

Lucas Nixon Queiroz Xavier

Modelos de Matrizes Aleatórias e Integrais Sobre Grupos de Lie

Brasília, Distrito Federal, Brasil

10 de Agosto de 2018

Lucas Nixon Queiroz Xavier

Modelos de Matrizes Aleatórias e Integrais Sobre Grupos de Lie

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física Teórica.

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Arsen Melikyan

Coorientador: Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Brasília, Distrito Federal, Brasil

10 de Agosto de 2018

Agradecimentos

Agradeço aos professores Arsen Melikyan e Aleksandr Pinzul, pela orientação, pela paciência e por estarem sempre disponíveis. Agradeço também a minha família, em especial ao meu pai José Luis e à minha irmã Raíza, pelo apoio, e a Abighail, pela companhia durante esses dois anos.

Resumo

Um estudo detalhado dos modelos de matrizes aleatórias como forma de aproximação da teoria das cordas bosônicas e da gravitação quântica em $2d$ é realizado. Diferentes métodos matemáticos para a resolução desses modelos, como a aproximação planar e o método dos polinômios ortogonais, são descritos, e os resultados são comparados com aqueles derivados das teorias contínuas. O problema da integração sobre o grupo de calibre $U(N)$ é formulado e, como exemplo, a integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber é resolvida. Um novo método de integração sobre variáveis angulares, introduzido recentemente na literatura, é revisado, visando aplicações futuras em teoria de campos não-comutativos.

Abstract

The theory of random matrix models as a form of approximating bosonic string theory and $2d$ quantum gravity is reviewed. Some mathematical methods to solve matrix models, such as the planar approximation and the method of orthogonal polynomials are described, and the results obtained are compared to the ones which come from the continuum theories. The problem of integrating over the gauge group $U(N)$ is formulated and, as an example, the Harish-Chandra-Itzykson-Zuber integral is calculated. A new method to integrate over angular variables that appeared recently in the literature is reviewed, with the future aim of applying it to non-commutative quantum field theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Uma corda fechada se propagando de uma configuração $C1$ a uma configuração $C2$ no espaço-tempo. A corda em movimento descreve uma superfície cilíndrica.	15
Figura 2 – Primeiros termos da soma sobre topologias em (1.1.2).	16
Figura 3 – Triangulação da superfície de gênero $h = 1$ (toro) da figura 2.	17
Figura 4 – Representação pictórica da integral (1.1.4). Desenhamos $4n$ arestas saindo de um vértice e as conectamos aos pares, de modo que não sobrem arestas livres. O número de maneiras distintas de se fazer isso é o resultado da integral (1.1.5).	18
Figura 5 – Propagador $\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \delta_{il} \delta_{jk}$	20
Figura 6 – Vértice de primeira ordem ($n = 1$) e um exemplo de diagrama possível. Combinamos arestas preservando orientações. Note os laços orientados.	20
Figura 7 – Vértice de 3 pontos inscrito em um triângulo. A dualidade entre o vértice e o triângulo é dada pela regra de inscrição descrita no texto.	20
Figura 8 – Triangulação de uma superfície. Cada triângulo é dual a um vértice de 3 pontos no sentido descrito no texto.	21
Figura 9 – Deformação do corte de ω descrita no texto.	27
Figura 10 – Contorno fechado $C_{1,2}$ obtido a partir da extensão de $\tilde{C}_{1,2}$. Note que z está dentro de C_1 nesse caso.	28
Figura 11 – O mapa de Zhukowsky leva a região hachurada ao plano complexo com um corte em $[-1, 1]$. Quando mapeia o interior do círculo, percorrido no sentido horário, andamos no corte da esquerda para a direita. Quando mapeia o exterior do círculo, andamos no corte da direita para a esquerda.	30
Figura 12 – Lei do semi-círculo de Wigner para $g = 1$	35
Figura 13 – Densidade de auto-valores no caso do potencial M^4 para $g = 1$	36
Figura 14 – Contribuições para o coeficiente $a_n^{(3)}$ de acordo com a representação pictórica introduzida acima.	50
Figura 15 – Cadeia de spins, com T caracterizando a evolução do estado $ \sigma_i\rangle$ ao estado $ \sigma_{i+1}\rangle$	60
Figura 16 – Vértice, e respectivos pontos adjacentes, associado ao peso estatístico $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$	60
Figura 17 – Para obter a matriz de transferência entre duas linhas, tomamos a soma, sobre todos os estados do espaço horizontal intermediário, do produto das matrizes R associadas a cada vértice envolvido.	61
Figura 18 – Rede de Manhattan correspondente a uma dada rede cúbica.	62
Figura 19 – Matriz R associada à rede de Manhattan.	62

Figura 20 – Representação gráfica do propagador Δ_F	83
Figura 21 – Diagramas possíveis para a expansão em primeira ordem em λ da teoria $\lambda\phi^4$, sem considerar diagramas que contém laços.	83
Figura 22 – Transição de fase do sistema ferromagnético.	92
Figura 23 – Isotermas próximas à transição de fase líquido \rightarrow gás.	93

Sumário

	Introdução	13
1	MODELOS DE MATRIZES ALEATÓRIAS	15
1.1	A teoria das cordas como uma teoria de superfícies aleatórias	15
1.2	Modelo de uma matriz: aproximação planar	21
1.3	Modelo de uma matriz: contribuição de gêneros mais altos	43
2	INTEGRAIS ANGULARES	55
2.1	Integrais sobre o grupo unitário $U(N)$	55
2.2	Modelo de matrizes para $c > 1$	59
3	ESTRUTURA DE FASE DA TEORIA DE CAMPOS NÃO-COMUTATIVOS E INTEGRAIS ANGULARES	73
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	79
	APÊNDICE A – TEORIA DE CAMPOS E DIAGRAMAS DE FEYN- MAN	81
	APÊNDICE B – GRUPOS E ÁLGEBRAS DE LIE	85
	APÊNDICE C – FENÔMENOS CRÍTICOS E TEORIA CONFORME DE CAMPOS	91
	REFERÊNCIAS	97

Introdução

Apesar do sucesso do Modelo Padrão como uma teoria efetiva das interações fundamentais, existem evidências de que ele não é a teoria final, pois efeitos quânticos gravitacionais, que se tornam relevantes em uma escala de energia $m_P^2 = \hbar c/G$ e não são levados em conta no Modelo Padrão, podem alterar a dinâmica das partículas elementares. Nessa escala de energia, acredita-se que o espaço-tempo se torne não-comutativo, com uma escala de distância mínima dada pelo comprimento de Planck $L_P^2 = \hbar G/c^3$. Para se ter uma descrição completa da natureza, portanto, é necessário o desenvolvimento de uma teoria quântica da gravitação.

No entanto, se tentarmos quantizar a teoria da gravitação de Einstein em quatro dimensões espaço-temporais do mesmo modo que quantizamos as outras interações fundamentais, devido ao fato de que a interação gravitacional não é renormalizável, a teoria decorrente não produz resultados sensatos. Em duas dimensões, a teoria de Einstein é trivial, no sentido de que a ação de Einstein-Hilbert é um invariante topológico. Nesse caso, a quantização da teoria se mostra mais simples, com a teoria quântica resultante podendo ser escrita como uma expansão sobre topologias. O estudo dessa teoria mais simples pode ajudar a entender alguns aspectos da teoria 4-dimensional.

Mais ainda, a gravidade em duas dimensões, sendo uma teoria de superfícies, possui uma regularização bastante natural em termos da discretização dessas superfícies, que pode ser realizada considerando-se triangulações das mesmas. A teoria quântica assim regularizada não apresenta divergências, e os resultados derivados dela são, em princípio, sensatos.

Os modelos de matrizes aleatórias podem ser utilizados para gerar essas discretizações e, utilizando esse formalismo, podemos obter informações importantes sobre a teoria da gravitação quântica em $2d$, como seu comportamento crítico. Mais ainda, podemos utilizar modelos de matrizes para estudar as chamadas teorias de campos não-comutativos, que esperamos que descrevam a física em escalas de energia da ordem da massa de Planck m_P . Nesta dissertação, introduziremos os modelos de matrizes aleatórias e sua relação com a triangulação de superfícies bidimensionais e com as teorias de campos não-comutativos, dando ênfase aos métodos matemáticos necessários para a solução desses modelos.

1 Modelos de Matrizes Aleatórias

1.1 A teoria das cordas como uma teoria de superfícies aleatórias

Uma das principais motivações para se estudar os modelos de matrizes aleatórias é a teoria das cordas. Considere uma corda fechada se propagando em um espaço de Minkowski d -dimensional \mathcal{M} . Assim como o movimento de uma partícula no espaço-tempo descreve uma curva, chamada linha-mundo, uma corda, ao se mover no espaço-tempo, varre uma superfície bidimensional, chamada folha-mundo.

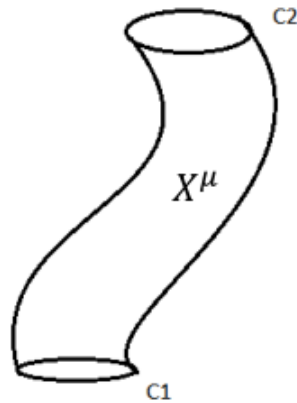


Figura 1 – Uma corda fechada se propagando de uma configuração $C1$ a uma configuração $C2$ no espaço-tempo. A corda em movimento descreve uma superfície cilíndrica.

Sejam σ e τ as coordenadas da folha-mundo e $X^\mu(\sigma, \tau)$, $\mu = 0, \dots, d - 1$, as coordenadas da incorporação da folha-mundo no espaço-tempo. Sejam também $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ a métrica do espaço-tempo de Minkowski e g_{ij} a métrica da folha-mundo. A dinâmica da corda é dada pela ação (para mais detalhes, consulte [1][2][3][4]):

$$\begin{aligned} S[X, g] &= -\frac{T}{2} \int d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} - \beta \int d\sigma d\tau \sqrt{-g} + \gamma \int d\sigma d\tau \sqrt{-g} R \\ &= -\frac{T}{2} \int d\sigma d\tau \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} - \beta A + \gamma \chi, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

onde o primeiro termo é a ação de Polyakov [1], A é a área da folha-mundo, R é o escalar de Ricci da superfície, T é uma constante relacionada à tensão na corda, β é uma constante cosmológica e γ é uma constante de acoplamento à característica de Euler χ da superfície. Note que podemos ver o primeiro termo de (1.1.1) como uma ação que descreve a interação de campos escalares, dados por X^μ , com a gravidade em duas dimensões, dada pela métrica g_{ij} . Assim, considerando os dois termos seguintes como a ação de Einstein-Hilbert, a teoria

das cordas é equivalente a uma teoria de gravitação em duas dimensões. Isso significa que uma teoria quântica de cordas é necessariamente uma teoria quântica da gravidade, pelo menos em $2d$, onde consideramos as interações dos campos de matéria X^μ com as flutuações do espaço-tempo de fundo.

A quantização da teoria das cordas por integrais de caminho se dá de forma análoga ao caso de uma partícula livre. Lembrando que a amplitude de probabilidade de uma partícula livre se mover de um ponto $p \in \mathcal{M}$ a um ponto $q \in \mathcal{M}$ é dada pela soma sobre todos os caminhos que ela pode percorrer entre esses dois pontos, a quantização da teoria de cordas, devida a Polyakov [1], é realizada considerando-se a soma sobre todas as superfícies possíveis que uma corda pode descrever ao se mover, de uma configuração inicial $C1$ a uma configuração final $C2$, no espaço-tempo. Formalmente, o funcional gerador da teoria é dado por (consulte o apêndice A para uma introdução aos conceitos de teoria de campos necessários para o entendimento da dissertação):

$$Z = \sum_h \lambda^h \int \frac{\mathcal{D}g_{ij}}{\text{Vol}(\text{Diff})} \int \mathcal{D}X^\mu e^{iS[X,g]}. \quad (1.1.2)$$

A topologia de uma superfície bidimensional é totalmente determinada pela sua característica de Euler $\chi = 2 - 2h$, onde h é o gênero da superfície, que, em termos leigos, representa o número de “furos” que a superfície apresenta. Então, em (1.1.2), somamos sobre todas as topologias e sobre todas as geometrias possíveis que a superfície descrita pela corda, ao se propagar no espaço-tempo, pode apresentar, sendo a soma sobre todas as geometrias dada pela integral sobre as métricas da folha-mundo e a soma sobre as topologias dada em termos de um parâmetro λ , introduzido para contar o número de “furos” na superfície. A integral sobre X^μ representa uma soma sobre todas as incorporações de cada superfície no espaço-tempo. A ação (1.1.1) é invariante sobre reparametrizações (difeomorfismos) da folha-mundo, o que significa que integrais sobre métricas que diferem por um difeomorfismo são equivalentes. Então, devemos integrar sobre todas as métricas módulo reparametrizações, o que explica o fator $\text{Vol}(\text{Diff})$, o volume do grupo de difeomorfismos da folha-mundo.

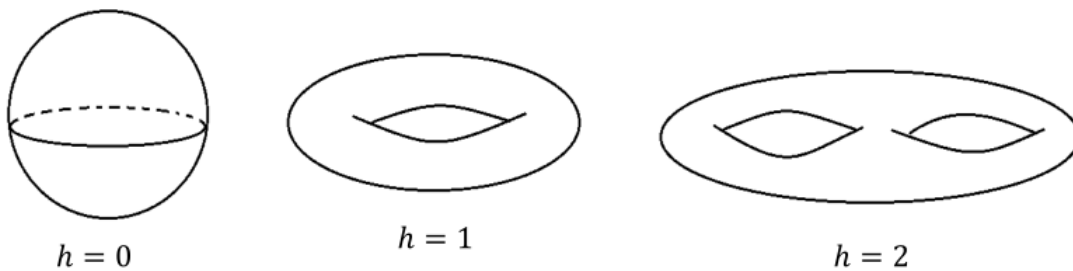


Figura 2 – Primeiros termos da soma sobre topologias em (1.1.2).

No sentido descrito acima, a teoria de cordas pode ser vista como uma teoria de superfícies aleatórias. Entretanto, como o espaço das métricas de uma superfície de Riemann possui dimensão infinita [5], a integração sobre esse espaço em (1.1.2) não é bem definida. Para simplificar, vamos considerar uma teoria de gravitação pura, onde a ação é dada apenas por $S = -\beta A + \gamma \chi$ e o funcional gerador envolve apenas somas sobre topologias e geometrias:

$$Z = \sum_h \int \mathcal{D}g e^{-\beta A + \gamma \chi}. \quad (1.1.3)$$

Essa situação pode ser interpretada como uma teoria de cordas em $d = 0$ dimensões, isto é, uma corda se propagando em um espaço de incorporação inexistente. Para facilitar o cálculo da integral sobre geometrias, podemos discretizar as superfícies que aparecem na figura 2 utilizando triangulações aleatórias por triângulos equiláteros. Sendo A a área de cada triângulo, tomando o limite $A \rightarrow 0$, é razoável esperar que recuperemos as superfícies originais, para cada gênero h . Considere então uma superfície de gênero h triangulada por triângulos equiláteros. Em cada vértice i , incidem N_i triângulos. Podemos calcular o escalar de Ricci R_i em cada vértice i , lembrando que, em duas dimensões, $R_i = 2K_i$, onde K_i é a curvatura de Gauss no vértice i . Definindo a área infinitesimal de cada vértice como $\sigma_i = \frac{N_i}{3}$, pelo teorema de Gauss-Bonnet [6], $\frac{N_i}{3} K_i = 2\pi - \alpha_i$, onde α_i é a soma dos ângulos internos entre as arestas que se encontram no vértice i para cada triângulo incidente. Para triângulos equiláteros, $\alpha_i = \frac{\pi}{3} N_i$, e temos que $R_i = 2\pi \left(\frac{6 - N_i}{N_i} \right)$, o que significa que a curvatura da superfície é determinada pela triangulação escolhida. Nesse sentido, podemos esperar que a soma sobre todas as geometrias possíveis em (1.1.2) possa ser aproximada por uma soma sobre triangulações [4][7][8]. Note ainda que os triângulos podem ser substituídos por qualquer tipo de polígono sem causar nenhuma mudança nas considerações acima.

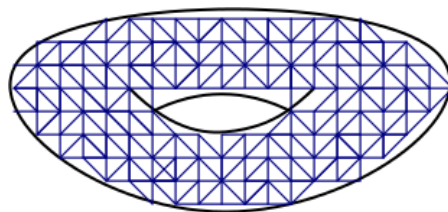


Figura 3 – Triangulação da superfície de gênero $h = 1$ (toro) da figura 2.

Os modelos de matrizes aleatórias nos fornecem uma maneira natural de triangular (e somar triangulações) de superfícies bidimensionais. Considere a integral

$$Z = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\lambda \varphi^4}{4!}}, \quad (1.1.4)$$

que pode ser vista como o funcional gerador de uma teoria de campos escalares em $d = 0$ dimensões. Podemos calcular a integral (1.1.4) expandindo perturbativamente o termo

$e^{\frac{\lambda\varphi^4}{4!}}$ em potências da constante de acoplamento λ . Temos que

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} \frac{\varphi^{4n}}{(4!)^n}, \quad (1.1.5)$$

e a integral sobre φ é

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} \varphi^{4n} = (4n - 1)!!. \quad (1.1.6)$$

Como $(4n - 1)!! = (4n - 1)(4n - 3)\dots 1$ é o número de maneiras diferentes de se combinar $4n$ objetos em n pares, podemos introduzir uma forma pictórica de se calcular (1.1.5): desenhe $4n$ arestas saindo de um vértice central, contando as linhas no sentido horário. Cada aresta pode ser vista como uma das variáveis φ que multiplicam a exponencial no integrando. A (1.1.5) é a soma, sobre a quantidade de arestas, do número de combinações das mesmas em pares.

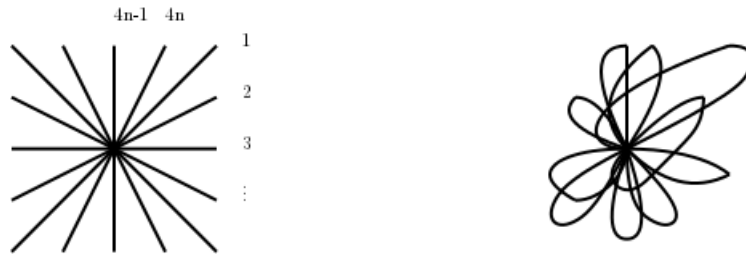


Figura 4 – Representação pictórica da integral (1.1.4). Desenhamos $4n$ arestas saindo de um vértice e as conectamos aos pares, de modo que não sobrem arestas livres. O número de maneiras distintas de se fazer isso é o resultado da integral (1.1.5).

Cada linha acima é um propagador $\langle\varphi\varphi\rangle$, e, com este sendo trivial no caso considerado, podemos unir as arestas como bem entendermos. Cada figura obtida como resultado das combinações de todas as arestas é um diagrama de Feynman. Também podemos calcular a integral (1.1.5) introduzindo a chamada integral fonte:

$$\Sigma(J) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2} + J\varphi} = e^{\frac{J^2}{2}}. \quad (1.1.7)$$

Temos que

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} \varphi^{4n} = \frac{\partial^{4n}}{\partial J^{4n}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2} + J\varphi} \Big|_{J=0} = \frac{\partial^{4n}}{\partial J^{4n}} e^{\frac{J^2}{2}} \Big|_{J=0}, \quad (1.1.8)$$

e as aplicações da derivada devem ser feitas em pares, de modo que os fatores multiplicativos de J sejam removidos antes de tomarmos $J = 0$. Temos então uma relação de um para um entre as aplicações da derivada aos pares na integral fonte e as combinações de arestas aos pares mostradas na figura 4.

Quando o número de arestas n se torna muito grande, a figura que os diagramas formam pode ser vista como uma malha sobre uma superfície bidimensional. No entanto,

precisamos de uma noção de orientação para definir uma superfície de Riemann. Para tanto, vamos considerar a expansão diagramática de uma teoria de campos matriciais em $d = 0$ dimensões, onde os campos são matrizes $N \times N$ hermitianas M . O funcional gerador dessa teoria é dado por:

$$Z = e^{N^2 F} = \int dM e^{-\frac{1}{2} \text{Tr}(M^2) + \frac{g}{N} \text{Tr}(M^4)}. \quad (1.1.9)$$

A razão de escrevermos $e^{N^2 F}$ será explicada abaixo. A medida de integração sobre matrizes hermitianas $dM = \prod_i dM_{ii} \prod_{i < j} d\text{Re}(M_{ij}) d\text{Im}(M_{ij})$ é uma medida de Lebesgue, isto é, invariante sob mudanças de base. Normalizamos (1.1.9) de tal modo que $\int dM e^{-\frac{1}{2} \text{Tr}(M^2)} = 1$. Novamente, podemos considerar a expansão perturbativa do termo $e^{\frac{g}{N} \text{Tr}(M^4)}$ em potências da constante de acoplamento $\frac{g}{N}$. Temos, então, que

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{g}{N} \right)^n \int dM e^{-\frac{1}{2} \text{Tr}(M^2)} M_{i_1 j_1} \dots M_{i_n j_n}. \quad (1.1.10)$$

A soma sobre índices repetidos está implícita. Sendo agora $\Sigma(J) = e^{\frac{1}{2} \text{Tr}(J^2)}$ a integral fonte, onde J é uma matriz $N \times N$, procedemos de forma análoga ao caso anterior, e a integral sobre M em (1.1.10) é:

$$\int dM e^{-\frac{1}{2} \text{Tr}(M^2)} M_{i_1 j_1} \dots M_{i_n j_n} = \left. \frac{\partial}{\partial J_{i_1 j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{i_n j_n}} e^{\frac{1}{2} \text{Tr}(J^2)} \right|_{J=0}, \quad (1.1.11)$$

e a aplicação das derivadas aos pares em (1.1.11) está em correspondência um para um com a seguinte representação pictórica de (1.1.10) para um n fixo: desenhamos um vértice, de onde saem $4n$ arestas, e a (1.1.10) é o número de maneiras distintas de se combinar as arestas em pares. Cada aresta é um elemento de matriz M_{ij} multiplicando a exponencial no integrando de (1.1.10). No entanto, o propagador $\langle M_{ij} M_{kl} \rangle$ agora é dado por

$$\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \langle M_{ij} M_{lk}^* \rangle = \left. \frac{\partial}{\partial J_{ij}} \frac{\partial}{\partial J_{kl}} e^{\frac{1}{2} \text{Tr}(J^2)} \right|_{J=0} = \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (1.1.12)$$

e temos uma contribuição para a integral apenas quando combinamos as arestas de modo que os índices dos elementos de matriz se conservem ao longo da linha construída. Isso sugere uma representação do propagador como uma linha dupla [9][7][10], cada uma carregando um índice em sentido contrário ao da outra. Os diagramas permitidos são obtidos combinando propagadores de modo a preservar a orientação de cada linha. Assim, podemos associar superfícies de Riemann a cada diagrama, pois os laços internos fechados localizam faces e especificam suas orientações de forma única.

De modo análogo, podemos considerar a expansão diagramática do funcional gerador

$$Z = \int dM e^{-\frac{1}{2} \text{Tr}(M^2) + \frac{g}{\sqrt{N}} \text{Tr}(M^3)}. \quad (1.1.13)$$

O termo de ordem n conta o número de diagramas construídos com n vértices de 3 pontos. Consideramos um tal vértice como sendo dual a um triângulo, no sentido que, para cada

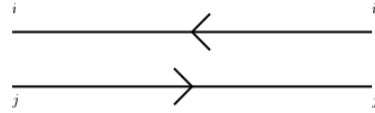


Figura 5 – Propagador $\langle M_{ij}M_{kl} \rangle = \delta_{il}\delta_{jk}$.

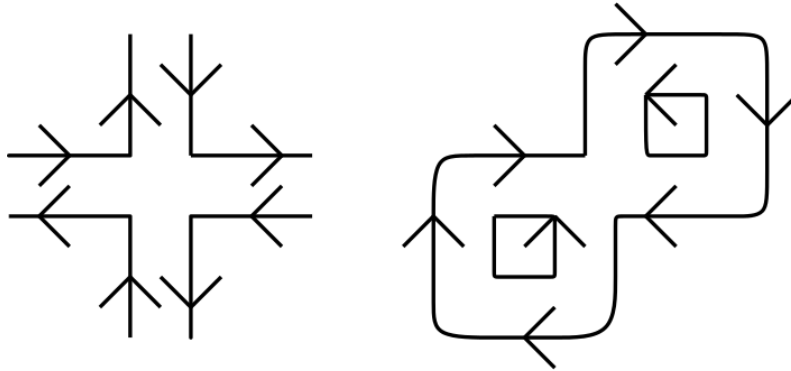


Figura 6 – Vértice de primeira ordem ($n = 1$) e um exemplo de diagrama possível. Combinamos arestas preservando orientações. Note os laços orientados.

vértice de 3 pontos, podemos associar um único triângulo tal que as linhas duplas do vértice o interceptem no ponto médio de cada uma de suas arestas. Assim, como para cada vértice de 3 pontos temos um triângulo, a expansão diagramática da (1.1.13) gera triangulações aleatórias de uma superfície de Riemann.

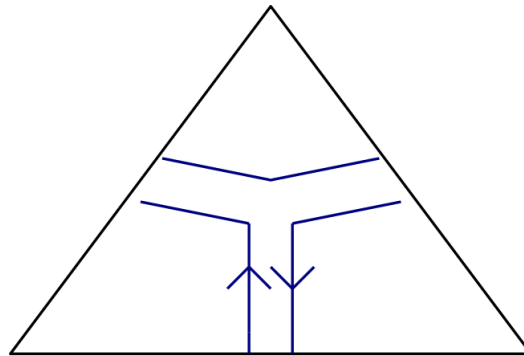


Figura 7 – Vértice de 3 pontos inscrito em um triângulo. A dualidade entre o vértice e o triângulo é dada pela regra de inscrição descrita no texto.

Por convenção, cada triângulo possui área unitária, o que significa que a área total da superfície triangulada é n , o número de vértices de 3 pontos. Logo, a expansão perturbativa de (1.1.13) é uma soma sobre áreas, e podemos fazer uma conexão formal de (1.1.13) com (1.1.3) definindo a constante cosmológica como $g = e^{-\beta}$. Da teoria de campos usual [11][12], sabemos que a integral (1.1.13) gera diagramas conexos e desconexos, e por isso escrevemos que $Z = e^{N^2 F}$, pois a exponencial dos diagramas conexos gera todos os diagramas, e assim temos que $F = \frac{1}{N^2} \ln Z$ gera apenas aqueles que triangulam superfícies conexas.

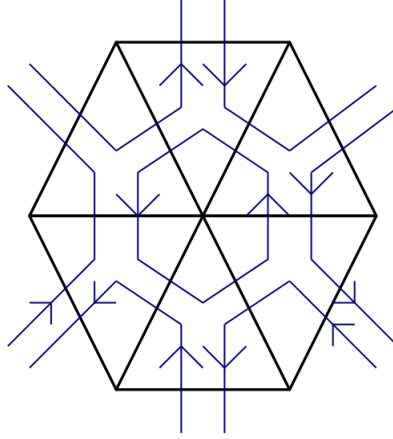


Figura 8 – Triangulação de uma superfície. Cada triângulo é dual a um vértice de 3 pontos no sentido descrito no texto.

Mais ainda, fazendo a mudança de escala $M \rightarrow \sqrt{N}M$, o expoente da exponencial em (1.1.13) se torna $N \left(-\frac{1}{2}Tr(M^2) + gTr(M^3) \right)$, e daí podemos contar o fator de N associado a cada diagrama. O termo quadrático é $-\frac{N}{2}Tr(M^2) = -\frac{N}{2}M_{ij}\delta_{il}\delta_{jk}M_{kl}$, e o propagador, sendo o inverso do termo quadrático [11][12], é dado por $\frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$. Portanto, cada aresta (propagador) contribui com um fator N^{-1} . O termo de interação é $NgTr(M^3) = Ng\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni}M_{ij}M_{kl}M_{mn}$, e então cada vértice é proporcional a $Ng\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni}$, contribuindo com um fator N . Os laços fechados (faces) também contribuem com um fator N , vindo do somatório sobre os índices do laço. Logo, um diagrama com V vértices, F faces e E arestas é multiplicado por um fator

$$N^{V-E+F} = N^\chi = N^{2-2h}, \quad (1.1.14)$$

onde χ é a característica de Euler da superfície associada ao diagrama. Então, um paralelo entre a (1.1.13) e a (1.1.3) é feito se tomarmos $N = e^\gamma$. Isso significa que, formalmente, podemos identificar o limite contínuo de (1.1.13) com (1.1.3) tomando $N = e^\gamma$ e $g = e^\beta$. Note ainda que, como dito anteriormente, podemos discretizar as superfícies utilizando qualquer polígono, o que significa que podemos considerar vértices mais gerais, do tipo $\frac{gk}{N^{\frac{k}{2}-1}}Tr(M^k)$. As diferentes escolhas para vértice resultam em acoplamentos da gravidade em $2d$ com diferentes tipos de matéria no limite do contínuo, como veremos nas próximas seções.

1.2 Modelo de uma matriz: aproximação planar

De (1.1.14), vemos que o funcional gerador (1.1.13) pode ser expandido em potências de N :

$$Z(g) = N^2 Z_0(g) + Z_1(g) + N^{-2} Z_2(g) + \dots \quad (1.2.1)$$

Então, para obter apenas a contribuição de superfícies com a topologia da esfera ($h = 0$), tomamos o limite $N \gg 1$. Considere, então, a integral

$$Z(g, \alpha_k, N) = \int dM e^{-\frac{N}{g} \text{Tr}V(M)}, \quad (1.2.2)$$

onde M é uma matriz $N \times N$ hermitiana, g é uma constante de acoplamento que desempenha o papel de constante cosmológica e $V(M) = M^2 + \sum_{k \geq 3} \alpha_k M^k$ é um potencial geral. Lembre que tal integral gera discretizações aleatórias, por polígonos, de uma superfície de Riemann. O limite planar $N \gg 1$ indica que podemos utilizar o método de Laplace [13], também conhecido como método da descida mais íngreme, para resolver a (1.2.2). No entanto, se M_0 é um extremo de $\text{Tr}V(M)$, UM_0U^\dagger , também o é, onde $U \in U(N)$ é uma matriz unitária, pois o traço é invariante sob conjugação, o que equivale a afirmar que a ação possui a simetria de calibre $M \rightarrow UMU^\dagger$. Isso significa que temos vários pontos críticos degenerados que formam uma variedade de dimensão $\dim U(N) \sim N^2$ [14]. Com isso, se escolhermos o extremo M_0 , os outros extremos obtidos de M_0 por conjugação fornecem contribuições da mesma ordem, e o método de Laplace não nos dá uma boa aproximação para a (1.2.2). Para podermos aplicar o método, utilizamos a liberdade de calibre da ação para diagonalizar M :

$$M = U\Lambda U^\dagger, \quad (1.2.3)$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ é a matriz dos auto-valores de M e $U \in U(N)$. Para calcular o Jacobiano dessa mudança de coordenadas, lembramos que o espaço vetorial $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$ das matrizes complexas $N \times N$ possui o produto interno natural $\text{Tr}(A^\dagger B)$, $A, B \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$. Isso significa que temos uma norma $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^\dagger A)$, e a distância entre duas matrizes em $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$ é $s(A, B) = \|A - B\|$. Tal distância é invariante sob mudança de base, e portanto define uma métrica invariante. Nosso trabalho, então, é calcular a distância infinitesimal $\|dM\|^2$ pois, para um dado sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, a distância infinitesimal $ds^2 = g(x)_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ define a medida $d\mu(x) = \sqrt{g(x)} \prod_\nu dx^\nu$ [15]. Temos que

$$dM = U(d\Lambda + i[\Lambda, dT])U^\dagger, \quad (1.2.4)$$

onde $U = e^{iT}$, $T^\dagger = T$. Ou seja,

$$\|dM\|^2 = \text{Tr}(dM^\dagger dM) = \sum_{i=1}^N (d\lambda_i)^2 + \sum_{i,j=1}^N (\lambda_i - \lambda_j)^2 |dT_{ij}|^2. \quad (1.2.5)$$

Logo, a medida de integração é:

$$dM = dU \prod_{i=1}^N d\lambda_i \Delta^2(\Lambda), \quad (1.2.6)$$

onde

$$\Delta(\Lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (1.2.7)$$

é o determinante de Vandermonde e $dU = \prod_{i,j} dT_{ij} dT_{ij}^*$ é a medida de Haar no grupo unitário (ver apêndice B). A integral (1.2.2) é dada por:

$$Z(g, \alpha_k, N) = \int dU \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \Delta^2(\Lambda) e^{-\frac{N}{g} \sum_{i=1}^N V(\lambda_i)}. \quad (1.2.8)$$

Como o integrando da (1.2.2) é invariante por transformações de calibre (1.2.3), a integral sobre o grupo unitário resulta apenas no volume do grupo, o qual normalizamos de modo que $\int dU = 1$. Escrevendo $\Delta^2(\Lambda) = e^{\ln(\Delta^2(\Lambda))}$, temos que a (1.2.8) é

$$Z = \int \prod_i d\lambda_i e^{\frac{N}{g} S(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}, \quad (1.2.9)$$

onde

$$S(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = - \sum_i V(\lambda_i) + \frac{g}{N} \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|^2. \quad (1.2.10)$$

A (1.2.9) pode ser vista como a função de partição de um gás de N partículas pontuais estáticas, na presença de um potencial externo $V(\Lambda)$, distribuídas ao longo da reta \mathbb{R} com coordenadas λ_i , $i = 1, \dots, N$, e interagindo por repulsão de Coulomb umas com as outras [16]. A temperatura desse sistema seria dada por $\beta = \frac{N}{g}$, e as cargas das partículas pontuais seriam $q = \frac{g}{N}$. Como $T, q \sim \frac{1}{N}$, para baixas temperaturas ($N \gg 1$), as cargas seriam muito fracas e o potencial V conseguiria balancear a repulsão Coulombiana. O gás, então, se tornaria um sólido, onde as posições λ_i das partículas seriam extremos da (1.2.10).

Vamos aplicar o método de Laplace para encontrar uma aproximação, no limite $N \gg 1$, para a (1.2.9). Os pontos de extremo $\{\lambda_i\}$ de (1.2.10) são soluções da equação

$$\frac{\partial S(\lambda_1, \dots, \lambda_N)}{\partial \lambda_i} = 0 \iff \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{g} V'(\lambda_i). \quad (1.2.11)$$

Considere $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \lambda$ como um vetor em um espaço linear N -dimensional. Seja $\lambda^{(c)}$ o vetor cujas coordenadas são os pontos de máximo de S obtidos como soluções da (1.2.11) (note que, para $N \gg 1$, pontos de máximo de S correspondem a mínimos de V). Expandindo S em torno desse ponto até segunda ordem, temos que

$$S(\lambda) = S(\lambda^{(c)}) - \frac{1}{2} \Delta \lambda^T |HS(\lambda^{(c)})| \Delta \lambda + O(\Delta \lambda^2), \quad (1.2.12)$$

onde $\Delta \lambda = \lambda - \lambda^{(c)}$ é visto como um vetor coluna e $HS(\lambda^{(c)})$ é a matriz Hessiana de S no ponto $\lambda^{(c)}$, cujos elementos são

$$HS(\lambda)_{ij} = \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right|_{\lambda}. \quad (1.2.13)$$

Mudando as variáveis de integração para $\Delta \lambda$ em (1.2.9), temos que

$$Z = e^{\frac{N}{g} S(\lambda^{(c)})} \int d\Delta \lambda_1 \dots d\Delta \lambda_N e^{-\frac{N}{2g} \sum_{i,j} \Delta \lambda_i |HS(\lambda^{(c)})_{ij}| \Delta \lambda_j}. \quad (1.2.14)$$

Como a (1.2.13) é uma matriz simétrica, podemos diagonalizá-la. Sejam $\{v^{(n)}\}$ auto-vetores de HS , i.e., $\sum_j HS_{ij}v_j^{(n)} = \alpha^{(n)}v_i^{(n)}$. Escrevendo $\Delta\lambda$ na base dos auto-vetores de HS como $\Delta\lambda_i = \sum_n a^{(n)}v_i^{(n)}$, temos que

$$\sum_{i,j} \Delta\lambda_i HS(\lambda^{(c)})_{ij} \Delta\lambda_j = \sum_n \alpha^{(n)} (a^{(n)})^2. \quad (1.2.15)$$

Como $\prod_i d\Delta\lambda_i = \prod_n da_n$, a (1.2.14) é igual a

$$Z = e^{\frac{N}{g}S(\lambda^{(c)})} \prod_n \int da_n e^{-\frac{N}{2g}\alpha^{(n)}(a^{(n)})^2} = e^{\frac{N}{g}S(\lambda^{(c)})} \prod_n \left(\frac{2\pi g}{N\alpha_n} \right). \quad (1.2.16)$$

Ou seja, a menos de um fator de normalização, no limite $N \gg 1$,

$$N^2 F = \frac{N}{g} S(\lambda^{(c)}) = N^2 \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j|^2 - \frac{1}{Ng} \sum_i V(\lambda_i) \right) \Big|_{\lambda=\lambda^{(c)}}. \quad (1.2.17)$$

Para resolver a (1.2.11), introduzimos o traço do resolvente da matriz M [7][14][17]:

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left((M - zI)^{-1} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i - z}, \quad (1.2.18)$$

onde I é a matriz identidade $N \times N$ e ω é definido $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \text{Spec}(M)$, com $\text{Spec}(M) = \{\lambda_i\}$, o conjunto dos auto-valores de M . Podemos transformar a equação de ponto de sela em uma equação algébrica para ω , no limite $N \gg 1$. Multiplicando os dois lados da (1.2.11) por $1/(\lambda_i - z)$ e somando sobre i , temos que

$$\frac{2}{N} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - z)} = \frac{1}{g} \sum_i \frac{V'(\lambda_i)}{\lambda_i - z}. \quad (1.2.19)$$

Note que

$$\begin{aligned} \omega^2(z) - \frac{1}{N} \omega'(z) &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_i \sum_j \frac{1}{(\lambda_i - z)(\lambda_j - z)} - \sum_i \frac{1}{(\lambda_i - z)^2} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{(\lambda_i - z)(\lambda_j - z)}, \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

onde somamos sobre os dois índices i, j , com a condição $i \neq j$. Multiplicando e dividindo a (1.2.20) por $(\lambda_j - \lambda_i)$ e depois somando e subtraindo o numerador da expressão resultante por z , temos que

$$\omega^2(z) - \frac{1}{N} \omega'(z) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_i - z)} - \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_j - z)} \right). \quad (1.2.21)$$

E, finalmente, trocando $j \leftrightarrow i$ na segunda soma acima,

$$\omega^2(z) - \frac{1}{N} \omega'(z) = -\frac{2}{N^2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - z)}, \quad (1.2.22)$$

e a (1.2.22) é igual a $-\frac{1}{N}$ vezes o lado esquerdo da (1.2.19). Então, multiplicando os dois lados da (1.2.19) por $-\frac{1}{N}$ e depois somando e subtraindo o lado direito da mesma por $-\frac{1}{Ng} \sum_i \frac{V'(z)}{\lambda_i - z}$, temos finalmente a equação

$$\omega^2(z) - \frac{1}{N}\omega'(z) = -\frac{1}{g}V'(z)\omega(z) - \frac{1}{Ng} \sum_i \frac{V'(z) - V'(\lambda_i)}{z - \lambda_i}. \quad (1.2.23)$$

Assim, a (1.2.11) é equivalente à seguinte equação para o resolvente ω :

$$\omega^2(z) - \frac{1}{N}\omega'(z) + \frac{1}{g}V'(z)\omega(z) = -\frac{1}{Ng} \sum_i \frac{V'(z) - V'(\lambda_i)}{z - \lambda_i}. \quad (1.2.24)$$

Conhecendo-se o polinômio $P(z) = \frac{1}{Ng} \sum_i \frac{V'(z) - V'(\lambda_i)}{z - \lambda_i}$, de grau $l - 2$, onde l é o grau de V , a equação (1.2.24) determina ω a menos de uma constante aditiva.

Agora, vamos introduzir a densidade de auto-valores

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i). \quad (1.2.25)$$

ρ é normalizada de modo que $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$. No limite $N \gg 1$, tal distribuição se torna contínua, e podemos escrever o resolvente (1.2.18) em termos de ρ :

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{\lambda_i - z} = \frac{1}{N} \sum_i \int \delta(\lambda - \lambda_i)d\lambda \frac{1}{\lambda_i - z}, \quad (1.2.26)$$

ou seja,

$$\omega(z) = \int \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{\lambda - z}, \quad (1.2.27)$$

e a (1.2.11) é dada por

$$P \int \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2g}V'(\mu), \quad (1.2.28)$$

onde $\mu \in \text{Spec}(M)$ e P denota o valor principal da integral. Utilizando a fórmula de Sokhotsky $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{f(x)dx}{x \pm i\epsilon} = P \int \frac{f(x)dx}{x} \mp i\pi f(0)$,

$$\omega(z + i0) + \omega(z - i0) = 2P \int \frac{\rho(\lambda)d\lambda}{\lambda - z}, \quad (1.2.29)$$

e, da (1.2.28),

$$\omega(z + i0) + \omega(z - i0) = -\frac{1}{g}V'(z). \quad (1.2.30)$$

Do mesmo modo, podemos encontrar que

$$\omega(z + i0) - \omega(z - i0) = 2\pi i\rho(z). \quad (1.2.31)$$

Ou seja, basta conhecer ω para calcular a distribuição de auto-valores. Como a (1.2.31) é derivada da (1.2.28), a densidade de auto-valores assim obtida é uma densidade de equilíbrio $\bar{\rho}$. Podemos encontrar ω resolvendo a (1.2.24) no limite $N \gg 1$:

$$\omega^2(z) + \frac{1}{g}V'(z)\omega(z) + \frac{1}{4g^2}R(z) = 0, \quad (1.2.32)$$

onde

$$R(z) = 4g \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{V'(z) - V'(\lambda)}{z - \lambda}. \quad (1.2.33)$$

Nesse limite, sabendo que $2 \sum_{i \neq j} \ln|\lambda_i - \lambda_j| = \sum_{i,j} \ln|\lambda_i - \lambda_j|$, a (1.2.17) é dada por

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \ln|\lambda_i - \lambda_j| - \frac{1}{g} \frac{1}{N} \sum_i V(\lambda_i) \right) \Big|_{\lambda=\lambda^{(c)}} \\ &= \left(\int d\lambda d\mu \rho(\lambda) \rho(\mu) \ln|\lambda - \mu| - \frac{1}{g} \int d\lambda V(\lambda) \rho(\lambda) \right) \Big|_{\rho=\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (1.2.34)$$

Resumindo, encontrando ω a partir da (1.2.32), a (1.2.31) nos dá a densidade de equilíbrio ρ , que podemos utilizar para encontrar a energia livre (1.2.34) e, portanto, resolver a integral (1.2.2) no limite onde N é grande, obtendo, assim, a contribuição de topologias esféricas para a gravitação em $2d$.

Resolvendo a (1.2.32), temos que

$$\omega(z) = \frac{1}{2g} (-V'(z) + \sigma(z)), \quad (1.2.35)$$

onde

$$\sigma(z) = \sqrt{(V'(z))^2 - R(z)} \quad (1.2.36)$$

é a parte singular de ω . Como $V(z)$ é um polinômio, ρ depende apenas de σ :

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi i} (\sigma(z + i0) - \sigma(z - i0)). \quad (1.2.37)$$

Pode-se observar que ρ é diferente de zero apenas nos cortes de ramificação [18] de ω . Sendo l o grau do polinômio V , R possui grau $l - 2$, enquanto o grau de $(V')^2$ é igual a $2(l - 1)$. Isso significa que o polinômio $(V')^2 - R$ possui $2(l - 1)$ raízes. Portanto, ω apresenta $2(l - 1)$ pontos de ramificação, e, a cada par de tais pontos, associamos um corte. Logo, ω possui $l - 1$ cortes desconexos em \mathbb{C} , e o suporte de ρ , $\text{supp}(\rho) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \rho(\lambda) \neq 0\}$, é dado pela união disjunta de todos os cortes de ω .

O caso mais simples acontece quando o potencial V possui apenas um ponto de mínimo. Nesse caso, voltando à analogia com a física estatística, para $N \rightarrow \infty$, da (1.2.10) temos que o termo de repulsão Coulombiana é desprezível comparado com V , e as partículas tendem a habitar o único mínimo de V , que é apenas um ponto $\lambda^{(c)}$ no \mathbb{R}^N . Isso significa que a distribuição de auto-valores, nesse caso, seria diferente de zero apenas em $\lambda^{(c)}$. Para N não tão grande, a repulsão entre as partículas causaria uma distribuição das posições em pontos próximos a $\lambda^{(c)}$, e o suporte de ρ seria um único intervalo conexo, um único corte de ω . Assim, vamos analisar o caso em que ω possui apenas um corte. Note que, para que ω tenha somente um corte, é necessário que as $2l - 4$ raízes restantes de $(V')^2 - R$ não resultem em pontos de ramificação. Isso acontece se as raízes forem degeneradas aos pares, o que significa que temos $l - 2$ condições que o polinômio R , de grau $l - 2$, deve satisfazer. Dessa maneira, podemos fixar R .

Considere, então, que o corte de ω seja dado por $\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}$. Escolhendo a ramificação principal $\sqrt{(z \pm i0 - a_1)(z \pm i0 - a_2)} = \pm i\sqrt{(z - a_1)(a_2 - z)}$, para $z \in [a_1, a_2]$, defina a função

$$\tilde{\omega}(z) = \frac{\omega(z)}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}}. \quad (1.2.38)$$

Da (1.2.30), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\lambda + i0) - \tilde{\omega}(\lambda - i0) &= \frac{\omega(\lambda + i0)}{i\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} - \frac{\omega(\lambda - i0)}{-i\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} \\ &= \frac{1}{i\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} (\omega(\lambda + i0) + \omega(\lambda - i0)) \\ &= -\frac{1}{ig\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} V'(\lambda). \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

Dividindo os dois lados por $\lambda - z$, onde $z \in \mathbb{C} \setminus [a_1, a_2]$, e integrando ao longo do corte, temos que

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{d\lambda}{\lambda - z} (\tilde{\omega}(\lambda + i0) - \tilde{\omega}(\lambda - i0)) = \frac{i}{g} \int_{a_1}^{a_2} \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} \frac{d\lambda}{\lambda - z}. \quad (1.2.40)$$

Fazendo as mudanças de variáveis $u = \lambda + i0$ e $u = \lambda - i0$ nas duas integrais do lado esquerdo, respectivamente, temos que

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{d\lambda}{\lambda - z} (\tilde{\omega}(\lambda + i0) - \tilde{\omega}(\lambda - i0)) = \int_{\tilde{C}_1} \frac{du}{u - z} \tilde{\omega}(s) + \int_{\tilde{C}_2} \frac{du}{u - z} \tilde{\omega}(u), \quad (1.2.41)$$

onde $\tilde{C}_{1,2}$ são os contornos deformados $(a_1 + i0, a_2 + i0)$ e $(a_1 - i0, a_2 - i0)$, respectivamente (figura 9), e absorvemos, na definição de z , os fatores $\pm i0$ que apareceriam nos denominadores.

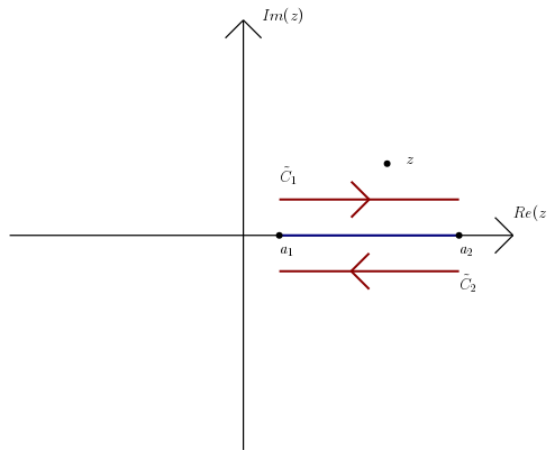


Figura 9 – Deformação do corte de ω descrita no texto.

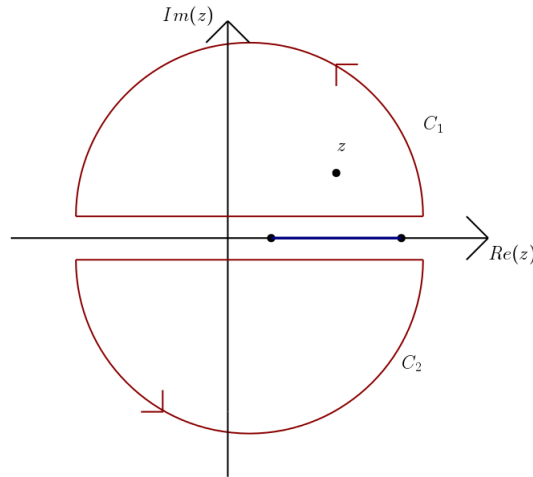


Figura 10 – Contorno fechado $C_{1,2}$ obtido a partir da extensão de $\tilde{C}_{1,2}$. Note que z está dentro de C_1 nesse caso.

Como, fora de $[a_1, a_2]$, $\tilde{\omega}$ é analítica, podemos estender os contornos e fechá-los no infinito, definindo contornos fechados $C_{1,2}$, como mostrado na figura 10. Observe que $\tilde{\omega}(z) \rightarrow \frac{1}{z^2}$ quando $|z| \rightarrow \infty$, ou seja, nesse limite, $\tilde{\omega}(z) \rightarrow 0$. Isso significa que z estará dentro de um dos contornos $C_{1,2}$, o que, por sua vez, implica que

$$\int_{C_1} \frac{du}{u-z} \tilde{\omega}(u) = 2\pi i \tilde{\omega}(z), \quad \int_{C_2} \frac{du}{u-z} \tilde{\omega}(u) = 0,$$

se z está dentro do contorno C_1 , ou

$$\int_{C_1} \frac{du}{u-z} \tilde{\omega}(u) = 0, \quad \int_{C_2} \frac{du}{u-z} \tilde{\omega}(u) = 2\pi i \tilde{\omega}(z),$$

se z está dentro do contorno C_2 . Em todo caso,

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{d\lambda}{\lambda-z} (\tilde{\omega}(\lambda+i0) - \tilde{\omega}(\lambda-i0)) = 2\pi i \tilde{\omega}(z). \quad (1.2.42)$$

Portanto,

$$\tilde{\omega}(z) = \frac{1}{2\pi g} \int_{a_1}^{a_2} \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a_1)(a_2-\lambda)} (\lambda-z)} d\lambda. \quad (1.2.43)$$

Assim, utilizando (1.2.38), temos uma expressão para o resolvente ω em termos do potencial V e dos pontos de ramificação a_1, a_2 , a menos de termos regulares:

$$\omega(z) = \frac{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}}{2\pi g} \int_{a_1}^{a_2} \frac{d\lambda}{\lambda-z} \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda-a_1)(a_2-\lambda)}}. \quad (1.2.44)$$

Note que a (1.2.27) implica que, no limite $|z| \rightarrow \infty$,

$$\omega(z) \rightarrow - \int \frac{1}{z} \left(1 + \frac{\lambda}{z}\right) \rho(\lambda) d\lambda = -\frac{1}{z} + O(z^{-2}). \quad (1.2.45)$$

Nesse mesmo limite, a (1.2.44) possui o seguinte comportamento:

$$\begin{aligned} \omega(z) &\rightarrow \frac{1}{2\pi g} z \left(1 - \frac{a_1 + a_2}{2z} + O(z^{-2}) \right) \int_{a_1}^{a_2} \left[-\frac{1}{z} \left(1 + \frac{\lambda}{z} \right) \right] \frac{V'(\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} \\ &= -\frac{1}{2\pi g} \int_{a_1}^{a_2} \frac{V'(\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} - \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{2\pi g} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\lambda V'(\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} \right) + \\ &\quad + \frac{a_1 + a_2}{4\pi g z} \int_{a_1}^{a_2} \frac{V'(\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} + O(z^{-2}). \end{aligned} \quad (1.2.46)$$

Comparando a (1.2.45) com a (1.2.46), os comportamentos assintóticos devem ser iguais, portanto

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{V'(\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} = 0, \quad (1.2.47)$$

$$\frac{1}{2\pi g} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\lambda V'(\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(a_2 - \lambda)}} = 1. \quad (1.2.48)$$

Dado um potencial V , em princípio podemos resolver as integrais acima e então encontrar um sistema de equações para as duas incógnitas a_1 e a_2 .

Podemos estender as integrais sobre o corte a integrais sobre um contorno fechado C que envolve o corte. Para isso, basta considerar tal contorno C como a união dos contornos C_1 e C_2 definidos anteriormente. A integral sobre C será a soma das integrais sobre C_1 e C_2 , e cada uma é igual à integral sobre o corte, a menos de um fator $\pm i$ originado da escolha da ramificação principal da raiz quadrada. Neste caso, segue que

$$\oint_C \frac{V'(\lambda)d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}} = 0, \quad (1.2.49)$$

$$\oint_C \frac{\lambda V'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}} = 4\pi i g. \quad (1.2.50)$$

Podemos simplificar ainda mais a forma das integrais acima fazendo uma mudança de variáveis. Queremos transformar nosso contorno de integração, que neste momento envolve o corte, para um contorno que esteja definido ao redor da origem do plano complexo. Para isso, vamos utilizar o mapa de Zhukowsky [14]:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1.2.51)$$

Tal mapa leva o círculo unitário (ou seu exterior) ao plano complexo com um corte em $[-1, 1]$ (figura 11). Para ver isso, note que o mapa inverso

$$z = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \quad (1.2.52)$$

possui duas ramificações. A primeira diverge quando $|z| \rightarrow \infty$, e é essa que mapeia o plano ao exterior do círculo unitário. A segunda tende a 0 quando $|z| \rightarrow \infty$, e mapeia o plano ao interior do círculo.

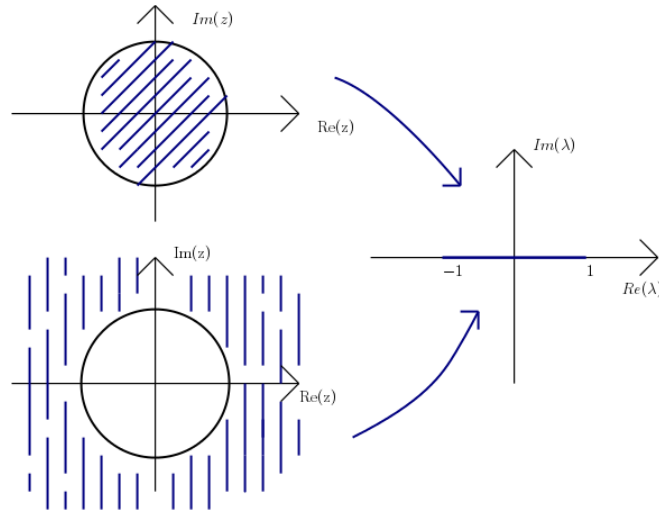


Figura 11 – O mapa de Zhukowsky leva a região hachurada ao plano complexo com um corte em $[-1, 1]$. Quando mapeia o interior do círculo, percorrido no sentido horário, andamos no corte da esquerda para a direita. Quando mapeia o exterior do círculo, andamos no corte da direita para a esquerda.

Para utilizar (1.2.51) no nosso caso, primeiramente precisamos mapear o intervalo $[a_1, a_2]$ no intervalo $[-1, 1]$. Definimos, então, a função

$$\tilde{\lambda} = \frac{2}{a_2 - a_1} \left(\lambda - \frac{a_1 + a_2}{2} \right). \quad (1.2.53)$$

De fato, $\tilde{\lambda}$ mapeia $[a_1, a_2]$ em $[-1, 1]$. Agora, utilizando o mapa de Zhukowsky, $\tilde{\lambda} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, e temos que

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1.2.54)$$

Fazendo a conveniente mudança de escala $z \rightarrow \frac{a_2 - a_1}{4} z$, a (1.2.54) se torna

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2}{2} + z + \frac{(a_2 - a_1)^2}{16z}. \quad (1.2.55)$$

Agora estamos em posição de implementar a mudança de variáveis (1.2.55) nas integrais (1.2.49) e (1.2.50). Note que

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}} = \left[1 - \frac{(a_1 - a_2)^2}{16z^2} \right] \frac{dz}{\left[z - \frac{(a_1 - a_2)^2}{16z} \right]} = \frac{dz}{z}, \quad (1.2.56)$$

e a (1.2.49) se torna

$$\oint \frac{dz}{2\pi iz} V'(\lambda(z)) = 0. \quad (1.2.57)$$

Agora, considere a integral $\oint \frac{dz}{2\pi i} V'(\lambda(z))$. Observe que

$$\begin{aligned} \oint z \frac{dz}{z} V'(\lambda(z)) &= \oint \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}} z V'(\lambda) \\ &= \oint d\lambda \left(\frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{a_1 + a_2}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)} \right) \frac{V'(\lambda)}{\sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi i g - \frac{a_1 + a_2}{4} \oint \frac{V'(\lambda) d\lambda}{\sqrt{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}} \pm \frac{1}{2} \oint V'(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (1.2.58)$$

onde, no primeiro termo, utilizamos a (1.2.50). O segundo termo é igual a zero devido à (1.2.49), e o terceiro termo também é nulo, pois é a integral, em um caminho fechado, da derivada total de um polinômio. Logo,

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} V'(\lambda(z)) = g. \quad (1.2.59)$$

Dado um potencial V com apenas um ponto de extremo, podemos utilizar as (1.2.47) e (1.2.48) para encontrar os limites a_1 e a_2 do suporte de ρ . Com isso, utilizamos a (1.2.44) para encontrar ω , que, por sua vez, pode ser utilizado para encontrar ρ pela (1.2.37). Assim, em princípio, o problema está resolvido. No entanto, se procuramos apenas informações sobre transições de fase e regimes críticos (ver C) do sistema descrito por F , é possível simplificar o procedimento de tal modo que precisamos encontrar apenas os limites a_1 e a_2 do suporte de ρ para determinar o comportamento singular de F como função da constante de acoplamento e de N . Derivando a (1.2.34) com respeito a g , temos que

$$\frac{\partial F}{\partial g} = \frac{1}{g^2} \int d\lambda \rho(\lambda) V(\lambda). \quad (1.2.60)$$

Multiplicando os dois lados da (1.2.60) por g^3 e depois diferenciando os dois lados da mesma com respeito a g , temos que

$$\frac{\partial}{\partial g} \left(g^3 \frac{\partial F}{\partial g} \right) = \int d\lambda V(\lambda) \frac{\partial}{\partial g} (g\rho(\lambda)). \quad (1.2.61)$$

Definindo a função

$$\Omega(z) = \frac{\partial}{\partial g} (g\omega(z)). \quad (1.2.62)$$

Da (1.2.35), vemos que

$$\Omega(z) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g} \sigma(z), \quad (1.2.63)$$

e, da (1.2.27), segue que

$$\Omega(z) = \int \frac{d\lambda}{\lambda - z} \frac{\partial}{\partial g} (g\rho(\lambda)). \quad (1.2.64)$$

Agora, multiplicando a (1.2.30) por g e depois derivando com respeito a g , segue trivialmente que

$$\Omega(z + i0) + \Omega(z - i0) = 0, \quad (1.2.65)$$

o que significa que a função Ω possui um corte do tipo raiz quadrada. Mais ainda, devido ao comportamento $\omega \sim \sqrt{(z - a_{1,2})}$ perto dos limites do suporte $a_{1,2}$, sendo $\Omega(z)$ a derivada de ω , $\Omega \sim \frac{1}{\sqrt{(z - a_{1,2})}}$ perto de $a_{1,2}$. No limite $|z| \rightarrow \infty$, a (1.2.64) implica que

$$\Omega(z) \rightarrow -\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial g} g \int d\lambda \rho(\lambda) = -\frac{1}{z}, \quad (1.2.66)$$

pois $\int d\lambda \rho = 1$. Temos então que

$$\Omega(z) \sim \frac{1}{\sqrt{z - a_{1,2}}} \cdot h(z), \quad (1.2.67)$$

quando $z \rightarrow a_{1,2}$, onde $h(z)$ é uma função regular nesse limite. Se considerarmos $\Omega^2(z)$, vemos que tal mapa possui polos simples nos pontos $z = a_{1,2}$, e que tende a $\frac{1}{z^2}$ quando $|z| \rightarrow \infty$. A função $\frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)}$ possui essas propriedades e, pelo teorema de Mittag-Leffler [18], $\Omega^2(z) - \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)}$ é analítica no corte, isto é, $\Omega^2(z) - \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)} = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a_{1,2})^k$. No entanto, o comportamento assintótico de Ω^2 exige que $\sum_{k \geq 0} a_k (z - a_{1,2})^k \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$, o que ocorre se, e somente se, todos os coeficientes a_k forem identicamente nulos. Assim,

$$\Omega(z) = -\frac{1}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}}, \quad (1.2.68)$$

sendo que o sinal negativo é originado da escolha da ramificação da raiz quadrada. Escrevendo $V(\lambda) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{V(z)}{z - \lambda}$, onde C é um contorno que envolve o corte $\text{sup}(\rho)$, a (1.2.61) se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g} \left(g^3 \frac{\partial F}{\partial g} \right) &= \int d\lambda \left(\oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{V(z)}{z - \lambda} \right) \frac{\partial}{\partial g} (g\rho(\lambda)) \\ &= - \oint_C \frac{dz}{2\pi i} V(z) \int \frac{d\lambda}{\lambda - z} \frac{\partial}{\partial g} (g\rho(\lambda)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{V(z)}{(z - a_1)(z - a_2)}, \end{aligned} \quad (1.2.69)$$

onde utilizamos a (1.2.64) e a (1.2.68). Defina

$$gu(g) = \frac{\partial}{\partial g} \left(g^3 \frac{\partial F}{\partial g} \right). \quad (1.2.70)$$

Derivando $gu(g)$ em relação a g , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g} (gu(g)) &= \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial a_1}{\partial g} \oint_C dz \frac{V(z)}{(z - a_1)^{3/2}(z - a_2)^{1/2}} + \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial a_2}{\partial g} \oint_C dz \frac{V(z)}{(z - a_1)^{1/2}(z - a_2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.2.71)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{V(z)}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}} \right) &= \frac{V'(z)}{\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}} + \\ -\frac{1}{2} V(z) \left[\frac{1}{(z - a_1)^{3/2}(z - a_2)^{1/2}} + \frac{1}{(z - a_1)^{1/2}(z - a_2)^{3/2}} \right], \end{aligned} \quad (1.2.72)$$

integrando, sobre o contorno fechado C , os dois lados da equação acima e utilizando a (1.2.49), obtemos

$$\oint_C dz \frac{V(z)}{(z-a_1)^{3/2}(z-a_2)^{1/2}} + \oint_C dz \frac{V(z)}{(z-a_1)^{1/2}(z-a_2)^{3/2}} = 0. \quad (1.2.73)$$

Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial g}(gu(g)) = \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{\partial a_1}{\partial g} - \frac{\partial a_2}{\partial g} \right) \oint_C dz \frac{V(z)}{(z-a_1)^{3/2}(z-a_2)^{1/2}}. \quad (1.2.74)$$

Agora, considere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{zV(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} \right) &= \frac{V(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} + \frac{zV'(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} + \\ &- \frac{1}{2} zV(z) \left[\frac{1}{(z-a_1)^{3/2}(z-a_2)^{1/2}} + \frac{1}{(z-a_1)^{1/2}(z-a_2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.75)$$

Novamente, integrando os dois lados da equação acima sobre C e utilizando a (1.2.50), temos que

$$\begin{aligned} 2 \oint_C dz \frac{V(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} + 8\pi i g &= \oint_C dz \frac{zV(z)}{(z-a_1)^{3/2}(z-a_2)^{1/2}} + \\ &+ \oint_C dz \frac{zV(z)}{(z-a_1)^{1/2}(z-a_2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.2.76)$$

Note que

$$\begin{aligned} 2 \oint_C dz \frac{V(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} &= \oint_C dz \frac{V(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} + \oint_C dz \frac{V(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} \\ &= \oint_C dz \frac{V(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} \frac{(z-a_1)}{(z-a_1)} + \oint_C dz \frac{V(z)}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} \frac{(z-a_2)}{(z-a_2)} \\ &= \oint_C dz \frac{zV(z)}{(z-a_1)^{3/2}(z-a_2)^{1/2}} + \oint_C dz \frac{zV(z)}{(z-a_1)^{1/2}(z-a_2)^{3/2}} + \\ &- (a_1 - a_2) \oint_C dz \frac{V(z)}{(z-a_1)^{3/2}(z-a_2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (1.2.77)$$

onde utilizamos a (1.2.73). Logo,

$$\oint_C dz \frac{V(z)}{(z-a_1)^{3/2}(z-a_2)^{1/2}} = \frac{8\pi i}{a_1 - a_2}, \quad (1.2.78)$$

e segue que

$$\frac{\partial}{\partial g}(gu(g)) = 2g \frac{1}{a_1 - a_2} \frac{\partial}{\partial g}(a_1 - a_2) = 2g \frac{\partial}{\partial g} \ln|a_1 - a_2|. \quad (1.2.79)$$

Encontrando a dependência dos pontos $a_{1,2}$ em relação à constante de acoplamento g , podemos, em princípio, encontrar o comportamento singular de F , dado por sua derivada segunda $u(g)$.

Exemplo 1.2.1. Como primeiro exemplo, vamos considerar o potencial Gaussiano $V(M) = \frac{1}{2}M^2$. Lembre que o suporte de ρ é não-vazio apenas na vizinhança do ponto de extremo do potencial. Assim, como V é uma função par, devemos ter que $a_1 = -a_2$. Seja então $a = a_1$. O mapa de Zhukowsky se torna $\lambda = z + \frac{a^2}{4z}$ e a (1.2.57) é automaticamente satisfeita, pois, fazendo $z = \frac{a}{2}e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$\oint \frac{dz}{2\pi iz} V' \left(z + \frac{a^2}{4z} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V'(a \cos \theta) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta = 0. \quad (1.2.80)$$

Podemos notar que a (1.2.57) sempre será automaticamente satisfeita para potenciais pares, pois sempre teremos a integral sobre um período de uma potência ímpar da função cosseno. Da (1.2.59), temos que

$$\oint_C \frac{dz}{2\pi i} V'(\lambda(z)) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \lambda(z) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \left(z + \frac{a^2}{4z} \right) = g. \quad (1.2.81)$$

Ou seja,

$$a = 2\sqrt{g}. \quad (1.2.82)$$

Agora, vamos calcular o resolvente

$$\omega(z) = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{4\pi i g} \oint_C \frac{dv}{v} \frac{V' \left(v + \frac{a^2}{4v} \right)}{\frac{1}{v}(v^2 - zv + \frac{a^2}{4})}, \quad (1.2.83)$$

onde utilizamos o mapa de Zhukowsky e, portanto, C é o círculo de raio $|v| = \frac{a}{2}$. Claramente,

$$\oint_C dv \frac{v + \frac{a^2}{4v}}{(v - \alpha)(v - \beta)} = 2\pi i, \quad (1.2.84)$$

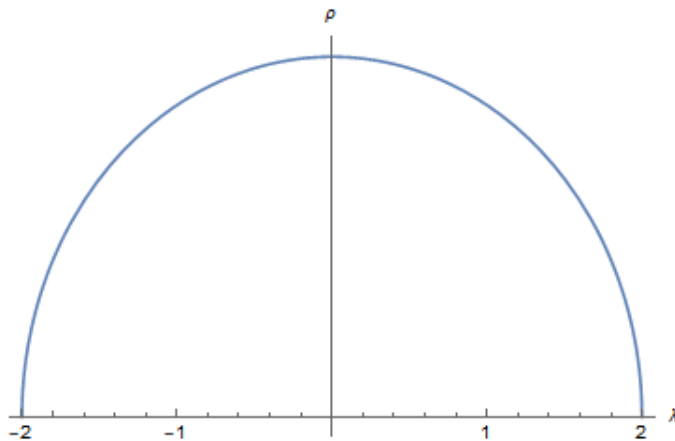
onde $\alpha = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{2}$ e $\beta = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{2}$, e então a parte singular de ω é dada por $\frac{1}{2g} \sqrt{z^2 - 4g}$. Assim, de (1.2.35),

$$\omega(z) = \frac{1}{2g} \left(-z + \sqrt{z^2 - 4g} \right), \quad (1.2.85)$$

e a densidade de auto-valores ρ pode ser imediatamente obtida da (1.2.37):

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi g} \sqrt{4g - \lambda^2}. \quad (1.2.86)$$

A (1.2.86) é a lei do semi-círculo de Wigner-Dyson [16][14][17], obtida quando se estuda a distribuição dos níveis de energia de núcleos atômicos pesados, o que indica que matrizes aleatórias podem ser utilizadas para modelar Hamiltonianas complexas (na verdade, ensembles de Hamiltonianas, segundo [16]). Vemos que, nesse caso, como ρ é bem definida para qualquer valor de $g > 0$, não há indicação de que o sistema sofra transições de fase.

Figura 12 – Lei do semi-círculo de Wigner para $g = 1$.

Exemplo 1.2.2. Agora, vamos considerar um potencial do tipo M^4 ,

$$V(M) = \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{4}M^4. \quad (1.2.87)$$

Como V é par, novamente o corte será simétrico, e $a_2 = a, a_1 = -a$. Encontrando a parte singular do resolvente:

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{4\pi ig} \oint_{|v|=\frac{a}{2}} dv \frac{1}{v^2 - zv + \frac{a^2}{4}} V' \left(v + \frac{a^2}{4v} \right) \\ &= \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{4\pi ig} \oint_{|v|=\frac{a}{2}} dv \frac{1}{(v - \alpha)(v - \beta)} \left(v + \frac{a^2}{4v} + \left(v + \frac{a^2}{4v} \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{2g} \left(z^2 + 1 + \frac{1}{2}a^2 \right) \sqrt{z^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (1.2.88)$$

Utilizando a (1.2.35),

$$\omega(z) = \frac{1}{2g} \left(-z - z^3 + \left(z^2 + 1 + \frac{1}{2}a^2 \right) \sqrt{z^2 - a^2} \right), \quad (1.2.89)$$

e, para encontrar o ponto a em termos de g , utilizamos a (1.2.59):

$$g = \oint_{|z|=\frac{a}{2}} \frac{dz}{2\pi i} \left(z + \frac{a^2}{4z} + \left(z + \frac{a^2}{4z} \right)^3 \right) = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^4. \quad (1.2.90)$$

Ou seja, lembrando que a deve ser um número real,

$$a^2 = \frac{2}{3} \left(-1 + \sqrt{1 + 12g} \right). \quad (1.2.91)$$

Da (1.2.31), obtemos a densidade de auto-valores:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi g} \left(\lambda^2 + 1 + \frac{1}{2}a^2 \right) \sqrt{a^2 - \lambda^2}. \quad (1.2.92)$$

Observe que a (1.2.91) faz sentido, sendo a um número real, até o ponto $g = g_c = -\frac{1}{12}$, onde a^2 passa a ser negativo. Esse é um ponto crítico do sistema, onde ocorre uma transição de fase. Isso significa que a energia livre F possui continuação analítica de $g > 0$ a $g < 0$, onde encontra uma singularidade no ponto g_c , que é um ponto de ramificação de F e, portanto, a transição de fase é de primeira ordem. A densidade de auto-valores muda de formato nesse ponto, passando a ter duas componentes conexas como suporte, e isso significa que não podemos mais utilizar a hipótese de que existe apenas um corte. É possível ver que esse é o caso já da forma do potencial quártico (1.2.87), que possui dois mínimos.

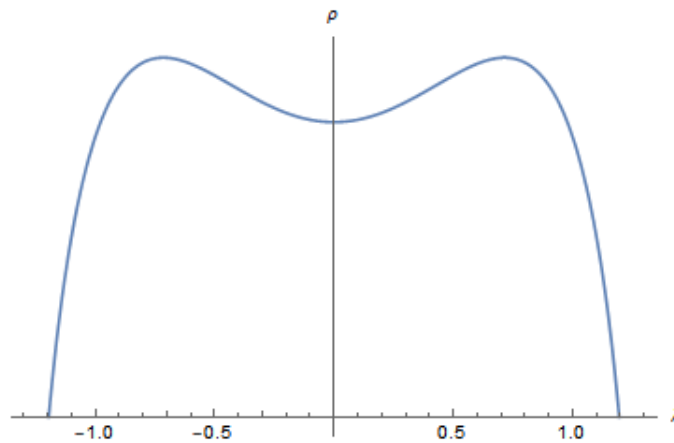


Figura 13 – Densidade de auto-valores no caso do potencial M^4 para $g = 1$.

Mais ainda, voltando à interpretação de Z como uma função geradora de triangulações aleatórias de uma superfície de gênero nulo, a transição de fase apontada acima caracteriza a passagem do estado discretizado da superfície a seu estado contínuo. Para ver isso, primeiramente, observe que, como foi dito na seção (1.1), o número de vértices de 4 pontos n é igual a área total da superfície. Na expansão perturbativa de Z , n aparece como uma potência de g . Então, a derivada de $\ln Z$ em relação a g é igual ao valor esperado da área $A = n$, i.e.,

$$\langle A \rangle = \langle n \rangle = \frac{\partial}{\partial g} \ln Z. \quad (1.2.93)$$

Vamos obter o comportamento de (1.2.93) quando $g \rightarrow g_c$. Definindo a variável $x = 1 - g/g_c$. Em termos de x , a (1.2.91) é dada por $a^2 = a_c^2(1 - \sqrt{x})$, onde $a_c = a(g_c)$. A equação diferencial (1.2.79) é, na variável x , escrita como

$$(1-x)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - 6(1-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \quad (1.2.94)$$

Em princípio, é possível encontrar uma solução geral para essa equação. Fazendo a mudança $u = 1 - x$, a (1.2.94) se reduz a

$$u^2 \frac{\partial^3 F}{\partial u^3} + 6u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 6 \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1 + \sqrt{1-u}}{2\sqrt{1-u}}, \quad (1.2.95)$$

que é igual à derivada da equação de Euler-Cauchy de segunda ordem não-homogênea

$$au^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + bu \frac{\partial F}{\partial u} + cF = f(u), \quad (1.2.96)$$

com coeficientes $a = 1, b = 4$ e $c = 2$, onde

$$f(u) = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u}} du + k, \quad (1.2.97)$$

e k é uma constante arbitrária. Assim, resolver a (1.2.96) equivale a solucionar a (1.2.94). No entanto, como queremos encontrar apenas o comportamento assintótico (no limite $x \rightarrow 0$), não precisamos resolver a equação de forma exata. Do início, já assumimos que F é singular no limite $x \rightarrow 0$, o que significa que $F \sim x^{-\eta}$ nesse limite, com $\eta \in \mathbb{R}$. Segue que a derivada terceira de F será o termo mais singular no lado esquerdo de (1.2.94). Como o único termo singular do lado direito de (1.2.94) é $\frac{1}{\sqrt{x}}$, devemos ter

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \approx \frac{1}{2} x^{-1/2}, \quad (1.2.98)$$

para $x \rightarrow 0$. Integrando, obtemos, finalmente,

$$F = -\frac{4}{15} x^{5/2} + \text{termos menos singulares}, \quad (1.2.99)$$

e a área $\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial g}$ se comporta como

$$\langle A \rangle \sim \frac{1}{g_c - g}, \quad (1.2.100)$$

no limite $g \rightarrow g_c$. Ou seja, a área da superfície diverge e, se realizarmos a mudança de escala $s \rightarrow s/\langle A \rangle$ na área dos polígonos individuais, cada um terá área infinitesimal nesse limite, o que significa que cada polígono será basicamente um ponto na superfície, e esta será contínua, uma união de pontos infinitesimais. Mais adiante, veremos que o ponto g_c é um ponto onde a série perturbativa diverge. Isso significa, intuitivamente, que nesse limite, temos diagramas com infinitos vértices, que é essencialmente a figura que precisamos para definir uma superfície contínua, onde cada vértice é um ponto da mesma.

A (1.2.99) fornece um dos indícios de que os modelos de matrizes descrevem, no limite do contínuo, a teoria das cordas (ou gravitação 2d) dada por (1.1.2). Para uma área muito grande $A \rightarrow \infty$, mas fixa, é possível encontrar o comportamento crítico da (1.1.2) utilizando a teoria quântica de Liouville (ver [4] para uma explicação detalhada de como obter tais resultados):

$$F(A) \sim A^{(\gamma_{str}-2)A/2-1}, \quad (1.2.101)$$

onde γ_{str} é um expoente crítico. Se acoplarmos uma teoria conforme de campos em 2d à gravitação quântica, o expoente γ_{str} pode ser expresso como

$$\gamma_{str} = \frac{1}{12} \left(c - 1 - \sqrt{(c-1)(c-25)} \right) = -\frac{1}{m}, \quad (1.2.102)$$

onde $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$, $m \geq 2$, é a carga central da teoria conforme (ver [C](#)). Note que a [\(1.2.102\)](#) deixa de fazer sentido para $c > 1$, um fato que discutiremos mais adiante.

No caso planar, $\chi = 2$, e temos que

$$F(A) \sim A^{\gamma_{str}-3}. \quad (1.2.103)$$

Comparando com a [\(1.2.99\)](#), vemos que

$$\gamma_{str} = -\frac{1}{2}, \quad (1.2.104)$$

o que significa que $c = 0$ e que estamos lidando com um caso onde não há campos externos acoplados à gravidade (gravitação pura). O fato de que a [\(1.2.99\)](#) possui o mesmo expoente crítico que uma teoria de gravitação pura indica que o modelo de matrizes do potencial quártico [\(1.2.87\)](#) está na mesma classe de universalidade (ver apêndice [C](#)) que a gravitação 2d sem campos externos (ou teoria das cordas em 0-dimensões). E isso, por sua vez, nos diz que podemos estudar o modelo de matrizes para obter informações, mesmo que apenas sobre o comportamento crítico, dessas teorias. Mais adiante, veremos que a adição de potenciais de ordem mais alta equivale ao acoplamento de campos externos à gravidade.

Um comentário adicional: é comum definir o modelo de matrizes para o potencial quártico como $Z = \int dM e^{-N \text{Tr} V(M)}$, com

$$V(M) = \frac{m^2}{2} M^2 + \frac{g}{4} M^4. \quad (1.2.105)$$

Assim, temos dois parâmetros para caracterizar a transição de fase. Para $m^2 > -4\sqrt{g}$, temos que o suporte de ρ possui apenas uma componente conexa. Já no caso em que $m^2 < -4\sqrt{g}$, ocorre uma mudança de fase, e o suporte de ρ se divide em duas componentes conexas disjuntas. A [\(1.2.105\)](#) é o potencial de uma teoria de campos não-comutativa na esfera difusa [\[19\]](#), e a solução acima descreve o caso de uma configuração estática dos campos, sem termo cinético na ação.

No exemplo [1.2.2](#), vemos que, em $g = g_c$, o ponto $a(g_c) = a_c$ se torna um zero do termo regular que multiplica a parte singular do resolvente ω . De fato, como $a_c^2 = -\frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \left(z^2 + 1 + \frac{1}{2} a^2(g_c) \right) \sqrt{z^2 - a^2(g_c)} \\ &= \left(z^2 + \frac{2}{3} \right) \sqrt{z^2 + \frac{2}{3}} \\ &= (z^2 - a_c^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.2.106)$$

Esse comportamento é natural, pois a transição de fase no exemplo [1.2.2](#) é uma mudança de uma configuração de um corte para uma outra com dois cortes. Isso significa que, no ponto crítico, o polinômio regular que multiplica a raiz quadrada em [\(1.2.106\)](#) tem um

zero que corresponde ao zero da parte singular, de modo que podemos unir ambos em um único termo com mais pontos de ramificação.

Em geral, no caso onde temos apenas um corte, podemos escrever

$$\sigma(z) = P_{l-2}(z)\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}, \quad (1.2.107)$$

onde P_{l-2} é um polinômio de grau $l-2$, com l sendo o grau do potencial V . Na vizinhança do ponto crítico, os zeros de P_{l-2} se aproximam dos zeros irregulares a_1, a_2 . Sejam $a_1 = 0$ e $a_2 = b$. Fazendo com que os $l-2$ zeros de P_{l-2} se aproximem de $a_1 = 0$ no ponto crítico, $P_{l-2} = z^{l-2}$. Denotando o grau do polinômio V' como $m = l-1$. Temos então que, no ponto crítico,

$$\sigma_{cr}(z) = z^{m-1}\sqrt{z(z-b)}. \quad (1.2.108)$$

De (1.2.35), e sabendo que $\omega(z) \rightarrow -\frac{1}{z}$ quando $|z| \rightarrow \infty$, devemos ter

$$z^m \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{1/2} = V'(z) - \frac{2g_c}{z} + O(z^{-2}). \quad (1.2.109)$$

Quando $|z| \rightarrow \infty$. Devido ao fato de que V' é um polinômio, este deve cancelar todas as potências positivas de z do lado esquerdo, caso contrário ω cresceria no limite $|z| \rightarrow \infty$. Logo, V' deve ser dado, unicamente, por

$$V'(z) = \left[z^m \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{1/2} \right]_+, \quad (1.2.110)$$

onde o subscrito $+$ significa que consideramos apenas as potências positivas de z do termo em questão. Expandindo o lado esquerdo da (1.2.109) em potências de z , para $|z| > b$,

$$z^m \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} b^k z^{m-k}. \quad (1.2.111)$$

Utilizando que $\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$, em termos da função beta $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ [20], a (1.2.111) é escrita como

$$z^m \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{1/2} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} B\left(k - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) b^k z^{m-k}, \quad (1.2.112)$$

e então, da (1.2.109) vemos que o coeficiente que multiplica z^{-1} na (1.2.112) deve ser igual a $-2g_c$. Daí, temos a seguinte relação entre a constante de acoplamento crítica, o limite b do suporte da densidade de auto-valores e o grau m do potencial V :

$$g_c = \frac{b^{m+1}}{2\pi} B\left(m + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right). \quad (1.2.113)$$

A (1.2.110) também pode ser escrita em termos da função beta do seguinte modo: a forma integral de $B(x, y)$ é dada por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \quad (1.2.114)$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = b + t(z - b)$, temos que

$$B(x, y) = \frac{1}{(z - b)^{x+y-1}} \int_b^z ds (s - b)^{x-1} (z - s)^{y-1}. \quad (1.2.115)$$

Fazendo $x = m$ e $y = 1/2$, segue que

$$(z - b)^{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} \int_b^z ds (s - b)^{m-1} (z - s)^{-1/2}. \quad (1.2.116)$$

No caso em que $b = 0$,

$$z^{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} \int_0^z ds (z - s)^{-1/2} s^{m-1}. \quad (1.2.117)$$

Assim, o lado esquerdo da (1.2.109) pode ser escrito como

$$z^{m-\frac{1}{2}} (z - b)^{1/2} = \frac{(z - b)^{1/2}}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} \int_0^z ds (z - s)^{-1/2} s^{m-1}, \quad (1.2.118)$$

e, no limite $|z| \rightarrow \infty$, podemos separar a integral acima do seguinte modo:

$$\begin{aligned} z^{m-\frac{1}{2}} (z - b)^{1/2} &= \frac{1}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} (z - b)^{1/2} \int_0^b ds (z - s)^{-1/2} s^{m-1} + \\ &+ \frac{1}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} (z - b)^{1/2} \int_b^z ds (z - s)^{-1/2} s^{m-1}. \end{aligned} \quad (1.2.119)$$

A primeira integral, no limite $|z| \rightarrow \infty$, é igual a

$$\begin{aligned} (z - b)^{1/2} \int_0^b ds (z - s)^{-1/2} s^{m-1} &= \int_0^b ds \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-1/2} s^{m-1} \\ &\approx \left(1 - \frac{b}{2z}\right) \left[\frac{1}{m} b^m + O(z^{-1})\right] = \frac{1}{m} b^m + O(z^{-1}). \end{aligned} \quad (1.2.120)$$

Segue de (1.2.110) que

$$V'(z) = \frac{1}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{b^m}{m} + (z - b)^{1/2} \int_b^z ds (z - s)^{-1/2} s^{m-1} \right). \quad (1.2.121)$$

Note que, para $|z|$ grande, $V \sim z^{m+1}$. Se m é par, o potencial será uma função ímpar, e a integral (1.2.2) pode divergir. Nesse caso, temos que considerar g complexo, de modo que $e^{-\frac{N}{g}\lambda^{m+1}}$ seja uma função oscilatória, e apenas depois, por continuação analítica, estendemos a integral para g real.

Agora, vamos considerar o comportamento do modelo perto do ponto crítico, onde $x = 1 - g/g_c \ll 1$. Nessa região, os zeros do polinômio P_{m-1} não serão exatamente iguais ao limite do corte, agora localizado em $z = a$. Considerando, então, $z \ll b$, $z \sim O(a)$, temos que

$$\sigma_{sc}(z) = P_{m-1}(z)(z - a)^{1/2}(z - b)^{1/2} \approx P_{m-1}(z)b^{1/2}(a - z)^{1/2}. \quad (1.2.122)$$

No entanto, como estamos muito perto do ponto crítico, σ_{sc} deve possuir a mesma forma que σ_{cr} para $z \ll b$. Escrevemos então que, sendo $P_{m-1}(z/a) = (z/a)^{m-1} + \dots$,

$$\sigma_{sc}(z) = P_{m-1}\left(\frac{z}{a}\right) a^{m-1} b^{1/2} (a-z)^{1/2}. \quad (1.2.123)$$

De fato, a (1.2.123) tem a mesma forma que σ_{cr} para $z \ll b$, pois nesse limite, $\sigma_{cr}(z) \sim ib^{1/2} z^{m-1/2}$. Da (1.2.63), temos que, no limite $z \ll b$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g} \sigma_{sc} &\approx -2b^{-1/2} (a-z)^{-1/2} \\ &= -2ib^{-1/2} z^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2-k)} \left(\frac{a}{z}\right)^k, \end{aligned} \quad (1.2.124)$$

e a expansão acima não possui potências positivas de z . No entanto, a derivada de (1.2.123) com relação a g possui potências positivas de z , o que significa que P_{m-1} deve ser tal que cancele esses termos. Escrevendo P_{m-1} como o truncamento da expansão de alguma função f ,

$$P_{m-1}\left(\frac{z}{a}\right) = \left(\frac{z}{a}\right)^{m-1} \left(f\left(\frac{z}{a}\right) - R_m\left(\frac{z}{a}\right)\right), \quad (1.2.125)$$

com $R_m\left(\frac{z}{a}\right) = \left(\frac{a}{z}\right)^m + \dots$ e $f(0) = 1$. Assim,

$$\sigma_{sc}(z) = ib^{1/2} z^{m-1/2} \left(\left(1 - \frac{a}{z}\right)^{1/2} f\left(\frac{z}{a}\right) - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{1/2} R_m\left(\frac{z}{a}\right) \right). \quad (1.2.126)$$

O último termo do lado direito da equação acima começa com $z^{-1/2}$. Então, comparando com (1.2.124), o primeiro termo deve ser uma constante, que fixamos com a condição $f(0) = 1$. Logo, $f\left(\frac{z}{a}\right) = \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1/2}$ e então

$$P_{m-1}\left(\frac{z}{a}\right) = \left(\left(\frac{z}{a}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1/2} \right)_+. \quad (1.2.127)$$

Observe que o termo de ordem $z^{-1/2}$ na (1.2.126) deve ser igual a $\alpha z^{-1/2} a^m$, onde α é uma constante, pois o primeiro termo da expansão de R_m é a^m/z^m . A derivada desse termo é o primeiro termo da expansão (1.2.124), que escrito em termos da função beta é igual a $2ib^{1/2} \frac{1}{\pi} B(-1/2, 3/2) z^{-1/2}$. Logo, $\frac{\partial a^m}{\partial g} = \beta = \text{constante}$, e temos que

$$\frac{\partial}{\partial g} \sigma_{sc} = \frac{\partial}{\partial a} \sigma_{sc} \frac{\partial a}{\partial g} = \beta a^{1-m} \frac{\partial}{\partial a} \sigma_{sc}. \quad (1.2.128)$$

Da (1.2.124),

$$\beta a^{1-m} \frac{\partial}{\partial a} \sigma_{sc} = -2b^{-1/2} (a-z)^{-1/2}, \quad (1.2.129)$$

e então

$$\sigma_{sc}(z) = \beta \int_a^z ds (z-s)^{-1/2} s^{m-1}. \quad (1.2.130)$$

Para encontrar a constante β , consideramos o comportamento de σ_{sc} quando $\frac{a}{z} \ll 1$. Da (1.2.123), $\sigma_{sc}(z) \sim ib^{1/2}z^{m-1/2}$. Fazendo a mudança de variáveis $t = s/z$ na integral (1.2.130), para $a/z \ll 1$,

$$\sigma_{sc}(z) = \beta z^{m-1/2} \int_{a/z}^1 dt (1-t)^{-1/2} t^{m-1} = \beta z^{m-1/2} B(m, 1/2) \sim ib^{1/2}z^{m-1/2}. \quad (1.2.131)$$

Logo,

$$\beta = \frac{ib^{1/2}}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)}, \quad (1.2.132)$$

e então, a parte singular do resolvente é, na vizinhança do ponto crítico, igual a

$$\sigma_{sc}(z) = \frac{b^{1/2}}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} \int_a^z ds (s-z)^{-1/2} s^{m-1}. \quad (1.2.133)$$

Daí, como $\frac{\partial \sigma_{sc}}{\partial g} = \frac{\partial a}{\partial g} \frac{\partial \sigma_{sc}}{\partial a}$, temos que

$$-2b^{-1/2}(a-z)^{-1/2} = \frac{b^{1/2}}{B\left(m, \frac{1}{2}\right)} (a-z)^{-1/2} a^{m-1} \frac{\partial a}{\partial g}. \quad (1.2.134)$$

Resolvendo a equação acima, encontramos que a é dado em função de g e b como

$$a^m = \frac{2m}{b} B\left(m, \frac{1}{2}\right) (g - g_c). \quad (1.2.135)$$

Introduzindo a variável $x = 1 - g/g_c$ e utilizando a (1.2.113), é fácil ver que

$$2(m+1) \left(\frac{a}{b}\right)^m = x. \quad (1.2.136)$$

Utilizando (1.2.79), vamos encontrar o comportamento crítico da energia livre F . Temos novamente a equação

$$(1-x)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - 6(1-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial F}{\partial x} = 2N^2 \frac{1}{a-b} \frac{\partial}{\partial x} (a-b). \quad (1.2.137)$$

Com $a \ll b$ e como a variação de b é desprezível, o lado direito da equação acima se torna

$$2N^2 \frac{1}{a-b} \frac{\partial a}{\partial x} \approx -2N^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b}\right). \quad (1.2.138)$$

Integrando os dois lados da (1.2.137) e considerando o limite assintótico $x \rightarrow 0$, temos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx -2N^2 \left(\frac{a}{b}\right), \quad (1.2.139)$$

e então, substituindo a (1.2.136) no lado direito da equação acima e integrando duas vezes, obtemos, finalmente, que F apresenta o seguinte comportamento crítico:

$$F \sim -N^2 \frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)} (2(m+1))^{-1/m} x^{2+\frac{1}{m}}. \quad (1.2.140)$$

Comparando a equação acima com a (1.2.103), vemos que o expoente crítico é

$$\gamma_{str} = -\frac{1}{m}. \quad (1.2.141)$$

Assim, o grau do polinômio V introduzido na integral sobre matrizes determina a carga central da teoria conforme acoplada à gravitação $2d$ que o modelo de matrizes descreve (no ponto crítico).

1.3 Modelo de uma matriz: contribuição de gêneros mais altos

Embora o método de Laplace introduzido na seção anterior nos permita uma discussão bastante detalhada do caso planar, os cálculos se tornam complicados quando consideramos superfícies de gêneros mais altos (ordens sub-dominantes na expansão em $1/N$), e não conseguimos informações sobre o comportamento da série topológica como um todo. Nesta seção, nosso objetivo é introduzir um método [4][7][21][22][23] para resolver a (1.2.2) que nos permite recuperar os resultados anteriores e estendê-los a todas as ordens em $1/N$ [24][25].

Considere a seguinte matriz $N \times N$:

$$\lambda_i^{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

O determinante da matriz (1.3.1) é o determinante de Vandermonde (1.2.7).

$$\det \lambda_i^{j-1} = \Delta(\Lambda). \quad (1.3.2)$$

Seja $P_{j-1}(\lambda_i)$ a matriz $N \times N$ cujos elementos são polinômios $p_n(\lambda)$, normalizados de tal modo que

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_{n-i} \lambda^{n-i}, \quad (1.3.3)$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Ou seja,

$$P_{j-1}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 + \lambda_1 & \dots & a_0 + a_1 \lambda_1 + \dots + \lambda_1^{N-1} \\ 1 & a_0 + \lambda_2 & \dots & a_0 + a_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_0 + \lambda_N & \dots & a_0 + a_1 \lambda_N + \dots + \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Claramente, podemos transformar λ_i^{j-1} em $P_{j-1}(\lambda_i)$ realizando operações elementares nas linhas da (1.3.1), e isso, por sua vez, implica que

$$\det P_{j-1}(\lambda_i) = \Delta(\Lambda). \quad (1.3.5)$$

Então, se considerarmos um espaço de polinômios $p_n(\lambda)$, que são ortogonais com respeito à medida $d\mu(\lambda) = e^{-V(\lambda)}d\lambda$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu(\lambda)p_n(\lambda)p_m(\lambda) = s_n\delta_{nm}, \quad (1.3.6)$$

onde as constantes $s_n \in \mathbb{R}$ são tais que $p_n(\lambda) = \lambda^n + \dots$, podemos resolver a (1.2.2) encontrando apenas essas constantes de normalização. De fato, utilizando a (1.3.5), temos que

$$\begin{aligned} Z &= \int dM e^{-\text{Tr}V(M)} = \int d\lambda_1 e^{-V(\lambda_1)} \dots d\lambda_N e^{-V(\lambda_N)} \det P_{j-1}(\lambda_i) \det P_{j-1}(\lambda_i) \\ &= \sum_{P(i_1, \dots, i_N)} (-1)^{\pi(i_1, \dots, i_N)} \sum_{P(j_1, \dots, j_N)} (-1)^{\pi(j_1, \dots, j_N)} \int d\mu(\lambda_1) p_{i_1-1}(\lambda_1) p_{j_1-1}(\lambda_1) \times \dots \\ &\quad \dots \times \int d\mu(\lambda_N) p_{i_N-1}(\lambda_N) p_{j_N-1}(\lambda_N). \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Utilizando a condição de ortogonalidade (1.3.6), segue que

$$Z = \sum_{P(i_1, \dots, i_N)} (-1)^{\pi(i_1, \dots, i_N)} \sum_{P(j_1, \dots, j_N)} (-1)^{\pi(j_1, \dots, j_N)} s_{i_1-1} \dots s_{i_N-1} \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_N j_N}. \quad (1.3.8)$$

Pode-se perceber, da equação acima, que apenas permutações iguais contribuem para o valor final de Z . Logo,

$$Z = \sum_{P(i_1, \dots, i_N)} s_{i_1-1} s_{i_2-1} \dots s_{i_N-1} = N! s_0 s_1 \dots s_{N-1} = N! \prod_{i=0}^{N-1} s_i, \quad (1.3.9)$$

pois existem $N!$ maneiras de permutar os elementos do conjunto $(1, 2, \dots, N)$. Assim, a função de partição é dada por:

$$Z = N! s_0^N \prod_{k=1}^{N-1} f_k^{N-k}, \quad (1.3.10)$$

onde $f_k = s_k/s_{k-1}$. Desse modo, o cálculo da integral sobre matrizes original se reduz, nessa abordagem, a encontrar as constantes de normalização s_k (ou as razões f_k).

Para encontrar uma maneira de calcular as normalizações s_k , observe que os polinômios ortogonais $\{p_n\}$ formam uma base do espaço dos polinômios. Isso significa que o polinômio $\lambda p_n(\lambda)$ pode ser escrito como uma combinação linear de p_n 's:

$$\lambda p_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i p_i(\lambda). \quad (1.3.11)$$

Utilizando a (1.3.6), podemos escrever os coeficientes a_i , $i = 0, \dots, n+1$, como

$$a_i = \frac{1}{s_i} \int d\mu(\lambda) \lambda p_n(\lambda) p_i(\lambda). \quad (1.3.12)$$

Como $\lambda p_n(\lambda)$ é um polinômio de ordem $n+1$, devido a ortogonalidade, todos os coeficientes a_i com $i \leq n-2$ serão nulos. Logo,

$$\lambda p_n(\lambda) = a_{n+1} p_{n+1}(\lambda) + a_n p_n(\lambda) + a_{n-1} p_{n-1}(\lambda). \quad (1.3.13)$$

Comparando termos de mesma ordem dos dois lados da (1.3.13), devemos ter que $a_{n+1} = 1$, ou seja,

$$\int d\mu(\lambda)\lambda p_n(\lambda)p_{n+1}(\lambda) = s_{n+1}. \quad (1.3.14)$$

Como $\lambda p_{n-1}(\lambda)$ possui ordem n , $\int d\mu\lambda p_n(\lambda)p_{n-1}(\lambda) = s_n$. No entanto, da (1.3.13), temos que $\int d\mu\lambda p_n(\lambda)p_{n-1}(\lambda) = a_{n-1}s_{n-1}$. Então, temos a seguinte relação de recorrência entre os polinômios ortogonais:

$$(\lambda - a_n)p_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) + f_n p_{n-1}(\lambda), \quad (1.3.15)$$

com $f_n = s_n/s_{n-1}$, como anteriormente. Observe que

$$a_n = \frac{1}{s_n} \int d\lambda e^{-V(\lambda)} \lambda (p_n(\lambda))^2 \quad (1.3.16)$$

se comporta como

$$\int d\lambda e^{-V(\lambda)} \lambda^{2n+1}, \quad (1.3.17)$$

e se V for ímpar, essa integral diverge. Se V for par, temos a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico, que se anula. No que se segue, vamos considerar apenas potenciais pares, o que significa que, daqui para a frente, $a_n = 0$. Como

$$\frac{dp_n(\lambda)}{d\lambda} = np_{n-1}(\lambda) + O(p_{n-2}(\lambda)), \quad (1.3.18)$$

segue que

$$\int d\mu(\lambda)p_{n-1}(\lambda)\frac{dp_n(\lambda)}{d\lambda} = ns_{n-1}. \quad (1.3.19)$$

No entanto,

$$\begin{aligned} \int d\mu(\lambda)p_{n-1}(\lambda)\frac{dp_n(\lambda)}{d\lambda} &= e^{-V(\lambda)}p_{n-1}(\lambda)p_n(\lambda)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &\quad - \int d\lambda p_n(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-V(\lambda)}p_{n-1}(\lambda)\right). \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

Sendo V uma função par, o primeiro termo é igual a zero. Ou seja,

$$ns_{n-1} = \int d\mu(\lambda)p_n(\lambda)V'(\lambda)p_{n-1}(\lambda) - \int d\mu(\lambda)p_n(\lambda)\frac{dp_{n-1}(\lambda)}{d\lambda}. \quad (1.3.21)$$

O segundo termo é igual a zero, pois $p'_{n-1}(\lambda)$ é um polinômio de ordem $n-2$. Então,

$$ns_{n-1} = \int d\mu(\lambda)p_n(\lambda)V'(\lambda)p_{n-1}(\lambda). \quad (1.3.22)$$

Portanto, utilizando, junto com a equação acima, a relação de recorrência (1.3.15), podemos calcular as constantes de normalização s_n .

Exemplo 1.3.1. No caso do potencial Gaussiano $V(M) = \frac{N}{2g}M^2$, os polinômios $p_n(\lambda)$ devem satisfazer

$$\int d\lambda e^{-\frac{N}{2g}\lambda^2} p_n(\lambda)p_m(\lambda) = s_n\delta_{nm}. \quad (1.3.23)$$

Os polinômios de Hermite

$$H_n(\lambda) = (-1)^n e^{\lambda^2} \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{-\lambda^2} \quad (1.3.24)$$

são ortogonais com peso $e^{-\lambda^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$ [20]. Daí, os polinômios ortogonais para o potencial Gaussiano são dados por

$$p_n(\lambda) = \left(\frac{2g}{N}\right)^{n/2} H_n\left(\lambda\sqrt{\frac{N}{2g}}\right), \quad (1.3.25)$$

e as normalizações s_n são facilmente calculadas da (1.3.22):

$$ns_{n-1} = \frac{N}{g} \int d\mu(\lambda) p_n(\lambda) \lambda p_{n-1}(\lambda) = \frac{N}{g} f_n s_{n-1} = \frac{N}{g} s_n. \quad (1.3.26)$$

Utilizando a equação acima repetidas vezes, temos que

$$s_n = \left(\frac{g}{N}\right)^n n! s_0, \quad (1.3.27)$$

onde

$$s_0 = \int d\mu(\lambda) (p_0)^2 = \int d\lambda e^{-\frac{N}{2g}\lambda^2}, \quad (1.3.28)$$

pois $p_0 = 1$. Logo, $s_0 = (2\pi g/N)^{1/2}$ e, portanto,

$$s_n = \sqrt{2\pi} \left(\frac{g}{N}\right)^{n+\frac{1}{2}} n!. \quad (1.3.29)$$

Segue que a função de partição (1.3.10) é dada por:

$$Z = N!(2\pi)^{N/2} \left(\prod_{i=0}^{N-1} i!\right) \left(\frac{g}{N}\right)^{N^2/2}. \quad (1.3.30)$$

Vemos que Z é uma função analítica da constante de acoplamento, o que confirma nossa afirmativa anterior de que esse modelo não apresenta transições de fase.

Agora, utilizando esse método, vamos tentar recuperar os resultados da seção 1.2. No limite $N \gg 1$, podemos considerar $\xi = k/N$ como uma variável contínua que assume valores entre 0 e 1. Definimos, então, a função $f(\xi) = f_k/N$, contínua no intervalo $(0, 1)$. Nesse limite, a energia livre é dada por:

$$F = \frac{1}{N^2} \ln Z \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \ln f_k = \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \ln f(\xi). \quad (1.3.31)$$

Precisamos encontrar uma forma funcional para $f(\xi)$. Para tanto, considere o potencial geral

$$V(M) = \frac{N}{2g} \sum_p M^{2p}. \quad (1.3.32)$$

Da (1.3.22), temos que

$$ns_{n-1} = \frac{N}{g} \sum_p p \int d\mu(\lambda) p_n(\lambda) \lambda^{2p-1} p_{n-1}(\lambda). \quad (1.3.33)$$

Note que, como $\{p_n\}$ é base do espaço dos polinômios,

$$\lambda^{2p-1} p_{n-1}(\lambda) = \sum_{j=0}^{2(p-1)+n} a_j^{(2p-1)} p_j(\lambda), \quad (1.3.34)$$

onde

$$a_j^{(2p-1)} = \frac{1}{s_j} \int d\mu(\lambda) p_j(\lambda) \lambda^{2p-1} p_{n-1}(\lambda). \quad (1.3.35)$$

Daí,

$$ns_{n-1} = \frac{N}{g} \sum_p p \sum_j a_j^{(2p-1)} \int d\mu(\lambda) p_n(\lambda) p_j(\lambda) = \frac{N}{g} \sum_p p s_n a_n^{(2p-1)}. \quad (1.3.36)$$

Ou seja,

$$g \frac{n}{N} = f_n \sum_p p a_n^{(2p-1)}, \quad (1.3.37)$$

e a soma pode ser calculada utilizando uma relação de recursão para os $a_n^{(2p-1)}$. Observe que

$$\begin{aligned} a_j^{(2p)} &= \frac{1}{s_j} \int d\mu(\lambda) \lambda p_j(\lambda) \lambda^{2p-1} p_{n-1}(\lambda) \\ &= \frac{1}{s_j} \int d\mu(\lambda) (p_{j+1}(\lambda) + f_j p_{j-1}(\lambda)) \lambda^{2p-1} p_{n-1}(\lambda). \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Ou seja,

$$a_n^{(2p)} = a_{n+1}^{(2p-1)} f_{n+1} + a_{n-1}^{(2p-1)}, \quad (1.3.39)$$

com $a_n^{(0)} = \delta_{n,n-1}$.

Exemplo 1.3.2. Vamos considerar o potencial quártico, $V(M) = \frac{N}{2g} (M^2 + \frac{1}{2}M^4)$. Temos que $V'(\lambda) = \frac{N}{g} (\lambda + \lambda^3)$ e então a soma da (1.3.37) se torna

$$g \frac{n}{N} = f_n (a_n^{(1)} + a_n^{(3)}). \quad (1.3.40)$$

Da relação de recursão (1.3.39), temos que

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= a_{n-1}^{(0)} + f_{n+1} a_{n+1}^{(0)} = 1, \\ a_n^{(3)} &= a_{n-2}^{(1)} + f_n a_n^{(1)} + f_{n+1} (a_n^{(1)} + f_{n+2} a_{n+2}^{(1)}) = f_{n-1} + f_n + f_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

Daí,

$$g\frac{n}{N} = f_n + f_n(f_{n+1} + f_n + f_{n-1}). \quad (1.3.42)$$

Lembrando que, no limite $N \gg 1$, n/N se torna a variável contínua $\xi \in (0, 1)$, bem como $f_n \rightarrow f(\xi)$ e $f_{n\pm 1} \rightarrow f(\xi \pm \epsilon)$, onde $\epsilon \equiv 1/N$. Com $f(\xi \pm \epsilon) = f(\xi) \pm \epsilon f'(\xi) + O(\epsilon^2)$, a (1.3.42) se torna

$$g\xi = f(\xi) + 3(f(\xi))^2. \quad (1.3.43)$$

Daí,

$$f(\xi) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{1 + 12g\xi}, \quad (1.3.44)$$

onde escolhemos a solução que não deixa f sempre negativa no intervalo $(0, 1)$. Agora, podemos calcular a energia livre (1.3.31):

$$F = \int_0^1 d\xi(1 - \xi) \ln \left[\frac{1}{6} \left(\sqrt{1 + 12g\xi} - 1 \right) \right]. \quad (1.3.45)$$

Fazendo a mudança de variáveis $v = \frac{1}{6} \left(\sqrt{1 + 12g\xi} - 1 \right)$, a integral acima se torna

$$F = \frac{1}{g^2} \int_0^{\frac{1}{6}(\sqrt{1+12g}-1)} dv(6v+1)(g-v(1+3v)) \ln(v). \quad (1.3.46)$$

Integrando, temos que

$$F = \frac{1}{2} \ln \left(-1 + \sqrt{1 + 12g} \right) + \frac{1}{432g^2} \left(1 - \sqrt{1 + 12g} + 6g \left(6 - 5\sqrt{1 + 12g} \right) \right), \quad (1.3.47)$$

a menos de constantes numéricas aditivas. Note que, no ponto $g_c = -\frac{1}{12}$, a energia livre diverge, como esperado. Definindo $a^2/a_c^2 = 1 - \sqrt{1 + 12g}$ e $x = 1 - g/g_c$, é fácil ver que podemos recuperar os resultados obtidos na seção 1.2.

Poderíamos obter o comportamento crítico diretamente da (1.3.47). No entanto, vamos proceder de outra forma. Defina a função $W(f)$ tal que

$$W(f) = f + 3f^2 = g\xi. \quad (1.3.48)$$

Isto é, W , ou melhor, $\frac{1}{g}W$, age como uma função inversa de f . Podemos expandir W em torno do ponto crítico $f = f_c$, onde $W(f_c) = g_c$ e $W'(f_c) = 0$. Note que isso equivale a dizer que $f(\xi = 1) = f_c$. Temos

$$g\xi = g_c + \frac{1}{2}W''(f_c)(f(\xi) - f_c)^2 + \dots \quad (1.3.49)$$

Ou seja,

$$f(\xi) - f_c \sim (g_c - g\xi)^{1/2}. \quad (1.3.50)$$

Isso nos induz a supor que o comportamento singular dominante de $f(\xi)$, no limite $N \gg 1$, é dado por

$$\frac{f(\xi)}{f_c} - 1 \sim (g_c - g\xi)^{-\gamma}, \quad (1.3.51)$$

para g perto de g_c e ξ próximo a 1. Então, o termo mais singular da energia livre (1.3.31), no limite onde N é grande, é:

$$F \sim \int_0^1 d\xi (1-\xi)(g_c - g\xi)^{-\gamma} = \frac{(g_c - g)^{-\gamma+2}}{g^2(1-\gamma)(2-\gamma)} + \frac{g_c^{-\gamma+1}}{g(1-\gamma)} \left(-1 + \frac{g_c}{g(2-\gamma)} \right). \quad (1.3.52)$$

Como $g \approx g_c$, apenas o primeiro termo contribui para o comportamento crítico. Temos então que

$$\begin{aligned} F &\sim \frac{(g_c - g)^{-\gamma+2}}{g^2(1-\gamma)(2-\gamma)} = \frac{1}{g_c^\gamma(1-\gamma)(2-\gamma)} \sum_n \frac{\Gamma(-\gamma+3)}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\gamma-n+3)} \left(-\frac{g}{g_c} \right)^n \\ &= \sum_n \frac{1}{g_c^\gamma \Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(3-\gamma-n)} \left(-\frac{g}{g_c} \right)^n \\ &= \sum_n \frac{1}{g_c^\gamma \Gamma(\gamma)} \frac{\Gamma(n+\gamma-2)}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{g}{g_c} \right)^n, \end{aligned} \quad (1.3.53)$$

onde utilizamos as seguintes propriedades da função Γ :

$$\Gamma(-\gamma+2+1) = (1-\gamma)(2-\gamma)\Gamma(1-\gamma), \quad (1.3.54)$$

$$\Gamma(-\gamma - (-3+n)) = (-1)^{-4+n} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(n+\gamma-2)}. \quad (1.3.55)$$

Temos uma expansão em potências da constante de acoplamento g . Como vimos na seção 1.1, o expoente de g pode ser visto como a área da superfície triangulada, isto é, $n = A$. Para uma área grande, i.e., $n \gg 1$,

$$\frac{\Gamma(n+\gamma-2)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(\gamma-3)}{B(n+1, \gamma-3)} \sim (n+1)^{\gamma-3}, \quad (1.3.56)$$

obtemos o comportamento singular da energia livre:

$$F \sim \sum_n \frac{1}{g_c^\gamma \Gamma(\gamma)} n^{\gamma-3} \left(\frac{g}{g_c} \right)^n. \quad (1.3.57)$$

Assim, para uma área fixa,

$$F(A) \sim \left(\frac{g}{g_c} \right)^A A^{\gamma-3}, \quad (1.3.58)$$

e, comparando com a (1.2.103), temos que $\gamma = \gamma_{str}$. Considerando ainda que

$$F \sim \frac{(g_c - g)^{-\gamma+2}}{g^2(1-\gamma)(2-\gamma)}, \quad (1.3.59)$$

a segunda derivada de F com relação a $x = g_c - g$ possui, como termo dominante,

$$F'' \sim \frac{1}{g_c^2} (g_c - g)^{-\gamma_{str}} \sim \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{1}{g_c^2} \left(\frac{f(\xi)}{f_c} - 1 \right), \quad (1.3.60)$$

e então, da (1.3.50), identificamos $\gamma_{str} = -\frac{1}{2}$, como esperado.

Para calcular a soma (1.3.37) no caso de um potencial geral

$$V(M) = \frac{N}{2g} \sum_p v_p M^{2p}, \quad (1.3.61)$$

vamos introduzir uma maneira pictórica de obter os coeficientes $a_n^{(2p-1)}$, dados pela (1.3.35). Considere todos os caminhos possíveis que unem os níveis $n-1$ e n , feitos de $2p-1$ passos unitários para cima ou para baixo. Um passo para cima possui peso unitário, enquanto um passo para baixo possui peso f_n . A imagem descrita acima é exatamente a relação de recursão (1.3.39). Assim, $a_n^{(2p-1)}$ é uma soma sobre todos os $\binom{2p-1}{p}$ caminhos que juntam os níveis $n-1$ e n em $2p-1$ passos, $p-1$ para cima e p para baixo. Um fator f_s é associado a uma descida do nível s ao nível $s-1$.

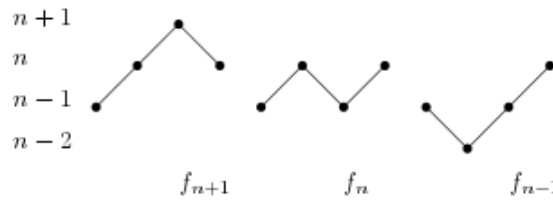


Figura 14 – Contribuições para o coeficiente $a_n^{(3)}$ de acordo com a representação pictórica introduzida acima.

Então, com

$$a_n^{(2p-1)} = \sum_{\text{Caminhos}} f_{s_1} f_{s_2} \cdots f_{s_p}, \quad (1.3.62)$$

temos que

$$g \frac{n}{N} = f_n \sum_p p v_p \sum_{\text{Caminhos}} f_{s_1} f_{s_2} \cdots f_{s_p}. \quad (1.3.63)$$

No limite $N \gg 1$, a soma sobre caminhos $\sum_{\text{Caminhos}} f_{s_1} f_{s_2} \cdots f_{s_p} \rightarrow \binom{2p-1}{p} f^{p-1}$. Logo,

$$g\xi = \sum_p \frac{(2p-1)!}{((p-1)!)^2} v_p f^p. \quad (1.3.64)$$

Em princípio, podemos tentar encontrar f como função de ξ e calcular a energia livre (1.3.31). Podemos também definir a função $W(f) = g\xi$, como no exemplo do potencial quártico, e encontrar o comportamento crítico da energia livre. Antes, note que $W(f) = \sum_p \frac{(2p-1)!}{((p-1)!)^2} v_p f^p$ pode ser escrito como

$$W(f) = \oint \frac{dz}{2\pi i} V' \left(z + \frac{f}{z} \right). \quad (1.3.65)$$

De fato, expandindo o integrando em uma série de potências e aplicando o teorema do resíduo, recuperamos a forma usual de W . Mais ainda, essa forma integral preserva a interpretação de caminhos introduzida anteriormente, com z correspondendo a um passo para cima e $\frac{1}{z}$, a um passo para baixo. Cada passo para baixo recebe um fator de f , e a

integral é diferente de zero apenas quando existe um fator resultante de $\frac{1}{z}$. Note ainda que se identificarmos $f = a^2/4$, onde a é a fronteira do suporte da distribuição de auto-valores, no limite $\xi \rightarrow 1$, a (1.3.65) é equivalente à (1.2.59).

O potencial geral (1.3.61) nos fornece parâmetros ajustáveis o suficiente para que atinjamos um ponto crítico de ordem m . Nesse ponto $f = f_c$, as primeiras $m - 1$ derivadas de W são iguais a zero e $W(f_c) = g_c$, o que implica, como no caso do potencial quártico, que $f_c = f(\xi = 1)$. Expandindo W em torno do ponto crítico, temos que

$$g = g_c + \frac{1}{m!} W^{(m)}(f_c) (f - f_c)^m + \dots \quad (1.3.66)$$

Fazendo a mudança de escala $f \rightarrow f/f_c$, f se comporta como

$$\frac{f_c - f}{f_c} \sim \left(\frac{g_c - g}{g_c} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (1.3.67)$$

Da (1.3.60), segue imediatamente que $\gamma_{str} = -\frac{1}{m}$ e

$$F \sim -\frac{N^2 m^2}{(2m+1)(m+1)} \left(\frac{g_c - g}{g_c} \right)^{2+\frac{1}{m}}, \quad (1.3.68)$$

que é igual, a menos de constantes multiplicativas, à (1.2.140). Observe que a quantidade

$$z = \left(1 - \frac{g}{g_c} \right) N^{\frac{2}{2-\gamma_{str}}} \quad (1.3.69)$$

permanece fixa se tomarmos os limites $N \gg 1$ e $g \rightarrow g_c$ simultaneamente.

Agora, vamos tentar encontrar as contribuições de superfícies de todos os gêneros para a função de partição. Para isso, consideramos o potencial

$$V(M) = \frac{N}{2g} (M^2 + M^4 + bM^6). \quad (1.3.70)$$

Com esse potencial, a (1.3.37) nos dá

$$\begin{aligned} g \frac{n}{N} = f_n & \left(a_n^{(1)} + 2a_n^{(3)} + 3ba_n^{(5)} \right) = f_n + 2f_n(f_{n+1} + f_n + f_{n-1}) + \\ & + 3bf_n(f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}f_{n-1} + 2f_{n-1}f_n + \\ & f_{n-1}f_{n+1} + 2f_n f_{n+1} + f_{n+1}f_{n+2}), \end{aligned} \quad (1.3.71)$$

e, no limite $N \gg 1$, definindo $\epsilon \equiv 1/N$,

$$\begin{aligned} g\xi = f(\xi) & + 2f(\xi) (f(\xi + \epsilon) + f(\xi) + f(\xi - \epsilon)) + \\ & + 3bf(\xi)(f^2(\xi) + f^2(\xi + \epsilon) + f^2(\xi - \epsilon) + 2f(\xi - \epsilon)f(\xi) \\ & + f(\xi - \epsilon)f(\xi + \epsilon) + 2f(\xi)f(\xi + \epsilon)). \end{aligned} \quad (1.3.72)$$

Mantendo alguns termos de ordem mais alta em ϵ^2 ,

$$g\xi = f(\xi) + 2f(\xi)(f(\xi + \epsilon) + f(\xi) + f(\xi - \epsilon)) + 3bf(\xi)(f^2(\xi) + 2f(\xi - \epsilon)f(\xi) + 2f(\xi + \epsilon)f(\xi)), \quad (1.3.73)$$

e somando e subtraindo $W(f) = f + 6f^2 + 30bf^3$, temos que

$$g\xi = W(f) + 2f(\xi)(1 + 15bf(\xi))(f(\xi + \epsilon) + f(\xi - \epsilon) - 2f(\xi)) \\ = g_c + \frac{1}{2}W''(f_c)(f(\xi) - f_c)^2 + 2f_c(1 + 15bf_c)(f(\xi + \epsilon) + f(\xi - \epsilon) - 2f(\xi)). \quad (1.3.74)$$

Note que, considerando o caso da gravitação pura, o parâmetro z definido em (1.3.69) é igual a

$$z = \frac{g_c - g}{g_c} N^{4/5}. \quad (1.3.75)$$

Lembre que z é constante no limite duplo $N \gg 1$ e $g \rightarrow g_c$. Definindo

$$a^2 = N^{-4/5}. \quad (1.3.76)$$

Observando que o limite $a \rightarrow 0$ corresponde ao limite duplo $N \gg 1$, $g \rightarrow g_c$, pois, da (1.3.75),

$$g - g_c = a^2 z. \quad (1.3.77)$$

Definindo também a variável x de modo que

$$g_c - g\xi = g_c a^2 x, \quad (1.3.78)$$

e assumindo que, nessa região,

$$f(x) = f_c(1 - au(x)). \quad (1.3.79)$$

Observe que, como $f(\xi \pm \epsilon) = f(\xi) \pm \epsilon f'(\xi) + \frac{\epsilon^2}{2} f''(\xi) + \dots$,

$$f(\xi + \epsilon) + f(\xi - \epsilon) - 2f(\xi) = \epsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + O(\epsilon^4), \quad (1.3.80)$$

pois os termos de grau ímpar se cancelam. Aplicando a mudança de variáveis (1.3.78) e utilizando a (1.3.79), temos que

$$f(\xi + \epsilon) + f(\xi - \epsilon) - 2f(\xi) = -f_c a^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + O(a^3). \quad (1.3.81)$$

No limite $a \rightarrow 0$, desprezamos termos de ordem mais alta. Assim, a (1.3.74) se torna

$$-g_c a^2 x = \frac{1}{2} W''(f_c) a^2 (u(x))^2 + 2f_c(1 + 15bf_c) \left(-f_c a^2 u''(x) \right). \quad (1.3.82)$$

Sendo $W(f) = f + 6f^2 + 30bf^3$ e definindo $f_c = 1$, segue que $u(x)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$Kx = u^2 - \frac{1}{3}u'', \quad (1.3.83)$$

onde $K = -g_c/6(1 + 15b)$. Calculamos a fórmula da energia livre (1.3.31) utilizando o limite $N \gg 1$ usual. No entanto ela ainda é válida no limite duplo $a \rightarrow 0$, o que é fácil ver da definição do parâmetro a na (1.3.76) e da fórmula de Euler-Maclaurin:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) &= \int_0^1 f(\xi) d\xi + \frac{1}{2N} [f(1) - f(0)] + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{N^{2p}(2p)!} [f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)] \end{aligned} \quad (1.3.84)$$

que as correções são da ordem $1/N = a^{5/2}$, maior que a^2 , e portanto são desprezíveis no limite $a \rightarrow 0$.

Da (1.3.31), em termos da nova variável x , temos:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \ln(f(\xi)) = \left(\frac{g_c a^2}{g}\right)^2 \int_{a^{-2}}^z dx (z - x) \ln(1 - au(x)) \\ &\approx \left(\frac{g_c a^2}{g}\right)^2 \int_{a^{-2}}^z dx (z - x) (-au(x)). \end{aligned} \quad (1.3.85)$$

Derivando F com relação a z e utilizando a regra de Leibniz para diferenciação sob o sinal da integral, segue que

$$F'(z) \approx - \left(\frac{g_c a^{5/2}}{g}\right)^2 \int_{a^{-2}}^z dx u(x). \quad (1.3.86)$$

Note que $a^{5/2} = 1/N$, o que significa que de fato estamos considerando contribuições de ordens mais altas em $1/N$. Derivando novamente F com respeito a z temos

$$F''(z) \sim -u(z). \quad (1.3.87)$$

Observe que, no caso planar, $g\xi - g_c \sim (f(\xi) - f_c)^2$, o que significa que $-g_c a^2 x \sim a^2 (u(x))^2$, ou seja, $(u(x))^2 \sim x$, e isso implica que

$$F''(z)_{\text{planar}} \sim z^{1/2}, \quad (1.3.88)$$

com z dado pela (1.3.75). A partir daí, é trivial recuperar a (1.3.68).

A solução da (1.3.83) caracteriza o comportamento crítico da função de partição Z da gravitação pura em todas as ordens da expansão (1.2.1). Fazendo a mudança de escala $z \rightarrow Kz$, $u(z) \rightarrow K^2 u(Kz)$, é claro que a (1.3.87) não muda. No entanto, a (1.3.83) se torna

$$z = u^2 - \frac{1}{3}u''. \quad (1.3.89)$$

A (1.3.89) é conhecida como equação de Painlevé I [26], e possui como característica principal que diferentes soluções dessa equação com condições de fronteira próximas possuem singularidades próximas, mas não necessariamente iguais (essa característica também é conhecida como condição de Painlevé). No caso da (1.3.89), tais singularidades são polos duplos com resíduo igual a 2, que correspondem a dois zeros de Z . Aqui, estamos interessados em soluções que se comportam como $u(z) \sim z^{1/2}$ para z grande. Em potências de $z^{-5/2}$, a solução da (1.3.89) é:

$$u(z) = z^{1/2} \left(1 - \sum_{k=1} u_k z^{-5k/2} \right). \quad (1.3.90)$$

Para k grande, os coeficientes $u_k \sim (2k)!$, o que significa que a série (1.3.90) diverge e não define uma função única. Isso significa que podemos considerar os modelos de matrizes como equivalentes à gravidade $2d$ em cada ordem da série perturbativa, mas não temos garantias que essa equivalência se verifique não-perturbativamente.

Para um ponto crítico de ordem m da função $W(f)$, o expoente crítico $\gamma_{str} = -1/m$. Assumindo um comportamento $f(x) = f_c(1 - a^{2/m}u(x))$, onde $a^{2-\gamma_{str}} = 1/N$, temos que $u(z) \sim z^{1/m}$ e $Z \sim z^{2+1/m}$. Utilizando a forma generalizada da (1.3.74) para um ponto crítico de ordem m , a equação diferencial resultante para $u(z)$ é o m -ésimo membro da hierarquia KdV de equações diferenciais [7].

2 Integrais angulares

2.1 Integrais sobre o grupo unitário $U(N)$

No capítulo anterior, estudamos dois métodos de resolução de integrais sobre matrizes do tipo

$$Z = \int dM e^{-Tr(V(M))}, \quad (2.1.1)$$

onde M é uma matriz $N \times N$ hermitiana e $V(M)$ é um polinômio em M . O fator chave que nos permitiu realizar tais integrações foi a invariância de $Tr(V(M))$ sob a operação de conjugação (1.2.3), isto é,

$$Tr(V(U\Lambda U^\dagger)) = Tr(V(\Lambda)), \quad (2.1.2)$$

$\forall U \in U(N)$, pois essa propriedade nos possibilita separar a (2.1.1) em uma integração sobre o grupo unitário e outra sobre os auto-valores de M , esta última sendo nada mais que uma integral usual de uma função de várias variáveis. De fato, qualquer função $f : Mat(N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$, invariante sob a ação adjunta do grupo unitário $U(N)$, pode ser integrada utilizando a mudança de variáveis (1.2.3):

$$\int dM f(M) = \int dU \int \prod_i d\lambda_i \Delta^2(\Lambda) f(\Lambda). \quad (2.1.3)$$

No entanto, vários modelos de matrizes dependem da integração de funções que não são invariantes, isto é, que são tais que $f(M) = f(\Lambda, U)$. Nesses casos, precisamos integrar a função f também sobre o grupo unitário. É comum chamar a integral

$$I(\Lambda) = \int_{U(N)} dU f(\Lambda, U) \quad (2.1.4)$$

de integral angular, pois podemos expressar a medida de Haar dU em termos de coordenadas na esfera. Abaixo, vamos estudar um exemplo de modelo em que a (2.1.1) não pode ser imediatamente reduzida a uma integração sobre auto-valores.

Exemplo 2.1.1. *Vamos considerar um modelo de duas matrizes:*

$$Z = \int dM_1 dM_2 e^{-[Tr(V(M_1)) + Tr(V(M_2)) - \beta Tr(M_1 M_2)]}. \quad (2.1.5)$$

M_1, M_2 são matrizes $N \times N$ hermitianas, os potenciais $V(M_{1(2)})$ são polinômios em $M_{1(2)}$ e β é uma constante de acoplamento. Considerando cada matriz como um estado de spin, a (2.1.5) descreve o modelo de Ising em uma rede aleatória dinâmica [27]. Fazendo a mudança de coordenadas

$$M_{1(2)} = U_{1(2)} \Lambda_{1(2)} U_{1(2)}^\dagger, \quad (2.1.6)$$

a (2.1.5) se torna

$$Z = \int \prod_i d\lambda_{1,i} d\lambda_{2,i} \Delta^2(\Lambda_1) \Delta^2(\Lambda_2) e^{-\sum_i [V(\lambda_{1,i}) + V(\lambda_{2,i})]} I(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad (2.1.7)$$

onde

$$I(\beta; \Lambda_1, \Lambda_2) = \int dU_1 dU_2 e^{\beta \text{Tr}(U_1 \Lambda_1 U_1^\dagger U_2 \Lambda_2 U_2^\dagger)}. \quad (2.1.8)$$

Fazendo a mudança de coordenadas $U_2 = U_1 U$, o Jacobiano dessa transformação é $|\det(\partial U_2 / \partial U)| = |\det(U_1 \otimes I)| = 1$, e a (2.1.8) se torna

$$I(\beta; \Lambda_1, \Lambda_2) = \int_{U(N)} dU e^{\beta \text{Tr}(\Lambda_1 U \Lambda_2 U^\dagger)}, \quad (2.1.9)$$

onde normalizamos a medida de Haar do grupo unitário de modo que $\int dU = 1$. Para resolver a (2.1.9), vamos empregar o método da equação de difusão [28][29][30]. Considere a equação do calor em N dimensões espaciais:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial^2 \xi}{\partial \lambda_i^2}, \quad (2.1.10)$$

onde c_i , $i = 1, \dots, N$, são constantes. Tal equação possui uma única solução $\xi = \xi(t, \Lambda)$ que satisfaz a condição inicial $\xi(0, \Lambda) = \eta(\Lambda)$:

$$\xi(t, \Lambda) = \int d\Lambda' K(\Lambda, \Lambda'; t) \eta(\Lambda'), \quad (2.1.11)$$

onde o propagador $K(\Lambda, \Lambda'; t)$ é dado por:

$$K(\Lambda, \Lambda'; t) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(2\pi t c_i)^{1/2}} e^{-\sum_{i=1}^N \frac{1}{2c_i t} (\lambda_i - \lambda'_i)^2}. \quad (2.1.12)$$

Como as matrizes hermitianas formam um espaço vetorial de dimensão finita, podemos construir a equação do calor nesse espaço de forma análoga ao caso acima, considerando os elementos de matriz como coordenadas no espaço euclidiano. Assim, considere a função de Green da equação do calor no espaço das matrizes hermitianas:

$$f(t; M_1, M_2) = \frac{1}{(2\pi t)^{N^2/2}} e^{-\frac{1}{2t} \text{Tr}(M_1 - M_2)^2}. \quad (2.1.13)$$

Tomamos as constantes $c_i = 1$, $\forall i$. A (2.1.13) é a solução da equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} D_1 \right) f(t; M_1, M_2) = 0, \quad (2.1.14)$$

com a condição inicial $\lim_{t \rightarrow 0} f(t; M_1, M_2) = \delta(M_1 - M_2)$, onde

$$D_a = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial M_{a,ii}^2} + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \left[\frac{\partial^2}{\partial (\text{Re} M_{a,ij})^2} + \frac{\partial^2}{\partial (\text{Im} M_{a,ij})^2} \right] \quad (2.1.15)$$

é o laplaciano no espaço das matrizes hermitianas com relação à matriz M_a . Seja $g(t, M_1)$ a única solução da equação do calor acima com condição inicial $g(0, M_1) = g(M_1)$, invariante sob a ação adjunta do grupo unitário. Segue que

$$g(t, M_1) = \int dM_2 f(t; M_1, M_2) g(M_2). \quad (2.1.16)$$

Fazendo a mudança de variáveis (2.1.6), temos que

$$g(t, \Lambda_1) = \int dU d\Lambda_2 \Delta^2(\Lambda_2) f(t; \Lambda_1, U \Lambda_2 U^\dagger) g(\Lambda_2). \quad (2.1.17)$$

Multiplicando os dois lados da (2.1.17) por $\Delta(\Lambda_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(\Lambda_1) g(t, \Lambda_1) &= \int d\Lambda_2 \Delta(\Lambda_2) g(\Lambda_2) \left[\Delta(\Lambda_1) \Delta(\Lambda_2) \int dU f(t; \Lambda_1, U \Lambda_2 U^\dagger) \right] \\ &= \int d\Lambda_2 \Delta(\Lambda_2) g(\Lambda_2) k(t; \Lambda_1, \Lambda_2), \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

onde, claramente,

$$k(t; \Lambda_1, \Lambda_2) = \Delta(\Lambda_1) \Delta(\Lambda_2) \int dU f(t; \Lambda_1, U \Lambda_2 U^\dagger). \quad (2.1.19)$$

Definindo a função

$$\xi(t, \Lambda) = \Delta(\Lambda) g(t, \Lambda). \quad (2.1.20)$$

Naturalmente, a (2.1.18) é, em termos da função ξ ,

$$\xi(t, \Lambda_1) = \int d\Lambda_2 k(t; \Lambda_1, \Lambda_2) \xi(\Lambda_2), \quad (2.1.21)$$

onde definimos $\xi(0, \Lambda) = \xi(\Lambda)$. Da definição (2.1.20), vemos que ξ deve ser antissimétrica, pois o determinante de Vandermonde $\Delta(\Lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$ é antissimétrico com relação à mudança $i \leftrightarrow j$ e, como $g(t, M)$ é invariante sob conjugação, é uma função simétrica dos auto-valores de M . Note ainda que a mudança de variáveis (2.1.6) induz uma métrica g , cujo determinante é dado pela (1.2.7):

$$\sqrt{\det g} = \Delta^2(\Lambda). \quad (2.1.22)$$

Daí, o operador laplaciano, nas novas coordenadas, é dado por:

$$\begin{aligned} D_a &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_{a,i}} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial \lambda_{a,i}} \\ &= \Delta^{-2}(\Lambda) \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_{a,i}} \Delta^2(\Lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_{a,i}}. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Agora, como $g(t, \Lambda_1) = \Delta^{-1}(\Lambda_1) \xi(t, \Lambda_1)$ satisfaz a equação do calor,

$$\Delta^{-1}(\Lambda_1) \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta^{-2}(\Lambda_1) \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,i}} \Delta^2(\Lambda_1) \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,i}} \Delta^{-1}(\Lambda_1) \xi, \quad (2.1.24)$$

ou seja, ξ satisfaz a equação

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta(\Lambda_1)} \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,i}} \Delta^2(\Lambda_1) \frac{\partial}{\partial \lambda_{1,i}} \Delta^{-1}(\Lambda_1) \xi. \quad (2.1.25)$$

O lado direito da (2.1.25) é igual a

$$\frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{\partial^2 \xi}{\partial \lambda_{1,i}^2} - \frac{1}{\Delta(\Lambda_1)} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{1,i}^2} \Delta(\Lambda_1) \right), \quad (2.1.26)$$

e o segundo termo da (2.1.26) é identicamente nulo. De fato, $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{1,i}^2} \Delta(\Lambda_1)$ deve ser um polinômio antissimétrico nos λ_i 's. No entanto, qualquer polinômio antissimétrico deve ser proporcional a $\Delta(\Lambda)$. Como esse termo possui grau menor que $\Delta(\Lambda)$, ele deve ser identicamente nulo. Assim, a função ξ satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 \xi}{\partial \lambda_{1,i}^2}. \quad (2.1.27)$$

A única solução da (2.1.27) com condição inicial $\xi(0, \Lambda) = \xi(\Lambda)$ é dada por

$$\xi(t, \Lambda_1) = \int d\Lambda_2 K(t; \Lambda_1, \Lambda_2) \xi(\Lambda_2), \quad (2.1.28)$$

com a função de Green

$$\begin{aligned} K(t; \Lambda_1, \Lambda_2) &= \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} \frac{1}{N!} \sum_{P(i_1, \dots, i_N)} (-1)^{\pi(i_1, \dots, i_N)} e^{-\frac{1}{2t} \sum_i (\lambda_{1,i} - \lambda_{2,P(i)})^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} \frac{1}{N!} \det \left[e^{-\frac{1}{2t} (\lambda_{1,i} - \lambda_{2,j})^2} \right], \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

anti-simetrizada, pois ξ deve ser antissimétrica. Comparando a (2.1.29) com a (2.1.19), temos que

$$\int dU e^{-\frac{1}{2t} \text{Tr}(\Lambda_1 - U\Lambda_2 U^\dagger)^2} = (2\pi t)^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{1}{N!} \frac{\det \left[e^{-\frac{1}{2t} (\lambda_{1,i} - \lambda_{2,j})^2} \right]}{\Delta(\Lambda_1) \Delta(\Lambda_2)}. \quad (2.1.30)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Lambda_1 - U\Lambda_2 U^\dagger)^2 &= \text{Tr}(\Lambda_1^2) + \text{Tr}(\Lambda_2^2) - 2\text{Tr}(\Lambda_1 U \Lambda_2 U^\dagger) \\ &= \sum_i \lambda_{1,i}^2 + \sum_i \lambda_{2,i}^2 - 2\text{Tr}(\Lambda_1 U \Lambda_2 U^\dagger), \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

e o lado esquerdo da (2.1.30) pode ser escrito como

$$e^{-\frac{1}{2t} (\sum_i \lambda_{1,i}^2 + \sum_i \lambda_{2,i}^2)} \int dU e^{\frac{1}{t} \text{Tr}(\Lambda_1 U \Lambda_2 U^\dagger)}. \quad (2.1.32)$$

Expandindo o expoente da exponencial do lado direito da (2.1.30) e identificando $\beta = 1/t$, temos, finalmente, o resultado da (2.1.9):

$$I(\beta; \Lambda_1, \Lambda_2) = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{1}{N!} \frac{\det \left[e^{\beta \lambda_{1,i} \lambda_{2,j}} \right]}{\Delta(\Lambda_1) \Delta(\Lambda_2)}. \quad (2.1.33)$$

A (2.1.9) é conhecida na literatura como integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber, e diferentes métodos de obtenção da fórmula (2.1.33) podem ser encontrados em [14][31][30].

2.2 Modelo de matrizes para $c > 1$

Aqui, vamos introduzir um outro modelo de matrizes que depende da integração de uma função não-invariante. Esse modelo foi desenvolvido com a intenção de descrever a gravitação quântica em $2d$ acoplada a um campo de matéria conforme com carga central $c > 1$. Lembrando que a energia livre da gravitação quântica em $2d$ para uma área fixa A possui comportamento crítico, para $A \rightarrow \infty$, dado por

$$F(A) \sim A^{(\gamma_{str}-2)\chi/2-1}, \quad (2.2.1)$$

onde

$$\gamma_{str} = \frac{1}{12} \left(c - 1 - \sqrt{(c-1)(c-25)} \right). \quad (2.2.2)$$

Note que, para $25 > c > 1$, γ_{str} é um número complexo, e a (2.2.1) não caracteriza um comportamento crítico do sistema. Em um contexto de teoria das cordas, a carga central c equivale à dimensão do espaço-tempo no qual a corda está imersa. Isso significa que os modelos de matrizes usuais não podem descrever cordas "realistas", isto é, objetos unidimensionais se propagando em espaços de dimensão maior que um. Até o momento, não se sabe que tipo de transição de fase ocorre na passagem de $c < 1$ para $c > 1$. O modelo de Ambjørn-Sedrakyan [32][33] busca ser uma primeira tentativa de explorar essa região desconhecida da gravitação quântica.

Primeiramente, considere uma cadeia unidimensional de N spins na presença de um campo magnético externo e constante B . Os spins interagem apenas entre seus vizinhos mais próximos. A cada ponto i da cadeia, atribuímos uma variável $\sigma_i = \pm 1$. A Hamiltoniana desse sistema é dada por

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} - B \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (2.2.3)$$

onde J é uma constante de acoplamento. A função de partição do sistema é:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H}, \quad (2.2.4)$$

onde a soma se dá sobre todas as configurações de spin. Assumindo condições de contorno periódicas, isto é, $\sigma_i = \sigma_{i+N}$, podemos escrever a função de partição como

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} T_{\sigma_1 \sigma_2} \dots T_{\sigma_N \sigma_1}, \quad (2.2.5)$$

onde definimos o elemento de matriz

$$T_{\sigma\sigma'} = e^{\mathcal{J}\sigma\sigma' + \frac{1}{2}\mathcal{B}(\sigma+\sigma')}, \quad (2.2.6)$$

com $\mathcal{J} = \beta J$ e $\mathcal{B} = \beta B$. Como $\sigma = \pm 1$, podemos calcular os elementos $T_{\sigma\sigma'} = \langle \sigma | T | \sigma' \rangle$ explicitamente. Fazendo isso, temos a matriz

$$T = \begin{pmatrix} e^{\mathcal{J}+\mathcal{B}} & e^{-\mathcal{J}} \\ e^{-\mathcal{J}} & e^{\mathcal{J}-\mathcal{B}} \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

chamada matriz de transferência. Nesta abordagem, podemos considerar, em cada ponto da rede, um espaço de Hilbert gerado por dois estados, $\{|\sigma = \pm 1\rangle\}$. A própria rede se torna uma espécie de eixo temporal, ao longo do qual os estados evoluem pela ação do operador T ,

$$|\sigma_{i+1}\rangle = T|\sigma_i\rangle. \quad (2.2.8)$$

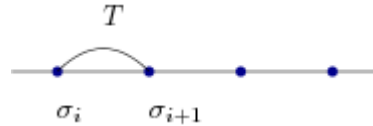


Figura 15 – Cadeia de spins, com T caracterizando a evolução do estado $|\sigma_i\rangle$ ao estado $|\sigma_{i+1}\rangle$.

Levando em consideração a relação de completudeza $\sum_{\sigma=\pm 1} |\sigma\rangle\langle\sigma| = 1$, a (2.2.5) se torna

$$Z = \text{Tr}(T^N). \quad (2.2.9)$$

Agora, considere o exemplo de um sistema de spins em uma rede $N \times N$ desenhada sobre uma superfície plana bidimensional, assumindo novamente condições de fronteira periódicas. Em cada ponto i da rede, posicionamos uma variável de spin σ_i , que pode assumir os valores ± 1 . Isso significa que cada ponto i dessa rede está associado a um espaço linear V_i de dimensão $\dim V_i = 2$. Considerando uma interação entre vizinhos mais próximos entre os spins, o estado de cada vértice i dependerá do estado de quatro pontos adjacentes. Suponha que um dado vértice possua energia $\epsilon(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são os estados associados aos vértices adjacentes. A tal vértice, associamos um peso de Boltzmann

$$R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = e^{-\epsilon(\alpha,\beta,\gamma,\delta)/k_B T}. \quad (2.2.10)$$

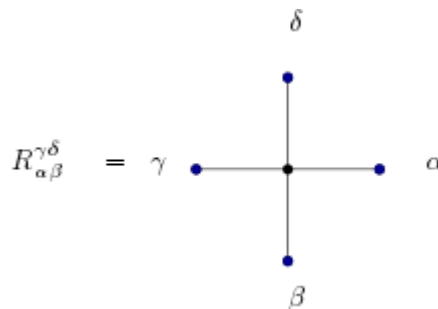


Figura 16 – Vértice, e respectivos pontos adjacentes, associado ao peso estatístico $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$.

Como, em cada ponto i , temos um espaço linear V_i , podemos associar a uma reta um produto de espaços lineares $\otimes_i V_i$. Assim, diferenciamos entre um espaço vertical $V^{(v)}$, formado por uma coluna de pontos na rede, e um espaço horizontal $V^{(h)}$, formado por uma linha de pontos na rede. Na figura 16, o espaço vertical é $V^{(v)} = V_\beta \otimes V_\delta$, enquanto

que o espaço horizontal é $V^{(h)} = V_\alpha \otimes V_\gamma$. Podemos considerar o objeto $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ como um elemento do operador $R : V^{(h)} \otimes V^{(v)} \rightarrow V^{(h)} \otimes V^{(v)}$, chamado matriz R , que mapeia o produto do espaço vertical $V^{(v)}$ com o espaço horizontal $V^{(h)}$ a ele mesmo, isto é, $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \langle \delta | \otimes \langle \gamma | R | \alpha \rangle \otimes | \beta \rangle$. Se temos vários espaços verticais $V_i^{(v)}$, a matriz R para cada espaço horizontal $V_a^{(h)}$ é o operador $R_{ai} : V_a^{(h)} \otimes V_i^{(v)} \rightarrow V_a^{(h)} \otimes V_i^{(v)}$.

A partir da matriz R , podemos construir a matriz de transferência T entre linhas do seguinte modo: seja $V_a^{(h)}$ um espaço horizontal fixo. Sejam também $|\alpha\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \dots \otimes |\alpha_N\rangle$, e $|\beta\rangle = |\beta_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle \dots \otimes |\beta_N\rangle$, onde $|\alpha_i\rangle, |\beta_i\rangle \in V_i^{(v)}$, os estados correspondentes às linhas abaixo e acima, respectivamente, daquela associada a $V_a^{(h)}$. O operador T , agindo no estado $|\alpha\rangle$, produz o estado $|\beta\rangle$, e o elemento de matriz $\langle \beta | T | \alpha \rangle$ é definido de modo análogo ao caso da cadeia de spins unidimensional, isto é,

$$\langle \beta | T | \alpha \rangle = \sum_{\{\mu\} \in V_a^{(h)}} R_{\mu_2 \beta_1}^{\mu_1 \alpha_1} R_{\mu_3 \beta_2}^{\mu_2 \alpha_2} \dots R_{\mu_1 \beta_N}^{\mu_N \alpha_N}. \quad (2.2.11)$$

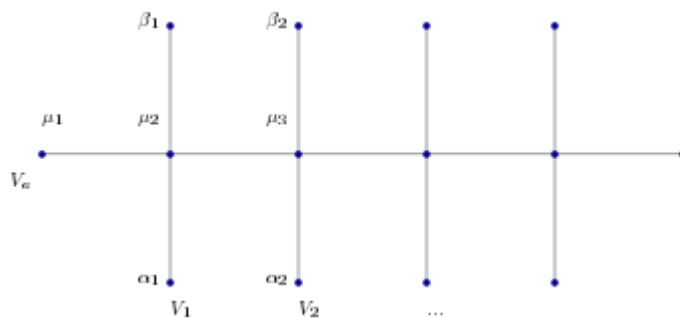


Figura 17 – Para obter a matriz de transferência entre duas linhas, tomamos a soma, sobre todos os estados do espaço horizontal intermediário, do produto das matrizes R associadas a cada vértice envolvido.

Da interpretação física da matriz T , podemos interpretar $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ como um operador que evolui os estados α e β aos estados γ e δ , respectivamente. Note que a (2.2.11) nada mais é que um produto de matrizes R . A função de partição é dada, novamente, pelo traço, sobre o produto tensorial de espaços verticais, da matriz de transferência [34], e segue que podemos expressar a função de partição apenas em termos da matriz R :

$$Z = \text{Tr}_v(T^N). \quad (2.2.12)$$

Agora, considere uma rede cúbica, cuja superfície consiste de plaquetas. Tome os pontos médios de cada aresta das plaquetas como sítios de uma rede dual e una tais pontos por setas que mantêm uma orientação contínua ao longo da rede, como na figura 18. A rede formada pelas setas é chamada rede de Manhattan, e existe uma correspondência de um para um dessa nova rede com a original.

Vamos considerar um sistema integrável em tal rede. Nossos novos vértices são quadrados que envolvem os vértices originais. Lembrando que a matriz R liga dois vértices

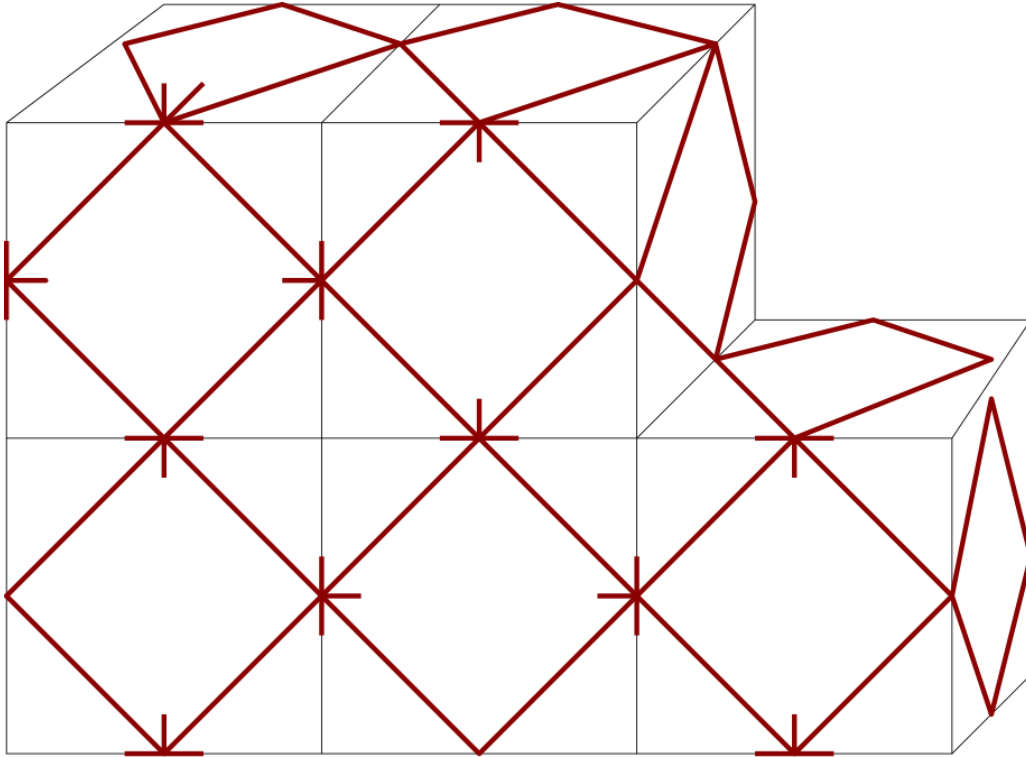


Figura 18 – Rede de Manhattan correspondente a uma dada rede cúbica.

a outra dupla que corresponde a estados diferentes, associamos a uma matriz R um quadrado que conecta dois vértices de Manhattan diferentes, de acordo com a figura 19. Note que, devido ao arranjo dos índices e direção das setas, é natural utilizar também a matriz \check{R} , definida como

$$\check{R}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = R_{\beta\alpha}^{\alpha'\beta'}, \quad (2.2.13)$$

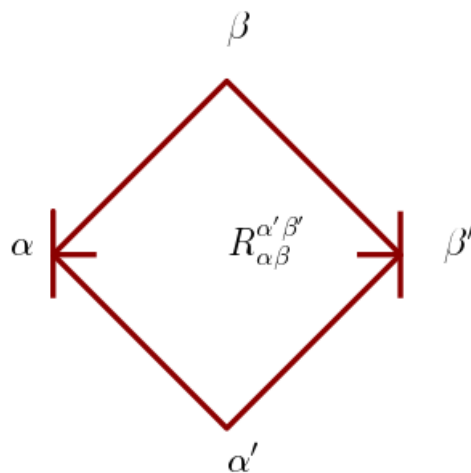


Figura 19 – Matriz R associada à rede de Manhattan.

Denotando a rede de Manhattan por Ω , a função de partição $Z(\Omega)$ associada é

dada, como sempre, por um produto particular de matrizes R :

$$Z(\Omega) = \prod_{R \in \Omega} \check{R}. \quad (2.2.14)$$

Somando sobre todas as redes de Manhattan passíveis de serem definidas na rede original, temos a função de partição de um sistema integrável definido em uma rede aleatória

$$Z = \sum_{\Omega} Z(\Omega) e^{-\mu|\Omega|}, \quad (2.2.15)$$

onde $|\Omega|$ é a área da rede, associada a seu número de vértices, e μ é uma constante que corresponde a uma área característica das redes de Manhattan. Estamos interessados no limite onde a rede se aproxima de uma superfície contínua, isto é, quando $|\Omega| \rightarrow \infty$. Podemos pensar que tal limite é atingido quando a constante de acoplamento μ se aproxima de um valor crítico μ_c . Assim, temos que a soma sobre redes aleatórias é uma versão regularizada da soma sobre superfícies bidimensionais, do mesmo modo que a soma sobre triangulações apresentada na seção 1.1 também o é. Nesse sentido, acoplamos um modelo integrável, que descreve um campo de matéria, à gravitação em $2d$.

Agora, vamos introduzir um modelo de matrizes que gera a rede descrita no texto acima. Vamos utilizar, como exemplo, o modelo de Heisenberg XXZ (análogo ao modelo de seis vértices [34], discutido, no contexto de modelos de matrizes aleatórias, em [35][36]), cuja matriz R é, na base das matrizes de Pauli,

$$\check{R}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = \frac{a+c}{2} (\sigma_0)_{\alpha}^{\alpha'} (\sigma_0)_{\beta}^{\beta'} + \frac{b}{2} \left((\sigma_1)_{\alpha}^{\alpha'} (\sigma_1)_{\beta}^{\beta'} + (\sigma_2)_{\alpha}^{\alpha'} (\sigma_2)_{\beta}^{\beta'} \right) + \frac{a-c}{2} (\sigma_3)_{\alpha}^{\alpha'} (\sigma_3)_{\beta}^{\beta'}, \quad (2.2.16)$$

ou ainda,

$$\check{R}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = I_a (\sigma_a \otimes \sigma_a)_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}, \quad (2.2.17)$$

onde a soma sobre $a = 0, 1, 2, 3$ está implícita, $I = (\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{a-c}{2})$, a, b, c são pesos de Boltzmann, σ_0 é a matriz identidade 2×2 e σ_i , $i = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli usuais. Os índices $\alpha, \beta, \alpha', \beta' = 1, 2$. Embora o modelo XXZ não possua carga central $c > 1$, a partir dele, podemos facilmente generalizar para o modelo de Heisenberg de spin s arbitrário [33]. A carga central desse modelo é $c = \frac{3s}{s+1}$, e assim podemos escolher s de modo que $c > 1$.

Seja M uma matriz hermitiana $2N \times 2N$, com componentes $M_{\alpha\beta,ij}$, onde $\alpha, \beta = 1, 2$ são índices que correspondem ao modelo de Heisenberg e $i, j = 1, \dots, N$. Definindo a ação

$$S(M; R) = M_{\alpha\beta,ij}^* (\check{R}^{-1})_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} M_{\beta'\alpha',ij} - V(M), \quad (2.2.18)$$

onde a soma sobre índices repetidos está implícita e

$$V(M) = \sum_{k \geq 3} \frac{g_k}{k} \text{Tr} (M^k). \quad (2.2.19)$$

Note ainda que, de (2.2.17), $\check{R}^{-1} = I_a^{-1}(\sigma_a \otimes \sigma_a)$ e, como I_a^{-1} são apenas os pesos de Boltzmann com um sinal diferente no expoente, continuaremos a escrever apenas I_a . Como descrito no capítulo 1, a função de partição

$$Z = \int dM e^{-NS(M;R)} \quad (2.2.20)$$

gera a rede de Manhattan quando expandimos $e^{NV(M)}$ em potências das constantes de acoplamento g_k e efetuamos as integrais gaussianas ordem por ordem. Para ver isso, note que o propagador, sendo o inverso do termo quadrático, é dado por

$$\langle M_{\alpha\beta,ij} M_{\alpha'\beta',kl} \rangle = \check{R}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (2.2.21)$$

o que significa que podemos utilizar exatamente a figura 19 como representação pictórica dos propagadores e assim, sendo os diagramas obtidos da expansão perturbativa da (2.2.20) feitos de vértices ligados por quadrados iguais aos da figura 19, eles formam uma rede de Manhattan. Como anteriormente, Z gera todos os diagramas. Se estamos interessados apenas em redes conexas, devemos calcular a energia livre $F = \frac{1}{N^2} \ln Z$. Os índices restantes i, j da matriz M são responsáveis pela expansão topológica dos diagramas, cada um com peso N^χ , com χ sendo, como sempre, a característica de Euler da superfície na qual o diagrama está inscrito. Para N suficientemente grande, apenas as redes que podem ser inscritas em esferas contribuem para a função de partição.

Para calcular a (2.2.20), podemos proceder como no capítulo 1 e tentar decompor a integral em duas outras independentes, utilizando a mudança de variáveis

$$M = U M^{(d)} U^\dagger, \quad (2.2.22)$$

onde $U \in U(2N)$ é a matriz unitária que diagonaliza M e $M^{(d)} = \text{diag}(m_{\alpha,i}^{(d)})$, $\alpha = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$, é sua matriz de auto-valores. A medida dM nas novas coordenadas foi calculada no capítulo 1:

$$dM = dU \prod_{\alpha,i} dm_{\alpha,i}^{(d)} \Delta^2(M^{(d)}), \quad (2.2.23)$$

onde

$$\Delta^2(M^{(d)}) = \prod_{\alpha,i \neq \beta,j} (m_{\alpha,i}^{(d)} - m_{\beta,j}^{(d)})^2 \quad (2.2.24)$$

é o determinante de Vandermonde usual e $dU = \prod_{\alpha,i \neq \beta,j} |(U^\dagger dU)_{\alpha\beta,ij}|^2$ é a medida de Haar no grupo $U(2N)$. O potencial (2.2.19) é invariante sob a transformação (2.2.22). No entanto, o termo quadrático

$$f(M; R) = M_{\alpha\beta,ij}^* (\check{R}^{-1})_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} M_{\beta'\alpha',ij} \quad (2.2.25)$$

não o é. De fato, nas novas coordenadas, tal termo é dado por

$$f(M^{(d)}, U; R) = U_{\alpha\gamma,ik}^* (M^{(d)})_{\gamma\delta,kl}^* U_{\beta\delta,jl} (\check{R}^{-1})_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} U_{\beta'\gamma',ik'} M_{\gamma'\delta',k'l'}^{(d)} U_{\delta'\alpha',l'j}^\dagger, \quad (2.2.26)$$

e é quártico nas matrizes U , o que significa que não é do tipo que dá origem a uma integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber, resolvida na seção 2.1. Para expressar a (2.2.20) como uma integral apenas sobre os auto-valores de M temos, então, que resolver a integral angular

$$I(M^{(d)}; R) = \int_{U(N)} dU e^{-Nf(M^{(d)}, U; R)}. \quad (2.2.27)$$

Para tanto, é conveniente passar para a seguinte representação da matriz R :

$$\left(\check{R}^c\right)_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} = \check{R}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}, \quad (2.2.28)$$

que equivale a permutar as linhas das matrizes no espaço horizontal, que corresponde aos índices α e α' , e permutar as colunas das matrizes no espaço vertical, dado pelos índices β , β' . Isso é o mesmo que dizer que trocamos $1 \leftrightarrow 2$ nos índices α' e β . Assim, fazendo $a \leftrightarrow b$, temos que

$$\check{R}^c = \frac{b+c}{2}\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \frac{b-c}{2}\sigma_2 \otimes \sigma_2 + \frac{a}{2}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_3 \otimes \sigma_3), \quad (2.2.29)$$

ou seja,

$$\check{R}^c = \sigma_a \otimes \sigma_a I_a, \quad (2.2.30)$$

onde

$$I = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{b-c}{2}, \frac{a}{2}\right). \quad (2.2.31)$$

Utilizando essa representação da matriz R , a ação (2.2.18) se torna

$$\begin{aligned} S(M; R) &= M_{\alpha\beta, ij}^* ((\check{R}^c)^{-1})_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} M_{\beta'\alpha', ij} - V(M) \\ &= M_{\alpha\beta, ij}^* I_a (\sigma_a \otimes \sigma_a)_{\alpha\alpha'}^{\beta\beta'} \delta_{ij'} \delta_{j'i'} M_{\beta'\alpha', j'i'} - V(M). \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Seja $\{\tau^\mu\}$, $\mu = 1, \dots, N^2$, o conjunto dos geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{u}(N)$ de $U(N)$, normalizados de modo que as identidades de Fierz [37] sejam dadas por

$$\tau_{ij}^\mu \tau_{i'j'}^\mu = \delta_{ij'} \delta_{j'i'}. \quad (2.2.33)$$

Utilizando a (2.2.33) na ação, segue que

$$\begin{aligned} S(M; R) &= M_{\alpha\beta, ij}^* I_a (\sigma_a)_{\alpha\beta} \tau_{ij}^\mu (\sigma_a)_{\alpha'\beta'} \tau_{i'j'}^\mu M_{\beta'\alpha', j'i'} - V(M) \\ &= M_{\beta\alpha, ji}^\dagger (\sigma \otimes \tau^\mu)_{\alpha\beta, ij} I_a (\sigma \otimes \tau^\mu)_{\alpha'\beta', i'j'} M_{\beta'\alpha', j'i'} - V(M) \\ &= Tr \left(M^\dagger t^A \right) I_a Tr \left(t^A M \right) - V(M), \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

onde

$$t^A = \sigma_a \otimes \tau^\mu, \quad (2.2.35)$$

com $A = (a, \mu) = 1, \dots, (2N)^2$, são os geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{u}(2N)$ de $U(2N)$. Agora, como $M^{(d)} \in \mathfrak{u}(2N)$, expandindo na base $\{t^A\}$, temos que

$$M^{(d)} = m_A^{(d)} t^A, \quad (2.2.36)$$

e a transformação (2.2.22) é

$$M = m_A^{(d)} U t^A U^\dagger. \quad (2.2.37)$$

Lembrando que, para cada $U \in U(2N)$, a ação adjunta de $U(2N)$ sobre sua álgebra é o mapa $Ad_U : \mathfrak{u}(2N) \rightarrow \mathfrak{u}(2N)$ que leva o vetor $X \in \mathfrak{u}(2N)$ ao vetor $Ad_U X = UXU^\dagger \in \mathfrak{u}(2N)$, temos que $Ut^A U^\dagger = Ad_U t^A \in \mathfrak{u}(2N)$, e portanto tal vetor pode ser expandido na base $\{t^A\}$. Escrevemos

$$Ut^A U^\dagger = \Lambda(U)_{AB} t^B, \quad (2.2.38)$$

e a (2.2.37) se torna

$$M = m_A^{(d)} \Lambda(U)_{AB} t^B. \quad (2.2.39)$$

De $Tr(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}$ e $Tr(\tau^\mu \tau^\nu) = \delta^{\mu\nu}$, vemos que $Tr(t^A t^B) = 2\delta^{AB}$. Logo, multiplicando os dois lados da (2.2.36) por t^B e calculando o traço, obtemos uma expressão para os coeficientes $m_A^{(d)}$ em termos dos auto-valores de M e dos geradores $\{t^A\}$:

$$m_A^{(d)} = \frac{1}{2} Tr(M^{(d)} t^A). \quad (2.2.40)$$

Do mesmo modo, da (2.2.38) podemos obter a matriz Λ em função da matriz U e dos geradores $\{t^A\}$:

$$\Lambda(U)_{AB} = \frac{1}{2} Tr(t^A U t^B U^\dagger). \quad (2.2.41)$$

Com M dado por (2.2.39), a ação (2.2.34) é

$$\begin{aligned} S(m^{(d)}, \Lambda; I) &= m_B^{(d)} \Lambda_{BA'} m_C^{(d)} \Lambda_{CA''} Tr(t^{A'} t^A) I_a Tr(t^A t^{A''}) - V(m^{(d)}) \\ &= 4m_B^{(d)} \Lambda_{BA'} m_C^{(d)} \Lambda_{CA''} I_a \delta^{A'A''} - V(m^{(d)}) \\ &= m_B^{(d)} \Lambda_{BA} m_C^{(d)} \Lambda_{CA} I_a - V(m^{(d)}), \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

onde efetuamos a mudança de escala $m^{(d)} \rightarrow \frac{1}{2} m^{(d)}$. O índice $A = (a, \mu)$, e então podemos também escrever a ação mais explicitamente como

$$S(m^{(d)}, \Lambda; I) = m_{a'\mu'}^{(d)} \Lambda_{a'\mu', a\mu} I_a \Lambda_{a''\mu'', a\mu} m_{a''\mu''}^{(d)} - V(m^{(d)}). \quad (2.2.43)$$

Agora, vamos escolher o seguinte conjunto de geradores $\{t^A\}$ de $\mathfrak{u}(N)$: para a sub-álgebra de Cartan, isto é, a sub-álgebra formada pelas matrizes diagonais em $\mathfrak{u}(2N)$, tomamos como geradores $t^{0,11} = \sigma_0 \otimes I$, onde I é a matriz identidade $N \times N$, $t^{3,ii} = \sigma_3 \otimes \tau^{ii}$, $i = 1, \dots, N$ e $t^{0,ii} = \frac{1}{2} (\sigma_0 + \sigma_3) \otimes (\tau^{ii} - \tau^{i-1, i-1})$, $i = 2, \dots, N$, onde

$$(\tau^{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (2.2.44)$$

Note que temos $2N - 1$ geradores da sub-álgebra de Cartan, como deveria ser. O restante dos geradores são dados exatamente pela definição (2.2.35), $t^{a,ii} = \sigma_a \otimes \tau^{ii}$, $a = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$ e $t^{a,ij} = \sigma_a \otimes \tau^{ij}$, $a = 0, 1, 2, 3$, $i \neq j = 1, \dots, N$. Definidos os geradores,

podemos calcular as coordenadas $m^{(d)}$ em termos apenas dos auto-valores de M utilizando a (2.2.40). Antes disso, observe que $M^{(d)}$ é diagonal, e portanto apenas os geradores da sub-álgebra de Cartan podem aparecer na expansão (2.2.36), o que significa que $m_A^{(d)} = 0$ se A não corresponder a um gerador de Cartan. De fato, utilizando os geradores definidos acima, temos que

$$\begin{aligned} m_{a,ii}^{(d)} &= M_{\alpha\beta,kl}^{(d)} t_{\beta\alpha,kl}^{a,ii} = m_{\alpha,ll}^{(d)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{lk} (\sigma_a)_{\beta\alpha} (\tau^{ii})_{kl} \\ &= m_{\alpha,ll}^{(d)} (\sigma_a)_{\alpha\alpha} \delta_{ik} \delta_{il} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

pois σ_a tem traço nulo para $a = 1, 2$. Logo, $m_{1,ii}^{(d)} = m_{2,ii}^{(d)} = 0$, para $i = 1, \dots, N$. Agora, para $a = 0, 1, 2, 3$ e $i \neq j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} m_{a,ij}^{(d)} &= M_{\alpha\beta,kl}^{(d)} t_{\beta\alpha,kl}^{a,ij} = m_{\alpha,kk}^{(d)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kl} (\sigma_a)_{\beta\alpha} (\tau^{ij})_{kl} \\ &= m_{\alpha,kk}^{(d)} (\sigma_a)_{\alpha\alpha} \delta_{ik} \delta_{kj} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

pois $\delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Portanto, $m_{a,ij}^{(d)} = 0$ para $a = 0, 1, 2, 3$ e $i \neq j = 1, \dots, N$. Vamos calcular as coordenadas que correspondem aos geradores de Cartan. Temos que

$$\begin{aligned} m_{0,11}^{(d)} &= M_{\alpha\beta,ij}^{(d)} t_{\beta\alpha,ji}^{0,11} = m_{\alpha,ii}^{(d)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} (\sigma_0)_{\beta\alpha} I_{ji} \\ &= \sum_i \left(m_{\alpha=1,ii}^{(d)} + m_{\alpha=2,ii}^{(d)} \right), \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

isto é,

$$m_{0,11}^{(d)} = \text{Tr} \left(M^{(d)} \right). \quad (2.2.48)$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} m_{3,ii}^{(d)} &= M_{\alpha\beta,jk}^{(d)} t_{\beta\alpha,kj}^{3,ii} = m_{\alpha,jj}^{(d)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{jk} (\sigma_3)_{\beta\alpha} (\tau^{ii})_{kj} \\ &= m_{\alpha,jj}^{(d)} (\sigma_3)_{\alpha\alpha} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

ou seja,

$$m_{3,ii}^{(d)} = m_{\alpha=1,ii}^{(d)} - m_{\alpha=2,ii}^{(d)}. \quad (2.2.50)$$

Do mesmo modo, pode-se mostrar que

$$m_{0,ii}^{(d)} = m_{\alpha=1,ii}^{(d)} - m_{\alpha=1,i-1i-1}^{(d)}. \quad (2.2.51)$$

Escrevemos a mudança de variáveis (2.2.22) na representação adjunta, agora precisamos analisar o espaço de integração nessa representação. Para $M^{(d)} \in \mathfrak{u}(2N)$ fixo, a órbita da ação adjunta

$$\text{Ad}_{U(2N)} M^{(d)} = \{ m_A^{(d)} \Lambda(U)_{AB} t^B : U \in U(2N) \} \quad (2.2.52)$$

pode ser identificada com o espaço quociente $U(2N)/U(1)^{2N}$, onde $U(1)^{2N} = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{2N \text{ vezes}}$ é o sub-grupo de isotropias, que consiste de matrizes unitárias diagonais e deixa fixo o elemento $M^{(d)}$. Mais ainda, tal espaço quociente é chamado uma variedade flag completa $F(1, 1, \dots, 1)$. Uma variedade (complexa) flag completa $F(1, 1, \dots, 1)$ é um conjunto de seqüências

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{2N} \quad (2.2.53)$$

de subespaços vetoriais de \mathbb{C}^{2N} , onde $\dim V_i = i, \forall i = 1, \dots, 2N$. Chamamos cada seqüência de um flag. A estrutura de variedade vem do fato que o grupo linear $GL(2N, \mathbb{C})$ possui uma ação transitiva sobre $F(1, 1, \dots, 1)$. Isso significa que sempre existe uma matriz $g \in GL(2N, \mathbb{C})$ que mapeia a variedade flag canônica

$$\text{Span}_{\mathbb{C}}(e_1) \subset \text{Span}_{\mathbb{C}}(e_1, e_2) \subset \dots \subset \text{Span}_{\mathbb{C}}(e_1, \dots, e_{2N}) \subset \mathbb{C}^{2N}, \quad (2.2.54)$$

onde (e_1, \dots, e_{2N}) é a base canônica de \mathbb{C}^{2N} , em qualquer seqüência do tipo (2.2.53), isto é,

$$g \text{Span}_{\mathbb{C}}(e_1, \dots, e_k) = V_k, \quad (2.2.55)$$

$\forall k = 1, \dots, 2N - 1$ (isso equivale a dizer que sempre podemos realizar uma mudança de base entre a canônica e qualquer outra). Podemos ainda escolher a matriz g de modo que (ge_1, \dots, ge_{2N}) seja uma base ortonormal de \mathbb{C}^{2N} com respeito ao produto interno padrão nesse espaço, dado por $\langle \alpha_i e_i, \beta_j e_j \rangle = \alpha_i \beta_j^*$, para quaisquer dois vetores $\alpha = \alpha_i e_i$ e $\beta = \beta_j e_j$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, 2N$. Ou seja, g deve ser tal que $\langle g\alpha, g\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$, isto é,

$$gg^\dagger = I, \quad (2.2.56)$$

onde I é a matriz identidade $2N \times 2N$. Assim, $g \in U(2N)$, e podemos identificar a variedade flag completa com o espaço quociente

$$F(1, 1, \dots, 1) = U(2N)/U(1)^{2N}, \quad (2.2.57)$$

onde $U(1)^{2N}$ é o subgrupo que consiste de matrizes unitárias diagonais que deixam a variedade flag canônica invariante, i.e., é o subgrupo de isotropias. A variedade flag completa $F(1, \dots, 1)$ é um caso particular da variedade flag $F(k_1, \dots, k_p)$ [38], que consiste de seqüências $V_1 \subset \dots \subset V_p \subset \mathbb{C}^{2N}$ de subespaços vetoriais V_i de \mathbb{C}^{2N} tais que $\dim V_i = k_i$ e $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p \leq 2N$. O grupo $U(2N)$ age transitivamente em cada uma dessas seqüências e portanto a variedade flag $F(k_1, \dots, k_p)$ é uma variedade homogênea $U(2N)/U(k_1) \times \dots \times U(k_p)$.

O conjunto de hiperplanos $V_i \subset V_{i+1}$ é isomórfico ao conjunto de linhas (espaços vetoriais de dimensão unitária) complexas em V_{i+1} . Este último conjunto é o chamado espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^i = \{V_i \subset V_{i+1}\}$, e pode ser expresso como o espaço quociente (ver apêndice B)

$$\mathbb{C}P^i = U(i+1)/U(i) \times U(1) = S^{2i+1}/U(1), \quad (2.2.58)$$

onde S^{2i+1} é a esfera em $2i + 1$ dimensões. Considere o produto de espaços projetivos complexos

$$\mathbb{C}P^{2N-1} \times \mathbb{C}P^{2N-2} \times \dots \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1. \quad (2.2.59)$$

Um elemento de tal espaço pode ser escrito, formalmente, como $(V_{2N-1} \subset V_{2N}, V_{2N-2} \subset V_{2N-1}, \dots, V_2 \subset V_3, V_1 \subset V_2)$. Pode-se notar um isomorfismo entre um tal elemento e o flag dado por (2.2.53), o que nos induz a considerar os espaços (2.2.59) e $F(1, 1, \dots, 1)$ como sendo isomórficos, pelo menos localmente. Mais ainda, se escrevermos cada $\mathbb{C}P^i$ em (2.2.59) como o espaço quociente (2.2.58), podemos identificar o espaço resultante como sendo $U(2N)/U(1)^{2N}$. Assim, na vizinhança de um elemento da variedade flag completa, estabelecemos o isomorfismo

$$U(2N)/U(1)^{2N} = \mathbb{C}P^{2N-1} \times \mathbb{C}P^{2N-2} \times \dots \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1. \quad (2.2.60)$$

Das equações (2.2.45)-(2.2.51), a matriz $M^{(d)}$ possui a seguinte forma:

$$M_{\alpha\mu}^{(d)} = \underbrace{(m_{3,NN}^{(d)}, 0, \dots, 0)}_{4N-1} \underbrace{(m_{0,NN}^{(d)}, 0, \dots, 0)}_{4N-3}, \dots, \underbrace{(m_{3,kk}^{(d)}, 0, \dots, 0)}_{4k-1} \underbrace{(m_{0,kk}^{(d)}, 0, \dots, 0)}_{4k-3}, \quad (2.2.61)$$

$$m_{3,11}^{(d)}, 0, 0, m_{0,11}^{(d)}.$$

Sob ação adjunta do grupo $U(2N)$, dada pela ação de Λ sobre suas coordenadas, tal matriz é mapeada a um elemento da variedade flag $U(2N)/U(1)^{2N}$ e, da (2.2.60), vemos que o elemento $\underbrace{(m_{3,kk}^{(d)}, 0, \dots, 0)}_{4k-1}$ é mapeado a um elemento do espaço $\mathbb{C}P^{2k-1}$. Agora, integrar sobre

todas as matrizes unitárias em (2.2.27) equivale a realizar uma integral sobre a órbita adjunta do elemento $M^{(d)}$ fixo. Vimos acima que essa órbita é localmente equivalente a um produto de espaços projetivos complexos, e isso nos leva a considerar a medida de integração como sendo uma medida sobre o espaço $\mathbb{C}P^{2N-1} \times \mathbb{C}P^{2N-2} \times \dots \times \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1$, que equivale ao produto das medidas em cada espaço projetivo. Assim, escrevemos a medida sobre as matrizes Λ como sendo

$$\mathcal{D}\Lambda = \prod_{i=1}^{2N-1} \mathcal{D}\mathbb{C}P^i. \quad (2.2.62)$$

Utilizando a equivalência (2.2.58), temos que

$$\prod_{i=1}^{2N-1} \mathcal{D}\mathbb{C}P^i = \prod_{k=1}^N \mathcal{D} \left[\frac{S^{4k-1}}{U(1)} \right] \mathcal{D} \left[\frac{S^{4k-3}}{U(1)} \right]. \quad (2.2.63)$$

No entanto, como a ação (2.2.43) é invariante sob ação de $U(1)^{2N}$, podemos estender a integração para as esferas S^{4k-1} e S^{4k-3} completas, a menos de uma constante multiplicativa (o volume de $U(1)$, que é igual a 2π). Temos então que

$$\mathcal{D}\Lambda = \prod_{k=1}^N \mathcal{D}[S^{4k-1}] \mathcal{D}[S^{4k-3}]. \quad (2.2.64)$$

Daí, temos que a ação adjunta de $U(2N)$ sobre $M^{(d)}$ produz elementos da esfera unitária. Mais precisamente,

$$\Lambda(\underbrace{m_{3,kk}^{(d)}, 0, \dots, 0}_{4k-1}) = m_{3,kk}^{(d)} z_{3,k}^r \in S^{4k-1}, \quad (2.2.65)$$

$$\Lambda(\underbrace{m_{0,kk}^{(d)}, 0, \dots, 0}_{4k-3}) = m_{0,kk}^{(d)} z_{0,k}^s \in S^{4k-3}, \quad (2.2.66)$$

onde $z_{3,k}^r$ e $z_{0,k}^s$ são coordenadas nas esferas S^{4k-1} e S^{4k-3} , respectivamente, com $r = 1, \dots, 4k-1$ e $s = 1, \dots, 4k-3$. Podemos escrever a medida (2.2.64) utilizando coordenadas cartesianas:

$$\mathcal{D}[S^{4k-1}] = \delta \left(\sum_{r=1}^{4k} [z_{3,k}^r]^2 - 1 \right) \prod_{r=1}^{4k} dz_{3,k}^r, \quad (2.2.67)$$

$$\mathcal{D}[S^{4k-3}] = \delta \left(\sum_{s=1}^{4k-2} [z_{0,k}^s]^2 - 1 \right) \prod_{s=1}^{4k-2} dz_{0,k}^s. \quad (2.2.68)$$

Observando que a ação não depende das coordenadas $z_{3,k}^{4k}$ e $z_{0,k}^{4k-2}$, podemos considerar o argumento das funções delta em (2.2.67) e (2.2.68) como funções dessas coordenadas que não aparecem na ação. Utilizando a identidade $\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|$, onde $f(x_0) = 0$, e integrando sobre as coordenadas $z_{3,k}^{4k}$ e $z_{0,k}^{4k-2}$, temos que

$$\mathcal{D}[S^{4k-1}] = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sum_{r=1}^{4k-1} [z_{3,k}^r]^2}} \prod_{r=1}^{4k-1} dz_{3,k}^r = \int d\lambda_{3,k} \prod_{r=1}^{4k-1} dz_{3,k}^r e^{-\lambda_{3,k}^2 (1 - \sum_{r=1}^{4k-1} [z_{3,k}^r]^2)}, \quad (2.2.69)$$

$$\mathcal{D}[S^{4k-3}] = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sum_{s=1}^{4k-3} [z_{0,k}^s]^2}} \prod_{s=1}^{4k-3} dz_{0,k}^s = \int d\lambda_{0,k} \prod_{s=1}^{4k-3} dz_{0,k}^s e^{-\lambda_{0,k}^2 (1 - \sum_{s=1}^{4k-3} [z_{0,k}^s]^2)}, \quad (2.2.70)$$

onde as integrais gaussianas trivialmente reproduzem os fatores $1/2\sqrt{1 - \sum_{r=1}^{4k-b} [z_{a,k}^r]^2}$, $b = 1$ ou 3 , $a = 0$ ou 3 , e redefinimos os multiplicadores de Lagrange de modo a absorver todas as constantes numéricas que apareceriam no lado direito das (2.2.69) e (2.2.70). Daí, a função de partição (2.2.20) é dada por

$$Z = \int \prod_{k=1, a=0,3}^N dm_{a,kk}^{(d)} d\lambda_{a,k} \prod_{r=1}^{4k-1} dz_{3,k}^r \prod_{s=1}^{4k-3} dz_{0,k}^s \Delta^2(M^{(d)}) e^{-NS(m_{a,kk}^{(d)}, \lambda_{a,k}, z_{a,k})}, \quad (2.2.71)$$

onde

$$S(m_{a,kk}^{(d)}, \lambda_{a,k}, z_{a,k}) = \sum_{k=1, a=0,3}^N \left[(m_{a,kk}^{(d)})^2 \sum_{b=1}^{s(a,k)} (z_{a,k}^b)^2 I_b + \lambda_{a,k}^2 \left(1 - \sum_{c=1}^{s(a,k)} (z_{a,k}^c)^2 \right) \right] + \sum_{k=1, a=0,3}^N V(m_{a,kk}^{(d)}), \quad (2.2.72)$$

com $s(3, k) = 4k - 1$, $s(0, k) = 4k - 3$ e

$$I = \frac{1}{2} \underbrace{(a, b - c, b + c, a, \dots, b + c, a, a, b - c, b + c, a, \dots, a, \dots, a, b - c, b + c, a, a)}_{4N-1}. \quad (2.2.73)$$

Os 4 elementos de I em (2.2.31) estão dispostos em uma ordem específica em (2.2.73), no entanto a função de partição não depende de como escolhemos ordená-los. Fazendo a mudança de escala $\tilde{\lambda}_{a,k} = (m_{a,k}^{(d)})^{-1}\lambda_{a,k}$, o termo da ação que depende de z se torna

$$(m_{a,kk}^{(d)})^2 \sum_{b=1}^{s(a,k)} (z_{a,k}^b)^2 (I_b - \tilde{\lambda}_{a,k}^2), \quad (2.2.74)$$

onde deixamos as somas sobre a e k implícitas. Calculando as integrais gaussianas sobre z , absorvendo as constantes nas variáveis de integração e lembrando que a mudança $\tilde{\lambda}_{a,k} = (m_{a,k}^{(d)})^{-1}\lambda_{a,k}$ gera um Jacobiano $(m_{a,k}^{(d)})^{-1}$, temos que a função de partição é dada por

$$Z = \int \prod_{k=1, a=0,3}^N dm_{a,kk}^{(d)} d\tilde{\lambda}_{a,k} \frac{\Delta^2(M^{(d)})}{(m_{3,kk}^{(d)})^{4k-2} (m_{0,kk}^{(d)})^{4k-4}} Z_{a,k}(\tilde{\lambda}_{a,k}) e^{-N\tilde{S}(m^{(d)}, \tilde{\lambda})}, \quad (2.2.75)$$

com

$$\tilde{S}(m^{(d)}, \tilde{\lambda}) = \sum_{k=1, a=0,3}^N \left[-V(m_{a,kk}^{(d)}) + (m_{a,kk}^{(d)})^2 \tilde{\lambda}_{a,k}^2 \right] \quad (2.2.76)$$

e

$$Z_{a,k}(\tilde{\lambda}_{a,k}) = \prod_{b=1}^{s(a,k)} \frac{1}{\sqrt{I_b - \tilde{\lambda}_{a,k}^2}}. \quad (2.2.77)$$

Explicitamente, temos

$$Z_{3,k}(\tilde{\lambda}_{3,k}) = \frac{1}{(a - \tilde{\lambda}_{3,k}^2)^{k-1/2}} \frac{1}{(b - c - \tilde{\lambda}_{3,k}^2)^{k/2}} \frac{1}{(b + c - \tilde{\lambda}_{3,k}^2)^{k/2}}, \quad (2.2.78)$$

$$Z_{0,k}(\tilde{\lambda}_{0,k}) = \frac{1}{(a - \tilde{\lambda}_{0,k}^2)^{k-1/2}} \frac{1}{(b - c - \tilde{\lambda}_{0,k}^2)^{(k-1)/2}} \frac{1}{(b + c - \tilde{\lambda}_{0,k}^2)^{(k-1)/2}}. \quad (2.2.79)$$

Em princípio, podemos tentar aplicar o método de Laplace para resolver a integral sobre os auto-valores (2.2.75).

3 Estrutura de fase da teoria de campos não-comutativos e integrais angulares

A ideia de que talvez o espaço-tempo seja não-comutativo em escalas de distância muito pequenas (o que equivale a escalas de energia muito grandes) foi introduzida muito cedo, na história da mecânica quântica, por Heisenberg, com o objetivo de eliminar os infinitos que apareciam nos cálculos perturbativos. Embora, devido ao sucesso da teoria de renormalização, esse programa tenha sido em partes abandonado por algum tempo, ele voltou a ser considerado com mais afinco com o avanço da teoria das cordas [39]. Um famoso argumento [40] a favor da não-comutatividade dos pontos espaço-temporais em escalas de distância pequenas afirma o seguinte: de acordo com a mecânica quântica, para localizarmos objetos em uma escala de distância Δx , precisamos de números de onda da ordem $\Delta k \sim 1/\Delta x$, o que implica em energias $E = \hbar k$ da ordem $\Delta E \sim \hbar/\Delta x$. Em relatividade geral, uma energia localizada ΔE está associada a um raio de Schwarzschild $R \sim G\Delta E$, onde G é a constante de Newton. Logo, $R \sim GE \sim \hbar G/\Delta x$. Como não podemos observar dentro do horizonte de eventos, devemos ter $\Delta x \geq R$, daí, $(\Delta x)^2 \geq \hbar G = L_P^2$, onde L_P é o comprimento de Planck. Assim, teríamos um limite fundamental de distâncias que podemos medir na escala de energia definida pela massa de Planck m_P , e o espaço-tempo seria não-comutativo.

Cada unidade de L_P define uma chamada célula de Planck, que seria a menor unidade de distância possível. Espaços difusos, com um número finito de tais células que não possuem uma fronteira definida entre si, impedindo a definição de um ponto, são exemplos de espaços não-comutativos. Um exemplo comumente considerado é o da esfera difusa [41]. Uma esfera comum é dada pela álgebra das funções geradas pelos pontos do espaço-tempo x_i que satisfazem

$$x_i x_i = R^2, \quad (3.1)$$

$$x_i x_j - x_j x_i = 0. \quad (3.2)$$

Para obter uma esfera difusa, basta deformarmos as condições (3.1) e (3.2) de modo que as coordenadas do espaço-tempo não comutem:

$$x_i x_i = \rho^2, \quad (3.3)$$

$$x_i x_j - x_j x_i = i\theta \epsilon_{ijk} x_k. \quad (3.4)$$

A

do grupo $SU(2)$, com

$$x_i = \frac{2R}{\sqrt{N^2 - 1}} L_i, \quad \theta = \frac{2R}{\sqrt{N^2 - 1}}, \quad \rho^2 = \frac{4R^2}{N^2 - 1} j(j+1) = R^2, \quad (3.5)$$

onde L_i são geradores de $SU(2)$ na representação N -dimensional. Assim, a esfera difusa é caracterizada pela álgebra das funções definidas na mesma, e geradas pelos geradores (3.5), isto é, a álgebra das matrizes $N \times N$ hermitianas.

Definimos uma teoria de campos na esfera difusa de modo análogo ao caso de espaços comutativos. Por exemplo, para um campo escalar em um espaço comutativo, a ação euclidiana é dada pela fórmula usual:

$$S[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \phi (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi + V(\phi) \right]. \quad (3.6)$$

Na esfera difusa, as funções são geradas por matrizes hermitianas $N \times N$. A integração de uma função, estando associada ao produto interno no espaço das funções, se torna o traço de matrizes, que é o produto interno no espaço das matrizes hermitianas. A derivada de uma função, estando associada a uma mudança sob transformação das coordenadas, se torna o comutador da matriz com os geradores de transformações. Temos então que a ação euclidiana de um campo escalar, na esfera difusa, é dada por:

$$S(M) = \frac{4\pi R^2}{N} \text{Tr} \left[\frac{1}{2R^2} M [L_i, [L_i, M]] + \frac{1}{2} m^2 M + V(M) \right]. \quad (3.7)$$

A teoria quântica é dada pelo funcional gerador

$$Z = \int dM e^{-S(M)}. \quad (3.8)$$

Assim, temos a equivalência entre um modelo de matrizes aleatórias, dado pela ação (3.7), e a teoria de campos escalares na esfera difusa.

Note que, no limite $N \rightarrow \infty$, o parâmetro de não-comutatividade θ na (3.5) se anula, e assim esperamos obter a teoria comutativa usual tomando esse limite. No entanto, o fato é que a não-comutatividade original deixa vestígios [19] na teoria contínua obtida quando fazemos $N \rightarrow \infty$, o que a torna diferente daquela que esperaríamos obter. Podemos ver essa diferença entre a teoria escalar comutativa usual e a teoria obtida a partir da não-comutativa analisando os diagramas de fases das duas. Por exemplo, no caso de uma interação ϕ^4 , a primeira possui apenas duas fases, uma de desordem, com o campo ϕ oscilando ao redor do valor $\phi = 0$, e outra de ordem uniforme, com o campo ϕ oscilando ao redor de um dos mínimos globais do potencial. Já a teoria não-comutativa, ainda no limite $N \rightarrow \infty$, apresenta, além das duas fases descritas anteriormente, uma terceira fase de ordem não-uniforme, onde o campo forma listras de oscilações em torno de diferentes mínimos do potencial, o que faz com que a simetria sob translações no espaço seja espontaneamente quebrada. Acredita-se que este seja um resultado do fenômeno chamado *UV/IR mixing*, que se manifesta em teorias não-comutativas. Devido à existência de um comprimento mínimo possível, não podemos confinar excitações quânticas em volumes arbitrariamente pequenos. Assim, distâncias pequenas em uma direção se tornam distâncias grandes em outras, e não existe diferença entre graus de liberdade ultravioletas e infravermelhos.

Sem o termo cinético em (3.7), a ação se torna igual aquela estudada no capítulo 1. Para um potencial quártico, temos exatamente o caso da (1.2.105), e observamos duas fases. Isso indica que a terceira fase aparece apenas quando temos dinâmica, e então o termo cinético é vital para o aparecimento da mesma. No entanto, o termo cinético não é invariante sob a diagonalização da matriz M , e portanto dá origem a uma integral angular que não é do tipo de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber. Podemos expressar a integral angular como uma ação efetiva:

$$e^{-S_{eff}(\Lambda)} = \int_{U(N)} dU e^{-\frac{1}{2}Tr(M[L_i, [L_i, M]])}, \quad (3.9)$$

e o objetivo é encontrar a dependência dessa ação com respeito aos auto-valores. Algumas abordagens, como o cálculo da integral de alguns termos da expansão em série de Taylor da exponencial $e^{-\frac{1}{2}Tr(M[L_i, [L_i, M]])}$, foram tentados [19], mas não obtiveram sucesso em mostrar o aparecimento da fase não-comutativa do modelo. Um novo método de integração sobre variáveis angulares se faz necessário.

Esperamos que o método de Ambjørn-Sedrakyan descrito na seção 2.2 possa ser utilizado para resolver o modelo de matriz (3.7). Para tanto, precisamos formalizar a integração sobre variáveis angulares descrita pelos autores. Considere a diagonalização $M = U\Lambda U^\dagger$, onde $U \in U(N)$ e $\Lambda = diag(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$ é a matriz dos auto-valores de M . Como $\Lambda \in \mathfrak{u}(N)$, podemos escrevê-la como uma combinação linear dos geradores $\{t_a\}$, $a = 1, \dots, N^2$, $[t_a, t_b] = if_{abc}t_c$, de $\mathfrak{u}(N)$. Mas, sendo Λ diagonal, apenas os geradores de Cartan $\{h_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $[h_i, h_j] = 0 \forall i, j$, isto é, os geradores da sub-álgebra das matrizes diagonais em $\mathfrak{u}(N)$, serão multiplicados por coeficientes não-nulos nessa expansão. Assim, temos que

$$M = \lambda_i U h_i U^\dagger, \quad \lambda_i = Tr(M h_i). \quad (3.10)$$

A matriz de representação da ação adjunta de $U(N)$ sobre a sub-álgebra de Cartan de $\mathfrak{u}(N)$ é definida por

$$U h_i U^\dagger = \Omega(U)_{ai} t_a, \quad \Omega(U)_{ai} = Tr(t_a U h_i U^\dagger), \quad (3.11)$$

e segue que

$$M = \lambda_i \Omega(U)_{ai} t_a. \quad (3.12)$$

Note que M possui N^2 graus de liberdade, enquanto que temos N variáveis λ_i e, a princípio, N^3 variáveis Ω_{ai} . Isso indica que a matriz de representação Ω satisfaz alguns vínculos, que reduzem o número de variáveis independentes de N^3 para $N^2 - N$. Das identidades de Fierz

$$(t_a)_{ij} (t_a)_{kl} = \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (3.13)$$

temos que

$$\begin{aligned}
\Omega_{ai}\Omega_{aj} &= (t_a)_{i'j}U_{jk}(h_i)_{kl}U_{li'}^\dagger(t_a)_{mn}U_{np}(h_j)_{pq}U_{pm}^\dagger \\
&= \delta_{i'n}\delta_{jm}U_{jk}(h_i)_{kl}U_{li'}^\dagger U_{np}(h_j)_{pq}U_{pm}^\dagger \\
&= (U^\dagger U)_{pk}(U^\dagger U)_{lp}(h_i)_{kl}(h_j)_{pq} \\
&= \delta_{pk}\delta_{lp}(h_i)_{kl}(h_j)_{pq} = Tr(h_i h_j),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

logo,

$$\Omega_{ai}\Omega_{aj} = \delta_{ij}, \tag{3.15}$$

e, sendo Ω real, isso significa que Ω é um ponto na variedade de Stiefel $V_N(\mathbb{R}^{N^2}) = \{\Omega \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2} : (\Omega^T \Omega)_{ij} = \delta_{ij}\}$. Isto é, Ω é um conjunto de N vetores-coluna N^2 -dimensionais. Mas, essa condição não produz o número de vínculos necessários para reduzir a quantidade de componentes de Ω de N^3 para $N^2 - N$. De fato, a dimensão da variedade de Stiefel é igual a

$$dim(V_N(\mathbb{R}^{N^2})) = N^3 - \frac{N(N+1)}{2}. \tag{3.16}$$

Agora, o fato da ação adjunta ser um automorfismo da álgebra de Lie produz mais um vínculo que a matriz de representação Ω deve satisfazer. Um automorfismo da álgebra de Lie preserva o parêntese de Lie, e isso implica que, $\forall U \in U(N)$,

$$Ad_U[X, Y] = [Ad_U X, Ad_U Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{u}(N). \tag{3.17}$$

Qualquer elemento da álgebra pode ser expresso em termos dos geradores, e portanto basta calcular a (3.17) na base $\{t_a\}$. Temos, para $U \in U(N)$,

$$Ad_U[t_a, t_b] = [Ad_U t_a, Ad_U t_b], \tag{3.18}$$

isto é,

$$if_{abc} Ad_U t_c = [Ad_U t_a, Ad_U t_b]. \tag{3.19}$$

Utilizando que $Ad_U t_a = \Omega_{ba} t_b$, segue que

$$if_{abc} \Omega_{c'c} t_{c'} = [\Omega_{a'a} t_{a'}, \Omega_{b'b} t_{b'}] = \Omega_{a'a} \Omega_{b'b} [t_{a'}, t_{b'}] = if_{a'b'd} \Omega_{a'a} \Omega_{b'b} t_d. \tag{3.20}$$

Multiplicando os dois lados da (3.20) por $t_{a'}$ e tomando o traço, temos como resultado

$$f_{abc} \Omega_{d'c} = f_{a'b'd} \Omega_{a'a} \Omega_{b'b}. \tag{3.21}$$

A (3.21) é muitas vezes chamada de condição de automorfismo [42], e impõe vínculos complicados aos elementos da matriz Ω . Como estamos considerando a ação adjunta sobre a sub-álgebra de Cartan, as constantes de estrutura no lado esquerdo da (3.19) são identicamente nulas. O resultado é a seguinte equação para os elementos de Ω :

$$0 = f_{abc} \Omega_{ai} \Omega_{bj}. \tag{3.22}$$

Levando em conta que $\Omega \in V_N(\mathbb{R}^{N^2})$, a (3.22) equivale a $N^2 \cdot \frac{N(N-1)}{2}$ equações para $N^3 - N(N+1)/2$ variáveis. Nota-se que temos mais vínculos do que variáveis, uma situação indesejada pois, de acordo com a equação (3.12), devemos ter $N^2 - N$ coeficientes de Ω como variáveis reais. A natureza da matriz Ω requer mais investigação, pois, se ainda não identificamos os vínculos corretos, não podemos esperar que o cálculo da métrica induzida nas novas coordenadas nos dê uma resposta razoável.

4 Conclusões e Perspectivas

Os modelos de matrizes aleatórias fornecem uma aproximação da gravitação quântica em $2d$, pois eles geram triangulações de superfícies bidimensionais, o que pode ser visto analisando-se os diagramas de Feynman dessa teoria. Resolvendo esses modelos através de dois métodos diferentes, encontramos que, ao menos no regime crítico (no limite $N \gg 1$), eles de fato descrevem a gravitação quântica acoplada à matéria conforme com carga central $c < 1$. No entanto, esses modelos apresentam alguns problemas sérios, como o fato de que não podemos recuperar a interação de campos de matéria conforme com carga central $c > 1$ com a gravidade (ou, em termos de teoria de cordas, não podemos modelar cordas bosônicas incorporadas em um espaço-tempo com $d > 1$).

A solução dos modelos de matrizes depende da invariância do integrando em (1.2.2) sob a operação de conjugação $A \rightarrow U^\dagger A U, U \in U(N)$. Quando essa invariância não se verifica, temos que lidar com uma integral sobre o grupo unitário $U(N)$, comumente chamada de integral angular, sendo o exemplo clássico a integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber (2.1.9). Não existe um método universal para o cálculo dessas integrais, o que é um problema importante quando tratamos de teoria de campos não-comutativos.

Recentemente, foi introduzido na literatura um modelo de matrizes que, em princípio, permite o acoplamento de campos de matéria com carga central $c > 1$ à gravitação em $2d$. Esse modelo de Ambjørn-Sedrakyan envolve o cálculo de uma integral angular por meio de um método que consiste em identificar a imagem da representação adjunta de $U(N)$ como sendo, localmente, equivalente a um produto de hipersferas unitárias.

Nosso objetivo futuro é formalizar o método de Ambjørn-Sedrakyan, de modo que possamos verificar sua eficácia utilizando-o em um caso conhecido, como no cálculo da integral de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber. Se esse método reproduzir o resultado correto, podemos considerar utilizá-lo no caso da teoria de campos não-comutativos na esfera difusa, de modo a encontrar a contribuição do termo cinético da ação para sua estrutura de fase e recuperar analiticamente os resultados obtidos por métodos numéricos [19].

APÊNDICE A – Teoria de Campos e Diagramas de Feynman

Em mecânica quântica, estamos interessados em calcular a amplitude de probabilidade de um evento acontecer. Por exemplo, considere que medimos a posição de uma partícula como sendo q_0 em um tempo inicial t_0 , e queremos saber qual a probabilidade de ela ser encontrada, em um instante posterior t , na posição q . Para tanto, devemos calcular, na dinâmica de Schrödinger, a quantidade

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \langle q, t | \hat{U}(t, t_0) | q_0, t_0 \rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde $\hat{U}(t, t_0) = e^{i\hat{H}t}$ é o operador de evolução temporal, e $\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$ é o operador Hamiltoniano da partícula, com a coordenada \hat{q} e o momento \hat{p} sendo também operadores (aqui, $\hbar = 1$). Feynman introduziu um método para o cálculo da (A.1), que consiste em dividir o intervalo de tempo $[t_0, t]$ em sub-intervalos arbitrariamente pequenos e calcular a (A.1) em cada um deles. O resultado é a fórmula

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{i \int_{t_0}^t dt [p\dot{q} - H(q, p)]}, \quad (\text{A.2})$$

com as condições de fronteira $q(t_0) = q_0$, $q(t) = q$. A integral é uma soma sobre todos os caminhos clássicos (q, p) no espaço de fase, e por isso é chamada de fórmula da integral de caminhos para a amplitude de transição (A.1). No caso em que a Hamiltoniana é quadrática nos momentos, a integral sobre $\mathcal{D}p$ pode ser efetuada, resultando na fórmula

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = N \int \mathcal{D}q e^{iS[q]}, \quad (\text{A.3})$$

onde N é uma constante de normalização e $S[q] = \int_{t_0}^t dt L(q, \dot{q})$ é a ação da partícula, com $L = L(q, \dot{q})$ sendo sua Lagrangeana clássica.

Em teoria quântica de campos, consideramos as partículas como excitações de campos fundamentais, estes sendo operadores. Como exemplo, tome o campo escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$, solução da equação de Klein-Gordon $\partial_\mu \partial^\mu \phi(x^\mu) + m^2 \phi(x^\mu) = 0$. Podemos derivar tal equação de movimento da seguinte ação:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right). \quad (\text{A.4})$$

Promovendo a função ϕ a um operador $\hat{\phi}$ que satisfaz relações de comutação canônicas

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{A.5})$$

onde $\hat{\pi}$ é o momento conjugado a $\hat{\phi}$, isto é, $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$, podemos considerar a equação de Klein-Gordon para o operador $\hat{\phi}$ no espaço de Fourier (chamado espaço dos momentos), cuja solução é dada por:

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_0}} \left[\hat{a}(k_\mu) e^{-ix^\mu k_\mu} + \hat{a}^\dagger(k_\mu) e^{ix^\mu k_\mu} \right], \quad (\text{A.6})$$

onde os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger satisfazem a relação de comutação

$$[a(k_\mu), a^\dagger(k'_\mu)] = (2\pi)^3 2k_0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{A.7})$$

Claramente, \hat{a} , \hat{a}^\dagger possuem a interpretação de operadores de destruição e criação, respectivamente, que destroem (criam) partículas de spin zero com energia k_0 e momento \mathbf{k} . Assim, um estado com um determinado número de partículas é dado pela ação do operador $\hat{\phi}$ no estado de vácuo $|0\rangle$ um determinado número de vezes.

Com essa interpretação, podemos nos perguntar qual a amplitude de probabilidade de um processo onde uma partícula é criada, por exemplo, através de uma colisão entre duas outras partículas, e depois aniquilada pela sua detecção. Assim, se $|\psi\rangle = \hat{\phi}(x)|0\rangle$ é um estado criado do vácuo no ponto espaço-temporal $x = x^\mu$ e se $|\psi'\rangle = \hat{\phi}(x')|0\rangle$ é um estado criado no ponto $x' = x'^\mu$ (em um instante posterior $x'^0 > x^0$), a amplitude de propagação dessa partícula de x a x' é dada por

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) | 0 \rangle. \quad (\text{A.8})$$

Sendo uma amplitude de transição, podemos esperar que a (A.8) possa ser calculada por meio de alguma fórmula de integral de caminhos análoga à (A.2). Primeiramente, a amplitude de transição vácuo-a-vácuo $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$, que representa a evolução do vácuo de um passado distante $t_0 \rightarrow -\infty$ a um futuro não mais próximo $t \rightarrow \infty$, processo no qual devemos levar em conta a criação e destruição de partículas, atividade esta descrita pela presença de uma fonte J no sistema, é dada pela fórmula [11][43]

$$Z[J] = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\phi^2]}, \quad (\text{A.9})$$

onde o termo $\frac{i}{2}\varepsilon\phi^2$, $\varepsilon \rightarrow 0$, é requisitado pelas condições de fronteira dos campos em $t \rightarrow \pm\infty$. Agora, da fórmula da integral de caminhos (A.3), é fácil ver que o valor esperado $\langle q, t | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle$, onde $t > t_2 > t_1 > t_0$, é dado por

$$\langle q, t | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle = N \int \mathcal{D}q q(t_2) q(t_1) e^{iS[q]}. \quad (\text{A.10})$$

Note que

$$\frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x') \delta J(x)} \Big|_{J=0} = \int \mathcal{D}\phi \phi(x') \phi(x) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi) + \frac{i}{2}\varepsilon\phi^2]}. \quad (\text{A.11})$$

Por analogia com a (A.10), temos que a amplitude de transição (A.8) pode ser expressa em termos de derivadas da integral de caminhos (A.9), que é o objeto mais importante da teoria de campos, chamado funcional gerador. O resultado da (A.11) é:

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x') \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = i \Delta_F(x' - x), \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\Delta_F(x' - x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (\text{A.13})$$

é o chamado propagador, que é a amplitude de se criar uma partícula em x e destruí-la em x' .

Da discussão acima, vemos que é suficiente calcular $Z[J]$ para obter todas as amplitudes da teoria. No entanto, na presença de interações entre os campos ϕ , o cálculo do funcional gerador se torna uma atividade complexa, e, na maior parte das vezes, pode ser realizado apenas perturbativamente. Por exemplo, considere a interação $\lambda\phi^4$, onde assumimos que a constante de acoplamento λ é pequena (e sem dimensão), de modo que possamos expandir a exponencial $e^{i\lambda \int d^4x \phi^4}$ em uma série de potências. O cálculo de $Z[J]$ se reduz a calcular integrais do tipo (A.11). Em cada ordem da perturbação, o teorema de Wick [11][37] nos diz que $Z[J]$ é dado por uma soma de produtos de propagadores (A.13) em pontos diferentes do espaço-tempo.

Da interpretação física dos propagadores Δ_F , podemos inferir uma maneira pictórica de calcular cada ordem da expansão perturbativa de $Z[J]$. $\Delta_F(x' - x)$ é a amplitude de probabilidade de se criar uma partícula no ponto x e aniquilá-la no ponto x' . Representamos esse objeto por uma linha (figura 20).



Figura 20 – Representação gráfica do propagador Δ_F .

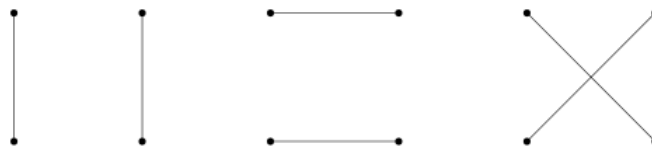


Figura 21 – Diagramas possíveis para a expansão em primeira ordem em λ da teoria $\lambda\phi^4$, sem considerar diagramas que contém laços.

Expandindo até a primeira ordem em λ , a integral (A.11) contém, em seu integrando, o produto de quatro campos ϕ em quatro pontos diferentes do espaço tempo. Essa integral, devido ao teorema de Wick, resultará em uma soma, sobre todas as permutações dos pontos do espaço-tempo, de produtos de propagadores. Assim, em primeira ordem, podemos representar $Z[J]$ desenhando quatro pontos e unindo-os em pares por uma linha. A soma de todas as uniões possíveis será o valor de $Z[J]$.

Cada desenho na figura 21 é chamado de diagrama de Feynman, e representa o processo de criação de duas partículas em dois pontos distintos do espaço-tempo e suas respectivas aniquilações em pontos diferentes. A interpretação diagramática é tão poderosa que, se estamos interessados apenas em processos de espalhamento e cálculos de seções de choque, podemos esquecer do funcional gerador e apenas considerar os diagramas possíveis, utilizando as chamadas regras de Feynman [37].

APÊNDICE B – Grupos e Álgebras de Lie

Definição B.1. Um grupo de Lie G é um grupo, como também é uma variedade diferenciável de dimensão finita, de modo que as operações de multiplicação

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \mu(a, b) = ab, \forall a, b \in G, \quad (\text{B.1})$$

e inversão

$$i : G \rightarrow G, i(a) = a^{-1}, \forall a \in G, \quad (\text{B.2})$$

do grupo são mapas diferenciáveis.

Exemplo B.1. Seja $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$ o espaço vetorial de todas as matrizes $N \times N$ com entradas complexas. Evidentemente, $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$ é uma variedade diferenciável. Como $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$ é homeomórfico a \mathbb{C}^{N^2} , consideramos a topologia de \mathbb{C}^{N^2} em $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$. Seja o conjunto

$$GL(N, \mathbb{C}) = \{M \in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) : \det(M) \neq 0\}, \quad (\text{B.3})$$

onde $\det : \text{Mat}(N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ é o determinante de matrizes usual, e é uma função contínua. Note que $\det^{-1}(\mathbb{C}/\{0\}) = GL(N, \mathbb{C})$ e, como $\mathbb{C}/\{0\}$ é aberto em \mathbb{C} , $GL(N, \mathbb{C})$ é aberto em $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$. Assim, sendo um conjunto aberto em $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$, $GL(N, \mathbb{C})$ também é uma variedade diferenciável, pois tomando a interseção de $GL(N, \mathbb{C})$ com qualquer atlas de $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$, temos um atlas em $GL(N, \mathbb{C})$.

Agora, sejam $A, B \in GL(N, \mathbb{C})$. Claramente, o produto $AB \in GL(N, \mathbb{C})$. Mais ainda, a inversa de cada matriz $A \in GL(N, \mathbb{C})$ existe, e assim vemos que $GL(N, \mathbb{C})$ é também um grupo. Sendo variedade diferenciável e grupo, $GL(N, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie.

Definição B.2. Seja G um grupo de Lie. O subgrupo $H \subset G$ é um subgrupo de Lie se o mapa de inclusão

$$i : H \rightarrow G, i(h \in H) = h \in G, \quad (\text{B.4})$$

é uma imersão, bem como um homomorfismo de grupos.

Teorema B.1. Todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [44].

Exemplo B.2. Considere o grupo unitário

$$U(N) = \{U \in GL(N, \mathbb{C}) : UU^\dagger = U^\dagger U = I\}, \quad (\text{B.5})$$

onde I é a matriz identidade $N \times N$. $U(N)$ é um subgrupo de $GL(N, \mathbb{C})$. Para ver que $U(N)$ é fechado, note que, $\forall U \in U(N)$, $\det(U) = \pm 1$. Logo, $\det^{-1}(\{-1, 1\}) = U(N)$. Como $\{-1, 1\}$ é fechado em \mathbb{C} e \det é contínua, $U(N)$ é fechado em $GL(N, \mathbb{C})$. Ou seja, $U(N)$ é um subgrupo de Lie.

Definição B.3. Sejam G um grupo de Lie e $g \in G$. O mapa de translação pela esquerda é definido como

$$L_g : G \rightarrow G, L_g(g') = gg', \forall g' \in G. \quad (\text{B.6})$$

Definição B.4. Seja $X|_{g'}$ um vetor definido em um ponto $g' \in G$, onde G é um grupo de Lie. X é dito invariante pela esquerda se, $\forall g \in G$,

$$(L_g)_* X|_{g'} = X|_{gg'}, \quad (\text{B.7})$$

onde

$$(L_g)_* : T_{g'}G \rightarrow T_{gg'}G \quad (\text{B.8})$$

é o mapa entre espaços tangentes induzido pelo mapa de translação pela esquerda. Denotamos por \mathfrak{g} o conjunto de vetores invariantes pela esquerda em G .

É fácil ver que podemos definir um vetor $X \in \mathfrak{g}$ a partir de um vetor $V \in T_e G$ do seguinte modo: $X|_g = (L_g)_* V$. Observe que $X|_e = V$, e assim temos uma bijeção entre \mathfrak{g} e $T_e G$. Mais ainda, o parêntese de Lie de dois vetores pertencentes a \mathfrak{g} resulta em um vetor invariante pela esquerda [45], e portanto podemos afirmar o seguinte teorema.

Teorema B.2. O espaço \mathfrak{g} é isomórfico ao espaço tangente $T_e G$ na identidade $e \in G$. Mais ainda, \mathfrak{g} é fechado sob o parêntese de Lie.

Definição B.5. O conjunto \mathfrak{g} de vetores invariantes pela esquerda em G , junto com o parêntese de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, forma a chamada álgebra de Lie do grupo G .

Exemplo B.3. Considere a curva $\gamma : (0, 1) \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ tal que $\gamma(0) = I$. Para t próximo de 0, $\gamma(t) = I + tM + O(t^2)$, onde $M \in Mat(N, \mathbb{C})$ possui entradas positivas. Note que, para t suficientemente pequeno, $\det \gamma(t) = 1 + t \text{Tr}(M) \neq 0$, o que significa que, de fato, $\gamma(t) \in GL(N, \mathbb{C})$. Agora, o vetor tangente a essa curva próximo à identidade é $\gamma'(0) = M$, o que implica que $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) = Mat(N, \mathbb{C})$. A álgebra $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ possui dimensão $\dim \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) = \dim Mat(N, \mathbb{C}) = N^2$.

Exemplo B.4. Agora, considere a curva $\gamma : (0, 1) \rightarrow U(N)$, com $\gamma(0) = I$. Para t suficientemente pequeno, $\gamma(t) = I + tH + O(t^2)$, e o vetor tangente a essa curva na identidade é $\gamma'(0) = H$. Para que $\gamma(t) \in U(N)$, devemos ter que $\gamma(t)\gamma^\dagger(t) = I$. Derivando os dois lados e avaliando a expressão final em $t = 0$, temos que $H + H^\dagger = 0$, o que implica que H deve ser uma matriz anti-hermitiana, o que significa que $\mathfrak{u}(N)$ é o espaço vetorial de matrizes anti-hermitianas. Note que, fazendo a mudança $H \rightarrow iH$, podemos considerar $\mathfrak{u}(N)$ como o espaço das matrizes hermitianas. A dimensão $\dim \mathfrak{u}(N) = N^2$.

Vamos definir integração em grupos de Lie [46]. Primeiramente, vamos analisar $U(N) \subset GL(N, \mathbb{C})$. Sendo subespaço de $Mat(N, \mathbb{C})$, tal grupo possui um produto interno hermitiano natural dado por $(A, B) = \text{Tr}(AB^\dagger)$, $\forall A, B \in U(N)$, que induz um produto

interno real $\langle A, B \rangle = \text{Re}(A, B)$. Claramente, os mapas de translação pela esquerda $L_g A = gA$ e pela direita $R_g A = Ag$ são isometrias do grupo unitário (para $g \in U(N)$). O produto interno induz uma métrica Riemanniana em $U(N)$, que por sua vez induz um elemento de volume em tal espaço [15]. Seja $V \subset U(N)$ uma carta no grupo unitário com coordenadas (x_1, \dots, x_N) . Se o tensor métrico possui componentes $h_{ij}(x)$ nessas coordenadas, o elemento de volume $dV(x)$ é dado por $dV(x) = \sqrt{\det[h(x)]} dx_1 \dots dx_N$. Assim, temos um elemento de volume em $U(N)$ que também é invariante sob translações pela esquerda e pela direita. Definimos a medida de Haar normalizada em $U(N)$ como

$$\int_{U(N)} f(U) dU = \frac{1}{\text{Vol}(U(N))} \int f(x) dV. \quad (\text{B.9})$$

Como os mapas L_g e R_g são isometrias, $\forall g \in U(N)$, temos invariância pela esquerda

$$\int_{U(N)} f(gU) dU = \int_{U(N)} f(U) dU, \quad (\text{B.10})$$

e pela direita

$$\int_{U(N)} f(Ug) dU = \int_{U(N)} f(U) dU. \quad (\text{B.11})$$

Agora, para qualquer grupo de Lie G , considere um produto interno euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ em $T_e G \approx \mathfrak{g}$. Para qualquer $g \in G$, tome $X, Y \in T_g G$ e defina o produto interno em $T_g G$ como

$$\langle X, Y \rangle_l = \langle (L_{g^{-1}})_* X, (L_{g^{-1}})_* Y \rangle_{\mathfrak{g}}, \quad (\text{B.12})$$

$$\langle X, Y \rangle_r = \langle (R_{g^{-1}})_* X, (R_{g^{-1}})_* Y \rangle_{\mathfrak{g}}, \quad (\text{B.13})$$

onde os mapas

$$(L_{g^{-1}})_* : T_g G \rightarrow T_e G \approx \mathfrak{g}, \quad (\text{B.14})$$

$$(R_{g^{-1}})_* : T_g G \rightarrow T_e G \approx \mathfrak{g}, \quad (\text{B.15})$$

são induzidos pelos mapas de translação pela esquerda e pela direita, respectivamente. Mais ainda, translações pela esquerda e pela direita são isometrias dos produtos internos definidos acima. De fato, sejam $X, Y \in T_g G$ e considere que a translação pela esquerda $L_h : G \rightarrow G$ induz vetores $X' = (L_h)_* X, Y' = (L_h)_* Y \in T_{hg} G$. O produto interno em $T_{hg} G$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle X', Y' \rangle &= \langle (L_{(hg)^{-1}}) X', (L_{(hg)^{-1}}) Y' \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \langle (L_{(hg)^{-1}})(L_h)_* X, (L_{(hg)^{-1}})(L_h)_* Y \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{g}}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

e o mesmo argumento pode ser feito para a translação pela direita. Os produtos internos (B.12)-(B.13) definem métricas e, por conseguinte, elementos de volume invariantes que

denotaremos por dV_l e dV_r . Assim, $\forall h \in G$, temos as medidas de Haar em G invariantes pela esquerda e direita, respectivamente:

$$\int_G f(hg)dV(g)_l = \int_G f(g)dV(g)_l, \quad (\text{B.17})$$

$$\int_G f(gh)dV(g)_r = \int_G f(g)dV(g)_r. \quad (\text{B.18})$$

Pode-se perguntar se dV_l é a única medida invariante pela esquerda no grupo G . Se dV'_l é uma outra medida invariante pela esquerda, dada em coordenadas locais por um múltiplo da medida de Lebesgue usual, como no caso do grupo $U(N)$, então podemos escrever $dV'_l = \varphi(g)dV_l$, onde $\varphi(g)$ é uma função diferenciável das coordenadas. Da invariância pela esquerda de dV'_l e dV_l , segue trivialmente que $\varphi(hg) = \varphi(g), \forall g, h \in G$, o que significa que φ é constante.

Agora, considere $I_l(f) = \int_G f(g)dV_l(g)$. Uma translação pela direita por $h \in G$ resulta em $I_l^h(f) = \int_G f(gh)dV_l(g)$. No entanto, é fácil ver que I_l^h ainda é invariante pela esquerda. Como a medida invariante deve ser única a menos de uma constante multiplicativa, devemos ter que $I_l^h(f) = \alpha(h)I_l(f)$, onde

$$\alpha : G \rightarrow (0, \infty) \quad (\text{B.19})$$

é um mapa diferenciável é também um homomorfismo entre o grupo G e o grupo multiplicativo $(0, \infty)$. Dizemos que o grupo G é unimodular se $\alpha(h) = 1, \forall h \in G$. Nesse caso, a medida de Haar invariante pela esquerda também é invariante pela direita, isto é, é bi-invariante. Se G é compacto, a medida de Haar é sempre bi-invariante, pois a imagem de G sob α deve ser um subgrupo compacto de $(0, \infty)$, ou seja, $\{1\}$. Se G é compacto, normalizamos a medida de Haar de modo que

$$\int_G dg = 1. \quad (\text{B.20})$$

Definição B.6. *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação (pela esquerda) de G sobre M é um mapa $\sigma : G \times M \rightarrow M$ que satisfaz as seguintes condições:*

$$\sigma(e, x) = x, \quad \forall x \in M, \quad (\text{B.21})$$

$$\sigma(g, \sigma(g', x)) = \sigma(gg', x), \quad \forall x \in M. \quad (\text{B.22})$$

Exemplo B.5. *Seja $M \in GL(N, \mathbb{C})$. A ação de $GL(N, \mathbb{C})$ sobre a variedade $M = \mathbb{R}^N$ é dada pela multiplicação usual de um vetor $x \in \mathbb{R}^N$ por uma matriz M , isto é, $\sigma(M, x) = Mx$.*

Definição B.7. *Seja $\sigma : G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade diferenciável M . A ação é dita*

1. **transitiva**, se $\forall x, y \in M, \exists g \in G$ tal que $\sigma(g, x) = y$;
2. **livre**, se $\sigma(g, x) = x \Leftrightarrow g = e$, isto é, G não possui pontos fixos em M ;
3. **efetiva**, se, $\forall x \in M, \sigma(g, x) = x$, então $g = e$.

Definição B.8. Seja G um grupo de Lie e $\sigma : G \times M \rightarrow M$ uma ação sobre uma variedade diferenciável M . Considere um ponto $x \in M$.

1. A órbita de x sob ação de G é o sub-conjunto de M dado por

$$G_x = \{\sigma(g, x) : g \in G\}. \quad (\text{B.23})$$

2. O grupo de isotropias do ponto x é o subgrupo de G dado por

$$H_x = \{g \in G : \sigma(g, x) = x\}. \quad (\text{B.24})$$

Definição B.9. Seja G um grupo de Lie que possui uma ação transitiva sobre uma variedade diferenciável M . O espaço quociente G/H_x , para algum $x \in M$, é uma variedade diferenciável, e é chamado um espaço homogêneo.

Assumindo que G/H_x é compacto, podemos afirmar que G/H_x é homeomórfico a M . De fato, note que, para uma ação transitiva, $G_x = M$. A órbita é a imagem da ação, enquanto que o sub-grupo de isotropias é uma espécie de núcleo para σ , o que significa que temos, no nível de grupo, $G_x = G/H_x$. Logo, $M = G/H_x$.

Exemplo B.6. Considere o grupo de rotações $G = SO(3)$ agindo no espaço $M = \mathbb{R}^3$. Considere $x \in \mathbb{R}^3$ um vetor ao longo do eixo z . Assim, $H_x = SO(2)$ é o grupo de isotropias de x , que consiste de rotações em torno de z . O grupo $SO(3)$ preserva a norma dos vetores, e portanto age transitivamente na esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Temos então que $SO(3)/SO(2) \cong S^2$. Podemos generalizar esse resultado para dimensões maiores:

$$SO(N+1)/SO(N) \cong S^N. \quad (\text{B.25})$$

Como $U(N)$ corresponde a rotações no plano complexo, pelo mesmo argumento podemos estabelecer que

$$U(N+1)/U(N) \cong S^{2N+1}. \quad (\text{B.26})$$

Exemplo B.7. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é definido a partir do espaço complexo $(n+1)$ -dimensional \mathbb{C}^{n+1} do seguinte modo: retire a origem de \mathbb{C}^{n+1} e identifique pontos $(z_1, \dots, z_{n+1}) \sim (z'_1, \dots, z'_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ se eles diferem por um fator de escala, isto é, $(z_1, \dots, z_{n+1}) = (\lambda z'_1, \dots, \lambda z'_{n+1}), \lambda \in \mathbb{C}$. Isso significa que o espaço projetivo $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$ é formado por linhas que passam pela origem no espaço complexo. Tomamos como coordenadas da variedade $\mathbb{C}P^n$ em uma carta U_i os pontos

$(z_1/z_i, \dots, z_{i-1}/z_i, z_{i+1}/z_i, \dots, z_{n+1}/z_i)$. As linhas desse espaço interceptam a esfera S^{2n+1} em \mathbb{C}^{n+1} em dois pontos antipodais, isto é, em um círculo $S^1 = U(1)$, logo

$$\mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1}/U(1). \quad (\text{B.27})$$

Utilizando a (B.26), segue que

$$\mathbb{C}P^n \cong U(n+1)/U(n) \times U(1). \quad (\text{B.28})$$

Definição B.10. Uma representação de um grupo G é um homomorfismo

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V) \quad (\text{B.29})$$

entre G e o grupo de automorfismos $\text{Aut}(V) \subset GL(V)$, que consiste de transformações invertíveis que preservam a estrutura do espaço vetorial V de dimensão finita.

Para qualquer grupo de Lie G , existe um espaço vetorial natural sobre o qual podemos definir uma representação de G . Esse espaço é a álgebra de Lie \mathfrak{g} . Seja $f : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ tal que $f(g) : G \rightarrow G$ é um automorfismo interno, isto é, $f(g)h = ghg^{-1}, \forall h \in G$. O mapa f é um homomorfismo entre grupos de Lie. Para cada $g \in G$, considere o mapa induzido $Ad_g = (f(g))_*|_e : T_e G \rightarrow T_e G$. Segue que $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é um automorfismo da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Definição B.11. O mapa

$$Ad : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), \quad Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (\text{B.30})$$

é uma representação do grupo G na sua álgebra de Lie \mathfrak{g} , chamada representação adjunta.

Se G é um subgrupo de $GL(N, \mathbb{C})$, é fácil mostrar [45] que, para $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$,

$$Ad_g X = gXg^{-1}. \quad (\text{B.31})$$

APÊNDICE C – Fenômenos Críticos e Teoria Conforme de Campos

Fenômenos críticos

Sistemas de matéria condensada podem passar por, basicamente, dois tipos de transições de fase, isto é, mudanças do estado da matéria. Essas transições ocorrem quando alguns parâmetros, correspondentes a condições externas, como temperatura, pressão ou campo magnético aplicado, atingem um valor específico, chamado ponto crítico. Em transições de primeira ordem, duas fases diferentes do sistema coexistem no ponto crítico. Acima e abaixo desse ponto, o sistema está em diferentes estados da matéria e, portanto, devemos esperar que os potenciais termodinâmicos que caracterizam o sistemas, como a energia livre, que são funções dos parâmetros externos, possuam uma descontinuidade no ponto crítico.

Entretanto, em transições de fase de segunda ordem, existe apenas uma fase no ponto crítico, e as duas fases diferentes que o sistema apresenta acima e abaixo de tal ponto devem, continuamente, se tornar idênticas à medida que o ponto de transição se aproxima. Isso significa que a diferença entre as propriedades termodinâmicas das duas fases se aproxima de zero na vizinhança do ponto crítico. Como existe apenas uma fase no ponto de transição, todos os graus de liberdade microscópicos do sistema devem estar correlacionados uns com os outros em todas as escalas de distância possíveis (assumimos que o sistema é bem grande). Isso implica que o comprimento de correlação, isto é, a distância na qual as flutuações dos graus de liberdade microscópicos do sistema sentem a influência umas das outras, é efetivamente infinito, e podemos ignorá-lo como uma escala de distância característica do sistema, pois qualquer outra é menor que o comprimento de correlação. Tudo isso significa que sistemas no ponto crítico de uma transição de fase contínua (de segunda ordem) são invariantes por mudança de escala.

Perto do ponto crítico, várias quantidades termodinâmicas do sistema são caracterizadas por dependências em potências dos parâmetros que especificam a distância do ponto crítico. Os expoentes que caracterizam essas dependências são chamados expoentes críticos.

Como exemplo de uma transição de fase contínua, vamos considerar um material ferromagnético uniaxial, isto é, tal que sua magnetização, em cada ponto, é paralela a um eixo particular. Nesse caso, os parâmetros externos importantes são a temperatura T e o campo magnético aplicado H . Os gráficos na figura 22 mostram a dependência da magnetização M com H para diferentes temperaturas. Pode-se observar que, para $T < T_c$,

onde T_c é a temperatura crítica do sistema, M é descontínuo para um campo crítico $H = H_c = 0$. Isso é característico de uma transição de fase de primeira ordem. Quando T se aproxima de T_c , a descontinuidade em $H_c = 0$ desaparece, e temos uma transição de fase de segunda ordem. Note ainda que, no primeiro gráfico, existem dois valores possíveis de M em $H_c = 0$. O sistema escolhe qual magnetização vai realmente assumir com base em sua configuração pregressa. Isso é um exemplo de uma quebra espontânea de simetria. Tais fenômenos são indicações de que o sistema realmente está em um ponto crítico.

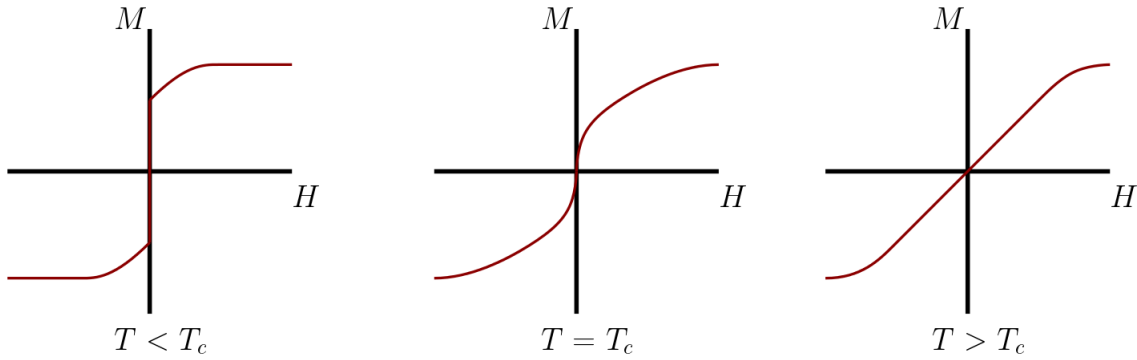


Figura 22 – Transição de fase do sistema ferromagnético.

Para o caso do material ferromagnético considerado acima, definindo a temperatura reduzida $t = (T - T_c)/T_c$ e o campo magnético reduzido $h = H/k_B T_c$, os expoentes críticos são [47]:

- (i) O calor específico C , para $H = H_c = 0$, se comporta como $C \sim A|t|^{-\alpha}$;
- (ii) A magnetização espontânea, para $H \rightarrow H_c$, se comporta como $M \sim (-t)^\beta$;
- (iii) A suscetibilidade magnética, para $H = H_c$, se comporta como $\chi \sim |t|^{-\gamma}$;
- (iv) M , como função de h para $T = T_c$, se comporta como $M \sim |h|^{1/\delta}$;
- (v) O comprimento de correlação, para $H = H_c$, se comporta como $\xi \sim |t|^{-\nu}$;
- (vi) A função de correlação das flutuações locais da magnetização se comporta como $G(r) \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{(d-1)/2}}$, para $r \gg \xi$. No ponto crítico, $G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$.

Tome, como outro exemplo, o ponto onde uma substância vai de um estado líquido a um estado gasoso. Na figura 23, mostramos as isotermas desse processo. Pode-se notar que há uma descontinuidade no volume V (ou densidade, para massa constante) como função da pressão p . A isoterma número 2 mostra o início da transição de fase contínua. A região B é chamada região de coexistência. Os valores de p, V e T nessa região permitem a existência simultânea da fase líquida e gasosa dessa substância. Se compararmos a figura 23 com a figura 22, veremos que as duas são quase idênticas, e somos levados a assumir que o ambos os sistemas, no ponto crítico, se comportam da mesma maneira. Isso, por sua

vez, implica que os expoentes críticos dos dois sistemas devem ser iguais. Temos aqui um exemplo do fenômeno chamado universalidade. Sistemas diferentes, descritos por diferentes interações entre seus constituintes, que pertencem à mesma classe de universalidade, exibem o mesmo comportamento na vizinhança do ponto crítico. Uma classe de universalidade é caracterizada pelas simetrias comuns a seus sistemas constituintes e pelo número de dimensões espaço-temporais. Os expoentes críticos são iguais para todos os sistemas em uma mesma classe de universalidade.

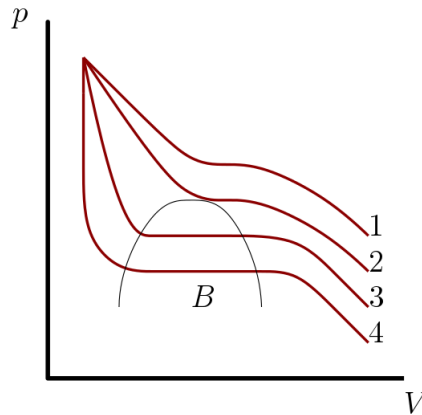


Figura 23 – Isothermas próximas à transição de fase líquido \rightarrow gás.

Portanto, para a transição líquido \rightarrow gás, comparando suas propriedades termodinâmicas com aquelas do sistema ferromagnético, os expoentes críticos são:

- (i) O calor específico a volume constante C_V se comporta como $C_V \sim A|t|^{-\alpha}$ perto do ponto crítico;
- (ii) A diferença entre a densidade no estado líquido e a densidade no estado gasoso se comporta, perto do ponto crítico, como $\rho_L - \rho_G \sim (-t)^\beta$;
- (iii) A compressibilidade isotérmica se comporta, perto do ponto crítico, como $\chi_T \sim |t|^{-\gamma}$;
- (iv) A diferença $p - p_c$, onde p_c é a pressão crítica, se comporta como $p - p_c \sim |\rho_L - \rho_G|^{1/\delta}$,

e ν , η são definidos como para o sistema magnético, como $G(r)$ sendo, agora, a função de correlação entre as densidades. A universalidade é uma propriedade muito poderosa de sistemas críticos, pois ela nos permite extrair informações exatas sobre sistemas físicos complicados, como seus expoentes críticos, modelando-os com sistemas mais simples, que compartilham a mesma classe de universalidade do sistema original.

Teoria conforme de campos

Uma teoria conforme de campos é uma teoria invariante sob transformações de coordenadas $x \rightarrow x'$ que mudam a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ apenas por um fator de escala local:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{C.1})$$

Como a geometria é especificada pela métrica, podemos pensar em teorias conformes como teorias de campo localmente invariantes por transformações de escala. Sistemas em transições de fase contínuas, como os introduzidos acima, apresentam tal invariância e, portanto, podem ser modelados por teorias conformes de campos. A teoria de cordas bosônica também é invariante por escala, pois a ação de Polyakov (1.1.1) não possui termo de massa, o que significa que não existe uma escala de energia característica na teoria.

As transformações de coordenadas $x \rightarrow x'$ que satisfazem a (C.1) formam um grupo, chamado grupo conforme. Em um espaço de Minkowski com dimensão $d \geq 3$, onde $d = p + q$, com p dimensões temporais e q dimensões espaciais, esse grupo é isomórfico ao grupo $SO(p + 1, q + 1)$ [48][49], com seus geradores J_{mn} satisfazendo as relações de comutação

$$[J_{mn}, J_{rs}] = i(\eta'_{ms}J_{nr} + \eta'_{nr}J_{ms} - \eta'_{mr}J_{ns} - \eta'_{ns}J_{mr}), \quad (\text{C.2})$$

onde η' é uma métrica obtida a partir da métrica de Minkowski usual η . Os campos escalares que pertencem a uma representação irredutível do grupo de Lorentz se transformam como

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/d} \Phi(x) \quad (\text{C.3})$$

sob uma transformação conforme $x \rightarrow x'$, onde Δ é chamado de dimensão de escala e é o auto-valor do gerador de dilatações $D = J_{-10}$, que realmente gera mudanças de escala $x \rightarrow \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Um campo Φ que se transforma de acordo com a (C.3) é chamado de quase-primário.

Em $d = 2$ dimensões, passando para variáveis complexas $z, \bar{z} = x^0 \pm ix^1$, para qualquer função holomórfica $f(z)$, $z \rightarrow f(z)$ é uma transformação conforme, e segue que existem infinitos geradores $\{l_n, \bar{l}_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, de transformações conformes em $d = 2$ dimensões. Esses operadores satisfazem a chamada álgebra de Witt (na verdade, duas cópias dela) [48][49]:

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m}, \quad [\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n - m)\bar{l}_{n+m}, \quad [l_n, \bar{l}_m] = 0. \quad (\text{C.4})$$

No entanto, para tais transformações formarem um grupo, elas precisam ser invertíveis e devem mapear o plano complexo a ele mesmo. O resultado é que apenas os geradores $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ são globalmente definidos na esfera de Riemann. Esses operadores geram transformações do tipo

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad (\text{C.5})$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e são tais que $ad - bc = 1$. Ou seja, as transformações conformes no plano complexo são geradas por matrizes 2×2 com entradas complexas e determinante unitário. Essas matrizes formam o grupo $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ e pode-se mostrar que esse grupo é isomórfico ao grupo de Lorentz $SO(3, 1)$, como esperado.

Possuindo dimensão infinita, a álgebra de Witt admite uma chamada extensão central não-trivial pelos números complexos \mathbb{C} . Extensões centrais permitem que representações projetivas, isto é, representações a menos de uma fase, se tornem representações bem definidas [50]. A extensão central da álgebra de Witt é a chamada álgebra de Virasoro, dada pelas relações de comutação

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \quad (\text{C.6})$$

onde a constante $c \in \mathbb{C}$ é a chamada carga central da teoria. Essa constante está associada a uma quebra da simetria conforme devido a condições de contorno.

Considerando, agora, um campo escalar ϕ em $d = 2$ com dimensão de escala Δ , definimos a dimensão conforme $h = \Delta/2$. Se tal campo se transforma como

$$\phi(z) \rightarrow \phi'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \phi(f(z)) \quad (\text{C.7})$$

sob transformações conformes $z \rightarrow f(z)$, dizemos que é um campo primário com dimensão conforme h . Se a (C.7) vale apenas para transformações do grupo $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, dizemos que é um campo quase-primário. A quantização da teoria é realizada promovendo os campos ϕ a operadores, os quais podemos expandir em uma série de Laurent:

$$\hat{\phi}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-h} \hat{\phi}_n. \quad (\text{C.8})$$

Os modos ϕ_n serão operadores de destruição para $n > -h$ e operadores de criação para $n < -h$. Definindo o estado $|h\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} \hat{\phi}(z)|0\rangle = \hat{\phi}_{-h}|0\rangle$, onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo, temos que $|h\rangle$ é um auto-estado da Hamiltoniana L_0 . Pode-se mostrar [49] que os estados excitados da teoria são todos obtidos do estado de maior peso $|h\rangle$ pela aplicação sucessiva dos geradores L_{-k} , $k > 0$:

$$|h'\rangle = L_{-k_1} \dots L_{-k_n} |h\rangle. \quad (\text{C.9})$$

Os estados $|h'\rangle$ são chamados de descendentes do estado de maior peso $|h\rangle$. O sub-espço do espaço de Hilbert gerado pelo estado de maior peso e seus descendentes é invariante sob ação da álgebra de Virasoro, e portanto é uma representação irredutível dessa álgebra, chamada módulo de Verma. Podem existir estados de norma negativa em um dado módulo de Verma, o que significa que, se estamos em busca de uma teoria unitária, devemos excluí-los. Isso é feito restringindo os valores que (c, h) podem assumir. Identificamos os estados de norma negativa considerando a matriz de Gram $M^{(l)}$, cujos elementos são os produtos internos dos componentes da base do módulo de Verma no nível l (o nível corresponde aos valores que k pode assumir em (C.9)), i.e., $M_{ij}^{(l)} = \langle i|j\rangle$, onde $\{|i\rangle\}$ gera o módulo de Verma no nível l . A norma de um estado arbitrário $|a\rangle$ no módulo de Verma é dada por $\langle a|a\rangle = |b_k|^2 \lambda_k$, onde λ_k são os auto-valores da matriz de Gram. Se tal matriz possui auto-valores negativos, o estado em questão poder apresentar norma negativa.

Uma maneira de analisar os auto-valores da matriz de Gram é considerar o chamado determinante de Kač [48]:

$$\det(M^{(l)}) = \alpha_l \prod_{r,s \geq 1, r,s \leq l} (h - h_{r,s}(c))^{p(l-rs)}, \quad (\text{C.10})$$

onde α_l é uma constante, $p(l-rs)$ é o número de partições do inteiro $l-rs$ e

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad h_{rs}(m) = \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad m \in \mathbb{C}. \quad (\text{C.11})$$

Temos que, para $c \geq 1$, $h \geq 0$, todos os auto-valores de $M^{(l)}$ são positivos e representações unitárias podem existir. Agora, se $c \leq 1$, $h \geq 0$, todos os pontos fora de algumas curvas de cancelamento de h_{rs} são não-unitários. De fato, apenas em algumas interseções entre essas curvas podemos encontrar estados com norma não-negativa. Mais especificamente, apenas quando a carga central assume os valores

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad m = 3, 4, \dots, \quad (\text{C.12})$$

podemos ter representações unitárias. Teorias conformes com cargas centrais dadas pela (C.12) são chamadas de racionais.

Sob algumas condições, podemos encontrar famílias conformes, isto é, conjuntos de campos primários $\hat{\phi}$ que criam estados em um mesmo módulo de Verma, que formam uma álgebra fechada. Para cargas centrais

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \quad (\text{C.13})$$

onde $p, q \geq 2$ são coprimos, existe um número finito de campos nessas famílias. Tomando $p = m+2, q = m+3, m \geq 1$, temos uma teoria unitária com carga central (C.12). Chamamos tais teorias de modelos mínimos unitários. Um exemplo de modelo mínimo unitário é o modelo de Ising em $2d$.

Outra propriedade importante de teorias conformes em $2d$ é o chamado *bootstrap*. A invariância conforme fixa as funções de correlação de 2 e 3 pontos de campos primários, a menos de constantes multiplicativas:

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \rangle = \frac{d_{12}}{(z_1 - z_2)^{2h}} \quad (\text{C.14})$$

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{21}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2}}, \quad (\text{C.15})$$

onde $z_{ij} = z_i - z_j$. A partir dessa constatação, pode-se demonstrar que, sob algumas suposições razoáveis [48], podemos obter todas as funções de correlação da teoria, utilizando a álgebra de operadores dada pela invariância conforme, e as constantes arbitrárias, como a constante C_{123} , podem ser obtidas a partir de certas relações que as funções de correlação devem satisfazer. Nesse sentido, podemos dizer a teoria pode ser resolvida de forma exata.

Referências

- [1] A. M. Polyakov. Quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, 103(3):207–210, 1981.
- [2] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring Theory. Vol. 1: Introduction*. Cambridge University Press, 2012.
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] L. Alvarez-Gaumé. Random surfaces, statistical mechanics and string theory. *Helvetica Physica Acta*, 64(4):359–526, 1991.
- [5] E. Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *Surveys in Differential Geometry*, 1(1):243–310, 1990.
- [6] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Courier Dover Publications, 2016.
- [7] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin. 2d gravity and random matrices. *Physics Reports*, 254(1-2):1–133, 1995.
- [8] Y. Lozano and J. L. Manes. Introduction to nonperturbative 2d quantum gravity. *Fortsch. Phys.*, 41:45–85, 1993.
- [9] G. 't Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nuclear Physics B*, 72(3):461–473, 1974.
- [10] P. Di Francesco. 2d quantum gravity, matrix models and graph combinatorics. In *Applications of Random Matrices in Physics*, pages 33–88. Springer, 2006.
- [11] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [12] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Courier Corporation, 2006.
- [13] A. Erdelyi. *Asymptotic Expansions*. Dover Publications, 2010.
- [14] B. Eynard, T. Kimura, and S. Ribault. Random matrices. *arXiv preprint arXiv:1510.04430*, 2015.
- [15] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups and Fields*. Springer Science & Business Media, 1992.

-
- [16] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, 1962.
- [17] M. Marino. Les houches lectures on matrix models and topological strings. *arXiv preprint hep-th/0410165*, 2004.
- [18] T. Gamelin. *Complex Analysis*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [19] M. Šubjaková and J. Tekel. Matrix models of fuzzy field theories. *arXiv preprint arXiv:1802.05188*, 2018.
- [20] N. N. Lebedev. *Special Functions and Their Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [21] D. Bessis, C. Itzykson, and J. B. Zuber. Quantum field theory techniques in graphical enumeration. *Advances in Applied Mathematics*, 1(2):109–157, 1980.
- [22] V. Periwal and D. Shevitz. Unitary matrix models as exactly solvable string theories. *Physical Review Letters*, 64(12):1326, 1990.
- [23] D. J. Gross and A. A. Migdal. Nonperturbative two-dimensional quantum gravity. *Physical Review Letters*, 64(2):127, 1990.
- [24] D. J. Gross and A. A. Migdal. A nonperturbative treatment of two-dimensional quantum gravity. *Nuclear Physics B*, 340(2-3):333–365, 1990.
- [25] M. R. Douglas and S. H. Shenker. Strings in less than one dimension. *Nuclear Physics B*, 335(3):635–654, 1990.
- [26] E. Hille. *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*. Courier Corporation, 1997.
- [27] V. A. Kazakov. Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution. *Physics Letters A*, 119(3):140–144, 1986.
- [28] C. Itzykson and J. B. Zuber. The planar approximation. ii. *Journal of Mathematical Physics*, 21(3):411–421, 1980.
- [29] M. L. Mehta. A method of integration over matrix variables. *Communications in Mathematical Physics*, 79(3):327–340, 1981.
- [30] P. Zinn-Justin and J. B. Zuber. On some integrals over the $u(n)$ unitary group and their large n limit. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(12):3173, 2003.
- [31] M. Bergère and B. Eynard. Some properties of angular integrals. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(26):265201, 2009.

-
- [32] J. Ambjørn and A. Sedrakyan. The xxz heisenberg model on random surfaces. *Nuclear Physics B*, 874(3):877–888, 2013.
- [33] J. Ambjørn, Sh. Khachatryan, and A. Sedrakyan. Matrix model for strings beyond the $c=1$ barrier: The spin- s heisenberg model on random surfaces. *Physical Review D*, 92(2):026002, 2015.
- [34] G. Mussardo. *Statistical Field Theory: An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*. Oxford University Press, 2010.
- [35] P. Zinn-Justin. The six-vertex model on random lattices. *Europhysics Letters*, 50(1):15, 2000.
- [36] I. K Kostov. Exact solution of the six-vertex model on a random lattice. *Nuclear Physics B*, 575(3):513–534, 2000.
- [37] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995.
- [38] D. V. Alekseevsky. Flag manifolds. *Sbornik Radova*, 11:3–35, 1997.
- [39] R. J. Szabo. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, 378(4):207–299, 2003.
- [40] H. Steinacker. Non-commutative geometry and matrix models. *arXiv preprint arXiv:1109.5521*, 2011.
- [41] J. Madore. The fuzzy sphere. *Classical and Quantum Gravity*, 9(1):69, 1992.
- [42] P. E. Hydon. *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner’s Guide*, volume 22. Cambridge University Press, 2000.
- [43] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995.
- [44] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, 1978.
- [45] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing, 2003.
- [46] M. Taylor. Lectures on lie groups. *Notas de aula, que podem ser encontradas em <http://www.unc.edu/math/Faculty/met/lieg.html>*.
- [47] J. Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 1996.

- [48] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [49] R. Blumenhagen and E. Plauschinn. *Introduction to Conformal Field Theory*. Springer, 2009.
- [50] M. Schottenloher. *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*. Springer, 2008.