = 25$.

□

3.2 Cotas Superiores para $s(C_2^4 \oplus C_3^2)$

Neste caso, diferentemente do anterior, não conseguimos o valor exato para a constante EGZ, mas restringimos bastante o intervalo entre as cotas inferior e superior.

Para o grupo $G = C_2^4 \oplus C_3^2$, se fixarmos $K = C_3^2$, podemos utilizar o Teorema 1.0.11 e concluir que $s(C_2^4 \oplus C_3^2) \leqslant 33$. Vamos nas próximas seções diminuir o valor desta cota superior.

3.2.1 $s(G) \leqslant 32$

Nesta seção vamos mostrar que é possível diminuir em uma unidade a cota que conhecemos para o grupo G. Para esta demonstração temos que provar que toda sequência S em $\in \mathcal{F}(G)$ de tamanho 32 tem uma subsequência de tamanho 6 e soma zero. Vamos então mostrar nesta seção que

Teorema 3.2.1. $s(C_2^2 \oplus C_3^2) \leqslant 32$.

Mostrar este resultado equivale a demonstrar que, para toda sequência S em G de comprimento 32, possui uma subsequência de soma zero e tamanho 6 (o expoente de G). Demonstraremos este Teorema por contradição. Para melhor compreensão vamos fazer um esquema da estrutura da demonstração:

1. Consideramos S uma sequência de comprimento 32 e sem subsequência de soma zero e comprimento 6, e escrevemos a sequência S na forma $S = S_1 \cdots S_k S'$.

2. Computamos com o GAP todas as subsequências S' de modo que S não tenha subsequências de tamanho 6 e soma zero.

3. Provamos que todo elemento da subsequência $S_1 \cdots S_k$ é um elemento da sequência S'.

4. Chegamos a contradição mostrando que as sequências S' encontradas não tem elementos da sequências $S_1 \cdots S_k$.

Demonstração. Defina $H \cong C_2^4$ e $K = C_3^2$. Seja ϕ a projeção de G em H e ψ a projeção de G em K. Seja S uma sequência em G tal que $|S| = 32$. Suponha por contradição que S não tenha subsequência de tamanho 6 e soma zero.

Então S permite uma decomposição $S = S_1 \cdots S_k S'$ satisfazendo que $\phi(S')$ é livre de quadrados, e para cada $i \in [1, k]$, $|S_i| = 2$ e $\sigma(\phi(S_i)) = 0$.

Como $|S| = 32 = 2k + |S'| \leqslant 2k + 16$

$$k \geqslant 8.$$

Observe que a sequência $\sigma(S_1)\sigma(S_2)\ldots\sigma(S_k)$ pode ser considerada uma sequência em C_3^2 uma vez que a soma nas componentes de H é nula. Como sabemos que $s(C_3^2) = 9$, se $k \geqslant 9$ a sequência $\sigma(S_1)\sigma(S_2)\ldots\sigma(S_k)$ vai possuir uma subsequência de tamanho 3 e soma zero implicando que em $S_1 \cdots S_k$ tem uma sequência de tamanho 6 e soma zero. Logo só resta analisar o caso em que $k = 8$ implicando que $|S'| = 16$.

Por hipótese, $\sigma(S_1) \cdots \sigma(S_k)$ é uma sequência no núcleo de ϕ que não tem subsequência de soma zero e tamanho 3. Então pelo Lema 3.0.2 a sequência $\sigma(S_1) \cdots \sigma(S_8)$, pode ser escrita na forma

$$\sigma(S_1) \cdots \sigma(S_8) = ((0,0)(0,a)(0,b)(0,a+b))^2 \ \ (*)$$

onde $a, b \in Ker(\phi)$ e a e b são geradores de C_3^2. Note que é possível escrever a sequência desta forma pelo fato de que, S não possui subsequência de tamanho 6 (expoente de G) e soma zero se, e somente se, para todo $g \in G$, $S + g$ também não possui tal subsequência. Logo, a translação necessária no Lema 3.0.2 gera uma nova sequência com a mesma característica de S, com relação a ser livre de soma zero e tamanho expoente de G. Logo esta translação não causa danos a demonstração do teorema.

Observe que, se em S' tivermos alguma sequência T, com $|T| = 4$ e tal que $\sigma(\phi(T)) = 0$ e $\sigma(\psi(T)) = g \in \{0, 2a, 2b, 2a + 2b\}$ então obtemos uma sequência de tamanho 6 e soma zero concatenando a sequência T com algum S_i tal que $\sigma(\psi(S_i))$ seja o oposto de g.

Com a ajuda do GAP vamos tentar encontrar todas as possíveis sequências S' que não possuem subsequências de tamanho 4 como descritas no parágrafo anterior e que não possuem subsequência de tamanho 6 e soma zero. Esta parte da demonstração será um pouco técnica mas importante para entender como construímos estas sequências.

Se tentarmos construir todas as sequências de tamanho 16 em $C_2^4 \oplus C_3^2$ que sejam livre de quadrados na primeira componente, o programa não consegue uma vez que excede o seu limite de memória. Para contornar este problema iremos dividir esse processo em blocos.

Primeiramente, como $|S'| = 16$ sabemos que em $\phi(S')$ aparecem todos elementos de C_2^4, então para facilitar os cálculos, fixei na sequência a posição de cada um desses elementos, da seguinte forma:

f_1, f_2, f_3, $f_1 * f_2 * f_3$, $f_1 * f_4$, $f_2 * f_4$, $f_3 * f_4$, $f_1 * f_2 * f_3 * f_4$, f_4, $f_1 * f_2$, $f_1 * f_3$, $f_2 * f_3 * f_4$, $f_1 * f_2 * f_4$, $f_1 * f_3 * f_4$, $f_2 * f_3$, id onde f_1, f_2, f_3, f_4 são geradores de C_2^4.

No primeiro passo considerei os 8 primeiros elementos de S' cujas primeiras entradas são:

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad f_1 * f_2 * f_3, \quad f_1 * f_4, \quad f_2 * f_4, \quad f_3 * f_4, \quad f_1 * f_2 * f_3 * f_4 \tag{3.1}$$

Da sequência formada pelos elementos de (3.1) foram calculadas as subsequências de tamanho 4 e soma zero.

```
gg:=DirectProduct(CyclicGroup(2),CyclicGroup(2),CyclicGroup(2),CyclicGroup(2));;
ee:=Elements(gg);;
r1:=ee[2]; #f1
r2:=ee[3]; #f2
r3:=ee[4]; #f3
r4:=ee[5]; #f4
s1:=r1*r4; #f1*f4
s2:=r2*r4; #f2*f4
s3:=r3*r4; #f3*f4
s4:=r1*r2*r3*r4; #f1*f2*f3*f4
rst0:=[r1,r2,r3,r1*r2*r3,s1,s2,s3,s4];
l1:=Filtered(Combinations([1..8],4),
l->Order(Product([rst0[l[1]],rst0[l[2]],rst0[l[3]],rst0[l[4]]]))=1;; Size(l1); #14
```

Encontramos então no total 14 sequências, que se encontrar na lista "l1".

Como organizamos os elementos de (3.1) em uma ordem fixa, a lista que obtemos com os comandos anteriores nos retorna as posições relativas aos elementos que dão soma zero. Por exemplo, o primeiro elemento da lista "l1"é [1, 2, 3, 4] que significa que a soma dos 4 primeiros elementos de (3.1).

Agora o que vamos fazer é construir as possibilidades para a componente $K = C_3^2$ de cada elemento de (3.1) . Neste ponto vamos formar as sequências a principio de tamanho 8 em K que não possuem subsequência de tamanho 4 e soma igual a $0, 2a, 2b$ ou $2a + 2b$ nas posições relativas as encontradas na lista "l1".

Para cada elemento (h, k) em $H \oplus K$ temos 9 possibilidades (tamanho de C_3^2) de escolha para o elemento k, uma vez que não temos restrições para as componentes em K. Assim, como a sequência formada pelos elementos de (3.1) tem 8 elementos, teríamos 9^8 possibilidades. Este número é muito grande para os cálculos no GAP. Para contornar este problema criei subconjuntos menores para não exceder a memória do programa e conseguir concluir os cálculos.

Primeiramente construímos o grupo C_3^2, aqui chamamos seus geradores de a e b e criamos alguns conjuntos que auxiliaram na resolução do problema:

```
g:=DirectProduct(CyclicGroup(3),CyclicGroup(3));;
e:=Elements(g);;
u:=Tuples(e,4);; # todas as 4-uplas de elementos de C32.
a:=[]; for i in [1..Size(u)] do if Product(u[i])=e[2] then Add(a,u[i]);fi;od;;
 # soma de 4 elementos em C32 de soma igual a "a"
b:=[]; for i in [1..Size(u)] do if Product(u[i])=e[3] then Add(b,u[i]);fi;od;;
 # soma de 4 elementos em C32 de soma igual a "b"
ab:=[]; for i in [1..Size(u)] do if Product(u[i])=e[5] then Add(ab,u[i]);fi;od;;
 # soma de 4 elementos em C32 de soma igual a "a+b"
2ab:=[]; for i in [1..Size(u)] do if Product(u[i])=e[7] then Add(2ab,u[i]);fi;od;;
 # soma de 4 elementos em C32 de soma igual a "2a+b"
a2b:=[]; for i in [1..Size(u)] do if Product(u[i])=e[8] then Add(a2b,u[i]);fi;od;;
 # soma de 4 elementos em C32 de soma igual a "a+2b"
```

Primeiramente defini que as componentes em K dos quatro primeiros elementos de (3.1), f_1, f_2, f_3 e $f_1 * f_2 * f_3$ seriam tais que a sua soma fosse fixada igual a "2a+b"e que as componentes em K dos outro quatro elementos $f_1 * f_4$, $f_2 * f_4$, $f_3 * f_4$, $f_1 * f_2 * f_3 * f_4$ seriam com soma na componente K fixada igual a "a+b". Construímos todas as sequências de tamanho 8 com essas características e removemos aquelas indesejadas, aquelas de tamanho 4 com soma zero na primeira componente e soma na segunda componente igual a $0, 2a, 2b$ ou $2a+2b$. No desenvolvimento do algoritmo chamamos o conjunto $\{0, 2a, 2b, 2a+2b\}$ de "c".

```
c:=[e[1],e[4],e[6],e[9]];; # formado por 0, 2a, 2b, 2a+2b
c1:=[];
for i in [1..Size(2ab)] do
      for j in [1..Size(ab)] do
          Add(c1,Concatenation(2ab[i],ab[j]));
      od;
od;

y1:=[];
 for i in [1..Size(c1)] do for j in [1..Size(l1)] do
   if (Product([c1[i][l1[j][1]],c1[i][l1[j][2]],c1[i][l1[j][3]],c1[i][l1[j][4]]]) in c)
      then Add(y1,c1[i]);
   fi;
 od;
od;



y11:=Set(y1);; d1:=Difference(c1,y11);; Size(d1); #729
```

Se T é uma sequência da lista "d1", então T tem tamanho 8 e não possui nenhuma subsequência T' tal que $|T'| = 4$ e $\sigma(T') = (0, k)$, com $k \in \{0, 2a, 2b, 2a+2b\}$. Observe que a lista "d1"tem 729 dessas sequências.

Como a principio estamos construindo subsequências de S que não possuem subsequências de tamanho 6 e soma zero, devemos verificar se nas sequências obtidas no passo anterior temos alguma de tamanho 6 e soma zero. Um fato interessante é que nos elementos de (3.1) não tem nenhuma subsequência de tamanho 6 e soma igual a zero, ou seja, se T está na lista "d1", ela não possuem nenhuma subsequência de tamanho 6 e soma zero relativa a componente H, logo não precisamos nas 729 sequências retirar mais nenhuma sequência.

Agora vamos considerar os 12 primeiros elementos de S' cujas primeiras entradas são

$$f_1, f_2, f_3, f_1{*}f_2{*}f_3, f_1{*}f_4, f_2{*}f_4, f_3{*}f_4, f_1{*}f_2{*}f_3{*}f_4, f_4, f_1{*}f_2, f_1{*}f_3, f_2{*}f_3{*}f_4 \tag{3.2}$$

No próximo passo procuramos todas as subsequências de tamanho 4 e soma zero (na primeira componente) envolvendo apenas os vetores de (3.2) e removendo as combinações já encontradas com os vetores de (3.1) com os comandos:

```
r1:=ee[2]; r2:=ee[3]; # f1 e f2
r3:=ee[4]; r4:=ee[5]; # f3 e f4
s1:=r1*r4; s2:=r2*r4; s3:=r3*r4;
s4:=r1*r2*r3*r4;
t1:=r4; t2:=r1*r2; t3:=r1*r3; t4:=r2*r3*r4;
m1:=r1*r2*r4;
m2:=r1*r3*r4;
m3:=r2*r3;
id2:=ee[1]; # Elemento neutro do grupo
rst0:=[r1,r2,r3,r1*r2*r3,s1,s2,s3,s4];
# f1,f2,f2, f1*f2*f3, f1*f4, f2*f4, f3*f4, f1*f2*f3*f4
rst1:=[r1,r2,r3,r1*r2*r3,s1,s2,s3,s4,t1,t2,t3,t4];
# f1,f2,f2, f1*f2*f3, f1*f4, f2*f4, f3*f4, f1*f2*f3*f4, f4, f1*f2, f1*f3, f2*f3*f4
l2:=Filtered(Combinations([1..12],4),
l->Order(Product([rst1[l[1]],rst1[l[2]],rst1[l[3]],rst1[l[4]]]))=1;;
l22:=Difference(l2,l1);; Size(l22); #25
```

Agora repetimos o mesmo processo que fizemos acima, vamos montar em C_3^2 sequências de tamanho 12 que não tem subsequência de soma em "c"mas nas posições específicas relativas as 25 sequências que encontramos, para isso usamos as 729 sequências encontradas anteriormente de tamanho 8 que não possuíam tais sequências e concatenamos uma sequência de tamanho 4 cuja soma é igual a "b"através dos comandos:

```
c2:=[];
for i in [1..Size(d1)] do
      for j in [1..Size(b)] do
       Add(c2,Concatenation(d1[i],b[j]));
      od;
od;
y2:=[];
for i in [1..Size(c2)] do
 for j in [1..Size(l22)] do
  if (Product([c2[i][l22[j][1]],c2[i][l22[j][2]],c2[i][l22[j][3]],c2[i][l22[j][4]]]) in c)
   then Add(y2,c2[i]);
  fi;
 od;
od;

y22:=Set(y2);; d2:=Difference(c2,y22);;
```

Dentro das sequências encontradas no passo anterior vamos retirar também todas as sequências que não possuem subsequências de tamanho 6 e soma zero (nas duas componentes). Para isso, primeiramente olhamos as subsequências de soma zero e tamanho 6 na primeira componente com os comandos:

```
l3:=Filtered(Combinations([1..12],6),
l->Order(Product([rst1[l[1]],rst1[l[2]],rst1[l[3]],rst1[l[4]],rst1[l[5]],
                    rst1[l[6]]]))=1;;
 Size(l3); #48
```

Agora sim, vamos retirar da lista as sequências de tamanho 6 e soma zero:

```
y3:=[]; for i in [1..Size(d2)] do
 for j in [1..Size(l3)] do
  if (Order(Product([d2[i][l3[j][1]],d2[i][l3[j][2]],d2[i][l3[j][3]],d2[i][l3[j][4]],
                     d2[i][l3[j][5]],d2[i][l3[j][6]]]))=1)
  then Add(y3,d2[i]);fi;od;od;

y33:=Set(y3);; d3:=Difference(d2,y33);; Size(d3); #30
```

Então retirando todas as subsequências de tamanho 6 e soma zero chegamos em 30 possíveis sequências.

No próximo passo vamos definir as possíveis componentes K para os próximos 3 elementos de (3.1): $f_1 * f_2 * f_4, \quad f_1 * f_3 * f_4, \quad f_2 * f_3$. Observe que nos passos anteriores fixamos a soma (nas componentes K) dos 4 primeiros vetores (igual a "2a+b") e a soma dos 4 próximo vetores também estava definida (igual a "a+b") e dos próximos 4 a soma igual a "b". Agora para estes 3 próximos vetores não fixaremos uma soma específica, ou seja, as segundas coordenadas destes vetores podem ser quaisquer elementos de C_3^2. Criamos então uma lista com todas as triplas possíveis em C_3^2, admitindo repetição.

```
t:=Tuples(e,3);;
```

Vamos fazer o mesmo método que fizemos anteriormente, vamos concatenar cada sequência obtida anteriormente (que não tinham as sequências indesejadas) com uma sequência de tamanho 3 tais que após esta concatenação não haja sequências indesejadas. Para isso olhamos novamente para os elementos das primeiras coordenadas para obter os vetores que têm soma zero em C_2^4 envolvendo os vetores

f_1, f_2, f_3, $f_1 * f_2 * f_3$, $f_1 * f_4$, $f_2 * f_4$, $f_3 * f_4$, $f_1 * f_2 * f_3 * f_4$, f_4, $f_1 * f_2$, $f_1 * f_3$, $f_2 * f_3 * f_4$, $f_1 * f_2 * f_4$, $f_1 * f_3 * f_4$, $f_2 * f_3$

```
r1:=ee[2]; r2:=ee[3]; # f1 e f2
r3:=ee[4]; r4:=ee[5]; # f3 e f4
s1:=r1*r4;
s2:=r2*r4;
s3:=r3*r4;
s4:=r1*r2*r3*r4;
t1:=r4;
t2:=r1*r2;
t3:=r1*r3;
t4:=r2*r3*r4;
m1:=r1*r2*r4;
m2:=r1*r3*r4;
m3:=r2*r3;
rst2:=[r1,r2,r3,r1*r2*r3,s1,s2,s3,s4,t1,t2,t3,t4,m1,m2,m3];

l4:=Filtered(Combinations([1..15],4),

l->Order(Product([rst2[l[1]],rst2[l[2]],rst2[l[3]],rst2[l[4]]]))=1;;

l44:=Difference(l4,l2);; Size(l44); #66
```

Dai obtemos 66 restrições, a partir daqui concatenamos as sequências anteriormente obtidas com mais 3 novos elementos usando as 66 restrições e com a ajuda deles olhamos as segundas componentes nas posições convenientes obtidas da primeira coordenada, obtendo assim sequências de tamanho 15.

```
c4:=[]; for i in [1..Size(d3)] do
                 for j in [1..Size(t)] do
                       Add(c4,Concatenation(d3[i],t[j]));
                 od;
           od;
y4:=[];
for i in [1..Size(c4)] do
 for j in [1..Size(l44)] do
  if (Product([c4[i][l44[j][1]],c4[i][l44[j][2]],c4[i][l44[j][3]],c4[i][l44[j][4]]]) in c)
        then Add(y4,c4[i]);
  fi;
 od;
od;
y44:=Set(y4);; d4:=Difference(c4,y44);;
```

Depois deste processo pegamos todas as sequências que obtivemos no passo anterior e removemos todas as subsequências de tamanho 6 e soma zero, lembrando que as que eram formadas pelos 12 primeiros vetores já haviam sido retiradas em passos anteriores. Então olhamos primeiramente para as primeiras componentes todas as subsequências de tamanho 6 e soma zero que envolvem os os últimos 3 vetores adicionados ($f_1 * f_2 * f_4$, $f_1 * f_3 * f_4$, $f_2 * f_3$), isto é feito através dos comandos:

```
l5:=Filtered(Combinations([1..15],6),
l->Order(Product([rst2[l[1]],rst2[l[2]],rst2[l[3]],rst2[l[4]],rst2[l[5]],
rst2[l[6]]]))=1;;

l55:=Difference(l5,l3);; Size(l55); #232
```

Agora retiramos das sequências aquelas que nas posições correspondentes tem soma zero na segundas coordenadas correspondentes da seguinte forma:

```
y5:=[];
for i in [1..Size(d4)] do
      for j in [1..Size(l55)] do
            if (Order(Product([d4[i][l55[j][1]],d4[i][l55[j][2]],d4[i][l55[j][3]],
            d4[i][l55[j][4]], d4[i][l55[j][5]],d4[i][l55[j][6]]]))=1)
            then Add(y5,d4[i]);
      fi;
      od;
od;

y55:=Set(y5);; d5:=Difference(d4,y55);; Size(d5); #2
```

Nessas condições encontramos duas sequências. Agora pegamos estas duas sequências encontradas e concatenamos na primeira entrada a identidade e olhamos as possibilidades para a segunda componente retirando novamente as sequências indesejáveis.

Agora, como em S' temos a identidade na primeira componente, precisamos repetir os passos anteriores adicionando mais um vetor. Neste caso a última componente concatenada pode ser qualquer elemento de C_3^2 (ou seja, qualquer elemento da lista "e"). Mas nesta concatenação já vamos fazer como anteriormente, só concatenamos aquelas que nos convém, ou seja, a principio concatenamos aqueles que tem tamanho 4, e que se a soma zero na primeira componente a soma na segunda componente não é $0, 2a, 2b$ ou $2a + 2b$ na segunda. Com as linhas abaixo encontramos todos os vetores que têm soma zero de tamanho 4 envolvendo a identidade (somente em relação a primeira componente):

```
id2:=ee[1];
rst3:=[r1,r2,r3,r1*r2*r3,s1,s2,s3,s4,t1,t2,t3,t4,m1,m2,m3,id2];
l6:=Filtered(Combinations([1..16],4),
l->Order(Product([rst3[l[1]],rst3[l[2]],rst3[l[3]],rst3[l[4]]]))=1;;

l66:=Difference(l6,l4);; Size(l66); #35
```

Utilizamos então essas 35 possibilidades para montar as sequências da seguinte forma:

```
c6:=[];
for i in [1..Size(d5)] do
      for j in [1..Size(e)] do
            Add(c6,Concatenation(d5[i],[e[j]]));
      od;
od;

y6:=[];
for i in [1..Size(c6)] do
 for j in [1..Size(l66)] do
  if (Product([c6[i][l66[j][1]],c6[i][l66[j][2]],c6[i][l66[j][3]],c6[i][l66[j][4]]]) in c)
      then Add(y6,c6[i]);
  fi;
 od;
od;

y66:=Set(y6);; d6:=Difference(c6,y66);;
```

Neste caso então encontramos os vetores que desejamos. Agora também podemos verificar na lista anterior se há sequências de tamanho 6 e soma zero nas duas componentes. Novamente nos concentramos primeiramente na primeira componente. Descobrimos as sequências de tamanho 6 e soma zero (na primeira componente) envolvendo a identidade através dos comandos:

```
l7:=Filtered(Combinations([1..16],6),
l->Order(Product([rst3[l[1]],rst3[l[2]],rst3[l[3]],rst3[l[4]],rst3[l[5]],
                 rst3[l[6]]]))=1;;

l77:=Difference(l7,l5);; Size(l77); #168
```

Por fim, aplicamos essas restrições nas sequências encontradas da seguinte forma:

```
y7:=[];
for i in [1..Size(d6)] do
      for j in [1..Size(l77)] do
            if (Order(Product([d6[i][l77[j][1]],d6[i][l77[j][2]],d6[i][l77[j][3]],
            d6[i][l77[j][4]], d6[i][l77[j][5]],d6[i][l77[j][6]]]))=1)
then Add(y7,d6[i]);fi;od;od;

y77:=Set(y7);; d7:=Difference(d6,y77);; Size(d7); #2
```

Com os comandos que fizemos até agora o programa retornou 2 sequências, mas essas duas sequências estão somente em C_3^2, logo para ver realmente quem são estas sequências em $C_2^4 \oplus C_3^2$ fazemos:

```
m:=d7;;
for k in [1..Size(d7)] do
      for i in [1..16] do
            if d7[k][i]=e[1] then Remove(m[k],i);Add(m[k],vve[1],i);
            elif d7[k][i]=e[2] then Remove(m[k],i); Add(m[k],vve[6],i);
            elif d7[k][i]=e[3] then Remove(m[k],i); Add(m[k],vve[7],i);
            elif d7[k][i]=e[4] then Remove(m[k],i); Add(m[k],vve[6]*vve[6],i);
            elif d7[k][i]=e[5] then Remove(m[k],i); Add(m[k],vve[6]*vve[7],i);
            elif d7[k][i]=e[6] then Remove(m[k],i); Add(m[k],vve[7]*vve[7],i);
            elif d7[k][i]=e[7] then Remove(m[k],i);Add(m[k],vve[6]*vve[6]*vve[7],i);
            elif d7[k][i]=e[8] then Remove(m[k],i);Add(m[k],vve[6]*vve[7]*vve[7],i);
            elif d7[k][i]=e[9] then Remove(m[k],i);Add(m[k],vve[6]^2*vve[7]^2,i);
            fi;
      od;
od;

mm:=[];
for i in [1..Size(m)] do
      Add(mm,[m[i][1]*C42[1],m[i][2]*C42[2],m[i][3]*C42[3],m[i][4]*C42[4],m[i][5]*C42[5],
      m[i][6]*C42[6],m[i][7]*C42[7],m[i][8]*C42[8],m[i][9]*C42[9],m[i][10]*C42[10],
      m[i][11]*C42[11],m[i][12]*C42[12],m[i][13]*C42[13],m[i][14]*C42[14],
      m[i][15]*C42[15], m[i][16]*C42[16]]);od;
```

De onde obtemos as duas sequências finais:

```
[f1*f5^2*f6, f2*f5^2*f6, f3*f5^2*f6, f1*f2*f3*f5^2*f6, f1*f4*f5*f6, f2*f4*f5*f6,
 f3*f4*f5*f6, f1*f2*f3*f4*f5*f6, f4*f5*f6, f1*f2*f5^2*f6, f1*f3*f5^2*f6, f2*f3*f4*f5*f6,
 f1*f2*f4*f5*f6, f1*f3*f4*f5*f6, f2*f3*f5^2*f6, f5^2*f6 ]

 [ f1*f5^2*f6, f2*f5^2*f6, f3*f5^2*f6, f1*f2*f3*f5^2*f6, f1*f4*f5*f6, f2*f4*f5*f6,
 f3*f4*f5*f6, f1*f2*f3*f4*f5*f6, f4*f5^2*f6, f1*f2*f5*f6, f1*f3*f5*f6, f2*f3*f4*f5^2*f6,
  f1*f2*f4*f5^2*f6, f1*f3*f4*f5^2*f6, f2*f3*f5*f6, f5*f6 ].
```

Aqui consideramos em C_3^2 os geradores $a = f_5$ e $b = f_6$.

Desta maneira que dividimos o problema do cálculo dessas sequências, o GAP consegue executar estes comandos de maneira que não excede o limite de memória. Observe que obtivemos esses cálculos fixando a soma dos 4 primeiros elementos, dos próximos 4 e dos próximos 4. Agora o que temos que fazer é ir mudando o valor de cada uma dessas somas. Observe também que obviamente não fixamos estas somas no conjunto $\{0, 2a, 2b, 2a + 2b\}$, pois nestes casos já teríamos subsequências de tamanho 6 e soma zero, logo é suficiente variar essas somas no conjunto $\{a, b, a + b, 2a + b, a + 2b\}$. Com estes conjuntos temos para cada parcela 5 opções de soma, temos então que fazer 625 casos (isso dá um trabalho relativamente grande, mas basta fazer trocas adequadas de elementos).

Depois de fazer todos os possíveis casos chegamos em um total de 180 sequências de tamanho 16 que são livres de quadrados na primeira componente e que não possuem subsequências indesejadas.

Proposição 3.2.2. *Todos elementos da sequência $S_1S_2 \dots S_8$, são elementos da sequência S' e toda subsequência S_i com $1 \leqslant i \leqslant 8$ é da forma $(h, k)(h, k)$.*

Demonstração. Seja (h, k) um elemento da sequência $S_1S_2 \dots S_8$, ou seja, existe $i \in [1, 8]$ tal que $S_i = (h, k)(h, k')$. Como $|supp(\phi(S'))| = 2^4$ então temos que em $\phi(S')$ aparecem todos os elementos de H logo $h \in supp(\phi(S'))$. Sendo assim, em S' existe um elemento da forma $(h, k")$.

Defina $S_i^* = (h, k")(h, k')$. Observe que, $\sigma(\phi(S_i^*)) = 0$ e a sequência $\sigma(S_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(S_{i-1})\sigma(S_i^*) \cdot \sigma(S_{i+1}) \cdot \ldots \cdot \sigma(S_8)$ não tem nenhuma subsequência de tamanho 3 e soma zero (por hipótese), logo pelo Lema 3.0.2 obtemos que $\sigma(S_i^*) = \sigma(S_i)$, ou seja, $k = k" = k'$.

□

Como $\sigma(S_1)\ldots\sigma(S_8) = ((0,0)(0,a)(0,b)(0,a+b))^2$ e da proposição anterior temos que

$$S_1 \ldots S_8 = ((h_1,0)(h_2,0)(h_3,2a)(h_4,2a)(h_5,2b)(h_6,2b)(h_7,2a{+}2b)(h_8,2a{+}2b))^2.$$

Ou seja, a proposição nos garante duas coisas, a primeira é que cada S_i é formado por dois elementos idênticos e além disso estes elementos tem que aparecer na sequência S'. Logo, nas possíveis sequências S' tem que aparecer como segunda componente os elementos $0, 2a, 2b$ e $2a + 2b$.

Como conseguimos construir todas as possíveis sequências S' agora basta analisa-las. O que é interessante é que em nenhuma delas aparecem estes elementos que desejamos, chegando portanto a uma contradição. Um exemplo disto são as duas sequências obtidas anteriormente, reescrevemos de outra forma para melhor entendimento:
$S' = (h_1, 2a + b)(h_2, 2a + b)(h_3, 2a + b)(h_4, 2a + b)(h_5 a + b)(h_6, a + b)$
$(h_7 a + b)(h_8, a + b)(h_9, a + b)(h_{10}, 2a + b)(h_{11} 2a + b)(h_{12} a + b)(h_{13} a + b)$
$(h_{14} a + b)(h_{15}, 2a + b)(h_{16}, 2a + b)$

ou

$S' = (h_1, 2a + b)(h_2, 2a + b)(h_3, 2a + b)(h_4, 2a + b)(h_5, a + b)(h_6, a + b)$
$(h_7, a+b)(h_8, a+b)(h_9, 2a+b)(h_{10}, a+b)(h_{11}, a+b)(h_{12}, 2a+b)(h_{13}, 2a+b)$
$(h_{14}, 2a + b)(h_{15}, a + b)(h_{16}, a + b)$

Analisando estas sequências, notamos que em todas elas não temos nenhum elemento cuja componente K pertença ao conjunto $c = \{0, 2a, 2b, 2a+2b\}$. O mesmo vai ocorrer com todas as outras sequências, isso gera uma contradição com a Proposição 3.2.2, encerrando assim a demonstração.

$\square$

O que vamos fazer na próxima seção é diminuir ainda mais a cota superior.

3.2.2 Diminuindo a Cota Superior para 31

Nesta ponto vamos usar a mesma técnica que utilizamos na subseção anterior para a demonstração do resultado.

Considerando a sequência S com $|S| = 31$ e fazendo a separação conveniente da sequência como antes temos que $k \geqslant 8$. Então a sequência $S_1 S_2 \ldots S_8$ é da forma como descrita no lema 3.0.2. Como vimos anteriormente podemos fazer uma translação dos elementos da sequência mantendo o fato de ter ou não ter subsequência de soma zero.

Como $k = 8$ temos que $31 = 16 + |S'|$ o que nos dá que $|S'| = 15$. Como a sequência S' é livre de quadrados na primeira componente, temos que falta exatamente um elemento de C_2^4.

Através de uma translação em relação as componentes de C_2^4 podemos supor que este elemento que falta é a identidade do grupo C_2^4.

Com a ajuda do GAP foi construído as possíveis sequências S' que não tinham as sequências indesejadas. As sequências que obtemos foram exatamente as 180 obtidas no caso em que $|S| = 32$, retirando apenas o elemento que continha a identidade na primeira componente.

Se os elementos que aparecem na sequência $S_1 S_2 \ldots S_8$ tiverem como primeira entrada elementos que aparecem em S' então o problema está resolvido pelos mesmos argumentos que no caso da sequência de tamanho 32. Então a única possibilidade é termos como primeira entrada nos elementos de $S_1 S_2 \ldots S_8$ o único elemento que não aparece em S' como primeira entrada, que é a identidade. Mas, se todos elementos da sequência $S_1 S_2 \ldots S_8$ tem a identidade na primeira entrada, então temos 16 elementos no total. Como $s(C_3^2) = 9$ então encontramos uma sequência de tamanho 3 e soma zero (nas duas entradas), separando esta sequência, restam 13 elementos na sequência, onde podemos achar novamente outra sequência de tamanho 3 e soma zero, juntando essas duas sequências temos uma sequência de tamanho 6 e soma zero.

O que gera as mesmas conclusões, ou seja, que neste caso, para toda sequência S de tamanho 31 obtemos uma subsequência de tamanho 6 e soma zero.

3.2.3 Comentários sobre a cota $s(G) \leqslant 30$

Um passo natural que ocorreu na construção deste trabalho foi utilizar a mesma técnica aplicada nas subseções anteriores a fim de reduzir a cota para 30. Com isso conseguimos o seguinte resultado particular:

Teorema 3.2.3. *Seja $G = C_2^4 \oplus C_3^2$. Se toda sequência S de tamanho 30 pode ser escrita na forma $S_1 \ldots S_k S'$, como descrita nas subseções anteriores, com $k = 7$ ou $k > 8$ então $s(G) \leqslant 30$.*

Se S é uma sequência de elementos de G tal que $|S| = 30$ então fazendo o processo de separação de S na forma $S_1 \ldots S_k S'$ como descrita nas outras subseções infere-se que $30 = 2k + |S'| \leqslant 2k + 16$ implicando que $k \geqslant 7$. Pelo fato de $s(C_3^2) = 9$ e a sequência $\sigma(S_1) \ldots \sigma(S_k)$ poder ser considerada uma sequência em C_3^2 temos que se $k \geqslant 9$ então a sequência $\sigma(S_1) \ldots \sigma(S_k)$ possui uma subsequência de tamanho 3 e soma zero, o que implica que $S_1 \ldots S_k$ possui uma subsequência de tamanho 6 e soma zero.

Note então que mostrando o Teorema acima, ficamos bem próximos de descobrir se $s(G) \leqslant 30$ ou que existe uma sequência de tamanho 30 livre de soma zero e tamanho $exp(G)$, o que provaria que $s(G) = 31$. Para isso é necessário analisar somente o que ocorre quando $k = 8$. Não resolveremos este caso neste trabalho.

Para demonstrar o Teorema acima provamos o próximo lema que faz uma classificação, a menos de translação, de todas as sequências em C_3^2 de tamanho 7 ($s(G) - 2$) que não tem subsequência de tamanho 3 e soma zero. Para esta demonstração utilizamos o GAP para a construção das sequências desejadas.

Lema 3.2.4. *No grupo C_3^2 existem somente 216 sequências de tamanho 7 tais que nestas sequências não existem subsequências de tamanho 3 e soma zero, além disso a menos de translações estas sequências são da forma:*

$$(id \quad a \quad a \quad b \quad b \quad a+b \quad a+b)$$

onde a e b são geradores de C_3^2.

Estas sequências são encontradas através das seguintes linhas:

```
g:=DirectProduct(CyclicGroup(3),CyclicGroup(3));
f:=function(l) local i;
 for i in [1..Length(Combinations(l,3))] do
   if Order(Product(Combinations(l,3)[i]))=1 then
   return false;
   fi;
 od; return true;
end;
y:=function(a,m); if m=0 then return [];fi; if m=1 then return [a]; fi; if m=2 then
 return [a,a]; fi; end;
er:=function(l);
 return Concatenation(y(Elements(g)[1],l[1]),y(Elements(g)[2],l[2]),
 y(Elements(g)[3],l[3]),y(Elements(g)[4],l[4]),y(Elements(g)[5],l[5]),
 y(Elements(g)[6],l[6]),y(Elements(g)[7],l[7]),y(Elements(g)[8],l[8]),
 y(Elements(g)[9],l[9]));
end;
c:=Cartesian([0,1,2],[0,1,2],[0,1,2],[0,1,2],[0,1,2],[0,1,2],[0,1,2],[0,1,2],[0,1,2]);;
r:=Filtered(c,x->Sum(x)=7);;
rr:=List(r,er);;
t:=Filtered(rr,f);;Size(t); #216
```

Observando as sequências encontradas pelo GAP podemos classifica-las nos seguintes tipos:

1. $(id \quad a \quad a \quad b \quad b \quad a+b \quad a+b)$
2. $(id \quad id \quad a \quad a \quad b \quad b \quad a+b)$
3. $(id \quad id \quad a \quad a \quad b \quad a+b \quad a+b)$
4. $(a \quad a \quad -a \quad -a \quad b \quad b \quad -b)$
5. $(a \quad -a \quad -a \quad b \quad b \quad a+b \quad a+b)$
6. $(a \quad a \quad -a \quad -a \quad b \quad a+b \quad a+b)$
7. $(a \quad a \quad -a \quad -a \quad b \quad b \quad a+b)$

O que podemos mostrar é que através de uma translação todos estes casos se resumem só ao caso (1).

De fato, tomando $(id \quad id \quad a \quad a \quad b \quad b \quad a+b)$ soma-se a esta sequência $-a-b$ obtendo a sequência $(-a-b \quad -a-b \quad -b \quad -b \quad -a \quad -a \quad id)$ que é da forma desejada. O restante das sequências ocorre o mesmo com uma translação adequada.

Então a menos de quem escolhemos como geradores, a partir de agora podemos supor que

$$S_1 \dots S_7 = (id \quad a \quad a \quad b \quad b \quad a+b \quad a+b).$$

Demonstração do Teorema: Seja S em G tal que $|S| = 30$ fazendo o processo de separação da sequência chegamos que $30 = 2k + |S'| \leqslant 2k + 16$ o que nos dá que $k \geqslant 7$. Vamos analisar o caso em que $k = 7$. Se $k = 7$ então obtemos que $S' = 16$ e como S' é livre de quadrados na primeira componente temos que aparecem em S' todos os elementos de C_2^4.

Se tivermos em $\sigma(S_1) \dots \sigma(S_7)$ uma sequência de tamanho 3 e soma zero a sequência $S_1 \dots S_7$ tem uma sequência de tamanho 6 e soma zero, pois cada S_i tem tamanho dois e soma zero na primeira componente, então podemos supor que a sequência $\sigma(S_1) \dots \sigma(S_7)$ não possui subsequência de tamanho 3 e soma zero. Como a sequência $\sigma(S_1) \dots \sigma(S_7)$ pode ser considerada uma sequência em C_3^2 temos do Lema 3.2.4 que a sequência tem uma das formas apresentadas e a partir das observações posteriores, podemos considerar que

$$S_1 \dots S_7 = (id \quad a \quad a \quad b \quad b \quad a+b \quad a+b).$$

A partir daqui vamos fazer como no caso em que $|S'| = 32$, vamos usar o programa GAP para filtrar as sequências e restar apenas sequências de tamanho 16 que são livres de quadrados nas primeiras componentes e que não possuem sequências indesejadas. Note um fato interessante, os elementos da sequência $S_1 \dots S_7$ são os mesmos que aparecem na sequência $S_1 \dots S_7 S_8$ com a diferença que a identidade aparece agora só uma vez. Isso significa que o processo de achar as possíveis sequências S' é exatamente o mesmo, chegamos então as mesmas 180 sequências encontradas. Agora vamos provar que neste caso particular os elementos de $S_1 \dots S_7$ também são elementos de S', o mesmo que ocorre no caso em que $|S| = 32$.

Proposição 3.2.5. *Todos elementos da sequência $S_1 \ldots S_7$ são elementos da sequência S'.*

Demonstração. Tome um elemento de $S_1 \ldots S_7$ da forma (h, k_1), logo existe algum i com $1 \leqslant i \leqslant 7$ tal que $S_i = (h, k_1)(h, k_2)$ e, como já foi dito, vai existir em S' um elemento da forma (h, k_3). Então o que fazemos é, na sequência S trocar o elemento (h, k_1) pelo elemento (h, k_3).

Suponha que $k_1 \neq k_3$ então teremos em S' um elemento diferente. Mas isso não poderá ocorrer, pois em S' vimos que as 180 sequências obtidas, tem características bem específicas com relação as segundas componentes de seus elementos, em cada uma das 180 sequências encontradas, nas segundas componentes de uma sequência, só aparecem 2 elementos distintos digamos k_3 e k_4 e cada um deles aparece exatamente oito vezes na sequência. Então, se trocarmos o elemento de (h, k_3) que está em S' por um novo elemento (h, k_1) onde $k_1 \neq k_3$ então ou $k_1 \neq k_4$ o que implicaria que em S' aparecem 3 elementos distintos nas segundas componentes, o que não ocorre, ou $k_1 = k_4$ e ai teremos uma quantidade ímpar de elementos nas segundas componentes de S' o que também não ocorre, logo temos que ter $k_1 = k_3$ que por sua vez também nos dá que $k_1 = k_2 = k_3$. □

Agora, com a ajuda da proposição acima, a conclusão fica a mesma que no caso em que $|S'| = 32$, uma vez que as possibilidades de sequências que encontramos para S' não satisfazem a propriedade apresentada na proposição, ou seja, nas sequências de S' não aparecem os elementos de $S_1 \ldots S_7$. O que encerra a demonstração do Teorema (3.2.3) .

Neste ponto o leitor pode se perguntar o motivo do caso $k = 8$ não ter sido analisado. Na realidade ele foi analisado, mas a dificuldade apareceu no fato que se $k = 8$ então a sequência S' tem tamanho 14, faltando dois elementos de C_3^2 em $\phi(S')$. Com isso não conseguimos descobrir o que ocorre com a sequência S quando em $\phi(S_1)\dots\phi(S_8)$ só aparecem os elementos que faltam em $\phi(S')$, ficando este caso em aberto.

3.3 Uma cota inferior para $C_2^4 \oplus C_3^2$

Podemos utilizar a proposição 1.0.14 para encontrar um valor interessante para cota inferior de $s(C_2^4 \oplus C_3^2)$. Vamos, com a ajuda da proposição encontrar uma sequência de tamanho 28 que não tenha subsequência de tamanho 6 e soma zero, fazendo assim com que $s(C_2^4 \oplus C_3^2) \geqslant 29$.

Teorema 3.3.1. $29 \leqslant s(C_2^4 \oplus C_3^2)$

Demonstração. Escreva o grupo $s(C_2^4 \oplus C_3^2)$ da forma $G = C_2^2 \oplus C_6^2$ e fixe $C_6^2 = \langle e_1, e_2\rangle$. Utilizando a proposição anterior neste grupo chegamos que a sequência

$$U = (e_1)^5(e_2)^5(e_1 + e_2)^5$$

não tem nenhuma subsequência de tamanho 6 e soma zero, na realidade mais que isso, ela não possui nenhuma subsequência de soma zero e tamanho no máximo 6.

Podemos escrever a sequência U da forma $U = (T')^5$ e construir uma sequência

$T = 0\;T' = 0\;e_1\;e_2\;(e_1 + e_2)$, então T^5 não tem nenhuma subsequência de tamanho 6 e soma zero.

Agora, tomando e_3 e e_4 como geradores de C_2^2 e utilizando o segundo item da proposição podemos construir a sequência

$$S = 0^5\;\;(0{+}e_3)\;(0{+}e_4)\;(e_1)^5\;(e_1{+}e_3)\;(e_1{+}e_4)\;(e_2)^5\;(e_2{+}e_3)\;(e_2{+}e_4)\;(e_1{+}e_2)\;(e_1{+}e_2{+}e_3)\;(e_1{+}e_2{+}e_4).$$

E pela proposição ela não tem nenhuma subsequência de tamanho 6 e soma zero. Observe que $|S| = 28$, logo $s(C_2^4 \oplus C_3^2) \geqslant 29$.

$\square$

Uma pergunta que podemos fazer é a seguinte: será que podemos tomar esta sequência de tamanho 28 e completa-la de modo a obter uma sequência de tamanho 29 e que não possua subsequência de tamanho 6 e soma zero? Seria muito interessante se a resposta fosse positiva, mas a resposta desta pergunta é negativa. Para mostrar isso tomamos a sequência S e a reescrevemos da forma que fizemos anteriormente, da seguinte forma:

$$S_1 \dots S_8 S'$$

onde $|S_i| = 2$ para todo $1 \leqslant i \leqslant 8$, $\sigma(\phi(S_i)) = 0$ e a sequência S' é livre de quadrados na primeira componente. A sequência fica da seguinte forma:

$$S_1 \dots S_8 = ((f_1, f_5)\ \ (f_2, f_6)\ \ (f_1 + f_2, f_5 + f_6)\ \ (0, 0))^4$$

aqui observe que colocamos cada elemento de S_i, onde $C_2^4 = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ e $C_3^2 = \langle f_5, f_6 \rangle$

Esta sequência também pode ser escrita como

$$S_1 \dots S_8 = ((0, 2f_5)\ \ (0, 2f_6)\ \ (0, 2f_5 + 2f_6)\ \ (0, 0))^2$$

e a sequência S' fica sendo a seguinte:
$S' = (f_1, f_5)\,(f_2, f_6)\,(f_3, 0)\,(f_1 + f_2 + f_3, f_5 + f_6)\,(f_1 + f_4, f_5)\,(f_2 + f_4, f_6)$
$(f_4, 0)\,(f_1 + f_2, f_5 + f_6)\,(f_1 + f_3, f_5)\,(f_1 + f_2 + f_4, f_5 + f_6)\,(f_2 + f_3, f_6)\,(0, 0)$

Observe que não podemos acrescentar mais uma sequência de tamanho 2 e soma zero nas sequências $S_1 \dots S_8$, pois com 9 dessas sequências teríamos uma subsequência de soma zero e tamanho 6. Daí para continuar tendo uma sequência sem subsequência de soma zero e tamanho 6, a única alternativa seria acrescentar elementos em S'.

Lembremos que a sequência S' é construída livre de quadrados na primeira componente de seus elementos. Nesta sequência que encontramos, ela tem tamanho 12, então faltam 4 elementos de C_2^4 que não aparecem, são eles

$$f_3 + f_4, \quad f_2 + f_3 + f_4, \quad f_1 + f_3 + f_4, \quad f_2 + f_3 + f_4, \quad f_1 + f_2 + f_3 + f_4.$$

O que acontece é que concatenando a sequência S' mais um elemento da forma (h, k), com h sendo um dos elementos que faltam e k sendo um elemento de C_3^2, a sequência resultante sempre terá uma subsequência de tamanho 6 e soma zero. Para fazer isso fixado h variamos k e usamos a seguinte função que testa se a sequência tem ou não subsequências de soma zero e tamanho 6.

```
r:=function(l) local j;
     for j in [1..Length(Combinations(l,6))] do
          if Order(Product(Combinations(l,6)[j]))=1 then return true;
          fi;
     od; return false;
end;
```

Para todos os valores que escolhemos a função retorna TRUE, mostrando que sempre a sequência tem alguma subsequência indesejada.

Isto pode ser um indício de que $s(G) = 29$, mas a princípio não podemos chegar a esta conclusão analisando só as sequências desta forma específica construída acima, a menos que seja possível mostrar que todas as sequências de tamanho 28 que são livres de soma zero de tamanho 6 em G sejam da forma acima.

CAPÍTULO 4

Cota Superior para $s(C_3^3 \oplus C_n)$

O resultado principal deste capítulo é apresentar uma conta superior da constante EGZ para a família de grupos $G = C_3^3 \oplus C_n$ onde $n \geqslant 7$ ímpar e $(n, 3) = 1$. Provaremos que $s(C_3^3 \oplus C_n) \leqslant 6n + 12$.

Em um artigo de H. Harborth ([8]) ele apresenta um resultado interessante que diz que, no caso dos 3-grupos abelianos elementares temos uma relação bem explícita entre $g(G)$ e $s(G)$. Deixamos aqui sua demonstração e destacamos a importância deste teorema para o resultado principal deste capítulo, uma vez que o teorema abaixo nos garante que para grupos da forma $G = C_3^r$, conhecendo o valor da constante $s(G)$ também conhecemos o valor de $g(G)$.

Teorema 4.0.1. *Seja $G = C_3^r$, se $g(G) = c$ então $s(G) = 2c - 1$.*

Demonstração. De fato, como $g(C_3^r) = c$ existe uma sequência de tamanho $c - 1$ que não possui repetição e que não tem uma subsequência de soma zero e tamanho 3. Digamos que esta sequência seja

$$S = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{c-1}.$$

Tome a sequência

$$S^2 = a_1a_1a_2a_2a_3a_3 \cdots a_{c-1}a_{c-1},$$

com $2(c-1)$ elementos.

Observe que S^2 também não possui subsequência de soma zero de tamanho 3, pois para isto seria necessário tomar dois elementos iguais, o que implicaria que o terceiro elemento também fosse igual aos demais, o que não ocorre, ou seria necessário formar uma subsequência com três elementos diferentes com soma zero, mas isso implicaria que esta subsequência estaria em S, o que também não ocorre, logo

$$2(c-1)+1 \leqslant s(G).$$

Agora resta provar que $s(G) \leqslant 2c-1$. Tome uma sequência S qualquer em G com $2c-1$ elementos, vamos provar que S sempre tem uma subsequência de tamanho três e soma zero. Como todo elemento tem ordem 3, se S possui algum elemento que repete três vezes em S já temos a subsequência desejada. Se S possui c elementos diferentes também encontramos uma subsequência de tamanho três e soma zero pela hipótese $g(G) = c$. Logo resta analisar o caso em que S tem no máximo $c-1$ elementos que aparecem duas vezes em S, ou S é da forma

$$a_1a_1a_2a_2a_3a_3 \cdots a_{c-1}a_{c-1}a_j$$

mas se $a_j = a_i$ para algum $i \in [1, c-1]$ teremos 3 elementos do mesmo o que nos dá uma soma zero e se a_j for diferente dos demais teremos c elementos diferentes e novamente temos uma soma zero, logo $s(G) \leqslant 2c-1$. $\square$

Usando o fato $s(C_3^3) = 19$ e que $g(C_3^3) = 10$ temos o seguinte resultado:

Lema 4.0.2. *Seja $H = C_3^3$ e W a sequência de H livre de quadrados e de comprimento $|W| = 27$. Para todo $v \in H$ é possível particionar a sequência W da forma $W = T_1T_2 \ldots T_6S^{(1)}$ tal que $v \in S^{(1)}$, $|T_i| = 3$, $\sigma(T_i) = 0$ para todo $i \in [1, 6]$, e com a sequência $S^{(1)}$ livre de soma zero de tamanho 3.*

Demonstração. Como $g(C_3^3) = 10$ e a sequência W por hipótese é livre de quadrados e tem tamanho 27, sempre é possível retirar de W seis subsequências disjuntas, $T_1, T_2, \ldots, T_6$ com $\sigma(T_i) = 0$ e $|T_i| = 3$ para todo $i \in [1, 6]$, restando então uma subsequência de W com 9 elementos (que chamamos de $S^{(1)}$). Agora, basta garantir que para todo $v \in H$ existe uma partição desta forma, com $S^{(1)}$ sem subsequência de soma zero e tamanho 3.

A seguir apresentamos seis possíveis partições da sequência W da forma $T_1T_2 \cdots T_6S^{(1)}$, de tal forma que qualquer $v \in H$ esteja presente em $S^{(1)}$ de alguma partição. Seja $H = \langle a, b, c \rangle$, e as partições:

Partição P_1: $S^{(1)} = (0)(a)(b)(c)(a+b)(a+c)(2a+b+c)(2a+2b+c)(2a+b+2c)$ e
$T_1 = (2a + 2b)(a + 2b + c)(2b + 2c)$,
$T_2 = (a + 2b)(2b + c)(2a + 2b + 2c)$,
$T_3 = (2a + b)(a + b + c)(b + 2c)$,
$T_4 = (2b)(2a + c)(a + b + 2c)$,
$T_5 = (2c)(a + 2c)(2a + 2c)$,
$T_6 = (2a)(b + c)(a + 2b + 2c)$.

Partição P_2: $S^{(1)} = (0)(a)(b)(2c)(a+2b)(a+2c)(a+2b+c)(2b+2c)(2a+2b+2c)$ e
$T_1 = (b + 2c)(a + b + 2c)(2a + b + 2c)$,
$T_2 = (2b + c)(2a + 2b)(a + 2b + 2c)$,
$T_3 = (2a + b)(2a + 2c)(2a + 2b + c)$,

$T_4 = (2a)(a+b)(2b),$
$T_5 = (b+c)(a+b+c)(2a+b+c),$
$T_6 = (c)(a+c)(2a+c).$

Partição P_3: $S^{(1)} = (0)(a)(b)(2c)(a{+}2b)(2a{+}2c)(2a{+}2b{+}c)(a{+}2b{+}2c)(2a{+}2b{+}2c)$ e

$T_1 = (2a+2b)(a+2b+c)(2b+2c),$
$T_2 = (2a+b)(a+b+c)(b+2c),$
$T_3 = (2b)(2a+c)(a+b+2c),$
$T_4 = (a+b)(b+c)(2a+b+2c),$
$T_5 = (a+c)(2b+c)(2a+b+c),$
$T_6 = (c)(2a)(a+2c).$

Partição P_4: $S^{(1)} = (0)(a)(c)(a+c)(b+c)(2a+b)(a+b+c)(2a+2b)(2a+b+2c)$ e

$T_1 = (b+2c)(2a+2c)(a+2b+2c),$
$T_2 = (2b+c)(a+2b+c)(2a+2b+c),$
$T_3 = (2c)(a+b+2c)(2a+2b+2c),$
$T_4 = (a+b)(2a+c)(2b+2c),$
$T_5 = (2b)(a+2c)(2a+b+c),$
$T_6 = (b)(2a)(a+2b).$

Partição P_5: $S^{(1)} = (0)(a)(c)(2a{+}b)(2a{+}c)(a{+}b{+}c)(a{+}b{+}2c)(2b{+}2c)(2a{+}b{+}2c)$ e

$T_1 = (2a+2b)(2a+b+c)(2a+2c),$
$T_2 = (2b+c)(a+2b+c)(2a+2b+c),$
$T_3 = (a+2c)(b+2c)(2a+2b+2c),$
$T_4 = (a+b)(a+c)(a+2b+2c),$
$T_5 = (2b)(b+c)(2c),$
$T_6 = (b)(2a)(a+2b).$

Partição P_6: $S^{(1)} = (a)(2a)(a+c)(2b)(2a+c)(2b+c)(b+2c)(a+2b+2c)(2a+2b+2c)$
e
$T_1 = (2a + 2b)(2a + b + c)(2a + 2c)$,
$T_2 = (a + 2b)(2b + 2c)(2a + 2b + c)$,
$T_3 = (b + c)(2a + b)(a + b + 2c)$,
$T_4 = (b)(a + b + c)(2a + b + 2c)$,
$T_5 = (a + b)(a + 2c)(a + 2b + c)$,
$T_6 = (0)(c)(2c)$.

Observe que cada uma das partições acima satisfazem a hipótese que $\sigma(T_i) = 0$ com $|T_i| = 3$ para todo $i \in [1, 6]$ e cada $S^{(1)}$ não possui subsequências de tamanho 3 e soma zero. $\square$

4.1 $s(C_3^3 \oplus C_n) \leqslant 6n + 12$

Nesta seção vamos considerar a família de grupos da forma $G = C_3^3 \oplus C_n$ sendo n inteiro positivo ímpar, com $(3, n) = 1$ e $n \geqslant 7$.Como $(n, 3) = 1$ podemos aplicar o Lema 1.0.11 com $K = C_n$ e obter a cota superior $s(C_3^3 \oplus C_n) \leqslant 6n + 13$. Vamos melhorar em uma unidade a cota acima, ou seja, vamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1. *Seja $G = C_3^3 \oplus C_n$, n inteiro ímpar com $(n, 3) = 1$ e $n \geqslant 7$ então $s(C_3^3 \oplus C_n) \leqslant 6n + 12$.*

Demonstraremos este resultado por contradição, ou seja, vamos supor que S é uma sequência de elementos de G de tamanho $6n + 12$ que não tem subsequências de tamanho $3n$ e soma zero. A demonstração deste teorema seguirá os seguintes passos:

1. Consideramos S uma sequência de comprimento $6n + 12$ e sem subsequência de soma zero e comprimento $3n$, e escrevemos a sequência S na forma $S = S_1 \cdots S_k W_1 W_2$.

2. Provamos a veracidade do Teorema nos casos em que $k > 2n - 14$.

3. Reescrevemos a sequência S na forma $S = S_1 \cdots S_k T_1 \cdots T_6 Z_1 \cdots Z_6 S^{(1)} S^{(2)}$ e, do Lema 1.0.12 obtemos $\sigma(S_1) \cdots \sigma(S_k)\sigma(T_1) \cdots \sigma(T_6)\sigma(Z_1) \cdots \sigma(Z_6) = (0,0)^{n-1}(0,g)^{n-1}$ onde g é um gerador de C_n.

4. Construímos no GAP as 6 possíveis sequências para $\phi(S^{(1)})$ e $\phi(S^{(2)})$ de acordo com as partições apresentadas no Lema 4.0.2 e construímos as sequências de tamanho 18 $\phi(S^{(1)})\phi(S^{(2)})$.

5. Para cada sequência $S^{(1)}S^{(2)}$ consideramos todas as subsequências T de tamanho 6 com $\sigma(\phi(T)) = 0$.

6. Provamos que o Teorema é verdadeiro no caso em que existir uma subsequência T como descrita no passo anterior tal que $\sigma(\psi(T)) \neq g$, onde g é o elemento citado no passo 3.

7. Consideramos agora o caso que todas as sequências T do passo 5 são tais que $\sigma(\psi(T)) = g$.

8. Provamos que as sequências $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ são idênticas.

9. Com todas as sequências T do passo 7 construímos um sistema e concluímos que $supp(\psi(S^{(1)})) = \{a\}$, ou seja, $|supp(\psi(S^{(1)}))| = 1$, gerando a igualdade $6g = a$.

10. Provamos que todo elemento da subsequência $S_1 \cdots S_k$ é um elemento da sequência $S^{(1)}$, concluindo que $3a \in \{0, g\}$, o que contraria que $6a = g$.

Demonstração. Defina $G = H \oplus K$ com $H \cong C_3^3$ e $K = C_n$. Seja ϕ a projeção de G em H, ψ a projeção de G em K e seja S uma sequência de comprimento $|S| = 6n + 12$. Vamos provar este resultado por contradição, então suponha que S não possui subsequência de soma zero e tamanho $3n$. Podemos escrever S da forma

$$S = S_1 \cdots S_k W_1 W_2, \tag{4.1}$$

para todo $i \in [1, k]$, com $|S_i| = 3$ e $\phi(S_i) = (h_i)(h_i)(h_i)$ para algum $h_i \in H$, ou seja, $|supp(\phi(S_i))| = 1$ (logo $\sigma(\phi(S_i)) = 0$ para todo $i \in [1, k]$) e tal que $\phi(W_1)$ e $\phi(W_2)$ são subsequências em $\mathcal{F}(H)$ livres de quadrados. Logo,

$$6n + 12 \leqslant 3k + 2 \cdot 3^3 \Rightarrow k \geqslant 2n - 14.$$

Lema 4.1.2. *Seja S de tamanho $6n + 12$ e da forma (4.1). Se $k > 2n - 14$ então S possui uma subsequência de tamanho $3n$ e soma zero.*

Demonstração. Suponha que $k > 2n - 14$, e que por contradição S não tenha subsequências de tamanho $3n$ e soma zero. Analisamos primeiramente o caso em que $k = 2n - 13$. Isto implica que $6n + 12 = 3(2n - 13) + |W_1| + |W_2| \Rightarrow |W_1| + |W_2| = 51$. Podemos supor que $|W_1| = 25$ e que $|W_2| = 26$, de fato, lembre-se que o importante é montar as sequências W_1 e W_2 de tal forma que $\phi(W_1)$ e $\phi(W_2)$ sejam livres de quadrados, logo a outra opção seria $|W_1| = 24$ e que $|W_2| = 27$, mas isso significa que em W_2 temos todos elementos de H tendo então dois elementos a mais que W_1, daí tomamos um desses elementos e transferimos para W_1.

Como $\phi(W_1)$ e $\phi(W_2)$ são sequências livres de quadrados em H e sabemos do resultado anterior que $g(C_3^3) = 10$, podemos tirar de cada uma delas 6 subsequências disjuntas, digamos $T_1, \cdots, T_6$ e $Z_1, \cdots, Z_6$, tais que

$\sigma(\phi(T_i)) = \sigma(\phi(Z_i)) = 0$ e $|T_i| = |Z_i| = 3$ para todo $i \in [1,6]$. Daí olhamos para a sequência

$$\sigma(S_1)\cdots\sigma(S_k)\sigma(T_1)\cdots\sigma(T_6)\sigma(Z_1)\cdots\sigma(Z_6). \tag{4.2}$$

Observe que esta sequência está no Kernel de ϕ, ou seja, é uma sequência em $\mathcal{F}(K)$ de tamanho $2n-1$. Como $s(C_n) = 2n-1$, existe uma subsequência em (4.2) de tamanho n e soma zero, o que implica que existe em $S_1\cdots S_k T_1\cdots T_6 Z_1\cdots Z_6$ uma subsequência de tamanho $3n$ e soma zero, chegando a contradição.

Para os casos $k > 2n-13$ observamos que, a cada vez que aumentamos em uma unidade o valor de k, ganhamos uma sequência S_{k+1} de tamanho 3 e $\sigma(\phi(S_{k+1})) = 0$, mas perdemos 3 elementos de $S^{(1)}$ ou de $S^{(2)}$ e assim diminuímos uma sequência de tamanho 3, T_i (ou Z_i) com $\sigma(\phi(T_i)) = 0$, o que equilibra o cálculo, ou seja, ainda temos $2n-1$ sequências em K, tendo então alguma subsequência de soma zero e tamanho $3n$. Logo o resultado segue para todo $k \geqslant 2n-13$. Observe que basta analisar este processo até $k = 2n-1$. □

Agora vamos desenvolver o caso mais complexo, em que $k = 2n-14$. Neste caso
$6n+12 = 3(2n-14) + |W_1| + |W_2|$ o que implica que

$$|W_1| + |W_2| = 2\cdot 3^3 \Rightarrow |W_1| = |W_2| = 3^3 = 27.$$

Começamos com o mesmo processo que fizemos no caso anterior, podemos retirar de cada sequência W_1 e W_2 seis subsequências disjuntas $T_1,\cdots,T_6$ e $Z_1,\cdots,Z_6$, tais que $\sigma(\phi(T_i)) = \sigma(\phi(Z_i)) = 0$ e $|T_i| = |Z_i| = 3$ para todo $i \in [1,6]$. Como $\phi(W_1) = \phi(W_2)$ podemos retirar as sequências de tal forma que $\phi(T_1) = \phi(Z_1), \dots \phi(T_9) = \phi(Z_9)$.

Vamos usar as notações $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ para indicar as sequências de tamanho 9 que foram obtidas respectivamente de W_1 e W_2, após retirar as sequências $T_1, \cdots, T_6$ e $Z_1, \cdots, Z_6$. Depois de retirar estas sequências, note que se for possível tirar mais uma sequência T_7 de tamanho 3 e $\sigma(\phi(T_7)) = 0$ a sequência $\sigma(S_1)\cdots\sigma(S_k)\sigma(T_1)\cdots\sigma(T_6)\sigma(T_7)\sigma(Z_1)\cdots\sigma(Z_6)$ tem tamanho $2n-1$, logo tem uma subsequência de tamanho n e soma zero (lembrando que $s(C_n) = 2n-1$), o que implica que $S_1\cdots S_k T_1\cdots T_6 T_7 Z_1\cdots Z_6$ tem uma sequência de soma zero e tamanho $3n$. Assim podemos supor que $\phi(S^{(1)}) = \phi(S^{(2)})$ são subsequências livres de soma zero de tamanho 3.

Note que, do fato de $\phi(W_1)$ (também $\phi(W_2)$) ser uma sequência em H livre de quadrados de tamanho 27, o Lema 4.0.2 garante que podemos escolher as sequências $T_1, \cdots, T_6$ de maneira conveniente de modo que para cada $v \in \phi(S_1)\dots\phi(S_k)$, a decomposição de S fica da forma

$$S = S_1\cdots S_k T_1\cdots T_6 Z_1\cdots Z_6 S^{(1)} S^{(2)},$$

com $v \in \phi(S^{(1)})$ (e também $v \in \phi(S^{(2)})$) .

Podemos então considerar que as sequências W_1 e W_2 foram particionadas de forma que $\phi(S^{(1)})$ e $\phi(S^{(2)})$ sejam uma das 7 partições citadas no lema.

Agora, vamos novamente analisar a sequência

$$\sigma(S_1)\cdots\sigma(S_k)\sigma(T_1)\cdots\sigma(T_6)\sigma(Z_1)\cdots\sigma(Z_6).$$

Observe que esta sequência está em no Kernel de ϕ, ou seja, é uma sequência em $\mathcal{F}(K)$ de tamanho $2n-2$. Agora com uma translação adequada podemos supor pelo Lema (1.0.12) que,

$$\sigma(S_1)\cdots\sigma(S_k)\sigma(T_1)\cdots\sigma(T_6)\sigma(Z_1)\cdots\sigma(Z_6) = (0,0)^{n-1}(0,g)^{n-1}$$

onde g é um gerador de C_n. Vamos reescrever a sequência acima da seguinte forma:

$$R_1R_2\ldots R_{n-1}R_n\ldots R_{2n-2} \tag{4.3}$$

onde $R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1} = (0,0)$ e $R_n = R_{n+1} = \cdots = R_{2n-2} = (0,g)$.

Agora, vamos considerar as possíveis partições relacionadas no Lema (4.0.2), ou seja, vamos supor que $\phi(S^{(1)})$ é de uma das formas que aparece em $P_1, \ldots P_6$. Para cada uma dessas possibilidades vamos construir todas subsequências de $\phi(S^{(1)})$ de tamanho 6 e soma zero.

Com estas informações, vamos agora proceder inicialmente com a construção das subsequências $\phi(S^{(1)})$ de tamanho 9 que foram indicadas no Lema 4.0.2.

```
g:=DirectProduct(CyclicGroup(3),CyclicGroup(3),CyclicGroup(3)); e:=Elements(g);;
 u1:=[ e[1], e[2], e[3], e[4], e[2]*e[3], e[2]*e[4], e[2]^2*e[3]*e[4],
 e[2]^2*e[3]^2*e[4], e[2]^2*e[3]*e[4]^2 ];
  u2:=[ e[1], e[2], e[3], e[4]^2, e[2]*e[3]^2, e[2]*e[4]^2, e[2]*e[3]^2*e[4],
   e[3]^2*e[4]^2, e[2]^2*e[3]^2*e[4]^2 ];
  u3:=[ e[1], e[2], e[3], e[4]^2, e[2]*e[3]^2, e[2]^2*e[4]^2, e[2]^2*e[3]^2*e[4],
  e[2]*e[3]^2*e[4]^2, e[2]^2*e[3]^2*e[4]^2 ];
  u4:=[ e[1], e[2], e[4], e[2]*e[4], e[3]*e[4], e[2]^2*e[3], e[2]*e[3]*e[4],
  e[2]^2*e[3]^2, e[2]^2*e[3]*e[4]^2 ];
  u5:=[ e[1], e[2], e[4], e[2]^2*e[3], e[2]^2*e[4], e[2]*e[3]*e[4], e[2]*e[3]*e[4]^2,
   e[3]^2*e[4]^2, e[2]^2*e[3]*e[4]^2 ];
  u6:=[ e[2], e[2]^2, e[2]*e[4], e[3]^2, e[2]^2*e[4], e[3]^2*e[4], e[3]*e[4]^2,
   e[2]*e[3]^2*e[4]^2, e[2]^2*e[3]^2*e[4]^2 ];

u:=[u1,u2,u3,u4,u5,u6];# Lista das 6 sequências de tamanho 9.
Size(UnionSet(UnionSet(UnionSet(UnionSet(UnionSet(u1,u2),u3),u4),u5),u6)); #27
```

Observe que nos comandos acima primeiramente construímos o grupo $H = C_3^3$, depois as possíveis sequências para $\phi(S^{(1)})$, colocamos estas sequências na lista "u". Por fim, verificamos que o conjunto de elementos que aparecem nessas 6 sequências contém todos elementos de C_3^3.

Agora, a fim de obter as possibilidades para $\phi(S^{(1)}S^{(2)}) = (\phi(S^{(1)}))^2$ duplicamos as sequências encontradas para formar as sequências de tamanho 18.

```
n:=[]; for i in [1..6] do
            Add(n,Concatenation(u[i],u[i]));
       od;
```

Para continuação da demonstração, aproveitando a construção da lista "n", que contém as possibilidades para $\phi(S^{(1)}S^{(2)}) = (\phi(S^{(1)}))^2$ vamos construir uma nova lista para cada sequência n_i em "n"da seguinte forma: Para cada sequência n_i com $i \in [1, 6]$ de tamanho 18 vamos construir todas as subsequências de tamanho 6 e soma zero. Elas serão importantes na demonstração.

```
pp:=[]; for i in [1..6] do
                 Add(pp,[]);od;

for i in [1..6] do
      for j in [1..Length(Combinations(n[i],6))] do
            if Order(Product(Combinations(n[i],6)[j]))=1 then
                 Add(pp[i],Combinations(n[i],6)[j]);
            fi;
      od;
od;
```

A lista "pp"é construída de tal forma que na sua i-ésima posição são colocadas todas as subsequências de n_i de tamanho 6 e soma zero.

Depois de encontradas estas sequências queremos saber quantas destas subsequências de tamanho 6 existem para cada sequência n_i fixada. Isso pode ser obtido facilmente com o comando:

```
l:=[];
for i in [1..6] do
    Add(l,Size(pp[i]));
od;
Set(l); #72
```

Sendo então cada uma delas com exatamente 72 subsequências de tamanho 6 e soma zero.

Observe que na construção acima estamos sempre trabalhando no que ocorre com a sequência $\phi(S^{(1)}S^{(2)}) = (\phi(S^{(1)}))^2$, ou seja, até este ponto estávamos preocupados apenas com o que ocorria com as componentes de H. Agora vamos analisar o que ocorre em relação as componentes de K. Separamos a solução deste problema em dois casos:

CASO 1: *Existe em $S^{(1)}S^{(2)}$ uma subsequência T, com $|T| = 6$, $\sigma(\phi(T)) = 0$ tal que*
$\sigma(\psi(T)) \neq g$, onde o elemento g é o gerador de K que aparece em (4.3).

A partir de T conseguimos montar uma subsequência S' de S de tamanho $3n$ e soma zero, o que gera uma contradição com a hipótese. De fato, lembremos que g é um gerador de $K = C_n$, logo $\sigma(\psi(T)) \neq g$ significa que $\sigma(\psi(T)) = tg$ para algum $t \in [2, n]$.

Se $t \in [3, n-1]$ podemos construir a subsequência S' de S:

$$S' = R_1 R_2 \dots R_{t-2} R_n \dots R_{2n-t-1} T$$

observe que

$$|S'| = 3(t-2) + 3(n-t) + 6 = 3n$$

e

$$\sigma(S') = (t-2)(0,0) + (n-t)(0,g) + (0,tg) = (0,ng) = (0,0).$$

No caso em que $t = 2$ basta construir a sequência $S' = R_n \dots R_{2n-3}T$. Note que
$|S'| = 3(n-2) + 6 = 3n$ e que $\sigma(S') = (n-2)(0,g) + (0,2g) = (0,0)$.

Quando $t = n$ temos a subsequência $S' = R_1 R_2 \dots R_{n-2}T$ de tamanho $3n$ e soma zero.

CASO 2: *Em toda subsequência T em $S^{(1)}S^{(2)}$ com $|T| = 6$ e $\sigma(\phi(T)) = 0$ vale $\sigma(\psi(T)) = g$.*

Vamos supor que

$$R = S^{(1)}S^{(2)} = (h_1, g_1) \dots (h_9, g_9)(h_1, g_{10}) \dots (h_9, g_{18}),$$

lembrando que as primeiras componentes de $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ são iguais, mas as segundas componentes não precisam ser necessariamente iguais. O que vamos provar é que na realidade $g_1 = g_2 = \dots = g_{18}$.

Note que da construção anterior, a lista "n"possui as opções para as sequências $\phi(S^{(1)}S^{(2)})$, logo se n_i é a sequência na i-ésima posição da lista "n", então na construção da lista "pp"colocamos na sua i-ésima posição todas as subsequências de n_i que têm soma zero e tamanho 6, digamos que estas subsequências de sejam $N_1, \ldots, N_{72}$ com i fixado. Da hipótese, temos que

$$\sigma(\psi(N_1)) = \sigma(\psi(N_2)) = \ldots = \sigma(\psi(N_{72})) = g.$$

Com um cálculo fácil no GAP é possível mostrar que a sequência $\phi(S^{(1)}) = \phi(S^{(2)})$ é livre de subsequências de soma zero de comprimento 6. Isto significa que todas as sequências na lista "n"tem elementos repetidos (basta observar as sequências $S^{(1)}$ apresentadas na demonstração do Lema 4.0.2).

Fixada uma sequência n_i, observe que nenhuma de suas subsequências $\phi(T)$ de tamanho seis e soma zero pode ser do tipo $\phi(T) = (\phi(T'))^2$. De fato, como a sequência $\phi(S^{(1)})$ é livre de quadrados, os elementos na sequência $n_i = (\phi(S^{(1)}))^2$ aparecem no máximo duas vezes cada um, dai se fosse possível ter $\phi(T) = (\phi(T'))^2$, $\phi(T)$ seria da forma $\phi(T) = aabbcc = (abc)^2$ com $a \neq b \neq c$ mas como a ordem dos elementos em $\phi(S^{(1)})$ é três e a soma de a, b, c não é zero (as sequências $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ são livres de soma zero de tamanho 3), seria impossível que $\sigma(\phi(T)) = 0$, pois se isso ocorresse o elemento $abc \in C_3^3$ teria ordem 2.

Daí podemos concluir que T tem pelo menos dois elementos que não se repetem em $\phi(T)$, isto também pode ser verificado observando as sequências na demonstração do Lema 4.0.2.

Com as conclusões do parágrafo anterior juntamente com o próximo lema prova-se que as subsequências $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ são idênticas.

Lema 4.1.3. *Se para alguma subsequência T de R tal que $\sigma(\phi(T)) = 0$ e $|T| = 6$, o elemento h_i com $1 \leqslant i \leqslant 9$, aparece uma única vez em $\phi(T)$ então $g_i = g_{i+9}$.*

Demonstração. Se h_i é um elemento que aparece uma única vez na subsequência $\phi(T)$ então na sequência T temos o elemento (h_i, g_i) ou (h_i, g_{i+9}), digamos, sem perda de generalidade que em T apareça o elemento (h_i, g_i), dai montamos uma nova sequência T' obtida a partir de T apenas trocando o elemento (h_i, g_i) pelo elemento (h_i, g_{i+9}). Observe então que $\sigma(\phi(T')) = 0$ e $|T'| = 6$ logo da hipótese $\sigma(\psi(T)) = \sigma(\psi(T'))$, o que implica que $g_i = g_{i+9}$.

□

Para cada sequência n_i fixada, analisando as subsequências $N_1, N_2, \ldots, N_{72}$ é possível concluir que para cada elemento h_i existe uma subsequência N_i tal que sejam satisfeitas as hipóteses do Lema (4.1.3). Assim, para todo $1 \leqslant i \leqslant 9$ temos $g_i = g_{i+9}$. Logo, as sequências $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ são idênticas, ou seja,

$$S^{(1)} = S^{(2)} = (h_1, g_1)(h_2, g_2)(h_3, g_3)(h_4, g_4)(h_5, g_5)(h_6, g_6)(h_7, g_7)(h_8, g_8)(h_9, g_9).$$

Vamos mostrar que $g_1 = g_1 = \cdots = g_9$ em C_n para cada sequência $S^{(1)}$. Vamos ilustrar como iremos montar o sistema para resolve-lo, utilizando o GAP.

Fixada uma sequência n_i da lista "n", sejam $N_1, N_2, \ldots, N_{72}$ as subsequências de n_i tais que $\sigma(\phi(N_j)) = 0$ e $|N_j| = 6$ para todo $1 \leqslant j \leqslant 72$. Sabemos por hipótese que:

$$\sigma(\psi(N_1)) = \sigma(\psi(N_2)) = \ldots = \sigma(\psi(N_{72}) = g.$$

Construímos o sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} \sigma(\psi(N_1)) = \sigma(\psi(N_2)) \\ \sigma(\psi(N_2)) = \sigma(\psi(N_3)) \\ \vdots \\ \sigma(\psi(N_{71})) = \sigma(\psi(N_{72})) \end{cases}$$

Queremos então resolver este sistema módulo n. Observe que $g_1 = g_2 = \ldots = g_9$ é uma solução do sistema. Vamos mostrar que todas as soluções são dessa forma, para isso provamos dois lemas que seguem.

Lema 4.1.4. *Para cada sequência n_i na lista "n"seja N o sistema obtido a partir das subsequências N_j de n_i com $\sigma(\phi(N_j)) = 0$ e $|N_j| = 6$ tal como descrito acima, seja A a matriz dos coeficientes associada ao sistema N. A matriz A possui uma submatriz 8×8 cujo determinante é uma potência de 3.*

Demonstração. Primeiro construímos a partir das sequências em "pp" (lembrando que na i-ésima entrada de "pp"temos todas as subsequências de n_i de tamanho 6 e soma zero) os sistemas da forma que explicamos acima,

```
l1:=[]; for i in [1..7] do Add(l1,[]);od;
for k in [1..7] do m:=[];
      for i in [1..72] do Add(m,[]); od;
            for i in [1..72] do
                  for j in [1..6] do
                        if pp[k][i][j]=u[k][1] then Add(m[i],[1,0,0,0,0,0,0,0,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][2] then Add(m[i],[0,1,0,0,0,0,0,0,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][3] then Add(m[i],[0,0,1,0,0,0,0,0,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][4] then Add(m[i],[0,0,0,1,0,0,0,0,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][5] then Add(m[i],[0,0,0,0,1,0,0,0,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][6] then Add(m[i],[0,0,0,0,0,1,0,0,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][7] then Add(m[i],[0,0,0,0,0,0,1,0,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][8] then Add(m[i],[0,0,0,0,0,0,0,1,0]);
                        elif pp[k][i][j]=u[k][9] then Add(m[i],[0,0,0,0,0,0,0,0,1]);
                        fi;
                  od;
            od;
      nn:=[];for i in [1..72] do
            Add(nn,m[i][1]+m[i][2]+m[i][3]+m[i][4]+m[i][5]+m[i][6]);od;l:=[];
                  for i in [1..71] do Add(l,nn[i]-nn[i+1]);
                  od;
      Add(l1[k],l);
od;
l1:=List([1..Size(l1)],i->l1[i][1]);
```

A lista "l1"tem todos os sistemas lineares que queremos solucionar. Agora, nos próximos passos, vamos verificar que realmente podemos encontrar, para cada um desses sistemas a submatriz desejada 8×8.

Lembremos que cada sistema tem 71 linhas, mas não precisamos utilizar todas estas linhas para achar a submatriz desejada. Vamos considerar apenas as vinte primeiras linhas deste sistema.

Agora, no algoritmo abaixo, tomamos as 20 primeiras linhas de cada matriz associada aos sistemas que temos, excluímos a última coluna (9ª coluna). Isto é feito na função

```
sm:=function(m,lin,col); return List(lin,l->m[l]{col}); end;
```

Dada uma matriz "m"a função "f"retorna uma lista de alguns determinantes de submatrizes de "m"de dimensão 8×8.

```
la:=Combinations([1..20],8);;
f:=function(m); return Set(List(la,x->Determinant(sm(m,x,[1,2,3,4,5,6,7,8])))); end;
```

A próxima função dá como resposta TRUE se, e somente se, a entrada n é uma potência de 3.

```
isp3:=function(n); if n=0 then return false;
                              fi;
                                    if PrimeDivisors(n)=[3] then return true;
                                    fi; return false;
end;
```

Em seguida temos uma função que retorna TRUE se, e somente se, no mínimo um elemento em uma lista "l"é uma potência de 3.

```
al3:=function(l); if not(Set(List(l,isp3))=[false])
                              then return true;
                         fi;
      return false;
end;
```

Por fim, temos que se o comando abaixo nos retornar TRUE isto significa que toda matriz na lista "l1", que era formada por todos os sistemas, tem uma submatriz 8×8 com determinante sendo uma potência de 3.

```
Set(List(l1,x->al3(f(x))));
```

Para nossa alegria, depois de executarmos estas linhas ele nos retorna [TRUE] como resposta, sendo assim possível sempre encontrar a matriz desejada. $\square$

Como $(n, 3) = 1$, e a matriz tem seu determinante uma potência de 3, este valor é inversível em C_n. Agora resta mostrar que, existindo esta submatriz é possível encontrar a solução desejada do sistema. O próximo lema mostra que isto é possível.

Lema 4.1.5. *Seja A uma matriz $a \times b$ (com $a \geqslant b$) com coeficientes em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Assuma que*

$$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^b$$

é tal que $As = 0$. Suponha que A tenha uma submatriz M de ordem $(b-1) \times (b-1)$ com determinante coprimo com n (ou seja, inversível modulo n). Então, as soluções de $Ax = 0$ são todas da forma αs com $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Demonstração. É claro que os elementos αs são soluções de $Ax = 0$, agora vamos provar a recíproca. Seja L uma submatriz $(b-1) \times b$ obtida a partir de M pela adição da coluna que foi removida na construção da matriz M mas com elementos que estavam anteriormente indexados com as linhas antes de obter M. Em outras palavras, depois de trocar as variáveis dos vetores no domínio $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^b$, a matriz L tem a forma $(M|c)$ com c sendo um vetor com $b-1$ componentes. Observe que, como $As = 0$ temos também $Ls = 0$. Fixe $s^* = 1$ então $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s^* \end{pmatrix}$ daí temos $0 = Ls = Ms_1 + cs^* = Ms_1 + c$ então $s_1 = -M^{-1}c$ (observe que M é inversível módulo n pois seu determinante é inversível). Note que, note que isso que fizemos é possível devido a estrutura de S ser conveniente, ou seja, segue do fato que todas as entradas de S serem iguais. Agora suponha que $x^* \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^b$ é tal que $Ax = 0$, então claramente $Lx = 0$. Escreva $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x^* \end{pmatrix}$, com $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Então

$$0 = Lx = (M|c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x^* \end{pmatrix} = Mx_1 + cx^*,$$

logo $x_1 = -M^{-1}cx^* = s_1 x^*$ assim $x = x^* s$. Agora basta escolher $\alpha = x^*$.

□

Deste lema conclui-se que as soluções dos sistemas são da forma

$$g_1 = g_2 = \cdots = g_9 = a$$

módulo n.

Com isso, temos que para cada sequência T de tamanho 6 como descrita acima chegamos na igualdade $6a = g$ o que em particular nos dá que $(a, n) = 1$.

Seja $v \in S_1S_2 \ldots S_k$ tal que $\phi(v) = h$ e também que $h \in \phi(S_1)\phi(S_2) \ldots \phi(S_k)$, $h \in \phi(S^{(1)})$ logo existe $i \in [1, k]$ tal que $S_i = (h, k_1)(h, k_2)(h, k_3)$ e $(h, a) \in S^{(1)}$. Sem perda de generalidade podemos trocar os elementos (h, k_1) e (h, a) logo temos uma sequência $S_i^* = (h, a)(h, k_2)(h, k_3)$. Observe que se $\sigma(\psi(S_i)) \neq \sigma(\psi(S_i^*))$ ao montarmos a sequência $S_1S_2 \ldots S_i^* \ldots S_k$ teremos alguma subsequência de tamanho n e soma zero em C_n e consequentemente uma de tamanho $3n$ e soma zero, pois pelo Teorema 1.0.12, as sequências em C_n de tamanho $2n - 2$ que não possuem subsequências de tamanho n e soma zero são só aquelas em aparecem exatamente dois elementos na sequência com cada um aparecendo a mesma quantidade de vezes, e sendo $\sigma(\psi(S_i)) \neq \sigma(\psi(S_i^*))$ iremos alterar um dos elementos da sequência, não tendo mais esta estrutura.

Então, $\sigma(\psi(S_i)) = \sigma(\psi(S_i^*))$. Isto implica que $k_1 = k_2 = k_3 = a$. Observe então que $\sigma(\phi(S_i)) = 3a \in \{0, g\}$ o que gera uma contradição com o fato que $6a = g$.

□

Referências Bibliográficas

[1] Y. Edel, C. Elsholtz, A. Geroldinger, S. Kubertin and L.Rackham, *Zero-sum problems in finite abelian groups and affine caps, Q. J. Math* **58** (2007), 159-186.

[2] P. Erdös, A. Ginzburg and A. Ziv, *Theorem in the additive number theory, Bulletim Reseach Concil Israel* **10F** (1961), 41-43.

[3] A. Kemnitz, *Zero-sum problems in finite abelian groups and affine caps, Q. J. Math* **58**, 159-186 (2007).

[4] Y. Fan, Q. Zhong, *On Erdos-Ginzburg-Ziv constant of groups of the form* $C_2^r \oplus C_n$, Int. J. Number, (12), 913-943, (2016).

[5] A. Geroldinger, D. J. Grynkiewicz, W. A. Schmid, *Zero-sum problems with congruence conditions,* Acta Math. Hungar (131), 323-345 (2011).

[6] J. E. Olson, *A combinatorial problem on finite Abelian groups I,* J. Number Theory **1**, (1969).

[7] J. E. Olson, *A combinatorial problem on finite Abelian groups II,* J. Number Theory **1**, (1969).

[8] H. Harborth, *Ein Extremalproblem für Gitterpunkte* , J. Reine Angew. Math **262**, 356-360 (1973).

[9] A. Kemnitz, On a lattice point problem, *Ars. Combin.* **16B**, 151-160 (1983).

[10] W. D. Gao and A. Geroldinger , *Zero-sum problems in finite abelian groups: a survey,* J. Number Theory, (2016).

[11] W. D. Gao and R. Thangadurai , *A variant of Kemnitz conjecture* J. Combin. Theory Ser. A **107**, 69-86 (2004).

[12] W. D. Gao, A. Geroldinger and W.A. Schmid , *Inverse zero-sum problems,* Acta Arith.**128**, 245-279 (2007).

[13] W. D. Gao, A. Geroldinger, and W.A. Schmid, *Inverse zero-sum problems,* Acta Arith. **128** (2007), 245-279.

[14] A. Geroldinger and I. Ruzsa , *Combinatorial Number Theory and Additive Group Theory,* , Advanced Courses in Mathematics-CRM Barcelona, Birkhäuser, (2009).

[15] W. D. Gao, D. Han, H. Zhang, *The EGZ-constant and short zero-sum sequences over finite abelian groups,* Expo. Math. **24**, 337-369 (2006).

[16] C. Reiher, *On Kemnitz's conjecture concerning lattice-points in the plane,* Ramanujan J.**13**, 333-337 (2007).

[17] Y. Fan, W. Gao,L. Wang and Q. Zhong, *Two zero-sum invariants on finite abelian groups,* European Journal of Combinatorics 34 **(8)**, 1331-1337 (2013).

[18] Y. Fan, W. Gao and Q. Zhong, *On the Erdös-Ginzburg-Ziv constant of finite abelian groups of high rank,* J. Number Theory, **131**, 1864-1874 (2011).

[19] Y. Edel, S. Ferret, I. Landjev and L. Storme, *The classification of the largest caps in $AG(5,3)$,* J. Combin. Theory Ser. A 99, **1**, 95-110 (2002).