



DISSERTAÇÃO

**Aplicando a dinâmica de populações ao caso do
propulsor à plasma de efeito Hall**

Esdras Felipe Mesquita de Andrade

Brasília, Julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Instituto de Física

DISSERTAÇÃO

**Aplicando a dinâmica de populações ao caso do
propulsor à plasma de efeito Hall**

Esdras Felipe Mesquita de Andrade

*Dissertação submetida ao Instituto de Física
como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Física*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ivan Soares Ferreira
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. José Leonardo Ferreira
Avaliador, IF/UnB

Prof. Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira
Avaliador, IF/UnB

FICHA CATALOGRÁFICA

ANDRADE, ESDRAS FELIPE MESQUITA

Aplicando a dinâmica de populações ao caso do propulsor à plasma de efeito Hall [Distrito Federal] 2018. xvi, 54 p., 210 x 297 mm (IFD/UnB, Mestre, Mestrado em Física, 2018).

Dissertação - Universidade de Brasília, Instituto de Física.

1. Plasmas

2. Ionização

3. Dinâmica de populações

4. Propulsor hall

I.IFD/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ANDRADE, E. (2018). *Aplicando a dinâmica de populações ao caso do propulsor à plasma de efeito Hall*. Dissertação, Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 54 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Esdras Felipe Mesquita de Andrade

TÍTULO: Aplicando a dinâmica de populações ao caso do propulsor à plasma de efeito Hall.

GRAU: Mestre em Física ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Dissertação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. Os autores reservam outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa Dissertação pode ser reproduzida sem autorização por escrito dos autores.

Esdras Felipe Mesquita de Andrade

Instituto de Física - IFD

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Ivan Ferreira, por ter dado todo o suporte necessário, por me animar e incentivar a ir mais além do que só a nossa pesquisa, junto ao grupo LaCOSA e por conseguir achar tempo para suprir todos os seus alunos em meio as oscilações da vida.

Também agradecer aos meus pais, Francisco Edmundo e Maria Eliene, que sempre me apoiaram e estavam lá pra me ajudar no que fosse preciso durante essa jornada. Em especial ao meu pai que sempre se interessou pelos assuntos em que eu me envolvia, me ajudou a pensar melhor em determinadas situações e constantemente me perguntava no que podia ajudar, me mostrava coisas relacionadas a física e sempre incentivou a maior integração da física com a programação.

Agradecer a todos os meus amigos que estiveram lá na UnB comigo, vivendo o que eu vivia, lutando contra as matérias. A todos os amigos de fora da UnB também, que me proporcionaram momentos únicos e equilibravam a balança de estudos/diversão.

E finalmente a CAPES pelo suporte financeiro, que sem a qual nada disso teria acontecido.

Esdras Felipe Mesquita de Andrade

RESUMO

Nesta dissertação vamos introduzir a estrutura, o funcionamento geral, os principais parâmetros e as instabilidades do propulsor a plasma por efeito Hall, com foco nas oscilações de baixa frequência e no modelo de dinâmica de populações para ionização. Na primeira parte da dissertação explanaremos sobre empuxo, impulso específico, eficiências, potenciais, correntes e um pouco da performance e tipos de perdas de potência no propulsor. Na segunda parte mostraremos os principais tipos de oscilações no plasma do propulsor Hall em diferentes faixas de frequência e a teoria da dinâmica de duas populações de Lotka-Volterra (modelo presa-predador). Na parte final mostraremos os resultados de simulações do modelo para a ionização, considerando a densidade do gás neutro como as presas e a densidade de elétrons como os predadores e a interação entre as duas densidades no decorrer do tempo.

ABSTRACT

In this dissertation we will introduce the structure, general functioning, main parameters and instabilities of the Hall Thruster, focusing on the low frequency oscillations and the models of populations dynamics for ionization. In the first part of the dissertation we will explain about thrust, specific impulse, efficiencies, potentials, currents and some of the performance and types of power losses in the thruster. In the second part we will show the main types of oscillations in the plasma of the Hall thruster in different frequency bands and the dynamics theory of two populations of Lotka-Volterra (prey-predator model). At last, we will show the simulation results of the model for the ionization, considering the density of the neutral gas as the prey and the electron density as the predators and the interaction between the two densities over time.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	INTRODUÇÃO	1
2	HALL THRUSTERS	4
2.1	PRINCIPIOS DO PROPULSOR	6
2.1.1	EMPUXO	6
2.1.2	IMPULSO ESPECÍFICO	7
2.1.3	EFICIÊNCIA	9
3	FUNCIONAMENTO DO HT	11
3.1	CANAL DO HT	11
3.2	ESTRUTURA DE CAMPO E CORRENTE HALL	11
3.3	IONIZAÇÃO	13
3.4	POTENCIAL E CORRENTES	14
3.5	MODELOS DE PERFORMANCE DO HT	17
3.6	PRINCIPAIS MECANISMOS DE PERDA DE POTÊNCIA NO HT	19
3.6.1	TEMPERATURA DO ELÉTRON	20
4	OSCILAÇÕES NO HT	22
4.1	CARACTERÍSTICAS DO PLASMA	22
4.2	OSCILAÇÕES OBSERVADAS NO PLASMA	24
4.2.1	OSCILAÇÕES DE DESCARGA NA FAIXA DE 1-20 KHZ	24
4.2.2	BOJO ROTATIVO E OSCILAÇÕES RELACIONADAS NA FAIXA DE 5-25KHZ .	25
4.2.3	OSCILAÇÕES INDUZIDAS POR GRADIENTES DE CAMPO MAGNÉTICO NA FAIXA DE 20–60KHZ	26
4.2.4	OSCILAÇÕES NA FAIXA DE FREQUÊNCIAS 20–100 KHZ	28
4.2.5	OSCILAÇÕES NA FAIXA DE FREQUÊNCIAS 70–500 KHZ	29
4.2.6	OSCILAÇÕES NA FAIXA DE FREQUÊNCIAS 0.5-5 MHZ E SUPERIOR	30
5	EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA	33
6	LOTKA-VOLTERRA APLICADA AO PROPULSOR	38
6.1	MODELO PARA BAIXAS FREQUÊNCIAS	39
6.2	DISPERÇÃO NAS VELOCIDADES	44
7	ANÁLISE E RESULTADOS	45
7.1	VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DE CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DAS POPULAÇÕES	47

7.1.1	VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE FLUXO DO GÁS INJETADO	48
7.1.2	VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DA EFICIÊNCIA DE IONIZAÇÃO	49
7.1.3	VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE FLUXO DE ELÉTRONS.....	49
7.1.4	VARIAÇÃO DO PARÂMETRO DE PERDA DE ELÉTRONS	50
8	CONCLUSÃO.....	52

Lista de Figuras

1.1	Comparação entre foguetes com propulsão química e elétrica da fração da massa de propelente necessária para se obter uma determinada variação na velocidade.....	1
2.1	Esquema de funcionamento do HT. Fonte: Site CNES, IHET.....	4
2.2	Adotado sistema de coordenadas retangulares. O eixo x está ao longo do eixo do propulsor e o eixo z está ao longo do raio do propulsor. O eixo y corresponde, portanto, à dimensão azimutal.....	5
2.3	Relação entre a massa de propelente e a massa total do foguete a ser lançado para diferentes missões interplanetárias à planetas próximos com os Δv de acordo com <i>FRISBEE, 2008</i> e <i>MAZOUFFRE, 2016</i>	8
3.1	Esquema do canal do HT.	11
3.2	Campos \mathbf{E} e \mathbf{B} ao longo do canal do HT. Fonte: GOEBLE, 2008.	12
3.3	Esquema do propulsor hall e sua distribuição de potencial. Fonte: GOEBEL, 2008.	15
3.4	Esquema das correntes no propulsor Hall. Fonte: GOEBEL, 2008.	16
4.1	Range de frequências de oscilações encontradas no propulsor Hall. Fonte: CHOU-EIRI, 2001.....	22
4.2	Significado físico dos vários modos do bojo. Branco indica bojos luminosos que se propagam através de um fundo escuro. O número do modo m indica o número de bojos presentes simultaneamente. Para $m_0 = 0$, o canal inteiro pisca em uníssono. Para $m \geq 1$, os bojos propagam-se azimutalmente Fonte: MCDONALD, 2011.....	25
4.3	Espaço do regime de operação para investigação dos bojos rotativos para o HET H6. Fonte: MCDONALD, 2011.	26
5.1	Espaço de fase de predador/presa com $a=b=c=d=1$ para várias condições iniciais diferentes.	35
5.2	Solução típica para $P(t)$ e $N(t)$, com os mesmos parâmetros da Fig. 5.1.	35
5.3	Variação da curva com o acréscimo do esforço de morte externo. Fonte: IAN-NELLI, 2014.....	37
7.1	Média dos comportamentos das densidades ao longo do tempo na interação de ionização das partículas.	45
7.2	Média dos comportamentos das densidades ao longo do canal na interação de ionização das partículas.	46
7.3	Média dos comportamentos das densidades ao longo do canal na interação de ionização das partículas, com zoom.....	46

7.4	Evolução da densidade de neutros nas condições de $U = 180V$ e $B = 22mT$. Soluções para (a) o modelo totalmente dependente do tempo e (b) o modelo de baixa frequência.. Fonte: BARRAL, 2009.	47
7.5	Desvio padrão das densidades no tempo e no ao longo do canal.	47
7.6	Primeiro gráfico com parâmetro $a = 0,8$ e segundo gráfico com parâmetro $a =$ $0,2$ para oscilação média ao longo do tempo.	48
7.7	Primeiro gráfico com parâmetro $a = 0,8$ e segundo gráfico com parâmetro $a =$ $0,2$ para oscilação média ao longo do canal.	48
7.8	Primeiro gráfico com parâmetro $b = 0,1$ e segundo gráfico com parâmetro $b =$ $0,002$ para oscilação média ao longo do tempo.	49
7.9	Primeiro gráfico com parâmetro $b = 0,1$ e segundo gráfico com parâmetro $b =$ $0,002$ para oscilação média ao longo do canal.	49
7.10	Primeiro gráfico com parâmetro $c = 0,1 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $c = 0,002 + \Delta$ para oscilação média ao longo do tempo.....	50
7.11	Primeiro gráfico com parâmetro $c = 0,1 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $c = 0,002 + \Delta$ para oscilação média ao longo do canal.	50
7.12	Primeiro gráfico com parâmetro $d = 0,8 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $d = 0,2 + \Delta$ para oscilação média ao longo do tempo.	50
7.13	Primeiro gráfico com parâmetro $d = 0,8 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $d = 0,2 + \Delta$ para oscilação média ao longo do canal.....	51

Lista de Tabelas

- 1.1 Parâmetros operacionais típicos para propulsores. Fonte: GOEBEL, 2008. 2
- 4.1 Caráter dos espectros de oscilação medida em função do valor máximo do campo magnético B_r^* normalizado pelo seu valor ótimo, $(B_r^*)_{opt} \approx 170$ G, para $m = 4$ mg/s, $U_d = 200$ V e um SPT com um diâmetro de 9 cm operando com xenônio. Os números representam a importância relativa de uma dada banda de frequência para o espectro total. A escala é de 1 a 10, onde 1 é a amplitude fraca (abaixo da sensibilidade do diagnóstico) e 10 é a amplitude dominante da mesma ordem que a tensão aplicada. 0 significa que as oscilações nessa banda estavam ausentes e NA indica dados indisponíveis. Os dígitos são relativos dentro de uma determinada faixa de frequências e não através das bandas. Fonte: CHOUERI, 2001. 25

Lista de Símbolos

α	Fator de correção para ions duplamente carregados, Parâmetros selecionados do problema
β	Taxa de fertilidade, Taxa de ionização
γ	Produção de elétrons secundários, Taxa de crescimento, Taxa de conversão
Γ	Fluxo de partículas
Γ_n	Fluxo de partículas neutras
ϵ_i	Primeiro potencial de ionização
ϵ_w	Perda de energia para as paredes
ε	Energia
ε_b	Energia do feixe
η	Eficiência do propulsor
η_e	Eficiência elétrica
η_d	Eficiência de descarga
η_T	Eficiência total
η_c	Eficiência do cátodo
η_b	Eficiência da corrente do feixe
η_v	Eficiência da voltagem do feixe
η_a	Eficiência do ânodo
κ	Coefficiente de ionização
λ	Livre caminho médio
λ_i	Livre caminho médio de ionização
μ	Mobilidade, Taxa de mortalidade
μ_e	Mobilidade eletrônica
ν	Frequência de colisão
ν_e	Frequência de colisão eletrônica
ν_{iw}	Frequência de colisão de ions com a parede
ν_{ew}	Frequência de colisão de elétrons com a parede
σ	produção efetiva de elétrons secundários
σ_i	Seção de choque transversal iônica
ϕ	Potencial
ϕ_s	Potencial da bainha
ω	Frequência cíclica ($2\pi f$)
ω_c	Frequência ciclotrônica
ω_{ci}	Frequência ciclotrônica iônica
ω_{ce}	Frequência ciclotrônica eletrônica
ω_{pi}	Frequência iônica do plasma
ω_{pe}	Frequência eletrônica do plasma
ω_{lh}	Menor frequência híbrida
Ω	Parâmetro hall
Ω_e	Parâmetro hall eletrônico

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

Cada vez mais as pessoas tem se interessado pelo espaço, seja por causa dos filmes recentes sobre o tema ou a procura de um propósito maior, o futuro da nossa espécie ou a vida fora do nosso planeta. Um dos principais assuntos que tem atenção é a propulsão. Existem vários tipos de propulsão, a química, que geralmente serve para lançar foguetes; a elétrica, que serve para manter a orbita de satélites. Por utilizar muito menos combustível e ter uma vida útil muito maior que a propulsão química, a propulsão elétrica é a mais recomendada para viagens espaciais, como podemos ver na Fig. 1.1, a comparação da quantidade de massa necessária para se obter uma escolhida variação na velocidade, de acordo com a missão proposta ao propulsor.

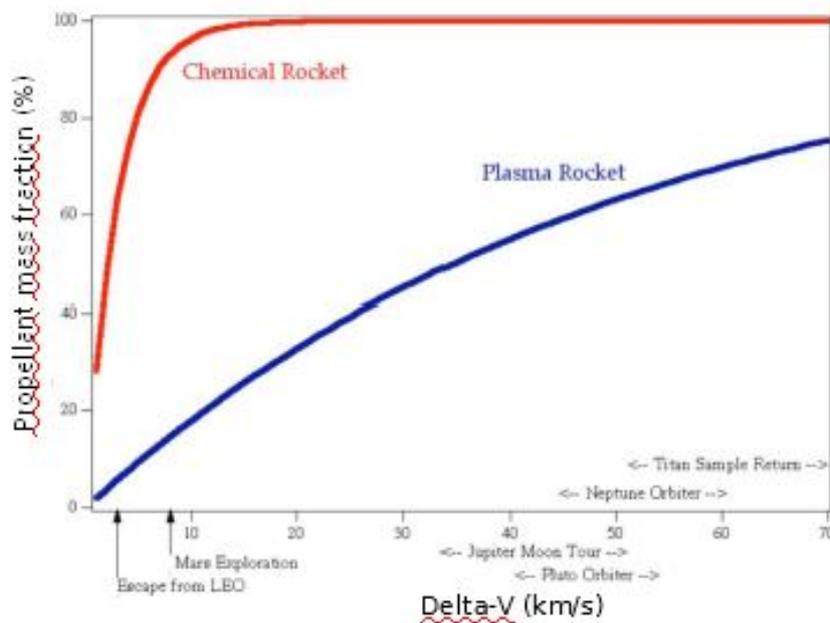


Figura 1.1: Comparação entre foguetes com propulsão química e elétrica da fração da massa de propelente necessária para se obter uma determinada variação na velocidade.

Em uma viagem até Marte, por exemplo, por ser muito longa, necessita de um propulsor que opere por meses. É o caso dos propulsores elétricos que geram bem menos empuxo por muito mais tempo comparado aos propulsores químicos, podendo atingir altíssimas velocidades da vida útil e eficiência do propulsor. Viagens até marte podem durar de 150 a 300 dias com velocidades aproximadas de 14 a 19 mil Km/h (WESTPHAL, 2018). Além da aceleração da nave, tem a desaceleração, para chegar ao planeta do modo mais "sutil" e ainda possíveis manobras durante o percurso para evitar colisões não previstas. Pelo fato desses propulsores adicionarem ou retirarem sutilmente velocidade da nave, ou seja, serem mais precisos, são os mais recomendados para tais missões.

A propulsão elétrica vem sendo aperfeiçoada desde meados dos anos 1960, com o surgimento de fontes de plasma capazes de entregar corrente substancial (MAZOUFFRE, 2016). Os tipos de propulsores elétricos podem ser separados em três categorias: eletrotérmica, tais como o Resistojet e o Arcjet, que aquecem o propelente e por expansão térmica geram o feixe; eletrostática, tais como o Ion Thruster e o Hall Thruster, que ionizam o propelente e eletrostaticamente aceleram os íons à altíssimas velocidades de ejeção; eletromagnética, tais como o Pulsed Plasma Thruster (PPT) e o Magnetoplasmadynamic Thruster (MPD) que ionizam o propelente e, pelos efeitos e forças eletromagnéticas no plasma, aceleram os íons à altíssimas velocidades de ejeção. Podemos ver alguns dados de operação desses propulsores na tabela 1.1.

Tabela 1.1: Parâmetros operacionais típicos para propulsores.
Fonte: GOEBEL, 2008.

Thruster	Specific Impulse (s)	Input Power (kW)	Efficiency Range (%)	Propellant
Cold gas	50-75	—	—	Various
Chemical (monopropellant)	150-450	—	—	N_2H_4 H_2O_2
Chemical (bipropellant)	300-450	—	—	Various
Resistojet	300	0.5-1	65-90	N_2H_4 monoprop
Arcjet	500-600	0.9-2.2	25-45	N_2H_4 monoprop
Ion thruster	2500-3600	0.4-4.3	40-80	Xenon
Hall thrusters	1500-2000	1.5-4.5	35-60	Xenon
PPTs	850-1200	<0.2	7-13	Teflon

O maior desafio é otimizar a geometria dos propulsores para que ofereça maior eficiência, maior tempo de vida útil e menor gasto de energia/combustível. Tendo isso em vista, vários grupos, tais como PEPL, Michigan University nos EUA; ICARE, Orleans, França e UnB, Brasília, Brasil dentre outros pelo mundo, focam esforços nos tipos mais promissores de propulsores e tentam otimizá-los. Esta otimização consiste em encontrar o melhor potencial de descarga, configuração de campo magnético, disposição de ânodo e catodo para uma dada geometria, ou seja, para um esperado valor de empuxo.

O propulsor aqui estudado é do tipo Hall, pois é o que está sendo desenvolvido na UnB, também é aquele que tem a física mais sofisticada, com uma enormidade de fenômenos a serem modelados. Esse propulsor é geralmente utilizado em satélites, como por exemplo os de telecomunicações, para manter a sua órbita e posicionamento. Com a otimização desse propulsor pode-se aumentar bastante o tempo de operação do satélite, de por exemplo de 8 para 20 anos em órbita, reduzindo gastos com novos satélites para exercer o mesmo papel. Com bons resultados nessa busca por melhoria, o Brasil pode se mostrar grande potência tecnológica e independência tecnológica, pois nos dias de hoje a tecnologia está muito presente no nosso cotidiano, com o uso de gps, previsões climáticas, entre outros, todas dependentes de satélites.

O texto será organizado da seguinte forma:

No capítulo 2 é descrito o funcionamento básico de propulsor e os parâmetros mais importantes para os cálculos do funcionamento e otimização do propulsor.

No capítulo 3 é descrita a Física do funcionamento e dinâmica do propulsor. As relações entre potência, corrente, eficiências e performance do propulsor.

No capítulo 4 são descritas as oscilações encontradas no canal do propulsor e um pouco da física envolvida, separadas por faixas de frequências e tipos de oscilações.

No capítulo 5 é descrito as equações de dinâmica de população Lotka-volterra para um sistema predador-presa de duas populações

No capítulo 6 é descrito o modelo para baixas frequências em que se encaixa a interpretação da dinâmica de populações

No capítulo 7 é analisado resultados obtidos em simulações para o modelo proposto

Por fim, as conclusões sobre o modelo.

2 HALL THRUSTERS

O Hall Thruster (HT) é um dispositivo de propulsão elétrica, empregado principalmente em satélites, que usa uma descarga elétrica com elétrons magnetizados para ionizar e acelerar o plasma. A idéia original de aceleração de íons em um plasma quase neutro foi introduzida em meados da década de 1960, e um HT foi operado com sucesso no espaço pela primeira vez em 1972, a bordo do antigo satélite Meteor da URSS (Veja revisão histórica em MAZOUFFRE, 2016). Entretanto, os propulsores Hall operam segundo um processo físico muito mais sofisticado que propulsores iônicos com grades, como usados nos EUA, para produzir o mesmo empuxo. Os detalhes da estrutura do canal e da forma do campo magnético, conforme figura 2.1, determinam o desempenho, a eficiência e a vida útil do propulsor do tipo Hall.

A eficiência e o impulso específico dos propulsores Hall são tipicamente inferiores aos alcançáveis nos propulsores iônicos, mas a relação de impulso-potência é maior e o dispositivo requer menos fontes de energia para operar. A vida dos propulsores Hall em termos de horas de operação geralmente é maior do que os propulsores iônicos (GOEBEL, 2008), e a taxa de transferência geralmente é maior e a capacidade de impulso total pode ser comparável.

O HT tem como uma de suas características o uso de uma parede de isolamento no canal de plasma. A parede é tipicamente fabricada a partir de materiais dielétricos, como nitreto de boro (BN) ou borosil (BN-SiO₂) em propulsores de vôo, e também às vezes de óxido de alumínio (AL₂O₃) em propulsores de laboratório. Estes materiais dielétricos têm um baixo rendimento de pulverização catódica e coeficientes de emissão de elétrons secundários relativamente baixos sob bombardeio de íons de xenônio (GOEBEL, 2008).

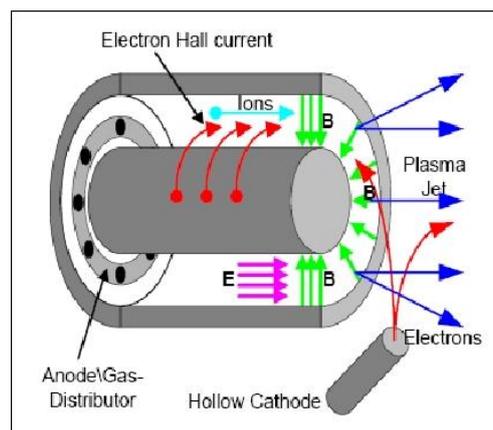


Figura 2.1: Esquema de funcionamento do HT.
Fonte: Site CNES, IHET.

Nesta geometria do propulsor chamada de *magnetic layer*, Figura 2.1, o ânodo metálico polarizado eletricamente é posicionado na base do canal onde o gás é injetado. Elétrons são injetados

através do cátodo instalado no exterior com elemento emissivo feito de óxido de bário (BaO) ou boreto de lantânio (LaB_6). A corrente de elétrons emitida pelo cátodo corresponde à corrente de descarga I_d que flui no circuito elétrico. Uma parte da corrente do cátodo flui para neutralizar o feixe de íons. A parte restante viaja para o anodo para manter a descarga de plasma, porém devem ser confinados no campo magnético gerando a corrente Hall. Os elétrons desta corrente ganham energia no campo elétrico, então ionizam os átomos dentro do canal. Se elétrons transportados indevidamente atingem o anodo e fecham a corrente, o propulsor perde eficiência.

Bobinas de magnetização ou ímãs permanentes, incorporados em um circuito magnético feito de ferro ou ligas ferro-cobalto, fornecem um campo magnético \mathbf{B} dirigido radialmente, cuja intensidade é máxima, com módulo da ordem de 100 Gauss, na proximidade do fim do canal. O campo magnético é escolhido para ter um valor alto o suficiente para tornar o raio de Larmor

$$r_L = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}, \quad (2.1)$$

muito menor do que as dimensões características da câmara de descarga, mas fraco o suficiente para não afetar as trajetórias dos íons.

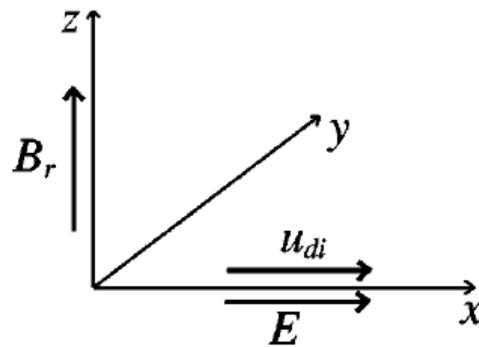


Figura 2.2: Adotado sistema de coordenadas retangulares. O eixo x está ao longo do eixo do propulsor e o eixo z está ao longo do raio do propulsor. O eixo y corresponde, portanto, à dimensão azimutal.

Tomando o sistema de coordenadas da Fig 2.2, temos o campo elétrico axial \mathbf{E} estabelecido no canal de plasma e o campo magnético radial \mathbf{B} , que confina boa parte dos elétrons em um movimento espiral ao longo das linhas de campo, principalmente no fim do canal. Com a equação de movimento (2.2) para o caso, a derivada temporal é zero, resolvendo para a velocidade temos a velocidade de deriva (2.3) que gera a corrente Hall responsável por ionizar o gás neutro injetado no canal.

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \equiv \mathbf{v}_E. \quad (2.3)$$

2.1 PRINCIPIOS DO PROPULSOR

2.1.1 Empuxo

O Empuxo é a força fornecida pelo motor para acelerar o artefato espacial. Uma vez que a massa da nave espacial muda com o tempo devido ao consumo de propelente, o empuxo é dado por:

$$T = \frac{d}{dt}(m_p v_{ex}) = \frac{dm_p}{dt} v_{ex} = \dot{m}_p v_{ex} , \quad (2.4)$$

em que \dot{m}_p é a taxa de perda de massa do gás em Kg/s e v_{ex} é a velocidade de exaustão.

No HT os ions são acelerados com grandes velocidades de exaustão usando uma fonte elétrica, então podemos aproximar

$$T = \frac{dm_p}{dt} v_{ex} \approx \dot{m}_i v_i , \quad (2.5)$$

que é aproximadamente a taxa de fluxo de massa do ion e sua velocidade. Que pode ser descrita por meio da conservação de energia da partícula como

$$v_i = \sqrt{\frac{2qV_b}{M}} , \quad (2.6)$$

em que V_b é a tensão na qual o ion foi acelerado, q é a carga e M é a massa do ion. Além disso a taxa de fluxo de massa pode ser relacionada com a corrente do feixe, I_b

$$\dot{m}_i = \frac{I_b M}{q} , \quad (2.7)$$

então podemos concluir que o empuxo pode ser escrito em termos dessa corrente e da tensão oferecida pelo circuito elétrico do propulsor

$$T = \sqrt{\frac{2M}{q}} I_b \sqrt{V_b} . \quad (2.8)$$

Para o HT algumas correções precisam ser feitas nos cálculos, como a da divergência do feixe que interfere no empuxo pelo fator $F_T = \cos(\theta)$, para propulsores onde a densidade de corrente dos ions seja constante em todo canal. Outra correção tipicamente feita é quando o gás tem partículas com cargas simples e duplamente ionizadas, que adicionamos um fator de correção à carga dos ions α (2.9) e assim um fator de correção no empuxo total $\gamma = \alpha F_T$ (GOEBEL, 2008).

$$\alpha = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{I^{++}}{I^+}}{1 + \frac{I^{++}}{I^+}} . \quad (2.9)$$

2.1.2 impulso específico

O impulso específico, denominado I_{sp} , é uma medida de eficiência de impulso e é definido como a proporção do impulso em relação à taxa de consumo de propelente.

$$I_{sp} = \frac{T}{\dot{m}_p g} = \frac{v_{ex}}{g} . \quad (2.10)$$

em que g é um termo adicionado para correção do valor obtido, coincidente com o valor 9,8 da gravidade.

Note que o impulso específico tem unidade de tempo, podemos interpretá-lo em termos do tempo útil de um determinado sistema de propulsão. Quanto maior o impulso específico, menor o fluxo de propelente necessário para a produção de um empuxo. E, por conseguinte, a aceleração pode se manter por muito mais tempo, dada uma quantidade limitada de propelente.

Para o movimento em linha reta de uma nave e negligenciando forças externas, podemos fazer uma análise em paralelo com a variação da velocidade relacionada com a massa total do propulsor. Para massa inicial da nave temos

$$m_0 = m_f + m_p , \quad (2.11)$$

como a variação de massa inicial da nave se dá apenas pela perda da massa do propelente, dizemos

$$\frac{dm_0}{dt} = \frac{dm_p}{dt} , \quad (2.12)$$

e escrevemos a equação do movimento (2.2), usando (2.4), como

$$m_0 \frac{dv}{dt} = T = v_{ex} \frac{dm_0}{dt} , \quad (2.13)$$

integrando (2.13) no tempo, podemos dizer que

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = v_{ex} \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm_0}{m_0} ; \quad (2.14)$$

$$v_i - v_f = \Delta v = -v_{ex} \ln \left(\frac{m_f}{m_0} \right) . \quad (2.15)$$

Podemos reescrever a equação (2.15) de modo que

$$m_f = m_0 e^{\frac{-\Delta v}{v_{ex}}} \rightarrow m_f = (m_f + m_p) e^{\frac{-\Delta v}{v_{ex}}} ; \quad (2.16)$$

$$m_p = m_f (e^{\frac{\Delta v}{v_{ex}}} - 1) . \quad (2.17)$$

A relação entre a quantidade de propelente necessária para realizar uma determinada missão e a velocidade de escape do propelente (ou o sistema de propulsão I_{sp}) mostra que a massa propulsora aumenta exponencialmente com o Δv necessário. Os propulsores que fornecem uma grande velocidade de escape do propelente em comparação com o Δv da missão terão uma massa propulsora que é apenas uma pequena fração da massa inicial da nave espacial. Podemos ver na figura 2.3 a relação entre a porcentagem de massa de propelente necessária para diferentes missões (Δv) e a velocidade de escape do propelente, em ordem crescente de distância onde $\Delta v = 5 \text{ Km/s}$ é aproximadamente uma missão a Marte e $\Delta v = 10 \text{ Km/s}$ é aproximadamente uma missão a Urano. Os propulsores Hall geralmente produzem uma velocidade de escape da ordem de 20 Km/s .

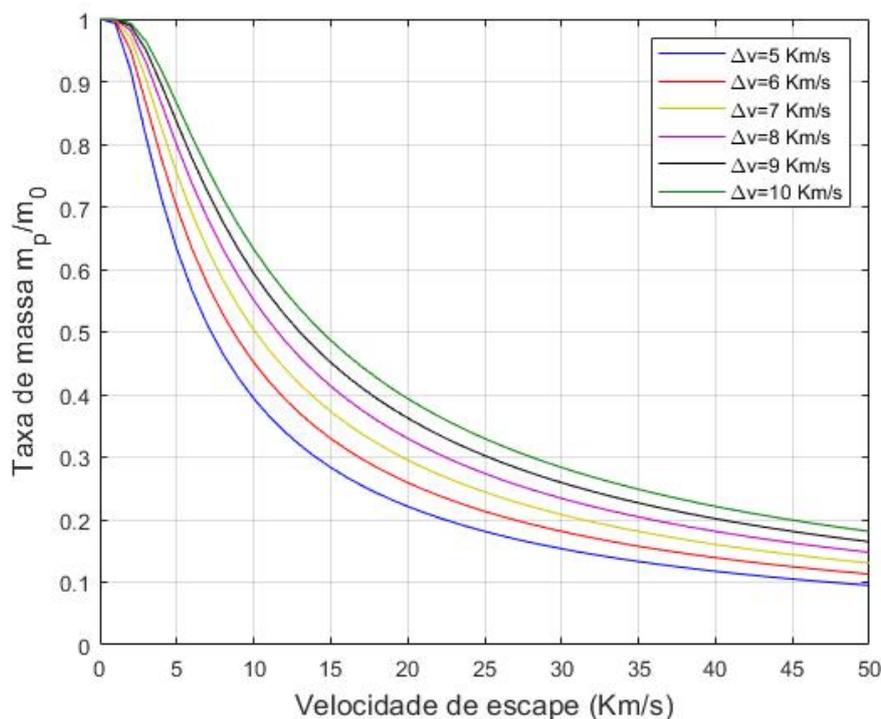


Figura 2.3: Relação entre a massa de propelente e a massa total do foguete a ser lançado para diferentes missões interplanetárias à planetas próximos com os Δv de acordo com *FRISBEE, 2008* e *MAZOUFFRE, 2016*.

A eficiência da utilização de massa do propulsor é dada pela equação (2.18). E pode ser corrigida através do parâmetro α_m que diferencia de α apenas pela raiz, que não tem, em (2.9), que geralmente é 1 para pequenas taxas $\frac{I^{++}}{I^+}$.

$$\eta_m = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_p} = \frac{I_b M}{e \dot{m}_p} . \quad (2.18)$$

Podemos obter o impulso específico corrigido apenas substituindo o empuxo (2.8) e (2.18) em (2.10)

$$I_{sp} = \frac{\eta_m}{g} \sqrt{\frac{2eV_b}{M}}. \quad (2.19)$$

2.1.3 Eficiência

A eficiência elétrica do propulsor é definida como a potência do feixe (P_b) fora do propulsor dividido pela potência total de entrada (P_T)

$$\eta_e = \frac{P_b}{P_T} = \frac{I_b V_b}{I_b V_b + P_o}, \quad (2.20)$$

em que P_o representa outra potência de entrada para o propulsor necessário para criar o feixe de impulso. Essa outra potência inclui o custo elétrico de produzir íons, aquecedor de cátodo ou potência de retenção, correntes de grade em propulsores de íons, etc.

A eficiência de descarga é definida como a eficiência da produção de íons, que é a razão da potência da produção de íons (descarga) para corrente do feixe

$$\eta_d = \frac{P_d}{I_b}, \quad (2.21)$$

cuja unidade é eV/ion e, contrário a maioria das outras eficiências, desejamos que seja a menor possível pois ela representa a perda de potência.

A eficiência total de um propulsor elétrico é definida como o potência de jato dividido pela Potência elétrica total

$$\eta_T = \frac{P_{jet}}{P_T}; \quad (2.22)$$

$$\eta_T = \frac{T^2}{2\dot{m}_p P_T}, \quad (2.23)$$

substituindo P_{jet} que é a energia cinética de impulso do feixe e pode ser representada como $\frac{T^2}{2\dot{m}_p}$ temos a equação (2.23). Substituindo as equações (2.8) para o empuxo, (2.7) para a taxa de fluxo de massa do ion e (2.18) para a taxa de fluxo de massa do propelente na equação da eficiência total (2.23) temos

$$\eta_T = \frac{M V_b I_b^2}{e \dot{m}_i P_T} \eta_m = \eta_m \frac{I_b V_b}{P_T}; \quad (2.24)$$

$$\eta_T = \frac{I_b V_b}{P_b} \eta_m \eta_e = \eta_m \eta_e, \quad (2.25)$$

e obtemos a equação (2.25) substituindo a equação (2.20) em (2.24). Adicionamos o fator γ de

correção para cada eficiência, no caso da eficiência total temos o fator γ^2 adicionado.

Uma das análises feitas nos propulsores é a taxa de empuxo por potência total que podemos representar por (2.26) a partir de (2.20). Substituindo P_b e usando (2.8) para empuxo e (2.19) para I_{sp} obtemos a equação (2.27)

$$\frac{T}{P_T} = \frac{T\eta_e}{P_b}; \quad (2.26)$$

$$\frac{T}{P_T} = \frac{2\eta_m\eta_e}{gI_{sp}} = \frac{2\eta_T}{gI_{sp}}, \quad (2.27)$$

essa equação nos mostra que para uma dada potência total a uma certa eficiência no propulsor, temos uma relação inversamente proporcional entre empuxo e impulso específico o que dificulta mais o desenvolvimento de um propulsor mais potente e com vida útil maior.

3 FUNCIONAMENTO DO HT

3.1 CANAL DO HT

Considere um canal de propulsor Hall genérico, mostrado esquematicamente pela figura 3.1. O gás propulsor é injetado da esquerda através da região do ânodo e é incidente no plasma gerado no canal. Um comprimento de escala axial, L , é definido, sobre o qual a descarga de campo cruzado é magnetizada e produz uma densidade de plasma significativa de largura w , que é essencialmente a largura do canal. Os íons que retiram esse plasma sobre a área cilíndrica simétrica A_e formam o feixe. O campo magnético aplicado é principalmente vertical na região do plasma nesta descrição.

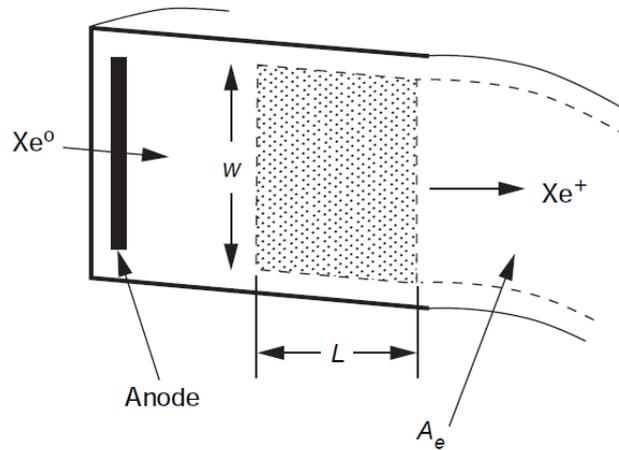


Figura 3.1: Esquema do canal do HT.

3.2 ESTRUTURA DE CAMPO E CORRENTE HALL

Os elétrons que entram no canal do propulsor Hall do cátodo exterior ficam presos no campo magnético cujo raio Larmor (2.1) seja muito menor do que o comprimento L de modo que os elétrons sejam magnetizados e sua mobilidade para o ânodo seja reduzida. Se a velocidade do elétron se caracterizar pela sua velocidade térmica, então o raio Larmor de elétrons é

$$r_e = \frac{v_{th}}{\omega_c} = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{8m}{\pi e} T_{eV}} \ll L, \quad (3.1)$$

em que T_{eV} é a temperatura dos elétrons em eV. De maneira similar o raio de Larmor do íon deve ser muito maior que L para que possam ser acelerados pra fora do canal pelo campo elétrico

$$r_i = \frac{v_i}{\omega_c} = \frac{M}{eB} \sqrt{\frac{2eV_b}{M}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2M}{e}} V_b \gg L. \quad (3.2)$$

Os perfis de campo magnético e elétrico são importantes no desempenho e vida do propulsor. O campo magnético radial tipicamente é um máximo perto do plano de saída do propulsor, como mostrado na figura 3.2, e é projetado para cair perto de zero no ânodo em propulsores Hall de parede dielétrica. Os elétrons do cátodo sofrem o aquecimento na região do campo magnético transversal máximo, proporcionando uma temperatura de elétrons e uma taxa de ionização localizadas mais altas. A mobilidade de elétrons reduzida e a alta temperatura de elétrons na região de campo magnético forte fazem com que o campo elétrico axial também seja maximizado perto do plano de saída, conforme ilustrado na figura 3.2.

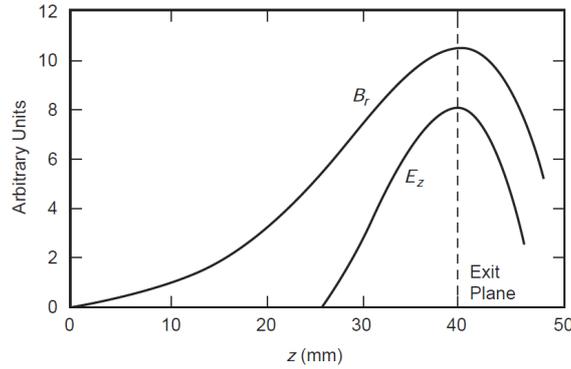


Figura 3.2: Campos \mathbf{E} e \mathbf{B} ao longo do canal do HT.
Fonte: GOEBLE, 2008.

As regiões de ionização e aceleração se sobrepõem, o que leva à dispersão na velocidade do íon e alguma divergência angular no feixe resultante, em que complicaria o problema se considerada essa dispersão, como comentado na seção 6.2.

Na região de campo elétrico e magnético cruzado do canal, os elétrons se movem na direção azimutal devido à força $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ com uma velocidade dada por

$$v_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \approx \frac{E_r}{B_z}. \quad (3.3)$$

A corrente na direção azimutal, chamada de corrente Hall, é então a integral da densidade eletrônica do plasma e essa velocidade ao longo do comprimento L

$$I_H = n_e e \left(\int_0^L v_E dz \right) w = n_e e \left(\int_0^L \frac{E}{B} dz \right) w, \quad (3.4)$$

em que w é a largura do plasma (mostrado na figura 3.1) que essencialmente enche o canal. O campo elétrico axial no canal de plasma é, aproximadamente, a tensão de descarga dividida pela espessura do plasma, de modo que a corrente Hall é

$$I_H \approx n_e e w \frac{V_d}{B} . \quad (3.5)$$

A equação (3.5) mostra que a corrente de Hall aumenta com a tensão de descarga aplicada e com a largura do canal desde que o campo magnético permaneça inalterado.

A corrente de íons deixando o plasma para formar o feixe através da área A_e é aproximadamente

$$I_i = n_i e v_i A_e \approx n_i e \sqrt{\frac{2eV_d}{M}} 2\pi R w , \quad (3.6)$$

em que R é o raio médio do canal de plasma. Uma vez que o plasma é quasineutro ($n_i \approx n_e$), mesmo na região magnetizada, a corrente Hall pode ser expressa usando a equação (3.6) como

$$I_H \approx \frac{I_i}{2\pi R B} \sqrt{\frac{M V_d}{2e}} . \quad (3.7)$$

Aumentando a corrente de íons no propulsor fixo aumentará a corrente Hall circulante para um determinado campo magnético e tensão de descarga. O empuxo total produzido por um propulsor Hall é

$$T = \int (J_H \times B) dA = I_H B \approx I_i \sqrt{\frac{M V_d}{2e}} . \quad (3.8)$$

Esta expressão para o empuxo tem a mesma forma que a equação (2.8), onde a força é acoplada magneticamente ao corpo do propulsor Hall.

3.3 IONIZAÇÃO

O gás neutro injetado da região do ânodo será ionizado ao entrar na descarga de plasma na região de ionização de campo cruzado. Considere um átomo de gás neutro com velocidade incidente v_n no plasma de uma densidade n_e , temperatura do elétron T_e e comprimento L . A densidade do gás neutro diminuirá com o tempo devido à ionização:

$$\frac{dn_n}{dt} = -n_n n_e \langle \sigma_i v_e \rangle , \quad (3.9)$$

em que $\langle \sigma_i v_e \rangle$ é o coeficiente de ionização para elétrons Maxwellianos. O fluxo de partículas neutras que incidem no plasma é

$$\Gamma_n = n_n v_n , \quad (3.10)$$

tal que a velocidade neutra é $v_n = dz/dt$ onde z é o comprimento axial. A equação (3.9) pode ser reescrita por

$$\frac{d\Gamma_n}{\Gamma_n} = -\frac{n_e \langle \sigma_i v_e \rangle}{v_n} dz, \quad (3.11)$$

cujas soluções são dadas por

$$\Gamma_n(z) = \Gamma(0)e^{-z/\lambda_i}, \quad (3.12)$$

em que $\Gamma(0)$ é o fluxo incidente na região de ionização e o livre caminho de ionização é dado por

$$\lambda_i = \frac{v_n}{n_e \langle \sigma_i v_e \rangle}. \quad (3.13)$$

O livre caminho de ionização depende da velocidade neutra, que determina o tempo que o átomo gasta na espessura do plasma antes de uma colisão. Ele também varia inversamente com a densidade eletrônica porque um maior número de elétrons na área de campo cruzado aumentará a probabilidade de um deles encontrar o átomo neutro.

A porcentagem de neutros que sai do plasma de comprimento L que é ionizado é

$$\frac{\Gamma_{sai}}{\Gamma_{incidente}} = 1 - e^{-L/\lambda_i}, \quad (3.14)$$

então para um HT devemos sempre ter um valor de $\frac{\lambda_i}{L} = cte \ll 1$.

Examinando o critério de ionização e afirmando que todo o gás será ionizado temos que

$$n_n n_e \langle \sigma_i v_e \rangle A_e L \approx n_n v_n A_e, \quad (3.15)$$

e usando (3.5), (3.15) fica

$$L = \frac{v_n V_d w}{I_H \langle \sigma_i v_e \rangle B}. \quad (3.16)$$

O comprimento da região de ionização naturalmente deve aumentar com a velocidade neutra e pode diminuir com o coeficiente de ionização.

3.4 POTENCIAL E CORRENTES

A distribuição potencial em um propulsor Hall está ilustrada na figura 3.3. Na região onde o campo magnético transversal é baixo, o plasma é fracamente magnetizado e a mobilidade eletrônica é alta. O potencial de plasma é então próximo ao potencial do ânodo. O potencial de plasma

diminui em direção ao potencial do cátodo próximo do plano de saída do propulsor à medida que o campo magnético aumenta e limita a mobilidade eletrônica. A diferença entre o potencial do cátodo e o potencial do feixe é a tensão de acoplamento V_c , que é a tensão necessária para extrair a corrente do cátodo.

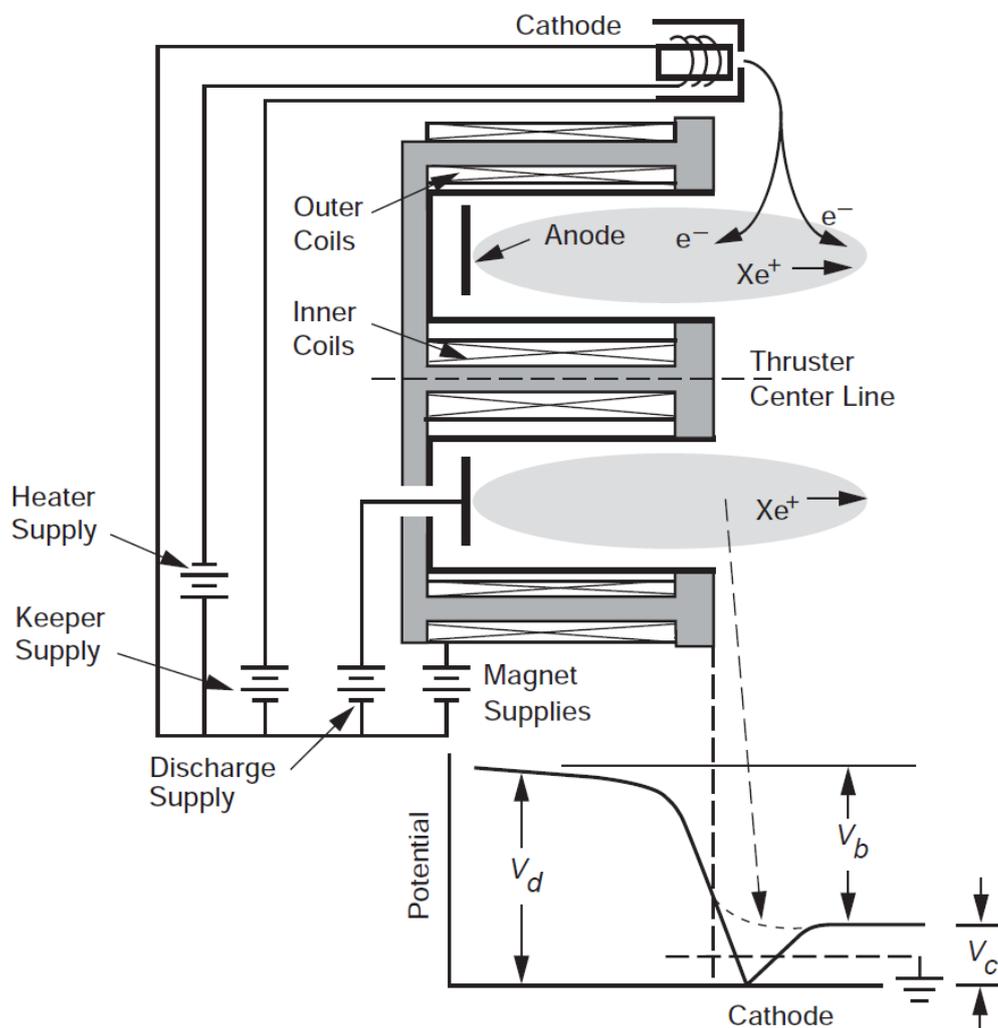


Figura 3.3: Esquema do propulsor hall e sua distribuição de potencial.
Fonte: GOEBEL, 2008.

$$V_b = V_d - V_c . \quad (3.17)$$

A velocidade média dos íons pode ser obtida através da equação (2.6).

O feixe do propulsor Hall tem carga neutra (corrente de íons iguais à correntes de elétrons). Em um propulsor Hall, a corrente de descarga medida é a corrente líquida que flui através do fornecimento de descarga. A corrente que flui na conexão entre o ânodo e a fonte de alimentação na figura 3.3 é a corrente de elétrons e íons que chega ao ânodo:

$$I_d = I_{ea} - I_{ia} . \quad (3.18)$$

A corrente de íons é tipicamente pequena devido à sua maior massa e, portanto, a corrente de descarga é essencialmente a corrente de elétrons coletada pelo ânodo. Da mesma forma, a corrente que flui na perna do cátodo é

$$I_d = I_e + I_{ic} , \quad (3.19)$$

em que I_e é a corrente emitida e I_{ic} é a corrente de íons que retorna ao cátodo. Tal como acontece com o ânodo, a corrente de íons para o cátodo é tipicamente pequena e, portanto, a corrente de descarga é essencialmente apenas a corrente de emissão de elétrons do cátodo.

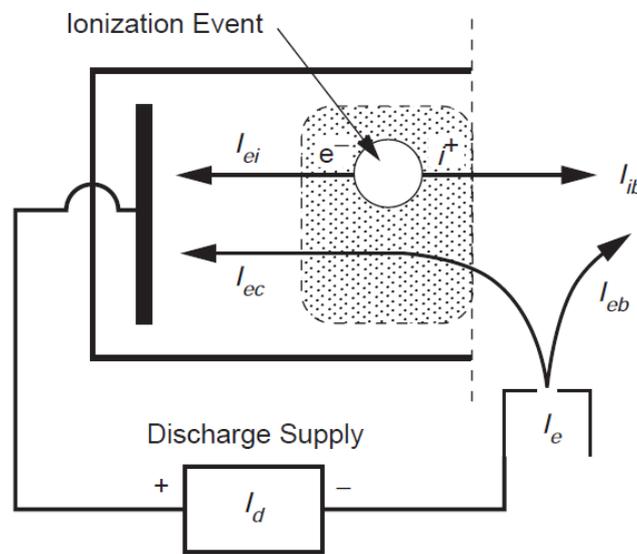


Figura 3.4: Esquema das correntes no propulsor Hall.
Fonte: GOEBEL, 2008.

A Figura 3.4 mostra as correntes que circulam pelo plasma, onde as correntes de íons para o ânodo e o cátodo são negligenciadas como pequenas e as correntes de íons e elétrons para as paredes dielétricas são iguais e não são mostradas. Os íons são produzidos no plasma por eventos de ionização. Os elétrons secundários dos eventos de ionização, I_{ei} , vão para o ânodo, juntamente com os elétrons primários do cátodo, I_{ec} . Os elétrons primários ionizam neutros ou contribuem com energia para os elétrons de plasma, de modo que a distribuição de elétrons energéticos possa produzir a ionização. Uma vez que se supõe que a corrente de descarga é essencialmente a corrente de elétrons total coletada pelo ânodo, a corrente de descarga pode ser escrita como

$$I_d = I_{ei} + I_{ec} , \quad (3.20)$$

e também a corrente de descarga é a corrente emitida do cátodo

$$I_d = I_e = I_{ec} + I_{eb} . \quad (3.21)$$

Usando o fato de que um elétron e um íon são feitos em cada evento de ionização, de modo que $I_{ei} = I_{ib}$, Equação (3.20) torna-se

$$I_d = I_{ib} + I_{ec} , \quad (3.22)$$

com as equações (3.21) e (3.22) vemos que $I_{ib} = I_{eb}$.

3.5 MODELOS DE PERFORMANCE DO HT

Como visto anteriormente no capítulo 2, um dos parâmetros que usamos para calcular a eficiência de um propulsor é a taxa de fluxo de massa do gas propulsor que é descrita por

$$\dot{m}_p = \dot{m}_a + \dot{m}_c , \quad (3.23)$$

em que \dot{m}_a é a taxa de fluxo do ânodo e \dot{m}_c é a taxa de fluxo do cátodo.

Como o fluxo de elétrons do cátodo sai de uma área exterior à região de ionização, perde-se muito dessa massa e a eficiência do cátodo é dada por

$$\eta_c = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_p} = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_a + \dot{m}_c} . \quad (3.24)$$

A eficiência elétrica do propulsor é dada pela equação (2.20), onde o P_T é dado por

$$P_T = P_d + P_k + P_{mag} , \quad (3.25)$$

em que P_d é a potência de descarga, P_k é a potência detida pelo cátodo que geralmente é zero durante a operação, P_{mag} é a potência para gerar o campo magnético. A eficiência de utilização elétrica para a outra potência usada no propulsor Hall é definida como

$$\eta_0 = \frac{P_d}{P_T} . \quad (3.26)$$

Com as equações (3.24) e (3.26) podemos obter a partir de (2.23) que

$$\eta_I = \frac{1}{2} \frac{T^2}{\dot{m}_a P_d} \eta_c \eta_0 . \quad (3.27)$$

Para vermos outros parâmetros que afeta a eficiência, podemos expandir a equação (3.27) usando (2.8) com o termo de correção γ . Temos mais duas eficiências que podem ser descritas, a

da corrente do feixe e a da voltagem do feixe

$$\eta_b = \frac{I_b}{I_d}; \quad (3.28)$$

$$\eta_v = \frac{V_b}{V_d}, \quad (3.29)$$

substituindo as equações (3.28) e (3.29) em (2.8) corrigido e substituindo o resultado em (3.27) temos

$$\eta_T = \gamma^2 \frac{M}{e} \frac{I_d}{\dot{m}_a} \eta_b^2 \eta_v \eta_c \eta_0. \quad (3.30)$$

A equação (3.30) mostra que a eficiência do propulsor Hall é proporcional à massa iônica e à corrente de descarga, porque esses termos dominam a produção do empuxo e são inversamente proporcionais ao fluxo de massa do ânodo, que domina a eficiência da utilização em massa. Esta equação pode ser ainda mais simplificada ao perceber que

$$\frac{M}{e} I_d \eta_b = \dot{m}_i, \quad (3.31)$$

e temos que a eficiência da massa é dada por (2.18), então temos para a eficiência total

$$\eta_T = \gamma^2 \eta_b \eta_v \eta_m \eta_0. \quad (3.32)$$

Esta expressão contém o termo γ^2 usual associado à divergência do feixe e ao conteúdo de íons carregados multiplicado e também à utilização em massa e eficiências de utilização elétrica. No entanto, esta expressão também inclui as eficiências associadas à geração de íons de feixe e a transmissão da tensão de descarga à tensão do feixe. Isso mostra diretamente que os projetos de propulsor Hall que maximizam a produção de corrente do feixe e a energia do feixe e que minimizam o fluxo do cátodo produzem a eficiência máxima, desde que a divergência do feixe e o conteúdo de íons duplos não sejam afetados negativamente.

Pode-se também representar a eficiência do HT em termos da eficiência do ânodo

$$\eta_a = \frac{1}{2} \frac{T^2}{\dot{m}_a P_d} = \frac{\eta_T}{\eta_0 \eta_c}, \quad (3.33)$$

que descreve o desempenho básico do propulsor sem considerar os efeitos do fluxo ou da energia do cátodo para gerar o campo magnético. Isso geralmente é feito para separar as perdas de cátodos e magnéticas para que as tendências nos mecanismos de produção e aceleração do plasma possam ser discernidas.

A perda de descarga equivalente para um propulsor Hall também pode ser calculada para fornecer informações sobre como o projeto do propulsor afeta o custo de produção dos íons do

feixe. O custo médio de energia para a produção de um feixe de íons é a potência de descarga dividida pelo número de íons do feixe menos a potência do feixe por íon do feixe:

$$\varepsilon_b = \frac{I_d V_d}{I_b} - \frac{I_b V_b}{I_b} = \frac{I_d V_d}{I_b} - V_b = \frac{P_d(1 - \eta_b \eta_\nu)}{I_b}. \quad (3.34)$$

3.6 PRINCIPAIS MECANISMOS DE PERDA DE POTÊNCIA NO HT

Toda potência do propulsor chamamos de P_T que também pode ser chamada de potência de descarga P_d que é dado por

$$P_d = P_b + P_w + P_a + P_R + P_{ion}, \quad (3.35)$$

em que P_b é a potência do feixe ($I_b V_b$), P_w é a potência para as paredes do canal devido à perda de íons e elétrons, P_a é a potência para o anodo devido à coleção de elétrons, P_R é a perda de potência radioativa do plasma, P_{ion} é a potência para produzir os íons que batem nas paredes e viram o feixe.

O principal mecanismo de perda de potência é o dos elétrons e íons que estão na área da bacia com a parede do canal (P_w), que pode ser estimada a partir dos potenciais da bacia e dos campos elétricos na borda do plasma. Pela parede ser um material isolante então as correntes de elétrons e íons devem ser iguais nas bordas. Entretanto o bombardeamento de elétrons e íons no material isolante à uma energia característica dos HT produz um número significativo de elétrons secundários que diminui o potencial da bacia na parede. Com a condição das correntes na parede serem iguais temos

$$I_{iw} = I_{ew} - \gamma I_{ew} = I_{ew}(1 - \gamma); \quad (3.36)$$

$$I_i = \frac{1}{2} n_i e \sqrt{\frac{kT_e}{m}} A; \quad (3.37)$$

$$I_e = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}} n_e e A \exp\left(-\frac{e\phi}{kT_e}\right), \quad (3.38)$$

onde γ é a produção de elétrons secundários. Utilizando a corrente de íons de Bohm (3.37) na região da bacia e a corrente de elétrons (3.38) na mesma região podemos obter através de (3.36)

$$\phi_s = \frac{kT_e}{e} \ln \left[(1 - \gamma) \sqrt{\frac{2M}{\pi m}} \right], \quad (3.39)$$

que é o potencial na bacia. A partir dessa equação podemos estimar o potencial da bacia com

relação à borda do plasma com a presença de elétrons secundários.

Tomando a borda do plasma como quase-neutra dizemos que $n_i = n_e + n_s$, em que n_s é a densidade de elétrons secundários, e o fluxo de elétrons secundários é a produção de elétrons vezes o fluxo de elétrons do plasma. Então temos que o fluxo de ions pode ser escrito como, onde I_{ew} é dado por (3.38),

$$I_i w = n_i v_i e A = I_{ew}(1 - \gamma), \quad (3.40)$$

resolvendo para o potencial obtemos

$$\phi_s = -\frac{kT_e}{e} \ln \left[\sqrt{\frac{M}{2\pi m}} \frac{n_e}{n_e + n_s} \frac{v_B}{v_i} (1 - \gamma) \right]. \quad (3.41)$$

Então temos a Potência para parede do HT

$$P_w = \frac{1}{4} \left(\frac{8kT_e}{\pi m} \right)^{1/2} e n_0 A e^{e\phi_s/kT_e} \left(2 \frac{kT_e}{e} \right) + n_0 e v_0 A (\varepsilon - \phi_s), \quad (3.42)$$

em que o primeiro termo é devido a elétrons que superam o potencial repelente da bainha e depositam $2T_e$ na parede, e o segundo termo é devido a íons que caíram pelo potencial pré-bainha e, em seguida, pelo potencial completo da bainha. E podemos reescrever em termos da corrente de ions na parede

$$P_w = I_{iw} \left[\left(\frac{M}{2\pi m} \right)^{1/2} e^{e\phi_s/kT_e} \left(2 \frac{kT_e}{e} \right) + (\varepsilon - \phi_s) \right]. \quad (3.43)$$

3.6.1 Temperatura do elétron

A temperatura do elétron no canal deve ser conhecida para avaliar os mecanismos de perda de energia descritos acima. A temperatura máxima do elétron no canal de plasma pode ser encontrada usando o equilíbrio das potências, descrito pela equação (3.35).

A potência de descarga é dada por $P_d = I_d V_d$ e a potência do feixe (usando 3.28) é

$$P_b = \eta_b \eta_\nu I_d V_d = \eta_\nu I_b V_d, \quad (3.44)$$

a diferença da potência do feixe da de descarga é a potência que sobra no canal para a produção do plasma, que é a potência no plasma.

$$P_p = (1 - \eta_b) I_d V_d = I_{ec} V_d. \quad (3.45)$$

A Potência nas paredes do canal pode ser escrita como

$$P_w = n_e e A \left[\frac{kT_e}{e} \left(\frac{kT_e}{2\pi m} \right)^{1/2} e^{e\phi_s/kT_e} + \frac{v_i}{2} (\varepsilon - \phi_s) \right], \quad (3.46)$$

em que A é a área total das paredes do canal interno e externo em contato com a região de plasma de alta temperatura, v_i é a velocidade do íon em direção à parede e o potencial ϕ_s da bainha é dado pela equação (3.41). Em (3.46) vemos o por que as maiores perdas ocorrem nas regiões de maiores temperaturas do elétron.

Potência do anodo é dada por, cuja temperatura usada é a proxima do anodo,

$$P_a = 2I_d T_{eV}(\text{anodo}). \quad (3.47)$$

A potência radiada é

$$P_R = n_0 n_e \langle \sigma_* v_e \rangle V, \quad (3.48)$$

em que o coeficiente de ionização é função da temperatura do elétron e V é o volume da região de plasma de alta temperatura no canal. Para as equações (3.46) e (3.48) precisamos da densidade do plasma para altas temperaturas que pode ser encontrada

$$n_e = \frac{I_b}{ev_b A_c} \approx \frac{\eta_b I_d}{e A_c \sqrt{\frac{2\eta_b e V_d}{M}}}, \quad (3.49)$$

em que A_c é a área da saída do canal.

E a potência para produzir ions é a soma da corrente do feixe e da corrente de ions para as paredes vezes o potencial de ionização:

$$P_{ion} = (I_b + I_{iw})U^+ = [\eta_b + I_{ew}(1 - \gamma)]I_d U^+. \quad (3.50)$$

4 OSCILAÇÕES NO HT

Dependendo do tamanho e das características operacionais, os propulsores Hall têm a capacidade de gerar muitas ondas e instabilidades diferentes com frequências de 1 kHz a dezenas de MHz, como mostrado na fig 4.1. Um levantamento das frequências de diferentes ondas de plasma, os comprimentos característicos no propulsor, e as velocidades de desvio de onda e de partículas esperadas em típicos propulsores Hall foram compilados por Choueiri (2001). As instabilidades mais comumente observadas são dos tipos Rayleigh-Taylor e Kelvin-Helmholtz. Oscilações que ocorrem na faixa de frequências de 1 a 30 kHz são associadas a instabilidades de ionização e oscilações rotacionais. Ondas de propagação azimutal com frequências de até 100 kHz que não estão associadas a instabilidades de ionização também podem ocorrer devido a gradientes de campo magnético. Na faixa de 100 a 500 kHz, podem ocorrer oscilações no tempo de trânsito de íons associadas ao movimento axial dos íons através das regiões de ionização e aceleração. Acima desta faixa de frequência, ondas de deriva azimutal e ondas acústicas de íons também foram previstas e observadas (GOEBEL, 2008).

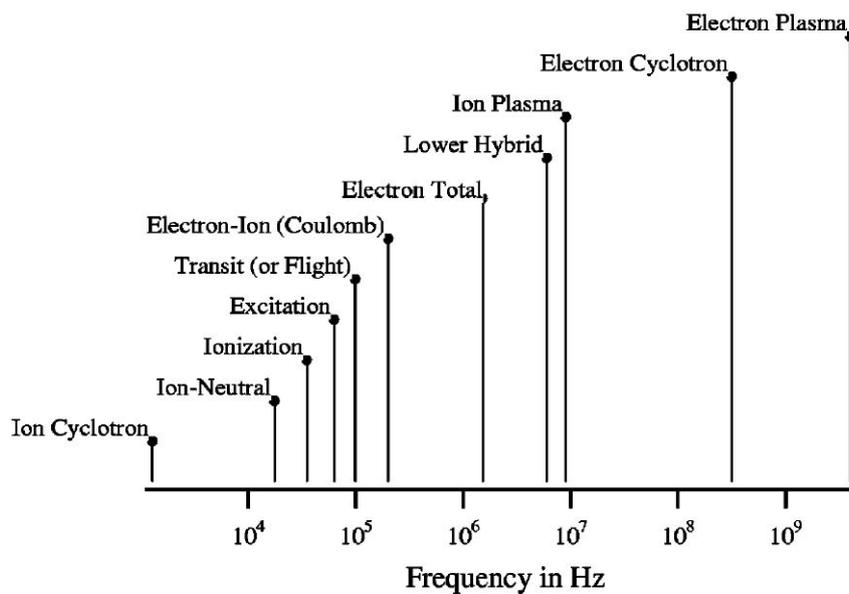


Figura 4.1: Range de frequências de oscilações encontradas no propulsor Hall.
Fonte: CHOUERI, 2001.

4.1 CARACTERÍSTICAS DO PLASMA

Para caracterizar o plasma calculamos uma série de parâmetros, tais como as frequências naturais (frequências ciclotrônicas ω_{ci} e ω_{ce} ; de plasma ω_{pi} e ω_{pe} ; menor híbrida ω_{lh}), frequências de colisão (elétron-neutro ν_e ; ion-neutro ν_i ; coulomb e de ionização) comprimentos característicos

para cada frequência, as velocidades de cada partícula associada (velocidade termica do elétron; velocidade de Alfvén; velocidade do ion e as velocidades axial e azimutal do elétron).

No cálculo das frequências de colisões que envolvem elétrons, para a total frequência temos:

$$\nu_e = n_a \int F_M(v) Q_e(v) v_{rel} dv , \quad (4.1)$$

em que v_{rel} é a velocidade relativa entre elétrons e neutros, Q_e é a seção transversal total da colisão obtida. No cálculo das velocidades de deriva do eletrons temos:

$$u_{dex} = D_{e\perp} \frac{\partial(n_e k T_e)}{n_e \partial x} - \mu_{e\perp} E_x ; \quad (4.2)$$

$$u_{dey} = \Omega_e u_{dex} , \quad (4.3)$$

onde temos

$$\mu_{e\perp} = \frac{\mu_e}{1 + \Omega_e^2} ; \quad (4.4)$$

$$D_{e\perp} = \frac{D_e}{1 + \Omega_e^2} , \quad (4.5)$$

tal que

$$\mu_e = \frac{|e|}{m_e \nu_e} ; \quad (4.6)$$

$$D_e = \frac{k T_e}{m_e \nu_e} ; \quad (4.7)$$

$$\Omega_e = \frac{\omega_{ce}}{\nu_e} . \quad (4.8)$$

Para Equações (4.2) e (4.3), tratamos cada célula da grade como embutida num sistema de coordenadas retangular mostrado na figura 2.2, com o eixo x apontando para jusante ao longo do eixo do propulsor, isto é, ao longo do campo eléctrico aplicado E_x e o eixo z ao longo do raio do propulsor, isto é, ao longo do campo magnético radial B_r . O u_{dey} corresponde, portanto, à velocidade de desvio do elétron azimutal, que estaria na direção y negativa. Todos os parâmetros mencionados são calculados para cada ponto da grade.

4.2 OSCILAÇÕES OBSERVADAS NO PLASMA

As amplitudes e frequências das oscilações observadas tem uma forte dependência das condições de operação do propulsor, tais como:

1. Taxa de fluxo de massa e tipo do gás;
2. Voltagem aplicada;
3. Geometria inicial e evolutiva do tempo;
4. Grau de contaminação da câmara de descarga;
5. Características do cátodo;
6. Perfil do campo magnético e sua magnitude.

Além disso, quando a sondagem espacialmente resolvida das oscilações foi conduzida (TILININ, 1977) dentro do canal, foi revelado que os espectros de oscilação também dependem da localização axial dentro do canal.

A forte dependência do campo magnético oferece a oportunidade de descrever a oscilação dos espectros em função do valor máximo do campo magnético B_r^* (geralmente atinge alguns milímetros a montante da saída) com todos os outros parâmetros operacionais (geometria, taxa de fluxo de massa, tensão de descarga) mantidos constantes. (Isso deixa a corrente de descarga como uma função exclusiva do campo magnético.) Isso foi tentado por Tilinin (1977), que realizou extensas medições dos espectros na faixa de 10 kHz a 400 MHz em quatro localizações axiais no canal e sob uma ampla gama de condições de operação.

Podemos ver um resumo de todos esses dados na tabela 4.1

4.2.1 Oscilações de descarga na faixa de 1-20 kHz

Quando o B_r^* é aumentado para cerca de metade do seu valor ideal (Regime IIIa na tabela 4.1), estas oscilações tornam-se proeminentes e a sua amplitude pode atingir 10% da amplitude da tensão total. Para $B_r^*/(B_r^*)_{opt}$ entre 0,8 e 1, estas oscilações são relativamente amortecidas. Esse regime de operação é chamado de "ótimo" (Regime IV na Tabela 4.1). As oscilações tornam-se violentas assim que B_r^* é aumentado um pouco acima de seu valor ideal (Regime V na Tabela 4.1). Sua amplitude pode chegar a até 100% da tensão de descarga, muitas vezes fazendo com que a descarga se extinga. Como na $B_r^* = (B_r^*)_{opt}$ a razão entre a corrente de íons na saída e a corrente de descarga atinge um máximo e qualquer aumento adicional em B_r^* causa um severo início de oscilações nessa faixa de frequência, o propulsor Hall é tipicamente operado logo abaixo desse início no chamado "regime ótimo" (Regime IV na Tabela 4.1).

Para um determinado propulsor com alguns parâmetros pré-setados (taxa de fluxo de massa, voltagem de descarga, etc) podemos chegar a esse regime ótimo mudando o valor do campo B_r^* .

Tabela 4.1: Caráter dos espectros de oscilação medida em função do valor máximo do campo magnético B_r^* normalizado pelo seu valor ótimo, $(B_r^*)_{opt} \approx 170$ G, para $m = 4$ mg/s, $U_d = 200$ V e um SPT com um diâmetro de 9 cm operando com xenônio. Os números representam a importância relativa de uma dada banda de frequência para o espectro total. A escala é de 1 a 10, onde 1 é a amplitude fraca (abaixo da sensibilidade do diagnóstico) e 10 é a amplitude dominante da mesma ordem que a tensão aplicada. 0 significa que as oscilações nessa banda estavam ausentes e NA indica dados indisponíveis. Os dígitos são relativos dentro de uma determinada faixa de frequências e não através das bandas.

Fonte: CHOUERI, 2001.

Regime $B_r^*/(B_r^*)_{opt}$	I <0.38	II 0.38-0.47	IIIa 0.47-0.6	IIIb 0.6-0.76	IV 0.76-1	V 1-1.35	VI $1.35 \leq$
1-20 kHz	1	1	8	8	3	10	4
20-60 kHz (azimuthal waves)	0	6	0	4	2	0	0
20-100 kHz	1	5	4	6	7	6	4
70-500 kHz	1	4	4	7	7	6	8
2-5 MHz (azimuthal waves)	1	3	3	4	5	1	1
0.5-10 MHz	1	3	3	4	5	5	6
10-400 MHz	1	3	2	3	4	5	5
>GHz	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

4.2.2 Bojo rotativo e oscilações relacionadas na faixa de 5-25kHz

As oscilações nessa faixa de frequência atuam como um bojo rotativo e está relacionada a ionização do gás. São geralmente encontradas na região do ânodo e dependendo das condições podem se estender por todo canal de descarga demonstrado na figura 4.2 em que é definido o número de bojo m como o número de excitações bojo simultâneas no mesmo momento.

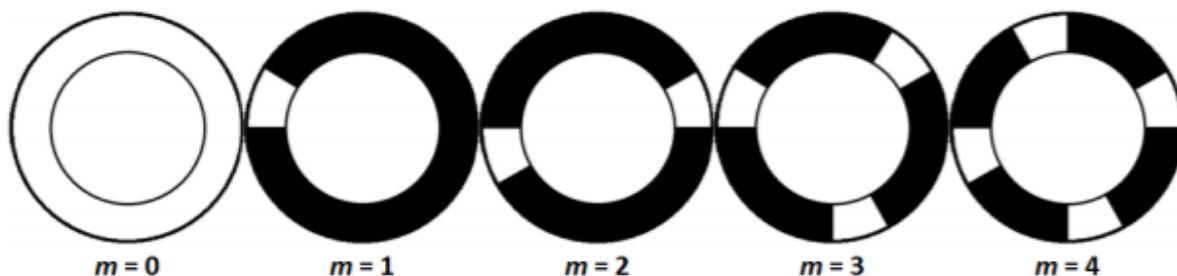


Figura 4.2: Significado físico dos vários modos do bojo. Branco indica bojos luminosos que se propagam através de um fundo escuro. O número do modo m indica o número de bojos presentes simultaneamente. Para $m=0$, o canal inteiro pisca em uníssono. Para $m \geq 1$, os bojos propagam-se azimuthalmente

Fonte: MCDONALD, 2011.

O mecanismo por trás da formação do bojo pode ser qualitativamente atribuído a um acoplamento entre a não uniformidade da densidade e o processo de ionização. Definindo-se o *tilt* do bojo pelo quanto uma onda de ionização se propaga ao longo do ânodo enquanto um íon é acelerado pela descarga. Assim, o bojo pode ser pensado como resultante da ionização incompleta

do gás e da rápida perda de íons recém-nascidos. Com o aumento da potência esta competição diminui, a região de ionização se espalha azimutalmente e a amplitude das oscilações de baixa frequência relacionadas ao bojo diminui consideravelmente.

Por causa da coloração encontrada entre a velocidade azimutal do bojo e a velocidade de ionização crítica $u_{ic} = \sqrt{2\epsilon_i/M}$, onde ϵ_i e M são o potencial de ionização e a massa atômica do gás, que em grande parte implicou a relação dessas oscilações com o processo de ionização. A aparência e a amplitude dessas oscilações dependem da localização do ponto de operação ao longo da curva corrente-voltagem do propulsor (exemplo na figura 4.3). Elas são dominantes em baixa tensão de descarga, tendem a diminuir a uma voltagem mais alta e tornam-se muito fracas na parte de saturação da corrente nas características corrente-voltagem, exceto na vizinhança do ânodo.

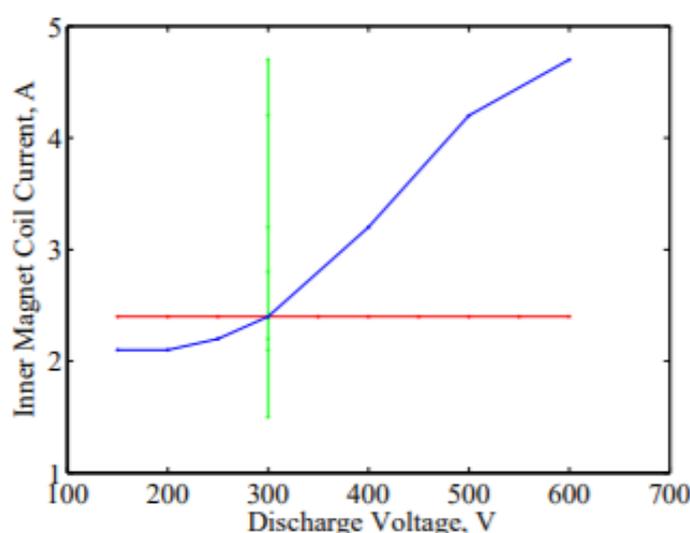


Figura 4.3: Espaço do regime de operação para investigação dos bojos rotativos para o HET H6.
Fonte: MCDONALD, 2011.

4.2.3 Oscilações induzidas por gradientes de campo magnético na faixa de 20–60kHz

É importante diferenciar dentro dessa faixa entre dois modos de sobreposição: oscilações azimutais de baixa frequência (5-25 kHz), que atuam como um bojo rotativo e estão relacionadas ao processo de ionização, e modos azimutais de frequência mais alta (20-60 kHz) que são causadas por instabilidades do tipo drift e sua amplitude é uma função forte do perfil do campo magnético. Morozov (1972) mostrou que a amplitude dessas oscilações aumenta tanto quanto um fator de 5 a 8, se o gradiente axial do campo magnético é revertido de positivo (aumento de B_r com a distância do ânodo) para negativo, enquanto mantém a potência constante. Com algumas dessas descobertas de Morozov, denominou-se o propulsor inicialmente de propulsor de deriva eletrônica fechada. A partir de um dos primeiros modelos de teorias de instabilidades de Landau, Morozov (1972) modelou com sucesso seus critérios de estabilidade, frequências e taxas de crescimento,

foi baseada em uma formulação MHD ideal simples. Ao linearizar as equações correspondentes para ondas planares de pequena amplitude, Morozov encontrou uma relação de dispersão simples que pode gerar modos instáveis dependendo do sinal e da magnitude da velocidade de deriva de íons u_i , da velocidade de deriva azimutal de elétrons u_{de} e do seguinte parâmetro de escala de inhomogeneidade relativa:

$$\frac{B_r}{n_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n_e}{B_r} \right), \quad (4.9)$$

Partindo das equações MHD de dois fluidos, sem colisões e assumindo ions não-magnetizados ($r_{ci} \gg L$) e inhomogeneidade relativamente fraca no range de frequências $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}, \omega_{pe}$, pode-se linearizar usando perturbação oscilatória

$$\alpha = \alpha_0 + \tilde{\alpha} \exp(k_x x + k_y y - i\omega t), \quad (4.10)$$

em que α é qualquer parâmetro do problema, além de $\alpha_0 \gg \tilde{\alpha}$ e produz uma relação de dispersão

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_x u_i)^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci} \omega_{ce}} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_A^2} - \frac{\omega_{pi}^2 k_y (u_{dey} - u_B)}{k^2 u_i^2 (\omega - k_y u_{dey})} = 0, \quad (4.11)$$

em que $v_A = B^2 / \mu_0 M_i n_i$ é a velocidade de Alfvén. Outro parâmetro importante nessa relação é a velocidade de deriva magnética

$$u_B \equiv \frac{u_i^2}{\omega_{ci} L_{\nabla B}}, \quad (4.12)$$

em que $L_{\nabla B} = \left| \frac{\partial \ln B}{\partial x} \right|^{-1}$ é o comprimento característico do gradiente de campo magnético. Com essa relação, para o estudo da estabilidade das ondas de baixa frequência, Esipchuck (1976) assumiu o caso para frequências vinculadas por

$$(\omega - k_x u_i)^2 \ll \frac{k^2 v_A^2 \omega_{ce} \omega_{ci}}{k^2 v_A^2 + \omega_{ce} \omega_{ci}}, \quad (4.13)$$

e ainda assumiu

$$\omega_{lh} \simeq (\omega_{ce} \omega_{ci})^{1/2} \ll \omega_{pi}, \quad (4.14)$$

que é a menor frequência híbrida. Com isso pode se achar as raízes da relação de dispersão (4.11)

$$\omega = k_x u_i - \frac{k^2 u_i^2}{2k_y (u_{dey} - u_B)} \pm \frac{k u_i^2}{2(u_{dey} - u_B)} \times \left[\left(\frac{k_x}{k_y} \right)^2 - 4 \frac{k_x (u_{dey} - u_B)}{k_y u_i} + 4 \frac{u_{dey} (u_{dey} - u_B)}{u_i^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad (4.15)$$

essas suposições (ESIPCHUCK, 1976) são válidas para propulsores Hall mas não satisfazem

completamente dentro do canal e na média os comprimentos do gradiente são menores que o do dispositivo (suposição de $L < L_{\nabla B_r}, L_{\nabla n_e}$).

Oscilações com propagação azimutal nesta faixa são ondas eletrostáticas de baixa frequência com propagação fortemente azimutal ($k_x \ll k_y$). Elas são tornadas instáveis pela presença do gradientes de campo magnético e densidade. Estes gradientes podem ter os sinais e magnitudes para apresentar uma fonte de livre energia para perturbações eletrostáticas crescentes. A fonte de livre energia pode estar relacionada a uma velocidade de deriva associada ao gradiente, como na Eq. (4.12), e a instabilidade pode ser chamada de instabilidade de desvio. Além disso, desde a relação geral de dispersão na Eq. (4.11), com u_B e u_{dey} ambos definidos para zero, é frequentemente associado com ondas magnetosônicas rápidas, Esipchuck (1976) propôs o nome *ondas magnetosônicas de deriva*. De um ponto de vista prático, essas ondas não representam, em princípio, uma formidável problema para a operação do propulsor Hall, já que o propulsor é nominalmente operado no regime ótimo com um perfil de campo magnético que não favorece sua proeminência durante a maior parte da descarga.

4.2.4 Oscilações na faixa de frequências 20–100 kHz

Nessa faixa temos 2 tipos de oscilações, as que são relacionadas com colisões com as partículas neutras e as que são relacionadas com a ionização.

4.2.4.1 Instabilidade relacionada ao plasma não homogêneo e fracamente ionizado

A relação de dispersão na Eq. (4.12) foi derivado de uma descrição sem colisão e embora seja capaz de descrever as oscilações azimutais em uma faixa de frequência ligeiramente inferior, não leva a modos instáveis nesta banda além da propagação azimutal. Adicionando os efeitos de colisões às equações governantes que produzem a Eq. (4.12), complicaria muito a derivação da relação de dispersão. Para simplificar e ilustrar supõe-se que o campo elétrico aplicado é desprezado e no intervalo $\nu_i < \omega < \nu_e$ temos um caso relevante de oscilações. As oscilações com frequência e taxa de crescimento dados por

$$\omega_r \simeq \gamma \simeq k \left(\frac{T_e}{M_i} \right)^{1/2}, \quad (4.16)$$

que lembra a velocidade iônica acústica ($u_{ia} = (T_e/M_i)^{1/2}$), podem se tornar instáveis se

$$L_{\nabla B} \leq \frac{T_e}{\omega_{ce} m_e} \left(\frac{M_i}{T_e} \right)^{1/2}, \quad (4.17)$$

que equivale afirmar que a não-homogeneidade deve ser forte o suficiente para que $L_{\nabla B}$ seja menor do que o raio de ciclotron característico r_{ca} baseado na velocidade acústica do íon e na frequência de íons ciclotrônicos ($r_{ca} \equiv u_{ia}/\omega_{ci}$). Isso junto da Eq. (4.16) no intervalo proposto

temos oscilações limitadas por

$$\nu_i < \omega_r \leq \omega_{\nabla n_e} < \nu_e, \quad (4.18)$$

em que $\omega_{\nabla n_e}$

$$\omega_{\nabla n_e} \equiv \frac{T_e k}{m_e \omega_{ce} L_{\nabla n_e}}. \quad (4.19)$$

4.2.4.2 Instabilidade relacionada á ionização

Devido à ionização, a densidade eletrônica pode aumentar em determinadas regiões. Devido à presença de correntes através dessa região, a evolução e absorção de energia são alteradas. Se o aumento de energia é maior que a energia transferida dos elétrons através de colisões com os neutros, a densidade eletrônica pode crescer ainda mais devido à sua dependência da temperatura, levando a um processo instável.

Smirnov (1981) trata do caso da instabilidade de ionização de um plasma fracamente ionizado em campos elétricos e magnéticos cruzados. Ao estabelecer uma equação de balanço para a energia eletrônica por unidade de volume, levando em conta a energia transferida dos elétrons para os neutros através de colisões elásticas, e a relação entre perturbações da temperatura e densidade é dada pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_e T_e \right) = \tilde{n}_e m_e u_{de}^2 \nu_e \left[\frac{(\omega_{ce} + \nu_e)^{1/2}}{\nu_e} - 1 - \frac{T_e}{\epsilon_i} \right], \quad (4.20)$$

que produz o critério de instabilidade

$$\left(\frac{2T_e}{\epsilon_i} \right)^{1/2} \leq \Omega_e, \quad (4.21)$$

em que ϵ_i é o primeiro potencial de ionização das partículas neutras.

Embora o caso tratado por Smirnov pareça bastante semelhante ao propulsor Hall, existem duas grandes diferenças. Primeiro, houve uma suposição simplificadora de que ν_e é amplamente independente do T_e . Segundo, nessa derivação havia uma permissão para um componente y do campo elétrico da ordem $V_e E_x$ que forçaria a corrente de elétrons a fluir quase axialmente.

4.2.5 Oscilações na faixa de frequências 70–500 kHz

As oscilações nesta banda de frequência são frequentemente chamadas de *transient-time oscillations*, porque elas têm frequências que correspondem aproximadamente a u_i/L , a escala de tempo da transição do ion no canal. Essas ondas foram primeiramente medidas e caracterizadas experimentalmente por Esipchuck (1974). Elas aumentam de importância com o aumento de B_r^*

e sua amplitude pode chegar a 30% da tensão de descarga. Sua distribuição de amplitude sobre o canal depende fortemente do perfil de B_r . Seu espectro geral parece ser bastante independente de \dot{m} em U_d fixo.

O nome "*transient-time*" é bastante apropriada, já que uma frequência ω_r de:

$$\omega_r \simeq k_x u_i \frac{b}{b+1}, \quad (4.22)$$

em que $b \equiv u_B/|u_{dey}|$, pode ser obtido a partir da relação de dispersão na Eq. (4.12) para a seguinte condição:

$$k_y^2 \ll k_x^2, \quad (4.23)$$

o que implica uma onda quase axialmente propagada e a desigualdade

$$u_B > \frac{1}{2}[(u_{dey}^2 + u_1^2)^{1/2} - |u_{dey}|]. \quad (4.24)$$

Essas oscilações são ondas eletrostáticas quasiaxiais com uma faixa relativamente ampla e mista. Elas tendem a ser relativamente turbulentas e supostamente desempenham um papel importante na regulação do transporte de plasma. Suas características e dependências são bem previstas pela teoria linear de ondas magnetosônicas guiadas por gradientes com propagação quase axial ($k_y \ll k_x$). Fisicamente, elas são devidas ao acoplamento do $k_x u_i$ do feixe de luz às oscilações causadas pela falta de homogeneidade.

4.2.6 Oscilações na faixa de frequências 0.5-5 MHz e superior

As oscilações em frequências mais altas se tornam mais proeminentes conforme B_r^* é aumentado, como ilustrado na Tabela 4.1. Mesmo para operação no regime ótimo, oscilações e ruídos com frequências próximas e mais altas que aquelas das oscilações *transient-time* são mais importantes que as frequências mais baixas e as ondas azimutais de baixa frequência, que se tornam muito fracas. A propagação é principalmente azimutal como a onda de deriva azimutal de baixa frequência. A velocidade de fase está próxima de u_{dey} e está na direção y negativa (de acordo com o sistema da figura 2.2). Uma inversão da direção do campo reverteria a direção da propagação. Enquanto a amplitude é aumentada com o aumento de B_r^* , a frequência fundamental cai.

O modo de alta frequência teoricamente previsto foi chegado também através da relação de dispersão da Eq. (4.12) depois de mais hipóteses simplificadoras. O fato de a mesma equação ter algumas suposições limítrofes, poderia descrever os modos observados em três faixas de frequência muito diferentes: ondas azimutais de frequência mais baixa, oscilações quasi-axiais *transient-time* e esse modo azimutal de alta frequência.

O caso de um plasma fracamente ionizado em um campo elétrico e magnético cruzado foi tratado por Simon (1963). Nesse trabalho foi desenvolvido a descrição que usamos na subseção

das oscilações na faixa 20-100 kHz de um plasma não-homogêneo fracamente ionizado com o crescimento do efeito de um campo elétrico aplicado. Seguindo a suposição de Simon de que o plasma é finito apenas na direção x . Isso não afetaria muito a análise de ondas, já que o importante são os 'modos de flauta', ou seja, $k_z = 0$ e $k = \pm k_y$ que correspondem aos modos azimutais. Assumindo que o gradiente mais relevante é o da densidade de partículas carregadas, temos as equações de momento para os fluxos de íons e elétrons dado por (SIMON, 1963):

$$\Gamma_x = \left(-D_{\perp}^{\pm} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \mu_{\perp}^{\pm} n E_x \right) \mp \Omega_{\pm} \left(-D_{\perp}^{\pm} \frac{\partial n}{\partial z} \pm \mu_{\perp}^{\pm} n E_z \right); \quad (4.25)$$

$$\Gamma_y^{\pm} = -D_{\parallel}^{\pm} \frac{\partial n}{\partial y} \pm \mu_{\parallel}^{\pm} n E_y; \quad (4.26)$$

$$\Gamma_z^{\pm} = \left(-D_{\perp}^{\pm} \frac{\partial n}{\partial z} \pm \mu_{\perp}^{\pm} n E_z \right) \mp \Omega_{\pm} \left(-D_{\perp}^{\pm} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \mu_{\perp}^{\pm} n E_x \right), \quad (4.27)$$

em que os íons e os elétrons são denotados pelos "+", "-", Ω é o parâmetro Hall. Mudando as coordenadas do formalismo de Simon para os mesmos da Fig. 2.2 aplicando a transformação $x \rightarrow x, y \rightarrow z$ e $z \rightarrow -y$. Desprezando o gradiente de temperatura nas equações acima simplifica bastante o problema, pois não é necessária uma equação de energia. Usando a equação de conservação de fluxo

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_{\pm} = 0. \quad (4.28)$$

Simon usando o método de Kadomtsev-Nedospasov, impondo as devidas manipulações e desprezando os modos "não-flauta" (escolhendo $k_z = 0$), temos as seguintes equações de frequência e taxa de crescimento:

$$\omega_r = \frac{\Psi k_y \frac{dn_0}{dx} [\Omega_i \mu_{\perp i} - \Omega_e \mu_{\perp e}] - \bar{n}_0 (Y_i - Y_e) k_y \Theta}{\bar{n}_0^2 (Y_i + Y_e)^2 + k_y^2 \left(\frac{dn_0}{dx} \right)^2 [\Omega_i \mu_{\perp i} - \Omega_e \mu_{\perp e}]}; \quad (4.29)$$

$$\gamma = \frac{\Psi \bar{n}_0 (Y_i + Y_e)^2 + k_y^2 \Theta \frac{dn_0}{dx} [\Omega_i \mu_{\perp i} - \Omega_e \mu_{\perp e}]}{\bar{n}_0^2 (Y_i + Y_e)^2 + k_y^2 \left(\frac{dn_0}{dx} \right)^2 [\Omega_i \mu_{\perp i} - \Omega_e \mu_{\perp e}]}, \quad (4.30)$$

com

$$\Psi = -\bar{n}_0 (Y_e X_i + Y_i X_e); \quad (4.31)$$

$$X_s \equiv \lambda^2 D_{\perp s}; \quad (4.32)$$

$$Y_s \equiv \Lambda^2 \mu_{\perp s} ; \quad (4.33)$$

$$\Lambda^2 \equiv k_y^2 + \left(\frac{\pi}{l} \right) ; \quad (4.34)$$

$$\Theta \equiv -\bar{E}_{0x} \bar{n}_0 [\Omega_i \mu_{\perp i} Y_e - \Omega_e \mu_{\perp e} Y_i] ; \quad (4.35)$$

$$+ \frac{dn_0}{dx} \left[\Omega_e \mu_{\perp e} X_i - \Omega_i \mu_{\perp i} X_e + \frac{1}{2} \mu_{\perp i} \mu_{\perp e} (\Omega_i + \Omega_e) \frac{d\bar{E}_0}{dx} \right] , \quad (4.36)$$

tal que l é o mesmo que mostrado no capítulo 3 (L), a extensão finita do plasma na direção x .

Nota-se que oscilações azimutais na faixa de algumas dezenas de MHz podem ser excitadas. Parece ser um modo bastante diferente do modo azimutal de alta frequência descoberto por Esipchuck (1976), além das frequências serem mais altas o modo é excitado em regiões onde $\partial B_r / \partial x > 0$.

5 EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA

As equações foram propostas no ano de 1925 por dois estudiosos, Vito Volterra e Alfred J. Lotka (veja revisão em MURRAY, 2002), para descrever a dinâmica de duas populações baseado no sistema de predador e presa.

Considere duas espécies no mesmo habitat. A primeira (a presa) é o principal recurso para a outra (o predador). Supomos que, na ausência do predador, a presa passaria por um crescimento malthusiano com uma taxa positiva $a > 0$, enquanto o predador, na ausência da presa, seria extinto com uma taxa negativa $d < 0$. Aqui a sobrevivência do predador depende da abundância da presa e a presa tem o predador como o único fator de controle. Estas são suposições extremas, mas enfatizam efeitos típicos desse tipo de interação entre espécies. No que diz respeito ao mecanismo de predação, precisa-se modelar tanto o abate das presas quanto o efeito sobre o crescimento dos predadores. Para o número de presas consumidas pelos predadores por unidade de tempo, temos:

$$- bN(t)P(t) , \quad (5.1)$$

e para o acréscimo total de novos predadores por unidade de tempo

$$\gamma bN(t)P(t) , \quad (5.2)$$

em que $N(t)$ e $P(t)$ são as populações de presas e predadores, respectivamente, por unidade de tempo. Em (5.1) o parâmetro b é a taxa de decréscimo das presas. Em (5.2) o parâmetro γ , chamado de taxa de conversão, junto ao parâmetro b significam o número pró-capita de novos predadores, nascidos na unidade de tempo, para cada presa consumida na mesma unidade de tempo, ou seja, a taxa de crescimento de predadores que podemos chamar de $c = \gamma b$.

Com isso, temos as seguintes equações que governam o modelo:

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)P(t) ; \quad (5.3)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -dP(t) + cN(t)P(t) . \quad (5.4)$$

Interpretando o sistema em termos de taxas de nascimento e morte, de fato, as taxas de crescimento de presas e predadores podem ser descritas:

$$F(N, P) = a - bP ; \quad (5.5)$$

$$G(N, P) = cN - d, \quad (5.6)$$

e, separando a taxa de crescimento intrínseco da presa como $a = \beta_0 - \mu_0$, podemos identificar a respectiva taxa de fertilidade e mortalidade por

$$\beta^N(N, P) = \beta_0; \quad (5.7)$$

$$\mu^N(N, P) = \mu_0 + bP, \quad (5.8)$$

e

$$\beta^P(N, P) = cN; \quad (5.9)$$

$$\mu^P(N, P) = d, \quad (5.10)$$

Além disso, destes podemos obter os respectivos números básicos de reprodução

$$R_0^N(N, P) = \frac{\beta_0}{\mu_0 + bp}; \quad (5.11)$$

$$R_0^P(N, P) = \frac{cN}{d}, \quad (5.12)$$

que agora dependem do tamanho da outra população. Além disso, veremos que a solução é limitada, a priori, para que essa solução seja realmente global. Isso certifica a boa apresentação do modelo.

Para ter uma visão da solução, manipulamos as equações (5.3) e (5.4). multiplicando a primeira equação por $d/N(t)$ e a segunda por $a/P(t)$, obteremos

$$\frac{d}{dt}(d \ln(N(t)) + a \ln(P(t))) = -dbP(t) + acN(t), \quad (5.13)$$

além disso, multiplicando a primeira equação por c e a segunda por b , obtemos

$$cN'(t) + bP'(t) = acN(t) - dbP(t), \quad (5.14)$$

subtraindo 5.13 de 5.14 temos

$$\frac{d}{dt}(cN(t) - d \ln(N(t)) + bP(t) - a \ln(P(t))) = 0, \quad (5.15)$$

de modo que a quantidade entre parênteses é constante ao longo das trajetórias, e tomando expo-

nenciais achamos

$$N^d(t)e^{-cN(t)}P^a(t)e^{-bP(t)} = C, \quad (5.16)$$

em que C é uma constante que depende de N_0 e P_0 .

No espaço de fase N, P temos uma curva fechada vinculada, que varia dependendo dos valores N_0, P_0 , como mostrado na Fig. 5.1.

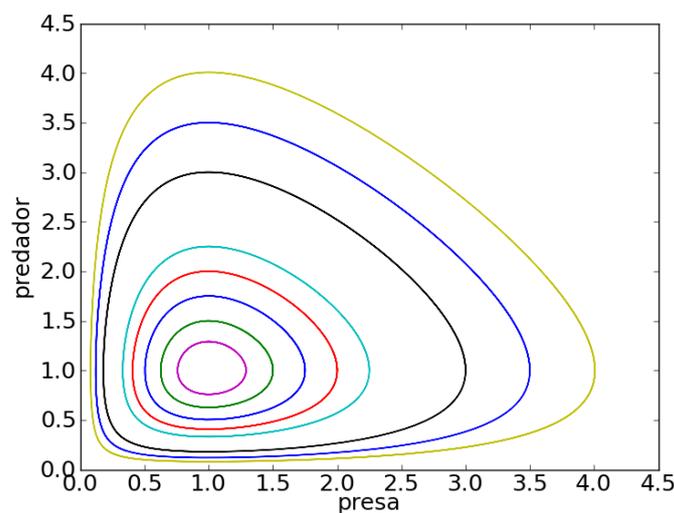


Figura 5.1: Espaço de fase de predador/presa com $a=b=c=d=1$ para várias condições iniciais diferentes.

E a Fig. 5.2 mostra a variação da das populações através do tempo em que interagem.

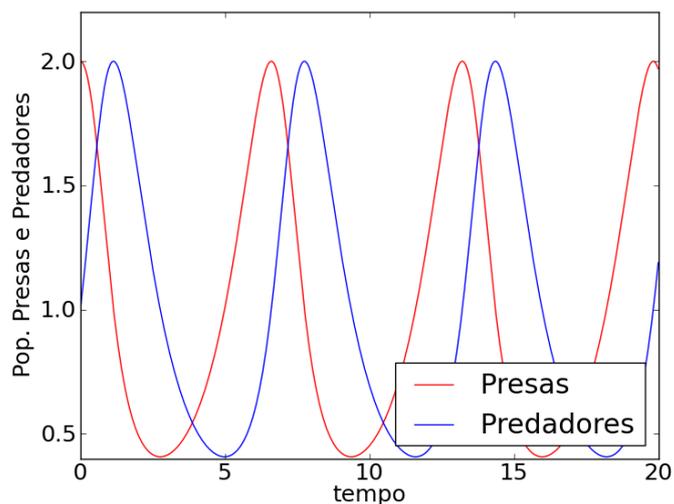


Figura 5.2: Solução típica para $P(t)$ e $N(t)$, com os mesmos parâmetros da Fig. 5.1.

Seja T o período de uma solução do sistema (5.3 e 5.4), calculemos a média de $N(t)$ e $P(t)$ em um período.

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T N(s) ds ; \quad (5.17)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(s) ds , \quad (5.18)$$

e das equações do sistema (5.3) e (5.4) temos

$$0 = \ln \frac{N(T)}{N(0)} = \int_0^T (a - bP(s)) ds = aT - b\bar{P}T ; \quad (5.19)$$

$$0 = \ln \frac{P(T)}{P(0)} = \int_0^T (-d - cN(s)) ds = -dT - c\bar{N}T , \quad (5.20)$$

então

$$\bar{N} = \frac{d}{c} ; \quad (5.21)$$

$$\bar{P} = \frac{a}{b} , \quad (5.22)$$

que no espaço de fase é o único ponto de equilíbrio não trivial do sistema (5.3) e (5.4), cujo ciclos do espaço de fase giram em torno desse ponto $\bar{E}^* = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

Ainda podemos acrescentar um fator de morte ao sistema exercido de meios externos (como caça, poluição, etc), αE para a morte das presas e βE para morte dos predadores, onde E representa o parâmetro de esforço exercido pelo meio externo. Temos então o sistema:

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - \alpha EN(t) - bN(t)P(t) ; \quad (5.23)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -dP(t) - \beta EP(t) + cN(t)P(t) . \quad (5.24)$$

Desde que $r > \alpha E$, esses termos adicionais não modificam a estrutura da dinâmica, mas introduzem mudanças nos parâmetros do sistema. O ponto \bar{E}^* então se torna \bar{E}^{**} com

$$\bar{N}^{**} = \frac{d + \beta E}{c} ; \quad (5.25)$$

$$\bar{P}^{**} = \frac{a - \alpha E}{b} , \quad (5.26)$$

e podemos ver na Fig. 5.3 que com suas variações uniformemente proporcionais ao numero de presas e predadores, respectivamente, a média é diminuída para os predadores e aumentada para

as presas.

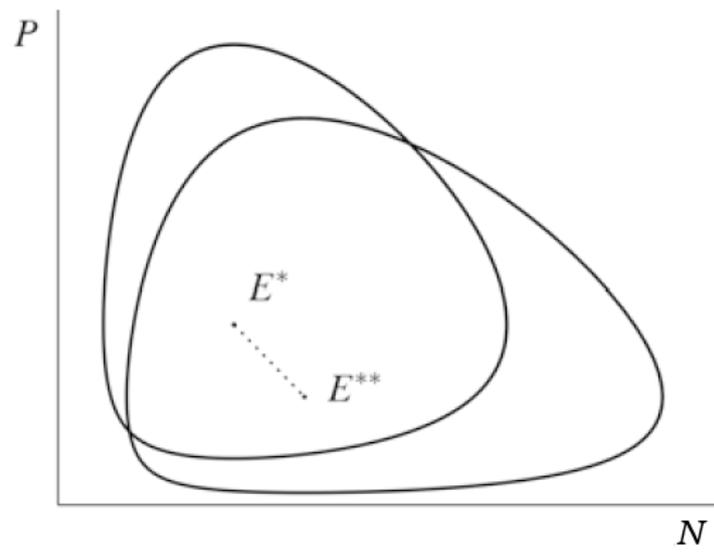


Figura 5.3: Variação da curva com o acréscimo do esforço de morte externo.
Fonte: IANNELLI, 2014.

6 LOTKA-VOLTERRA APLICADA AO PROPULSOR

Ao notar que a ionização de um gás pode ser comparada a dinâmica de duas populações, podemos relacionar a fenomenologia da ionização no propulsor Hall para baixas frequências com o modelo de presa e predador, onde temos:

- Partículas do gás propelente são as presas;
- Os elétrons são os predadores;
- A densidade de elétrons é assumida igual a densidade de íons pela hipótese de quase neutralidade;
- A velocidade dos íons que escapam - sua taxa de mortalidade - é constante;
- A velocidade de entrada de neutros - sua taxa de nascimento - é constante;
- O termo de decaimento para neutros e o termo de crescimento para elétrons/íons são iguais e resultam unicamente da ionização.

O modelo que consiste em um tratamento híbrido transitório unidimensional (1D) do transporte de elétrons e íons (fluido eletrônico e equação cinética sem colisão para os íons) aponta para uma instabilidade causada por uma depleção periódica e reabastecimento do neutro próximo à saída. Como o campo magnético nessa região é grande, a baixa condutividade elétrica associada leva a um aumento no campo elétrico necessário para manter a continuidade da corrente. A ionização aprimorada resultante esgota a densidade neutra, fazendo com que a jusante da frente de fluxo neutro se mova para montante em uma região onde a taxa de ionização é menor. Esta diminuição na taxa de ionização na montante causará uma diminuição no fluxo de elétrons para a saída, o que causa a diminuição da ionização e efetivamente traz de volta a jusante da frente de gás neutro. O ciclo completo será reiniciado, causando uma oscilação cuja frequência cai no intervalo de 15 a 22 kHz. Essa oscilação é chamada de "*breathing mode*". As previsões do modelo dessas oscilações parecem estar em boa concordância qualitativa com dados experimentais (CHOUEIRI, 2001) e está de acordo com o comportamento observado descrito na seção 4.2.1, com a exceção de que o modelo não mostra um amortecimento dessas oscilações no regime ótimo. Isso também corrobora os resultados obtidos independentemente do modelo numérico de Fife (1997) que usou uma descrição bidimensional na qual os elétrons são tratados como um fluido, um código de partículas em células (PIC) foi usado para as espécies pesadas e os efeitos da condutividade da parede foram incluídos. Essas simulações, quando comparadas a um modelo analítico simples de flutuação da zona de ionização, revelaram uma flutuação do tipo predador-presa.

Contabilizando o balanço de partículas dentro de uma região de ionização, de comprimento axial do plasma L , o modelo predador-presa é descrito pelas seguintes equações de conservação das espécies

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \beta n_i n_n - n_i \frac{v_i}{L}; \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} = -\beta n_i n_n + n_n \frac{v_n}{L}, \quad (6.2)$$

em que temos β a taxa de ionização que depende da temperatura do elétron, n_n e n_i as densidades das partículas neutras e íons/elétrons, respectivamente, e v_n e v_i as velocidades das partículas neutras e íons/elétrons, respectivamente.

Linearizando as duas equações para pequenas perturbações n'_i , n'_n e combinando-as obtemos a equação do oscilador hamônico não amortecido com frequência dada por (6.4)

$$\frac{\partial n'_i}{\partial t} + \beta^2 n_{i,0} n_{n,0} n'_i = 0; \quad (6.3)$$

$$\omega = (\beta^2 n_{i,0} n_{n,0})^{1/2} = \left(\frac{n_{i,0}}{n_{i,0} n_{n,0}} \right)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Com os termos de ordem zero na perturbação, $\beta n_{n,0} = v_i/L$ e $\beta n_{i,0} = v_n/L$ temos que a frequência pode ser escrita como

$$\omega = \frac{1}{L} (v_i v_n)^{1/2}, \quad (6.5)$$

que mostra que ela varia inversamente com o comprimento da região de ionização.

6.1 MODELO PARA BAIXAS FREQUÊNCIAS

Espécies Carregadas

A formulação de fluido unidimensional quasineutro é adotada para fornecer uma imagem razoavelmente precisa do mecanismo de oscilação. As magnitudes de plasma representam valores médios radiais e a interação do plasma com as paredes laterais é modelada por meio de termos de fonte efetiva. O modelo de plasma inclui as equações de continuidade e momento axial para íons e elétrons, bem como as equações de momento e energia azimutais para elétrons

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_{xe}) = \beta n_n n_i - \nu_{iw} n_i; \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = \beta n_n n_i - \nu_{iw} n_i; \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_i m_i v_i) + \frac{\partial}{\partial x}(n_i m_i v_i^2) = n_i e E + \beta n_n n_i m_i v_n - \nu_{iw} n_i m_i v_i ; \quad (6.8)$$

$$e E = -\frac{1}{n_i} \frac{\partial}{\partial x}(n_i T_e) - \nu_e m_e v_{xe} - \omega_{ce} m_e v_{\vartheta e} ; \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_i v_{\vartheta e}) + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_{xe} v_{\vartheta e}) = \omega_{ce} n_i v_{xe} - \nu_e n_i v_{\vartheta e} ; \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3}{2} n_i T_e + \frac{1}{2} n_i m_e (v_{xe}^2 + v_{\vartheta e}^2) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{5}{2} n_i v_{xe} T_e + \frac{1}{2} n_i v_{xe} m_e (v_{xe}^2 + v_{\vartheta e}^2) \right] \\ & = -\beta n_n n_i \gamma_i \epsilon_i - \nu_{ew} n_i \epsilon_w - n_i v_{xe} e E , \end{aligned} \quad (6.11)$$

em que ν_{iw} é a frequência de colisão para íons que impactam as paredes, E é o campo elétrico axial, $\omega_{ce} \equiv eB/m_e$ é a frequência ciclotrônica do elétron associada ao campo magnético local B , v_{xe} e $v_{\vartheta e}$ são, respectivamente, as velocidades médias axiais e azimutais dos elétrons, T_e é a temperatura dos elétrons, $\gamma_i \epsilon_i$ é o custo efetivo de ionização, m_e e m_i referem-se à massa de elétrons e íons, respectivamente. A frequência de colisão de transferência de momento total para elétrons, ν_e , as frequências de colisão com a parede de elétrons e íons, ν_{ew} e ν_{iw} , e a perda de energia efetiva nas paredes, ϵ_w são dadas por (6.15), (6.13), (6.12), (6.14), respectivamente.

$$\nu_{iw} = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{1}{R_2 - R_1} \sqrt{\frac{T_e}{m_i}} & \text{for } x \leq L \\ 0 & \text{for } x > L \end{cases} ; \quad (6.12)$$

$$\nu_{ew} = \frac{\nu_{iw}}{1 - \sigma} ; \quad (6.13)$$

$$\epsilon_w = 2T_e + \frac{1}{2} m_e (v_{xe}^2 + v_{\vartheta e}^2) + (1 - \sigma) e \Phi_w ; \quad (6.14)$$

$$\nu_e = \beta^{(m)} n_n + \alpha_B \omega_{ce} + \nu_{ew} , \quad (6.15)$$

em que $\beta^{(m)}$ é a taxa de transferência de momentum assumida para colisões elétron-neutro e α_B é o coeficiente de difusão eletrônica do tipo Bohm. Ambos são constantes. R_1 e R_2 são os raios interno e externo do propulsor, σ é a produção efetiva de elétrons secundários oriundo das paredes. E ainda o potencial da bainha Φ_s dado por

$$\Phi_s = \frac{T_e}{e} \log \left[\sqrt{\frac{m_i}{2\pi m_e}} (1 - \sigma) \right]. \quad (6.16)$$

O modelo pressupõe implicitamente que a seção transversal A da coluna de descarga é constante. Subtraindo (6.6) de (6.7) vemos que a corrente no canal não depende de x .

$$I \equiv eAn_i(v_i - v_{xe}). \quad (6.17)$$

Eliminando o campo elétrico usando (6.9) temos o novo sistema de equações do plasma

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i) = n_i(\beta n_n - \nu_{iw}) = n_i h_1; \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_i m_i v_i) + \frac{\partial}{\partial x}(n_i m_i v_i^2 + n_i T_e) = n_i h_2; \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_i v_{\vartheta e}) + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_{xe} v_{\vartheta e}) = n_i h_3; \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_e^{3/2}}{n_i} \right) + v_{xe} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e^{3/2}}{n_i} \right) = \frac{1}{n_i} h_4, \quad (6.21)$$

e integrando (6.9), temos o potencial de descarga

$$U \equiv \int_{x=0}^{x=l} E dx = \int_{x=0}^{x=l} \left[-\frac{1}{en_i} \frac{\partial(n_i T_e)}{\partial x} + h_5 \right] dx, \quad (6.22)$$

em que todos os h_k são tais que $\partial h_k / \partial n_i = 0$, ou seja, são funções de x , n_n , v_i , v_{xe} , $v_{\vartheta e}$ e T_e . As equações acima são complementadas pelas condições de contorno

$$v_i|_{x=0} = -\sqrt{\frac{5}{3} \frac{T_e|_{x=0}}{m_i}}; \quad (6.23)$$

$$v_{\vartheta e}|_{x=l} = \frac{v_{xe} \omega_B}{\nu_e + \beta n_n - \nu_{iw}} \Big|_{x=l}; \quad (6.24)$$

$$T_e|_{x=l} = \text{const.} \quad (6.25)$$

em que as posições $x = 0$ e $x = l$, respectivamente, referem-se aos locais da borda da bainha do ânodo e do cátodo virtual. A equação (6.23) é a condição de Bohm para íons na borda da bainha do ânodo. A condição de contorno (6.24) para $v_{\vartheta e}$ deriva da aproximação local usual onde os termos inerciais são ignorados. Embora o problema possa ser formalmente fechado assumindo

uma fonte de corrente constante ($I = \text{const}$), uma condição de contorno de tensão constante mais realista é assumida,

$$U = \text{const.} \quad (6.26)$$

Modelo Quase-estável para Espécies Carregadas

De fato, abandonando completamente as derivadas temporais nessas equações, falha-se em fornecer um modelo consistente: é fácil ver que se houvesse uma solução constante com $I = I_0$ e $n_i = n_0$, então um número infinito de soluções estáveis válidas poderia ser gerado simultaneamente. variando I e n_i proporcionalmente a I_0 e n_0 . A raiz deste problema reside na suposição incorreta de que I e n_i atinjam um estado estável quando a densidade de neutros, n_n , é uma entrada arbitrária: na verdade, existe um estado estacionário bem definido apenas para a razão n_i/I e para a taxa de crescimento de I . Introduzindo assim as variáveis ν_I e \mathbf{n} definidas pela Eq. (6.33) nas Eqs. (6.17)–(6.22) e, posteriormente, descartando todas as derivadas explícitas de tempo, obtém-se o seguinte modelo quase-estável:

$$eA\mathbf{n}(v_i - v_{xe}) = 1; \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{n}v_i) = \mathbf{n}h_1 - \mathbf{n}\nu_I; \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{n}m_i v_i^2 + \mathbf{n}T_e) = \mathbf{n}h_2 - \mathbf{n}m_i v_i \nu_I; \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{n}v_{xe} v_{\vartheta e}) = \mathbf{n}h_3 - \mathbf{n}v_{\vartheta e} \nu_I; \quad (6.30)$$

$$v_{xe} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e^{3/2}}{\mathbf{n}} \right) = \frac{1}{\mathbf{n}} h_4 + \frac{T_e^{3/2}}{\mathbf{n}} \nu_I; \quad (6.31)$$

$$U = \int_{x=0}^{x=l} \left[-\frac{1}{e\mathbf{n}} \frac{\partial(\mathbf{n}T_e)}{\partial x} + h_5 \right] dx; \quad (6.32)$$

$$\nu_I \equiv \frac{1}{I} \frac{dI}{dt}, \quad \mathbf{n} \equiv \frac{n_i}{I}. \quad (6.33)$$

Diferentemente da forma de estado estável de Eqs. (6.17)–(6.26), o sistema atual está bem posicionado se $n_n(t, x)$ for uma entrada arbitrária. Nem I nem n_i aparece explicitamente no modelo atual, o que mostra que a solução para baixas frequências é determinada em termos de ν_I e \mathbf{n} .

Transporte de Neutros

A dinâmica do gás neutro é descrita por um modelo de advecção simples, assumindo que a velocidade axial média dos neutros é constante e igual à velocidade térmica na alimentação do gás ($v_n = \text{const.}$). Esta suposição poderia ser melhorada incluindo o efeito de difusão nas paredes, a aparente aceleração inerente ao esgotamento preferencial de neutros de baixa velocidade por ionização e a acomodação térmica incompleta de íons neutralizados nas paredes. Os dois primeiros efeitos podem ser responsáveis por um aumento na velocidade média na ordem de 50% entre a alimentação de gás e o final da zona de ionização (BARRAL, 2009).

Como eles não parecem afetar qualitativamente o mecanismo do *Breathing Mode* apresentado por modelos baseados em transporte simples de advecção, esses efeitos são negligenciados por uma questão de simplicidade. O transporte de neutros, portanto, reduz a uma equação de continuidade única,

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial n_n}{\partial x} = -\beta n_n n_i + \nu_{iw} n_i . \quad (6.34)$$

A densidade de neutros no ânodo ($x = 0$) é principalmente definida pelo fluxo do propelente injetado com uma pequena contribuição de íons recombinados na superfície do ânodo, levando à condição de contorno

$$n_n|_{x=0} = \frac{1}{v_n} \left(\frac{\dot{M}}{Am_i} - (n_i v_i)|_{x=0} \right) , \quad (6.35)$$

em que \dot{M} é a taxa de fluxo de massa do propelente injetado através do ânodo.

Ainda por (6.33) podemos reescrever (6.34) como

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial n_n}{\partial x} = -I(\beta n_n \mathbf{n} - \nu_{iw} \mathbf{n}) , \quad (6.36)$$

e à partir do estado quase-estável para espécies carregadas (6.27)-(6.32) pode-se obter uma relação que depende apenas de ν_I e n_n , e das condições de contorno (6.23-6.25) podemos escrever

$$\frac{\partial n_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial n_n}{\partial x} = -IS(\nu_I, n_n) , \quad (6.37)$$

em que S é um operador que atua em $\nu_I \in \mathbb{R}$ e $n_n : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, a produção de íons em um dado momento t_0 e localização x_0 é proporcional à corrente instantânea $I(t_0)$ e a um termo que depende apenas da taxa de crescimento instantâneo da corrente $\nu_I(t_0)$ e do perfil instantâneo $n_n(t_0, x)$ dentro de todo domínio. Da mesma forma, uma expressão alternativa da equação do potencial de descarga (6.32) pode ser obtida

$$U = \mathcal{U}(\nu_I, n_n) , \quad (6.38)$$

em que \mathcal{U} é um funcional atuando em $\nu_I \in \mathbb{R}$ e $n_n : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$. Para a condição de contorno $U = \text{const.}$ vemos que de 6.38, para manter constante a tensão de descarga, mudanças em n_n são acomodadas em

qualquer instante por $\nu_I \equiv d(\ln I)/dt$. Esta é uma descoberta importante que contradiz a visão comum de que essas mudanças são acomodadas pelo próprio I .

As equações (6.37) e (6.38) constituem uma generalização fiel das Eqs. (6.23)-(6.34). Para fechar este sistema de equações, uma ligeira simplificação é introduzida na Eq. (6.35) onde a contribuição de íons recombinados no ânodo é ignorada, levando à condição de contorno

$$n_n|_{x=0} = \text{const.} \quad (6.39)$$

6.2 DISPERÇÃO NAS VELOCIDADES

No problema em que as velocidades não são constantes, o modelo mudaria a cara e assim não podendo se assumir a simplicidade. Nas equações para partículas carregadas teríamos dependências nas velocidades dos campos elétrico e magnético, logo dependência da corrente, que já mudaria as equações para comparação com o modelo simples predador-presa.

7 ANÁLISE E RESULTADOS

A partir do problema para baixas frequências apresentado no capítulo anterior, podemos traduzi-lo para linguagem computacional pra testar o comportamento da interação entre partículas neutras e elétrons ao longo do tempo.

Usando o software MathWorks MATLAB, definimos para cada caso os valores das taxas de crescimento e decrescimento dos elétrons e neutros tais como descrito no Capítulo 5. Para a simulação foram definidos como padrão $a = 0.5$ para o crescimento do gás; $b = 0.01$ para o decrescimento do gás; $c = 0.01 + \Delta$ para o crescimento dos elétrons; $d = 0.5 + \Delta$ para o decrescimento dos elétrons, em que Δ é um valor aleatório de até 20% do valor inicialmente escolhido. O tempo foi definido até um valor de 200 unidades de tempo; A extensão do canal foi definida para 400 unidades de espaço; As densidades foram definidas como a raiz quadrada da função de distribuição Qui-quadrado aleatória, que gera números aleatórios a partir da distribuição do Qui-quadrado.

Calculou-se 5000 mil pontos para ver o comportamento das densidades ao longo do tempo para um dado caso. Como utilizamos o Δ como valor aleatório, foi feito o cálculo desse comportamento para 100 casos diferentes e feito a média entre todos os casos obtendo-se o gráfico da figura 7.1.

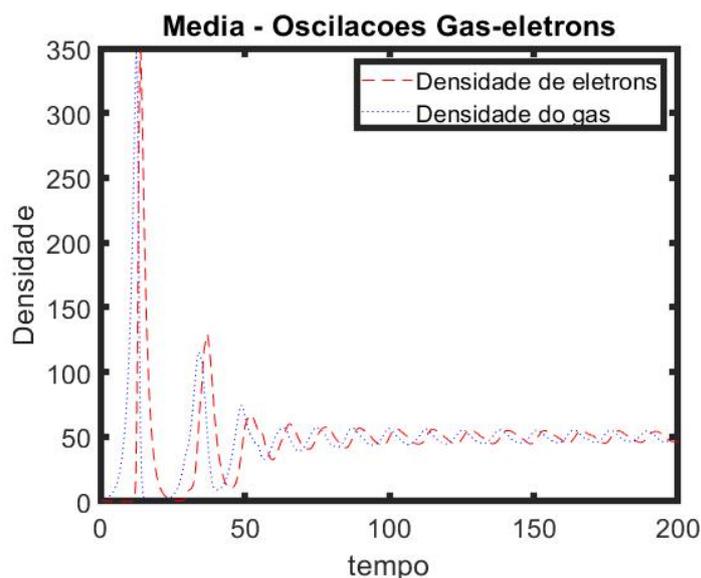


Figura 7.1: Média dos comportamentos das densidades ao longo do tempo na interação de ionização das partículas.

O mesmo foi feito também para o comportamento das densidades ao longo do canal, calculou-se 100 casos e feito a média entre eles obtendo-se a figura 7.2. Podemos ver que as densidades não oscilam tanto, mas temos problemas nas bordas. Retirando esses pontos de borda foi feito um zoom na imagem para melhor visualização das variações, mostrado em Fig. 7.3.

Para se ter uma noção dos valores obtidos foi comparado a parte periódica com os resultados obtidos por Barral (2009) na Fig. 7.4(b), chegando a conversão $1 \mu s \approx 0,113$ unidades de tempo (UT) e $10^{18} m^{-3} \approx 2,28$ unidades de densidade (UD).

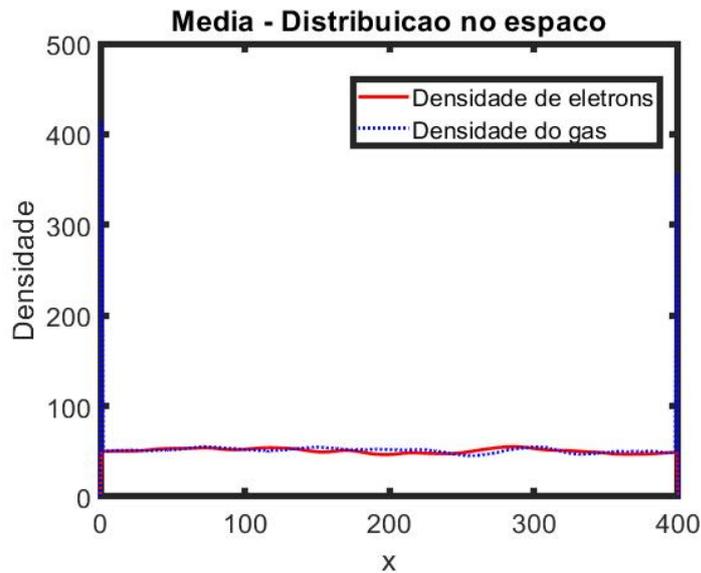


Figura 7.2: Média dos comportamentos das densidades ao longo do canal na interação de ionização das partículas.

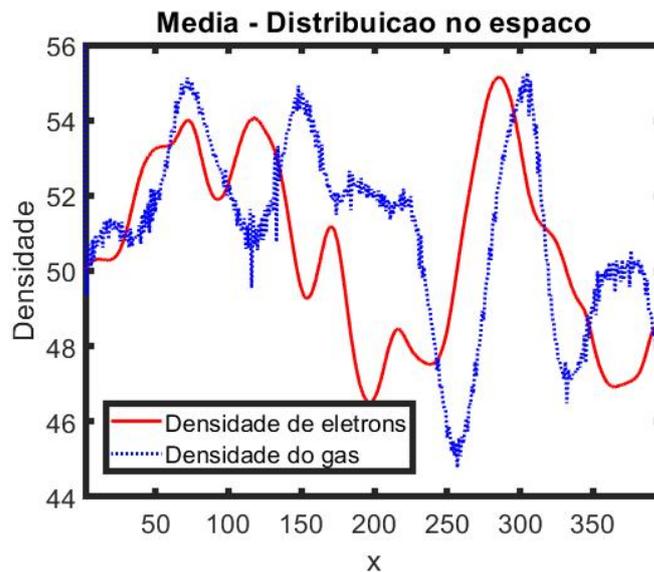


Figura 7.3: Média dos comportamentos das densidades ao longo do canal na interação de ionização das partículas, com zoom.

Então podemos ver na Fig. 7.1 que depois de $60,8 UT$, que é aproximadamente $538 \mu s$, as densidades se estabilizam no ciclo predador-presa. Os picos que aparecem antes dessa estabilização do ciclo, aparecem em $110,8 \mu s$ com uma densidade de $346,7 UD \approx 151,7 \times 10^{18} m^{-3}$ e em $302,3 \mu s$ com $115,4 UD \approx 50,5 \times 10^{18} m^{-3}$

Para a Fig. 7.3 temos que a densidade varia de $24,12 \times 10^{18} m^{-3}$ a $19,59 \times 10^{18} m^{-3}$ que está dentro dos valores de densidade da Fig. 7.4.

Calculou-se também o desvio padrão dos gráficos 7.1 e 7.2, mostrado na Fig 7.5. Então podemos ver que se as oscilações no canal variam na faixa de $19 - 24 \times 10^{18} m^{-3}$, seu desvio padrão está na faixa de $8,7 - 13,1 \times 10^{18} m^{-3}$ o que está numa faixa de 45% do valor médio. Para o desvio padrão no tempo,

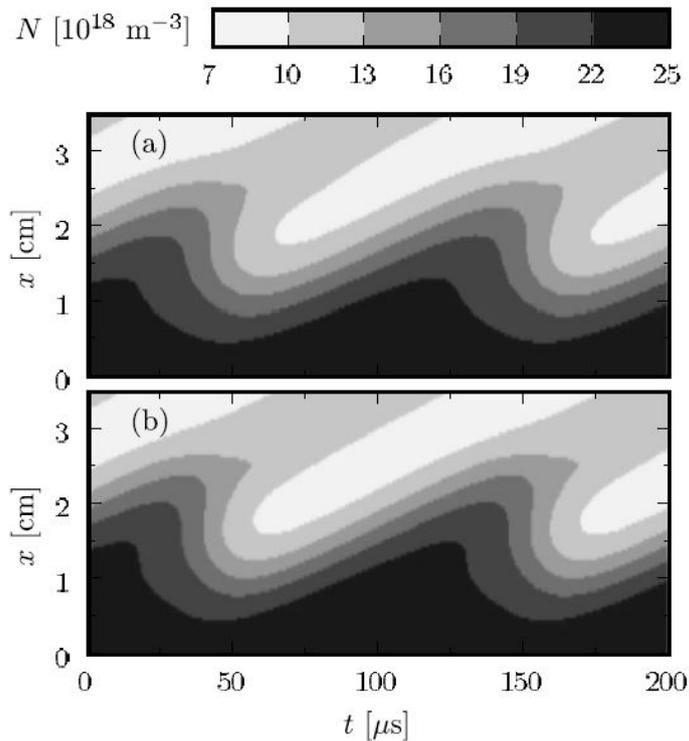


Figura 7.4: Evolução da densidade de neutros nas condições de $U = 180V$ e $B = 22mT$. Soluções para (a) o modelo totalmente dependente do tempo e (b) o modelo de baixa frequência..
 Fonte: BARRAL, 2009.

temos também um valor bem alto, de aproximadamente 60% do valor médio.

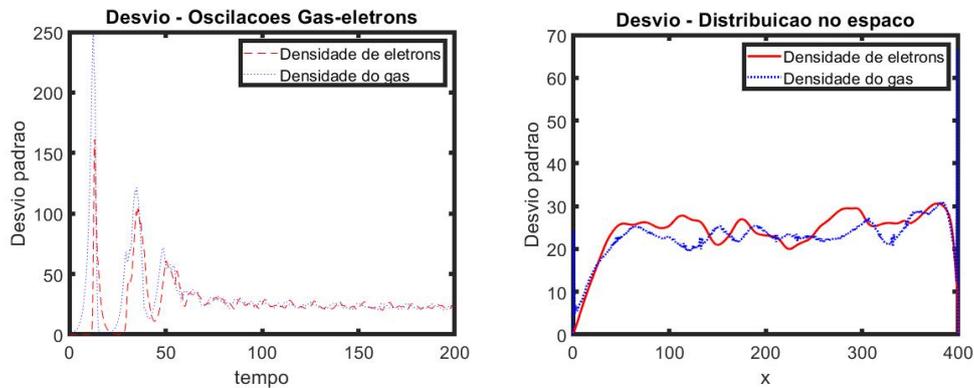


Figura 7.5: Desvio padrão das densidades no tempo e no ao longo do canal.

7.1 VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DE CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DAS POPULAÇÕES

A partir das equações 5.3 e 5.4 definimos os parâmetros de crescimento e decréscimo das densidades. Com o parâmetro a sendo a taxa de crescimento do gás, podemos associar ao fluxo do gás injetado no canal do propulsor, que por sua vez é constante. O parâmetro b sendo a taxa de decréscimo do gás,

podemos associar ao fenômeno da ionização, em que as partículas neutras do gás são ionizadas e viram partículas carregadas, então chamamos o parâmetro de eficiência de ionização do propulsor. O parâmetro c sendo a taxa de crescimento dos elétrons, podemos associar ao fluxo de elétrons liberado pelo cátodo que incide no canal do propulsor, ou seja, a eficiência do cátodo. O parâmetro d sendo a taxa de decrescimento dos elétrons, podemos associar à perda de elétrons no propulsor. Podendo ser de dois tipos, perda para as paredes e perda para o anodo.

7.1.1 Variação do parâmetro de fluxo do gás injetado

Mantendo os parâmetros da eficiência de ionização, do fluxo de elétrons no propulsor e da perda de elétrons os mesmos valores da simulação padrão, variamos o parâmetro do fluxo do gás para valores maiores e menores do que o valor padrão, para ver o comportamento das densidades. Obtendo-se os seguintes gráficos:

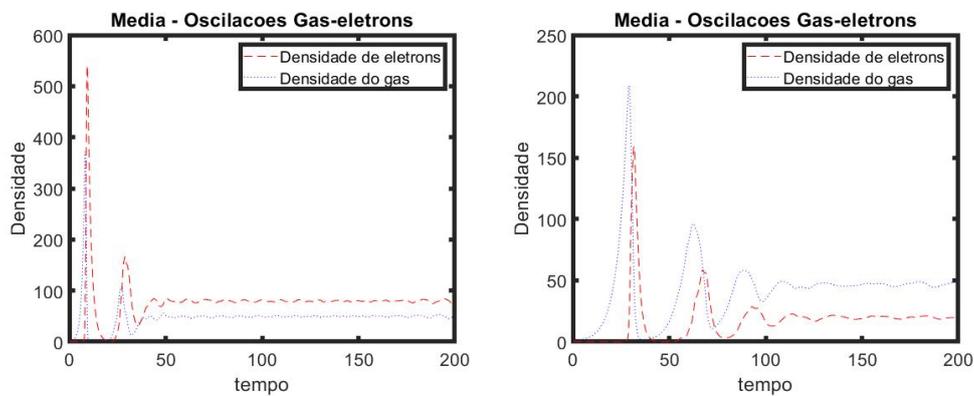


Figura 7.6: Primeiro gráfico com parâmetro $a = 0,8$ e segundo gráfico com parâmetro $a = 0,2$ para oscilação média ao longo do tempo.

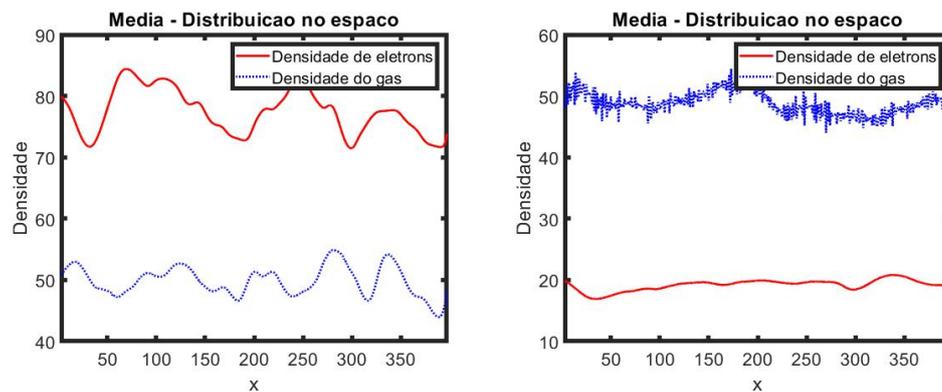


Figura 7.7: Primeiro gráfico com parâmetro $a = 0,8$ e segundo gráfico com parâmetro $a = 0,2$ para oscilação média ao longo do canal.

Podemos ver que a densidade de elétrons varia equivalentemente ao fluxo de gás injetado no canal, quanto mais gás injetado maior será a densidade de elétrons.

7.1.2 Variação do parâmetro da eficiência de ionização

Mantendo os outros parâmetros com os valores padrão, variamos apenas o parâmetro da eficiência de ionização, para valores maiores e menores do padrão. Obtendo-se os seguintes gráficos:

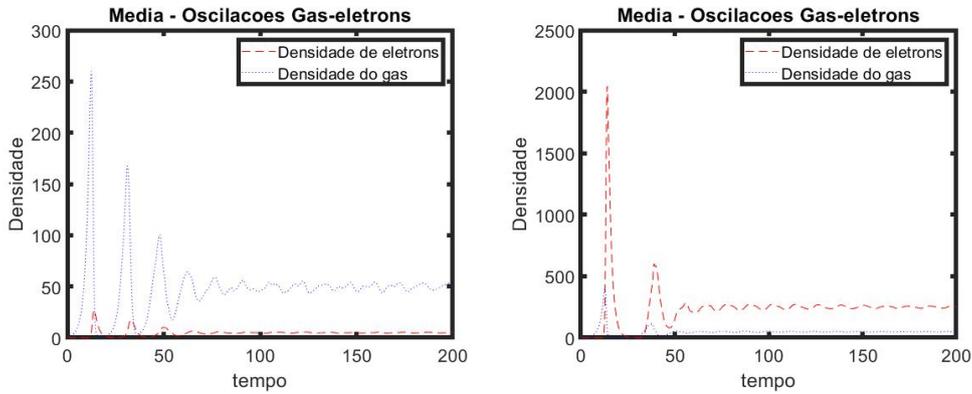


Figura 7.8: Primeiro gráfico com parâmetro $b = 0,1$ e segundo gráfico com parâmetro $b = 0,002$ para oscilação média ao longo do tempo.

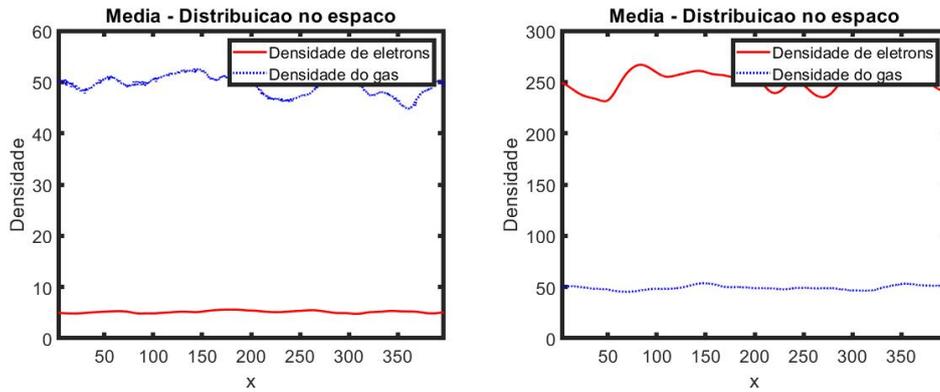


Figura 7.9: Primeiro gráfico com parâmetro $b = 0,1$ e segundo gráfico com parâmetro $b = 0,002$ para oscilação média ao longo do canal.

Aqui notamos que quanto maior a eficiência de ionização menor será a densidade dos elétrons, ou seja, a densidade de elétrons varia inversamente com a eficiência de ionização, que por sua vez depende do campo magnético \vec{B} .

7.1.3 Variação do parâmetro de fluxo de elétrons

Mantendo os outros parâmetros com os valores padrão, variamos apenas o parâmetro de entrada de elétrons no canal para valores maiores e menores que o especulado para o padrão. Obtendo-se os gráficos mostrados nas figuras 7.10 e 7.11.

Notamos que ao variar o fluxo de elétrons a densidade do gás varia inversamente, pois com uma maior ocorrência de elétrons maior será a probabilidade de ionização assim diminuindo a densidade de gás neutro. Essa taxa do fluxo de elétrons se dá pela eficiência e posicionamento do cátodo, como visto no capítulo 3.

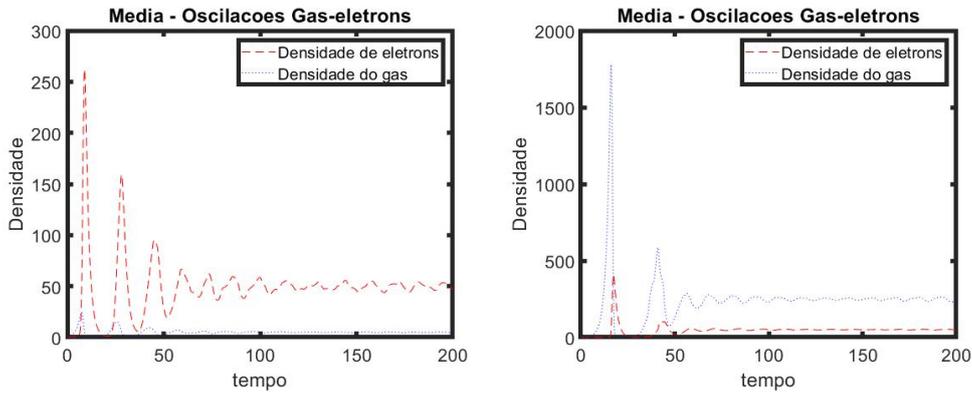


Figura 7.10: Primeiro gráfico com parâmetro $c = 0,1 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $c = 0,002 + \Delta$ para oscilação média ao longo do tempo.

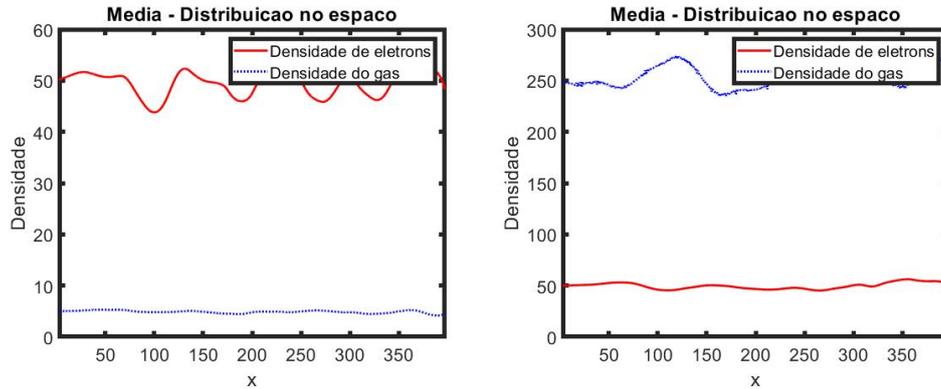


Figura 7.11: Primeiro gráfico com parâmetro $c = 0,1 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $c = 0,002 + \Delta$ para oscilação média ao longo do canal.

7.1.4 Variação do parâmetro de perda de elétrons

Mantendo os outros parâmetros com os valores padrão, variamos apenas o parâmetro de perda de elétrons para valores maiores e menores em comparação com o padrão, para ver o comportamento das densidades. Obtendo-se os gráficos mostrados nas figuras 7.12 e 7.13.

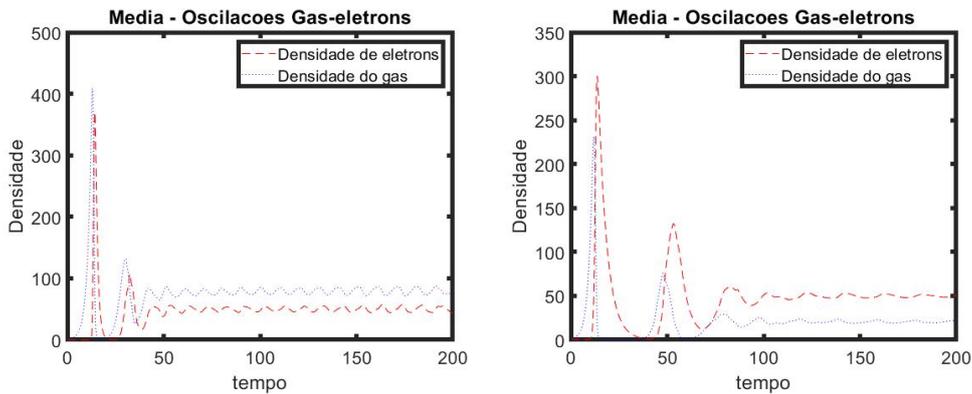


Figura 7.12: Primeiro gráfico com parâmetro $d = 0,8 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $d = 0,2 + \Delta$ para oscilação média ao longo do tempo.

Notamos que a densidade do gás varia equivalentemente à variação da perda de elétrons. Que nos

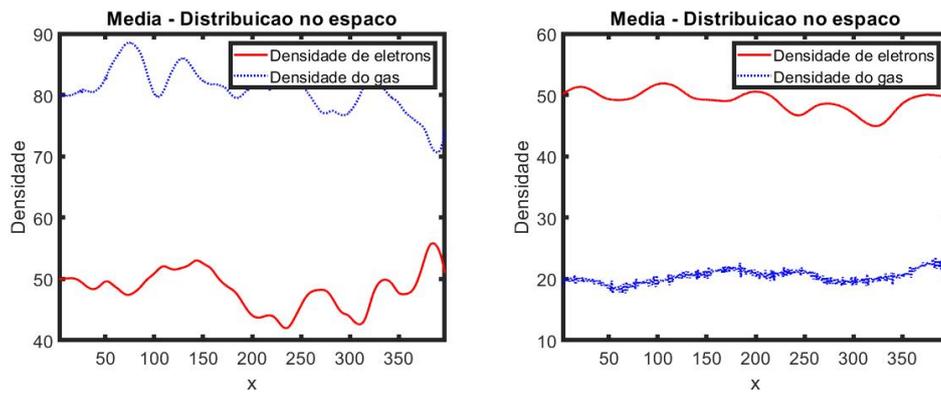


Figura 7.13: Primeiro gráfico com parâmetro $d = 0,8 + \Delta$ e segundo gráfico com parâmetro $d = 0,2 + \Delta$ para oscilação média ao longo do canal.

mostra que quanto maior a perda de elétrons maior será a densidade de gás neutro na interação, ou seja, maior a ineficiência do propulsor.

8 CONCLUSÃO

A aproximação de baixa frequência pode ser vista como um meio para isolar efetivamente fenômenos lentos de fenômenos rápidos e abruptos. A aproximação de baixa frequência pode ser determinada pelos valores instantâneos de I e n_n , o que tipicamente é feito com sondas e espectroscopia, que são as únicas quantidades dependentes do tempo explicitamente resolvidas, assim se encaixando no modelo de Lotka-Volterra.

O modelo de Lotka-Volterra, predador-presa, pressupõe implicitamente que as partículas neutras reabastecem o volume inteiro uniformemente e o tempo de transição através da zona de ionização não desempenha nenhum papel direto. A interpretação predador-presa é atraente pela sua simplicidade, mas a suposição de que o tempo de transição dos neutros não desempenha papel parece contra-intuitivo e difícil de sustentar em relação aos resultados típicos da simulação. De acordo com Barral (2008), uma teoria geral 1D mostra que a variação da densidade de neutros é devida aos efeitos combinados de uma onda estacionária e de uma onda convectiva (viajante). Embora ambas as ondas tenham amplitudes semelhantes, a convecção de neutros desempenha um papel muito menor na dinâmica instantânea da descarga, porque a onda viajante gera nos mesmos tempos um excesso de neutros e zonas com um déficit de neutros. E para caracterizar as *Breathing Oscillations* os neutros criados in-loco pela ionização local têm um impacto maior no comportamento da descarga, porque seu comportamento é sincronizado dentro de toda a descarga. Por isso o mecanismo é melhor descrito como um ciclo predador-presa.

A análise espacial do resultado das simulações nos mostra que há uma propagação das flutuações com uma amplitude aleatória. A oscilação variou numa faixa comparável aos estudos de Barral, dentro do range de densidade observada para o gás. Essa não uniformidade na densidade ao longo do canal durante o processo de ionização caracteriza parte das oscilações do tipo bojo rotativo, que se encontra próximo a mesma faixa de frequências.

Através desse modelo simples predador-presa associado ao plasma conseguimos obter uma boa informação sobre a operação do propulsor Hall. Em trabalhos futuros, este modelo será refinado com a adição de termos de difusão, verificação da formação de padrões e extração de parâmetros diretamente voltados para o PHall desenvolvido na UnB, visando a obtenção de dados para melhoria na eficiência e previsão de oscilações. Com a obtenção de dados relevantes pode-se gerar um grande impacto na indústria aeroespacial, em termos de otimização de parâmetros usados que influenciam diretamente no tempo de vida útil do propulsor e assim o tempo operacional de um satélite ou sonda qualquer, que traduzindo, seria a economia de milhões para os países que lançam foguetes para botar o satélite em órbita, pois lançariam bem menos ao espaço em um período de tempo.

Referências Bibliográficas

BARRAL, S.; AHEDO, E. *On the Origin of Low Frequency Oscillations in Hall Thrusters*. Institute of Fundamental Technological Research - Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland, 2008

BARRAL, S.; AHEDO, E. *Low-frequency model of breathing oscillations in Hall discharges*. Institute of Plasma Physics and Laser Microfusion, Warsaw, Poland, 2009

CHOUERI, E. Y. *Plasma oscillations in Hall thrusters*. Electric Propulsion and Plasma Dynamics Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey, 2001.

ESIPCHUCK, Y.; MOROZOV, A.; TILININ, G.; TROFIMOV, A. *Sov. Phys. Tech. Phys.* 18, 928 (1974).

ESIPCHUCK, Y.; TILININ, G. *Sov. Phys. Tech. Phys.* 21, 417 (1976).

FIFE, J.; MARTINEZ-SANCHEZ, M.; SZABO, J. *A Numerical Study of Low-Frequency Discharge Oscillations in Hall Thrusters*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, DC, 1997.

FRISBEE, R. H. *Limits of Interstellar Flight Technology*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2008.

GOEBEL, D.; KATZ, I. *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.

IANNELLI, M.; PUGLIESE, A. *An Introduction to Mathematical Population Dynamics: Along the trail of Volterra and Lotka*. New York: Springer, 2014.

MAZOUFFRE, s. *Electric propulsion for satellites and spacecraft: established technologies and novel approaches*. University of Orléans, 1C avenue de la Recherche Scientifique, Orléans, France, 2016.

MCDONALD, M. S.; GALLIMORE, A. D. *Parametric Investigation of the Rotating Spoke Instability in Hall Thrusters*. Plasmadynamics and Electric Propulsion Laboratory (PEPL), University of Michigan, Ann Arbor, MI USA, 2011.

MOROZOV, A. I.; EPSINCHUCK, Y. *et al.*, *Sov. Phys. Tech. Phys.* 17, 482 (1972).

MURRAY, J. D. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. 3rd Edition. New York: Springer, 2002.

SIMON, A. *Phys. Fluids* 6, 382 (1963).

SMIRNOV, B. *Physics of Weakly Ionized Gases*. Mir, Moscow, 1981.

TILININ, G. *Sov. Phys. Tech. Phys.* 22, 974 (1977).

WESTPHAL, C. *Quanto tempo é preciso para chegar à Marte?*, 2018.

Disponível em: <<http://sustentabilidade.com/quanto-tempo-e-preciso-para-chegar-a-marte/>>. Acesso em: 18 jul, 2018.