

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Simulação Numérica de Escoamentos
Parabólicos e Elípticos em Ferrohidrodinâmica**

Por,

Arthur Alves Rios Campos

Brasília, 24 de agosto de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
CIÊNCIAS MECÂNICAS**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Simulação Numérica de escoamentos Parabólicos e Elípticos em Ferrohodinâmica

Por,

Arthur Alves Rios Campos

Dissertação de mestrado submetida como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Ciências Mecânicas

Banca Examinadora

Rafael Gabler Gontijo _____

Francisco Ricardo da Cunha _____

Yuri Dumaresq Sobral _____

Brasília 24 de agosto de 2018

ARTHUR ALVES RIOS CAMPOS

Solução numérica de problemas parabólicos e elípticos em ferrohodinâmica

[Distrito Federal] 2018.

xx, 128p., 297 mm (ENM/FT/UnB), Mestre, Ciências Mecânicas, 2018

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| 1. Fluidos Magnéticos | 2. Ferrohodinâmica |
| 3. Camada limite | 4. Convecção termomagnética |
| I. ENM/FT/UnB | II. ENM-DM286/2018 |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

CAMPOS., A. A. R. (2018). Solução Numérica de Escoamentos Parabólicos e Elípticos em Ferrohodinâmica. Dissertação de mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM-DM260/2018, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 128p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Arthur Alves Rios Campos.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Solução Numérica de Escoamentos Parabólicos e Elípticos em Ferrohodinâmica.

GRAU / ANO: Mestre / 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Arthur Alves Rios Campos
SHIN QI 2, conjunto 12, casa 21. Lago-Norte.
71.510-120 Brasília - DF - Brasil.

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer a todos aqueles que se fizeram presentes em minha vida durante este mestrado e que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu Pai por ser capaz de dar todo o carinho e incentivo que um filho poderia querer, e aos meus irmãos, Heitor e Otto, por participarem da minha vida como amigos e companheiros de cada dia, seja no dota, na maromba ou nos t-bags matinais que eu sei que vocês adoram.

Também não poderia deixar de agradecer a minha namorada Mariana por estar ao meu lado praticamente todos os dias nestes últimos três anos. Sem seus concelhos e puxões de orelha nada disso que venho aqui apresentar seria possível.

Aos meus amigos de infância, Rato e Arroz, obrigado por me lembrar que existe vida fora de casa e que verdadeiros amigos são realmente eternos. Também gostaria de agradecer aos meus amigos da engenharia mecânica e a turma que frequentou o SG-9 pela companhia nos momentos tensos da graduação e do mestrado e pelas boas risadas que sempre estão presentes. Em especial, gostaria de agradecer ao meu amigo Jean Michel por , e meus amigos Lucas E Ciro pelas ideias trocadas sobre mecânica dos fluidos e pelo apoio mútuo durante nossos mestrados.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os docentes que possibilitaram meu desenvolvimento acadêmico e despertaram em mim o interesse pela ciência. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Rafael Gabler, por ter me aceitado como aluno e ter me acompanhado durante toda a minha jornada de graduação e pós-graduação, aqui na Universidade de Brasília. Agradeço também ao professor Francisco Ricardo por estar frente ao Vortex, sempre buscando transmitir seu grande conhecimento sobre mecânica dos fluidos e estimulando todos os alunos a participarem das atividades de pesquisa. Também não poderia de deixar de agradecer os professores Yuri Dumaresq Sobral e Taygoara Felamingo de Oliveira, por terem contribuído diretamente para conclusão deste mestrado .

Resumo

Neste trabalho estudamos escoamentos parabólicos e elípticos de fluidos magnéticos a partir de simulações numéricas, utilizando o problema da camada limite laminar sobre placa plana e o problema de convecção termomagnética dentro de uma cavidade delgada como estudos de caso. Em cada caso, investigamos diferentes aspectos relativos a interação entre os campos das variáveis eletromagnéticas e hidrodinâmicas dos problemas abordados. No problema da camada limite, exploramos os efeitos do acoplamento entre o campo de vorticidade e magnetização. Inicialmente, atacamos o problema de maneira heurística via análise de escalas, com o objetivo de estimar a ordem de magnitude de cada termo presente nas equações governantes e simplificar o sistema de equações. As equações da camada limite e da magnetização são resolvidas numericamente a partir do método das diferenças finitas, utilizando um esquema de discretização apropriado para solução de problemas parabólicos do tipo Crank-Nicolson. Por fim, estudamos a influência dos parâmetros adimensionais sobre a força total exercida sobre a parede e sobre a espessura da camada limite, comparado os resultados numéricos com uma solução assintótica. No problema de convecção termomagnética interna, investigamos o processo convectivo induzido pela estratificação do campo de magnetização em função da distribuição de temperatura. Para solução numérica do sistema de equações, utilizamos uma formulação de acoplamento pressão-velocidade baseada no método de projeções de segunda ordem no tempo. As soluções encontradas são comparadas com benchmarks disponíveis na literatura e com resultados anteriores obtidos pelo grupo. Analisamos os efeitos das condições de contorno magnéticas sobre o número de Nusselt local e global para diferentes combinações entre números de Prandtl e Rayleigh.

Palavras-chaves: Ferrohidrodinâmica, Diferenças Finitas, Camada Limite, Convecção Termomagnética.

Abstract

In this work we study the parabolic and elliptical flows of magnetic fluids via numerical simulations, using the laminar boundary layer on flat plate and the problem of thermomagnetic convection inside a thin cavity as case studies. In each case, we investigate different aspects related to the dynamics of magnetic fluids. In the boundary layer problem, we explore the coupling effects between the vortex field and the magnetization field. We first tackle the problem heuristically via scaling analysis, in order to estimate the order of magnitude of each term present in the governing equations and to simplify the system of equations. The boundary layer and magnetization equations are solved numerically from the finite difference method using an appropriate Crank-Nicolson discretization scheme to solve parabolic problems. Finally, we study the influence of the dimensionless parameters on the total force exerted on the wall and on the thickness of the boundary layer, comparing the numerical results with an asymptotic solution. In the internal thermomagnetic convection problem, we investigated the convective process induced by the stratification of the magnetization field as a function of the temperature distribution. For the numerical solution of the system of equations, we use a pressure-velocity coupling formulation based on a second order projection method. The solutions found are compared with benchmarks available in the literature and with previous results obtained by the group. We analyzed the effects of magnetic boundary conditions on local and global Nusselt numbers for different combinations of Prandtl, Rayleigh numbers and aspect ratios.

Keywords: Ferrohydrodynamics, Finite Differences, Boundary Layer, Thermomagnetic Convection.

Lista de Figuras

Figura 1 – Foto de um ferrofluido sendo atraído pela presença de um campo magnético externo (BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 1997).	1
Figura 2 – Micrografia de uma suspensão magneto-reológica mostrando formação de micro-estruturas dentro do fluido. (GONTIJO; CUNHA, 2012).	3
Figura 3 – Desenho esquemático de um sistema de bombeamento de combustível aeroespacial a base de ferrofluido desenvolvido pela NASA (STEPHEN, 1965).	3
Figura 4 – Histograma com o número de publicações em periódicos científicos e patentes registradas sobre ferrofluidos entre os anos de 1960 e 1990 (BLUMS; OZOLS; ROSENSWEIG, 1990).	4
Figura 5 – Desenho esquemático da balança de torque utilizada por Charles Coulomb para aferir a força magnética.	11
Figura 6 – Desenho esquemático de uma barra com extremidades carregadas com cargas magnéticas opostas, sujeita a um campo magnético uniforme.	12
Figura 7 – Estados de magnetização para diferentes $\alpha = \frac{\mu_0 H_0}{k_B T}$	16
Figura 8 – Círculo unitário denotando a região da esfera cujas direções estão entre θ e $\theta + d\theta$	17
Figura 9 – Curva para a função Langevin $\mathcal{L}(\alpha)$. A linha cheia representa a função $\mathcal{L}(\alpha)$, enquanto a linha tracejada representa os valores assintóticos para $\alpha \ll 1$	19
Figura 10 – Representação gráfica da mudança entre um referencial fixo na partícula com velocidade angular ω para um referencial fixo no espaço com velocidade angular $\omega = 0$	22
Figura 11 – Representação gráfica da interface entre dois materiais com diferentes propriedades magnéticas.	27
Figura 12 – Partícula ferromagnética escoando na presença de um campo magnético uniforme (ALEGRETTI, 2017).	35

Figura 13 – Desenho exemplificando a subdivisão do escoamento em alto número de Reynolds sobre uma parede. A região próxima a parede, denominada camada limite, é caracterizada pela condição de não escorregamento e pelos altos gradientes na direção y ; enquanto que a região mais afastada pode ser considerada inviscida.	36
Figura 14 – Escoamento em alto número de Reynolds ao redor de um corpo rombudo mostrando a transição entre os diferentes estágios da camada limite, desde o laminar até o turbulento (DYKE; DYKE, 1982)	37
Figura 15 – Desenho esquemático do problema da camada limite laminar sobre placa plana na presença de um campo magnético uniforme. As quantidades U , L , $\delta(x)$, e H_0 denotam os valores característicos da velocidade, comprimento da placa plana, espessura da camada limite e intensidade do campo magnético, respectivamente.	38
Figura 16 – Comparação entre os resultados obtidos numericamente e os resultados teóricos obtidos por Blasius (1908) para o coeficiente de fricção local c_f ao longo da placa plana.	49
Figura 17 – Comparação entre solução assintótica para componente de magnetização M_x obtida no centro da placa com valores obtidos numericamente através de simulações computacionais.	51
Figura 18 – Comparação entre solução assintótica para componente de magnetização M_x obtida no centro da placa com valores obtidos numericamente através de simulações computacionais.	54
Figura 19 – Curvas de nível para as componentes de magnetização nas direções horizontal e vertical. Os gráficos (a),(c), e (e) representam a componente M_x a partir dos níveis de cor para $Pe = 0, 1$, $Pe = 1$, e $Pe = 10, 0$ respectivamente. Já os gráficos (b),(d), e (f) representam a componente M_y para $Pe = 0, 1$, $Pe = 1$, e $Pe = 10, 0$ respectivamente.	55
Figura 20 – Perfis de magnetização das componentes M_x e M_y , extraídos nos pontos $x = 0, 25, x = 0, 5$, e $x = 0, 75$. Neste caso temos os gráficos (a),(c), e (e) representando os perfis de magnetização da componente M_x para $Pe = 0, 1$, $Pe = 1, 0$, e $Pe = 10, 0$ respectivamente. Enquanto que os gráficos (b),(d) e (f) representam os perfis de M_y	56
Figura 21 – Gráfico para o coeficiente de arrasto C_D , em função do número de Péclet browniano Pe . A linha pontilhada representa os valores obtidos para $\alpha = 10, 0$, a linha tracejada representa $\alpha = 1, 0$, e a linha sólida $\alpha = 0, 1$. O encarte mostra a razão entre o coeficiente de arrasto C_D encontrado durante as simulações, e o resultado analítico de Blasius (1908)	57

Figura 22 – Gráfico para o coeficiente de arrasto C_D , em função do parâmetro de magnetização α . A linha pontilhada representa os valores obtidos para $Pe = 10,0$, a linha tracejada representa $Pe = 1,0$, e a linha sólida $Pe = 0,1$. O encarte mostra a razão entre o coeficiente de arrasto C_D encontrado durante as simulações, e o resultado analítico de Blasius (1908).	57
Figura 23 – Exemplo de um escoamento produzido por convecção natural. O cilindro quente induz um processo de expansão térmica em suas vizinhanças, criando um escoamento ao seu redor (DYKE; DYKE, 1982).	58
Figura 24 – Desenho esquemático mostrando uma cavidade delgada na presença de um campo magnético. A cavidade possui dimensões de largura δ_c e comprimento L , e esta sujeita a condições de temperatura T_h e T_c nas paredes laterais.	60
Figura 25 – Dimensões de um ímã permanente retangular com sistema de coordenadas fixado no centro de sua face (ALEGRETTI, 2017).	63
Figura 26 – Desenho ilustrativo de uma célula formada a partir do escalonamento entre duas malhas regulares (HARLOW; WELCH, 1965). As variáveis são posicionadas em diferentes partes da célula com o objetivo de encurtar o stencil numérico utilizado para a aproximação das derivadas.	67
Figura 27 – Desenho esquemático mostrando a definição da razão entre o tamanho da face inferior da cavidade e da face do ímã.	70
Figura 28 – Resultados obtidos para o campo de temperatura e o campo de velocidades do fluido para diferentes valores de Ra_m . As simulações foram realizadas para $10^6 \leq Ra_m \leq 10^9$ com número de Prandtl fixo $Pr = 100,0$. Os demais parâmetros utilizados nas simulações estão definidos na tabela.	71
Figura 29 – Perfis de velocidade vertical extraídos da secção horizontal localizada no centro da cavidade de cada uma das simulações mostradas pela figura 28. As linhas contínuas denotam a velocidade vertical para $Ra_m = 10^6$, a linha tracejada $Ra_m = 10^7$, os triângulos $Ra_m = 10^8$, e os círculos $Ra_m = 10^9$	73
Figura 30 – Os gráficos (a) e (b) mostram o comportamento do campo de temperatura e do campo de velocidade para o ímã posicionado na região inferior e superior respectivamente. Os gráficos (c) e (d) mostram como a taxa de transferência de calor local é afetada a partir do número de Nusselt local nos casos do ímã posicionado na região inferior e superior respectivamente.	74

- Figura 31 – Resultados para o número de Nusselt global sobre a parede quente para diferentes números de Rayleigh, considerando três diferentes números de Prandtl $Pr = 10.0$, $Pr = 100$, e $Pr = 1000.0$. Os demais parâmetros do problema estão disponíveis na tabela. A linha sólida representa o número de Nusselt global para $Pr = 10,0$, a linha tracejada $Pr = 100,0$, e os triângulo $Pr = 1000,0$. O encarte mostra a o coeficiente da scaling law $Nu \sim Ra_m^n$ para os diferentes números de Prandtl. 75
- Figura 32 – Resultados obtidos para o campo de temperatura, escoamento e número de Nusselt global sobre a parede quente da cavidade com o ímã posicionado na região inferior da cavidade. As simulações foram feitas com número de Pr fixo em $Pr = 100.0$, e com número de Rayleigh variando entre $10^3 \leq Ra_m \leq 10^9$. Três razões de tamanho r foram consideradas durante as simulações $r = 100 : 1$ denotada pelo símbolos triangulares, $r = 10 : 1$ denotada pelos símbolos quadrados, e $r = 1 : 1$ denotada pela linha sólida 76
- Figura 33 – Resultados obtidos para o campo de temperatura, escoamento e número de Nusselt global sobre a parede quente da cavidade com o ímã posicionado na lateral esquerda da cavidade, próximo a parede quente. As simulações foram feitas com número de Pr fixo em $Pr = 100.0$, e com número de Rayleigh variando entre $10^3 \leq Ra_m \leq 10^9$. Três razões de tamanho r foram consideradas durante as simulações $r = 1 : 10$ denotada pelo símbolos triangulares, $r = 1 : 1$ denotada pelos símbolos quadrados, e $r = 10 : 1$ denotada pela linha sólida 77
- Figura 34 – Gráficos (a) e (b) mostram o valor do expoente n da scaling law para o número de Nusselt global $Nu \sim Ra_m^n$ em função da razão de tamanho para o ímã posicionado na região inferior da cavidade e na região lateral esquerda da cavidade respectivamente. Três razões de tamanho foram usadas para obtenção destes resultados, sendo $r = 1 : 1$, $r = 10 : 1$, e $r = 100 : 1$ para o caso (a); e $r = 1 : 10$, $r = 1 : 1$, e $r = 10 : 1$ para o caso (b). 78

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Unidades de medida utilizadas pelos sistemas Gaussiano, Sommerfeld e Kennely.	9
Tabela 2 – Coeficiente de arrasto C_D para $Re = 10^4$ e $nx = 1024$	50
Tabela 3 – Coeficiente de arrasto C_D para $Re = 10^4$ e $nx = 1024$	51
Tabela 4 – Tabela comparativa para o número de Nusselt global calculado na parede quente de uma cavidade quadrada em convecção natural com número de Prandtl $Pr = 1.0$. No trabalho atual, utilizamos uma malha regular de 81×81 nós.	69
Tabela 5 – Tabela com valores referentes ao teste de ordem relativo ao tempo no caso de convecção natural dentro de uma cavidade retangular. Todos os resultados foram obtidos utilizando uma malha de 128×128 nós.	70
Tabela 6 – Tabela com valores fixos utilizados em cada uma das simulações realizadas.	71

Lista de símbolos

\mathbf{M}	Magnetização global de um meio contínuo
\mathbf{m}	Momento de dipolo de um volume contínuo infinitesimal
M_S	Magnetização de saturação
M_0	Magnetização de equilíbrio
M_d	Magnetização do grão
\mathbf{B}	Indução magnética
\mathbf{H}	Campo magnético
Re_L	Número de Reynolds baseado em um comprimento L
\mathbf{B}	Campo indução magnética
\mathbf{E}	Campo elétrico
\mathbf{J}	Densidade de corrente elétrica
ρ_f	Densidade de cargas elétricas livres
\mathbf{D}	Densidade de fluxo elétrico
$\nabla \cdot$	Operador divergente
$\nabla \times$	Operador rotacional
∇	Operador gradiente
∇^2	Operador Lapaciano
F	Magnitude da força magnética atuante sobre dois polos p e p'
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
μ	Permeabilidade magnética de um meio contínuo
\mathbf{r}	Vetor posição

ρ_s	Densidade superficial de polos magnéticos
ρ_V	Densidade volumétrica de polos magnéticos
\mathbf{S}_m	Tensor suscetibilidade magnética
\mathbf{I}	Tensor identidade
\mathbf{P}_m	Tensor permeabilidade magnética
χ_m	Suscetibilidade magnética de um meio isotrópico
T	Campo de temperatura
ϕ_m	Campo escalar potencial magnético
τ_B	Escala de tempo de relaxação Browniana
τ_N	Escala de tempo de relaxação de Nèel
τ_{eq}	Escala de tempo de relaxação equivalente
k	Constante de Boltzmann
K	Constante de anisotropia
d	Diâmetro característico de uma partícula magnética suspensa
\mathbf{I}_s	Constante de anisotropia magnética
$\frac{\partial}{\partial t}$	Operador derivada temporal
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada material
ϕ	Fração volumétrica de partículas magnéticas suspensas
τ_m	Torque magnético por unidade de volume
ξ	Campo de vorticidade
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker
ν	Viscosidade cinemática do fluido
ρ	Massa específica
σ	Tensor de tensões do meio
σ^N	Tensor de tensões hidrodinâmico
σ^M	Tensor de Maxwell
χ	Susceptibilidade magnética

D	Tensor taxa de deformação
W	Tensor taxa de rotação
g	Aceleração da gravidade
p	Pressão
p_m	Pressão magnética
ϵ	Permutador de Levi-Civita
x	Vetor posição espacial
\bar{m}	Média dos momentos de dipolo magnético
N	Número de partículas magnéticas suspensas
v_p	Volume de uma única partícula magnética suspensa
n	Número de densidade de partículas
$\langle m \rangle$	Média volumétrica da orientação dos momentos de dipolo magnéticos
P_θ	Função densidade de probabilidade
\mathcal{L}	Função Langevin
α	Parâmetro de Langevin
α_T	Difusividade térmica do fluido
ω	Velocidade angular de rotação de dipolo magnético
J	Momento de inércia polar de um volume contínuo infinitesimal
μ'	Coeficiente de difusão de spin
Re	Número de Reynolds
Re_m	Número de Reynolds magnético
t_ν	Escala de tempo difusiva
t_i	Escala de tempo inercial
t_m	Escala de tempo magnética
L	Momento angular

Sumário

.....	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
2 OBJETIVOS	6
2.1 Objetivos gerais	6
2.2 Objetivos específicos	7
2.2.1 Camada limite	7
2.2.2 Convecção termomagnética	7
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	9
3.1 Sistemas de Unidade em magnetismo	9
3.2 Campos, forças e torques magnéticos	10
3.2.1 Força de Kelvin e o campo magnético	10
3.2.2 Momento Magnético e Magnetização	12
3.2.3 Indução magnética	13
3.2.4 Permeabilidade e Suscetibilidade magnética	14
3.2.5 Diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo	15
3.2.6 Superparamagnetismo	15
3.3 Vorticidade e Magnetização	19
3.3.1 Relaxação magnética	20
3.3.2 Magnetização de não equilíbrio: um modelo evolutivo.	22
3.4 Equações de Maxwell	24
3.4.1 A lei de Gauss do magnetismo	24
3.4.2 Lei de Ampère-Maxwell	25
3.4.3 Condições de Contorno magnéticas	26
3.4.3.1 Condição de contorno para indução magnética B	27
3.4.3.2 Condição de contorno para o campo magnético H	28
3.4.4 O campo de desmagnetização e seus efeitos sobre as condições de contorno magnéticas	28

3.4.4.1	Definição e propriedades do campo de desmagnetização	29
3.4.4.2	Condições de contorno para o campo de desmagnetização	30
3.5	Dinâmica dos fluidos magnéticos	31
3.5.1	Leis de Conservação	31
3.5.1.1	Conservação da massa	31
3.5.1.2	Conservação de momento linear e angular	32
3.5.2	Tensor de tensões para suspensões magnéticas	33
3.5.3	Efeito magneto-viscoso	34
	4 CAMADA LIMITE DE UM FLUIDO MAGNÉTICO	36
4.1	Introdução	36
4.2	Modelagem Matemática	38
4.3	Análise de escalas	40
4.4	Adimensionalização das equações governantes	43
4.5	Regime assintótico	45
4.6	Metodologia numérica	47
4.7	Resultados e discussões	48
4.7.1	Validação numérica	48
4.7.2	Camada limite de um fluido magnético	50
	5 CONVECÇÃO TERMOMAGNÉTICA EM CAVIDADES DEL-	
	GADAS	58
5.1	Introdução	58
5.2	Modelagem matemática	59
5.3	Adimensionalização das equações governantes	63
5.4	Metodologia Numérica	65
5.5	Resultados e discussões	68
5.5.1	Validação do método e teste de ordem	68
5.5.2	Simulações de convecção termomagnética	69
	6 CONCLUSÕES	79
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

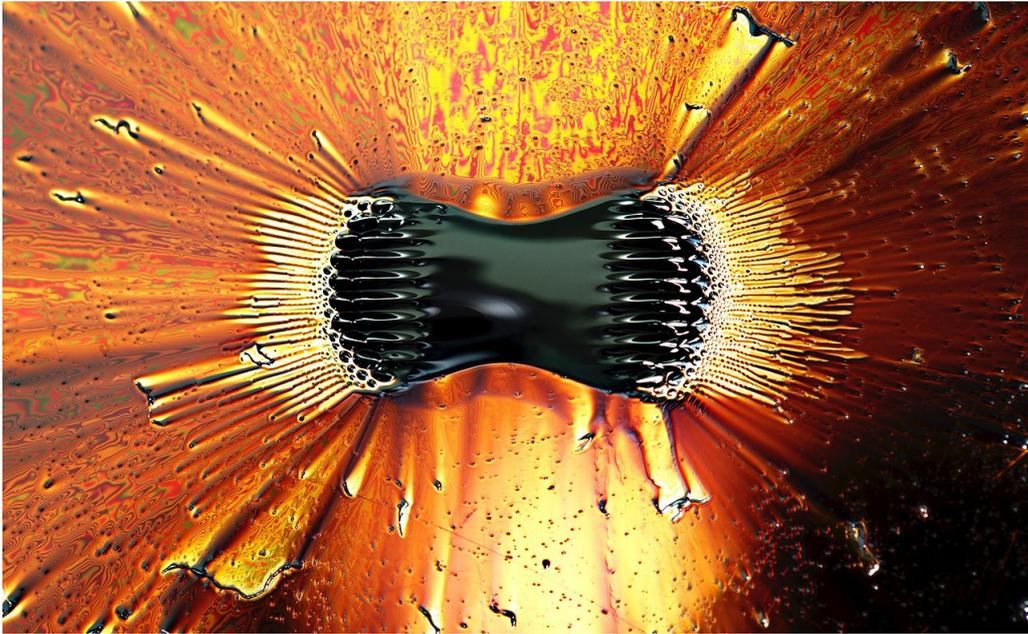


Figura 1: Foto de um ferrofluido sendo atraído pela presença de um campo magnético externo (BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 1997).

Um fluido magnético é um líquido que se polariza na presença de um campo magnético (NEURINGER; ROSENSWEIG, 1964). Em outras palavras, os fluidos magnéticos possuem em sua composição moléculas ou partículas com momentos magnéticos não nulos que alinham-se na direção do campo magnético. Macroscopicamente, o realinhamento dos momentos magnéticos com o campo aplicado é chamado de magnetização, e é a propriedade material responsável por acoplar a dinâmica dos fluidos ao eletromagnetismo (SHLIOMIS, 2002). Em consequência deste acoplamento entre magnetização e hidrodinâmica, os ferrofluidos apresentam um comportamento altamente complexo, marcado por instabilidades, alteração de sua reologia, e formação de padrões (ROSENSWEIG, 1997; FELDERHOF, 2000; RINALDI et al., 2005).

De maneira geral, fluidos com propriedades magnéticas não são encontrados na natureza e precisam ser sintetizados em laboratório. Exemplos clássicos são: o oxigênio líquido, soluções salinas de terras raras ou suspensões de partículas com propriedades ferromagnéticas (ROSENSWEIG, 1997; BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 1997). Dentre os fluidos magnéticos conhecidos, destacam-se as suspensões coloidais de partículas ferromag-

néticas, também conhecidas como ferrofluidos, por apresentarem uma alta suscetibilidade magnética a temperatura ambiente. Em termos quantitativos, os ferrofluidos apresentam valores típicos de suscetibilidade magnética da ordem de 10^8 , valor dez mil vezes maior do que a suscetibilidade típica de uma solução salina paramagnética (BLUMS; CEBERS; MAIOROV, 1997; NEURINGER; ROSENSWEIG, 1964). Os ferrofluidos ainda possuem a vantagem de serem mais econômicos do que os tipos de fluidos magnéticos, que de maneira geral, requerem materiais especiais ou condições de temperaturas muito rigorosas para serem produzidos. Este trabalho tem como objetivo estudar a dinâmica dos fluidos magnéticos, utilizando os ferrofluidos como material de referência. Para entendermos melhor o seu comportamento, precisamos definir de forma clara o que é uma suspensão coloidal e como podemos caracterizá-la.

As suspensões coloidais são misturas heterogêneas entre uma fase dispersante e outra dispersa, sujeita ao movimento browniano. Sua classificação é feita a partir do estado da matéria em que se encontram o dispersante e o disperso. No caso de ferrofluidos em que o disperso, composto por partículas sólidas, é misturado a um líquido, temos um coloide do tipo sol (HIEMENZ; HIEMENZ, 1986; RUSSEL; SAVILLE; SCHOWALTER, 1989). Outros dois fatores importantes na caracterização dos coloides são a fração volumétrica de partículas, que é dada pela razão entre volume total de partículas e o volume total, e o diâmetro das partículas que pode variar de $3nm$ até $10nm$. Nesta escala, o movimento browniano é suficiente para garantir que as partículas permaneçam suspensas no dispersante, anulando o efeito de sedimentação (EINSTEIN, 1956; RUSSEL; SAVILLE; SCHOWALTER, 1989). Para garantir esta propriedade, as partículas ferromagnéticas são revestidas por uma camada de surfactantes com o objetivo de impedir a formação de agregados maiores e conseqüentemente a sedimentação da fase dispersa, garantindo a estabilidade do coloide.

Além de garantir que a fase dispersa permaneça suspensa, as dimensões das partículas ferromagnéticas são também fundamentais para a magnetização do ferrofluido por estarem intimamente relacionadas ao tempo de relaxação magnética. Ao variarmos a direção de um campo magnético, exercemos sobre cada momento magnético um torque que tenta alinhar o campo com o momento magnético a fim de minimizar sua energia livre (JILES, 2015). Neste contexto, definimos como tempo de relaxação magnética o tempo necessário para que este re-alinhamento ocorra. De acordo com (SHLIOMIS, 1971; SHLIOMIS, 2002; ROSENSWEIG, 2002), este processo pode acontecer de duas formas distintas: pela rotação do momento magnético internamente a partícula, ou pela rotação da própria partícula. O tempo característico para o primeiro mecanismo é chamado de tempo de Néel, enquanto que o tempo para o segundo é denominado tempo de relaxação browniana (NÉEL, 1949; FELDERHOF, 2000).

A possibilidade de controle desta classe de fluidos por meio de campos magnéticos criou um grande interesse dentro da comunidade científica. Deste sua invenção, o número de estudos e patentes relacionadas a este tema vem aumentando de rapidamente, com

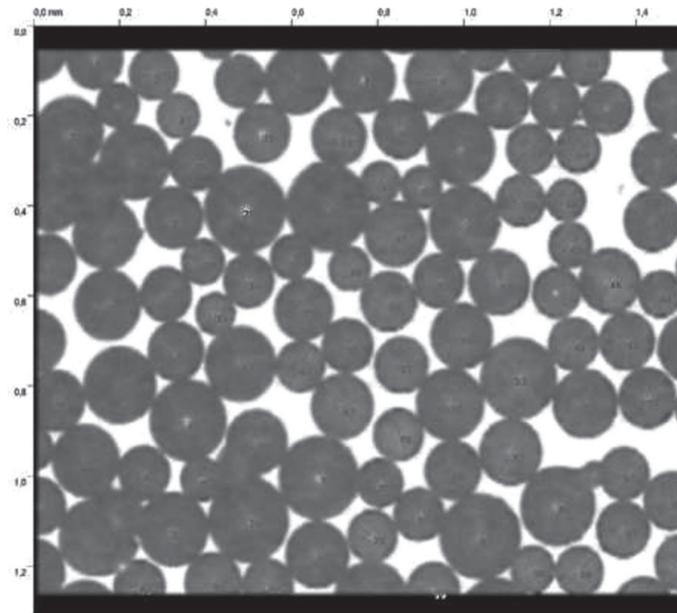


Figura 2: Micrografia de uma suspensão magneto-reológica mostrando formação de microestruturas dentro do fluido. (GONTIJO; CUNHA, 2012).

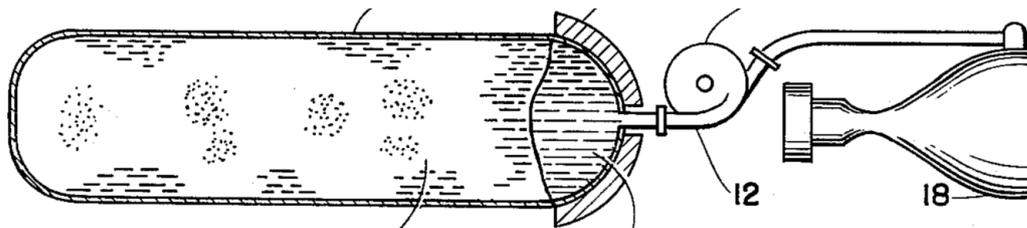


Figura 3: Desenho esquemático de um sistema de bombeamento de combustível aeroespacial a base de ferrofluido desenvolvido pela NASA (STEPHEN, 1965).

crescimento quase que exponencial entre os anos de 1950 e 1990 como mostra a 4. Os ferrofluidos foram primeiramente desenvolvidos pela NASA para serem utilizados como combustíveis espaciais (STEPHEN, 1965), em sistemas de propulsão de baixa gravidade como mostrado pela figura 3. Posteriormente, os ferrofluidos foram empregados em diversas aplicações comerciais com destaque para a selagem e lubrificação de mancais em discos rígidos e no seu uso como fluido de arrefecimento em auto-falantes de alta performance (FERTMAN, 1980; BAILEY, 1983). Como a reologia do ferrofluidos pode ser controlada a partir a aplicação de campos magnéticos (SHLIOMIS; MOROZOV, 1994; ROSA; GONTIJO; CUNHA, 2016; CUNHA; ROSA; DIAS, 2016), muita pesquisa veem sendo feita na aplicação destes materiais no desenvolvimento de amortecedores inteligentes, que utilizam menos partes moveis e podem ser configurados para diferentes níveis de amortecimento por meios eletrônicos (MOSKOWITZ; STAHL; REED, 1978; HUANG et al., 2017). Além de alterar a reologia dos ferrofluidos, a aplicação de campos magnéticos também permite o posicionamento ou até mesmo a produção de movimento destes fluidos sem a utilização de mecanismos moveis. Aplicações relacionadas a isto foram desenvolvidas por Oldenburg, Borglin e Moridis (2000) no âmbito de controle ambiental de aquíferos a partir da injeção

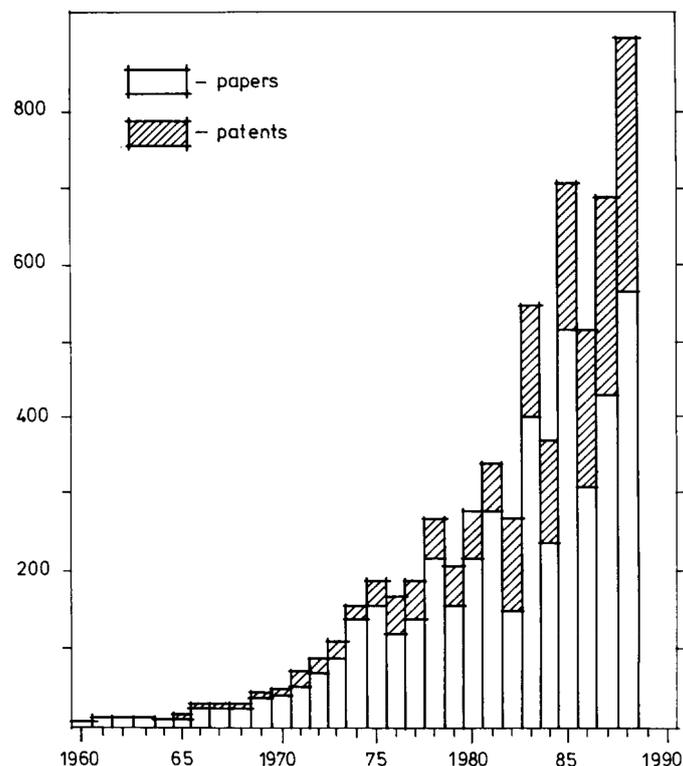


Figura 4: Histograma com o número de publicações em periódicos científicos e patentes registradas sobre ferrofluidos entre os anos de 1960 e 1990 (BLŪMS; OZOLS; ROSENSWEIG, 1990).

de ferrofluidos no extrato poroso do subsolo. O acoplamento entre a temperatura e a magnetização do ferrofluido permite a utilização deste material em aplicações relacionadas a transferência de calor ou até mesmo a conversão de energia (BIBO et al., 2012)

Chama-se de ferrohodinâmica a disciplina cujo objeto de estudo é a dinâmica e a transferência de calor dos fluidos magnéticos, um termo atribuído por um de seus pioneiros Rosensweig (1997). Como uma sub área da mecânica dos fluidos, a ferrohodinâmica busca modelar o comportamento dos ferrofluidos dentro de uma abordagem contínua, ou seja, sem que haja distinção entre a fase dispersa e a dispersante. O fechamento do modelo contínuo para a dinâmica dos ferrofluidos requer a proposição de uma equação constitutiva para o tensor de tensões, e permanece até hoje, juntamente com a modelagem de uma equação evolutiva para a magnetização, como um dos problemas em aberto da ferrohodinâmica. O desenvolvimento de modelos constitutivos para o tensor de tensões na ferrohodinâmica tem seu início com os trabalhos iniciais de Neuringer e Rosensweig (1964). No entanto, logo após a descoberta do efeito magneto viscoso por McTague (1969), (HALL; BUSENBERG, 1969) e (ROSENSWEIG; KAISER; MISKOLCZY, 1969), o tensor de tensões precisou ser revisto, para que este levasse em consideração a presença de tensões assimétricas em sua formulação.

O foco deste trabalho é estudar o escoamento dos ferrofluidos a partir de simulações numéricas, abordando escoamentos parabólicos e elípticos a partir de estudos de

caso. Especificamente, usamos o problema da camada limite laminar sobre placa plana como modelo de escoamento parabólico e o problema de convecção termomagnética dentro de uma cavidade delgada como escoamento elíptico. Em cada caso, abordamos aspectos distintos da física envolvida. No problema da camada limite laminar, abordamos o acoplamento entre o campo de vorticidade e a magnetização do ferrofluido. Diferentemente dos problemas apresentados na literatura científica (CUNHA; SOBRAL, 2005; KREKHOV; SHLIOMIS; KAMIYAMA, 2005), este caso proporciona o escoamento com características ainda não muito estudadas neste contexto, como por exemplo os efeitos do transporte convectivo de magnetização ou a distribuição não uniforme de vorticidade no domínio. No problema de convecção termomagnética, exploramos como a estratificação de magnetização em função do campo de temperatura é capaz de aumentar as taxas de transferência de calor em função do escoamento induzido. Neste sentido, buscamos complementar trabalhos anteriores do grupo e expandir a literatura atual sobre o assunto (ASHOURI et al., 2010; LAJVARDI et al., 2010; ASHOURI; SHAFII, 2017), que de maneira geral, estão restritos ao estudo de apenas uma configuração de campo magnético. Neste trabalho, estudamos o problema da convecção termomagnética sobre diferentes configurações de campo magnético, produzidas por ímãs de tamanho variado e posicionado em diferentes regiões.

2 Objetivos

2.1 Objetivos gerais

Este trabalho tem como objetivo estudar escoamentos de suspensões de partículas ferromagnéticas, i.e ferrofluidos, a partir de experimentos numéricos. Especificamente, queremos explorar a dinâmica dos ferrofluidos em escoamentos com características parabólicas e elípticas, utilizando o problema da camada limite laminar sobre placa plana como estudo de caso para escoamentos parabólicos, e a convecção termomagnética dentro de uma cavidade delgada para o estudo dos escoamentos elípticos. Em cada um dos casos abordamos aspectos diferentes da teoria física da ferrohodinâmica.

No problema da camada limite laminar sobre placa plana, utilizamos um campo magnético uniforme e assumimos um tempo de relaxação browniano para magnetização do ferrofluido. Com isto, buscamos caracterizar como o campo de vorticidade de um escoamento bi-dimensional e não-linear pode afetar o campo de magnetização em função do número de Péclet browniano. Além disso, queremos quantificar o aumento da força de arrasto sobre a placa plana em função do efeito magneto viscoso. Para isto, precisamos re-formular o problema da camada limite laminar sobre placa plana dentro do contexto da ferrohodinâmica. Utilizaremos a análise de escalas para determinar a ordem de grandeza de cada um dos termos dentro do nosso modelo, o que permitirá a simplificação das equações governantes, além de servir como uma primeira estimativa para a espessura da camada limite.

Com o problema de convecção termomagnética queremos explorar a teoria da ferrohodinâmica de quasi-equilíbrio, onde assumimos um tempo de relaxação de Néel e conseqüentemente que campo de magnetização e o campo magnético permanecem sempre alinhados. Neste caso, estamos interessados em explorar como diferentes condições de contorno magnéticas, neste caso dadas pelo tamanho e posição do ímã, podem afetar o escoamento do fluido confinado na cavidade e conseqüentemente como isto pode aumentar ou diminuir as taxas de transferência de calor. Neste sentido, queremos estabelecer relações entre o número de Nusselt e os demais parâmetros do problema como: razão de aspecto entre a face da cavidade e a face do ímã, o número de Rayleigh magnético e a posição do ímã. Esta análise complementarà trabalhos anteriores do grupo (CUNHA; COUTO; MARCELINO, 2007; GONTIJO; CUNHA, 2012) a partir de uma perspectiva numérica.

2.2 Objetivos específicos

Os objetivos deste trabalho podem ser divididos nos seguintes objetivos específicos:

2.2.1 Camada limite

- **Modelagem do problema:** Escolher de forma apropriada o modelo matemático para a formulação do problema. Neste passo, definimos as condições de contorno que iremos utilizar assim como as hipóteses a serem utilizadas para modelagem do problema.
- **Análise de escalas:** Com o problema formulado, usaremos a análise de escalas para determinar a ordem de grandeza de cada um dos mecanismos que governam nosso problema. Com isto, teremos informações suficientes para simplificar as equações governantes e estimar tanto a força de arrasto sobre a placa plana quanto a espessura da camada limite.
- **Formulação do modelo adimensional:** Formular a partir das escalas obtidas o modelo adimensional composto pelas equações governantes e condições de contorno. Com isto, reduzimos o número de parâmetros do problema e o tornamos mais geral, além de identificarmos claramente os parâmetros físicos do problema que governam sua dinâmica.
- **Proposição de um algoritmo numérico e solução do problema:** Selecionar um método adequado para a solução do problema. Discretizar as equações governantes a partir do método das diferenças finitas e programar o algoritmo utilizando a linguagem Python 3.
- **Interpretação do resultados:** Validar resultados computacionais com a solução clássica de Blasius para o caso não magnético (BLASIUS, 1908; ACHESON, 1990). Interpretar os efeitos do campo de vorticidade sobre o campo de magnetização para diferentes números de Péclet.

2.2.2 Convecção termomagnética

- **Modelagem do problema:** Definir hipóteses iniciais para especificação do problema proposto. Determinar a partir da teoria de ferrodinâmica de quase-equilíbrio as equações governantes e as condições de contorno necessárias para o fechamento do problema.
- **Formulação do modelo adimensional:** Adimensionalizar o modelo matemático proposto. Identificar os parâmetros físicos e estabelecer seus respectivos valores típicos.

- **Proposição de um algoritmo numérico e solução do problema:** Escolher o algoritmo de acoplamento pressão-velocidade para a solução das equações do movimento. Discretizar as equações governantes utilizando o método das diferenças finitas em uma malha escalonada. Implementar o algoritmo computacional utilizando a linguagem Python 3.
- **Interpretação do resultados:** Validar resultados computacionais com os benchmarks de (ASHOURI et al., 2010; DAVIS, 1983) para convecção natural simples. Interpretar os efeitos do campo magnético com diferentes condições de contorno sobre a taxa de transferência de calor a partir do número de Nusselt global. Comparar resultados com os trabalhos anteriores do grupo na área de convecção termomagnética (CUNHA; COUTO; MARCELINO, 2007; GONTIJO; CUNHA, 2012).

3 Fundamentação Teórica

Este capítulo tem como objetivo transmitir ao leitor conceitos básicos da teoria eletromagnética e da dinâmica dos fluidos necessários para o estudo da ferrohídrodinâmica. Ressaltamos que este capítulo não é, de forma alguma, uma apresentação exaustiva dos tópicos aqui abordados, e para um estudo mais detalhado do que aqui foi apresentado, sugerimos a leitura dos trabalhos referenciados.

3.1 Sistemas de Unidade em magnetismo

Antes que iniciemos nossa apresentação da teoria eletromagnética, precisamos esclarecer alguns pontos relativos as unidades de medida utilizadas no estudo do electromagnetismo, que em alguns casos, podem trazer confusão ao entendimento do leitor. Atualmente, três sistemas de unidades são utilizados no estudo dos fenômenos relacionados ao electromagnetismo e aos materiais magnéticos: o sistema Gaussiano, também conhecido como CGS, e dois sistemas MKS, em que se empregam as convenções de Kennelly e Sommerfeld. Neste trabalho, adotamos a convenção de Sommerfeld como sistema de unidades, seguindo a orientação da União Internacional de Física Pura e Aplicada (IUPAP)(JILES, 2015). A tabela 1 mostra as unidades adotadas em cada um dos sistemas de medida mencionados.

Quantidade		SI (Sommerfeld)	SI (Kennelly)	EMU (Gaussiano)
Campo magnético	\mathbf{H}	A/m	A/m	Oersteds
Indução magnética	\mathbf{B}	Tesla	Tesla	Gauss
Magnetização	\mathbf{M}	A/m	-	emu/cc
Intensidade de magnetização	I	-	Tesla	-
Fluxo magnético	Φ	Weber	Weber	Maxwell
Momento magnético	\mathbf{m}	Am^2	Weber metro	emu
Intensidade do polo magnético	ρ	A m	Weber	emu/cm
Equação do campo induzido		$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$	$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{M}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$
Força sobre momento magnético		$\mathbf{f}_m = \mu_0\mathbf{m} \cdot \nabla\mathbf{H}$	$\mathbf{f}_m = \mathbf{m} \cdot \nabla\mathbf{H}$	$\mathbf{f}_m = \mathbf{m} \cdot \nabla\mathbf{H}$
Torque sobre momento magnético		$\mathbf{t}_m = \mu_0\mathbf{m} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{t}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{t}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$

Tabela 1: Unidades de medida utilizadas pelos sistemas Gaussiano, Sommerfeld e Kennelly.

3.2 Campos, forças e torques magnéticos

3.2.1 Força de Kelvin e o campo magnético

O campo magnético consiste em um dos conceitos fundamentais para descrição das interações de origem magnética na matéria. Sua definição é feita a partir da força produzida sobre uma partícula e pode ser feita de duas formas distintas: uma a partir da força produzida por um campo de indução magnética em uma partícula eletricamente carregada, ou seja, sobre ação da força de Lorentz; e outra a partir do torque produzido por um campo magnético sobre um dipolo magnético, neste caso, sujeito ao torque produzido pela força de Kelvin. Em textos introdutórios mais recentes, a escolha da primeira abordagem têm sido preferida por estabelecer uma conexão direta entre o campo de indução magnética e a corrente elétrica (PURCELL et al., 1965; NAYFEH; BRUSSEL, 2015). A segunda abordagem, baseada no torque produzido pela força de Kelvin, requer a utilização de um modelo baseado em cargas magnéticas, e é cada vez menos utilizada em textos introdutórios. A preferência pela primeira descrição do magnetismo muda ao se tratar do estudo das propriedades magnéticas dos materiais, onde não são levados em consideração os efeitos elétricos, neste caso, a descrição do campo magnético a partir dos torques de Kelvin é a mais utilizada. Neste sentido, desenvolvemos a seguir os conceitos magnéticos a partir da segunda abordagem, onde temos como ponto de partida o conceito de cargas magnéticas (NEURINGER; ROSENSWEIG, 1964; ROSENSWEIG, 1997).

A lei física que descreve a força entre pólos magnéticos foi descoberta de forma independente na Inglaterra por John Mitchel em 1750, e na França em 1785 por Charles Coulomb (CULLITY; GRAHAM, 2011). Fenomenologicamente, a força magnética entre dois polos é proporcional ao produto da intensidade dos polos p_1 e p_2 e inversamente proporcional ao quadrado da distância d entre eles. Em termos matemáticos, a lei descreve a seguinte relação

$$\mathbf{F} = k \frac{p_1 p_2}{d^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

tal que $k = \frac{1}{4\pi\mu_0}$ é uma constante de proporcionalidade, onde $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ é a constante de permeabilidade magnética no vácuo, ambas expressas em unidades do Sistema Internacional (SI). O termo $\hat{\mathbf{r}}$ denota o vetor unitário orientado de p_1 a p_2 .

Apesar da lei de Coulomb descrever como dois polos magnéticos interagem entre si, é notável que estes sempre ocorram em pares, sendo um polo positivo (norte) e outro negativo (sul). A separação deste par é impossível, de maneira que, se um ímã permanente for dividido ao meio, novos polos serão produzidos nas extremidades segmentadas, e conseqüentemente resultando em dois novos ímãs.

Vale a pena ressaltar que a lei de Coulomb é de fato uma lei fenomenológica, baseada em observações experimentais. O experimento realizado por Coulomb é similar ao experimento de Newton para constatação da lei da gravitação universal e consiste em

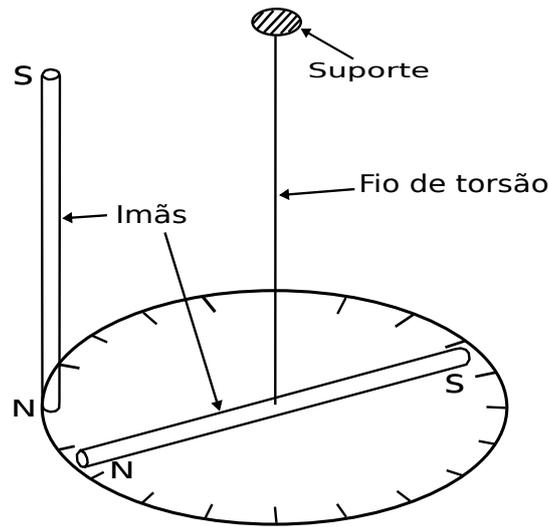


Figura 5: Desenho esquemático da balança de torque utilizada por Charles Coulomb para aferir a força magnética.

medir a força entre dois polos por meio de um aparato chamado de balança de torque, exemplificado pela figura 5. As hastes magnéticas utilizadas no experimento são feitas longas o suficiente para que cada polo, localizado em uma das extremidades da haste, sejam considerados isolados. A medição da força é feita ao se aproximar dois polos a uma distância conhecida e medir o ângulo de rotação da haste de apoio. Assim, a partir da lei de Hooke, é possível inferir o valor da força magnética.

Um polo magnético é capaz de produzir um campo magnético ao seu redor, isto é, o polo magnético altera o potencial magnético ao seu redor, e produz uma força que age sobre outro polo próximo a ele. Os mesmos experimentos que mostram que a força magnética sobre um polo é proporcional a sua intensidade p e ao campo magnético H na qual o polo está inserido, ou seja,

$$\mathbf{F} = p\mathbf{H} \quad (3.2)$$

tal que H é dito o campo magnético e possui unidades de $A \cdot m^{-1}$ no Sistema Internacional. A partir das equações 3.1 e 3.2, encontramos que o campo magnético produzido por um polo magnético isolado é expresso pela seguinte equação,

$$\mathbf{H} = k \frac{p}{d^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.3)$$

Geralmente, estamos interessados em calcular o campo magnético de objetos não pontuais, como o campo gerado por um fio infinito, por um solenoide ou por um ímã permanente. O cálculo destes campos é um tanto complexo e requer o uso de ferramentas mais avançadas como as equações de Maxwell e da lei de Biot-Savart (PURCELL et al., 1965; COEY, 2010).

3.2.2 Momento Magnético e Magnetização

Considere uma haste de comprimento l , carregada com polos positivos em uma das extremidades e com polos negativos na outra, sujeita a um campo magnético uniforme H , como ilustrado na figura (6). Supondo que inicialmente a haste faz um ângulo θ com a direção do campo magnético, então o módulo do torque magnético sobre a haste é dado pela expressão

$$pH \sin(\theta) \left(\frac{l}{2}\right) + pH \sin(\theta) \left(\frac{l}{2}\right) = pH \sin(\theta)l. \quad (3.4)$$

A intensidade do momento magnético m é definida como o torque magnético produzido

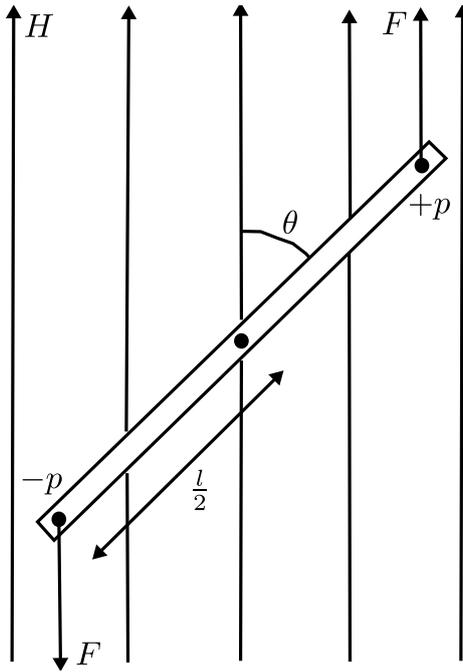


Figura 6: Desenho esquemático de uma barra com extremidades carregadas com cargas magnéticas opostas, sujeita a um campo magnético uniforme.

quando a haste está perpendicular ao campo magnético, ou seja, considerando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Portanto, a intensidade do momento magnético é expressa na forma

$$m = pl. \quad (3.5)$$

O momento magnético definido pela equação 3.5 consiste na quantidade magnética elementar. Na escala atômica, os momentos magnéticos estão associados aos spin e o movimento orbital dos elétrons, e são estudados a partir da teoria quântica. Dada a natureza quântica do momento magnético, torna-se conveniente definirmos uma quantidade macroscópica para descrição do magnetismo.

Considere dois ímãs retangulares cujos polos têm mesma intensidade p e com distância interpolar l . Ao colocarmos um sobre o outro, somam-se os polos, e o momento magnético resultante é $m = l(2p)$, que é o dobro do momento de um ímã. Se juntarmos os ímãs a partir de suas extremidades, juntando polo sul com polo norte, logo anulando

estes polos, encontramos que o momento resultante é $m = p(2l)$. A partir deste pequeno experimento, podemos inferir por indução, que o momento magnético resultante da combinação entre dois imãs com momentos magnéticos iguais é simplesmente a soma dos momentos magnéticos individuais.

Nestes exemplos, podemos notar que o momento magnético é dobrado toda vez em que dobramos o volume do imã, no entanto, o momento magnético por unidade de volume permanece constante. Esta quantidade, o momento magnético por unidade de volume, é chamada de intensidade de magnetização, ou simplesmente, magnetização, e é denotada por \mathbf{M} . Matematicamente, expressamos a magnetização como

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V} \quad (3.6)$$

tal que V denota o volume do material magnetizado. Substituindo a expressão 3.5 em 3.6, encontramos que

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V} = \frac{pl}{Al} = \frac{p}{A} \quad (3.7)$$

tal que A denota a área superficial do imã. Portanto, podemos alternativamente interpretar a magnetização como a densidade superficial de polos magnéticos em um corpo material.

Se um material com propriedades magnéticas contém n dipolos magnéticos elementares por unidade de volume, cada um com momento magnético m , quando todos os momentos magnéticos se encontram alinhados paralelamente dizemos que a magnetização do material atinge seu valor de saturação M_s . Matematicamente, escrevemos a magnetização de saturação como o produto entre o número de dipolos n e o momento magnético elementar m de cada partícula,

$$M_s = nm \quad (3.8)$$

tal que n denota o número de densidade e tem unidades de $\frac{1}{m^3}$.

3.2.3 Indução magnética

Tradicionalmente, define-se o campo de indução magnética como o campo gerador da força de Lorentz, que age sobre uma partícula eletricamente carregada em movimento. Podemos interpretá-lo fisicamente como uma densidade de linhas de corrente que atravessam uma superfície, ou seja, a partir da densidade de fluxo magnético.

A indução magnética é uma função do campo magnético. No caso especial do vácuo, a indução magnética é proporcional ao campo magnético. Deste modo, escrevemos esta relação na seguinte forma

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (3.9)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo, como definida anteriormente. A partir da equação (3.9) podemos determinar o valor de \mathbf{B} se soubermos \mathbf{H} , e vice-versa. Em certas classes de materiais, a relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} deixa de ser linear. Isto vale especialmente

para os materiais ditos ferromagnéticos, de maneira que, as funções que determinam a relação entre o campo magnético e a indução magnética podem ser multi-valoradas. De forma geral, descrevemos tais relações a partir de uma expressão similar, da forma

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.10)$$

tal que $\mu = \mu(T, H)$ denota a permeabilidade magnética do material e é, de maneira geral, função tanto do campo magnético \mathbf{H} quanto da temperatura T .

De maneira geral, vimos que a indução magnética \mathbf{B} consiste em duas contribuições: uma do campo magnético, e outra da magnetização. No vácuo, vimos que a indução magnética é simplesmente $\mu_0 \mathbf{H}$, enquanto que, seguindo a convenção de Sommerfeld, a contribuição da magnetização do meio material é $\mu_0 \mathbf{M}$. Desta forma, definimos que a indução magnética \mathbf{B} para um meio qualquer pode ser escrita como a soma vetorial do campo magnético e da magnetização, multiplicados pela permeabilidade magnética do vácuo, ou seja,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (3.11)$$

O campo magnético \mathbf{H} é gerado fora do material por correntes elétricas, ou imãs permanentes. A magnetização é produzida a partir do do realinhamento dos spins e do momento angular orbital dos elétrons dentro do sólido.

3.2.4 Permeabilidade e Suscetibilidade magnética

A permeabilidade e a suscetibilidade magnética são responsáveis por caracterizar a resposta de um material a um campo magnético. Fisicamente, a permeabilidade magnética é uma medida da capacidade do material de produzir um campo magnético interno, por outro lado, a suscetibilidade magnética caracteriza o grau de magnetização do material.

De maneira geral, ambas permeabilidade e suscetibilidade magnética dependem não linearmente do campo magnético H . Neste caso, precisamos de algum modelo de magnetização para que possamos caracterizar a suscetibilidade magnética do material.

$$\mu = \frac{B}{H}, \quad (3.12)$$

$$\chi = \frac{M}{H}, \quad (3.13)$$

Dadas condições de temperatura constante e baixa intensidade do campo magnético, a suscetibilidade magnética dos materiais diamagnéticos e paramagnéticos pode ser considerada constante. Desta forma, dizemos que estes materiais são lineares, e apresentam uma magnetização \mathbf{M} proporcional ao campo magnético \mathbf{H} , e portanto que $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$. Assim, podemos escrever que

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad (3.14)$$

de forma que μ_r e μ , são definidos como $\mu_r = 1 + \chi$, e $\mu = \mu_0\mu_r$ respectivamente. A linearidade da relação entre a magnetização \mathbf{M} e o campo magnético \mathbf{H} nos permite escrever a indução magnética \mathbf{B} como proporcional ao campo magnético em condições de baixa intensidade. Entretanto - como veremos a seguir após introduzirmos a teoria de Langevin para materiais paramagnéticos - esta relação linear deixa de ser válida para fortes campos magnéticos, e de fato, materiais paramagnéticos apresentam um valor de saturação em condições limite.

3.2.5 Diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo

Os materiais magnéticos são comumente classificados quanto a sua suscetibilidade magnética. O primeiro grupo de materiais, ditos diamagnéticos, apresentam uma suscetibilidade negativa e pequena em termos absolutos, com valores típicos da ordem de $\chi \sim -10^{-5}$. Em função do valor negativo da suscetibilidade magnética, estes materiais apresentam um campo de magnetização no sentido oposto ao do campo magnético. Consequentemente, os materiais diamagnéticos são repelidos na presença de campos magnéticos. Exemplos de materiais diamagnéticos são o cobre, a prata, o ouro, o bismuto e o berílio (ROSENSWEIG, 1997; CULLITY; GRAHAM, 2011).

Quando a suscetibilidade magnética de um material é positiva e pequena em módulo, dizemos que o material possui propriedades paramagnéticas. Tipicamente, os valores de suscetibilidade magnética para estes materiais varia entre $\chi \sim 10^{-3}$ até $\chi \sim 10^{-5}$. A magnetização dos materiais paramagnéticos é sempre no sentido do campo magnético, logo, estes materiais são sempre atraídos por campos magnéticos (SPALDIN, 2010; CULLITY; GRAHAM, 2011).

Por fim, temos os materiais ferromagnéticos que apresentam uma suscetibilidade magnética positiva e muito maior do que 1, com valores típicos variando entre $\chi \sim 50$ até $\chi \sim 10000$ (CULLITY; GRAHAM, 2011). Os materiais ferromagnéticos são caracterizados por apresentarem regiões com momentos magnéticos internos alinhados denominados domínios de Weiss (WEISS, 1907). Na presença de campos magnéticos, os momentos magnéticos passam a alinhar-se, fundindo diferentes domínios de Weiss em um só. Este fenômeno é o responsável por garantir a alta suscetibilidade dos materiais magnéticos. Em termos de aplicações, os materiais ferromagnéticos são geralmente utilizados na fabricação de ímã permanentes, eletroímãs industriais, e transformadores. Exemplos clássicos de materiais ferromagnéticos são o ferro, o cobalto e o níquel.

3.2.6 Superparamagnetismo

Até agora discutimos duas classes de materiais magnéticos: os diamagnéticos e os paramagnéticos. Esta classificação é geral, sendo válida tanto para sólidos quanto para fluidos. No entanto, no caso dos ferrofluidos precisamos introduzir mais uma classificação:

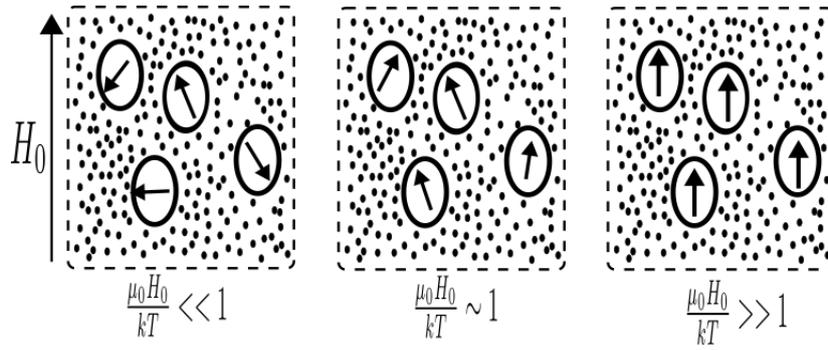


Figura 7: Estados de magnetização para diferentes $\alpha = \frac{\mu_0 H_0}{k_B T}$

o superparamagnetismo. Em termos qualitativos, o superparamagnetismo é similar ao paramagnetismo, porém, exibe uma magnetização muito maior para campos magnéticos moderados. Para descrevermos o superparamagnetismo, utilizaremos da teoria de Langevin, dando uma interpretação física dentro do contexto dos ferrofluidos (LANGEVIN, 1905).

As partículas magnéticas suspensas em um ferrofluido são bombardeadas constantemente pelas moléculas do fluido base em função da agitação térmica do fluido. As colisões decorrentes da interação com o fluido base causam um movimento aleatório das partículas magnéticas tanto no sentido de translação quanto no sentido de rotação. Em razão da aleatoriedade do movimento das partículas magnéticas, o ferrofluido, na ausência de um campo magnético externo, não apresenta magnetização. Entretanto ao aplicar um campo magnético, as partículas magnéticas iniciam um movimento de reorientação de seus dipolos no sentido do campo aplicado, iniciando o processo de magnetização, como mostrado na figura 7.

A equação 3.4 nos diz que dado um campo de magnetização \mathbf{M} e um campo magnético \mathbf{H} , a intensidade do torque magnético produzido é $\mu_0 M H \sin(\theta)$, em que θ é o ângulo entre os dois vetores. Para uma partícula de volume V , a intensidade de seu momento magnético m é dada por $\frac{M}{V}$, portanto escrevemos que o torque por unidade de volume é dado por

$$\tau = m H \sin(\theta). \quad (3.15)$$

A energia requerida para trazer o dipolo das partículas para uma posição paralela ao campo magnético é dada por

$$W = \int_0^\theta \tau d\theta = m H \int_0^\theta \sin(\theta) d\theta = m H (1 - \cos(\theta)). \quad (3.16)$$

Para considerarmos a orientação dos dipolos magnéticos, definimos a quantidade $n(\theta)$ como a função distribuição angular para um conjunto de N partículas. Na ausência de um campo magnético o número de dipolos alinhados dentro de uma faixa entre θ e $\theta + d\theta$ é de

$$n(\theta) d\theta = N \frac{(2\pi \sin\theta)(d\theta)}{4\pi} = \frac{N}{2} \sin\theta d\theta, \quad (3.17)$$

como mostra a figura 8. Por outro lado, na presença de um campo magnético e a uma

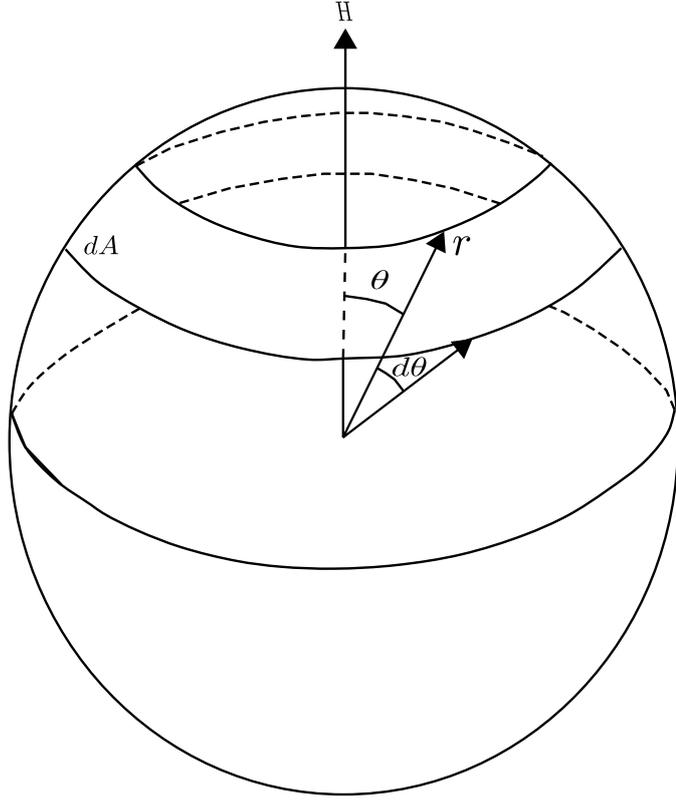


Figura 8: Círculo unitário denotando a região da esfera cujas direções estão entre θ e $\theta + d\theta$.

temperatura absoluta T , determinamos que a probabilidade de encontrarmos dipolos magnéticos em uma orientação fixa é proporcional ao fator de Boltzmann γ ,

$$\gamma = e^{\frac{-W}{k_B T}}, \quad (3.18)$$

em que W denota a energia magnética do sistema e k_B a constante de Boltzmann. Em termos físicos, interpretamos o fator de Boltzmann como uma forma de representar a competição entre os mecanismos determinísticos de alinhamento entre os dipolos magnéticos, neste caso dado por W , e os probabilísticos associados ao movimento browniano. Desta forma, temos que o número de partículas cujos dipolos estão entre θ e $\theta + d\theta$ é expresso por

$$n(\theta)d\theta \propto \frac{N}{2} e^{\frac{-W}{k_B T}} \sin\theta d\theta. \quad (3.19)$$

Para calcularmos a constante de proporcionalidade da equação 3.21, impomos a condição de que

$$\int_0^\pi n(\theta)d\theta = N. \quad (3.20)$$

Determinada a probabilidade de orientação de uma partícula no sentido de um campo aplicado, vamos formular como a magnetização responde a esse campo magnético. Chamamos de magnetização efetiva a componente líquida do dipolo magnético no sentido do campo aplicado, i.e $m \cos(\theta)$. Como o parâmetro θ é alvo de flutuações, é necessário que se calcule a magnetização efetiva média,

$$\bar{m} = \int_0^\pi \frac{m \cos(\theta)n(\theta)d\theta}{\int_0^\pi n(\theta)d\theta} \quad (3.21)$$

substituindo os resultados encontrados para W e $n(\theta)d\theta$ na equação 3.23, encontramos que

$$\bar{m} = \frac{\int_0^\theta m \cos \theta \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}{\int_0^\theta \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta}. \quad (3.22)$$

Introduzimos aqui a parâmetro $\alpha = \frac{mH}{kT}$ que representa a razão entre a energia magnética e a energia térmica do sistema. Substituindo α na equação 3.24, obtemos que

$$\bar{m} = \frac{\int_0^\theta m \cos \theta \exp(\alpha \cos \theta)}{\int_{-\alpha}^\alpha \exp(\alpha \cos \theta)} = \frac{m \int_0^\theta x e^x dx}{\alpha \int_{-\alpha}^\alpha e^x dx} \quad (3.23)$$

onde $x = \alpha \cos \theta$. Integrando a equação 3.25 encontramos que

$$\frac{\bar{m}}{m} = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} = \mathcal{L}(\alpha). \quad (3.24)$$

A função dada por $\mathcal{L}(\alpha)$ é chamada de função Langevin. A magnetização de um meio que contem n partículas com magnetização eficaz de \bar{m} é calculada como

$$\mu_0 M = n \bar{m}. \quad (3.25)$$

Da mesma forma dizemos que a magnetização de saturação do fluido pode ser escrita por

$$\mu_0 M_s = n m. \quad (3.26)$$

Relacionamos a magnetização de saturação com o produto da fração volumétrica de partículas magnéticas com a magnetização de um sólido equivalente, ou seja

$$M_s = \phi M_d \quad (3.27)$$

onde denotamos ϕ como a razão do volume de partículas magnéticas suspensas pelo volume total do fluido e M_d como a magnetização do sólido equivalente. Relacionando as equações 3.28 e 3.29, determinamos que

$$\frac{M_0}{M_s} = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} = \mathcal{L}(\alpha). \quad (3.28)$$

Dois casos importantes para a função Langevin ocorrem para valores assintóticos de α . O primeiro dos casos ocorre quando α assume valores próximos a zero. Expandindo a função Langevin por séries de Taylor, Rosensweig (1997) mostra que

$$\mathcal{L}(\alpha) = \frac{\alpha}{3}. \quad (3.29)$$

Neste caso, temos na figura 9, o comportamento da função Langevin tanto no caso geral quanto no regime assintótico para $\alpha \ll 1$. O outro valor assintótico para a função Langevin ocorre quando o fluido se aproxima de seu estado de saturação ($\alpha \gg 1$). Neste caso temos que a magnetização de equilíbrio é

$$M_0 = \phi M_d \left(1 - \frac{6}{\pi} \frac{kT}{M_d \mu_0 H d^3} \right) \quad (3.30)$$

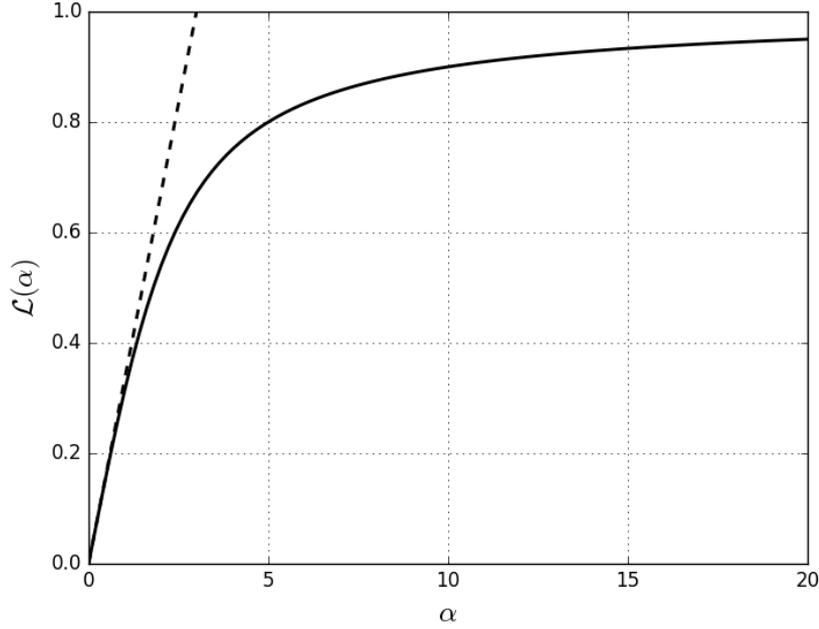


Figura 9: Curva para a função Langevin $\mathcal{L}(\alpha)$. A linha cheia representa a função $\mathcal{L}(\alpha)$, enquanto a linha tracejada representa os valores assintóticos para $\alpha \ll 1$

Expressamos o campo vetorial para a magnetização de equilíbrio \mathbf{M}_0 como

$$\mathbf{M}_0 = M_s \mathcal{L}(\alpha) \hat{\mathbf{H}} \quad (3.31)$$

em que $\hat{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|}$ é o vetor unitário tangente ao campo magnético \mathbf{H} . Uma consequência direta da equação 3.33 é que ambos os campos magnéticos e de magnetização de equilíbrio estão sempre paralelos entre si $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$. Uma outra forma de expressar o campo de magnetização de equilíbrio é por meio da susceptibilidade magnética χ , na qual

$$\mathbf{M}_0 = \chi \mathbf{H}. \quad (3.32)$$

A susceptibilidade magnética é definida como,

$$\chi = \frac{M_0}{H} \quad (3.33)$$

A partir do resultado 3.30, temos que

$$\chi = \frac{\pi}{18} \phi \mu_0 \frac{M_d^2 d^3}{kT} \quad (3.34)$$

3.3 Vorticidade e Magnetização

O magnetização de um material é caracterizada por dois de processos de relaxação, com tempos característicos distintos, e associados a diferentes mecanismos físicos (MARTSENYUK; RAIKHER; SHLIOMIS, 1973). O primeiro deles consiste na rotação do

momento magnético dentro da partícula, e está presente nos processos de magnetização tanto de sólidos quanto de líquidos. O segundo processo consiste na rotação da partícula magnética, cujo momento magnético permanece fixo dentro da partícula, e neste caso, somente a magnetização dos fluidos magnéticos é afetada por este mecanismo, já que a estrutura cristalina dos sólidos impede este mecanismo.

A magnetização dos ferrofluidos depende fundamentalmente do mecanismo de relaxação dominante, e é determinada pelo processo com menor tempo característico. A seguir, discutimos os tempos de relaxação associados a magnetização dos ferrofluidos e discutimos a importância de sua caracterização para física do problema.

3.3.1 Relaxação magnética

Como dito anteriormente, determinar o tempo característico de relaxação magnética é fundamental para entendermos o processo de magnetização de um ferrofluido. Fisicamente, o tempo de relaxação magnética representa o tempo médio para o alinhamento dos momentos magnéticos na direção do campo magnético aplicado.

Chamamos de tempo de relaxação browniano, a escala de tempo característica associada a relaxação magnética por meio da rotação da partícula. Expressamos esta escala, de origem hidrodinâmica, a partir do tempo de difusão browniano (FRENKEL, 1955), dado por

$$\tau_B = \frac{3V\mu}{k_B T}, \quad (3.35)$$

onde V representa o volume da partícula, k_B a constante de Boltzmann, e T a temperatura absoluta. O mecanismo de magnetização por meio da rotação do momento magnético interno a partícula, é denominado tempo de relaxação de Neel, e é expresso pela seguinte fórmula

$$\tau_N = \frac{1}{f_0} \exp\left(\frac{KV}{kT}\right) \quad (3.36)$$

tal que f_0 é uma frequência característica, tipicamente da ordem de 10^9 Hz, e K representa a constante de anisotropia magnética do cristal (NÉEL, 1949; MCNAB; FOX; BOYLE, 1968).

O efeito da ação simultânea de ambos os mecanismos de relaxação na magnetização do ferrofluido produz um tempo de relaxação efetivo, que depende de ambos os processos. Dado uma suspensão de partículas ferromagnéticas esféricas cujo volume médio é V , expressamos o tempo de relaxação magnética efetivo é dado pela seguinte expressão

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_N}. \quad (3.37)$$

Reescrevendo a equação 3.39 com τ no numerador, encontramos que

$$\tau = \frac{\tau_B \tau_N}{\tau_B + \tau_N}. \quad (3.38)$$

Como mostrado pelas equações 3.37 e 3.38, ambos os mecanismos de relaxação possuem um tempo característico que depende diretamente do volume da partícula. Especificamente, observamos que o tempo de relaxação browniano depende linearmente quanto ao volume da partícula, enquanto que o tempo de Néel apresenta uma dependência exponencial.

O volume de cada partícula é dado pela fórmula

$$V = \frac{\pi d^3}{6}, \quad (3.39)$$

onde d é o diâmetro da partícula. Ao igualar ambos os tempos de relaxação browniana e de Néel, podemos encontrar o diâmetro crítico, também chamado de diâmetro de Shliomis, no qual ambos os tempos de relaxação são iguais. Em termos físicos, o diâmetro crítico representa o ponto de transição entre os mecanismos de relaxação magnética. Ao igualar os tempos de relaxação, encontramos a seguinte expressão

$$\frac{kT}{KV} \exp\left(\frac{KV}{kT}\right) = \frac{3\eta f_0}{K}. \quad (3.40)$$

Shliomis (1971) determinou um diâmetro crítico de $d_c = 8.5$ nm para partículas de ferrosas, e $d_c = 4.0$ nm para partículas de cobalto.

No caso de suspensões formadas por partículas cujo diâmetro médio é pequeno $d < d_c$, concluímos a partir das fórmulas 3.37 e 3.38 a seguinte relação $\tau_N < \tau_B$. Desta forma, através da equação 3.40 encontramos que

$$\tau \approx \tau_N. \quad (3.41)$$

O regime de magnetização para suspensões cujo tempo de relaxação é dominado pelo tempo de Neel é chamado de superparamagnetismo intrínseco. Neste caso, o estado de magnetização é sempre expresso pela configuração de equilíbrio, tal que a magnetização do fluido é sempre alinhada ao campo magnético externo (ROSENSWEIG, 1997; SHLIOMIS, 2002).

Em suspensões cujo diâmetro médio das partículas é maior do que o diâmetro de Shliomis ($d > d_c$), encontramos que o tempo de Néel é muito maior do que o tempo de relaxação browniana $\tau_n > \tau_B$. Logo, o tempo de relaxação magnética da suspensão pode ser aproximado pela expressão

$$\tau \approx \tau_B. \quad (3.42)$$

Neste caso, o processo de magnetização do ferrofluido passa a depender também do tempo característico do escoamento, e é chamado de superparamagnetismo extrínseco. Se o tempo característico do escoamento for muito maior do que o tempo de relaxação browniano, o processo de magnetização torna-se independente do escoamento, e passa a ser descrito pela teoria de Langevin. Em escoamentos cujo tempo característico t_e é da mesma ordem do tempo de relaxação browniana, a teoria de Langevin perde sua validade, e é necessário um outro modelo para descrição do processo de magnetização.

3.3.2 Magnetização de não equilíbrio: um modelo evolutivo.

Como vimos na secção anterior, a teoria paramagnética de Lanvegin deixa de ser válida quando o tempo característico do escoamento é da mesma ordem do que o tempo de relaxação browniano, pois neste caso, escoamento e magnetização tornam-se processos interdependentes. A natureza do acoplamento do processo de magnetização com a hidrodinâmica tem origem no movimento rotacional relativo das partículas com o fluido base. Macroscopicamente, o processo de magnetização do fluido passa a ser função de duas quantidades: o campo magnético \mathbf{H} , e a vorticidade do escoamento $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$. A proposição de um modelo físico para a dinâmica da magnetização ainda consiste em um dos principais problemas em aberto dentro do escopo da ferrohidrodinâmica. O primeiro

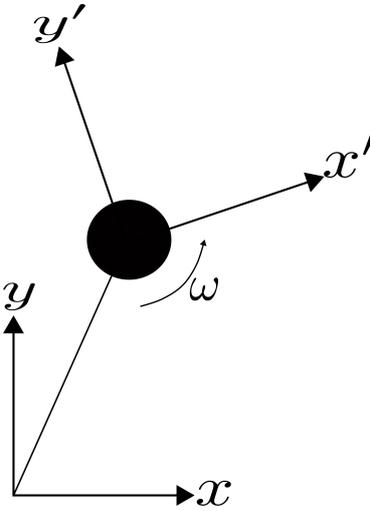


Figura 10: Representação gráfica da mudança entre um referencial fixo na partícula com velocidade angular ω para um referencial fixo no espaço com velocidade angular $\omega = 0$.

modelo teórico a levar em consideração os efeitos do escoamento sobre a magnetização dos ferrofluidos foi proposto por Hall e Busenberg (1969) com o objetivo de explicar fisicamente o aumento da viscosidade efetiva do ferrofluido na presença de um campo magnético. Entretanto, os resultados previstos por este modelo não concordavam com os dados experimentais obtidos por McTague (1969), Rosensweig, Kaiser e Miskolczy (1969), principalmente em situações de fraca magnetização. Posteriormente, Shliomis (1971) propõe um segundo modelo para magnetização, baseado em uma generalização da equação de relaxação de Debye (1929). Neste caso, a equação da magnetização assume a seguinte forma

$$\frac{D'\mathbf{M}}{Dt} = -\frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0), \quad (3.43)$$

onde τ_B representa o tempo de relaxação Browniano e \mathbf{M}_0 denota a magnetização de equilíbrio dada pela equação. O termo $\frac{D'}{Dt}$ representa a derivada material da magnetização em relação a um referencial que rotaciona junto a partícula, ou seja, cuja velocidade angular relativa é $\boldsymbol{\omega}_p' = 0$, como mostra a Figura 3.3.2. Passando de um referencial móvel

para um referencial fixo, expressamos a derivada material na seguinte forma

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{M} + \frac{D'\mathbf{M}}{Dt}, \quad (3.44)$$

tal que $\boldsymbol{\omega}_p$ é a velocidade angular da partícula vista de um observador fixo. Substituindo a equação 3.46 em 3.45, encontramos que

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0). \quad (3.45)$$

A equação 3.47 mostra explicitamente o acoplamento entre o movimento rotacional médio das partículas com o processo de magnetização do ferrofluido, mas ainda não deixa claro como o processo depende do escoamento. Em termos médios, Rosensweig (2004) mostra que a velocidade angular das partículas suspensas é expressa pela seguinte equação

$$I \frac{D\boldsymbol{\omega}_p}{Dt} = \mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + 6\eta\phi \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{2} - \boldsymbol{\omega}_p \right) \quad (3.46)$$

em que I representa o momento de inércia das partículas magnéticas, η' a viscosidade de 'spin' e ϕ a fração volumétrica de partículas na suspensão. O tempo característico para que a rotação das partículas atinja um regime estacionário é dado pela fórmula,

$$\tau_s = \frac{I}{6\phi\eta}. \quad (3.47)$$

De acordo com (SHLIOMIS, 2002), em suspensões diluídas cuja viscosidade do fluido base é da ordem de $\eta \sim 10^{-3} Pa \cdot s$ e diâmetro médio $d_m \sim 10nm$, o tempo característico para que as partículas atinjam um regime estacionário de rotação é da ordem $\tau_s \sim 10^{-11}s$. Neste sentido, dentro das escalas de tempo tanto do escoamento quanto da magnetização, podemos assumir que o movimento de rotação das partículas é sempre estacionário. Logo, a equação 3.48 assume a seguinte forma simplificada

$$6\eta\phi \left(\boldsymbol{\omega}_p - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \right) = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (3.48)$$

A equação 3.50 revela um física bastante interessante, e explica como o movimento rotacional das partículas em relação ao fluido base é afetado pelos torques magnéticos. Na ausência de campos magnéticos, ou mesmo se tratando de um regime de magnetização superparamagnético, temos um torque magnético nulo $\mathbf{M} \times \mathbf{H} = 0$. Logo, a equação 3.50 se reduz a

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}. \quad (3.49)$$

O termo $\frac{\boldsymbol{\xi}}{2} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$ é definido como a velocidade angular média do fluido, e neste caso, as partículas suspensas rotacionam na mesma velocidade do fluido. Quando o torque magnético passa a assumir valores não nulos, vemos que a velocidade relativa entre as partículas e o fluido base passa a ser diferente de zero. No caso limite, em que $\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} = 3\eta\phi\boldsymbol{\xi}$, encontramos que

$$\boldsymbol{\omega}_p = 0, \quad (3.50)$$

logo, quando existe um balanço entre o arrasto viscoso sobre cada partícula e os torques magnéticos, as partículas passam a se deslocar sem o movimento de rotação. Veremos mais adiante que estes efeitos magnéticos sobre a rotação das partículas constituem a origem do aumento da viscosidade aparente do fluido.

Segundo a equação 3.50, a velocidade angular média das partículas é expressa pela soma entre a velocidade angular média do escoamento e os torques magnéticos atuantes, ou seja

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{\mu_0}{6\eta\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}. \quad (3.51)$$

Substituindo a expressão 3.53 para o movimento angular médio das partículas na equação 3.47, determinamos uma fórmula para a magnetização do ferrofluido em que os efeitos do escoamento aparecem explicitamente

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \times \mathbf{M} - \frac{\mu_0}{6\eta\phi} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0). \quad (3.52)$$

A equação 3.54 é a mais utilizada em trabalhos referentes ao estudo da reologia das suspensões magnéticas. A utilização de outras equações para a magnetização fora do equilíbrio estão em discussão dentro da comunidade científica. Neste caso, são discutidos outros modelos teóricos que sejam válidos em situações mais gerais, como no caso de suspensões concentradas ou até mesmo para situações onde o tempo característico do escoamento é maior do que o tempo característico de magnetização (FELDERHOF, 2000; SHLIOMIS, 2002; ODENBACH; THURM, 2002). Estes assuntos estão fora do escopo deste trabalho, portanto, recomendamos ao leitor interessado que leia as referências aqui citadas.

3.4 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell e juntamente com a força de Lorentz e Kelvin formam as bases para o estudo do electromagnetismo. Elas descrevem como campos elétricos e magnéticos estão conectados entre si e como estes interagem com a matéria. A seguir, discutiremos duas das equações de Maxwell relativas ao magnetismo: a lei de Gauss e a lei de Ampère-Maxwell. Veremos também como as equações de Maxwell são fundamentais para a modelagem dos campos magnéticos no limite magnetostático da ferrohodinâmica e de suas respectivas condições de contorno.

3.4.1 A lei de Gauss do magnetismo

A lei de Gauss do magnetismo pode ser expressa em duas formas distintas, uma integral e outra diferencial. Na forma integral, ela é expressa por

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (3.53)$$

enquanto que, na forma diferencial, a lei de Gauss é escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.54)$$

A passagem da formulação integral mostrada na equação 3.55 para sua forma diferencial dada na equação 3.56 é feita a partir do uso dos teoremas da divergência e da localização.

Fisicamente, a lei de Gauss do magnetismo afirma a não existência de cargas magnéticas isoladas, também chamadas de mono polos magnéticos. Ao contrario de seus análogos elétricos, o campo magnético produzido por materiais se origina de uma configuração chamada dipolo. Os dipolos magnéticos podem ser representados como correntes fechadas, mas, que possuem uma certa semelhança com cargas positivas e negativas infinitesimalmente próximas. Em termos de linhas de campo, a lei de Gauss implica que as linhas de campo magnético são sempre fechadas, ou se estendem até o infinito. De forma equivalente, podemos dizer que a lei de Gauss afirma que o fluxo total do campo magnético através de uma superfície gaussiana é sempre zero, ou, que o campo magnético é sempre solenoidal.

3.4.2 Lei de Ampère-Maxwell

A lei de Ampère-Maxwell determina que um campo magnético pode ser produzido de duas formas distintas: por uma corrente elétrica (como foi primeiramente descrito por Ampère), ou pela variação do campo elétrico no tempo (contribuição de Maxwell). Esta última contribuição é de extrema importância para a teoria eletromagnética, pois torna a lei consistente para situações onde os campos elétricos e magnéticos não estão em regime estacionário, sem que seja necessário alterar as demais leis do electromagnetismo. Outro aspecto importante da contribuição de Maxwell, é sua capacidade de explicar a propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo a partir da indução de campos elétricos por variações do campo magnético, e vice-versa. Assim como a lei de Gauss, a lei de Ampère-Maxwell também pode ser escrita tanto em sua forma integral quanto em sua forma diferencial. Neste contexto, a equação de Ampère-Maxwell na sua forma integra é escrita como

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.55)$$

tal que o termo \mathbf{J}_f representa o fluxo de corrente elétrica livre e \mathbf{D} o campo de deslocamento de cargas elétricas do meio. O elemento $d\mathbf{l}$ representa o vetor tangente à curva fechada C , $d\mathbf{S}$ o elemento de área cuja orientação é normal a superfície gaussiana S e $\frac{d}{dt}$ a derivada ordinária em relação ao tempo. Na forma diferencial, a equação de Ampère-Maxwell é escrita como

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.56)$$

tal que o termo $\frac{\partial}{\partial t}$ representa a derivada parcial quanto ao tempo.

Apesar da importante contribuição de Maxwell, não estamos aqui interessados em estudar a interação entre campos elétricos e magnéticos, de maneira que consideramos

para todos os fins, um campo de deslocamento elétrico nulo $\mathbf{D} = 0$. Também consideramos um fluxo de corrente nula tal que $\mathbf{J}_f = 0$. Desta forma, entramos em um caso especial para a equação de Ampère-Maxwell chamado de regime magnetostático. Neste caso, a equação de Ampère-Maxwell se resume a

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (3.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (3.58)$$

nas formas integrais e diferenciais. A forma diferencial da equação de Ampère-Maxwell nos mostra que o campo magnético \mathbf{H} é irrotacional no limite magnetostático. Neste caso, podemos representar o campo magnético a partir do gradiente de um potencial escalar, ou seja,

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \quad (3.59)$$

tal que ϕ_m é chamado de potencial magnético escalar. A partir da definição do campo de indução magnética \mathbf{B} , dado pela equação 3.11, podemos reescrever a lei de Gauss do magnetismo na seguinte forma,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (3.60)$$

Substituindo a equação 3.61, que relaciona o campo magnético com o seu potencial escalar, na lei de Gauss do magnetismo, dada pela equação 3.62, encontramos que

$$\nabla^2\phi_m = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (3.61)$$

Ou seja, mostramos que o potencial magnético ϕ_m é solução da equação de Poisson. No entanto, para calcularmos o potencial magnético através da equação 3.63 precisamos determinar condições de contorno compatíveis. Veremos na próxima seção como a formulação integral das equações de Gauss e Ampère-Maxwell nos dão informações importantes para determinação das condições de contorno eletromagnéticas necessárias para o fechamento do problema.

3.4.3 Condições de Contorno magnéticas

As equações de Maxwell também nos fornecem as condições nas quais os campos elétricos e magnéticos devem satisfazer na interface entre dois materiais com propriedades elétricas e magnéticas distintas. Desta forma as equações de Maxwell também ditam as condições de contorno necessárias para determinação tanto do campo de indução magnética \mathbf{B} , quanto para o campo magnético \mathbf{H} .

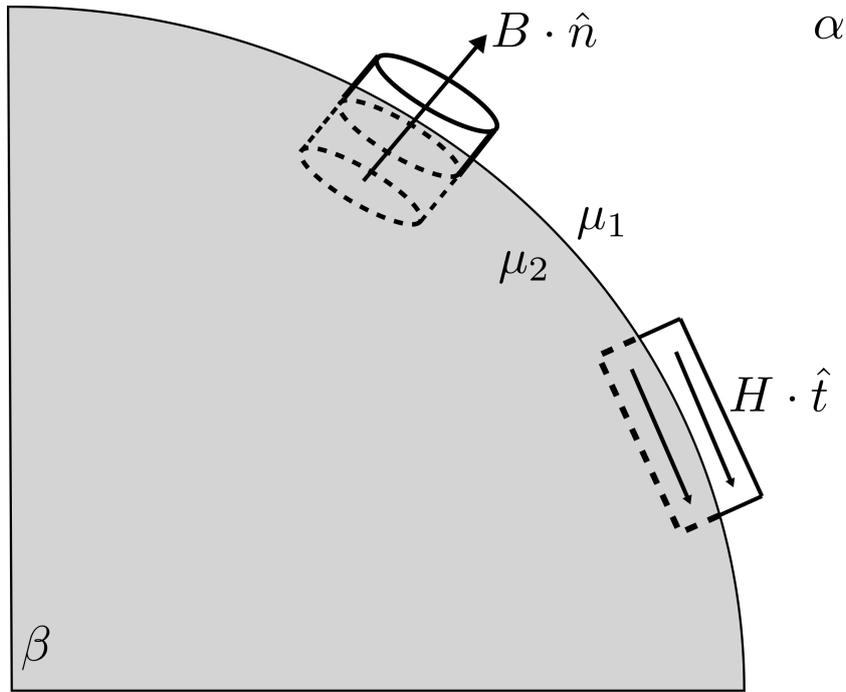


Figura 11: Representação gráfica da interface entre dois materiais com diferentes propriedades magnéticas.

3.4.3.1 Condição de contorno para indução magnética \mathbf{B}

Primeiramente determinaremos a condição de contorno relativa ao campo de indução magnética \mathbf{B} . Para isto, consideramos um elemento de volume δV cilíndrico, tal como mostrado pela figura 11. Mais especificamente, consideramos que a altura h do elemento cilíndrico normal a interface é menor do que as demais dimensões do elemento de volume δV . Pela lei de Gauss do magnetismo temos que o fluxo líquido de linhas de campo de indução magnética através de uma superfície gaussiana é zero, ou como mostrado pela equação 3.11

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (3.62)$$

No limite em que $h \rightarrow 0$, o fluxo de linhas de indução magnética pelas laterais do elemento de volume tornam-se nulas, de forma que a equação 3.64 assume a seguinte forma

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (3.63)$$

onde \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 correspondem ao campo de indução magnética em diferentes materiais. Denotando a projeção do vetor de indução magnética na direção do vetor unitário normal a interface $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}$ como B^n , reescrevemos a equação 3.65 como

$$B_1^n = B_2^n. \quad (3.64)$$

Em termos físicos, as equações 3.65 e 3.66 simplesmente garantem que o fluxo total de indução é contínuo através da interface entre dois materiais. Ambas as equações 3.65 e 3.66 podem ser escritas em termos dos campos magnético \mathbf{H} e de magnetização \mathbf{M} . Substituindo a definição do campo de indução magnética, dado pela equação 3.11, determinamos

que

$$H_1^n + M_1^n = H_2^n + M_2^n. \quad (3.65)$$

A equação 3.67 é extremamente conveniente no contexto do estudo da ferrohodinâmica, pois as quantidades eletromagnéticas de interesse são exatamente o campo magnético e o campo de magnetização. Veremos mais tarde, quando tratarmos do campo de desmagnetização, que esta formulação nos permite determinar uma condição de contorno explícita para o campo de magnetização, informação fundamental para o fechamento do modelo evolutivo para magnetização.

3.4.3.2 Condição de contorno para o campo magnético \mathbf{H}

O comportamento das componentes tangenciais do campo magnético na interface entre dois materiais pode ser determinado a partir da análise de um caminho fechado, como mostrado na figura 11, cujo maior comprimento esta paralelo a interface em ambos os lados. No limite magnetostático, a lei de Ampère-Maxwell em sua forma integral é dada por

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (3.66)$$

Se aplicarmos a equação 3.68 ao caminho indicado pela figura 11, encontramos que

$$\mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} + \mathcal{O}(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{h}) = 0. \quad (3.67)$$

No limite em que $d\mathbf{h} \rightarrow 0$, os termos de ordem $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{h}$ tornam-se nulos, e obtemos a seguinte relação para o campo magnético na interface

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0. \quad (3.68)$$

em que $\hat{\mathbf{t}}$ representa o vetor unitário tangente a interface. Denotando a componente do campo magnético tangente a interface como H^n , reescrevemos a equação 3.70 como

$$H_1^n = H_2^n \quad (3.69)$$

Neste caso, a interpretação física da equação 3.70 é de que a componente tangencial do campo magnético \mathbf{H} é contínua através da interface entre dois materiais com propriedades magnéticas distintas.

3.4.4 O campo de desmagnetização e seus efeitos sobre as condições de contorno magnéticas

Dado um material magnético na presença de um campo \mathbf{H} , vemos que a indução magnética interna ao material é afetada em função do processo de magnetização. Em materiais magnéticos de tamanho finito, a geração de polos magnéticos próximos a suas fronteiras produzem um campo magnético que se opõe ao campo magnético externo. Chamamos este campo magnético de campo de desmagnetização.

3.4.4.1 Definição e propriedades do campo de desmagnetização

De acordo com Coey (2010), o campo magnético \mathbf{H}_i interno a um material magnético é expresso pela superposição do campo magnético externo \mathbf{H}^e e o campo de desmagnetização \mathbf{H}_d produzido pela geração de dipolos próximos a interface do material. Em termos matemáticos, expressamos o campo magnético interno \mathbf{H}_i como

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_d. \quad (3.70)$$

Para que o campo magnético interno \mathbf{H}_i tenha significado físico, é necessário que este satisfaça as leis de Gauss do magnetismo e de Ampère-Maxwell. Ou seja, \mathbf{H}_i deve satisfazer as equações

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_i = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (3.71)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_i = 0. \quad (3.72)$$

O campo magnético externo é produzido por correntes ou imãs permanentes, e sua determinação é feita levando em consideração as propriedades magnéticas do vácuo. Desta forma, o campo magnético externo satisfaz automaticamente a condições de irrotacionalidade

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = 0, \quad (3.73)$$

e de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_e = 0. \quad (3.74)$$

Substituindo a definição do campo magnético interno \mathbf{H}_i , dado pela equação 3.72, nas equações 3.73 e 3.74, encontramos que

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_e + \nabla \cdot \mathbf{H}_d = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (3.75)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_e + \nabla \times \mathbf{H}_d = 0. \quad (3.76)$$

Utilizando as equações 3.75 e 3.76, mostramos que o campo de desmagnetização é irrotacional, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{H}_d = 0. \quad (3.77)$$

Consequentemente, o campo de desmagnetização também pode ser escrito como o gradiente de um campo potencial escalar,

$$\mathbf{H}_d = -\nabla\phi_d. \quad (3.78)$$

Por fim, utilizamos os resultados das equações 3.76 e 3.80 e mostramos que o campo de desmagnetização é solução da equação de Poisson, que assume a seguinte forma

$$\nabla^2\phi_d = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (3.79)$$

Para determinarmos o potencial escalar de desmagnetização ϕ_d , precisamos prescrever condições de contorno adequadas a física no qual o problema esta inserido. Na próxima secção, mostramos como podemos encontrar tais condições de contorno a partir das expressões gerais discutidas na secção 3.4.3.2.

3.4.4.2 Condições de contorno para o campo de desmagnetização

A determinação das condições de contorno para o potencial escalar de desmagnetização tem como ponto de partida as expressões 3.67 e 3.71, que determinam a continuidade da componente normal para o campo de indução e a continuidade da componente tangencial para o campo magnético sobre a interface entre dois materiais com propriedades magnéticas distintas.

Utilizando a mesma notação utilizada nas expressões 3.67 e 3.71 para descrição das componentes normais e tangenciais dos vetores de indução magnética e campo magnético, encontramos a partir da definição do campo magnético interno \mathbf{H}_i a seguinte relação para as componentes normais de indução magnética e para componente tangencial do campo magnético

$$H_i^n + M_i^n = H_e^n, \quad (3.80)$$

$$H_i^t = H_e^t. \quad (3.81)$$

Lembrando que o campo magnético interno \mathbf{H}_i é dado pela superposição entre o campo magnético externo \mathbf{H}_e e o campo de desmagnetização \mathbf{H}_d , como mostra a equação 3.72, encontramos as seguintes condições de contorno

$$M_i^n = H_d^n, \quad (3.82)$$

$$H_d^t = 0. \quad (3.83)$$

A equação 3.85 nos mostra a importância do campo de desmagnetização para o fechamento do modelo evolutivo da magnetização, pois fornece de forma explícita a dependência entre a componente normal do campo de magnetização e desmagnetização. A condição expressa pela equação 3.85 também é de extrema importância, pois garante a solução da equação de Poisson para o campo potencial escalar da equação 3.81. Além disso, podemos determinar uma condição explícita para o campo potencial escalar de desmagnetização ϕ_d a partir da equação 3.85. A partir da equação 3.80 e da definição de derivada direcional (COURANT, 2011), temos que

$$H_d^t = -\nabla\phi_d \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0. \quad (3.84)$$

Levando em conta que a equação 3.86 deve ser satisfeita em todos os pontos da interface entre os dois materiais, concluímos que o potencial de desmagnetização ϕ_d deve ser uma constante κ na interface.

Em alguns casos, podemos simplificar a modelagem física das propriedades magnéticas dos materiais desprezando o campo de desmagnetização. Neste contexto, a hipótese utilizada é de que o campo magnético externo é muito maior em módulo do que o campo de desmagnetização $|\mathbf{H}_e| \gg |\mathbf{H}_d|$, de forma que

$$\mathbf{H}_i \approx \mathbf{H}_e. \quad (3.85)$$

Tal aproximação é convencionalmente utilizada na solução de problemas que envolvem materiais magnéticos, e especialmente em problemas relacionados a ferrohodinâmica (NEURINGER; ROSENSWEIG, 1964; CUNHA; SOBRAL, 2005; ASHOURI et al., 2010; ROSA; GONTIJO; CUNHA, 2016). Entretanto, na maioria dos casos tal hipótese é feita de forma ad-hoc, sem que haja um argumento físico para tal simplificação. Este ponto, relativo ao tratamento cuidadoso das hipóteses relativas ao campo de desmagnetização, foi discutido por Henjes (1995) no contexto da solução do campo de magnetização na presença de vorticidade.

Um argumento físico para validar a hipótese 3.87 pode ser feito com base no divergente do campo de magnetização (SOBRAL, 2017). Mais especificamente, em situações cujo divergente do campo de magnetização é pequeno $\nabla \cdot \mathbf{M} \approx 0$, temos que a equação 3.81 se reduz a

$$\nabla^2 \phi_d \approx 0. \quad (3.86)$$

Juntamente, com o fato de que $\phi_d = \kappa$ na interface, concluímos que $\phi_d \approx \kappa$ sobre todo o domínio, e portanto que $\mathbf{H}_d \approx 0$. A hipótese 3.87 também trás consequências para a condição de contorno de magnetização, que de acordo com a equação 3.84 assume a seguinte forma

$$M_i^n \approx 0. \quad (3.87)$$

3.5 Dinâmica dos fluidos magnéticos

3.5.1 Leis de Conservação

A seguir, apresentamos de maneira breve as leis de conservação fundamentais da mecânica dos meios contínuos: a lei de conservação da massa, momento linear e momento angular. Caso o leitor se interesse em buscar derivações completas para cada uma das leis de conservação aqui citadas, sugerimos os livros de Truesdell (1992), Barenblatt (2014).

3.5.1.1 Conservação da massa

A conservação da massa de um fluido implica na seguinte relação local entre o campo de velocidade \mathbf{u} e a densidade do fluido

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.88)$$

Um fluido é dito incompressível se sua densidade for constante. Neste caso, o lado direito da equação 3.90 torna-se identicamente nulo, e encontramos a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.89)$$

3.5.1.2 Conservação de momento linear e angular

Dentro da mecânica dos meios contínuos, a segunda lei de Newton é generalizada a partir da equação de Cauchy que é expressa na seguinte forma

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}' \quad (3.90)$$

onde o $\frac{D}{Dt}$ é a derivada material, e é escrita como

$$\frac{D*}{Dt} = \frac{\partial*}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla * . \quad (3.91)$$

O termo $\boldsymbol{\Sigma}'$ representa o tensor de tensões do fluido, e fisicamente expressa a força interna por unidade de área em um dado ponto material \mathbf{x} em um dado instante t . Já o termo \mathbf{f} representa a força externa por unidade de volume que age sobre um elemento de fluido. De maneira geral, temos que o termo \mathbf{f} é dado pela força gravitacional

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} \quad (3.92)$$

tal que \mathbf{g} representa a aceleração gravitacional. Veremos mais adiante que o termo \mathbf{f} possui uma contribuição magnética no caso de ferrofluidos sujeitos a gradientes de campo magnético. Podemos simplificar a equação 3.92 a partir de uma modificação do tensor de tensões $\boldsymbol{\Sigma}'$ da forma

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}' - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \mathbf{I}. \quad (3.93)$$

Assim, a equação de Cauchy se reduz a

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}. \quad (3.94)$$

A equação 3.96 é também conhecida como a primeira equação de Cauchy (CAUCHY, 1827), e de maneira geral, não é suficiente para especificarmos um sistema físico isoladamente. Neste contexto, também precisamos de uma equação constitutiva para $\boldsymbol{\Sigma}$ para descrição do comportamento mecânico do material em questão (BARENBLATT, 2014). No caso de um fluido newtoniano incompressível, o tensor de tensões $\boldsymbol{\Sigma}^n$ é definido a partir de uma relação linear entre o tensor taxa de deformação $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$, de forma que

$$\boldsymbol{\Sigma}^n = -p \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{E}. \quad (3.95)$$

Neste caso, denotamos p como a pressão mecânica do fluido, η a viscosidade dinâmica, e \mathbf{I} o tensor identidade.

A última lei de conservação a ser discutida se refere a conservação de momento angular. Em termos gerais, podemos expressar o balanço local de momento angular em um fluido a partir da seguinte relação

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{t}_i \quad (3.96)$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ denota o tensor de terceira ordem de Levi-Civita, e \mathbf{t}_i o torque por unidade de volume agindo sobre o volume material (GONZALEZ; STUART, 2008). No caso de

um fluido newtoniano em específico, temos que a densidade de torques por unidade de volume é identicamente nula de forma que $\mathbf{t}_i = 0$. Desta forma, a expressão 3.98 assume a seguinte forma em que

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Sigma}^n = 0, \quad (3.97)$$

também conhecida como segunda equação de Cauchy (CAUCHY, 1827). Fisicamente, a equação 3.99 expressa a condição necessária de simetria do tensor de tensões do fluido $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^T$. Entretanto, veremos adiante que, no caso de um fluido magnético, a densidade de torques por unidade de volume não é necessariamente nula, de forma que o tensor de tensões perde sua propriedade de simetria.

3.5.2 Tensor de tensões para suspensões magnéticas

A determinação de uma equação constitutiva para o tensor de tensões de uma suspensão magnética consiste em um passo fundamental para o fechamento do sistema de equações que modelam o comportamento dos ferrofluidos. Entretanto, passados mais de 50 anos desde a publicação do artigo pioneiro Ferrohydrodynamics de Neuringer e Rosensweig (1964), este continua a ser como um problema em aberto. Neste sentido, apresentamos duas formulações importantes do tensor de tensões de um ferrofluido, juntamente com as interpretações físicas de cada um dos modelos propostos.

O primeiro modelo constitutivo para o tensor de tensões de um ferrofluido foi proposto por Neuringer e Rosensweig (1964). Neste contexto, o tensor de tensões é dividido em suas componentes: uma newtoniana $\boldsymbol{\Sigma}^n$ dada pela equação 3.97, e uma magnética $\boldsymbol{\Sigma}^m$, de forma que

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^n + \boldsymbol{\Sigma}^m. \quad (3.98)$$

Esta formulação tem origem no teorema de Brown, que define a seguinte forma para o tensor de tensões magnético no vácuo (JEFFREYS; JEFFREYS, 1999)

$$\boldsymbol{\Sigma}^m = -\mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H}. \quad (3.99)$$

Lembrando que no vácuo o temos que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, os Neuringer e Rosensweig (1964) propõe que

$$\boldsymbol{\Sigma}^m = -\mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{H}. \quad (3.100)$$

Esta proposição busca introduzir a contribuição magnética, expressa pela força de Kelvin, dentro da equação de balanço de momento linear, de maneira que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}^m = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (3.101)$$

Após a descoberta do efeito magnetoviscoso por McTague (1969) e Rosensweig, Kaiser e Miskolczy (1969), nota-se a necessidade da proposição de um novo modelo para o tensor de tensões, uma vez que o modelo descrito pela equação 3.102 não é capaz de capturar o novo fenômeno observado.

Um segundo modelo para o tensor de tensões foi proposto por Shliomis (1971), com o objetivo de recuperar teoricamente o efeito magneto viscoso. Neste contexto, Shliomis (1971) propõe que o tensor de tensões magnético pode ser expresso da seguinte forma

$$\Sigma^m = -\mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{B} + 3\phi\eta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{\omega}_p - \boldsymbol{\omega}), \quad (3.102)$$

onde $\boldsymbol{\omega}_p$ denota a velocidade angular média das partículas, $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$ a velocidade angular local do fluido, ϕ a fração volumétrica de partículas, e η a viscosidade dinâmica do fluido. Substituindo a equação 3.50 na equação 3.104, encontramos, após utilizarmos da propriedade do vetor dual, que o tensor de tensões magnético pode ser expresso como

$$\Sigma^m = -\mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \mathbf{I} + \mathbf{H}\mathbf{B} + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{M}). \quad (3.103)$$

Ao tirar o divergente da equação 3.105, encontramos que

$$\nabla \cdot \Sigma^m = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (3.104)$$

Desta forma, vemos que o modelo descrito pela equação 3.104 leva ao surgimento tanto da força de Kelvin, quanto dos torques internos associados ao efeito magnetoviscoso. Notamos também que no caso em que a magnetização do fluido é colinear ao campo magnético, tal que $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$, temos que o torque magnético interno torna-se identicamente nulo $\mathbf{M} \times \mathbf{H} = 0$, e conseqüentemente, recuperamos o resultado do modelo anterior, dado pela equação 3.103. Ao substituírmos a equação 3.106 na equação 3.96, encontramos que o movimento de um fluido magnético pode ser descrito como

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{\mu_0}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (3.105)$$

Para fins de modelagem, os modelos constitutivos dados pelas equações 3.102 e 3.105, são suficientes para os objetivos deste trabalho. Entretanto, gostaríamos de enfatizar que a proposição de modelos constitutivos dentro da ferrodinâmica ainda é um assunto altamente discutido (RINALDI; BRENNER, 2002; RINALDI; ZAHN, 2002; FINLAYSON, 2013).

3.5.3 Efeito magneto-viscoso

Apesar de um ferrofluido permanecer no estado líquido mesmo quando magnetizado até seu estado de saturação, sua reologia pode ser alterada quando um campo magnético esta presente. Neste caso, vemos um aumento da dissipação de momento linear em função da presenças de torques magnéticos sobre as partículas, como mostra a figura 12, que induzem uma diferença entre a velocidade angular média da fase particulada e do fluido, e conseqüentemente um aumento da dissipação de momento angular.

Na ausência de um campo magnético um ferrofluido se comporta como uma suspensão coloidal não magnética cuja a viscosidade das é fortemente dependente da fração

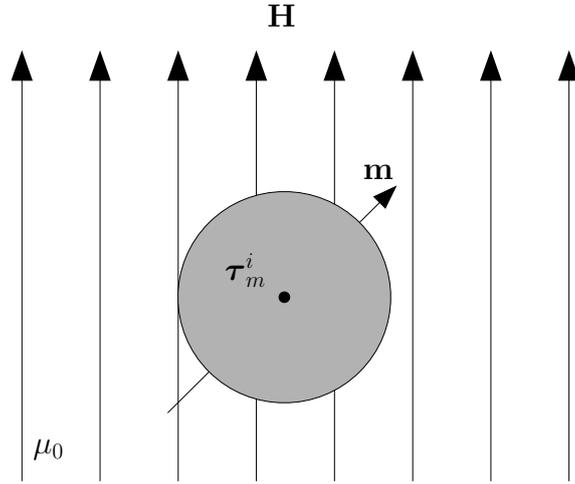


Figura 12: Partícula ferromagnética escoando na presença de um campo magnético uniforme (ALEGRETTO, 2017).

volumétrica de partículas ϕ suspensas pelo fluido base. Para suspensões coloidais diluídas ($\phi \ll 1$), ou seja, com baixas frações volumétricas, temos que a viscosidade da suspensão coloidal é dada pela fórmula da viscosidade de Einstein

$$\frac{\eta}{\eta_0} = 1 + \frac{5}{2}\phi \quad (3.106)$$

em que η é a viscosidade da suspensão e η_0 representa a viscosidade do fluido base. Para suspensões com maiores frações volumétricas, uma correção é proposta por Rosensweig (1997) e é dada por

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{1 + a\phi + b\phi^2} \quad (3.107)$$

em que $a = -\frac{5}{2}$, $b = \frac{(\frac{5}{2}\phi_c - 1)}{\phi_c^2}$ e ϕ_c corresponde a concentração de empacotamento de partículas para a suspensão, sendo $\phi_c = 0.74$.

Na presença de um campo magnético aplicado, as partículas magnéticas tendem a se alinhar com a direção do campo magnético externo. Entretanto, o movimento de reorientação das partículas magnéticas é impedido devido ao arrasto viscoso do fluido base, causando uma defasagem entre a velocidade angular média das partículas e a velocidade angular média do fluido. A geração de gradientes de velocidade próximos as partículas aumenta a dissipação de energia mecânica e conseqüentemente levando a um aumento da viscosidade aparente do fluido. Para o caso de um escoamento em cisalhamento simples com campo magnético constante da forma $\mathbf{H} = H_0 \hat{\mathbf{e}}_y$, Rosensweig, Kaiser e Miskolczy (1969) mostra que

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{3}{2}\phi \frac{\alpha - \tanh(\alpha)}{\alpha + \tanh(\alpha)}. \quad (3.108)$$

4 Camada limite de um fluido magnético

4.1 Introdução

Na dinâmica dos fluidos, a camada limite se refere a região do escoamento próxima a uma parede na qual o fluido se adere, produzindo um efeito de competição entre os mecanismos de transporte convectivo e difusivo. A teoria da camada limite, introduzida por Prandtl (1905), mostra que o escoamento em alto número de Reynolds pode ser dividido em duas regiões distintas que interagem entre si: uma invíscida, onde aplica-se a teoria potencial, e outra região delgada, chamada de camada limite, caracterizada por intensos gradientes de velocidade, como mostrado na figura 13 Acheson (1990).

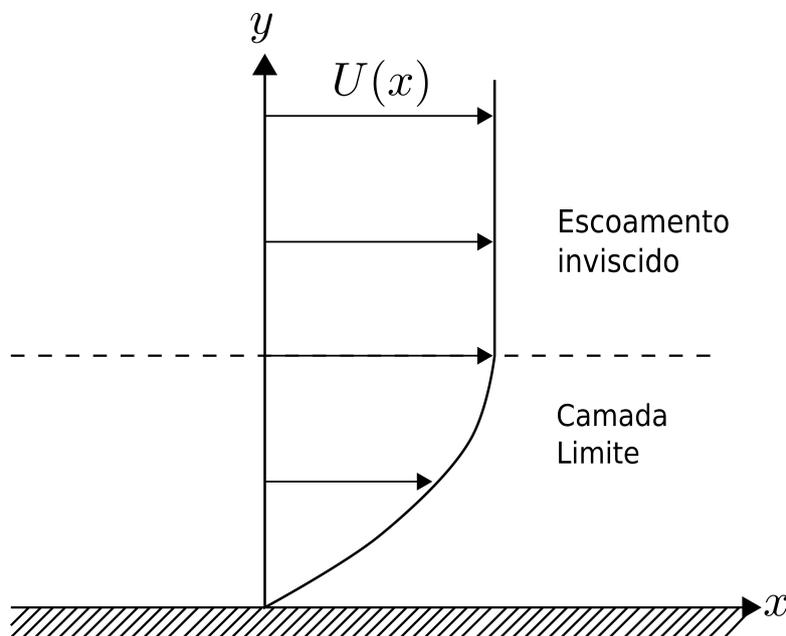


Figura 13: Desenho exemplificando a subdivisão do escoamento em alto número de Reynolds sobre uma parede. A região próxima a parede, denominada camada limite, é caracterizada pela condição de não escorregamento e pelos altos gradientes na direção y ; enquanto que a região mais afastada pode ser considerada invíscida.

O estudo da camada limite é extremamente importante dentro da mecânica dos

fluidos, tanto em questões teóricas quanto práticas. Em termos teóricos, os problemas de camada limite permitem o estudo de escoamentos não lineares a partir de um conjunto de equações simplificadas com caráter parabólico (ANDERSON; TANNEHILL; PLETCHER, 1984). Do ponto de vista matemático, a mudança de conjunto de equações elíptica para um conjunto de equações parabólicas garante a existência de soluções suaves para o problema, além de permitir o uso de técnicas analíticas de solução (SCHLICHTING et al., 1955; BARENBLATT, 2014). Além disso, a teoria da camada limite é de extrema importância para o estudo dos escoamentos turbulentos. Neste caso, o a anatomia da camada limite torna-se mais complexa e caracterizada por diferentes regiões, como mostra a figura 14. Na prática, a importância da camada limite reside no fato de que grande parte dos escoamentos encontrados em ambientes naturais e industriais serem caracterizados por um alto número de Reynolds (TENNEKES et al., 1972). De forma que, a camada limite esteja presente em um grande número de escoamentos de interesse, incluindo: escoamento ao redor de um aerofólio, movimento da atmosfera, convecção natural, entre outros (SCHLICHTING et al., 1955).

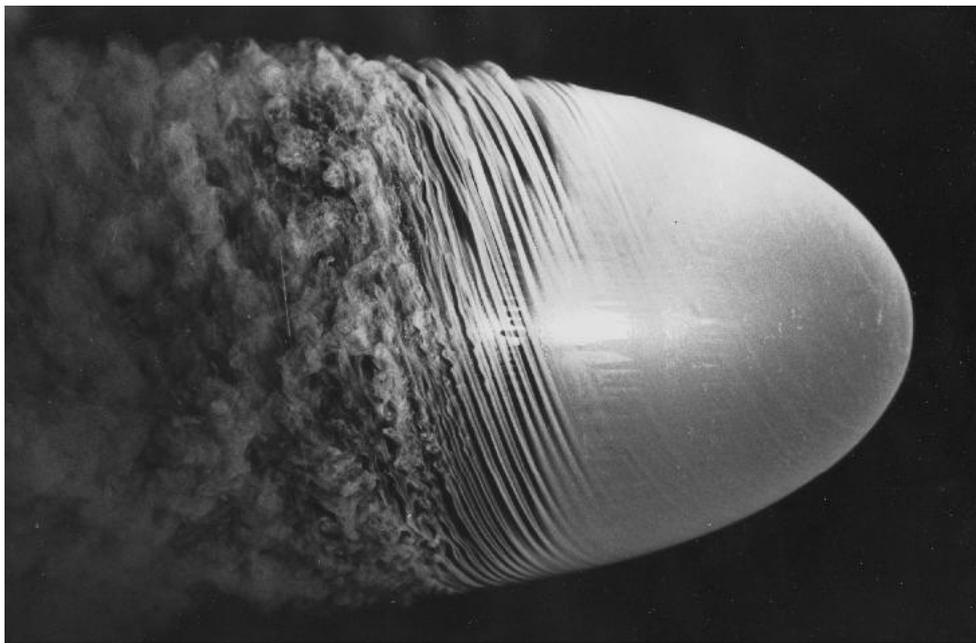


Figura 14: Escoamento em alto número de Reynolds ao redor de um corpo rombudo mostrando a transição entre os diferentes estágios da camada limite, desde o laminar até o turbulento (DYKE; DYKE, 1982)

Neste trabalho utilizamos o problema da camada limite laminar sobre placa plana para estudar a dinâmica dos ferrofluidos em problemas parabólicos. Especificamente, queremos entender melhor o comportamento tanto do fluido como do campo de magnetização na presença de efeitos não lineares produzidos pelos mecanismos de transporte convectivo, e de um campo de vorticidade não uniforme. Neste sentido, buscamos complementar trabalhos de (SHLIOMIS; MOROZOV, 1994), (CUNHA; SOBRAL, 2005), (ROSA; GONTIJO; CUNHA, 2016), (ALEGRETTI, 2017) a partir de um novo estudo de caso.

4.2 Modelagem Matemática

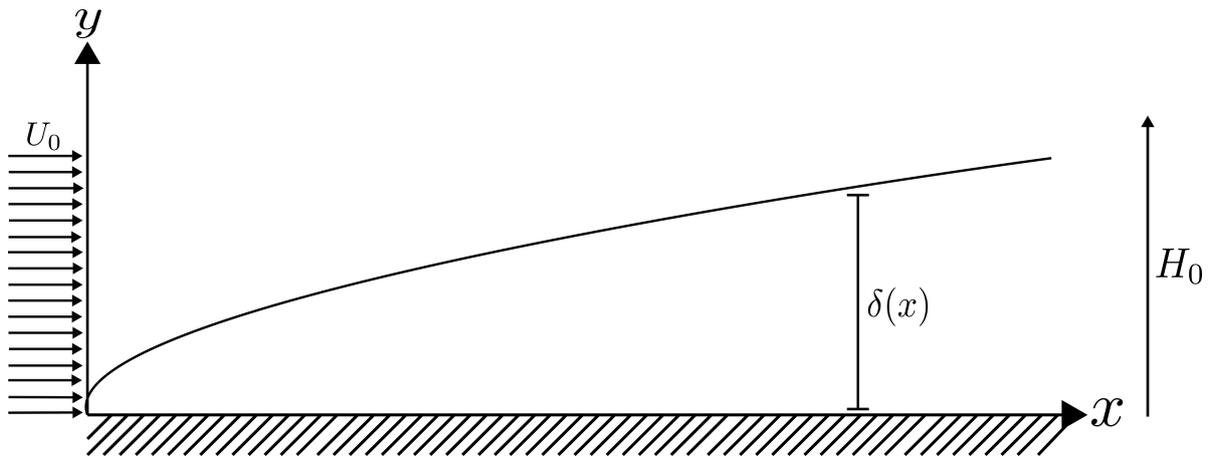


Figura 15: Desenho esquemático do problema da camada limite laminar sobre placa plana na presença de um campo magnético uniforme. As quantidades U , L , $\delta(x)$, e H_0 denotam os valores característicos da velocidade, comprimento da placa plana, espessura da camada limite e intensidade do campo magnético, respectivamente.

O objetivo desta secção é de modelar o problema da camada limite em termos matemáticos. Para isto, tomamos como ponto de partida a ideia de uma placa plana imersa em um escoamento uniforme, como mostrado pela figura 16. Para determinação do conjunto de equações governantes do problema, precisamos primeiro impor algumas hipóteses, a fim de simplificar o problema. Desta forma, assumimos as seguintes condições:

1. O escoamento do fluido é bidimensional, e está contido dentro do plano $x - y$ onde o eixo y é perpendicular a placa plana, como mostra a figura 15;
2. A pressão do fluido pode ser escrita em termos da pressão modificada, de maneira que os efeitos gravitacionais podem ser desprezados;
3. O escoamento é laminar em todo o domínio;
4. O fluido é incompressível;
5. A espessura da camada limite δ é muito menor do que o comprimento característico da placa plana L , tal que $\frac{\delta}{L} \ll 1$;
6. O escoamento se encontra em regime permanente;
7. O campo magnético é uniforme, e em módulo é muito maior do que o campo de desmagnetização $|\mathbf{H}| \gg |\mathbf{H}_d|$;
8. O processo de magnetização do ferrofluido é caracterizado pelo tempo de relaxação browniano τ_B ;

9. O tempo característico do movimento rotacional das partículas do ferrofluido é pequeno o suficiente de forma que o torque magnético é instantaneamente equilibrado com o torque viscoso sobre a partícula.

A partir das hipóteses 1 e 2, podemos reescrever a equação do movimento de ferrofluido 3.107 na seguinte forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu_0}{2\rho} H_0 \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu_0}{2\rho} H_0 \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (4.2)$$

tal que as variáveis u e v são as componentes horizontais e verticais do campo de velocidade ($\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x + v\hat{\mathbf{e}}_y$), e M_x a componente horizontal do campo de magnetização ($\mathbf{M} = M_x\hat{\mathbf{e}}_x + M_y\hat{\mathbf{e}}_y$). Neste caso, utilizamos da hipótese 2 para escrever a pressão modificada, a partir da expressão $p = p' + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$, tal que p' é a pressão do fluido e $\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ a projeção da aceleração gravitacional na direção do vetor posição \mathbf{x} . Note que a condição de campo magnético uniforme torna os termos relativos as forças de Kelvin $\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ identicamente nulos, assim, restam nas equações 4.1 e 4.2 somente as contribuições magnéticas relativas aos torques. A incompressibilidade do escoamento, dada pela hipótese 4, nos leva a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

Em termos de suas componentes, escrevemos a equação da magnetização da seguinte forma

$$u \frac{\partial M_x}{\partial x} + v \frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\xi}{2} M_y - \frac{\mu_0}{6\eta\phi} M_x M_y H_0 - \frac{1}{\tau_B} M_x \quad (4.4)$$

$$u \frac{\partial M_y}{\partial x} + v \frac{\partial M_y}{\partial y} = +\frac{\xi}{2} M_y + \frac{\mu_0}{6\eta\phi} M_x^2 H_0 - \frac{1}{\tau_B} (M_y - M_0) \quad (4.5)$$

Note que o termo de equilíbrio M_0 está presente somente na equação relativa a componente vertical da magnetização M_y . Isto decorre da direção do campo magnético $\mathbf{H} = H_0\hat{\mathbf{e}}_y$, que neste caso implica em $M_0 = M_0\hat{\mathbf{e}}_y$. O termo $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ representa a vorticidade, cuja direção é perpendicular ao plano do escoamento. Para o fechamento do modelo, assumimos as condições de escoamento uniforme fora da camada limite, não escorregamento e de impenetrabilidade sobre a placa plana

$$u(0, y) = U_0 \quad v(0, y) = 0; \quad (4.6)$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0; \quad (4.7)$$

$$u(x, \infty) = U_0 \quad v(x, \infty) = 0 \quad (4.8)$$

Ao assumirmos hipótese 7 em que a intensidade do campo magnético \mathbf{H} é muito maior do que a intensidade do campo de desmagnetização \mathbf{H}_d , temos que o campo de magnetização nas fronteiras do domínio deve satisfazer

$$\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (4.9)$$

Podemos explicitar a condição 4.9 em termos de M_x e M_y , neste caso, temos que

$$M_x(0, y) = 0, \quad (4.10)$$

$$M_y(x, 0) = 0. \quad (4.11)$$

4.3 Análise de escalas

Do ponto de vista matemático, o modelo apresentado na secção anterior está completo, no sentido de que as equações e as condições de contorno são suficientes para determinarmos uma solução. No entanto, o modelo apresentado anteriormente ainda não consiste no problema da camada limite propriamente dito, de maneira que ainda podemos impor mais algumas simplificações baseadas em argumentos de escala. A partir do uso da análise de escalas podemos estimar a ordem de grandeza de cada um dos mecanismos de transporte presentes nas equações do movimento, continuidade e magnetização. Com isto, podemos determinar quais termos são significativos para a solução do problema e quais podem ser desprezados, reduzindo ainda mais a complexidade do problema. Desta forma, além de simplificarmos o problema, ganhamos uma certa intuição acerca da física por trás do problema.

Nosso objetivo é de determinar a ordem de magnitude de cada um dos mecanismos presentes nas equações 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5. Para isto, iniciamos a análise de escalas atribuindo as variáveis x , y , e u e seus respectivos valores característicos

$$x \sim L \quad (4.12)$$

$$y \sim \delta \quad (4.13)$$

$$u \sim U_0 \quad (4.14)$$

A partir das escalas definidas para as quantidades conhecidas, queremos determinar as escalas das demais variáveis do nosso problema. Neste caso, buscamos determinar os valores típicos para a componente vertical de velocidade v , a vorticidade ξ e a componente horizontal de magnetização M_x . Iniciamos nossa análise com a equação

da continuidade 4.3, e substituindo os valores característicos conhecidos para u , x e y , encontramos a seguinte escala para v

$$\frac{U_0}{L} \sim \frac{v}{\delta}. \quad (4.15)$$

Consequentemente, temos que

$$v \sim \frac{\delta}{L} U_0. \quad (4.16)$$

A partir da hipótese 5, podemos concluir que dentro da camada limite a componente horizontal de velocidade é muito maior do que a componente vertical de forma que

$$\frac{v}{u} \sim \frac{\delta}{L} \ll 1. \quad (4.17)$$

Para determinarmos a escala típica da velocidade do escoamento, utilizamos de sua definição básica em que $\xi = \nabla \times \mathbf{u}$. Neste caso, encontramos que

$$\xi = \frac{\delta}{L^2} U_0 - \frac{U_0}{\delta} \quad (4.18)$$

A forma simplificada em que escrevemos a equação 4.17 decorre do fato de que o escoamento em questão é bidimensional, e portanto o vetor de vorticidade é sempre perpendicular ao plano $x - y$. Por fim, utilizamos da hipótese 9, que pode ser traduzida pelo balanço entre o torque viscoso e os torques magnéticos exercidos sobre as partículas suspensas. Expressamos essa relação pela equação

$$6\phi\eta \left(\boldsymbol{\omega}_p - \frac{\boldsymbol{\xi}}{2} \right) = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (4.19)$$

em que ϕ denota a fração volumétrica de partículas, η a viscosidade do fluido base, e $\boldsymbol{\omega}_p$ a velocidade angular média da fase particulada. Não sabemos a priori a escala típica para a velocidade angular média das partículas $\boldsymbol{\omega}_p$, no entanto, podemos determinar uma escala para M_x baseando-se nos valores máximos e mínimos para o torque magnético em termos de $\boldsymbol{\omega}_p$. Como vimos na seção 3.3.2, temos um torque magnético máximo no caso em que $\boldsymbol{\omega}_p = 0$, e um torque magnético nulo no caso em que $\boldsymbol{\omega}_p = \frac{\boldsymbol{\xi}}{2}$. Desta forma, escolhemos caracterizar o valor típico de M_x no caso em que os torques magnéticos atingem seu valor máximo. Substituindo $\boldsymbol{\omega}_p = 0$ e escrevendo a equação 4.18 no caso bidimensional em questão, encontramos que

$$3\phi\eta\xi \sim \mu_0 M_x H_0. \quad (4.20)$$

Portanto, podemos concluir que a componente horizontal da magnetização possui a seguinte escala

$$M_x \sim \frac{3\phi\eta}{\mu_0 H_0} \frac{U_0}{\delta}. \quad (4.21)$$

Determinadas as escalas, buscamos agora utilizá-las para simplificarmos as equações do movimento, de forma a encontramos as equações da camada limite. Aqui, utilizaremos de argumentos puramente heurísticos a partir das escalas determinadas. O procedimento formal para determinação das equações de camada limite pode ser encontrado em (SCHLICHTING et al., 1955; ACHESON, 1990; BATCHELOR, 2000).

Nesta primeira parte da análise, queremos determinar como as variáveis u e v variam ao longo do escoamento, ou sejam, queremos determinar como as componentes de velocidade variam em função das variáveis independentes x e y . A partir das escalas determinadas anteriormente, temos que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| / \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \sim \frac{L}{\delta} \gg 1, \quad (4.22)$$

ou seja, observamos que em função da hipótese 5, a componente de velocidade u varia de maneira muito mais rápida na direção ortogonal a parede y quando comparada com sua variação na direção paralela x . Notamos aqui que por uma simples substituição de u por v ou M_x podemos concluir o mesmo resultado para componente vertical de velocidade e para componente horizontal de magnetização. Analisando a ordem de grandeza dos gradientes de pressão, $\frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{\partial p}{\partial y}$, como termos isolados nas equações 4.1 e 4.2, observamos que

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{U_0^2}{L} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{U_0^2 \delta}{L^2} \quad (4.24)$$

Neste caso, também observamos que os ao contrário das demais variáveis u , v , e M_x , os gradientes de pressão são maiores na direção do escoamento quando comparado com a direção perpendicular a parede. Assim, em função das equações 4.23 e 4.24, podemos, em primeira ordem, desprezar a equação do movimento 4.2 e aproximar o campo de pressão p como uma função de x somente, de maneira que

$$p = p(x). \quad (4.25)$$

Consequentemente, terminamos com o seguinte sistema de equações para o movimento do fluido

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu_0}{2\rho} H_0 \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.27)$$

O fato de que $p = p(x)$ nos permite estabelecer uma expressão para $p(x)$ em função do escoamento externo a camada limite, uma vez que a pressão é constante em y . Neste problema em específico, consideramos um escoamento uniforme fora da camada limite $u = U_0$. Como o escoamento externo a camada limite pode ser modelado a partir da teoria potencial, temos que a pressão fora da camada limite deve satisfazer a equação de Bernoulli, de forma que

$$\frac{d}{dx} \left(p + \frac{U_0^2}{2} \right) = 0. \quad (4.28)$$

Ora, como definimos um regime de escoamento uniforme fora da camada limite, temos que o gradiente de pressão dentro da camada limite deve ser identicamente nulo, ou seja, $\frac{dp}{dx} = 0$. A ordem de grandeza dos termos difusivos podem ser determinadas utilizando o

mesmo procedimento usado anteriormente para análise dos gradientes de pressão. Neste caso, encontramos as seguintes ordens de grandeza para os termos difusivos nas direções horizontal e vertical respectivamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{U}{L^2} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{U}{\delta^2} \quad (4.30)$$

A partir das equações 4.27 e 4.28, podemos observar que em função da hipótese 5, a difusão de momento linear na direção paralela a placa plana é insignificante quando comparada com a difusão de momento na direção ortogonal. Desprezando o termo $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ da equação 4.24, encontramos finalmente a equação da camada limite

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\mu_0}{2\rho} H_0 \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (4.31)$$

Por fim, podemos estimar a espessura da camada limite pelo método do balanço dominante (BENDER; ORSZAG, 2013), onde impomos uma mesma ordem de grandeza para ambos os mecanismos de transporte e difusão de momento linear. Neste sentido, obtemos que

$$\frac{U_0^2}{L} \sim \frac{\nu U_0}{\delta^2}, \quad (4.32)$$

e conseqüentemente que

$$\frac{\delta}{L} \sim Re^{-\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

em que $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$ denota o número de Reynolds. Concluímos esta secção notando que a ordem de grandeza para a espessura da camada limite encontrada é a mesma encontrada no estudo clássico da camada limite, e que em função da hipótese 5, temos que nos casos de camada limite encontramos a condição de que $Re \gg 1$. Também gostaríamos de enfatizar que durante o método do balanço dominante, não precisamos estabelecer uma comparação com os termos magnéticos, já que em função da escala determinada para M_x , observamos que estes possuem a mesma ordem de grandeza do que os mecanismos de transporte difusivo.

4.4 Adimensionalização das equações governantes

Antes de resolvermos os problema, é necessário tornar nosso modelo adimensional, de modo a reduzir o número de parâmetros independentes do modelo e garantir uma maior generalidade das soluções. Com este propósito, propomos as seguintes mudanças de variável

$$x = L\hat{x} \quad y = \delta\hat{y} \quad u = U_0\hat{u} \quad v = U_0\frac{\delta}{L}\hat{v} \quad p = \rho U_0^2\hat{p} \quad \xi = \frac{U_0}{\delta}\hat{\xi} \quad M_x = M_s\hat{M}_x \quad M_y = M_s\hat{M}_y \quad (4.34)$$

Substituindo nas equações governantes, encontramos que

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{3}{2} \phi \frac{\alpha}{Re Pe} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial \hat{y}} \quad (4.35)$$

Os parâmetros Re e Pe denotam os números de Reynolds e Péclet browniano respectivamente, e são expressos da seguinte forma

$$Re = \frac{U_0 L}{L} \quad (4.36)$$

$$Pe = \frac{\tau_B U_0}{L} \quad (4.37)$$

Especificamente, o número de Reynolds avalia a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas no escoamento. Já o número de Péclet representa a razão entre os tempos característicos de magnetização e do escoamento. Após realizarmos a substituição de variáveis nas equações da magnetização 4.4 e 4.5 encontramos que

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial \hat{y}} = -\frac{1}{2} \hat{\xi} \hat{M}_y - \frac{\alpha}{2Pe} \hat{M}_x \hat{M}_y - \frac{1}{Pe} \hat{M}_x \quad (4.38)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{2} \hat{\xi} \hat{M}_x + \frac{\alpha}{2Pe} \hat{M}_x^2 - \frac{1}{Pe} (\hat{M}_y - \mathcal{L}(\alpha)) \quad (4.39)$$

Por fim, as condições de contorno definidas em 4.6, 4.7, 4.8, 4.10, 4.11 assumem a seguinte forma adimensional

$$\hat{u}(0, \hat{y}) = 1 \quad \hat{v}(0, \hat{y}) = 0; \quad (4.40)$$

$$\hat{u}(\hat{x}, 0) = \hat{v}(\hat{x}, 0) = 0; \quad (4.41)$$

$$\hat{u}(\hat{x}, \infty) = 1 \quad \hat{v}(\hat{x}, \infty) = 0 \quad (4.42)$$

$$\hat{M}_x(0, \hat{y}) = 0, \quad (4.43)$$

$$\hat{M}_y(\hat{x}, 0) = 0. \quad (4.44)$$

Encerramos aqui o processo de adimensionalização das equações governantes e de suas condições de contorno. A partir de agora, dispensaremos os acentos para referência das variáveis adimensionais, e sempre que for necessário deixaremos claro quando estamos falando em termos de variáveis dimensionais.

4.5 Regime assintótico

Antes de prosseguirmos para a solução numérica do problema, iremos explorar de forma analítica um regime especial do problema. Especificamente, queremos explorar o problema no limite em que o número de Péclet browniano é muito pequeno, ou seja, quando temos a condição de que $Pe \gg 1$. Em termos físicos, estamos interessados em situações em que o tempo de relaxação magnética é muito menor do que o tempo característico do escoamento, o que implica em um fraco acoplamento entre a hidrodinâmica e a magnetização do fluido.

Antes de aplicarmos o método assintótico, utilizaremos de um argumento de escala para simplificarmos a equação da magnetização. Como vimos anteriormente, temos que a espessura da camada limite é da ordem de $\delta \sim Re^{-\frac{1}{2}}$. Quando comparamos os mecanismos de transporte convectivo de magnetização $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M}$ e de desalinhamento da magnetização $\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}$, observamos que

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M}}{\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}} \sim \frac{\delta}{L} \ll 1 \quad (4.45)$$

Portanto, considerando a hipótese 5, determinamos que dentro da camada limite os mecanismos de desalinhamento da magnetização dominam os mecanismos de transporte convectivo de magnetização, de forma que podemos desprezar os termos convectivos nas equações da magnetização. Desta forma temos que

$$\frac{1}{2}\xi M_y + \frac{\alpha}{2Pe} M_x M_y + \frac{1}{Pe} M_x = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{1}{2}\xi M_x + \frac{\alpha}{2Pe} M_x^2 + \frac{1}{Pe} (M_y - \mathcal{L}(\alpha)) = 0 \quad (4.47)$$

Resolvendo a equação 4.37 para M_y , encontramos que

$$M_y = \frac{1}{2}Pe M_x \xi + \frac{1}{2}\alpha M_x^2 + \mathcal{L}(\alpha) \quad (4.48)$$

Substituímos a forma explícita de M_y dada pela equação 4.38 na equação 4.36 e encontramos uma equação algébrica para a componente horizontal da magnetização M_x na forma

$$Pe^2 \xi^2 + \alpha Pe \xi M_x^2 + Pe \xi \mathcal{L}(\alpha) + \alpha^2 M_x^3 + \alpha \mathcal{L}(\alpha) M_x + M_x = 0 \quad (4.49)$$

Para resolvermos a equação 4.39 em termos de M_x , utilizamos de um método de perturbação regular (HINCH, 1991). Neste sentido, propomos uma solução na forma de uma série assintótica em termos do número de Péclet browniano Pe

$$M_x = f_0 + f_1 Pe + f_2 Pe^2 + \dots, \left(f_0 + f_1 Pe + f_2 Pe^2 \right) \quad (4.50)$$

em que os termos f_0 são coeficientes a serem determinadas. Prosseguimos a aplicação do método substituindo a solução teste dada pela equação 4.40 na equação 4.39

$$Pe^2 \xi^2 + \alpha Pe \xi \left(f_0 + f_1 Pe + f_2 Pe^2 \right)^2 + Pe \xi \mathcal{L}(\alpha) + \alpha^2 \left(f_0 + f_1 Pe + f_2 Pe^2 \right)^3 + \alpha \mathcal{L}(\alpha) \left(f_0 + f_1 Pe + f_2 Pe^2 \right) + \left(f_0 + f_1 Pe + f_2 Pe^2 \right) = 0 \quad (4.51)$$

Separando os termos de primeira ordem $\mathcal{O}(1)$, encontramos a seguinte equação para f_0

$$\frac{\alpha^2}{4}f_0^3 + \frac{\alpha\mathcal{L}(\alpha)}{2}f_0 + f_0 = 0. \quad (4.52)$$

Por ser de terceiro grau, podemos obter 3 soluções distintas para f_0 a partir da equação 4.42. No entanto, temos que das três possíveis soluções, somente uma é real que é dada por $f_0 = 0$. Neste caso, não temos opção a não ser escolher $f_0 = 0$ como solução de primeira ordem, pois caso contrário teríamos uma solução imaginária sem significado físico para o nosso problema. Prosseguindo para a segunda ordem, separamos os termos $\mathcal{O}(Pe)$ e encontramos que

$$\frac{\alpha\mathcal{L}(\alpha)}{2}f_1 + f_1 + \frac{\xi\mathcal{L}(\alpha)}{2} = 0. \quad (4.53)$$

Neste caso, podemos resolver a equação 4.43 diretamente em termos de f_1 , e encontramos que

$$f_1 = -\frac{\mathcal{L}(\alpha)}{2 + \alpha\mathcal{L}(\alpha)}\xi. \quad (4.54)$$

Desta forma, podemos concluir que a em regimes cujo número de Péclet browniano é pequeno $Pe \ll 1$, podemos representar a componente horizontal de magnetização M_x a partir da seguinte fórmula

$$M_x = -\frac{\mathcal{L}(\alpha)}{2 + \alpha\mathcal{L}(\alpha)}\xi Pe \quad (4.55)$$

Utilizando deste método não conseguimos encontrar termos de ordem maior, pois ao resolvermos os termos de terceira ordem, encontramos que $f_2 = 0$. Desta forma, somos obrigados a parar a solução já que nenhum termo finito pode ser assintoticamente menor do que zero.

No entanto, a fórmula 4.45 já nos fornece informação suficiente para prosseguirmos com a solução do problema. A partir da definição da vorticidade no caso bidimensional em questão, temos que

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.56)$$

Ora, como determinamos anteriormente, temos que dentro da camada limite portanto podemos aproximar a vorticidade a partir da equação

$$\xi \approx -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.57)$$

Desta forma, utilizando das equações 4.45 e 4.47, podemos reescrever a equação da camada limite 4.23 na seguinte forma

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{3}{2}\phi\frac{\alpha\mathcal{L}(\alpha)}{2 + \alpha\mathcal{L}(\alpha)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.58)$$

Notamos imediatamente que a equação 4.48 nada mais é do que a equação da camada limite clássica a mais de uma constante multiplicativa nos termos difusivos. Primeiramente, notamos que na ausência de um campo magnético, temos que $\alpha = 0$ e a equação 4.48 torna-se a equação clássica da camada limite (ACHESON, 1990; BATCHELOR, 2000).

Desta forma, podemos utilizar dos resultados clássicos obtidos analiticamente por Blasius (1908) para produzir soluções modificadas para as diversas quantidades de interesse no problema. Em específico, podemos escrever a espessura da camada limite δ , o coeficiente de fricção c_f e o coeficiente de arrasto C_D modificados na seguintes formas respectivamente (SCHLICHTING et al., 1955)

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{1 + \frac{3}{2} \phi \frac{\alpha \mathcal{L}(\alpha)}{2 + \alpha \mathcal{L}(\alpha)}}; \quad (4.59)$$

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{1 + \frac{3}{2} \phi \frac{\alpha \mathcal{L}(\alpha)}{2 + \alpha \mathcal{L}(\alpha)}}; \quad (4.60)$$

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \sqrt{1 + \frac{3}{2} \phi \frac{\alpha \mathcal{L}(\alpha)}{2 + \alpha \mathcal{L}(\alpha)}}. \quad (4.61)$$

4.6 Metodologia numérica

De maneira geral, não podemos encontrar soluções analíticas para o problema em casos mais gerais, em que o número de Péclet browniano não assume nenhum valor assintótico. Neste caso, utilizamos de métodos numéricos para obtenção de soluções aproximadas. Por se tratar de um problema cuja geometria é simples, escolhemos utilizar o método das diferenças finitas (SMITH, 1985). O caráter parabólico das equações de camada limite permite a utilização de esquemas específicos para solução desta classe de equações diferenciais. Neste caso, optamos por utilizar um esquema do tipo Crank-Nicolson, que garante uma aproximação de segunda ordem em ambas as direções x e y (ANDERSON; TANNEHILL; PLETCHER, 1984; FERZIGER; PERIC, 2012). As equações governantes são discretizadas em uma malha regular, com espaçamento Δx e Δy nas direções x e y respectivamente. Neste caso, reescrevemos as equações da camada limite e continuidade na seguinte forma

$$u \frac{(u - u)}{\Delta x} + v \frac{(u - u)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{1}{Re} \frac{(u - u + u)}{\Delta y^2} = -\frac{1}{4} v \frac{(u - u)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{1}{Re} \left(\frac{u - u + u}{\delta y^2} \right) + \frac{\alpha}{Pe Re} \left(\frac{M_x - M_x}{\Delta y} \right), \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} & 1 + \\ & 1 \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\frac{u - u}{\Delta x} + \frac{v - v}{\Delta y} = 0. \quad (4.64)$$

Em ambas as equações 4.52 e 4.53, os sobrescritos i e os subscritos j , denotam a posição discretizada em que a função é avaliada. A posição $i + \frac{1}{2}$ é fictícia e não existe na malha

discreta. Para determinarmos os valores das variáveis nesta posição utilizamos de uma extrapolação do tipo Adams-Bashforth, que assume a seguinte forma

$$f^{i+\frac{1}{2}} = \frac{3f^i - f^{i-1}}{2} \quad (4.65)$$

A utilização da fórmula 4.54 para extrapolação dos coeficientes convectivos e dos efeitos magnéticos sobre o escoamento é extremamente conveniente, pois garante a aproximação de segunda ordem da equação 4.52 em ambas as direções e permite a solução desacoplada entre as equações da camada limite e da magnetização. Detalhes específicos a respeito da discretização das equações, da ordem de aproximação e da estabilidade do método Crank-Nicolson estão descritos de forma detalhada no texto clássico de (SOD, 1985).

As equações de magnetização são discretizadas a partir de um esquema híbrido, de forma que os termos não lineares são discretizados de forma explícita e os termos lineares de forma implícita. Desta forma, as equações de magnetização assumem a seguinte forma discretizada

$$u \frac{(u-u)}{\Delta x} + v(u-u)\Delta x - \frac{1}{2} \frac{1}{Re} \frac{(u-u+u)}{\Delta y^2} = -\frac{1}{4} v \frac{(u-u)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{1}{Re} \left(\frac{u-u+u}{\delta y^2} \right) + \frac{\alpha}{PeRe} \left(\frac{M_x - M_x}{\Delta y} \right) \quad (4.66)$$

$$u \frac{(u-u)}{\Delta x} + v(u-u)\Delta x - \frac{1}{2} \frac{1}{Re} \frac{(u-u+u)}{\Delta y^2} = -\frac{1}{4} v \frac{(u-u)}{\Delta y} + \frac{1}{2} \frac{1}{Re} \left(\frac{u-u+u}{\delta y^2} \right) + \frac{\alpha}{PeRe} \left(\frac{M_x - M_x}{\Delta y} \right) \quad (4.67)$$

4.7 Resultados e discussões

4.7.1 Validação numérica

Após a discretização das equações governantes, prosseguimos para a validação da metodologia numérica. Este passo tem como objetivo garantir que a implementação numérica descrita anteriormente é capaz de reproduzir de forma acurada a física do problema em questão. Neste passo, também buscamos encontrar todos os erros sistemáticos que podem estar presentes.

Primeiramente, comparamos os resultados numéricos com as soluções clássicas de (BLASIUS, 1908), obtidas por métodos de similaridade, na ausência de um campo magnético. Neste caso, utilizamos como critério de comparação o coeficiente de fricção c_f , que determina a tensão de cisalhamento adimensional sobre a placa plana, e é definido como

$$c_f = \frac{\Sigma_{yx}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} \Big|_{y=0} = \frac{\eta \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} \Big|_{y=0} \quad (4.68)$$

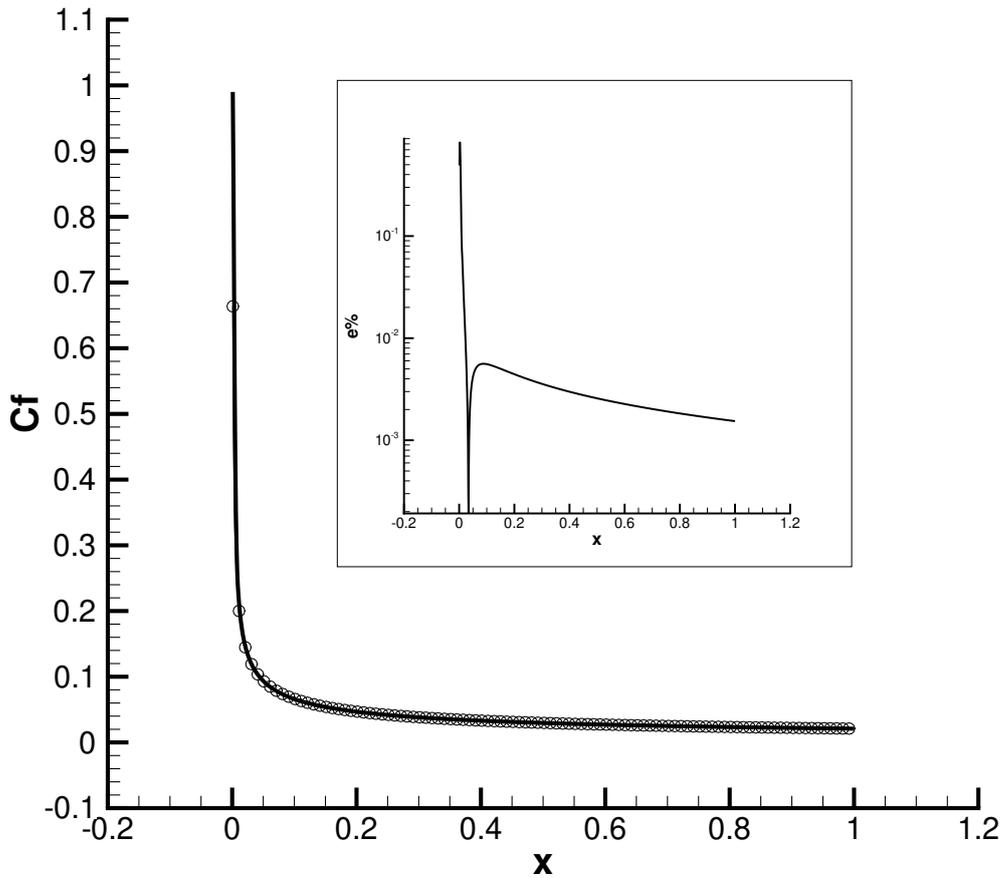


Figura 16: Comparação entre os resultados obtidos numericamente e os resultados teóricos obtidos por Blasius (1908) para o coeficiente de fricção local c_f ao longo da placa plana.

Em sua solução clássica, Blasius (1908) determina que o coeficiente de fricção é dado por

$$c_f = \frac{0.644}{Re^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}} \quad (4.69)$$

Mostramos na figura 16 o comparativo entre os resultados obtidos numericamente e a fórmula 4.58, e observamos resultados extremamente próximos aos resultados analíticos. No encarte, mostramos o erro relativo entre a solução numérica e a solução Blasius, e observamos que o erro decai rapidamente, sendo menor do que 7% para $x > 0,05$. Neste caso, escolhemos para fins de comparação um número de Reynolds igual a $Re = 1000$. Os resultados computacionais em problemas de camada limite são fortemente influenciados pela resolução da malha computacional, de forma que a resolução da componente vertical do escoamento deve ser da ordem de $\Delta \sim \frac{1}{Re}$ (ANDERSON; TANNEHILL; PLETCHER, 1984). Desta forma, optamos por utilizar uma malha computacional com 1024×256 nós, nas direções horizontal e vertical respectivamente.

Continuamos a validação numérica testando a ordem de aproximação do método.

dy	C_D	$\log_2\left(\frac{u-u_2}{u_2-u_4}\right)$
$6,66710^{-3}$	1,049	0,814
$3,22510^{-3}$	1,169	0,922
$1,58710^{-3}$	1,244	1,078
$7,87410^{-3}$	1,288	1,584
$3,92110^{-4}$	1,314	1,584
$1,96410^{-4}$	1,322	1,988

Tabela 2: Coeficiente de arrasto C_D para $Re = 10^4$ e $nx = 1024$.

Neste caso, utilizamos como critério de comparação o coeficiente de arrasto CD sobre a placa plana, que é definido como

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 L} \int_0^1 \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad (4.70)$$

e possui solução analítica na forma

$$C_d = \frac{1,328}{Re^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}} \quad (4.71)$$

No teste de ordem numérica, fixamos o número de Reynolds em $Re = 1000$, o número de nós na direção horizontal em $nx = 1024$, e calculamos o coeficiente de arrasto C_D para diferentes malhas, de forma que iniciamos com um número de nós na direção $ny = 32$, e duplicando este valor a cada simulação. Os resultados obtidos estão disponíveis na tabela 2, onde observamos que para espaçamentos Δy pequenos o suficiente o método alcança a ordem teórica de $\mathcal{O}(\Delta y^2)$.

Em nosso último teste, consideramos o problema completo, levando em consideração os efeitos magnéticos sobre o escoamento e vice-versa. Neste caso, comparamos a solução assintótica encontrada para a componente horizontal de magnetização M_x , encontrada para baixos números de Péclet browniano, com a magnetização obtida numericamente. Os resultados desta comparação estão na figura 17, onde observamos uma ótima confirmação entre as metodologias no regime assintótico de baixos números de Péclet browniano. Esta observação é interessante em dois aspectos: por validar a metodologia numérica no caso completo, em que existem efeitos magnéticos sobre o problema, e por mostrar que mesmo considerando condições de contorno para magnetização sobre a placa plana, seus efeitos não parecem ser significativos. Em termos quantitativos, vemos a partir do encarte que o erro relativo entre a solução assintótica e a numérica são menores do que 10% para $Pe < 0.1$, e confirmam a afirmação dita anteriormente.

4.7.2 Camada limite de um fluido magnético

Após testarmos nossa metodologia numérica, passamos para a solução de casos mais gerais, em que consideramos números de Péclet browniano variando de $10^{-3} \leq Pe \leq$

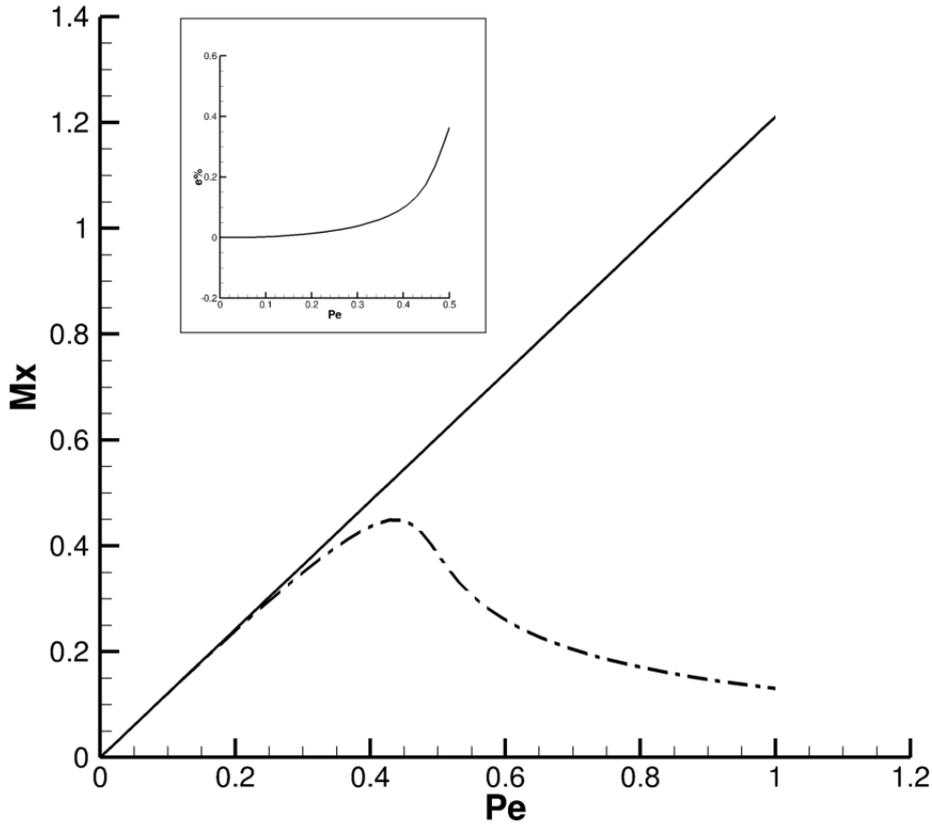


Figura 17: Comparação entre solução assintótica para componente de magnetização M_x obtida no centro da placa com valores obtidos numericamente através de simulações computacionais.

α	ϕ	Re	nx	ny
10	0,1	1000	1028	256

Tabela 3: Coeficiente de arrasto C_D para $Re = 10^4$ e $nx = 1024$.

10. Os demais parâmetros contidos em nosso modelo são fixados, com valores típicos mostrados na tabela 3.

Na figura 18, mostramos a interação entre o campo de vorticidade do escoamento, representado pelos níveis de cor, e o campo de magnetização representado pelos vetores. Neste caso, consideramos três diferentes números de Péclet browniano, tal que os gráficos (a), (b), e (c) assumem os valores de $Pe = 0, 1$, $Pe = 1, 0$, $Pe = 1, 0$ respectivamente. O gráfico (a) mostra um campo de magnetização praticamente alinhado com a direção do campo magnético \mathbf{H} em todo o escoamento. A medida em que aumentamos o número de Péclet browniano para $Pe = 1, 0$ e $Pe = 10, 0$, observamos a presença de interações entre a vorticidade e o escoamento. Especificamente, observamos no gráfico (b), um efeito ainda sutil, ocorrendo na região de maior vorticidade, próxima a origem do sistema de coordenadas. No gráfico (c) observamos uma diminuição da magnetização nas regiões

próximas a placa plana, indicando um acoplamento não monotônico entre magnetização e vorticidade em função do número de Péclet browniano.

A figura 19, mostra em maior detalhe o campo de magnetização em ambas as direções vertical e horizontal para os mesmos casos mostrados anteriormente. Os gráficos (a) e (b) mostram as magnetizações M_x e M_y para $Pe = 0,1$ respectivamente, (c) e (d) as magnetizações para $Pe = 1,0$, (e) e (f) as magnetizações para $Pe = 10,0$. Nos gráficos (a) e (b), observamos na região próxima ao início da placa plana que o aumento de magnetização horizontal M_x é seguido de um processo de diminuição da componente vertical de magnetização M_y . Neste caso, interpretamos este tipo de acoplamento entre as componentes de magnetização como uma simples mudança de orientação, de forma que a intensidade da magnetização é mantida constante (SHLIOMIS, 2002). Para as demais simulações, observamos um processo de diminuição mútua de ambas as componentes de magnetização, iniciando nas regiões próximas a placa plana e se espalhando até a fronteira da camada limite. Fora da camada limite, não observamos qualquer efeito magnético uma vez que o escoamento é inviscido nesta região.

Mostramos na figura 20, os perfis de magnetização em ambas as direções horizontal e vertical, extraídos nas secções $x = 0,25$, $x = 0,5$ e $x = 0,75$. Os gráficos (a) e (b) mostram os perfis de magnetização M_x e M_y para $Pe = 0,1$. Neste caso, observamos uma magnetização variando monotonicamente em todas as secções, mostrando um acoplamento maior na região próxima ao início da placa plana, seguido de uma diminuição progressiva a medida em que avançamos pela coordenada x . Nos gráficos (c) e (e), observamos a formação de cúspides para as componentes de magnetização horizontal M_x , cuja posição relativa a placa plana aumenta em função do número de Péclet browniano. A componente vertical de magnetização também se comporta de forma anômala nos casos (d) e (f), mostrando uma transição praticamente instantânea entre um estado de magnetização nula para um estado de equilíbrio. O fato de termos observado um comportamento anômalo para a magnetização para números de Péclet browniano $Pe > 1$, não é novo, e já foi observado por diferentes pesquisadores (SHLIOMIS, 2001; HENJES, 1995).

Por fim, mostramos nas figuras 21 e 22 como os efeitos magnéticos sobre a viscosidade do fluido alteram o coeficiente de arrasto C_D sobre a placa plana. Neste caso, precisamos redefinir o coeficiente de arrasto de forma que os efeitos magnéticos sejam levados em consideração. Desta forma, temos que o coeficiente de arrasto é definido como

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 L} \int_0^1 \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\mu_0}{2} M_x H_0 \right) \Big|_{y=0} dx, \quad (4.72)$$

Especificamente, mostramos na figura 23 o comportamento do coeficiente de arrasto para três diferentes parâmetros magnéticos $\alpha = 0,1$, $\alpha = 1,0$, e $\alpha = 10,0$, em função do número de Péclet browniano. Neste caso, observamos uma diminuição do arrasto em função de Pe , especialmente no caso em que $\alpha = 10,0$, onde notamos uma maior diminuição em termos percentuais. Este comportamento de diminuição do coeficiente de arrasto em

função do aumento do número de Peclet browniano pode ser comparado ao fenômeno de shear-thinning, observado em fluidos não-newtonianos sujeito a um aumento na taxa de cisalhamento (SHLIOMIS, 2002). Por fim, mostramos na figura 24 o comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do parâmetro magnético para diferentes números de Peclet browniano. Observamos, neste caso, um comportamento contrário ao observado na figura 23, onde observamos um aumento dos efeitos magnéticos em função de α . Neste caso, podemos interpretar este aumento como uma consequência indireta como uma amplificação dos torques magnéticos sobre as partículas em função do aumento da intensidade da magnetização de equilíbrio.

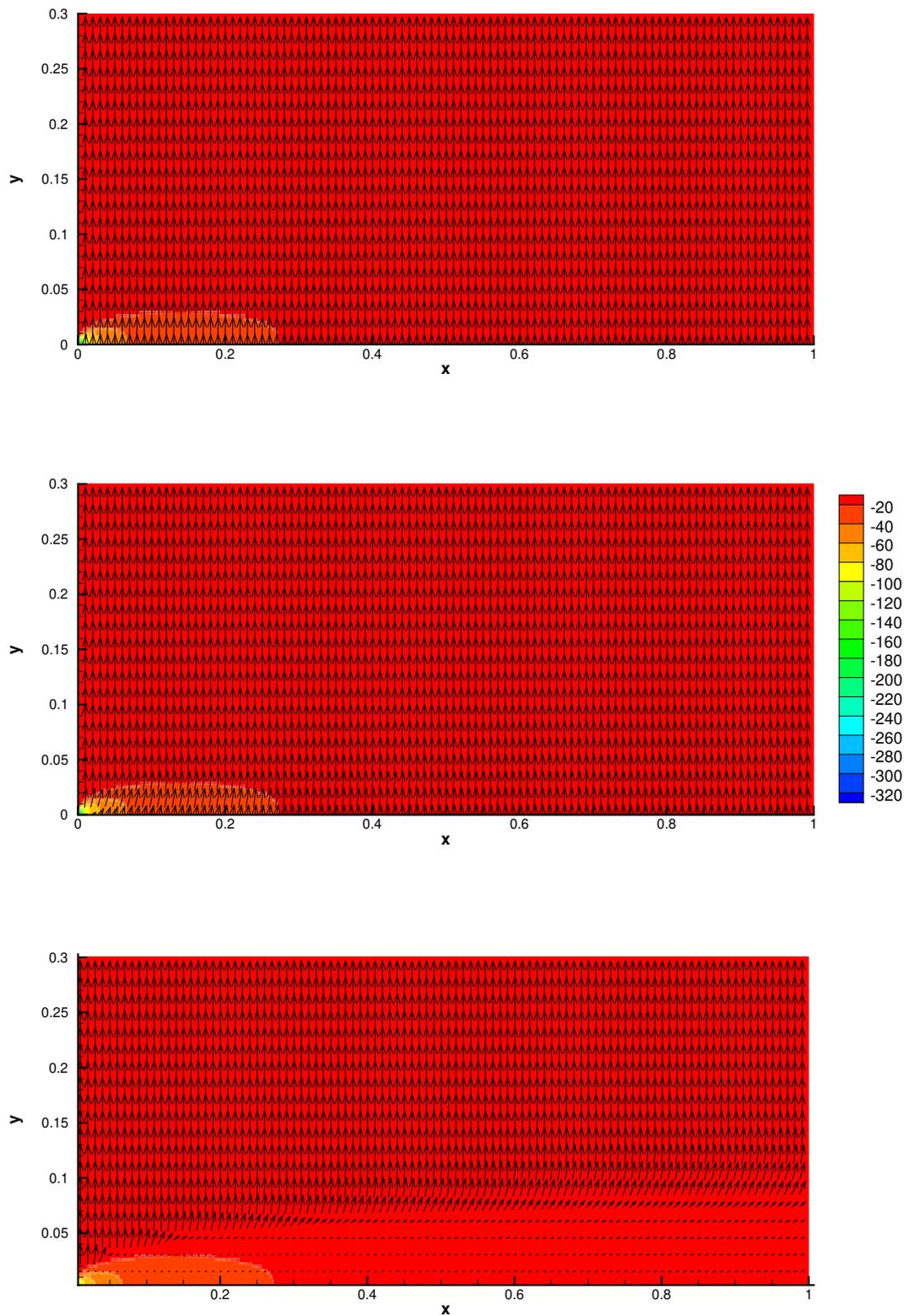


Figura 18: Comparação entre solução assintótica para componente de magnetização M_x obtida no centro da placa com valores obtidos numericamente através de simulações computacionais.

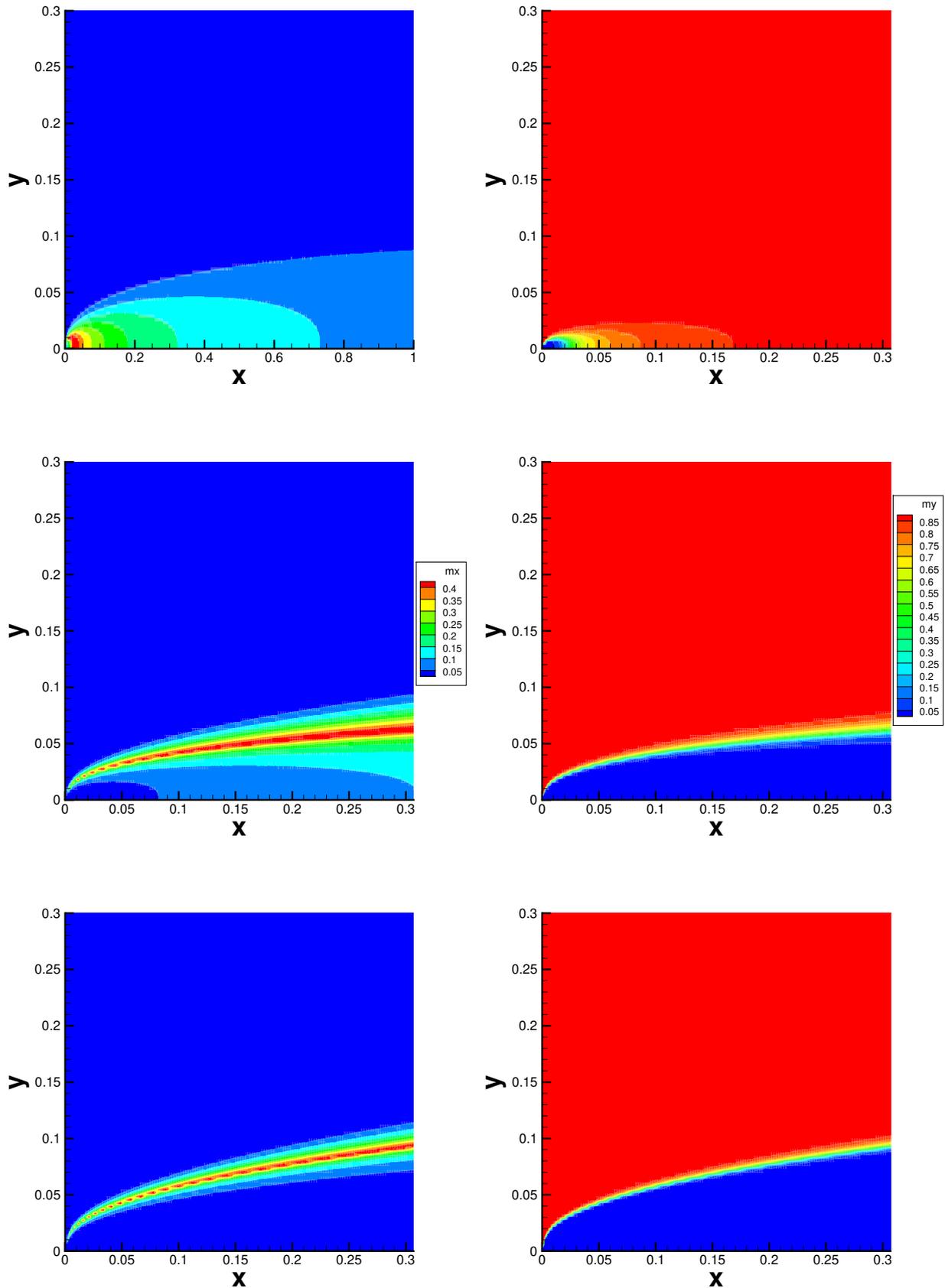


Figura 19: Curvas de nível para as componentes de magnetização nas direções horizontal e vertical. Os gráficos (a),(c), e (e) representam a componente M_x a partir dos níveis de cor para $Pe = 0, 1$, $Pe = 1$, e $Pe = 10, 0$ respectivamente. Já os gráficos (b),(d), e (f) representam a componente M_y para $Pe = 0, 1$, $Pe = 1$, e $Pe = 10, 0$ respectivamente.

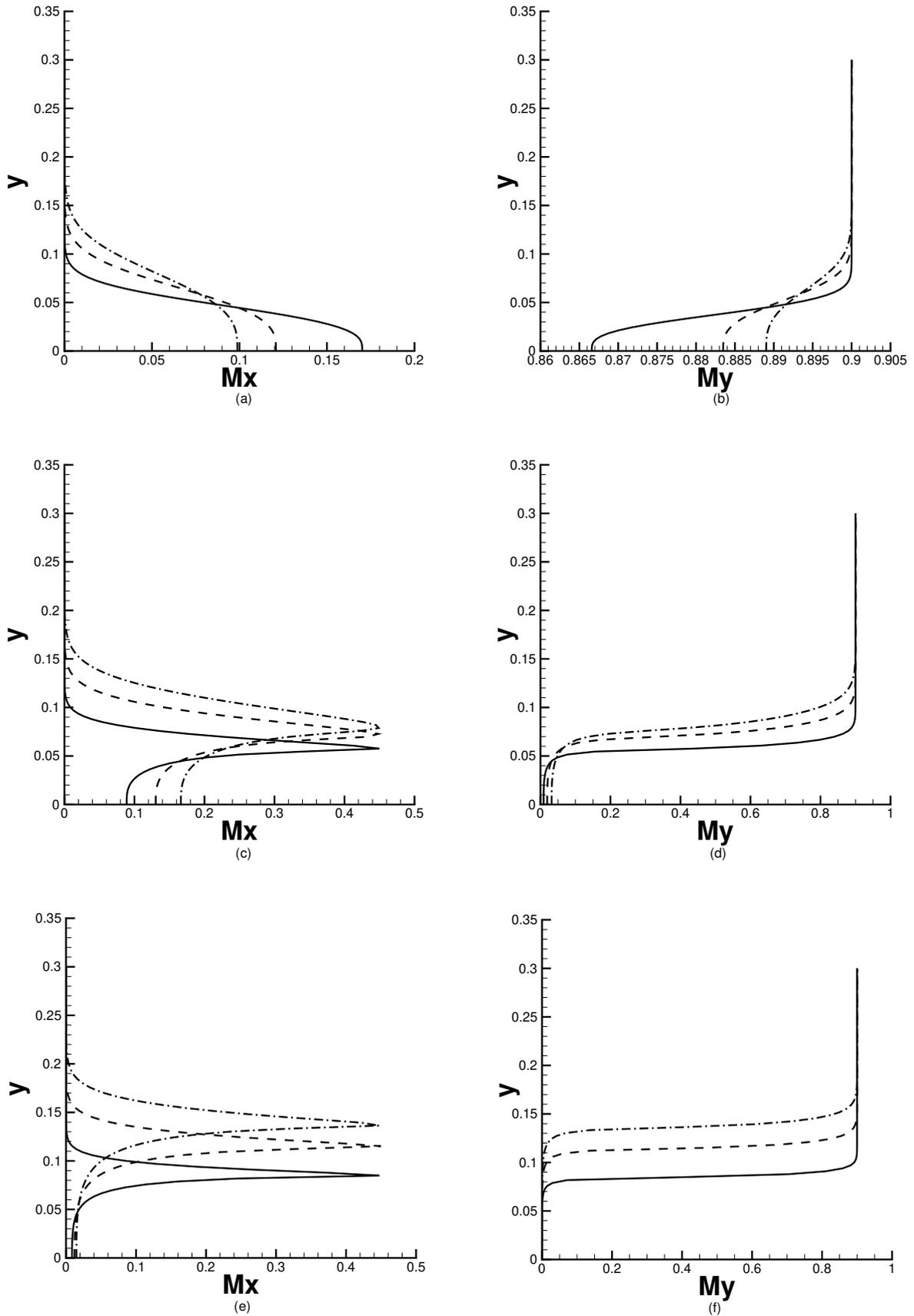


Figura 20: Perfis de magnetização das componentes M_x e M_y , extraídos nos pontos $x = 0,25, x = 0,5$, e $x = 0,75$. Neste caso temos os gráficos (a),(c), e (e) representando os perfis de magnetização da componente M_x para $Pe = 0, 1$, $Pe = 1, 0$, e $Pe = 10, 0$ respectivamente. Enquanto que os gráficos (b),(d) e (f) representam os perfis de M_y .

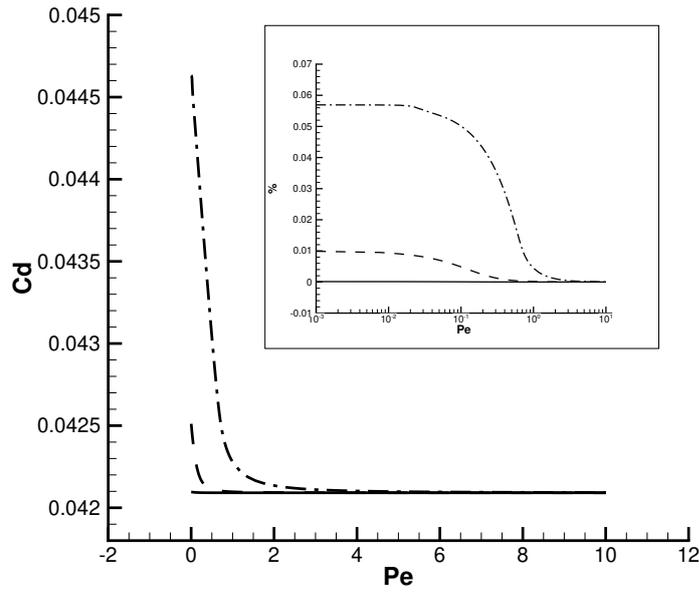


Figura 21: Gráfico para o coeficiente de arrasto C_D , em função do número de Péclet browniano Pe . A linha pontilhada representa os valores obtidos para $\alpha = 10, 0$, a linha tracejada representa $\alpha = 1, 0$, e a linha sólida $\alpha = 0, 1$. O encarte mostra a razão entre o coeficiente de arrasto C_D encontrado durante as simulações, e o resultado analítico de Blasius (1908)

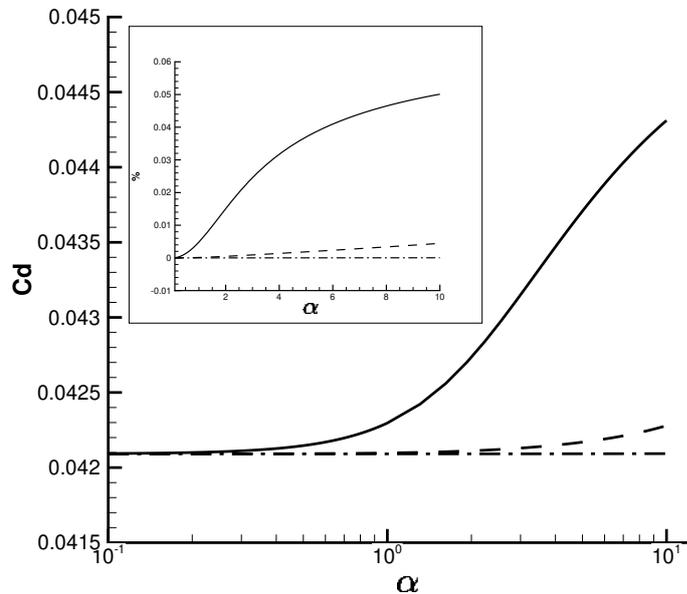


Figura 22: Gráfico para o coeficiente de arrasto C_D , em função do parâmetro de magnetização α . A linha pontilhada representa os valores obtidos para $Pe = 10, 0$, a linha tracejada representa $Pe = 1, 0$, e a linha sólida $Pe = 0, 1$. O encarte mostra a razão entre o coeficiente de arrasto C_D encontrado durante as simulações, e o resultado analítico de Blasius (1908).

5 Convecção termomagnética em cavidades delgadas

5.1 Introdução

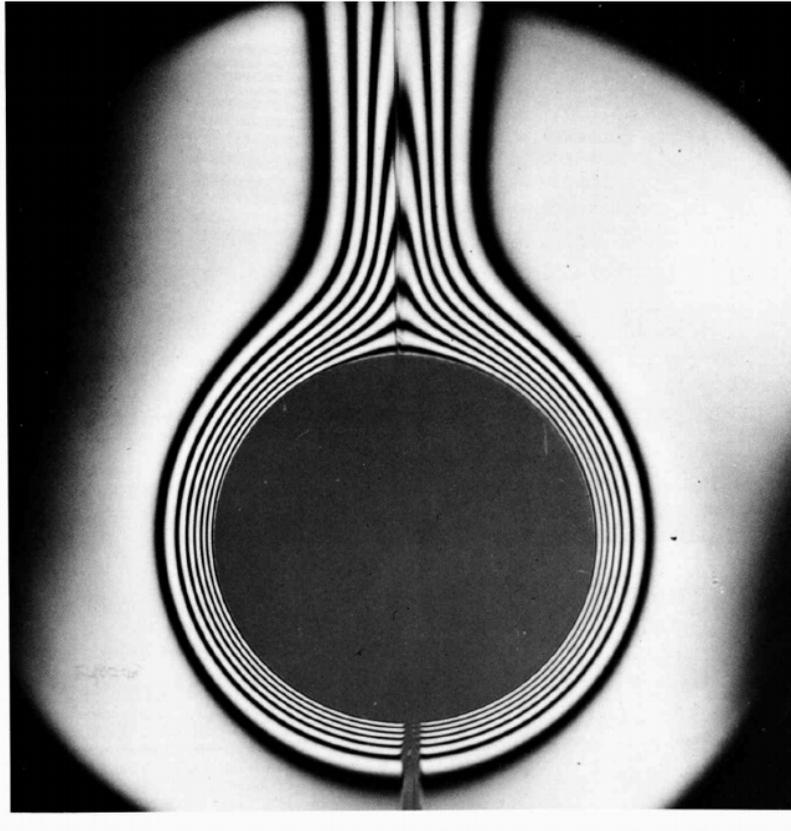


Figura 23: Exemplo de um escoamento produzido por convecção natural. O cilindro quente induz um processo de expansão térmica em suas vizinhanças, criando um escoamento ao seu redor (DYKE; DYKE, 1982).

A convecção natural é o mecanismo, ou forma de transferência de calor, na qual o movimento de um fluido é produzido internamente por diferenças de densidade decorrentes de gradientes de temperatura (TRITTON, 2012). Em situações de convecção natural, o fluido próximo a uma fonte de calor passa por um processo de expansão térmica, e conseqüentemente torna-se menos denso. A ação da gravidade produz uma força de empuxo,

fazendo as porções menos densas subirem e a mais densas descerem como mostra a figura 23.

Um processo similar ao de convecção natural é o denominado de convecção termomagnética. Neste caso, ao invés de termos a gravidade e a estratificação da massa específica do fluido como geradores de movimento, temos o campo magnético e a estratificação da suscetibilidade magnética do fluido. O processo de convecção termomagnético está intimamente conectado com o comportamento microscópico da magnetização da suspensão. Nesta escala, os torques magnéticos produzem um movimento rotacional de alinhamento de seus momentos magnéticos com o campo magnético, enquanto que os torques brownianos de origem térmica produzem um efeito contrário, cancelando o processo de alinhamento induzido pelos torques magnéticos (ROSENSWEIG, 1997). Em termos físicos, o aumento da temperatura do fluido consiste em um aumento da agitação molecular média. Isto leva a um processo de diminuição da magnetização local do fluido em decorrência do aumento da intensidade dos torques brownianos, e portanto na estratificação da suscetibilidade magnética. Quando combinada com o campo magnético aplicado, a estratificação da suscetibilidade magnética é capaz de produzir novos modos de movimento no fluido, caracterizando o fenômeno da convecção termomagnética (NEURINGER, 1966; FINLAYSON, 1970; LAJVARDI et al., 2010). O estudo da convecção termomagnética tem atraído bastante atenção da comunidade científica devido ao caráter não trivial de sua dinâmica, que é fortemente acoplada à magnetização da suspensão, mas também devido as potências aplicações relativas ao melhoramento dos mecanismos de transferência de calor (ASHOURI et al., 2010; CUNHA; COUTO; MARCELINO, 2007; GONTIJO; CUNHA, 2012; ASHOURI; SHAFII, 2017).

Este trabalho tem como objetivo investigar o fenômeno de convecção termomagnética em cavidades delgadas a partir de simulações numéricas. Especificamente, queremos entender o papel das condições de contorno magnéticas, aqui definidas como as características do ímã gerador do campo magnético, sobre as taxas de transferência de calor em termos do número de Nusselt global Nu .

5.2 Modelagem matemática

Iniciamos aqui o processo de modelagem matemática do nosso problema. Nosso objetivo é de representar o problema físico, como mostrado pela figura 24, a partir de um sistema de equações diferenciais parciais e suas respectivas condições de contorno. Para isto precisamos impor algumas hipóteses a fim de especificar o problema:

1. A cavidade delgada possui dimensões de largura δ_c e altura L , que satisfazem a seguinte relação $\frac{\delta_c}{L} \ll 1$;

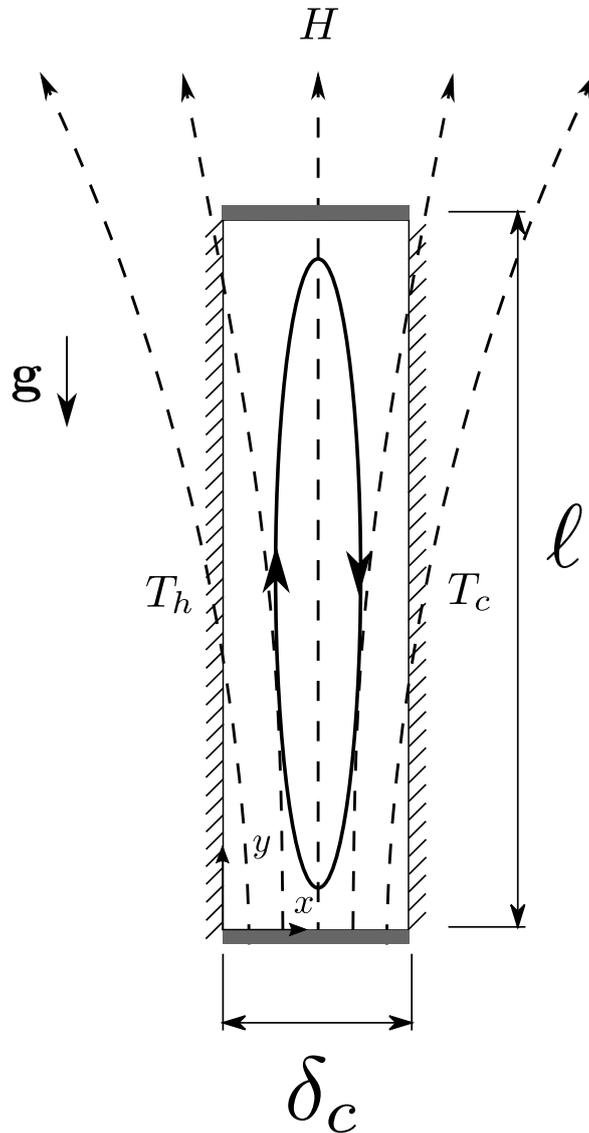


Figura 24: Desenho esquemático mostrando uma cavidade delgada na presença de um campo magnético. A cavidade possui dimensões de largura δ_c e comprimento L , e esta sujeita a condições de temperatura T_h e T_c nas paredes laterais.

2. O escoamento é bidimensional e o centro de coordenadas está fixado no canto esquerdo inferior da cavidade;
3. A temperatura das paredes laterais da cavidade é fixa, com valor T_h para a parede do lado esquerdo e T_c para o lado direito, tal que $T_h > T_c$;
4. Não há troca de calor através da parede inferior e superior da cavidade;
5. Consideramos que os efeitos de expansão térmica são desprezíveis de forma que a massa específica do fluido é constante;
6. Consideramos a cavidade imersa em um ambiente de micro-gravidade, onde as forças gravitacionais podem ser desconsideradas;
7. O fluido é incompressível;

8. A relaxação magnética do fluido é caracterizada pelo tempo de Néel, de maneira que magnetização e campo magnético são sempre colineares;
9. A taxa de produção de energia interna em função dos termos magnéticos é desprezível;
10. A intensidade do campo magnético é muito maior do que a intensidade do campo de desmagnetização $|\mathbf{H}| \ll |\mathbf{H}_d|$;
11. A suspensão é diluída, tal que a magnetização do fluido é descrita pela teoria de Langevin.

Colocadas as hipóteses iniciais, podemos escrever as equações que governam o nosso problema. Iniciamos esta etapa com a equação da energia, que em duas dimensões é escrita na forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

tal que $\alpha_T = \frac{\kappa}{\rho}$ é a difusividade térmica do fluido e representa a razão entre a condutividade térmica do material κ e a massa específica ρ (BEJAN, 2013). Ressaltamos que neste caso, o termo de produção de energia interna não está presente na equação 5.1 em função da hipótese 7. A equação do movimento é descrita pelo conjunto de equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} M \frac{\partial H}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho} M \frac{\partial H}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (5.3)$$

Nas equações 5.2 e 5.3 o termo $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ denota a viscosidade cinemática e é expressa pela razão entre a viscosidade dinâmica η e a massa específica do fluido ρ . O termo relativo a força gravitacional foi desprezado em função da condição 6. Notamos que neste caso, em que o campo de magnetização é sempre colinear ao campo magnético, podemos expressar a força de Kelvin na forma $\mu_0 M \nabla H$, tal que H e M denotam a intensidade do campo magnético e de magnetização respectivamente (SHLIOMIS, 2002). Utilizamos ainda o fato de que a magnetização pode ser expressa na seguinte forma

$$M = \chi H \quad (5.4)$$

tal que $\chi = \chi(H, T)$ é a suscetibilidade magnética do fluido. De forma análoga ao procedimento utilizado na modelagem de convecção natural, utilizamos a hipótese de Boussinesq para a suscetibilidade magnética e a expressamos a partir de uma série de Taylor em função da temperatura

$$\chi = \chi_0 - \left. \frac{d\chi}{dT} \right|_{T_0} \Delta T. \quad (5.5)$$

O termo χ_0 presente na equação 5.5 representa o valor de referência da suscetibilidade magnética avaliada a uma temperatura T_0 . A partir da expressão 5.5 definimos o coeficiente piromagnético β_m , tal que

$$\beta_m = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial T} \Big|_{T_0}. \quad (5.6)$$

Assim, utilizando das equações 5.4, 5.5 e 5.6, podemos reescrever as equações do movimento 5.2 e 5.3 na seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\beta \mu_0 \chi}{2\rho} \frac{\partial H^2}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\beta \mu_0 \chi}{2\rho} \frac{\partial H^2}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (5.8)$$

O novo termo $p' = p + \frac{\mu_0 \chi_0}{2\rho} H^2$, presente nas equações 5.7 e 5.8, denota a pressão modificada. Utilizamos também o fato de que, em razão a irrotacionalidade do campo magnético decorrente da lei de Ampère-Maxwell no limite magnetostático, o termo $\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}$ pode ser expresso como $\frac{\nabla H^2}{2}$. Lembramos aqui que a magnetização do fluido pode ser expressa a partir da teoria de Langevin para o magnetismo, de forma que

$$M = M_s \mathcal{L}(\alpha) \quad (5.9)$$

em que M_s denota a magnetização de saturação do fluido. O termo $\mathcal{L}(\alpha)$ representa a função de Langevin

$$\mathcal{L}(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \quad (5.10)$$

em que o parâmetro $\alpha = \frac{mH}{k_B T}$ representa a razão entre a energia magnética e a energia térmica. Neste caso, m e H denotam a intensidade do momento magnético da partícula e a intensidade do campo magnético respectivamente, enquanto que o termos no denominador, k e T representam a constante de Boltzmann e a temperatura do fluido.

Em consequência da hipótese 7, em que definimos o fluido em questão como incompressível, temos a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.11)$$

Por fim, precisamos especificar a forma do campo magnético que iremos utilizar no problema. Desta forma, consideramos o campo magnético produzido por um ímã permanente na forma de um prisma retangular como exemplificado pela figura 25. A formula matemática que expressa o campo magnético é dada por (MCCAIG; AG, 1977)

$$H_x = H_0 \ln \left[\frac{y + b + \{(y + b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y - b + \{(y - b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{y - b + \{(y - b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y + b + \{(y + b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (5.12)$$

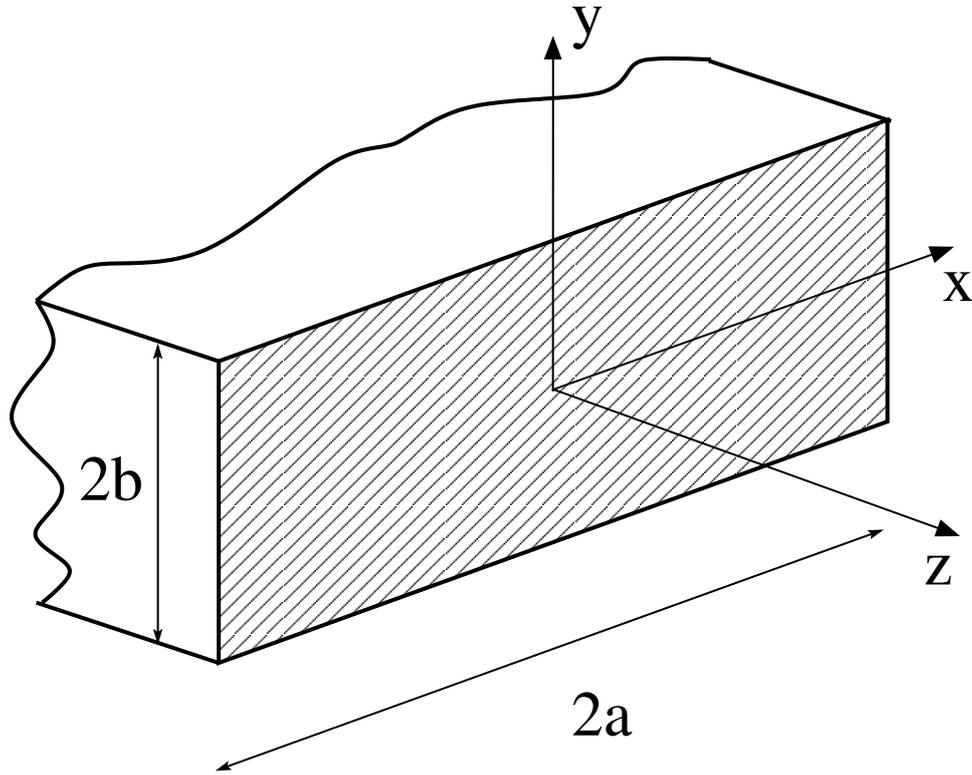


Figura 25: Dimensões de um ímã permanente retangular com sistema de coordenadas fixado no centro de sua face (ALEGRETTI, 2017).

$$H_y = H_0 \ln \left[\frac{y + a + \{(y - b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y - a + \{(y - b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{y - a + \{(y + b)^2(x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}}{y + a + \{(y + b)^2(x + a)^2\}^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (5.13)$$

em que o termo H_0 denota um campo magnético de referência, e os valores a e b correspondem as dimensões físicas da superfície geradora do campo magnético.

5.3 Adimensionalização das equações governantes

Definido o modelo matemático para o problema, passamos agora para o processo de adimensionalização das equações governantes e condições de contorno. Para isto, definimos as seguintes mudanças variáveis com base nos valores característicos de cada uma das quantidades envolvidas

$$\begin{aligned} x = L\hat{x}; \quad y = L\hat{y}; \quad u = \left(\frac{\mu_0 \chi_0 \beta_m \Delta T H_0^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{u}; \quad v = \left(\frac{\mu_0 \chi_0 \beta_m \Delta T H_0^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{v}; \\ T = (T_h - T_c) \Theta + T_c; \quad p = \frac{\mu_0 \chi_0 \beta_m \Delta T H_0^2}{\rho}; \quad H = H_0 \hat{H}; \end{aligned} \quad (5.14)$$

tal que as variáveis \hat{x} , \hat{y} , \hat{u} , \hat{v} , Θ , \hat{p} , \hat{H} são adimensionais. Antes de prosseguirmos com a substituição das novas variáveis, precisamos definir a suscetibilidade magnética e o parâmetro de magnetização em termos das variáveis adimensionais e as escalas do problema.

Dado que a magnetização do fluido segue a teoria de Langevin, temos a partir da equação 5.4 que

$$\chi = \frac{M_s \mathcal{L}(\alpha)}{H_0 \hat{H}}. \quad (5.15)$$

Aqui, definimos como $\chi_0 = \frac{M_s}{H_0}$ a razão entre a magnetização de saturação do fluido e o valor característico do campo magnético, de maneira que

$$\chi = \chi_0 \frac{\mathcal{L}(\alpha)}{\hat{H}}. \quad (5.16)$$

Por fim, precisamos reescrever $\alpha = \alpha(H, T)$ em termos das variáveis adimensionais \hat{H} e Θ . A partir da definição de α temos que

$$\alpha = \frac{mH_0 \hat{H}}{k_B (\Delta T \Theta + T_c)}. \quad (5.17)$$

Colocando o termo T_c do numerador em evidência, podemos definir α da seguinte forma

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\hat{H}}{T_r + 1} \quad (5.18)$$

em que o termo $\alpha_0 = \frac{mH_0}{kT_c}$ representa um valor de referência, e o termo $T_r = \frac{\Delta T}{T_c}$ a razão entre a diferença de temperatura entre as paredes laterais da cavidade e a temperatura da parede fria.

Passamos agora para a substituição das novas variáveis nas equações governantes e condições de contorno do problema. Começando pela equação da energia e prosseguindo com as equações do movimento, encontramos que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr^{\frac{1}{2}} Ra_m^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mathcal{L}(\alpha) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{Pr}{Ra_m^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mathcal{L}(\alpha) \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{Pr}{Ra_m^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (5.21)$$

Nas equações 5.19, 5.20 e 5.21 definimos os números de Prantl Pr e o número de Rayleigh magnético, que são escritos da seguinte forma

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (5.22)$$

$$Ra_m = \frac{\mu_0 \beta_m \Delta T H_0^2 L^2}{\alpha \eta}. \quad (5.23)$$

Em termos físicos, o número de Prantdl determina a razão entre a difusão de momento linear e a difusão térmica no fluido. Já o número de Rayleigh magnético Ra_m representa a razão entre a força de empuxo magnética e a força viscosa.

As condições de contorno adimensionais são determinadas da mesma forma em que adimensionalizamos as equações da energia e do movimento. Assim, ao substituímos as novas variáveis nas condições de contorno encontramos que a velocidade do fluido é identicamente nula em todas as paredes

$$u = v = 0. \quad (5.24)$$

As condições de contorno de temperatura assumem a seguinte forma nas paredes superior e inferior

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \quad (5.25)$$

enquanto que nas paredes laterais da esquerda e da direita, as condições de contorno são respectivamente

$$\Theta = 1, \quad (5.26)$$

$$\Theta = 0. \quad (5.27)$$

Por fim, apresentamos a seguir a forma adimensional do campo magnético, que é dada por

$$\hat{H}_x = \ln \left[\frac{\hat{y} + \hat{b} + \{(\hat{y} + \hat{b})^2(\hat{x} - \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}}{\hat{y} - \hat{b} + \{(\hat{y} - \hat{b})^2(\hat{x} - \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\hat{y} - \hat{b} + \{(\hat{y} - \hat{b})^2(\hat{x} + \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}}{\hat{y} + \hat{b} + \{(\hat{y} + \hat{b})^2(\hat{x} + \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (5.28)$$

$$\hat{H}_y = \ln \left[\frac{\hat{y} + \hat{a} + \{(\hat{y} - \hat{b})^2(\hat{x} + \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}}{\hat{y} - \hat{a} + \{(\hat{y} - \hat{b})^2(\hat{x} - \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\hat{y} - \hat{a} + \{(\hat{y} + \hat{b})^2(\hat{x} - \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}}{\hat{y} + \hat{a} + \{(\hat{y} + \hat{b})^2(\hat{x} + \hat{a})^2\}^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (5.29)$$

de forma que os termos \hat{a} e \hat{b} representam as dimensões da face do ímã normalizadas pela altura da cavidade L .

Desta forma, encerramos o processo de adimensionalização das equações governantes e das condições de contorno e passamos agora para solução numérica do problema. Lembramos que a partir de agora, deixamos de utilizar os acentos circunflexos para denotarmos as variáveis adimensionais, de forma que daqui em diante trabalharemos somente com variáveis adimensionais.

5.4 Metodologia Numérica

O problema matemático formulado nas secções anteriores é de alta complexidade, o que nos impossibilita de obter soluções analíticas. Desta forma, utilizamos de métodos numéricos para resolver este problema de forma aproximada. Especificamente, utilizamos do método das diferenças finitas para resolução deste problema em questão. O método das diferenças finitas consiste em aproximar as derivadas temporais e espaciais a partir de diferenças discretas, muitas vezes obtidas a partir de expansões em série de Taylor das funções. Em termos práticos, o método consiste em transformar um domínio contínuo

em uma malha discreta, em que os valores das funções definidas no domínio contínuo passam a ser definidos somente sobre os pontos da malha. Esta transformação do domínio nos permite transformar um sistema de equações diferenciais parciais acoplado em um conjunto de equações algébricas que pode ser resolvido separadamente.

Dentro dos métodos das diferenças finitas, existem vários esquemas de discretização feitos para aproximar as derivadas do sistema de formas diferentes, adequando-se as características matemáticas do problema. Neste problema em questão, optamos por utilizar uma metodologia adequada para lidar com a solução de escoamentos incompressíveis. Como podemos observar nas equações governantes, não temos uma forma explícita para computarmos a pressão do fluido. A família de métodos de diferenças finitas capazes de lidar com o acoplamento entre velocidade e pressão é conhecida como métodos de projeção (CHORIN, 1967; CHORIN, 1968).

Em específico, escolhemos por utilizar um variante do método de projeção semi-implícito proposto por Kim e Moin (1985), que garante uma aproximação de segunda ordem no tempo. O fato do método ser semi-implícito também garante a utilização de passos de tempo maiores, já que a restrição imposta pelos termos difusivos é eliminada (SOD, 1985). Para implementação do método utilizamos uma malha escalonada como mostrada na figura 26. As variáveis são posicionadas em diferentes pontos da malha, de maneira a diminuir o stencil numérico e evitar o instabilidades do tipo checkerboard na solução das equações do movimento (HARLOW; WELCH, 1965; BELL; COLELLA; GLAZ, 1989). As componentes horizontais do campo de velocidade são alocadas sobre as faces laterais de cada célula da malha, enquanto que as componentes verticais são alocadas nas faces superior e inferior de cada célula. As variáveis de pressão, temperatura, magnetização e campo magnético são alocadas no centro de cada célula.

De maneira geral, os métodos de projeção utilizam do teorema da decomposição de Ladyzhenskaya, também conhecido como decomposição de Helmholtz-Hodge, que nos diz que todo campo vetorial definido em uma região simplesmente conexa pode ser decomposto em uma contribuição solenoidal e outra potencial (CHORIN; MARSDEN, 1992). Desta forma, o método das projeções decompõe a solução da equação do momento em duas etapas: uma de predição e outra de projeção.

Na etapa de predição desprezamos os termos relativos a pressão e resolvemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{u_{ji}^* - u_{ji}^n}{\Delta t} = & - \left[u_{ji} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + v_{ji} \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta y} \right]^{n+\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{L}(\alpha_{ji}) \Theta_{ji} \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x} \right]^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{Pr^{\frac{1}{2}}}{Ra_m^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta y^2} \right]^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

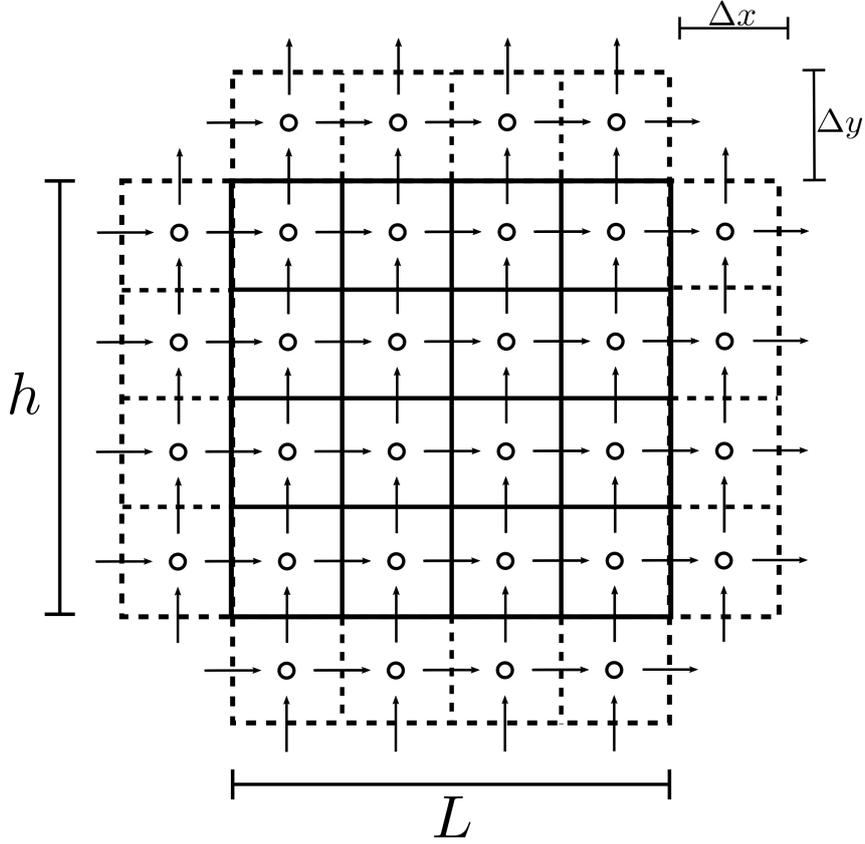


Figura 26: Desenho ilustrativo de uma célula formada a partir do escalonamento entre duas malhas regulares (HARLOW; WELCH, 1965). As variáveis são posicionadas em diferentes partes da célula com o objetivo de encurtar o stencil numérico utilizado para a aproximação das derivadas.

$$\begin{aligned} \frac{v_{ji}^* - v_{ji}^n}{\Delta t} = & - \left[u_{ji} \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x} + v_{ji} \frac{v_j - v_{j-1}}{\Delta y} \right]^{n+\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{L}(\alpha_{ji}) \Theta_{ji} \frac{H_j - H_{j-1}}{\Delta y} \right]^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{Pr^{\frac{1}{2}}}{Ra_m^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{\Delta y^2} \right]^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

As equações 5.31 e 5.32 representam as equações do movimento 5.20 e 5.21 discretizadas em diferenças finitas utilizando um esquema do tipo Crank-Nicolson. Os expoentes n e $n + \frac{1}{2}$ indicam a posição no tempo em que a discretização de cada termo das equações é feita. De maneira geral, não é possível avaliarmos os termos na posição $n + \frac{1}{2}$, portanto, utilizamos de métodos de interpolação e extrapolação para fecharmos o método. Convencionalmente, utilizamos de uma interpolação linear do tipo

$$f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} \quad (5.32)$$

para determinação dos termos difusivos. Por conter termos tanto no nível $n + 1$ quanto no nível n , este método é denominado semi-implícito. Os termos convectivos são extrapolados a partir de um esquema do tipo Adams-Bashforth

$$f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3f^n - f^{n-1}}{2}. \quad (5.33)$$

Este tipo de extrapolação torna o método mais caro em termos de memória computacional já que precisamos guardar informações de dois passos de tempo. Entretanto, o sistema de equações a ser resolvido torna-se linear e muito mais simples de se resolver.

Na etapa de projeção, resolvemos a seguinte equação para o campo ϕ ,

$$\left[\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta y^2} \right]^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \left[\frac{u_i^* - u_{i-1}^*}{\Delta x} + \frac{v_j^* - v_{j-1}^*}{\Delta y} \right] \quad (5.34)$$

e projetamos as variáveis de velocidade intermediária u^* e v^* em um espaço solenoidal

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = - \left[\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \right]^{n+1}, \quad (5.35)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^*}{\Delta t} = - \left[\frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{\Delta y} \right]^{n+1}. \quad (5.36)$$

A etapa de projeção garante que a solução para o nível $n + 1$ dos campos de velocidade u e v satisfaçam a condição de incompressibilidade. Desta forma, a pressão pode ser interpretada numericamente como uma variável auxiliar cujo objetivo é garantir que o escoamento seja incompressível. A pressão pode ser obtida a partir da seguinte fórmula,

$$p_{ji}^{n+1} = \phi_{n+1,ji} - \frac{\Delta t Ra^{\frac{1}{2}}}{2Pr^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta y^2} \right]^{n+1}. \quad (5.37)$$

Por fim, a equação do calor discretizada assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{ji}^{n+1} - \Theta_{ji}^n}{\Delta t} = & - \left[u \frac{\Theta_{ji} - \Theta_{j,i-1}}{\Delta x} + v \frac{\Theta_{ji} - \Theta_{j-1,i}}{\Delta y} \right]^{n+\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1.0}{Pr^{\frac{1}{2}} Ra_m^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\Theta_{ji} - 2\Theta_{j,i} + \Theta_{j,i-1}}{\Delta x^2} + \frac{\Theta_{ji} - 2\Theta_{j,i} + \Theta_{j-1,i}}{\Delta y^2} \right]^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.38)$$

tal que os termos convectivos são extrapolados a partir da fórmula 5.33, e os termos difusivos interpolados pela fórmula 5.34.

5.5 Resultados e discussões

5.5.1 Validação do método e teste de ordem

Para garantir que a implementação do método numérico está correta, testamos nossos resultados com outros dois trabalhos. Neste caso, consideramos a convecção natural dentro de uma cavidade retangular em diferentes números de Rayleigh e mantivemos o número de Prandtl fixo $Pr = 1$. Consideramos as mesmas condições de contorno utilizadas na modelagem do problema de convecção termomagnética, com as paredes superior e inferior isoladas, tal que $\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$, enquanto as paredes laterais possuem temperaturas fixas com $\Theta = 1$ e $\Theta = 0$ nas paredes da esquerda e direita respectivamente. A variável utilizada

para comparação é o número de Nusselt global calculado ao longo da parede quente. Desta forma, definimos respectivamente os números de Nusselt local e global da seguinte forma (BEJAN, 2013)

$$Nu_y = - \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad (5.39)$$

$$Nu = \frac{1}{L} \int_0^1 Nu_y dy = \frac{1}{L} \int_0^1 \left[- \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{x}} \right]_{x=0} dy. \quad (5.40)$$

Em termos numéricos, utilizamos o método das diferenças finitas para determinarmos o número de Nusselt local Nu_y e o método de integração por trapézios composto para determinação do número de Nusselt Global (HAMMING, 2012).

Referência	$Ra = 10^3$	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
Davis (1983)	1,114	2,243	4,487	8,879
Ashouri et al. (2010)	-	2,248	4,533	-
Trabalho atual	1,118	2,237	4,532	8,873

Tabela 4: Tabela comparativa para o número de Nusselt global calculado na parede quente de uma cavidade quadrada em convecção natural com número de Prandtl $Pr = 1.0$. No trabalho atual, utilizamos uma malha regular de 81x81 nós.

Os resultados obtidos, juntamente com os resultados de comparação estão na tabela 3. Utilizando os resultados de Davis (1983) como referência, encontramos um erro relativo máximo de 1,002% para o número de Nusselt global no caso de $Ra = 10^5$. Comparando os resultados encontrados com Ashouri et al. (2010), encontramos um erro máximo de 0,48% para $Ra = 10^4$.

Também avaliamos a implementação do método numérico em termos de sua ordem de aproximação. Em termos teóricos, a implementação do método proposto por Kim e Moin (1985) é de segunda ordem no tempo. Para testarmos a ordem do método seguimos o procedimento descrito por Cuminato e Meneguette (2013), em que avaliamos a componente horizontal de velocidade no centro da cavidade para diferentes passos de tempo. A cada iteração dividimos o passo de tempo anterior pela metade, mantendo a quantidade de nós da malha fixa. Os resultados obtidos estão disponíveis na tabela 4, onde observamos que a ordem do método não é de fato constante em termos do passo de tempo dt , mas que para escolhas de dt suficientemente pequenas encontramos um valor de ordem próximo a 2.

5.5.2 Simulações de convecção termomagnética

Neste trabalho investigamos os efeitos diretos das condições de contorno magnéticas e dos números de Prandtl Pr e Rayleigh magnético Ra_m sobre o escoamento e a transferência de calor dentro da cavidade em regime permanente. Neste caso, utilizamos

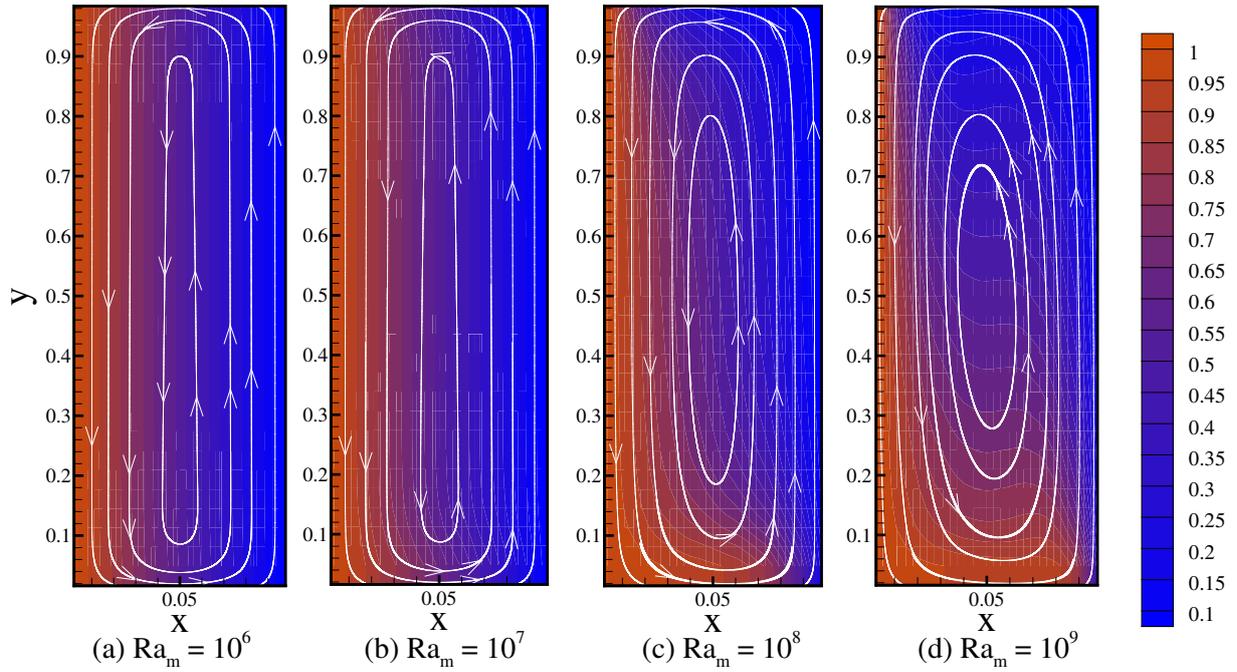


Figura 28: Resultados obtidos para o campo de temperatura e o campo de velocidades do fluido para diferentes valores de Ra_m . As simulações foram realizadas para $10^6 \leq Ra_m \leq 10^9$ com número de Prandtl fixo $Pr = 100.0$. Os demais parâmetros utilizados nas simulações estão definidos na tabela.

como critério de parada a seguinte relação para o número de Nusselt global

$$\frac{Nu^{n+1} - Nu^n}{Nu^n} < 10^{-9}, \quad (5.41)$$

em que os expoentes $n + 1$ e n indicam a posição temporal em que os números de Nusselt são avaliados. Os demais parâmetros contidos dentro do nosso modelo são fixados, e seus respectivos valores estão representados na tabela 5.

α	T_r	$r = \frac{\delta}{L}$	nx	ny
10	0.1	0.1	64	81

Tabela 6: Tabela com valores fixos utilizados em cada uma das simulações realizadas.

Na figura 28, mostramos o campo de temperatura e as linhas de corrente do escoamento em para diferentes números de Rayleigh magnético, variando de $Ra_m = 10^6$ até $Ra_m = 10^9$. O número de Prandtl está fixado em $Pr = 100$, e o ímã posicionado sobre a face inferior da cavidade. Neste caso, consideramos um ímã cuja razão de tamanho é de $r = 10 : 1$, ou seja, o comprimento característico da face do ímã é dez vezes maior do que o comprimento da face inferior da cavidade. Para números de Rayleigh entre 10^6 e 10^7 , observamos um campo de temperatura com estratificação aproximadamente uniforme no sentido horizontal, indicando que comparativamente os mecanismos de transferência de calor difusivos são dominantes dentro deste intervalo de números de Rayleigh. A medida em que o número de Rayleigh magnético Ra_m aumenta, notamos uma distribuição de

temperatura não uniforme, principalmente nas regiões superior e inferior da cavidade. Neste caso, observamos uma maior aproximação das linhas de corrente do escoamento, indicando maiores velocidades produzidas pelo mecanismo de convecção termomagnética. Esta observação quanto a velocidade do escoamento é confirmada na figura 29, onde mostramos os perfis de velocidade vertical obtidos a partir de uma secção horizontal feita na metade da cavidade.

A figura 30, mostra o comportamento da célula convectiva e do número de Nusselt local obtido sobre a parede quente para duas configurações de campo magnético. Neste caso mostramos nos gráficos (a) e (c) as linhas de corrente e o número de Nusselt local respectivamente para um ímã está posicionado na face inferior da cavidade. Similarmente, temos nos gráficos (b) e (c), os resultados obtidos para o ímã posicionado na face superior da cavidade. A partir dos gráficos (a) e (b), notamos que o sentido anti-horário do escoamento produz uma região de maior temperatura na parte inferior da cavidade e uma região de menor temperatura na parte superior. De maneira geral, observamos que para um ímã grande posicionado na parede inferior da cavidade o sentido do $\nabla(H^2/2)$ é o mesmo do vetor aceleração gravitacional. Dessa forma, como χ possui dependência com T inversa à de $\rho(T)$, o sentido da célula convectiva para o caso de convecção magnética pura é oposto ao da célula clássica de convecção natural. O Nusselt local aumenta ao longo da parede quente em y devido ao sentido da célula convectiva, que no caso de convecção magnética pura é anti-horário quando a parede quente encontra-se à esquerda. Nesse sentido, na região superior da cavidade existem gradientes mais intensos de temperatura, pois o fluido quente à esquerda recebe um fluxo de fluido frio pela direita. Na região de baixo esse fluxo frio não encontra a região quente, levando a uma diminuição do número de Nusselt local. Os gráficos (b) e (c) mostram que a inversão do campo magnético produz um escoamento contrário ao observado nos gráficos (a) e (b), mas que a princípio são completamente simétricos.

A figura 31, mostra o comportamento do número de Nusselt global em função do número de Rayleigh magnético Ra_m para três diferentes números de Prandtl Pr . Neste caso, consideramos $Pr = 10$, $Pr = 100$, $Pr = 1000$, e continuamos a considerar um ímã permanente posicionado na região inferior da cavidade com razão de tamanho de $r = 10 : 1$. Observamos que para valores de Rayleigh magnético inferiores a 10^7 , o número de Nusselt é aproximadamente unitário, e portanto, que os mecanismos de difusão térmica são dominantes quando comparados com o transporte convectivo de calor. Em valores próximos a $Ra_m = 10^7$, nota-se que o número de Nusselt global começa a aumentar de valor, dando início ao transporte convectivo de calor. No encarte mostrado na figura 31, mostramos os coeficientes n encontrados para a scaling law $Nu \sim Ra_m^n$, para os diferentes valores de Pr . Notamos um aumento gradual do coeficiente n em termos de Pr , de forma que no caso extremo em que $Pr = 1000$, encontramos um valor de $n = 0,328$. Este resultado é bastante significativo, pois reafirma os resultados encontrados por Cunha, Couto e Marcelino (2007) e Ashouri et al. (2010), em que foi determinada uma scaling law

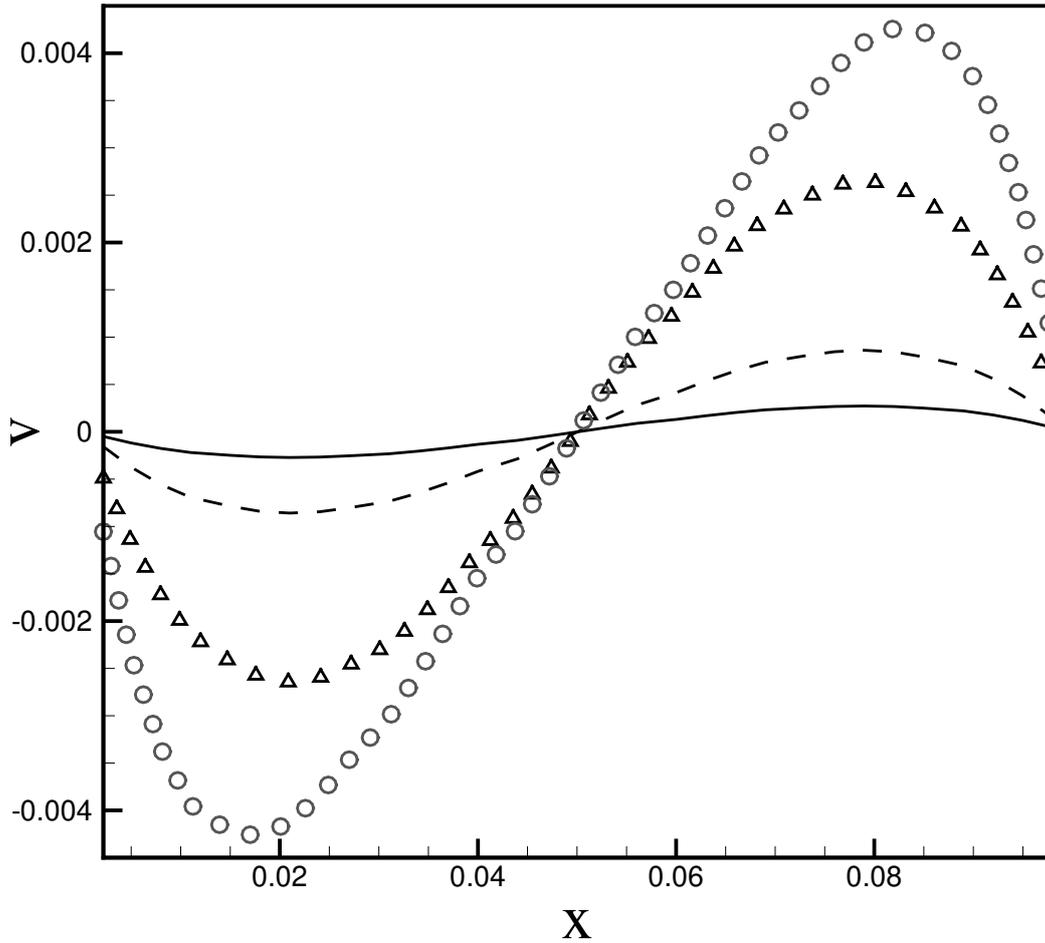


Figura 29: Perfis de velocidade vertical extraídos da secção horizontal localizada no centro da cavidade de cada uma das simulações mostradas pela figura 28. As linhas contínuas denotam a velocidade vertical para $Ra_m = 10^6$, a linha tracejada $Ra_m = 10^7$, os triângulos $Ra_m = 10^8$, e os círculos $Ra_m = 10^9$.

da forma $Nu \sim Ra_m^{\frac{1}{3}}$ para escoamentos em condições similares. Em termos percentuais, quando comparamos os resultados numéricos obtidos neste trabalho com os resultados teóricos de Cunha, Couto e Marcelino (2007), encontramos um erro relativo de 1,5%. Este resultado também é significativo em termos de validação da metodologia numérica, que até agora havia sido testada somente em situações de convecção natural, sem que houvesse qualquer efeito magnético no sistema.

Nas figuras 32 e 33 mostramos os resultados obtidos para diferentes condições de contorno magnéticas com número de Rayleigh magnético variando entre $10^6 < Ra_m < 10^9$ e número de Prandtl fixo $Pr = 100$. Neste estudo, variamos tanto o posicionamento do ímã como a sua razão de tamanho. Especificamente, mostramos na figura 32 os resultados encontrados para um ímã posicionado na região inferior. Em termos qualitativos, os resultados encontrados são muito parecidos com os resultados mostrados na figura 31, e são marcados por um número de Nusselt unitário para um determinado intervalo de números de Rayleigh e pelo sentido anti-horário da célula convectiva. Entretanto, observamos certos aspectos não observados anteriormente. Os gráficos (a), (b) e (c) da figura 32 mos-

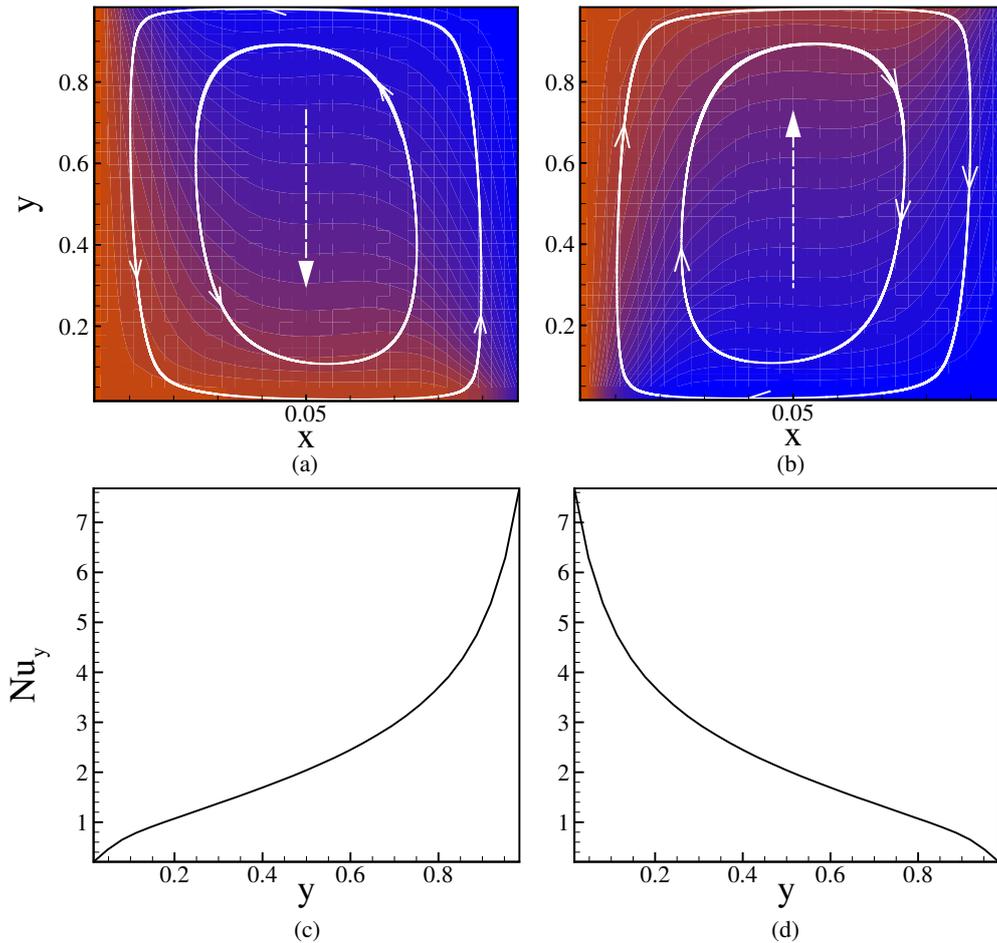


Figura 30: Os gráficos (a) e (b) mostram o comportamento do campo de temperatura e do campo de velocidade para o ímã posicionado na região inferior e superior respectivamente. Os gráficos (c) e (d) mostram como a taxa de transferência de calor local é afetada a partir do número de Nusselt local nos casos do ímã posicionado na região inferior e superior respectivamente.

tram padrões não uniformes nas linhas de corrente do fluido, com linhas mais próximas nas regiões inferiores da cavidade, logo indicando maiores velocidades, e linhas mais espaçadas nas regiões superiores da cavidade. O comportamento do gráfico (c) da figura 32 em especial, mostra uma dinâmica bastante peculiar. Nele, observamos na região superior um gradiente praticamente uniforme de temperatura, indicando uma maior transferência de calor por mecanismos difusivos. Esta observação é reforçada pelo espaçamento entre as linhas de corrente na região, que indicam menores velocidades, e portanto, um menor transporte convectivo de calor. O aspecto mais interessante que observamos foi a dependência dos mecanismos convectivos quanto a razão de tamanho do ímã. É notável que no caso apresentado na figura 31, o número de Nusselt cresce a partir de valores de Rayleigh magnético próximos de $Ra_m = 10^7$ para os três números de Prandtl em questão. No entanto, quando variamos a razão de tamanho do ímã vemos um impacto significativo na transição entre o regime difusivo, caracterizado por um número de Nusselt unitário, e o regime convectivo. De fato observamos uma transição próxima a $Ra_m = 10^7$ para razões de tamanho $r = 100 : 1$ e $Ra_m = 10^6$ para $r = 1 : 1$. Na figura 33 mostramos os resultados

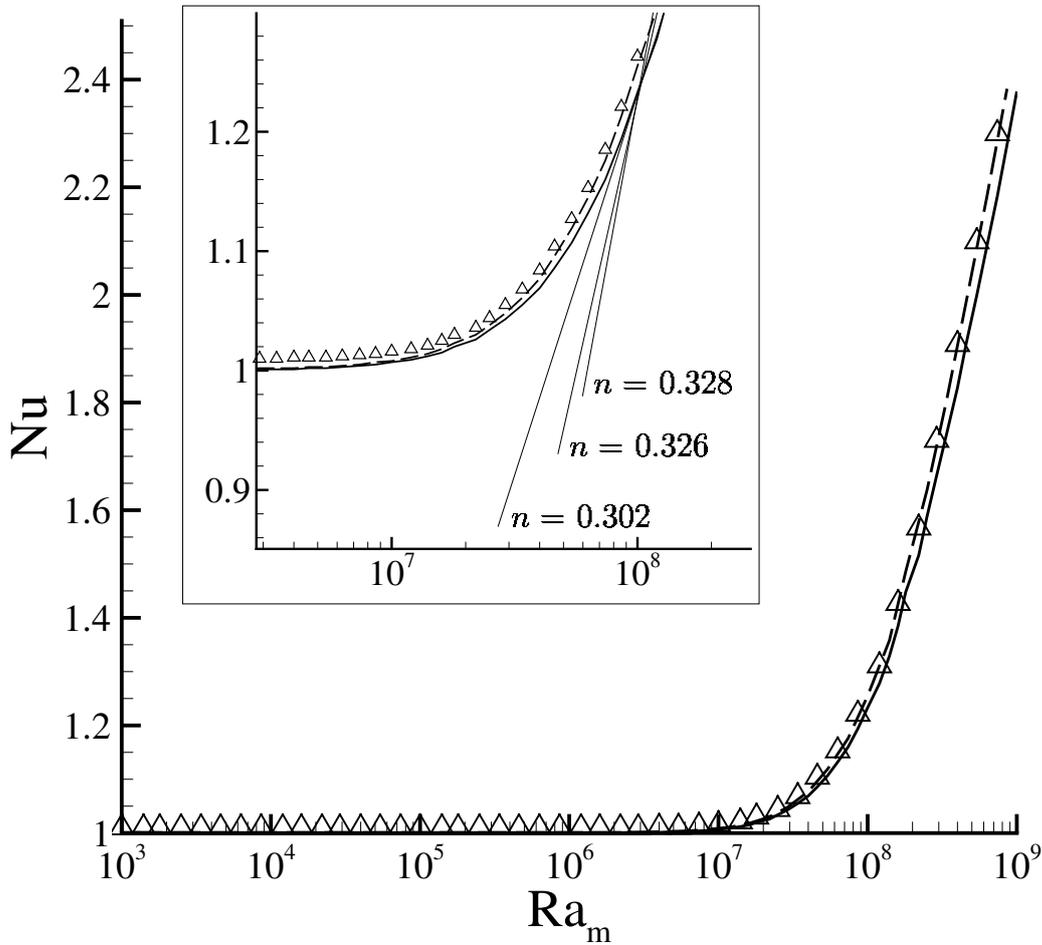


Figura 31: Resultados para o número de Nusselt global sobre a parede quente para diferentes números de Rayleigh, considerando três diferentes números de Prandtl $Pr = 10.0$, $Pr = 100$, e $Pr = 1000.0$. Os demais parâmetros do problema estão disponíveis na tabela. A linha sólida representa o número de Nusselt global para $Pr = 10.0$, a linha tracejada $Pr = 100.0$, e os triângulo $Pr = 1000.0$. O encarte mostra a o coeficiente da scaling law $Nu \sim Ra_m^n$ para os diferentes números de Prandtl.

obtidos para o ímã posicionado sobre a lateral esquerda da cavidade. Qualitativamente, observamos um comportamento tanto do campo de temperatura quanto do escoamento bem diferente do que foi observado anteriormente no caso do ímã posicionado sobre a face inferior da cavidade. Nesta configuração, observamos em ambos os gráficos (a), (b) e (c) a formação de mais de uma célula convectiva dentro da cavidade. O campo de temperatura é notadamente não uniforme nos casos (b) e (c) em função do transporte convectivo induzido na região central da cavidade. A formação de células convectivas simétricas no gráfico (a) indica a presença de instabilidades do tipo Rayleigh-Benard, caracterizado pela colinearidade entre os gradientes de temperatura e campo magnético. Em razões de tamanho menores, a presença de gradientes de campo magnético ortogonais aos gradientes de temperatura criam distorções nas células convectivas como observado nos gráficos (b) e (c), aumentando o número de Nusselt global e consequente a transferência de calor como mostrado no gráfico (d). Esta análise reforça os resultados anteriores obtidos dentro do

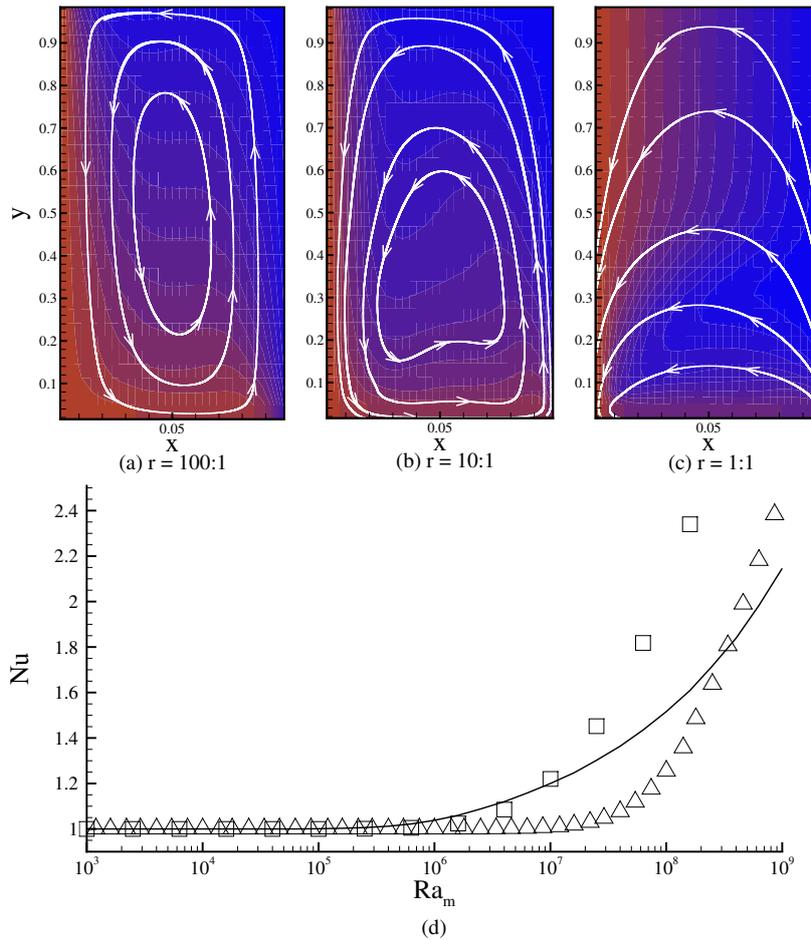


Figura 32: Resultados obtidos para o campo de temperatura, escoamento e número de Nusselt global sobre a parede quente da cavidade com o ímã posicionado na região inferior da cavidade. As simulações foram feitas com número de Pr fixo em $Pr = 100.0$, e com número de Rayleigh variando entre $10^3 \leq Ra_m \leq 10^9$. Três razões de tamanho r foram consideradas durante as simulações $r = 100 : 1$ denotada pelo símbolos triangulares, $r = 10 : 1$ denotada pelos símbolos quadrados, e $r = 1 : 1$ denotada pela linha sólida

grupo (GONTIJO; CUNHA, 2012), onde foi observado um aumento na taxa de transferência de calor a partir da produção de vorticidade em razão da ortogonalidade entre os gradientes de temperatura e campo magnético.

A figura 34 mostra como o coeficiente da scaling law é afetado em função da posição e tamanho do ímã. Vemos no gráfico (a) um aumento do coeficiente em função da razão de tamanho para o ímã posicionado na face inferior da cavidade. Já no gráfico (b), observamos um comportamento contrário, com uma diminuição do coeficiente em função da razão de tamanho. Tal comportamento é justificado em termos do que foi dito anteriormente a respeito da produção de vorticidade em função da ortogonalidade entre os gradientes de campo magnético e do campo de temperatura. No caso do ímã posicionado na face inferior, temos que o aumento da razão de tamanho contribui diretamente para a intensidade dos gradientes de campo magnético ortogonais ao campo de temperatura, enquanto que para o ímã posicionado na face esquerda da cavidade temos o efeito oposto.

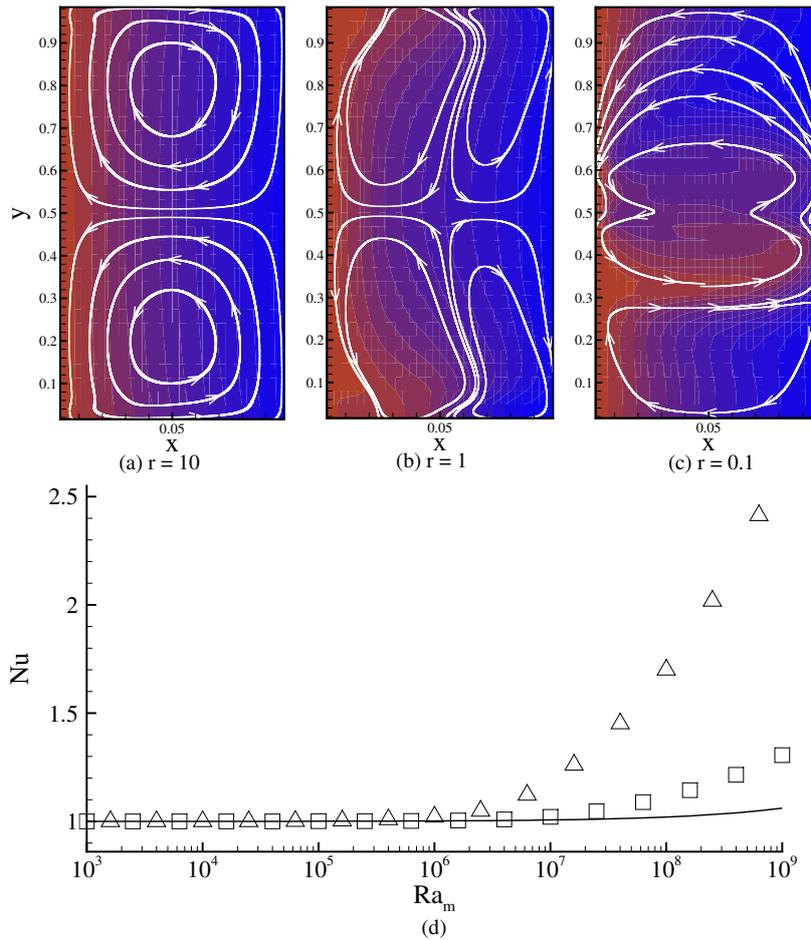


Figura 33: Resultados obtidos para o campo de temperatura, escoamento e número de Nusselt global sobre a parede quente da cavidade com o ímã posicionado na lateral esquerda da cavidade, próximo a parede quente. As simulações foram feitas com número de Pr fixo em $Pr = 100.0$, e com número de Rayleigh variando entre $10^3 \leq Ra_m \leq 10^9$. Três razões de tamanho r foram consideradas durante as simulações $r = 1 : 10$ denotada pelo símbolos triangulares, $r = 1 : 1$ denotada pelos símbolos quadrados, e $r = 10 : 1$ denotada pela linha sólida

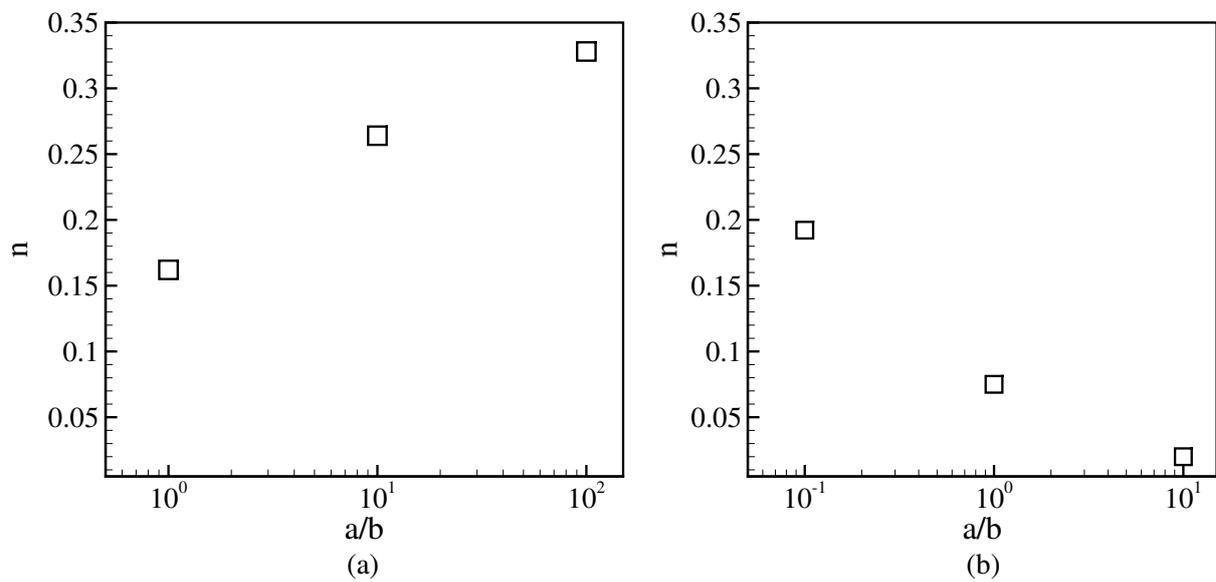


Figura 34: Gráficos (a) e (b) mostram o valor do expoente n da scaling law para o número de Nusselt global $Nu \sim Ra_m^n$ em função da razão de tamanho para o ímã posicionado na região inferior da cavidade e na região lateral esquerda da cavidade respectivamente. Três razões de tamanho foram usadas para obtenção destes resultados, sendo $r = 1 : 1$, $r = 10 : 1$, e $r = 100 : 1$ para o caso (a); e $r = 1 : 10$, $r = 1 : 1$, e $r = 10 : 1$ para o caso (b).

6 Conclusões

Neste trabalho estudamos dois tipos distintos de escoamentos de fluidos magnéticos e abordamos diferentes aspectos relativos a teoria da ferrohodinâmica. Revisitamos o problema da camada limite sobre placa plana laminar, com o objetivo de explorar escoamento parabólicos, e investigamos o acoplamento entre o campo de vorticidade e a magnetização do fluido em função do número de Péclet browniano Pe . Observamos que para baixos números de Peclet browniano os efeitos de transporte convectivo de magnetização são desprezíveis quando comparados com os termos de desalinhamento produzidos pelo acoplamento entre magnetização e vorticidade. Os resultados obtidos para números de Péclet browniano de ordem $Pe \sim 1$, se mostraram inconclusivos. De fato, tal comportamento para a magnetização neste regime já havia sido observado antes, como mostra (SHLIOMIS, 2002). Ainda neste contexto, Henjes (1995) discute a origem de tal comportamento para o campo de magnetização, indicando o importante papel das condições de contorno magnéticas e do campo de desmagnetização para a formulação de uma teoria mais abrangente. Os resultados também mostram um aumento relativo em ambos os coeficientes de fricção c_f e coeficiente de arrasto C_D , dependendo da combinação entre o número de Péclet browniano e o parâmetro de magnetização α . Aqui, observamos que o aumento dos coeficientes esta diretamente ligado a intensidade do parâmetro de magnetização α , que aumenta gradualmente até que se atinja um valor de saturação. Neste caso, o valor de saturação é dado pelo mesmo valor de saturação obtido pela solução assintótica no caso de baixos número de Péclet browniano, e se mostra diretamente proporcional à fração volumétrica de partículas do fluido. A teoria aqui utilizada para a modelagem da magnetização do ferrofluido nos limita a utilização de baixas frações volumétricas, de maneira que os efeitos magnéticos produzidos sobre o escoamento são relativamente baixos. Neste sentido, observamos um aumento máximo de aproximadamente 7% para o coeficiente de arrasto C_D ao considerarmos um parâmetro de magnetização $\alpha = 10$ e um regime de baixos números de Péclet magnético.

Além do problema da camada limite de um ferrofluido, também abordamos o problema de convecção termomagnética pura dentro de uma cavidade delgada, com objetivo de explorar a física dos escoamentos elípticos no contexto da ferrohodinâmica. Desta forma, demos continuidade aos trabalhos anteriores do grupo (CUNHA; COUTO; MARCELINO, 2007; GONTIJO; CUNHA, 2012), e estudamos o os efeitos de diferentes configurações de campo magnético sobre as taxas de transferência de calor. Especifica-

mente, avaliamos de maneira geral a relação entre o número de Nusselt sobre a parede quente da cavidade com os números de Rayleigh magnético Ra_m e a razão de tamanho do ímã r . Primeiramente, notamos que para um ímã posicionado imediatamente abaixo da face inferior da cavidade, somos capazes de encontrar uma scaling law do tipo $Nu \sim Ra_m^n$ para números de Rayleigh magnéticos suficientemente grandes. De fato, encontramos que no caso de fluidos com números de Prandtl da ordem de $Pr \sim 100$ e ímãs cuja razão de tamanho é $r > 1$, o coeficiente n da scaling law $Nu \sim Ra_m^n$ tende ao valor teórico de $n = \frac{1}{3}$ (CUNHA; COUTO; MARCELINO, 2007). Observamos também que podemos controlar o sentido de rotação da célula convectiva a partir do posicionamento do ímã. Neste caso, podemos especular a utilização do uso de ferrofluido em situações onde o controle da transferência de calor é necessário, de maneira que seja possível tanto aumentar quanto diminuir a transferência de calor a partir do posicionamento adequado dos ímãs permanentes. Por fim, notamos que o comportamento do expoente n da scaling law $Nu \sim Ra_m^n$ se comporta de forma diferente em função do posicionamento do ímã permanente. De forma que, observamos um aumento do número de Nusselt em função da razão de tamanho com o ímã posicionado na face inferior da cavidade, e uma diminuição do número de Nusselt em função da razão de tamanho r para o ímã posicionado na lateral quente da cavidade.

Referências

- ACHESON, D. J. *Elementary fluid dynamics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 7, 36, 41 e 46.
- ALEGRETTI, C. F. Uma nova perspectiva em ferrohidrodinâmica: controle de deslocamento de camada limite. 2017. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânica, Universidade de Brasília (UnB). Citado 5 vezes nas páginas vi, viii, 35, 37 e 63.
- ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. Computational fluid dynamics and heat transfer. *Washington: Hemisphere*, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 37, 47 e 49.
- ASHOURI, M. et al. Correlation for nusselt number in pure magnetic convection ferrofluid flow in a square cavity by a numerical investigation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 322, n. 22, p. 3607–3613, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 5, 8, 31, 59, 69 e 72.
- ASHOURI, M.; SHAFII, M. B. Numerical simulation of magnetic convection ferrofluid flow in a permanent magnet–inserted cavity. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 442, p. 270–278, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 59.
- BAILEY, R. Lesser known applications of ferrofluids. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 39, n. 1-2, p. 178–182, 1983. Citado na página 3.
- BARENBLATT, G. I. *Flow, Deformation and Fracture*. [S.l.]: Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 37.
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.
- BEJAN, A. *Convection heat transfer*. [S.l.]: John wiley & sons, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 69.
- BELL, J. B.; COLELLA, P.; GLAZ, H. M. A second-order projection method for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 85, n. 2, p. 257–283, 1989. Citado na página 66.
- BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 43.
- BIBO, A. et al. Electromagnetic ferrofluid-based energy harvester. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 376, n. 32, p. 2163–2166, 2012. Citado na página 4.
- BLASIUS, H. Boundary layers in fluids of small viscosity. *Z Math Physik*, v. 56, n. 1, p. 1–37, 1908. Citado 7 vezes nas páginas vii, viii, 7, 47, 48, 49 e 57.

- BLUMS, E.; CEBERS, A.; MAIOROV, M. M. *Magnetic fluids*. [S.l.]: Walter de Gruyter, 1997. Citado 3 vezes nas páginas vi, 1 e 2.
- BLŪMS, E.; OZOLS, R.; ROSENSWEIG, R. Introduction to the magnetic fluids bibliography. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, North-Holland, v. 85, n. 1-3, p. 303–304, 1990. Citado 2 vezes nas páginas vi e 4.
- CAUCHY, A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides. *Exercices de Mathématiques*, v. 2, n. 1827, p. 60–69, 1827. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- CHORIN, A.; MARSDEN, J. A mathematical introduction to fluid dynamics. *Texts in Applied Mathematics*, v. 4, 1992. Citado na página 66.
- CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 2, n. 1, p. 12–26, 1967. Citado na página 66.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968. Citado na página 66.
- COEY, J. M. *Magnetism and magnetic materials*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 29.
- COURANT, R. *Differential and integral calculus*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 2. Citado na página 30.
- CULLITY, B. D.; GRAHAM, C. D. *Introduction to magnetic materials*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.
- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013. Citado na página 69.
- CUNHA, F. R.; COUTO, H.; MARCELINO, N. A study on magnetic convection in a narrow rectangular cavity. *Magnetohydrodynamics*, v. 43, n. 4, p. 421–428, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 6, 8, 59, 72, 73, 79 e 80.
- CUNHA, F. R.; ROSA, A. P.; DIAS, N. J. Rheology of a very dilute magnetic suspension with micro-structures of nanoparticles. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 397, p. 266–274, 2016. Citado na página 3.
- CUNHA, F. R.; SOBRAL, Y. D. Asymptotic solution for pressure-driven flows of magnetic fluids in pipes. *Journal of Magnetism and Magnetic materials*, Elsevier, v. 289, p. 314–317, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 5, 31 e 37.
- DAVIS, G. de V. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. *International Journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 3, n. 3, p. 249–264, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 69.
- DEBYE, P. J. W. *Polar molecules*. [S.l.]: Chemical Catalog Company, Incorporated, 1929. Citado na página 22.
- DYKE, M. V.; DYKE, M. V. An album of fluid motion. Parabolic Press Stanford, 1982. Citado 4 vezes nas páginas vii, viii, 37 e 58.
- EINSTEIN, A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. [S.l.]: Courier Corporation, 1956. Citado na página 2.

- FELDERHOF, B. Magnetoviscosity and relaxation in ferrofluids. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 3, p. 3848, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 24.
- FERTMAN, V. Heat dissipation in high-speed magnetic fluid shaft seal. *IEEE Transactions on magnetics*, IEEE, v. 16, n. 2, p. 352–357, 1980. Citado na página 3.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 47.
- FINLAYSON, B. Convective instability of ferromagnetic fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 40, n. 4, p. 753–767, 1970. Citado na página 59.
- FINLAYSON, B. A. Spin-up of ferrofluids: The impact of the spin viscosity and the langevin function. *Physics of Fluids*, AIP, v. 25, n. 7, p. 073101, 2013. Citado na página 34.
- FRENKEL, Y. I. Kinetic theory of liquids. Dover, 1955. Citado na página 20.
- GONTIJO, R.; CUNHA, F. Experimental investigation on thermo-magnetic convection inside cavities. *Journal of nanoscience and nanotechnology*, American Scientific Publishers, v. 12, n. 12, p. 9198–9207, 2012. Citado 7 vezes nas páginas vi, 3, 6, 8, 59, 76 e 79.
- GONZALEZ, O.; STUART, A. M. *A first course in continuum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. Citado na página 32.
- HALL, W.; BUSENBERG, S. Viscosity of magnetic suspensions. *The Journal of Chemical Physics*, AIP, v. 51, n. 1, p. 137–144, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 22.
- HAMMING, R. *Numerical methods for scientists and engineers*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado na página 69.
- HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The physics of fluids*, AIP, v. 8, n. 12, p. 2182–2189, 1965. Citado 3 vezes nas páginas viii, 66 e 67.
- HENJES, K. Maxwell’s equations and vorticity: A note on the viscosity of magnetic fluids. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 146, n. 3, p. L236–L240, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 31, 52 e 79.
- HIEMENZ, P. C.; HIEMENZ, P. C. *Principles of colloid and surface chemistry*. [S.l.]: M. Dekker New York, 1986. v. 9. Citado na página 2.
- HINCH, E. J. *Perturbation methods*. [S.l.]: Cambridge university press, 1991. Citado na página 45.
- HUANG, C. et al. Damping applications of ferrofluids: A review. *Journal of Magnetism, KOREAN MAGNETICS SOC KOREA SCIENCES & TECHNOL CTR*, RM 905, YEOKSAM-DONG 635-4, KANGNAM-KU, SEOUL, 135-703, SOUTH KOREA, v. 22, n. 1, p. 109–121, 2017. Citado na página 3.
- JEFFREYS, H.; JEFFREYS, B. *Methods of mathematical physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. Citado na página 33.
- JILES, D. *Introduction to magnetism and magnetic materials*. [S.l.]: CRC press, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 9.

- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 59, n. 2, p. 308–323, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 69.
- KREKHOV, A. P.; SHLIOMIS, M. I.; KAMIYAMA, S. Ferrofluid pipe flow in an oscillating magnetic field. *Physics of Fluids*, AIP, v. 17, n. 3, p. 033105, 2005. Citado na página 5.
- LAJVARDI, M. et al. Experimental investigation for enhanced ferrofluid heat transfer under magnetic field effect. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 322, n. 21, p. 3508–3513, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 59.
- LANGEVIN, P. Magnétisme et théorie des électrons. *Ann. chim. et phys.*, n. 8, p. 203, 1905. Citado na página 16.
- MARTSENYUK, M.; RAIKHER, Y. L.; SHLIOMIS, M. On the kinetics of magnetization of suspensions of ferromagnetic particles. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, v. 65, p. 834–841, 1973. Citado na página 19.
- MCCAIG, M.; AG, C. Permanent magnets in theory and practice (pentech, london, 1977). *Google Scholar*, p. 192–231, 1977. Citado na página 62.
- MCNAB, T.; FOX, R.; BOYLE, A. Some magnetic properties of magnetite (fe₃o₄) microcrystals. *Journal of Applied Physics*, AIP, v. 39, n. 12, p. 5703–5711, 1968. Citado na página 20.
- MCTAGUE, J. P. Magnetoviscosity of magnetic colloids. *The Journal of Chemical Physics*, AIP, v. 51, n. 1, p. 133–136, 1969. Citado 3 vezes nas páginas 4, 22 e 33.
- MOSKOWITZ, R.; STAHL, P.; REED, W. R. *Inertia damper using ferrofluid*. [S.l.]: Google Patents, 1978. US Patent 4,123,675. Citado na página 3.
- NAYFEH, M. H.; BRUSSEL, M. K. *Electricity and magnetism*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2015. Citado na página 10.
- NÉEL, L. Théorie du traînage magnétique des ferromagnétiques en grains fins avec application aux terres cuites. *Ann. géophys.*, v. 5, p. 99–136, 1949. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 20.
- NEURINGER, J. L. Some viscous flows of a saturated ferro-fluid under the combined influence of thermal and magnetic field gradients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 1, n. 2, p. 123–137, 1966. Citado na página 59.
- NEURINGER, J. L.; ROSENSWEIG, R. E. Ferrohydrodynamics. *The Physics of Fluids*, AIP, v. 7, n. 12, p. 1927–1937, 1964. Citado 6 vezes nas páginas 1, 2, 4, 10, 31 e 33.
- ODENBACH, S.; THURM, S. Magnetoviscous effects in ferrofluids. *LECTURE NOTES IN PHYSICS-NEW YORK THEN BERLIN-*, Springer, p. 185–201, 2002. Citado na página 24.
- OLDENBURG, C. M.; BORGLIN, S. E.; MORIDIS, G. J. Numerical simulation of ferrofluid flow for subsurface environmental engineering applications. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 38, n. 3, p. 319–344, 2000. Citado na página 3.
- PRANDTL, L. Verhandlungen des dritten internationalen mathematiker-kongresses in heidelberg: vom 8. bis 13. august 1904. *Bulletin of the American Mathematical Society*, p. 484–484, 1905. Citado na página 36.

- PURCELL, E. M. et al. *Electricity and magnetism*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1965. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- RINALDI, C.; BRENNER, H. Body versus surface forces in continuum mechanics: Is the maxwell stress tensor a physically objective cauchy stress? *Physical Review E*, APS, v. 65, n. 3, p. 036615, 2002. Citado na página 34.
- RINALDI, C. et al. Magnetic fluid rheology and flows. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, Elsevier, v. 10, n. 3-4, p. 141–157, 2005. Citado na página 1.
- RINALDI, C.; ZAHN, M. Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields. *Physics of Fluids*, AIP, v. 14, n. 8, p. 2847–2870, 2002. Citado na página 34.
- ROSA, A.; GONTIJO, R.; CUNHA, F. Laminar pipe flow with drag reduction induced by a magnetic field gradient. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 3907–3918, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 3, 31 e 37.
- ROSENSWEIG, R.; KAISER, R.; MISKOLCZY, G. Viscosity of magnetic fluid in a magnetic field. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 680–686, 1969. Citado 4 vezes nas páginas 4, 22, 33 e 35.
- ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Dover Publications Inc., 1997. Citado 8 vezes nas páginas 1, 4, 10, 15, 18, 21, 35 e 59.
- ROSENSWEIG, R. E. Basic equations for magnetic fluids with internal rotations. *LECTURE NOTES IN PHYSICS-NEW YORK THEN BERLIN-*, Springer, p. 61–84, 2002. Citado na página 2.
- ROSENSWEIG, R. E. Continuum equations for magnetic and dielectric fluids with internal rotations. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 121, n. 3, p. 1228–1242, 2004. Citado na página 23.
- RUSSEL, W. B.; SAVILLE, D. A.; SCHOWALTER, W. R. *Colloidal dispersions*. [S.l.]: Cambridge university press, 1989. Citado na página 2.
- SCHLICHTING, H. et al. *Boundary-layer theory*. [S.l.]: Springer, 1955. v. 7. Citado 3 vezes nas páginas 37, 41 e 47.
- SHLIOMIS, M. Effective viscosity of magnetic suspensions. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, v. 61, n. 2411, p. s1971d, 1971. Citado 4 vezes nas páginas 2, 21, 22 e 34.
- SHLIOMIS, M. I. Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 6, p. 060501, 2001. Citado na página 52.
- SHLIOMIS, M. I. Ferrohydrodynamics: Retrospective and issues. *LECTURE NOTES IN PHYSICS-NEW YORK THEN BERLIN-*, Springer, p. 85–111, 2002. Citado 9 vezes nas páginas 1, 2, 21, 23, 24, 52, 53, 61 e 79.
- SHLIOMIS, M. I.; MOROZOV, K. I. Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field. *Physics of Fluids*, AIP, v. 6, n. 8, p. 2855–2861, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 37.
- SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. [S.l.]: Oxford university press, 1985. Citado na página 47.

SOBRAL, Y. D. Notas de aula em seminários de mecânica. 2017. Citado na página 31.

SOD, G. A. *Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary-value problems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 66.

SPALDIN, N. A. *Magnetic materials: fundamentals and applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 15.

STEPHEN, P. S. *Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles*. [S.l.]: Google Patents, 1965. US Patent 3,215,572. Citado 2 vezes nas páginas vi e 3.

TENNEKES, H. et al. *A first course in turbulence*. [S.l.]: MIT press, 1972. Citado na página 37.

TRITTON, D. J. *Physical fluid dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 58.

TRUESDELL, C. A. *A first course in rational continuum mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 1992. v. 1. Citado na página 31.

WEISS, P. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. Phys. Theor. Appl.*, v. 6, n. 1, p. 661–690, 1907. Citado na página 15.