UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT

KENIA COSTA HOLANDA

Uma Proposta Didática Utilizando Caleidociclos De Maurits Cornelis Escher

BRASÍLIA - DF

2018

KENIA COSTA HOLANDA

Uma proposta didática utilizando caleidociclos de Maurits Cornelis Escher

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UNB), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Castilho

BRASÍLIA - DF
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

HH722p Holanda, Kenia Costa
Uma propósta didática usando os caleidociclos de Maurits Cornelis Esche / Kenia Costa Holanda; orientador José Eduardo Castilho. -- Brasília, 2018.
73 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Caleidociclos. 2. Maurits Cornelis Escher. 3. Educação Matemática. 4. Didática. 5. Geometria. I. Castilho, José Eduardo, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma proposta didática usando os caleidociclos de Maurits Cornelis Escher

por

Kenia Costa Holanda

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 29 de junho de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr José Eduardo Castilho - FUP/UnB (Orientador)

Prof. Dr Antônio Luiz de Melo – FUP/UnB

Prof. Dr Sinval Braga de Freitas – SEEDF

Dedico este trabalho à minha mãe que, mesmo lutando pela vida, conseguiu me dar forças para superar todos os momentos de dificuldade.

Agradecimentos

À Deus por me conceber a oportunidade de enxergar e conhecer o universo da mesma forma com que Ele o criou, através da matemática.

À minha mãe, grande inspiradora de fé e perseverança.

Ao meu pai pelo amor e paciência para me ensinar matemática desde criança.

Aos meus familiares por todo suporte, carinho e orações.

À professora Ana Maria Redolfi Gadulfo pelas oportunidades oferecidas durante minha graduação.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Eduardo Castilho pela dedicação e compreensão ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT pelas experiências e conhecimentos compartilhados contribuindo para minha formação profissional.

Aos colegas de curso pela amizade e apoio durante todos os momentos de estudos e ansiedade.

À secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEE-DF) por conceder o afastamento para estudos viabilizando a conclusão do curso.

À direção e ao corpo docente do Colégio Tiradentes, por abrirem as portas e proporcionarem a realização da pesquisa.

À coordenação de aperfeiçoamento profissional de nível superior (CAPES) pela bolsa de estudos.

À todos os amigos e colegas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

"A Educação é a arma mais poderosa que podemos
usar para mudar o mundo."
Nelson Mandela .

HOLANDA, Kenia.Caleidocíclos de M. C. Escher. 2018. 67fls. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília - UNB, Brasília,2018.

Resumo

Este trabalho tem como metodologia a utilização das obras de Mauritus Cornelius Escher para a construção do conhecimento da geometria através da produção de caleidociclos, associando a interdisciplinaridade entre arte e matemática. A proposta sugere que a disposição de recursos didáticos facilite a compreensão e a visualização dos elementos geométricos, simplificando o processo de ensino aprendizagem com objetivo de despertar, incentivar e dar significado ao estudo da geometria aos alunos. A aplicação da pesquisa ocorreu de forma qualitativa com alunos do 3° ano do ensino médio, na cidade de Ceilândia- DF, onde foi realizado um projeto de quatro encontros no qual os alunos puderam produzir em algumas etapas previamente elaboradas mosaicos no estilo M. C. Escher, levando em consideração todos os processos geométricos associados como construção de polígonos e uso de simetrias, finalizando com a aplicação dessa pavimentação na planificação do caleidociclo e observando os critérios necessários para que a configuração das imagens formadas no caleidociclo fosse simétrica. Ao final do estudo, verificou-se que a aquisição dos fundamentos da matemática pode se tornar mais efetiva quando associada à outras áreas de conhecimento, e que a inserção de objetos concretos e lúdicos despertam a curiosidade, o prazer e motivação relevantes na aprendizagem, principalmente quando o aluno participa da elaboração e construção desse material.

Palavras-chave: Caleidociclos.M.C.Escher. didática. geometria. simetria. educação matemática

HOLANDA, Kenia.Caleidocíclos de M. C. Escher. 2018. 67fls. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília - UNB, Brasília,2018.

Abstract

This research has as methodology the use of Mauritus Cornelius Escher's works for the construction of knowledge of geometry through the production of kaleidocicles, associating the interdisciplinarity between art and mathematics. The proposal suggests that the provision of didactic resources facilitates the understanding and visualization of the geometric elements, simplifying the teaching-learning process in order to awaken, encourage and give meaning to the study of geometry to students. The application of the research occurred in a qualitative way with students of the 3rd year of high school, in the city of Ceilândia-DF, where a project of four meetings was carried out in which the students were able to produce in a few steps previously developed mosaics in the M. C. Escher style, taking into account all geometric processes associated as geometric construction of polygons and use of symmetries, ending with the application of this pavement in the planning of the kaleidocicle and observing the necessary criteria so that the configuration of images formed in the kaleidocicle was symmetrical. At the end of the study, it was verified that the acquisition of Mathematics's Foundations can become more effective when associated to other areas of knowledge, and that the insertion of concrete and playful objects arouse curiosity, pleasure and relevant motivation in learning, especially when the student participates in the preparation and construction of this material.

Keywords: Kaleidocycles. M. C. Escher. didatic. Geometry. Symmetry. Matematics Education.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Um dos maiores desafios da educação nos dias atuais é assegurar a atenção dos alunos para os conteúdos ensinados na sala de aula, principalmente quando a disciplina trabalhada é a Matemática. Temida por muitos, a Matemática é vista como uma matéria difícil e complexa. Contudo, na maioria das vezes a complexidade da disciplina não está relacionada apenas pelo nível de dificuldade, mas também por motivos psicológicos, sociais, culturais e pedagógicos. De acordo com os dados do SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica, a aprendizagem em Matemática teve um retrocesso no período de 2013 a 2015. Diante de tantos obstáculos o que o docente pode fazer para transformar essa realidade e despertar o interesse dos alunos?

Este trabalho foi elaborado a partir das experiências da própria autora em sala de aula e tem como objetivo geral procurar estratégias que possam agir como facilitadoras do processo de ensino aprendizagem e que contribuam para o ensino da Matemática, especificamente, da geometria através de atividade lúdica relacionando obras do artista Maurits Cornelis Escher com a construção do caleidociclo. O objetivo específico desta pesquisa é analisar quais contribuições a interdiciplinaridade e a aplicação do material manipulável pode auxiliar no ensino da geometria e como o professor pode aproveitar esses instrumentos para uma aprendizagem significativa.

O professor é um dos principais elos entre o aluno e o conhecimento. Portanto, utilizar estratégias e técnicas de motivação que facilitem o aprendizado do aluno é extremamente importante.

De acordo com a afirmação de Haidt (1999), a verdadeira aprendizagem só ocorre quando o aluno está interessado, mostrando-se empenhado em aprender, isto é, motivado. É essa motivação intrínseca do discente que o leva a estudar e aprender. Quando o educando está desmotivado sua aprendizagem fica prejudicada.

> "Tornou-se um problema de ponta em educação, pela simples constatação de que, em paridade de outras condições, sua ausência representa queda de investimento pessoal de qualidade nas tarefas de aprendizagem. Alunos desmotivados estudam muito pouco ou nada e, consequentemente, aprendem muito pouco. Em última instância, ai se configura uma situação educacional que impede a formação de indivíduos mais competentes para exercerem a cidadania e realizarem-se como pessoas, além de se capacitarem a aprender pela vida afora." (BORUCHOVITCH; BZUNECK, 2009, p.13).

Tapia (2001, p.68) também atesta que "toda mobilização cognitiva que a aprendizagem requer deve nascer de um interesse, de uma necessidade de saber, de um querer alcançar determinadas metas". Porém o que fazer quando o aluno encontra-se desmotivado? Considerando-se que para se aprender é preciso querer, como o professor pode estimular esse desejo no aluno?

O comportamento do professor, as atitudes e a didática adotadas na sala de aula podem representar em seus estudantes a motivação entre gostar ou não de estudar matemática. Sabemos que nem sempre o indivíduo é capaz de auto motivar-se, então é necessário que fatores externos o auxiliem neste andamento. Surge então o principal papel do docente como mediador no processo de motivação do aluno. Um dos primeiros fatores que podem ajudar o educando é quando o professor o orienta para uma aprendizagem significativa. Solé (1998, p.42) afirma que "para poder atribuir sentido à realização de uma tarefa, é preciso que se saiba o que se deve fazer e o que se pretende com ela; que a pessoa que a realizar se sinta competente para efetuá-la e que a tarefa em si resulte motivadora." Dessa forma, se o conteúdo estiver ligado aos interesses da pessoa e, naturalmente, se a tarefa em si corresponde a um objetivo ela se torna motivadora.

O aluno valoriza muito mais o que está sendo ensinado à ele quando consegue estabelecer conexões com o seu cotidiano e enxerga o real significado da geometria quando percebe que ela está em toda parte. Por esse motivo, muitas vezes, a geometria é considerada complexa e de difícil compreensão pois está carregada de fórmulas e definições que não faz sentido para o aluno.

> "Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração"
>
> (AZEVEDO, 1979 apud FIORENTINI e MIORIM, 1993, p. 3).

É claro que numa sala de aula há diferentes alunos, com motivações, expectativas e conhecimentos distintos, assim o professor deve elaborar sua aula de forma que o aprendizado chegue à maioria dos seus alunos e que possa ser compreendido por eles de acordo com suas potencialidades. (SOLÉ, 1998)

Uma forma de tornar isso possível é aplicar diferentes recursos pedagógicos em sala de aula e transformá-los em suportes educacionais de motivação. Atualmente, o professor tem ao seu alcance vários desses recursos como os jogos, as atividades lúdicas, e, principalmente, as tecnologias educacionais, que é uma ferramenta de grande relevância visto que a tecnologia faz parte da realidade do aluno. Infelizmente muitos professores não adotam o uso das ferramentas tecnológicas como sendo parceiras no processo ensino aprendizado e a sensação que se tem é que tudo evolui menos os métodos utilizados em sala de aula. Apesar de que mudanças e esforços estejam ocorrendo elas ainda estão longe do desejável. O professor, além de manter-se atualizado sobre as novas metodologias de ensino, deve buscar uma formação continuada de modo que possa realizar pesquisas e desenvolver suas atividades pedagógicas que valorizem a aprendizagem significativa.

Segundo Silva e Martins (2000, p. 4):

> "Os materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar a criança na passagem do concreto para o abstrato, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como

> uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, réguas, papel ponteado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as ideias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático".

Trabalhando com a construção do caleidociclo, podemos abordar uma infinidade de conceitos geométricos que engloba desde a geometria plana (polígonos, simetrias, grandezas, medidas e construções) até a geometria espacial (poliedros e volume). Assim a proposta dessa atividade não se limita a trabalhar apenas com séries finais ou iniciais, pois pode ser adaptada a qualquer etapa de ensino.

Apresentamos no capítulo 2 alguns conceitos necessários para a abordagem da atividade em questão. São explorados temas da geometria como simetria e polígonos, que são fundamentais para a construção dos mosaicos estilo Escher e também traremos algumas ilustrações de como podem ser feitos.

No capítulo 3 indicamos a definição e classificação dos caleidociclos apresentando alguns exemplos e conceitos matemáticos que possibilitam a sua construção.

O capítulo 4 trata da aplicação da proposta da atividade como metodologia de ensino, descrevendo como foi realizada a oficina de caleidociclos, o meio e os indivíduos envolvidos trazendo uma ánalise da atividade proposta.

Finalmente, no 5º capítulo, foram apresentadas as considerações finais quanto a proposta da atividade, as contribuições adquiridas para o processo de ensino aprendizagem, levantando aspectos positivos e negativos e observações encontradas ao longo da sua realização.

2 Conceitos Teóricos

Os caleidociclos promovem a exploração de várias temáticas dentro do ensino da geometria podendo ser tratados temas inerentes desde a geometria plana até a espacial e o fato de recobrirmos sua planificação com obras do artista M. C. Escher torna a proposta didática ainda mais interessante, pois a presença dos elementos matemáticos existentes em seus trabalhos constitui uma ótima ferramenta de ensino para introduzir os conceitos de simetria e pavimentação que são temas básicos para a construção de caleidociclos.

Neste capítulo faremos uma abordagem teórica dos fundamentos matemáticos necessários para embasar o tema deste trabalho.

2.1 Simetria

Na vida cotidiana, encontramos vários exemplos de usos e implementações do conceito de simetria, o olho humano é naturalmente atraído por objetos e formas simétricas porque objetos e figuras simétricas são percebidos como bonitos ou atraentes e por esse motivo a simetria é amplamente utilizada nas criações humanas, principalmente na arte, arquitetura, fotografia, música e outras tantas áreas.

Figura 1 – Simetria na arquitetura - Catedral de Brasília.

Fonte: https://www.westwing.com.br/guiar/catedral-de-brasilia/

Até mesmo o corpo humano possui uma série de simetrias que uma parte das pessoas acreditam estar associadas à beleza por ser agradável e atrativo aos olhos. Intimamente ligado ao assunto de simetria são os trabalhos do artista M. C. Escher.

Neste trabalho, adotamos uma abordagem algébrica para simetrias e focamos nossa atenção nas simetrias que surgem em objetos tridimensionais chamados de caleidociclos. Para definir simetria iremos utilizar o conceito dado por Pasquini e Bortolossi (2015, p. 35-36)

2.1.1 Definição:

Seja K um subconjunto não vazio do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Dizemos que uma função$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma simetria do conjunto K se F satisfaz as duas condições seguintes.

1. F é uma isometria, isto é, F preserva distâncias. Ou seja, quaisquer que sejam os pontos X e Y em $\mathbb{R}^2$, a distância de X a Y é sempre igual à distância de $F(X)$ a $F(Y)$ $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$.

2. $F(K) = K$, isto é, K é invariante por F, a imagem de um conjunto K pela função F é igual ao próprio conjunto K.

Em outras palavras, as simetrias serão todas as funções que preservam a forma e o tamanho da figura dentro da mesma configuração. Segundo Mayer:

> "A matemática moderna formalizou o conceito de simetria geométrica baseada na ideia de grupos de transformações. Padrões definidos por operações de simetria ou transformações isométricas – translação, rotação e reflexão e composição destas – são classificados como grupos de simetria no plano e simetria cristalográfica (tridimensional). Discretas ou contínuas, as simetrias admitem, além de transformações isométricas que produzem figuras congruentes, dilatações, que produzem figuras similares." (2005, p. 2)

2.1.2 Simetria de Reflexão

A simetria de reflexão ou simetria axial é uma transformação geométrica em torno de uma reta r em um plano π chamada de eixo de simetria, onde uma função bijetora $f : \pi \to \pi$ preserva distâncias e cada ponto P em π está associado a um ponto $f(P) = P'$onde P' é imagem de P. De tal forma que:

1. Se $P \in r$ então o ponto P e sua imagem P' são coicidentes.

2. Se P não pertence a r, então a imagem de P é o ponto P' tal que o eixo r é a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.

Assim uma figura em uma folha de papel possui simetria de reflexão se puder ser dobrada pelo eixo r de reflexão de tal forma que a figura original e a sua imagem se sobrepõem, como se o eixo de reflexão funcionasse como um espelho refletindo a imagem da figura.

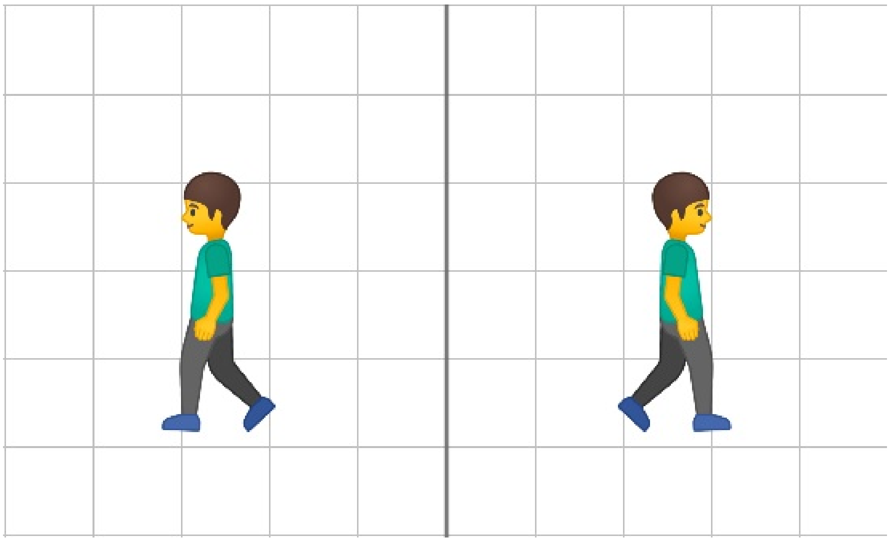


Figura 2 – Simetria de reflexão.

Fonte: autor.

2.1.3 Simetria de Translação

A simetria de translação é uma transformação geométrica no plano π onde uma função bijetora $f : \pi \to \pi$ preserva distâncias e cada ponto P do plano π é associado ao ponto $f(P) = P' = P + v$ onde v é um vetor, assim $\overline{PP'}$ possui mesma amplitude, direção e sentido de $\overrightarrow{v}$.

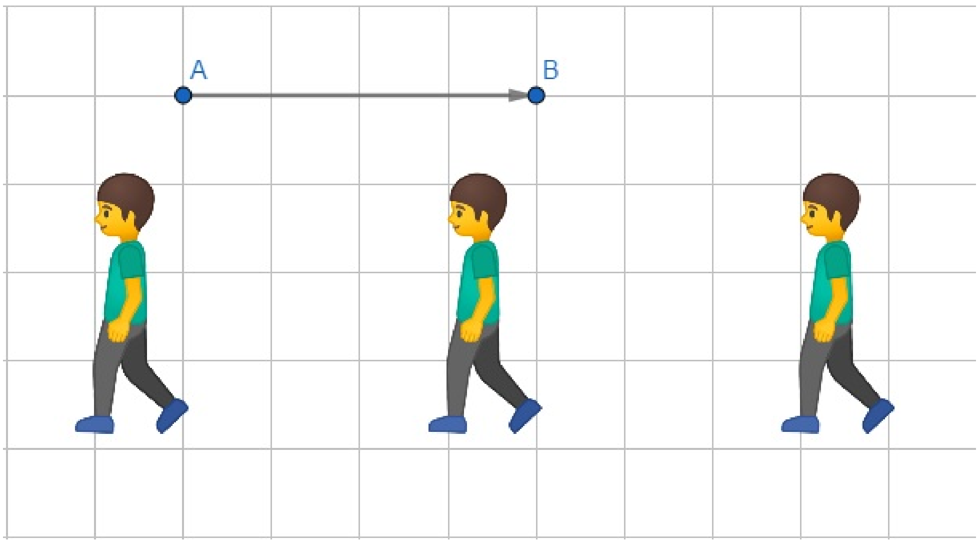


Figura 3 – Simetria de translação

Fonte: autor.

2.1.4 Simetria de Rotação

A simetria de rotação está definida através da relação por um ângulo. Seja O um ponto do plano π e α um ângulo de vértice O. A rotação em torno do ponto O

é uma transformação geométrica $f : \pi \to \pi$ que preserva distâncias e a cada ponto P do plano π , com $P \neq 0$, é associado o ponto $f(P) = P'$ de forma que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $\widehat{POP'} = \alpha$. Podemos dizer então que o ponto P sofreu uma rotação α em torno do ponto O.

O sentido de rotação pode ser positivo, quando gira no sentido anti horário ou negativo, quando gira no sentido horário.

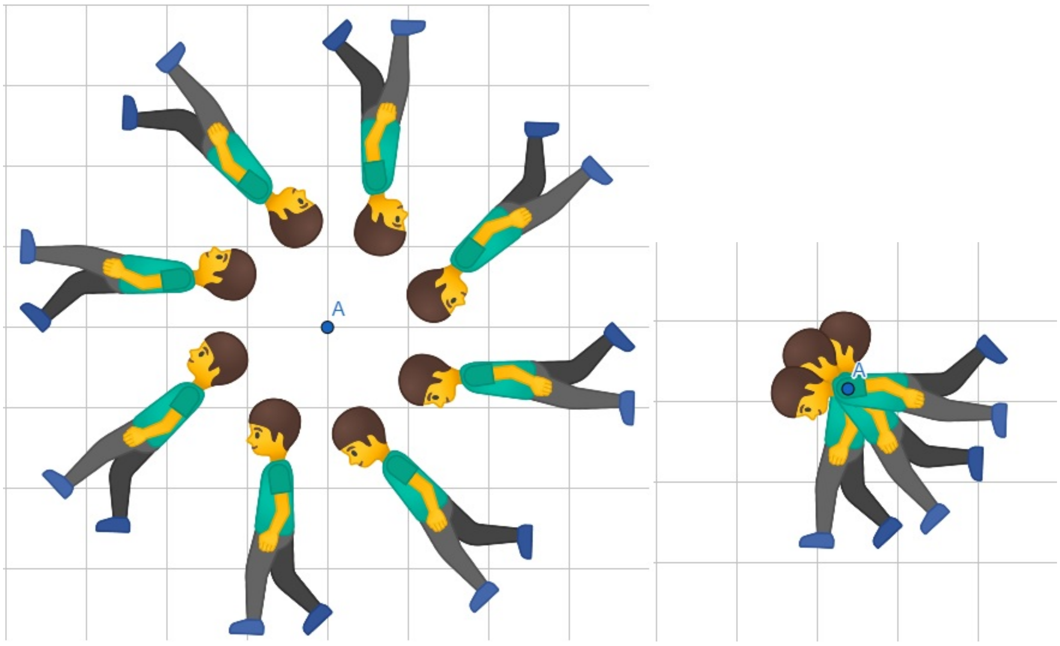


Figura 4 – Simetria de Rotação

Fonte: autor.

2.2 A simetria nas obras de M. C. Escher

Para falarmos de simetria nos trabalhos de Escher vamos primeiramente compreender como foi a trajetória de vida do artista e quais foram os fatos que determinaram e apontaram a suas obras como "arte matemática". Mauritus Cornelius Escher nasceu na Holanda, em 1898, e durante sua infância não obteve destaque na escola, pelo contrário, era considerado um aluno fraco tendo sido reprovado duas vezes, porém nessa época já demonstrava habilidades com desenhos e também com lineogravuras (processo de gravura semelhante à xilogravura, em que a imagem é recortada em linóleo e colada em uma base de madeira). Seu pai era engenheiro civil e todos os seus irmãos mais velhos se tornaram cientistas.

Em 1919, Escher ingressou na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas de Haarlem influenciado pelo seu pai que já tinha percebido seu talento artístico. Mais tarde, contrariando a vontade de seu pai, Escher desistiu do curso de arquitetura e passou a estudar na Escola de Artes, período no qual desenvolveu grande domínio na técnica de xilogravura. A partir dessa época, Escher fez diversas viagens a vários países como Itália e Espanha e foi nessas viagens que Escher adquiriu experiências que iriam influenciar diretamente suas obras. Uma grande influência no desenvolvimento artístico de Escher foi o palácio de Alhambra, em Granada, na Espanha, que ele visitou pela primeira vez em 1922. Construído pelos mouros no século 13, povo de origem árabe que já nesse período tinham grande destaque pelas suas contribuições á matemática, o palácio é até hoje um local de peregrinação para os amantes da simetria e do padrão. Uma característica da arte moura são desenhos geométricos altamente decorativos e simétricos e portanto, Escher ficou fascinado pela ornamentação do palácio com paredes revestidas de mosaicos e figuras ricamente trabalhadas.

Figura 5 – Paredes do palácio de Alhambra oramentadas com mosaicos mouros

Fonte: https://pixabay.com/pt/alhambra-janela-ornamentado-402358/

Apesar de não conhecer muito de matemática, Escher passou a estudar e copiar de forma sistemática e profunda as obras feitas pelos mouros numa tentativa de compreender como elas eram feitas, porém foi após a sua segunda visita a Alhambra em 1936 que sua insistência por figuras de pavimentação realmente se consolidou, e ele começou a produzir desenhos como Anjos e Diabos.

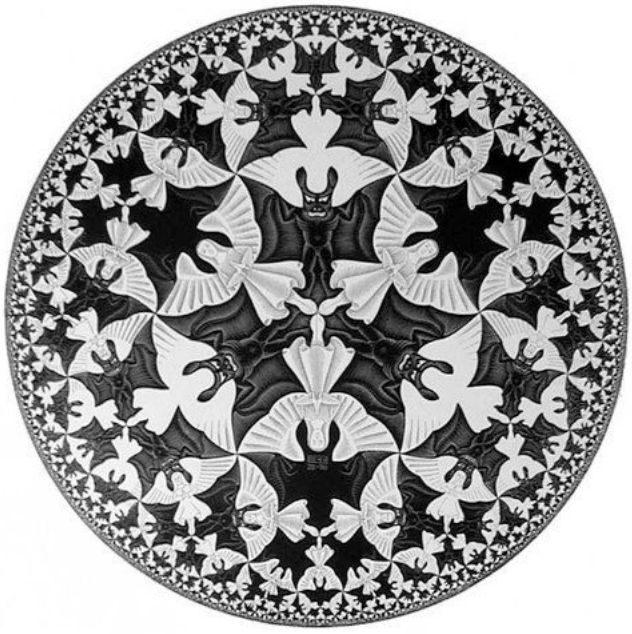


Figura 6 – Obra de Escher - Circle Limit IV- Angels and Demons.

Fonte: http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iv/

Assim, com esforço, acabou descobrindo que através de polígonos regulares e congruentes como os quadrados, triângulos e hexágonos era possível construir mosaicos que pudessem pavimentar o plano sem sobrepor e nem deixar espaços entre eles. Escher também descobriu os movimentos de simetria que poderiam ser aplicados nas figuras formando então mosaicos de diferentes composições e características únicas. É importante destacar que até esse momento Escher não tinha associado suas obras com a matemática e sequer imaginava que seus trabalhos despertariam o olhar de vários matemáticos da época, como o caso de Bruno Ernst, matemático que registrou e organizou as obras de Escher dando origem ao livro "O Espelho Mágico de M. C. Escher". Para a produção do livro Ernst o visitou semanalmente durante um ano, e foi a partir desses encontros que Escher passou a observar e considerar a matemática existente nos seus trabalhos.

> Até pouco tempo, quase todas as galerias de obras de arte gráfica, mesmo as holandesas, se abstiveram de fazer uma coleção apropriada da obra de Escher. Ele não era reconhecido como artista. Os críticos de arte não sabiam o que fazer com a obra dele e simplesmente a ignoraram. Inicialmente, só matemáticos, cristalógrafos e físicos mostraram grande interesse. E, no entanto, todo aquele que tiver vontade, sem preconceitos, de se ocupar com a obra deste artista, encontrará nisso uma grande satisfação. (ERNST, 2007, p. 18)

Outro matemático que influenciou as obras de Escher foi Coxeter, na verdade podemos dizer que este encontro influenciou o trabalho de ambos e possivelmente foi uma das melhores contribuições entre Arte e Matemática. Em 1954, o artista Maurits Escher conheceu o matemático Donald Coxeter no Congresso Internacional de Matemáticos, em Amsterdã. Após conhecer os trabalhos do artista, Coxeter pediu autorização para utilizar uma de suas figuras regulares em um discurso presidencial na Royal Society do Canadá. Mais tarde Escher observou os trabalhos do matemático e ficou vislumbrado por uma figura que ilustrava uma pavimentação na chamada geometria hiperbólica. Inspirado nessa figura Escher produziu a obra chamada Circulo I

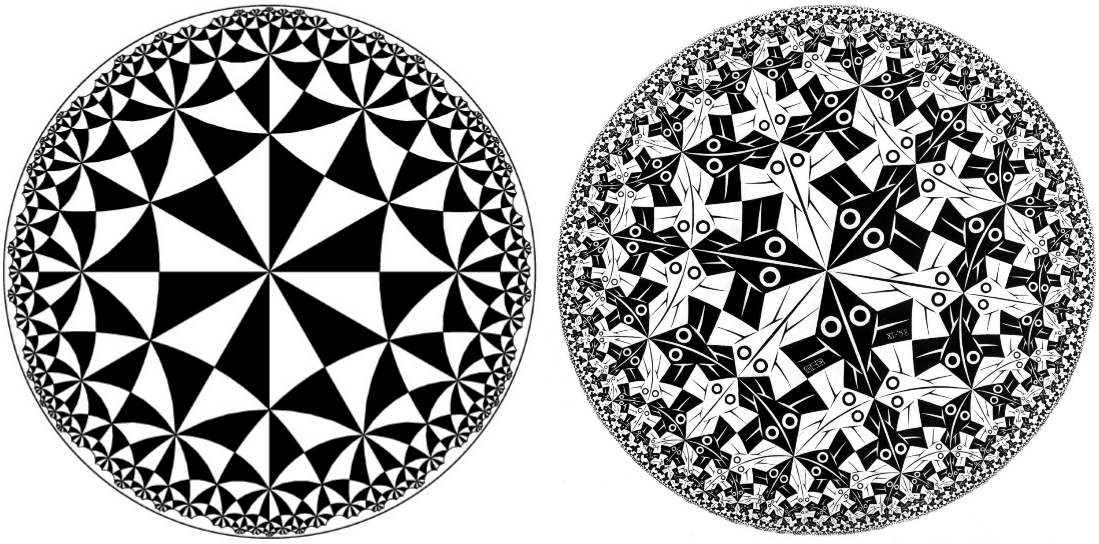


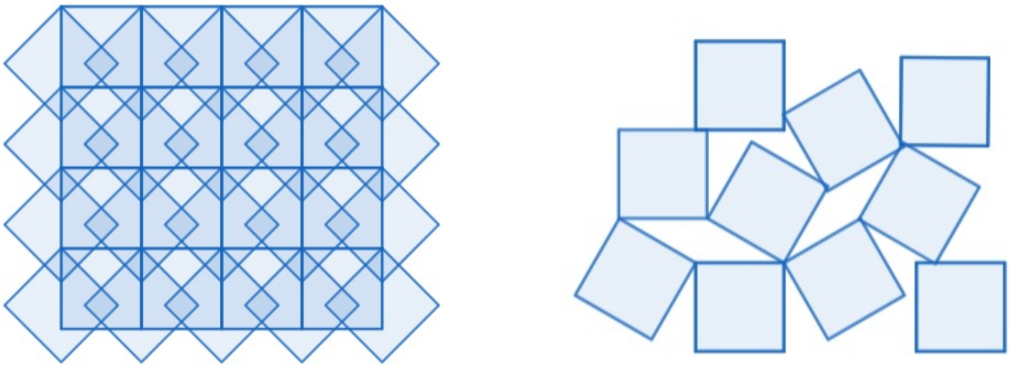
Figura 7 – Disco de Poincaré e Obra de Escher

Fonte: http://www.mathaware.org/mam/03/essay1.html

A figura representada no trabalho de Coxeter é conhecida como disco de Poincaré, que é uma representação da geometria hiperbólica. Escher percebeu que essa era a maneira perfeita de representar o infinito porque, na geometria hiperbólica, todos os triângulos mostrados são, na verdade, do mesmo tamanho. Escher continuou trabalhando com essa nova idéia e produziu várias obras, tornando-se mundialmente famoso.

2.3 Pavimentações no plano

Pavimentação, mosaicos, tesselação ou recobrimento do plano é um padrão de figuras que cobrem um região plana sem que haja espaços ou sobreposições entre elas. Barbosa (1993) define pavimentação como sendo um conjunto de polígonos que cobre sem cruzamentos o plano. Assim não são consideradas pavimentações os seguintes exemplos:



(a) (b)

Figura 8 – figuras que não são consideradas pavimentações no plano.

Fonte: Autor.

A figura 7(a) não satisfaz a condição de sobreposição e a figura 7(b) não satisfaz a condição de preenchimento do plano.

As pavimentações podem ser construídas utilizando polígonos regulares, irregulares ou curvas como os exemplos a seguir:

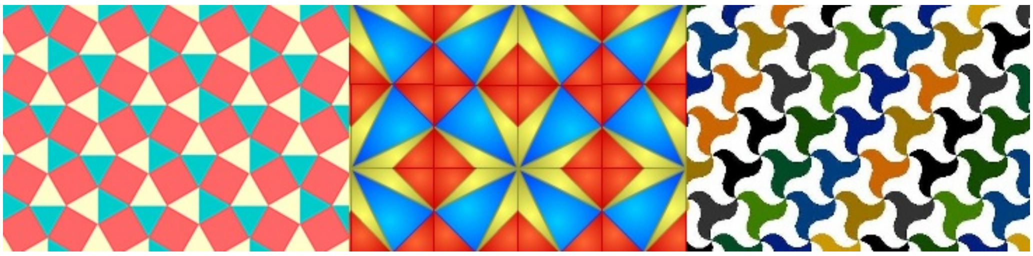
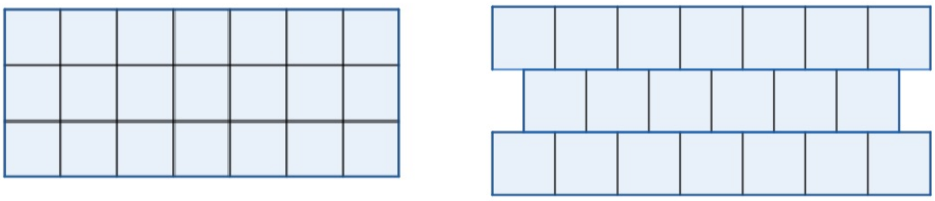


Figura 9 – pavimentações do plano com polígonos regulares, irregulares e curvas.

Fonte: Autor.

Ainda segundo Barbosa as pavimentação podem ser do tipo:

- Lado a lado: quando a intersecção de dois polígonos é um lado ou um vértice em comum ou a intersecção é vazia, ou seja, cada lado de um polígono é também lado de exatamente mais um polígono;



(a) (b)

Figura 10 – Exemplo de pavimentação lada a lado e pavimentção não lado a lado

Fonte: Autor.

A figura 9(a) planificação lado a lado e figura 9(b) planificação não lado a lado.

- Arquimediana: quando todos os vértices, também chamados de "nós", apresentam o mesmo número de lados concorrentes;
- Uniforme: quando os polígonos ao redor de um vértice são sempre os mesmos e na mesma disposição;
- Platônica: quando os polígonos apresentam o mesmo número de lados e todos os nós apresentam o mesmo número de arestas.

2.3.1 Regulares com único tipo de polígono.

Pavimentações regulares são aquelas formadas apenas por polígonos regulares, ou seja, todos os lados dos polígonos possuem a mesma medida e todos os ângulos internos são congruentes. Porém nem todos os polígonos regulares podem ser utilizados para pavimentar o plano, para determinar quais deles podemos utilizar devemos analisar a medida do ângulo interno do polígono.

Para que um polígono pavimente o plano a soma da medida dos ângulos internos em torno de cada vértice deve ser exatamente 360º. Assim, se queremos formar um pavimentação utilizando exclusivamente poligonos regulares de n lados é necessário que o ângulo interno seja divisor de 360°.

Assim temos que

$$\frac{180°(n-2)}{n} = \frac{360°}{k}$$

onde k representa a distribuição de polígonos ao redor de cada vértice, assim k é inteiro e $k \geq 3$ pois não é possível colocar um ou dois polígonos ao redor de um vértice.

então

$$\frac{180°n - 360}{n} = \frac{360°}{k}$$

$$\frac{n-2}{n} = \frac{2}{k}$$

$$k(n-2) = 2n$$

$$\frac{2n}{n-2} = k$$

como $k \geq 3$ temos

$$\frac{2n}{n-2} \geq 3$$

$$2n \geq 3n - 6$$

$$n \leq 6$$

Como n é mínimo 3 pois não temos polígonos com menos de dois lados então $n \geq 3$ assim encontramos os seguintes valores;

- $n = 3$, triângulo equilátero;
- $n = 4$, quadrado;
- $n = 5$, pentágono regular;
- $n = 6$, hexágono regular;

Para $n = 3$ teremos $k = 6$, ou seja, teremos 6 triângulos equiláteros distribuídos ao redor de um vértice comum . Seja A_n o ângulo interno do polígono regular, temos que $A_n = 60°$ e, portanto, a pavimentaçãodo plano pode ser feita com triângulo equiláteros.

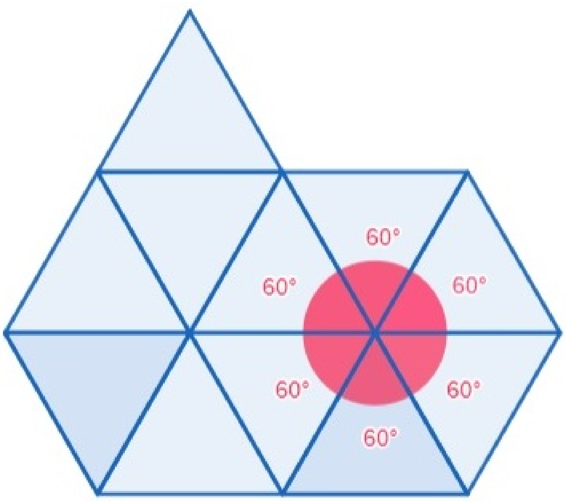


Figura 11 – Pavimentação com triângulos equiláteros

Fonte: Autor.

Para $n = 4$ teremos $k = 4$, ou seja, teremos 4 quadrados distribuídos ao redor de um vértice comum. Como $A_n = 90°$ temos que a pavimentação do plano pode ser construída com quadrados.

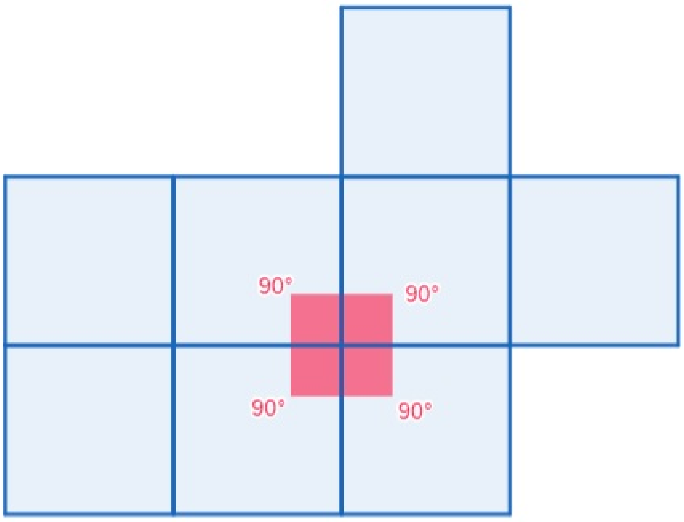


Figura 12 – Pavimentação com quadrados

Fonte: Autor.

Para $n = 5$ teremos $k = \frac{10}{3}$ mas k deve ser inteiro, portanto não é possivel pavimentar o plano com pentágonos regulares.

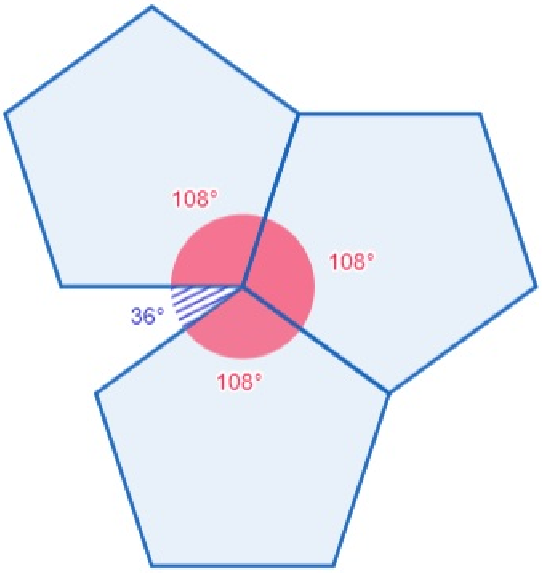


Figura 13 – Pavimentação com petágonos regulares

Fonte: Autor.

Para $n = 6$ teremos $k = 3$, ou seja, teremos 3 hexágonos regulares distribuídos ao redor de um vértice comum. Como $A_n = 120°$ temos que a pavimentação o plano pode ser feita com hexágonos regulares.

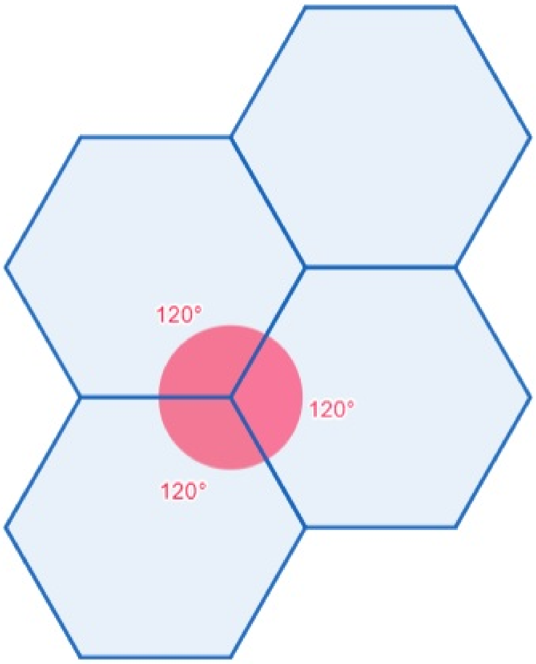


Figura 14 – Pavimentação com hexágonos regulares

Fonte: Autor.

Concluímos então que os únicos polígonos regulares que podem ser utilizados para a pavimentação de um plano são os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares.

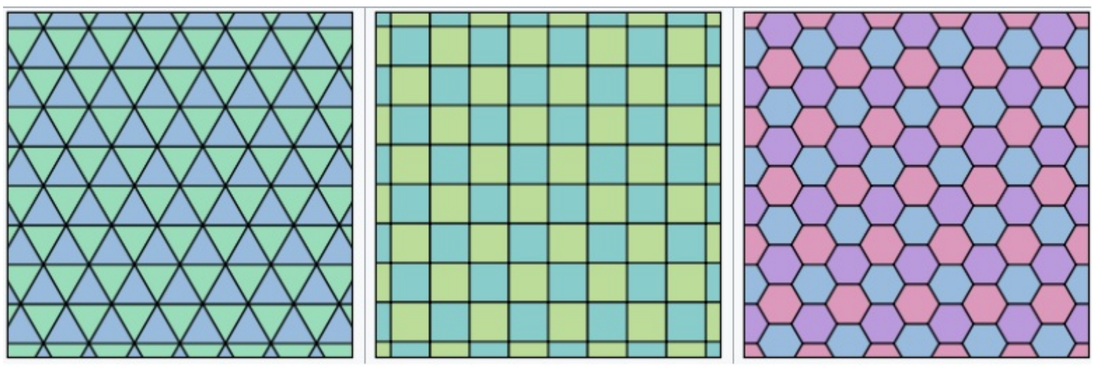


Figura 15 – Pavimentações regulares no plano

Fonte: http://www.wikiwand.com/de/Parkettierung

2.3.2 Semi regular com mais de um polígono

Segundo Carvalho (2008), a distribuição de polígonos regulares ao redor de um vértice comum é chamada de configuração. Temos então que pela configuração (3,3,4,3,4) devemos interpretar que tomamos um triângulo, um triângulo, um quadrado, um triângulo e um quadrado dispostos necessariamente nessa ordem. Essa configuração forma o mosaico da figura 2.16. Observe que em cada vértice a mesma configuração é preservada formando um padrão. A configuração (3,3,3,4,4) possui o mesmo tipo e a mesma quantidade de polígonos utilizados na figura anterior porém sua disposição no mosaico é diferente.

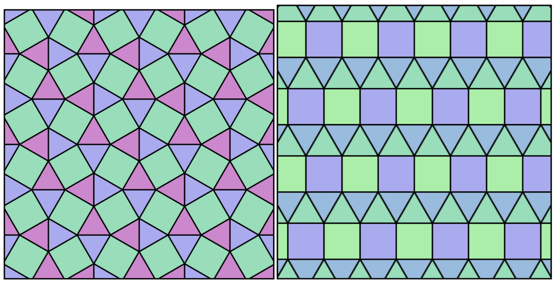


Figura 16 – Mosaicos com configuração (3,3,4,3,4) e (3,3,3,4,4).

Fonte: http://www.wikiwand.com/de/Parkettierung

Vamos determinar todas as configurações que podem pavimentar o plano. Murari (1999) apresenta um estudo matemático para a determinação de todas as configurações formadas por polígonos regulares e verifica quais dessas configurações formam pavimentações. Sendo k o número de polígonos ao redor de um vértice temos que $k \geq 3$. Como a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é 60° temos que o maior valor de k possível é $\frac{360°}{60°} = 6$, ou seja, $3 \leq k \leq 6$.

- Suponhamos que $k = 3$ então teremos três polígonos regulares dispostos ao redor de um vértice comum, com lados n_1, n_2 e n_3. como a soma dos ângulos internos ao redor do vértice comum deve resultar em exatamente 360° temos que

$$180\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180\left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180\left(1 - \frac{2}{n_3}\right) = 360$$

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) = 2$$

$$\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3} = 1$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

supondo que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ temos então que $\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{n_1}$ e $\frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_1}$ portanto,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{3}{n_1}$$

temos então que $n_1 \leq 6$.

Considerando $n_1 = 3$, ou seja, um dos polígonos é um triângulo equilátero temos que $\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6}$ ou ainda $\frac{1}{n_3} = \frac{n_2-6}{6n_2}$ como os valores devem ser positivos devemos ter $n_2 \geq 7$. Pela desigualdade $n_2 \leq n_3$ temos também que

$$\frac{n_2 - 6}{6n_2} = \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$\frac{n_2 - 6}{6n_2} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$\frac{n_2 - 6}{6} \leq 1$$

$$n_2 \leq 12$$

Portanto $7 \leq n_2 \leq 12$. Assim atribuíndo os valores possiveis de n_2 e considerando as soluções inteiras e positivas de n_3 vemos que não podemos ter $n_2 = 11$. Portanto temos as seguintes configurações (n_1, n_2, n_3):

(3, 7, 42) , (3, 8, 24) , (3, 9, 18) , (3, 10, 15) e (3, 12, 12).

Considerando $n_1 = 4$, ou seja, um dos polígonos é um quadrado temos que $\frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4}$ ou ainda $\frac{1}{n_3} = \frac{n_2-4}{4n_2}$ como os valores devem ser positivos devemos ter $n_2 \geq 5$. Pela desigualdade $n_2 \leq n_3$ temos também que

$$\frac{n_2 - 4}{4n_2} = \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$\frac{n_2 - 4}{4n_2} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$n_2 \leq 8$$

Portanto $5 \leq n_2 \leq 8$. Assim atribuíndo os valores possiveis de n_2 e considerando as soluções inteiras e positivas de n_3, obtemos as seguintes configurações (n_1, n_2, n_3):

(4, 5, 20) , (4, 6, 12) e (4, 8, 8).

Procedendo analogamente para $n_1 = 5$, ou seja, um dos polígonos é um pentágono temos que $\frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{3}{10}$ ou ainda $\frac{1}{n_3} = \frac{3n_2-10}{10n_2}$como os valores devem ser positivos devemos ter $n_2 \geq 4$ contudo devemos ter $n_1 \leq n_2$ portanto $n_2 \geq 5$. Pela desigualdade $n_2 \leq n_3$ temos também que

$$\frac{3n_2 - 10}{10n_2} = \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$\frac{3n_2 - 10}{10n_2} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$n_2 \leq 6$$

Encontramos $5 \leq n_2 \leq 6$ e a única configuração (5, 5, 10).

E por fim para $n_1 = 6$, ou seja, um dos polígonos é um hexágono temos que $\frac{1}{6} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3}$ ou ainda $\frac{1}{n_3} = \frac{n_2-3}{3n_2}$como os valores devem ser positivos devemos ter $n_2 \geq 4$ contudo devemos ter $n_1 \leq n_2$ portanto $n_2 \geq 6$. Pela desigualdade $n_2 \leq n_3$ temos também que

$$\frac{n_2 - 3}{3n_2} = \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$\frac{n_2 - 3}{3n_2} \leq \frac{1}{n_2}$$

$$n_2 \leq 6$$

Encontramos $n_2 = 6$ e a única configuração possível é (6, 6, 6).

Resumidamente as configurações possíveis com com três polígonos dispostos ao redor de um vértice comum está descrito na tabela 1 .

- Suponhamos agora que $k = 4$ então teremos quatro polígonos regulares dispostos ao redor de um vértice comum, com lados n_1, n_2, n_3 e n_4. Como a soma dos ângulos internos ao redor do vértice comum deve resultar em exatamente 360° temos que

$$180\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + 180\left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + 180\left(1 - \frac{2}{n_3}\right) + 180\left(1 - \frac{2}{n_4}\right) = 360$$

Utilizando o procedimento semelhante ao caso $k = 3$ obtemos que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

Considerando $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ e tomando o mesmo argumento anterior para calcular as soluções inteiras e positivas da euqação resultante podemos verificar que as únicas configurações possíveis são: (3, 3, 4, 12) , (3, 3, 6, 6) , (3, 4, 4, 6) e (4, 4, 4, 4).

- Para $k = 5$, consideremos então cinco polígonos regulares dispostos ao redor de um vértice comum, com lados n_1, n_2, n_3,n_4 e n_5. Assim a equação resultante seria

$$180\left(1-\frac{2}{n_1}\right)+180\left(1-\frac{2}{n_2}\right)+180\left(1-\frac{2}{n_3}\right)+180\left(1-\frac{2}{n_4}\right)+180\left(1-\frac{2}{n_5}\right)=360$$

De forma analoga obtemos

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

Portanto para $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$ e repetindo o mesmo argumento anterior chegamos nas seguintes configurações: (3, 3, 3, 3, 6) e (3, 3, 3, 4, 4).

Finalmente para $k = 6$ teremos seis polígonos regulares dispostos ao redor de um vértice comum com lados n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 e n_6. Determinando as soluções inteiras e positvas da equação resultante

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

Obtemos uma única configuração (3, 3, 3, 3, 3, 3).

De forma resumida podemos encontrar todas as configurações possíveis na tabela 1.

Quantidade de Poligonos	n° Solução	Tipos de Polígonos
Três Polígonos	1	(6,6,6)
	2	(5,5,10)
	3	(4,5,20)
	4	(4,6,12)
	5	(4,8,8)
	6	(3,7,42)
	7	(3,8,24)
	8	(3,9,18)
	9	(3,10,15)
	10	(3,12,12)
Quatro Polígonos	11	(4,4,4,4)
	12	(3,3,4,12)
		(3,4,3,12)
	13	(3,3,6,6)
		(3,6,3,6)
	14	(3,4,4,6)
		(3,4,6,4)
Cinco Polígonos	15	(3,3,3,3,6)
	16	(3,3,3,4,4)
		(3,3,4,3,4)
Seis Polígonos	17	(3,3,3,3,3,3)

Tabela 1 – Soluções possíveis de pavimentação do plano com polígonos regulares.

Fonte: Autor.

Algumas soluções como as de número 12, 13, 14 e 16 (Tabela 1) apresentam duas possibilidades de ordenação dos polígonos, determinando, assim, dois tipos de arranjos distintos. Portanto, é possível formar ao todo 21 arranjos distintos por meio de polígonos regulares.

Nem todas essas configurações formam mosaicos pois não é possivel prolongar essa configuração em todo o plano. Das vinte e uma configurações apenas onze delas podem configurar pavimentações no plano sendo 3 dessas as pavimentações regulares e 8 pavimentações semi regulares também denominadas de mosaicos arquimedianos. São elas (3,12,12), (4,6,12), (4,8,8), (3,6,3,6), (3,4,6,4), (3,3,4,3,4), (3,3,3,4,4) e (3,3,3,3,6),

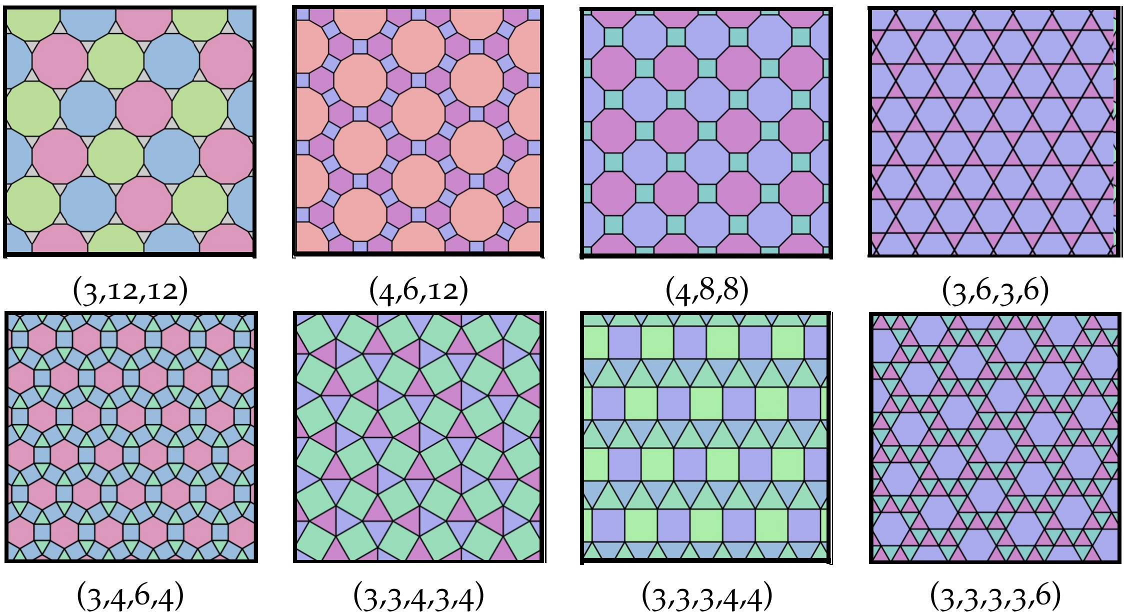


Figura 17 – Mosaicos semi regulares.

Fonte: http://www.wikiwand.com/de/Parkettierung

2.3.3 Não regulares

É possível pavimentar o plano utilizando polígonos não regulares como o caso do triângulo isósceles.

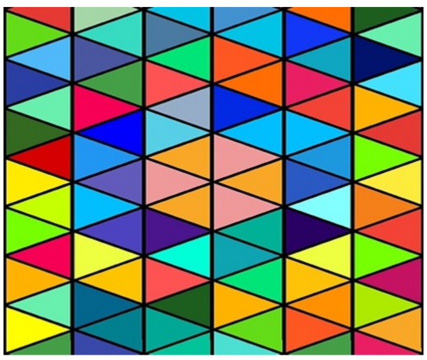


Figura 18 – Mosaico com triângulos isósceles.

Neste trabalho vamos usar especificamente este tipo de pavimentação para a construção dos caleidociclos. Como iremos tratar com mais detalhe no capítulo 4, veremos que para construir caleidociclos fechados precisaremos utilizar este tipo de pavimentação.

2.4 Construindo Mosaicos estilo M. C. Escher

Como já vimos na seção anterior somente com triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares é possível construir pavimentações regulares. Os mosaicos de Escher de longe se aproximam dessas pavimentações. Inspirado pelos artistas árabes, especialista em pavimentações no plano, Escher lamentava o fato de usarem apenas figuras geométricas abstratas em suas construções. Segundo Ernst uma particularidade das obras de Escher era que ele sempre tentava retratar em suas pavimentações figuras que tivessem algum significado e objetivo, ou seja, as imagens se completavam e tinham uma finalidade.

> Ao princípio não tinha nenhuma idéia como podia construir sistematicamente as minhas figuras. Não conhecia nenhuma regra do jogo e procurava – quase sem saber o que fazia - ajustar superfícies congruentes, a que tentava dar formas de animais... [...] (ERNST, 1991).

Neste trecho, Escher retrata sua busca em determinar os padrões e características que transformavam aquelas figuras em pavimentações, e indica como podemos a partir de outras áreas de conhecimento despertar o interesse do aluno para uma aprendizagem significativa. Seus estudos o levaram a descobrir as relações matemáticas existentes em trabalhos artísticos que a princípio não pareciam carregar esses conceitos geométricos. Por isso a arte através de sua beleza e harmonia se torna um excelente instrumento de aprendizagem interdisciplinar, pois tem a capacidade de despertar o interesse do observador.

As obras de Escher são um exemplo concreto que pode ser utilizado para responder a pergunta mais frequente em sala de aula "Qual a finalidade dessa matéria?", quando o aluno vê sentido naquilo que aprende a aprendizagem se torna significativa. Solé (1998, p.42) afirma que "para poder atribuir sentido à realização de uma tarefa, é preciso que se saiba o que se deve fazer e o que se pretende com ela; que a pessoa que a realizar se sinta competente para efetuá-la e que a tarefa em si resulte motivadora." Dessa forma, se o conteúdo estiver ligado aos interesses da pessoa e, naturalmente, se a tarefa em si corresponde a um objetivo com finalidade concreta ela se torna motivadora.

Para construir seus mosaicos Escher, ao contrário do que se imaginam, recorria às planificações regulares do plano como ponto de partida e utilizando os conceitos de simetria, como translações, rotações e reflexões transformava o que antes era apenas um triângulo, quadrado ou hexágono em figuras muito mais atraentes que se encaixavam perfeitamente no plano criando obras de arte com características únicas e que hoje são mundialmente reconhecidas.

Vejamos como era possível transformar as pavimentações regulares em mosaicos no estilo M.C. Escher.

2.4.1 Construção de mosaicos utilizando triângulos equiláteros.

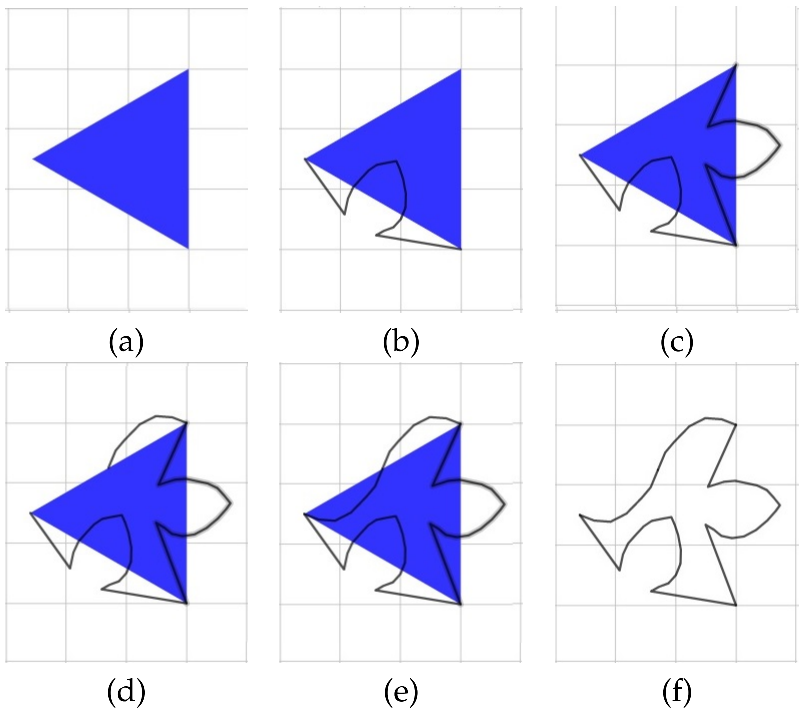


Figura 19 – Construção de mosaicos a partir do triângulo equilátero.

Fonte: Autor.

- Desenhamos uma curva em um dos lados do triângulo, é importante que o desenho da curva inicie e termine nos vértices como na figura 19(b).
- Em seguida realizamos uma rotação de 60° dessa curva em relação a um vértice como na figura 19(c). A curva agora estará posicionada segundo lado do triângulo.
- Definimos o ponto médio do terceiro lado do triângulo e desenhamos uma curva na metade desse lado como na figura 19(d).
- Realizamos uma rotação dessa curva de 180° em relação ao ponto médio determinado na etapa anterior. Figura 19(e).

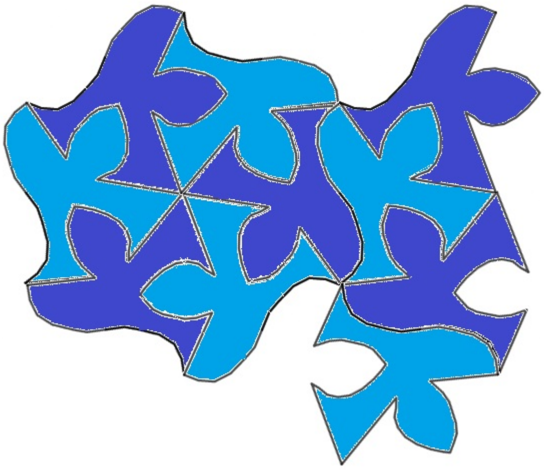


Figura 20 – Pavimentação formada com a figura anterior

Fonte: Autor.

2.4.2 Construção de mosaicos utilizando quadrados.

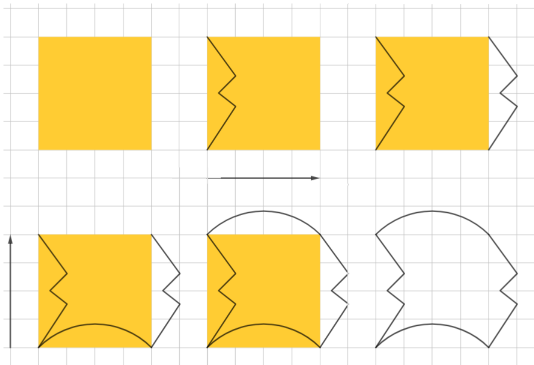


Figura 21 – Construção de mosaico a partir do quadrado

Fonte: Autor.

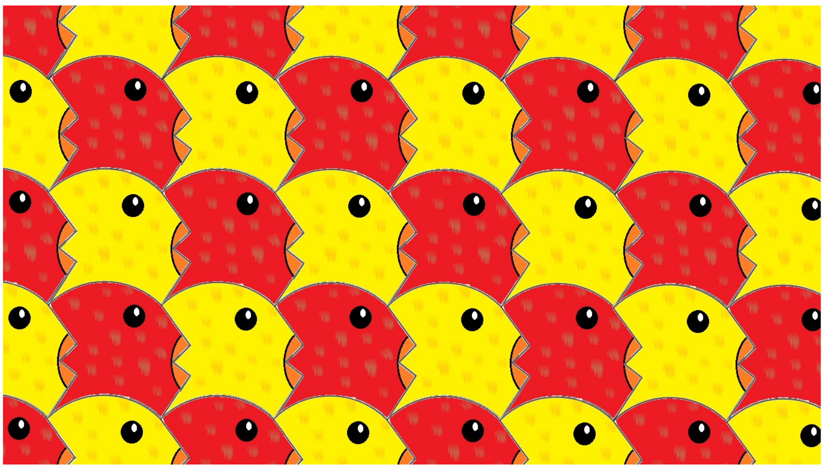


Figura 22 – Pavimentação formada com a figura anterior

Fonte: Autor.

2.4.3 Construção de mosaicos utilizando hexáganos regulares.

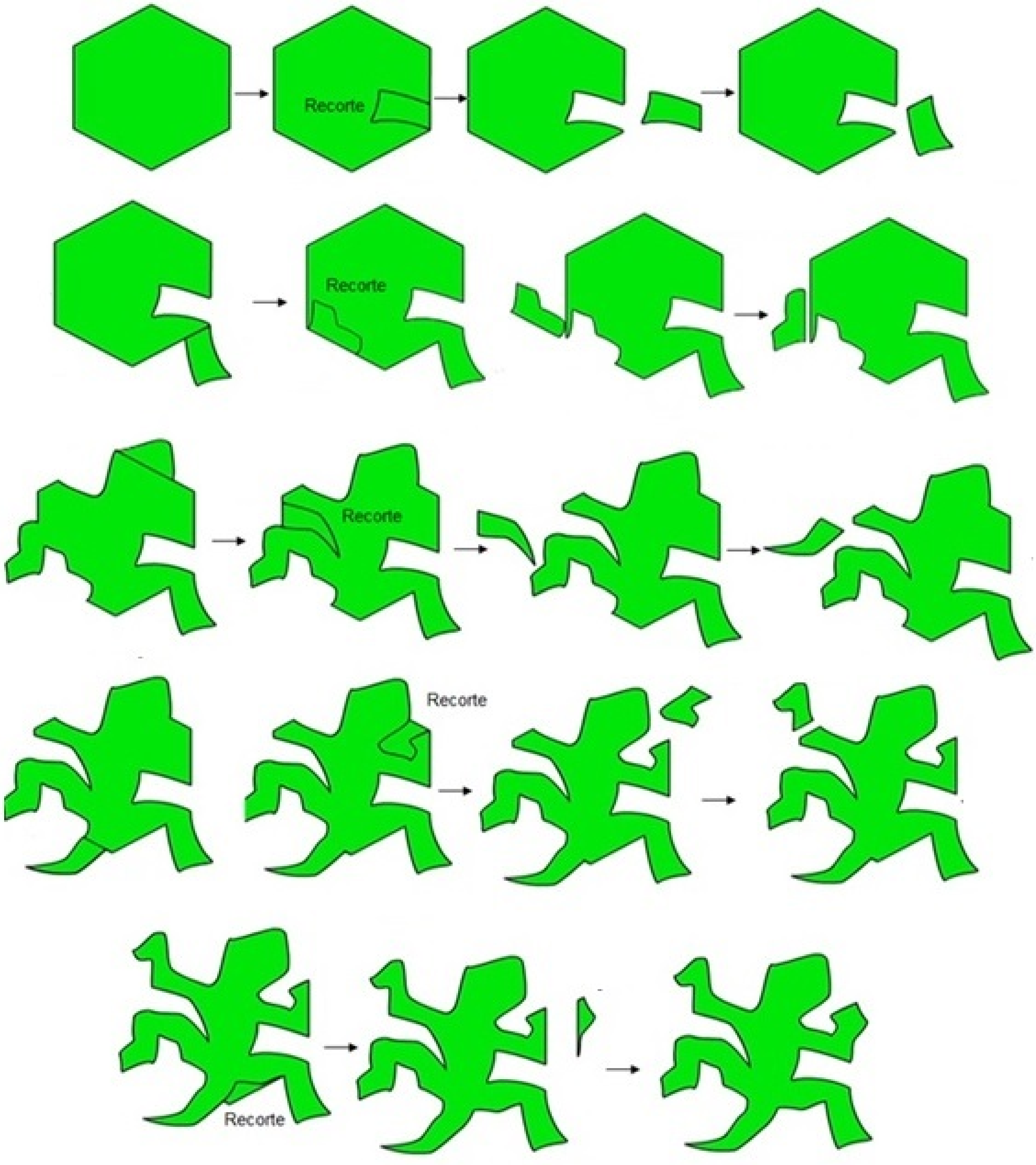


Figura 23 – Construção de mosaico a partir do hexágono.

Fonte: Autor.

Figura 24 – Planificação Hexagonal com animais - Reptiles (1943) Artista M.C. Escher.

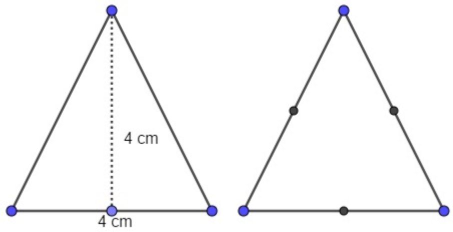
Fonte: https://www.mcescher.com/gallery/switzerland-belgium/no-25-lizard/

2.4.4 Construção de mosaico utilizando triângulos isósceles.

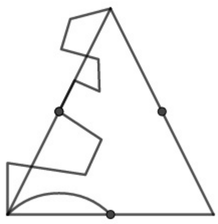
Ilustraremos a contrução do mosaico com triângulos isósceles detalhadamente pois iremos utilizar esse processo na aplicação da atividade pedagógica.

Procedimento:

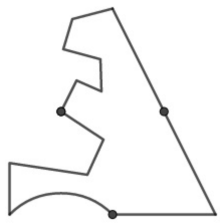
- Em um folha de papel construa com régua e compasso um triângulo isósceles com base e altura iguais a 4 cm. Em seguida marque os pontos médios de cada lado.



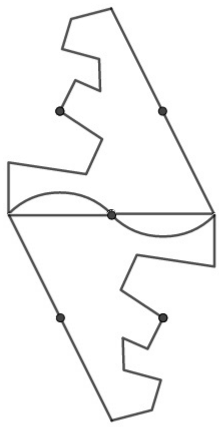
- Desenhe uma curva na base do triângulo começando num vértice terminando no seu ponto médio. Escolha um dos lados e faça uma curva qualquer começando e terminando nos vértices desse lado (é importante que a curva passe pelo ponto médio do lado também)



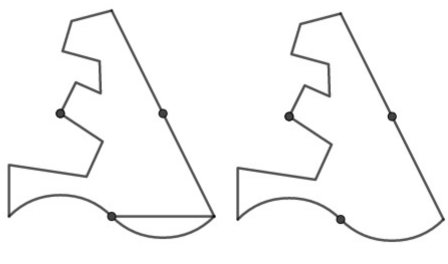
- Recorte a figura formada e, com lápis, faça o contorno da figura recortada na folha de papel.



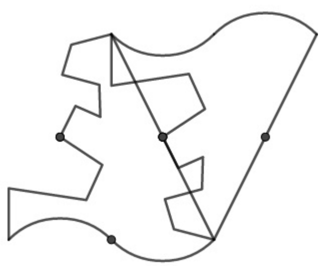
- Posicione a figura recortada na folha de papel de forma que as duas imagens se encaixem de acordo com a figura. Desenhe a curva na outra parte a base. (rotação de 180° da figura em relação ao ponto médio da base)



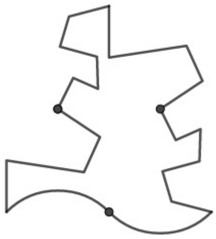
- A figura ficará dessa forma na folha.



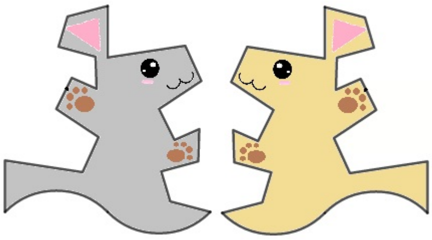
- Posicione a figura recortada na folha de papel de forma que as duas imagens se encaixem de acordo com a figura. Desenhe a curva no outro lado do triângulo. (reflexão em relação ao vértice oposto a base e translação)



- A figura formada no papel é o molde que usaremos para desenhar o mosaico.



- Utilizando a criatividade, pinte e decore o molde.



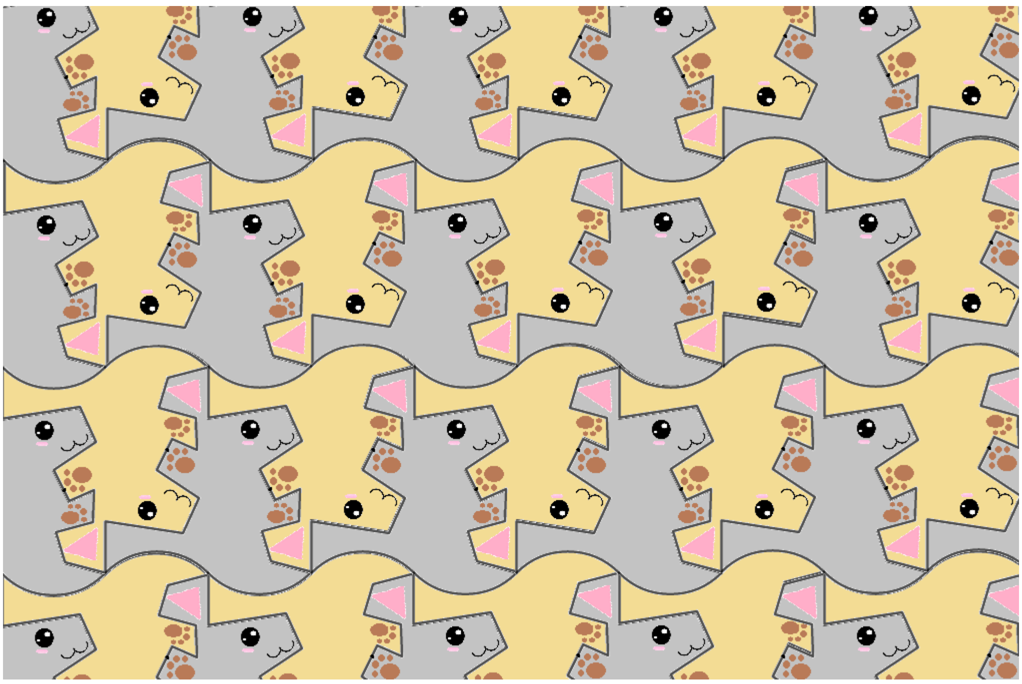
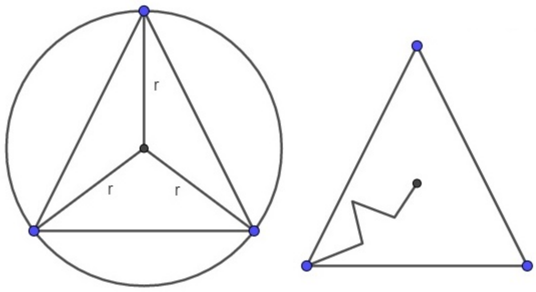


Figura 25 – Mosaico construido a partir de um triângulo isósceles.

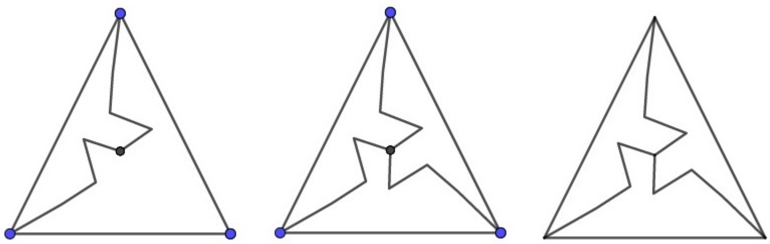
Fonte: Autor.

Vejamos outra forma de construir um mosaico com triângulos isóceles utilizando como ponto de rotação o circuncentro do triângulo. Este ponto é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo e o fato de o utilizarmos é que ele é equidistante dos vértices do triângulo.

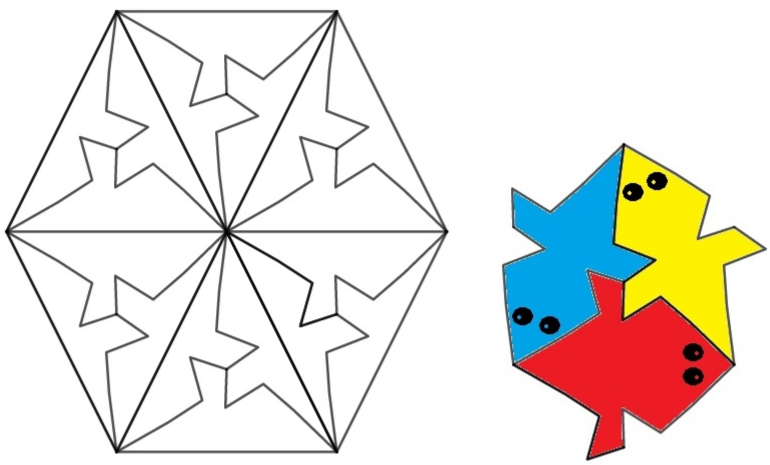
- Primeiramente, difinimos o circuncentro do triângulo (ponto de encontro das mediatrizes) e, em seguida, desenhamos uma curva com extremidade no circuncentro e em um dos vértices do triângulo.

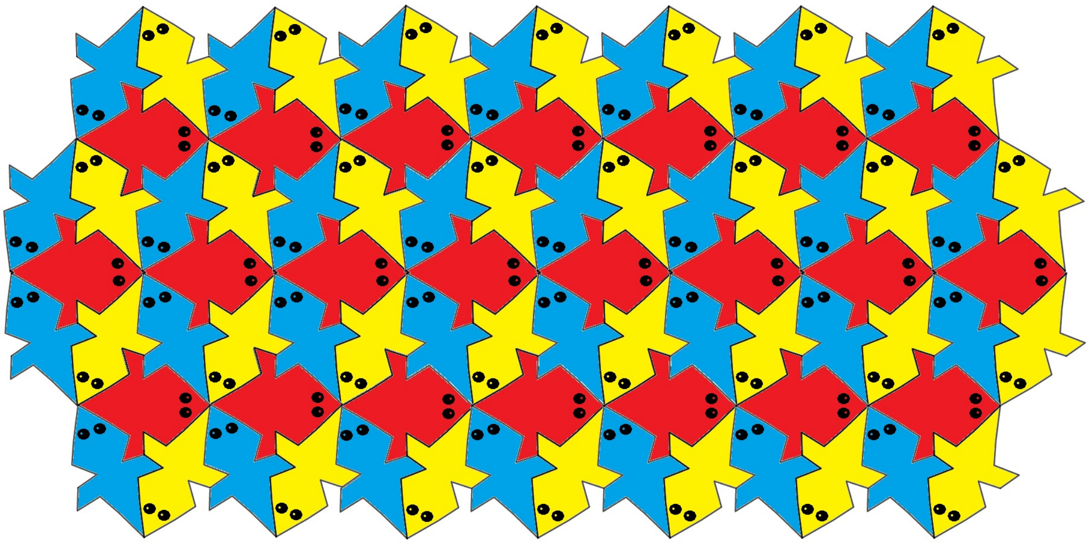


- Essa curva desenhada deverá ser rotacionada em relação ao ponto do circuncentro de tal forma que a outra extremidade se encontre nos outros dois vértices do triângulo.



A figura formada após ser reproduzida, pintada e destacada resultará no seguinte mosaico.





Fonte: Autor.

É importante destacar aqui que estamos apenas exemplicando uma forma de construção dentre uma infinidade de possibilidades que existem desde que os princípios de simetria e isometria sejam preservados.

3 Os Caleidociclos

Nesse capítulo abordamos uma breve história dos caleidociclos apresentando sua definição e especificando as propriedades matemáticas envolvidas bem como sua classificação e alguns exemplos.

Os caleidociclos são objetos tridimensionais fascinantes, formados a partir de dobraduras de papel possuem uma característica especial de girar em torno do seu centro. Eles despertam muita curiosidade não apenas pela sua beleza, padrões e simetrias mas principalmente pelo fato de ser uma criação artística, dinâmica e animada e que, por muitas vezes, causa até certa estranheza. Porém, é essa característica que desperta o interesse e proporciona o questionamento sobre como é o seu funcionamento? Quais propriedades os caleidociclos devem possuir para possibilitar o seu movimento contínuo? Como a rotação de cada caleidociclo pode ser descrita matematicamente? Quantos tetraedros são necessários para se construir um caleidociclo? Dobrando uma folha de papel com a planificação da figura formamos um caleidociclo.

Figura 26 – Visualizações de um caleidociclo hexagonal

Fonte: Autor.

3.1 Uma Breve História dos Caleidociclos

Em 1929, Paul Schatz um escultor e matemático alemão descobriu as inversões dos sólidos platônicos, incluido o cubo invertido ou “cubo de Schatz”. Esse cubo é um caso particular de caleidociclo formado por seis tetraedos não regulares.

Mais tarde, em 1958, o designer de artes plásticas,Wallace Walter, inventou o IsoAxis, um objeto tridimensional feito de papel e originado a partir da planificação de 60 triângulos isósceles retos que, após dobraduras, forma uma figura capaz de girar pelo seu próprio centro de tal maneira que cada rotação produz uma forma diferente e após algumas rotações consecutivas volta ao seu formato inicial.

Figura 27 – Rotações do Isoaxis

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/384214030447450 69/?lp=true

Em seu livro *M. C. Escher kaleidocycles* Doris Schattschneider e Wallace Walker dão o significado da palavra "kaleidocycle", que vem do grego: kalós (belo) + eidos (forma) + kyklos (círculo) e define caleidociclos como um anel tridimencional que, devido a sua forma flexível pode-se girá-lo pelo seu centro, em movimento contínuo e infinito.

Em 2003, Marcus Engel fez estudos mais detalhados e indicou as propriedades matemáticas que norteiam os caleidociclos especificando sua condição de existência e sua classificação.

Os caleidociclos são anéis de tetraedros semelhantes conectados, dois a dois, por suas arestas em comum de forma que cada tetraedro está ligado a exatamente dois outros tetraedros por arestas opostas. A principal característica dos caleidociclos é que eles são capazes de girar pelo seu centro “olho” continuamente sem que ocorra deformação do anel.

Na figura 28 temos a visualização de caleidociclos formados com quantidades diferentes de tetraedros. Observe que quando a quantidade n de tetraedros em um caleidociclo é ímpar sua configuração não é simétrica. Neste trabalho como estamos abordando conceitos de simetria iremos tratar apenas do caso em que a quantidade n de tetraedros no caleidociclo é par.

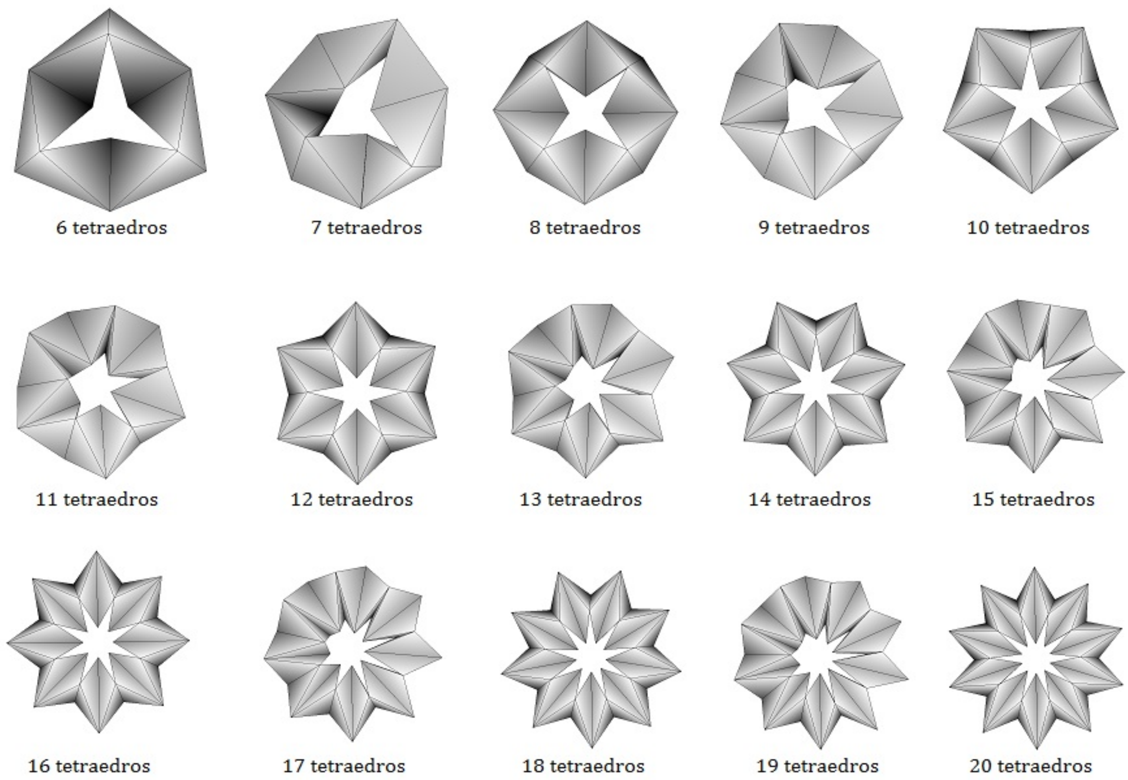


Figura 28 – Tipos de caleidociclos com n tetraedros

Fonte: http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/stuff/AniKa_offline/anim.html

3.2 Classificação

Os caleidociclos podem ser classificados como regulares ou irregulares. Os caleidociclos regulares são aqueles cujos tetraedros são regulares, ou seja, suas faces são triângulos equiláteros, já os caleidociclos irregulares são formados por tetraedros não regulares.

3.2.1 Caleidociclos Regulares

Segundo Engel (2003, p.3) para se construir caleidociclos com n tetraedros regulares é necessário que $n \geq 8$, ou seja, os caleidociclos regulares deve ter no mínimo 8 tetraedros regulares para que sejam rotativos. No caso $n = 6$ o caleidociclo fica rígido e não é possível girá-lo. Para que isso acontecesse seria necessário contruí-lo utilizando tetraedros não regulares.

Para provar essa afirmação vamos considerar o tetraedro regular T de vértices A, B, C e D e chamaremos a medida das arestas de a de acordo com a figura 29.

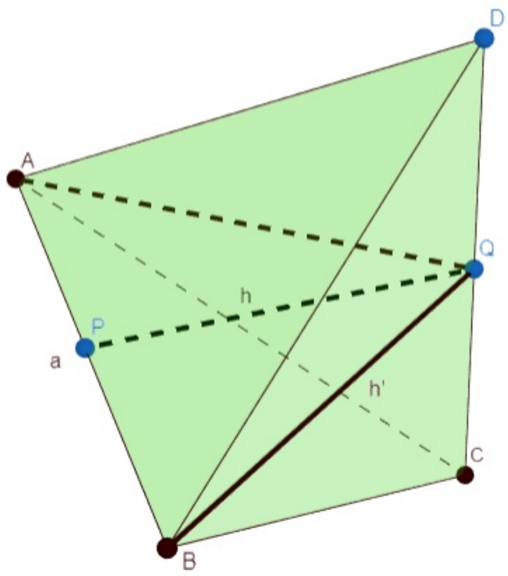


Figura 29 – Tetraedro regular T de vértices A, B, C e D

Fonte: Autor.

Seja P o ponto médio de $\overline{AB}$, Q o ponto médio de $\overline{CD}$, chamemos h' o segmento $\overline{BQ}$ (altura da face do tetraedro) e de h o segmento $\overline{PQ}$ temos então que:

$$h'^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

como

$$h'^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

então

$$a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Cosidere que o tetraedro esteja localizado no espaço $\mathbb{R}^3$ com a aresta $\overline{AB}$ sobre o eixo x e o plano ABQ sobre o plano xy , chamemos essa colocação de *posição neutra* como mostra a figura 30.

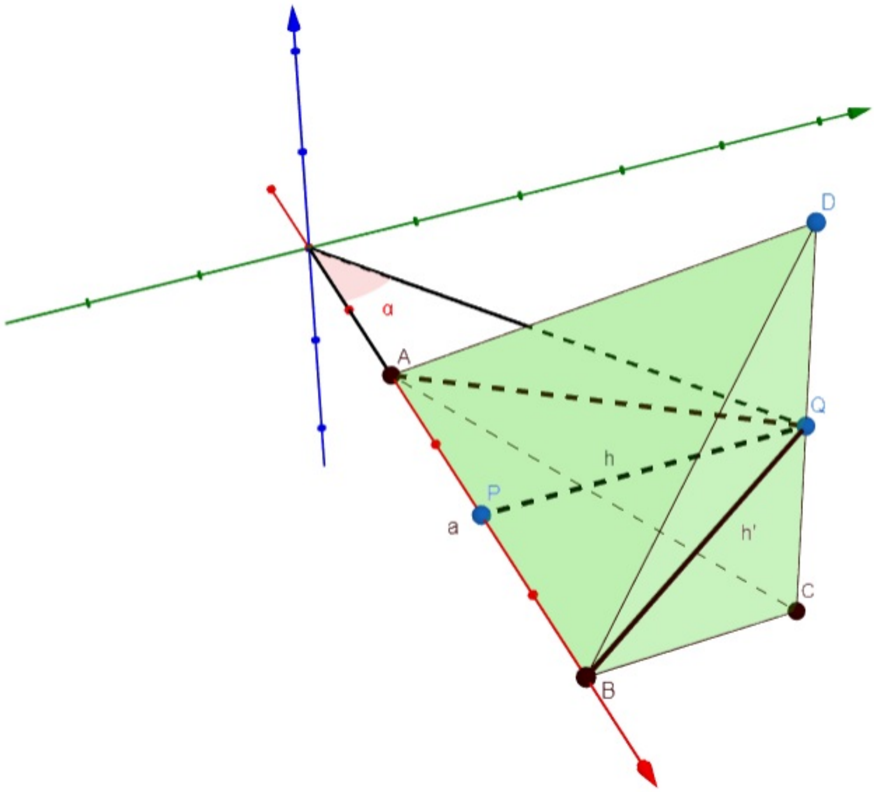


Figura 30 – Tetraedro regular T de vértices A, B, C e D no espaço $\mathbb{R}^3$.

Fonte: Autor.

Refletindo o tetraedro T sobre o plano xy produzimos outro tetraedro T_2, que compartilha os vértices C e D com T.

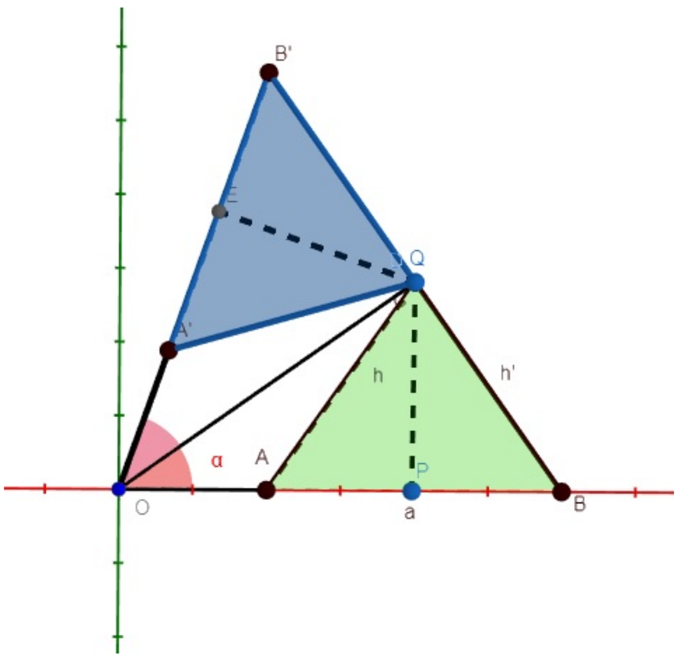


Figura 31 – Tetraedros T e T_2 em perspectiva superior.

Fonte: Autor.

Rotacionando os tetraedros T e T_2 em torno do eixo z por um ângulo 2α obtemos um anel de tetraedros que estão conectados dois a dois por uma aresta em comum, onde a origem de $\mathbb{R}^3$ é o centro do caleidociclo. Para que esse anel se feche a quantidade k de 2α deve totalizar 360°, ou seja, $k.2\alpha = 2\pi$ e $\alpha = \frac{\pi}{k}$ para $k \in \mathbb{N}$.

Analizando a posição do tetraedro numa perspectiva superior temos a seguinte imagem. (figura 32).

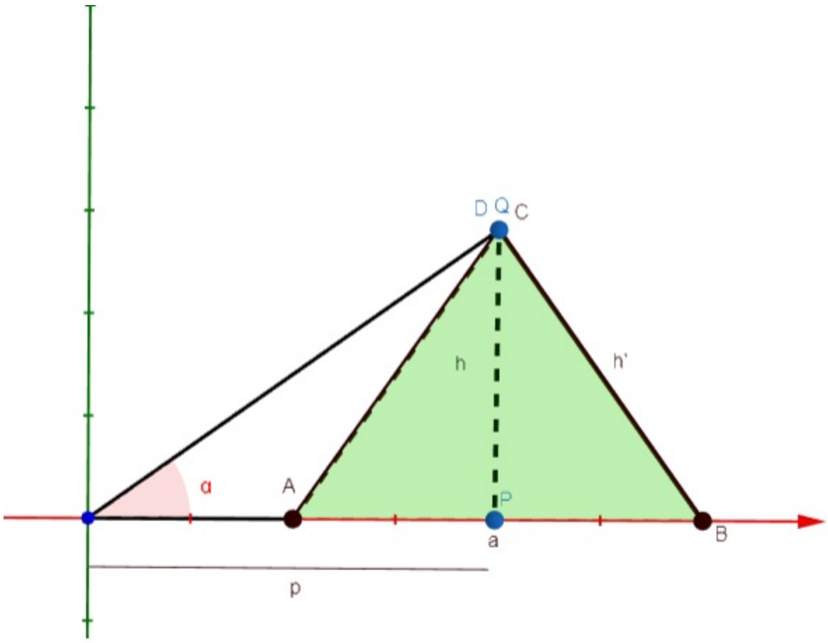


Figura 32 – Tetraedro Tem perspectiva superior.

Fonte: Autor.

Seja p a distância $\overline{OP}$, para $p = \frac{a}{2}$ teriamos que o vértice A do tetraedro coincide com o centro O do caleidociclo, configurando assim um caleidociclo fechado (situação em que os vértices dos tetraedros se encontram no centro do caleidociclo), Assim temos $p \geq \frac{a}{2}$ e sendo $a = h\sqrt{2}$ então

$$p \geq \frac{a}{2} = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Observando a figura 32 temos que $p = \frac{h}{tg(\alpha)}$ e portsnto temos a seguinte desigualdade

$$\frac{h}{tg(\alpha)} \geq \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(\alpha) \leq \sqrt{2}$$

Analisando os possiveis valores de k vemos que

- k não pode ser igual a 1 pois não é possível formar um caleidociclo com apenas 2 tetraedros.

- se $k = 2$ temos $\alpha = \frac{\pi}{2}$ mas não existe $tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$, logo k não pode ser 2.
- se $k = 3$ temos $\alpha = \frac{\pi}{3}$ mas $tg(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \geq \sqrt{2}$. logo k não pode ser 3.
- se $k = 4$ temos $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{2}$.

Portanto $k = 4$ é o valor mínimo de k para satisfazer $tg(\alpha) \leq \sqrt{2}$. Como a cada valor de k temos 2 tetraedros (pois k é a quantidade de 2α), concluímos que oito é a quantidade mínima de tetraedros regulares necessários para formar um caleidociclo regular.

3.2.2 Caleidociclos Irregulares Fechados

Chamamos de caleidociclos fechados quando os vértices dos tetraedros em determinadas posições se encontram no centro do caleidociclo. Se tentarmos formar um caleidociclo fechado regular com 6 tetraedros veremos que não é possivel formar um anel.

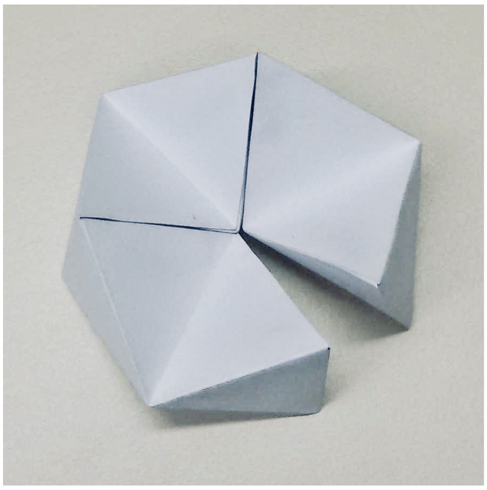
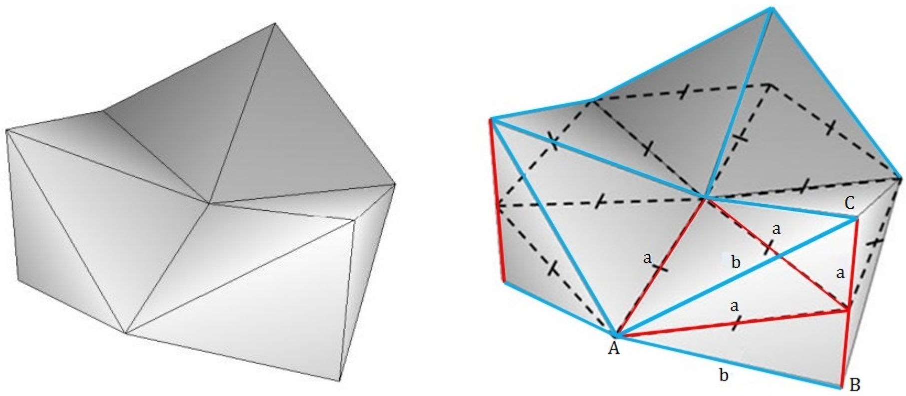


Figura 33 – Tentativa de caleidociclo fechado com tetraedros regulares.

Para isso seria necessário "esticar" o caleidociclo de tal forma que se configurasse na sua secção transversal um hexágono regular. Após o caleidociclo sofrer essa deformação a medida a da aresta do tetraedro regular fica com a mesma medida do lado do hexágono da secção transversal como mostra a figura 34(b). Assim a altura h da face ABC também tem a mesma medida a (pois h é lado do hexágono)



(a) (b)

Figura 34 – caleidociclo após sofrer deformação.

Fonte: http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/stuff/AniKa_offline/anim.html

Aplicando o teorema de pitágoras temos:

$$b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Temos então que as faces dos tetraedros não são mais regulares, portanto as faces são triângulos isósceles de base a e altura $h = a$.

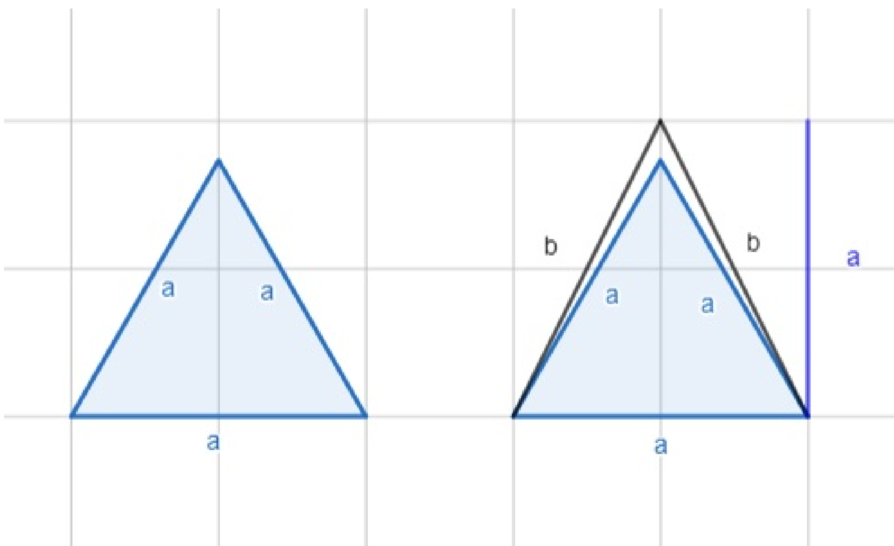


Figura 35 – Face do tetraedro regular após sofrer a deformação.

Fonte: Autor.

O mesmo processo ocorre ao se tentar formar caleidocilos fechados com 8, 10, 12... tetraedros regulares, pois sempre que tentarmos unir os vértices no centro do caleidociclo teremos que deformá-lo. Assim os caleidociclos fechados são compostos por um número n par de tetraedros não regulares onde $n \geq 6$. Portanto não é possível formar caleidociclos fechados com tetraedos regulares, todos os caleidociclos fechados são irregulares.

3.3 Construindo planificações de caleidociclos regulares

A planificação dos caleidociclos regulares é bastante simples, pois é formada apenas por triângulos equiláteros. Vamos utilizar um exemplo para determinar a quantidade de triângulos necessários na planificação. Sabemos que os caleidociclos regulares possuem no mínimo 8 tetraedros cada um com 4 faces portanto teremos triângulos equiláteros dispostos em 9 colunas e 5 linhas. Colocamos uma quantidade a mais de coluna e de linha, pois precisamos de alguns triângulos a mais para usarmos como abas de colagem. A planificação do caleidociclo com oito tetraedros regulares resultaria na configuração de acordo com a figura 36.

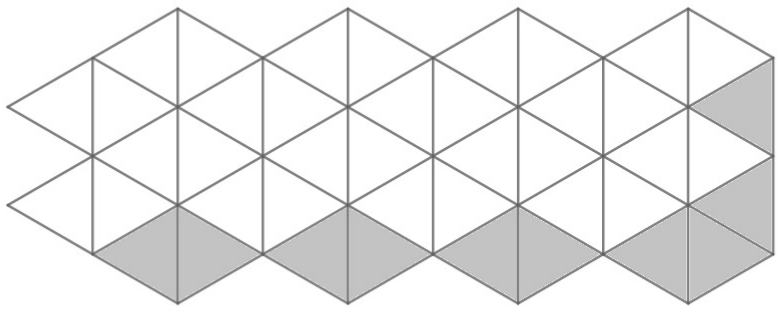


Figura 36 – Planificação com oito tetraedros regulares.

Os triângulos em cinza na figura 36 são as abas de colagem. Seguindo o mesmo procedimento para construir a planificação de qualquer outro caleidociclo regular basta colocar os triângulos equiláteros em linhas e colunas conforme exemplo anterior. Por exemplo, no caso de dez tetraedros regulares precisamos de 11 colunas e 5 linhas, para dezesseis tetraedros regulares precisariamos de 17 linhas e 5 colunas.

3.4 Construindo planificação de caleidociclos não regulares

Iremos tratar nessa seção apenas dos caleidociclos fechados que, conforme vimos na seção, são irregulares e consequentemente formados por triângulos isósceles.

Para efeito ditático iremos ilustrar apenas a construção da planificação do caleidociclo fechado hexagonal, formado por seis tetraedros.

Como já vimos para o caso de caleidociclos irregulares a quantidade n mínima de tetraedros é 6, assim consideraremos inicialmente um caleidociclo fechado com seis tetraedros regulares. Como o triângulo isósceles deve ter base a e altura $h = a$, ou seja, altura e a base são iguais, para construir a planificação desse caleidociclo basta fazer conforme a ilustração a seguir.

- Considerando $a = 4$ desenhe em uma folha de papel um retângulo com 28 cm de comprimento x 10 cm de largura. Faça marcações no retângulo, nas duas bases maiores de 4 cm em 4 cm. Na base menor a esquerda marque 2 cm, 4 cm e 4 cm. Na outra base menor a direita, marque 4cm, 4cm e 2 cm.

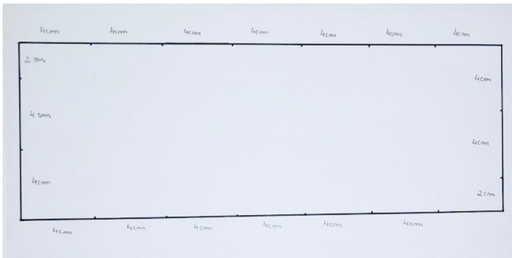


Figura 37 – Construção da planificação do caledociclo hexagonal.

- Trace as retas de acordo com a figura 38.

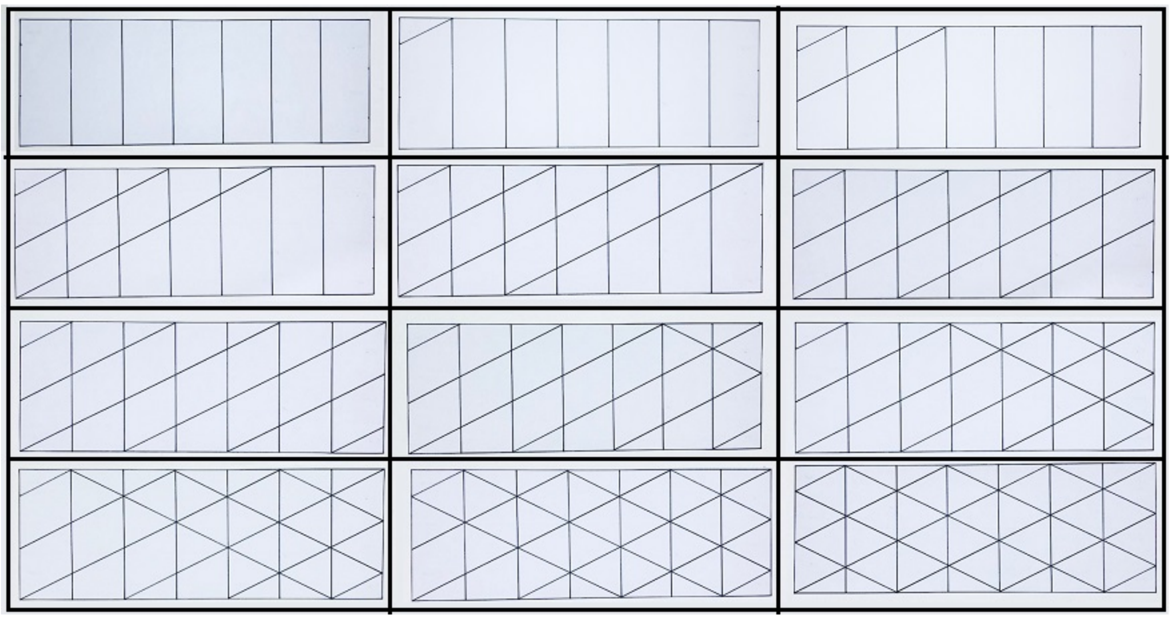


Figura 38 – Construção da planificação do caleidociclo hexagonal 1

Fonte: Autor.

- Recorte conforme indicado na figura 39.

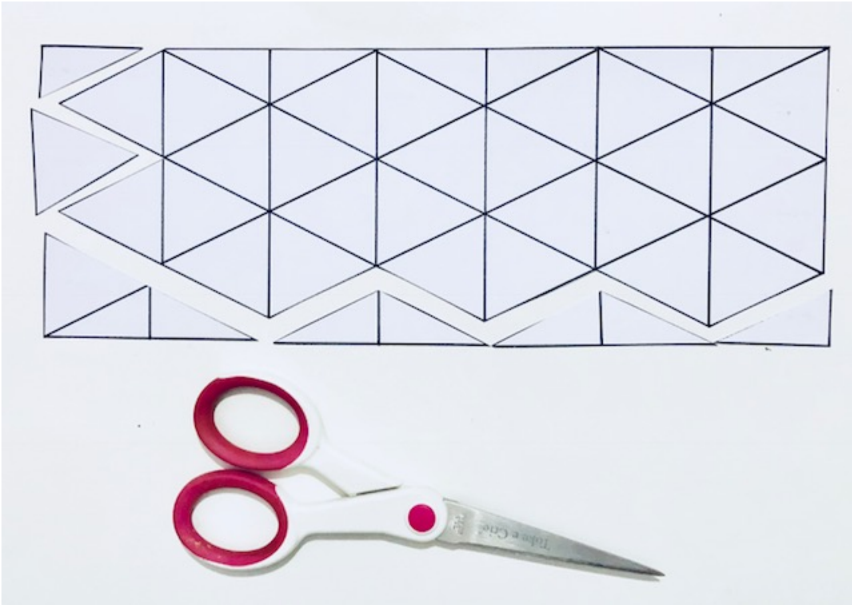


Figura 39 – Construção da planificação do caleidociclo hexagonal 2

A figura formada corresponde á planificação do caleidociclo fechado hexagonal. A parte pintada de preto na figura corresponde as abas que servirão de colagem.

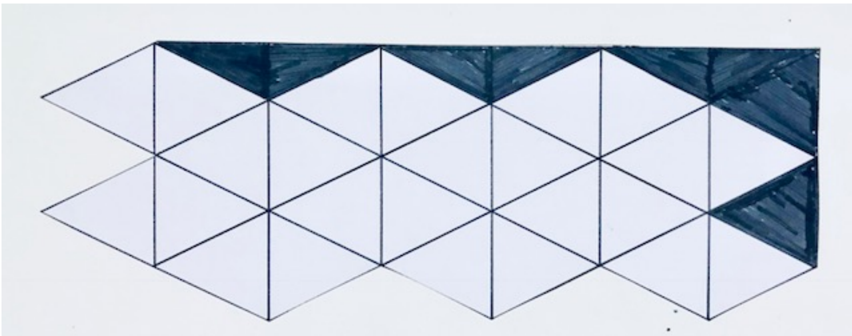


Figura 40 – Construção da planificação do caleidociclo hexagonal 3

3.5 Os Caleidociclos de M. C. Escher

Escher em suas pesquisas procurava representar mosaicos com pavimentação realmente infinita, utilizando-se de figuras com padrões simétricos formados a partir do centro de um círculo que diminuiam conforme se aproximavam da circunferência. Como relatado anteriormente essa idéia foi inspirada pelo matemático Coxeter, reconhecido pelos seus estudos de geometria hiperbólica.

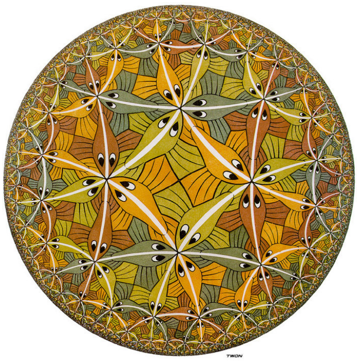


Figura 41 – Limite circular III (1959) - Obra de Escher

Fonte: https://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iii/

Para representar pavimentações infinitas em figuras tridimensionais Escher propôs uma solução parcialmente completa, construindo mosaicos na superfície de um cilindro. Porém para resolver o problema seria necessário juntar as duas bases do cilindro formando uma figura semelhante a um toro. No entanto, com um cilindro de papel essa construção fica impossibilitada já que o papel ficaria danificado. A solução proposta foi utilizar os caleidociclos e recobri-los com os mosaicos de Escher.

Walker e Schattschneider em seu livro *Caleidociclos de M. C Escher* trazem alguns modelos de caleidociclos do artista com algumas de suas obras como as da figura 42.

Figura 42 – Caleidociclo de M. C. Escher

Fonte: Livro - Caleidociclos de M.C. Escher de Wallace Walker e Doris Schattschneider

Para cobrir a superfície de um caleidociclo com os mosaicos de Escher é necessário conhecimentos de geometria descritiva pois não basta apenas recobrir a planificação do caleidociclo com os mosaicos, pois após montá-lo e observá-lo numa perspectiva superior, ou seja, "visto de cima", observamos que as suas faces triangulares são, na verdade oblíquas.

Diante disso os mosaicos de Escher precisaram passar por uma leve alteração em sua configuração inicial para poderem ser projetados nos caleidociclos.

Na apêndice deste trabalho encontra-se disponível uma planificação de um caleidociclo ao estilo M. C. Escher utilizando a construção de mosaicos conforme ilustrado na seção 2.4.4.

4 Metodologia

Para a realização dessa pesquisa buscou-se primeiramente compreender qual a importância que os materiais concretos exercem no desenvolvimento da aprendizagem e de que forma esse material deveria ser aplicado em um contexto escolar. Segundo Turrioni (2004):

> "O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos."

Além disso,

> "materiais manipuláveis são objetos, desenvolvidos e/ou criados para trabalhar com conceitos matemáticos de forma que venha a facilitar a compreensão e o desenvolvimento do aluno, de modo que os estudos possam ser realizados de maneira prazerosa." (SOUSA e OLIVEIRA 2002, p. 2)

A partir dessas ideias podemos considerar que a utilização de materiais concretos pode ser uma excelente ferramenta para professores no ensino da geometria, seu uso proporciona outras formas de aprendizagem e permite ao aluno visualizar, manipular e explorar os conceitos geométricos de forma participativa, estimulando assim vários sentidos no processo de aprendizagem. Porém é preciso destacar que o uso de materiais manipuláveis por si só não tem a capacidade de assegurar a aprendizagem afetiva, pois é necessário que os alunos consigam relacionar as experiências em sala de aula com os fundamentos matemáticos. Apesar de funcionarem como uma ótima ferramenta de ajuda ao aluno na passagem do concreto para o abstrato, o professor deve planejar muito bem a forma como esse material será aplicado para que os objetivos finais sejam alcançados.

O objetivo principal desta pesquisa é contribuir com ideias que incentivem e estimulem a aprendizagem da geometria através de materiais diferenciados no seu ensino. Foram realizadas pesquisas em livros, artigos e na internet e constatou-se que apesar de termos vários trabalhos relacionando as obras de M. C. Escher como ferramenta interdisciplinar de aprendizagem matemática, há poucos que abordam a utilização dos caleidociclos como atividade lúdica.

Os caleidociclos promovem a exploração de várias temáticas dentro do ensino da geometria podendo ser tratados temas inerentes desde a geometria plana até a espacial e o fato de recobrirmos sua planificação com obras do artista M. C. Escher enriquecem o material ao promover uma abordagem interdisciplinar tornando a metodologia de aula ainda mais interessante.

Diante disso, as referências consultadas embasaram os estudos teóricos sobre quais conceitos matemáticos seriam necessários para a construção dos mosaicos no estilo Escher e sobre quais condições deveriam ser desenvolvidos para contruir os caleidociclos.

O desenvolvimento da pesquisa deu-se com alunos do 3° ano do ensino médio, de uma escola particular, na cidade de Ceilândia-DF e ocorreu em quatro encontros. A atividade foi dividida em duas etapas onde primeiramente os alunos deveriam construir os mosaicos seguindo as estratégias do artista M. C. Escher e depois teriam de construir o caleidociclo.

No primeiro encontro foram apresentados aos alunos alguns caleidociclos já prontos para que eles pudessem manusear e adquirir uma impressão e, como era de se esperar, o objeto trouxe bastante curiosidade e estranheza. Alguns questionamentos foram levantados sobre quais temas da matemática poderiam ser explorados ali e quais conceitos geométricos eles conseguiam associar aos caleidociclos. Muitos conseguiram relacionar temas como área, volume e polígonos, porém relataram que construir um caleidociclo parecia ser algo muito complicado.

Após esse debate os alunos conheceram um pouco da vida e obra M. C. Escher. Foram apresentados diversos trabalhos do artista incluindo, além dos mosaicos, as principais obras que tratavam das construções impossíveis com perspectivas que confundem a visão do expectador. Muitos alunos sequer conheciam o artista e puderam perceber como a Matemática pode se apresentar em outras áreas de conhecimento. A partir daí foi apresentado como era possível construir os mosaicos a partir das relações de simetria, e os alunos puderam compreender os conceitos matemáticos que permitem a cobertura do plano com polígonos regulares e também com figuras especiais.

No segundo encontro os alunos trouxeram os materiais solicitados para a construção dos mosaicos (lápis, lápis de cor, borracha, papel, régua, tesoura e compasso). Foi apresentado um passo-a-passo de como funciona todo o processo de desenvolvimento do molde que serviria de base para o mosaico.

Como a proposta final deveria ser a construção do caleidociclo os alunos tiveram que construir um molde para o mosaico a partir de um triângulo isósceles. Foram orientados a construir um triângulo de base e altura iguais a 4 centímetros usando régua e compasso. O processo de construção seguiu conforme apresentado no capítulo 2 (tabela 2). Nessa parte, inicialmente, os alunos apresentaram bastante dificuldade, pois não sabiam que o compasso poderia ser utilizado para construção de polígonos e a maioria relatou nunca ter estudado sobre construção geométrica. Alguns mosaicos construídos pelos alunos são apresentados na figura 43.

Figura 43 – Mosaicos construidos pelos alunos utilizando os conceitos de simetria.

Fonte: Autor.

No terceiro encontro, foi feito uma discussão sobre os caleidociclos, apresentando os vários tipos e formas que podem assumir e como devem ser construídos. Foi explicado aos alunos como poderiam construir a planificação do caleidociclo, porém para otimizar o tempo em sala de aula, foi entregue uma planificação impressa de um caleidociclo de 6 tetraedros. Nessa etapa, eles deveriam aplicar o mesmo molde utilizado no mosaico sobre a planificação do caleidociclo para então desenhar, pintar e ao final fazer montagem do objeto.

Figura 44 – Caleidociclos construidos por alguns alunos.

Fonte: Autor.

Figura 45 – Mosaicos e Caleidociclos

Fonte: Autor.

No último encontro os alunos fizeram uma apresentação dos seus trabalhos e puderam compartilhar as experiências e conhecimentos adquiridos durante todo o processo. Ao final confeccionaram um mural na escola e fizeram uma exposição dos caleidociclos para que os alunos das outras turmas pudessem explorar e manipular os objetos.

5 Considerações Finais

Percebeu-se que os alunos se mostraram mais interessados em compreender os conceitos geométricos que norteiam os trabalhos do artista M. C. Escher, visto que suas obras despertam muita curiosidade e trazem significado para a aprendizagem matemática. A observação dos trabalhos do artista associado a construção do caleidociclo viabilizam o processo de ensino aprendizagem concebendo o pensamento artístico e matemático. Como foi relatado, Escher realizou um estudo sistemático da arte e durante suas tentativas descobriu as diferentes formas de recobrir o plano. Sua trajetória é um exemplo claro de que um pensamento ativo, que questiona e explora seu meio transcende o formalismo com que o conhecimento é apresentado.

> "o raciocínio decorrente do pensamento ativo é sempre novo e original... no sentido de que a pessoa que pensou empregou 'seu raciocínio' como um instrumento para descobrir algo de novo no mundo exterior, não no sentido de que outros não tenham pensado assim anteriormente"
>
> (FROMM, 1974b, p.157)

Escher não aprendeu matemática para fazer arte, utilizou-se dela para então despertar sua intuição matemática e assim criar as suas obras e provavelmente, se assim não fosse, jamais teria feito tais trabalhos.

É nessa direção que as atividades educacionais devem ser desenvolvidas, explorando a capacidade do indivíduo de adquirir suas próprias ferramentas de conhecimento e aprendizagem.

Verificou-se que quando o aluno, além de interagir com o material concreto, participa do seu processo de construção ele demonstra-se muito mais interessado em compreender os fundamentos e definições existentes na sua elaboração. O aluno quando envolve-se ativamente na criação de um projeto procura construí-lo da melhor forma possível, pois aquele objeto representa algo que ele mesmo produziu.

Portanto, a atividade cumpriu seu objetivo de facilitar a compreensão e a assimilação dos conceitos inerentes á geometria e forneceu ferramentas para que eles desenvolvessem seu próprio conhecimento através dos questionamentos e dúvidas que foram surgindo no decorrer da atividade.

Um proveito observado na atividade é a possibilidade de se trabalhar ao mesmo tempo com a geometria plana e espacial tornando o material num instrumento com a capacidade de associar o conteúdo do ensino médio com temas já estudados pelos alunos no ensino fundamental. Esse ambiente de aprendizagem é defendido por Ausubel (1973) que afirma que a aprendizagem significativa é aquela que se relaciona, interliga aprendizagens realizadas a conteúdos pré existentes no indivíduo.

Uma dificuldade ao se aplicar a atividade proposta foi em relação ao tempo necessário para o seu desenvolvimento. Em algumas etapas os alunos se confundiram bastante, como por exemplo a construção do molde do mosaico no estilo M. C. Escher sendo necessário intervir várias vezes, prolongando o tempo pré destinado para a sua elaboração. Para viabilizar e otimizar o tempo foi preciso, ao invés de propor aos alunos a construção da planificação do caleidociclo fechado, disponibilizá-la impressa, o que não prejudicou o objetivo da atividade.

Destacamos que a atividade desta pesquisa é uma proposta que ainda encontra-se em andamento e que portanto novas ánalises e aplicações devem ser realizadas para que outras contribuições sejam feitas em busca de melhorias e avanços no uso dessa ferramenta como projeto de ensino e aprendizagem.

Este trabalho portanto cumpriu com sua proposta como uma tentativa de contribuir para uma prática didática pedagógica alternativa para o ensino da geometria. A metodologia adotada estimulou a autonomia dos alunos para adquirir e desenvolver o seu aprendizado de forma significativa e motivadora, incentivando a criatividade e o raciocínio e promovendo a associação dos princípios matemáticos com a dia-a-dia.

Referências

[1] AUSUBEL, D. P. *Algunos aspectos psicológicos de la estrutuctura del conocimiento*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 1973.

[2] BARBOSA, R. M. *Descobrindo padrões em mosaicos*. [S.l.]: São Paulo, Atual, 1993.

[3] BARTH, G. M. P. *Arte e Matemática, Subsídios para uma Discussão interdisciplinar por meio das obras de M. C. Escher*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado, UFP, Curitiba, 2006.

[4] BERRO, R. T. *Relações entre arte e matemática: Um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado, Universidade de São Francisco, Itiba, SP, 2008.

[5] E., B. J. A. B. *A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea*. [S.l.]: 4ªEd. Petrópolis: Vozes, 2009.

[6] CARVALHO, M. J. d. *A utilização do laboratório de informática para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. [S.l.]: Cascavel (PR), 2008.

[7] ENGEL, M. *M. C. Escher kaleidocycles*. [s.n.], 2003. Disponível em: <http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/stuff/AniKa$_offline/kaleidocycles_theory.pdf$>.

[8] ERNST, B. *O espelho mágico de M. C. Escher*. [S.l.]: Colônia (Alemanha): Taschen, 1978.

[9] FIORENTINI DARIO; MIORIM, M. A. *Uma reflexÃ£o sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática*. Boletim SBEM/SP, volume 4, n. 7, 2004. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/recursos$_didaticos.asp?aux = C$>.

[10] FROMM, E. *Análise do Homem*. [S.l.]: 9. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1974b.

[11] HAIDT, R. C. C. *Curso de Didática Geral*. [S.l.]: 6ªEdição. São Paulo: Ática, 1999.

[12] LORENZATO, S. *O laboratŕio de ensino de matemŕica na formação de professores*. [S.l.]: Campinas, SP. Autores Associados, 2006.

[13] MAYER, R. *Estratégias para o Uso da Simetria no Ensino de Projeto*. [s.n.], 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/123456789/1276>.

[14] MURARI, C. *Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ªe 8ªséries, via caleidoscópios*. [S.l.]: 2 v. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

[15] PASQUINI REGINA CÉLIA GUAPO. BORTOLOSSI, H. J. *Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar*. [S.l.]: São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

[16] SANCHES, S. M. *Utilização de caleidociclos no ensino de geometria: uma proposta metodológica para o ensio médio*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado, UTFP, Ponta Grossa, 2012.

[17] SILVA ANABELA; MARTINS, S. *Falar de Matemática Hoje é ...* [S.l.]: Millenium, Revista do ISPV: Instituto Superior Politénico de Viseu, 2000.

[18] SILVA, R. A. d. *Caleidociclos*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado,PROFMAT,USP, São Carlos, 2017.

[19] SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. [S.l.]: Tradução Cláudia Schilling, 6ªedição, Porto Alegre: Artmed, 1998.

[20] SOUSA G. C. OLIVEIRA, J. D. S. *O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática*. Anais do Encontro Nacional De Educação Matemática, SBEM, Salvador, Bahia, Brasil, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11$_C$C468.pdf>.

[21] TAPIA J. A., F. E. *A Motivação em Sala de Aula: O que é, como se faz*. [S.l.]: 4ªedição São Paulo: Loyola, 2001.

[22] TURRIONI, A. M. S. *O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores*. [S.l.]: Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 2004.

[23] SCHATTSCHNEIDER D.; WALKER, W. *Caleidociclos de M. C. Escher*. [S.l.]: EvergreenGmbh, 1977.

Apêndice