

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Álgebra de Rainich Generalizada e Soluções do Tipo
Cordas Cósmicas em Teorias Escalares-Tensoriais da
Gravitação

Marcelo Leineker Costa

Orientadora: Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Dissertação de mestrado apresentada
ao Instituto de Física da Universidade
de Brasília como parte dos requisitos
necessários à obtenção do título de Mestre
em Física.

Brasília-DF

Março, 2006

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Álgebra de Rainich Generalizada e Soluções do Tipo
Cordas Cóslicas em Teorias Escalares-Tensoriais da
Gravitação**

Por

Marcelo Leineker Costa

Orientadora

Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Álgebra de Rainich Generalizada e Soluções do Tipo Cordas Cósmicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

Por

Marcelo Leineker Costa

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte
dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Maria Emília Xavier Guimarães

(Orientadora) IF-UnB

Prof. da Banca 1

IF-UnB

Prof. da Banca 2

IF-Externo

Brasília,

Prof. Sebastião William da Silva

Coordenador de Pós-Graduação

Instituto de Física

Universidade de Brasília

“...Ah! Os senhores sorriem! Por quê? Porque esse ser permanece invisível. Mas o nosso olho, senhores, é um órgão de tal modo elementar que mal consegue enxergar o que nos é indispensável à existência. Aquilo que é pequeno demais lhe escapa; escapa-lhe o que é muito grande, assim como o que está muito distante...”

Guy de Maupassant

À minha família, pelo amor incondicional e por me ensinarem tudo que não está contido nas equações.

Agradecimentos

Aos meus pais pelo apoio que transpareceu em seus atos e pelo orgulho que transpareceu em seus olhos. À minha irmã que acompanhou com zelo toda a minha vida, em especial estes últimos anos.

À minha avó, que me mostrou que o melhor professor é a vida. À minhas tias: Dana, Jose, Dete, Cléo, Nani, Liu, Tonha, Dora e Rosa pelas risadas e pelo amor. Meus tios: Afonso, Randy, Biba, Pedro. Em especial ao Tio Chumbo pelo carinho paternal. Aos meus primos Diego, Beto (e Igor) e Rafael Rojas. Às minhas primiiinhas queridas Lú, Mari, Cami, Isa, Nat, Jú e Raíssa. Em especial à Tânia que está passando por esta mesma experiência.

Aos meus grandes amigos: Luiz (eh!) por mostrar que a inquietude também é essencial à vida. Álvaro (e suas três mulheres) por mostrar que cautela também é essencial à vida e Osvaldo por mostrar que a irresponsabilidade também é essencial à vida. A vocês meu eterno agradecimento.

Ao meu grande amigo Roberto que sempre se interessou pela física, mas aprende melhor com um copo de cerveja na mão.

Aos meus amigos Dênis, Andrés, Michel (tem churras?), Marconi, Antônio. Aos amigos da física: Rodrigo Muskito, Nanderson, Nelson, Anderson, Roberto, Goiano, Christian, Caio, Ednardo,

Frank, Ronny, Dudu, Erich e Alex. Às meninas da física: Stella, Luana e Christine.

À galera de Curitiba: Línard, D'ju, Jhonny (e Bea) e Gílson.

À tia Ida e Polly, pela convivência que se tornou amizade.

À professora Maria Emília por me ensinar a andar neste novo mundo, por todo o apoio e acima de tudo pela paciência e compreensão durante estes quatro anos e meio de convivência. Ao professor Sebastião pelo esforço sem nenhuma obrigação. Aos professores Ademir, Neto, Maluf, Dodonov, Gargano, Magela, Sebastião Dias, José Helayël-Neto e Andrei Bitsenko pela lição viva das muitas formas de se fazer física.

Ao Corinthians cujas alegrias me permitiram viver em constante felicidade independentemente de qualquer outra coisa.

Aos funcionários do Instituto: Noé, Angélia, Marcelo, Zé das Dores e Célia. E, por fim, à CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou este trabalho.

Obrigado.

Resumo

Obtivemos soluções exatas para uma corda cósmica estática carregada em uma teoria de Einstein-Maxwell-Dilaton do tipo escalar-tensorial em (3+1)-dimensões. Esta teoria é especificada pelo campo ϕ , pela métrica $g_{\mu\nu}$, pelo campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ e por um parâmetro pós-newtoniano $\alpha(\phi)$. A teoria admite três casos diferentes, cada um correspondendo a uma solução particular da álgebra de Rainich para o tensor de Ricci. Como uma aplicação, estudamos o fenômeno das curvas de rotação em algumas galáxias.

Abstract

We obtain exact solutions for a static and charged cosmic string in an Einstein-Maxwell-Dilaton theory of a scalar-tensor type in (3+1)-dimensions. This theory is specified by the dilaton field ϕ , the graviton field $g_{\mu\nu}$ and the electromagnetic field $F_{\mu\nu}$, and one post-newtonian parameter $\alpha(\phi)$. It contains three different cases, each of them corresponding to a particular solution of the Rainich algebra for the Ricci tensor. As an application, we study the phenomena of the flat rotation curves in some galaxies.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Notação | iv |
| Introdução | 1 |
| 1 Grupos de Simetria e Formação de Defeitos Topológicos | 4 |
| 1.1 Grupos de Simetria e Quebra Espontânea de Simetria | 5 |
| 1.1.1 Quebra Espontânea de Simetria: Cristais Líquidos | 7 |
| 1.1.2 Quebra Espontânea de Simetria: O Campo Escalar | 9 |
| 1.2 O Teorema de Goldstone | 11 |
| 1.3 O Mecanismo de Higgs | 14 |
| 1.4 Formação de Defeitos Topológicos | 16 |
| 1.5 Defeitos Topológicos e Números Topológicos | 18 |
| 1.5.1 Solução Tipo-Kink | 19 |
| 1.5.2 Solução Tipo-Vortex | 21 |
| 2 Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação | 26 |
| 2.1 A Teoria de Brans-Dicke | 27 |
| 2.2 Formulação Lagrangiana das Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação | 31 |
| 3 Cordas Cósmicas Supercondutoras em Teorias Escalares-Tensoriais da | |

| | |
|---|-----------|
| Gravitação | 35 |
| 3.1 Cordas C3smicas Supercondutoras | 36 |
| 3.2 3lgebra de Rainich Generalizada e as Solu33es das Equa33es de Campo . . | 40 |
| 3.2.1 Caso I: Corda Portando Corrente Tipo-Tempo | 42 |
| 3.2.2 Caso II: Corda Portando Corrente Tipo-Espa33o | 44 |
| 3.2.3 Caso III: Corda Portando Corrente Mista | 45 |
| 4 Uma Aplica333o da M3trica da Corda C3smica Supercondutora do Tipo- | |
| El3trico | 48 |
| 4.1 Condi333es Geom3tricas Sobre os Tipos de Mat3ria | 48 |
| 4.1.1 Determina333o da Forma do Elemento de Linha | 49 |
| 4.1.2 C3lculo da Velocidade Tangencial | 51 |
| Conclus33o | 55 |
| Ap3ndice | 57 |
| Refer3ncias Bibliogr3ficas | 60 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Potencial de Higgs | 10 |
| 1.2 | Comprimentos Característicos | 25 |
| 3.1 | Comportamento da Solução da Equação de Rainich | 46 |
| 3.2 | Comportamento de g_{tt} | 47 |
| 3.3 | Comportamento de $g_{\theta\theta}$ | 47 |
| 3.4 | Comportamento de g_{rr} e g_{zz} | 47 |

Notação

Ao longo do texto usaremos a seguinte notação:

- A assinatura da métrica utilizada nesta dissertação é $(-1, +1, +1, +1)$.
- Índices latinos como i, j, k, l , variam sob coordenadas espaciais: 1, 2, 3 ou x, y, z .
- Índices gregos como $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, variam sob as quatro coordenadas inercias do espaço-tempo: 0, 1, 2, 3.
- Se o mesmo índice se repete, então o índice é somado sobre todos os valores possíveis

$$A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu \quad .$$

- A derivada covariante será denotada por $D_\mu A_\nu$ ou $A_{\nu;\mu}$ e a derivada parcial por $\partial_\mu A_\nu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$ ou $A_{\nu,\mu}$.
- Um ponto sobre qualquer quantidade denota a diferenciação em relação ao tempo próprio $\dot{A}^\mu \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau}$.
- O campo escalar de Higgs será denotado por ϕ e o campo escalar das teorias escalares-tensoriais será denotado por φ no referencial conforme (referencial de Einstein) e Φ no referencial físico (referencial de Jordan-Fierz).

- Em geral, foi adotado o sistema de unidades $\hbar = c = 1$, a menos que seja explicitamente evidenciado o contrário.

Utilizaremos também as seguintes definições:

- Métrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

- Operador d'Alambertiano:

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu).$$

- Conexão métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

- Derivada covariante:

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho.$$

- Tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu\sigma}^\rho = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \Gamma_{\kappa\sigma}^\rho.$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu}.$$

- Escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

- Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

- Identidade de Bianchi:

$$D_\mu G_\nu{}^\mu \equiv 0.$$

- Lagrangeano para uma métrica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu.$$

- Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} = 0.$$

Introdução

Alguns tipos de soluções admitidas em teorias de campos são de extremo interesse devido às suas propriedades peculiares. Dentre elas as soluções solitônicas denominadas defeitos topológicos têm sido de grande importância em Cosmologia devido à capacidade de atuar na formação de estruturas em larga escala no Universo. Exemplos de defeitos topológicos de interesse cosmológico são os monopólos, paredes de domínio e cordas cósmicas. Porém, somente as cordas cósmicas são compatíveis com as características observacionais do Universo [1, 2]. Tais defeitos devem ter sido criados à medida que o Universo se resfriou, passando por transições de fase em seus minutos iniciais. Desta forma, as cordas cósmicas se constituem em um vínculo da era inicial com a era atual do Universo. O estudo das cordas cósmicas se faz importante tanto por estas características quanto pela possibilidade de detecção a partir da tecnologia atualmente disponível.

Na década de 60, Brans e Dicke [3] propuseram uma teoria na qual um campo escalar também é responsável, juntamente com a métrica, pela interação gravitacional. Teorias deste tipo, denominadas Teorias Escalares-Tensoriais, foram impulsionadas nos últimos anos pelas Teorias de Supercordas que possuem como consenso a existência de um parceiro escalar (“dilatón”) para o gráviton [4]. As Teorias Escalares-Tensoriais admitem muitas soluções distintas da Teoria da Relatividade Geral, além das próprias soluções da Relatividade Geral para o caso em que o parâmetro característico da teoria, ω , tende a

infinito. Apesar de alguns efeitos serem indistinguíveis nas duas teorias, existem vários sistemas físicos com algumas características distintas quando estudados no contexto de Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação.

A obtenção das soluções das equações de campo para cordas cósmicas em Teorias Escalares-Tensoriais se torna quase impossível analiticamente devido à quantidade de campos de matéria envolvidos nestas equações. No entanto, em alguns casos particulares a obtenção de solução exata é possível através das denominadas “condições de Rainich” obedecidas pelo tensor energia-momentum para campos eletromagnéticos. Estas condições levam a um conjunto de equações que envolvem as componentes do tensor de Ricci. Este conjunto de equações é chamado de “álgebra generalizada de Rainich” no caso de Teorias Escalares-Tensoriais, e claramente simplificam o problema, tornando possível a obtenção de soluções analíticas.

Neste trabalho estudamos cordas cósmicas supercondutoras em Teorias Escalares-Tensoriais da gravitação. Obtivemos as métricas na região exterior à corda através da “álgebra generalizada de Rainich” para os três casos possíveis de corda portando corrente. Posteriormente, utilizando a métrica exterior da corda cósmica portando corrente do tipo-tempo analisamos o problema das curvas de rotação de galáxias.

A estrutura desta dissertação é a seguinte: iniciamos a dissertação pela introdução de alguns conceitos relacionados a grupos de simetria e quebra espontânea de simetria, indispensáveis à compreensão de defeitos topológicos. Em seguida, apresentamos exemplos do fenômeno de quebra espontânea de simetria que ilustram o teorema de Goldstone e o mecanismo de Higgs. O capítulo 1 é composto ainda pelo estudo do mecanismo de formação de defeitos topológicos, com especial atenção às soluções solitônicas

tipo-vortex. O capítulo 2 faz menção à Teoria de Brans-Dicke e introduz a formulação das Teorias Escalares Tensoriais a partir do formalismo Lagrangiano. Finalmente, no capítulo 3 introduzimos as cordas cósmicas supercondutoras, estudando-as em Teorias Escalares-Tensoriais. Neste capítulo chegamos ao primeiro resultado desta dissertação com a obtenção da métrica exterior à corda cósmica supercondutora para o caso misto através da utilização da “álgebra generalizada de Rainich”. O segundo resultado original é desenvolvido no capítulo 4 através do estudo do problema das curvas de rotação de galáxias utilizando a métrica externa à corda cósmica portando corrente tipo-tempo. Na conclusão fazemos um sumário dos resultados principais e discutimos perspectivas futuras. A dissertação é composta ainda de um apêndice no qual apresentamos em detalhes os cálculos das soluções das equações diferenciais de Rainich obtidas no capítulo 4.

Capítulo 1

Grupos de Simetria e Formação de Defeitos Topológicos

Nos últimos anos houve um rápido desenvolvimento na interface entre a Física de Partículas Elementares e a Cosmologia. A Física de Partículas Elementares, objetivando uma teoria de unificação, deve testar suas teorias em escalas de energia muito superiores às disponíveis no presente ou até mesmo em futuros aceleradores de partículas. A opção óbvia a estes é o Universo primordial, onde as condições de temperatura e energia eram extremas. Por outro lado, os cosmólogos procuram entender características observadas no Universo traçando sua história, cada vez mais, rumo ao seu período inicial.

O Universo primordial era um ambiente intensivamente energético, portanto não é simples identificar traços diretos de eventos iniciais. Existem, entretanto, alguns eventos especiais que podem ter deixado traços ainda visíveis na época presente. Um exemplo importante são as transições de fase. Se nossas idéias sobre unificação estiverem corretas, então o Universo passou, na era inicial, por uma série de transições de fase. Como em sistemas de matéria condensada, estas transições devem ter levado à formação de defeitos de vários tipos— paredes de domínio, cordas ou vórtices, monopólos, ou combinações destes. Muitos destes defeitos, por razões topológicas ou outras, se tornam estáveis. No

entanto, poucos destes podem sobreviver até a presente época. Se tais defeitos existirem, então eles se constituem numa conexão direta entre os eventos altamente energéticos da era primordial e a época presente do Universo [1, 2].

Cordas cósmicas, em particular, têm propriedades interessantes. Elas são objetos muito massivos e podem ter desempenhado um papel importante na formação e desenvolvimento de estruturas no Universo, possivelmente provendo algumas das não homogeneidades de densidade a partir das quais galáxias eventualmente se desenvolveram. Algumas de suas assinaturas observacionais são perfeitamente distinguíveis.

Neste capítulo abordaremos as idéias básicas sobre transições de fase, os mecanismos de formação de defeitos topológicos, o que são as cordas cósmicas, como são formadas e suas classificações. Para tanto, baseamo-nos nas referências [5, 6].

1.1 Grupos de Simetria e Quebra Espontânea de Simetria

A idéia de que interações fundamentais devem ser invariantes sob transformações de determinados grupos de simetria é uma das ferramentas mais poderosas da Física. No contexto de Teoria Quântica de Campos, os grupos de simetria agrupam partículas e relacionam suas amplitudes de probabilidade de espalhamento. As simetrias em Teoria Quântica de Campos podem ser divididas em duas classes: simetrias cinemáticas e simetrias internas. As simetrias cinemáticas são aquelas do espaço-tempo através do qual os campos se propagam; por exemplo, o espaço vazio tem as simetrias do grupo de Poincaré, consistindo de translações, rotações e boosts de Lorentz. Simetrias internas relacionam campos entre si. Para se implementar simetrias internas, os campos devem ter alguma propriedade bem definida de transformação sob o grupo de simetria; em outras palavras, eles

devem formar alguma representação do grupo. Os rótulos das diferentes representações são frequentemente denominados de *números quânticos*. Por exemplo, as representações do grupo de Poincaré são rotuladas por sua massa e por seu spin. As simetrias internas transformam campos em outros campos, e existe apenas um número finito de campos. Os grupos correspondentes são portanto de dimensão finita e compactos. Se estes não forem grupos discretos, então serão denominados *grupos de Lie*. Daí a importância do estudo das representações dos grupos de Lie em Física de Partículas Elementares. Em geral, uma teoria quântica de campos relativística é determinada pelas representações dos campos que ela engloba (i.e., suas massas, spins e números quânticos internos), que são então agrupados em um Lagrangiano invariante.

Uma das mais importantes simetrias é a simetria de calibre local, onde o Lagrangiano deve ser invariante sob transformações de simetria que dependem de cada ponto do espaço-tempo. Se esta invariância existir somente para transformações que são constantes no espaço-tempo, então são chamadas de transformações de simetria de calibre global (ou rígida). Para simetrias internas as transformações locais exigem um campo de spin 1, o campo de calibre, cujo exemplo é o campo eletromagnético. A gravitação também pode ser formulada em termos de transformações de calibre do grupo local de Lorentz, cujo campo de calibre possui spin 2.

Um problema fundamental nos modelos físicos da Teoria Quântica de Campos consiste em como quebrar estas simetrias. Se propusermos um Lagrangiano e um estado fundamental simétrico para uma teoria, então a existência da simetria de calibre implica que as partículas de spin 1 associadas a esta devem ter massa nula¹. Somente uma partícula

¹O campo A_μ , mediador da interação eletromagnética, cujo quantum é o fóton, possui spin 1 e massa nula. Os bósons W^\pm e Z^0 , mediadores da interação fraca, possuem spin 1 mas têm massa não-nula.

com estas características é conhecida: o fóton. A solução deste problema é quebrar a simetria do estado fundamental. Tal fenômeno é conhecido como *mecanismo de Higgs*. Este mecanismo consiste em introduzir campos de spin 0 que se transformam não trivialmente sob o grupo G das transformações de simetria do Lagrangiano, e construir uma densidade de energia para estes campos que é minimizada para algum valor não-nulo de ϕ^i denominado ϕ_0^i . A teoria tem então um estado fundamental que é invariante somente sob o grupo de simetria H , subgrupo de G , que mantém ϕ_0^i invariante. Dizemos que a simetria G foi quebrada em H .

Estudaremos o Mecanismo de Higgs com mais detalhes na seção 2.3. No que segue, optamos por analisar o fenômeno de quebra espontânea de simetria através de alguns exemplos simples.

1.1.1 Quebra Espontânea de Simetria: Cristais Líquidos

Um bom exemplo deste mecanismo é observado em matéria condensada. Suponha um cristal líquido nemático, que consiste de moléculas em forma de bastão ou de disco. A densidade de energia livre deste sistema é invariante sob o grupo de rotações espaciais $SO(3)$. Esta simetria é global, a termodinâmica do sistema não pode depender da orientação da amostra. Entretanto, a baixas temperaturas e altas pressões, as moléculas tendem a se alinhar; portanto em qualquer amostra particular a simetria rotacional não será completamente respeitada pela direção de alinhamento. A simetria de alinhamento ainda permanece. Para esta não há direção de alinhamento preferida, mas ela foi quebrada pelo estado de equilíbrio no qual todas as moléculas possuem a mesma direção de alinhamento. Um subgrupo do grupo de rotação permanece sem ser quebrado. Este é o grupo das rotações em torno da direção de alinhamento e de rotações por um ângulo

π em torno de um eixo ortogonal à direção de alinhamento. Este grupo é o $O(2)$. Esta quebra é usualmente denotada por

$$SO(3) \rightarrow O(2) \quad . \quad (1.1)$$

A direção e o grau de alinhamento das moléculas podem ser descritas por um campo diretor $\Phi(\mathbf{x})$. Este campo deve se transformar apropriadamente sob rotações do $SO(3)$ para descrever um vetor que independe do sentido: tal como um tensor simétrico de traço nulo. Na fase nemática, temos

$$\Phi(x)_{ij} = A(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \quad , \quad (1.2)$$

onde $\pm n_i$ são os eixos de alinhamento das moléculas.

Uma boa descrição da transição de fase entre fases desordenada ($\Phi(x) = 0$) e ordenada ($\Phi(x) \neq 0$) pode ser obtida postulando-se que a densidade de energia livre para campos constantes tenha a forma

$$f(\Phi(x)) = \alpha + \beta \text{tr} \Phi^2(x) + \gamma \text{tr} \Phi^3(x) + \delta (\text{tr} \Phi^2(x))^2 + \dots \quad (1.3)$$

O valor de $\Phi(\mathbf{x})$ no mínimo de f depende dos coeficientes $\alpha - \delta$ que são funções da temperatura e da pressão. Em particular, a transição ocorre quando o sinal de β muda. A classificação da transição de fase, em primeira ou segunda ordens, depende da forma da função de energia livre: se $\gamma \neq 0$, a energia livre de equilíbrio muda descontinuamente de um mínimo para outro, então a transição é de primeira ordem; se $\gamma = 0$, a transição é de segunda ordem.

Uma consequência direta da quebra espontânea de simetria em cristais líquidos é a formação de estruturas chamadas de *desclinações*. Estas estruturas são exemplos de defeitos topológicos e serão estudadas em detalhes nas seções seguintes.

1.1.2 Quebra Espontânea de Simetria: O Campo Escalar

Um sistema que nos permite compreender melhor o processo de quebra espontânea de simetria consiste em um campo escalar complexo cujo Lagrangiano \mathcal{L} possui uma simetria que não é compartilhada pela solução de estado fundamental. Suponha uma teoria $\lambda\phi^4$ complexa:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \quad , \quad (1.4)$$

com $V(\phi, \phi^*) = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$, e o termo em $\lambda > 0$ sendo a autointeração. \mathcal{L} é invariante sob transformação global de calibre

$$\phi \rightarrow e^{i\Lambda}\phi \quad (\Lambda \text{ constante}) \quad . \quad (1.5)$$

O estado fundamental é definido como o valor de ϕ que minimiza V . Assim, temos

$$\frac{\partial V}{\partial\phi} = m^2\phi^* + 2\lambda\phi^*(\phi^*\phi) \quad . \quad (1.6)$$

Quando $m^2 > 0$, o mínimo ocorre em $\phi = \phi^* = 0$. Se $m^2 < 0$ temos, entretanto, um máximo em $\phi = 0$, e um mínimo em

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} \equiv a^2 \quad . \quad (1.7)$$

Em teoria quântica, quando ϕ se torna um operador, esta condição equivale ao valor esperado de vácuo

$$|\langle 0|\phi|0\rangle|^2 = a^2 \quad . \quad (1.8)$$

A figura (1.1) mostra um gráfico da função energia potencial $V(\phi, \phi^*)$, em função de ϕ_1 e ϕ_2 , onde $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Os valores mínimos de V estão ao longo de um círculo de raio $|\phi| = a$, este círculo forma o conjunto de todos os estados de vácuo. Assim, através

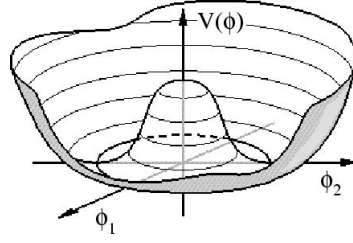


Figura 1.1: Decomposição cartesiana do potencial de Higgs com o estado de vácuo degenerado. $V(\phi_1, \phi_2)$ possui um mínimo para $|\phi| = a$, e um máximo local para $\phi = 0$

de sucessivas rotações podemos obter todos os estados de vácuo do sistema. Os campos físicos podem ser interpretados como excitações sobre o estado de vácuo, e então podem ser obtidos a partir de perturbações sobre $|\phi| = a$, e não em $\phi = 0$. Representando ϕ em coordenadas polares, temos

$$\phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)} \quad . \quad (1.9)$$

Assim, expressamos o campo escalar ϕ em termos de dois campos reais ρ e θ . Temos, então, para o valor esperado de ϕ no estado de vácuo

$$\langle 0|\phi|0\rangle = a \quad . \quad (1.10)$$

Escolhendo, sem perda de generalidade, $\langle 0|\phi|0\rangle = a$ (com a real), obtemos imediatamente

$$\langle 0|\rho|0\rangle = a \quad \text{e} \quad \langle 0|\theta|0\rangle = 0 \quad . \quad (1.11)$$

Pode-se mostrar, então, que o estado de vácuo da teoria é degenerado e que os diversos estados são mutuamente ortogonais.

Se efetuarmos uma translação em ρ , de forma a manter o valor esperado no vácuo do campo ϕ , tal que

$$\phi(x) = [\rho'(x) + a]e^{i\theta(x)} \quad , \quad (1.12)$$

então os valores esperados no vácuo tanto de ρ' quanto de θ se anulam. Assim, se tomar-

mos estes campos como campos físicos, expressando \mathcal{L} em termos destes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \rho' \partial^\mu \rho' + (\rho' + a)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \lambda \rho'^4 - 4a\lambda \rho'^3 + 4\lambda a^2 \rho'^2 - \lambda a^4 \\ &= \partial_\mu \rho' \partial^\mu \rho' + (\rho' + a)^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \lambda [(\rho' + a)^2 - a^2]^2 + \lambda a^4 \quad .\end{aligned}\tag{1.13}$$

O termo em ρ'^2 indica que ρ' possui massa $m_{\rho'}^2 = 4\lambda a^2$. No entanto o campo θ não possui massa. Como resultado da quebra espontânea de simetria obtemos, a partir do que, a princípio, eram dois campos massivos, um campo massivo e um campo sem massa. A partícula associada ao campo θ é denominada bóson de Goldstone. Este fenômeno não se restringe a este exemplo particular. A quebra espontânea de uma simetria global exige a existência de ao menos uma partícula com massa nula. Este processo é descrito pelo teorema de Goldstone.

1.2 O Teorema de Goldstone

Considere o modelo anterior, agora com o campo ϕ_i , $i = (1, 2, 3)$ um isovetor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \lambda (\phi_i \phi_i)^2 \quad .\tag{1.14}$$

\mathcal{L} é invariante sob rotações de isospin, que geram o grupo de simetria $G = SO(3)$ (i.e. G é um grupo não-Abeliano):

$$\begin{aligned}G : \phi_i &\rightarrow e^{iQ_k \alpha_k} \phi_i e^{-iQ_k \alpha_k} \\ &= (e^{iT_k \alpha_k})_{ij} \phi_j = U_{ij} \phi_j = [U(g)\phi]_i \quad .\end{aligned}\tag{1.15}$$

Novamente o mínimo do potencial nos fornece o estado de vácuo $\phi_i = 0$ se $m^2 > 0$, ou

$$|\phi_0| = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{m^2}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv a\tag{1.16}$$

se $m^2 < 0$.

Temos, portanto, um estado de vácuo degenerado. Escolhendo $\vec{\phi}_0 = a\hat{e}_3$, que claramente não é invariante sob todo o grupo G

$$G : \phi'_0 = U(g)\phi_0 \neq \phi_0 \quad , \quad (1.17)$$

porém é invariante sob um subgrupo H de G

$$H : \phi'_0 = U(h)\phi_0 = \phi_0 \quad . \quad (1.18)$$

Neste caso, $U(h) = e^{iT_3\alpha_3}$ representa as rotações em torno do eixo \hat{e}_3 . No entanto, V é invariante sob todo o grupo de simetria G

$$V(\phi') = V(\phi) \quad , \quad \phi' = U(g)\phi \quad . \quad (1.19)$$

Este fato está na origem da existência do bóson de Goldstone na teoria.

Reescrevendo $\phi_3 = \chi + a$ de forma que agora temos ϕ_1 , ϕ_2 e χ como campos físicos da teoria, com valores esperados de vácuo

$$\langle 0|\chi|0\rangle = \langle 0|\phi_1|0\rangle = \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0 \quad , \quad (1.20)$$

consequentemente, o potencial deve ser reescrito como

$$\begin{aligned} V &= \frac{m^2}{2}[\phi_1^2 + \phi_2^2 + (\chi + a)^2] + \lambda[\phi_1^2 + \phi_2^2 + (\chi + a)^2]^2 \\ &= 4a^2\lambda\chi^2 + 4a\lambda\chi(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2) + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2)^2 - \lambda a^2 \quad . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Assim, χ passa a ser o único campo massivo da teoria

$$m_\chi = 8a^2\lambda \quad , \quad m_{\phi_1} = m_{\phi_2} = 0 \quad . \quad (1.22)$$

Neste modelo temos, após a quebra espontânea de simetria, dois bósons de Goldstone e um campo escalar massivo. Podemos compreender isto expandindo o potencial em torno do seu ponto de mínimo, pois sabemos que

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \chi_i\chi_j + \mathcal{O}(\chi^3) \quad , \quad (1.23)$$

onde denominamos de matriz de massa

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \geq 0 \quad . \quad (1.24)$$

A invariância do potencial nos fornece

$$V(\phi_0) = V(U(g)\phi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \delta \phi_i \delta \phi_j + \dots \quad (1.25)$$

Portanto, devemos ter

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi=\phi_0} \delta \phi_i \delta \phi_j = 0 \quad . \quad (1.26)$$

Se g pertence a H , então $\phi'_0 = \phi_0$ implica que $\delta \phi_i = 0$. Mais precisamente,

$$\delta \phi = \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \right)_{\alpha_3=0} \phi_0 \delta \alpha_3 = 0 \quad . \quad (1.27)$$

Neste caso, a condição (1.26) é sempre satisfeita. No entanto, se g não pertence a H , então temos duas possibilidades: rotações em torno do eixo e_1 ou em torno do eixo e_2 .

Isto é,

$$\delta \phi_m = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha_i=0} \phi_0 \right]_m \delta \alpha_i \neq 0 \quad . \quad (1.28)$$

Logo, devemos ter necessariamente

$$M_{ij} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha_i=0} \phi_0 \right]_j = 0 \quad , \quad (1.29)$$

e assim os campos $U'(0)\phi_0$ têm massas nulas. Fica claro que os campos que não devem necessariamente ter massa nula obedecem à equação (1.27) e o número de tais campos é exatamente a ordem do grupo de Lie H , o subgrupo sob o qual o vácuo é invariante. Os elementos de G que não pertencem a H , não formam um subgrupo, mas formam um coset $\frac{G}{H}$. O número de bósons de Goldstone é igual à dimensão do espaço quociente $\frac{G}{H}$.

1.3 O Mecanismo de Higgs

Nesta seção veremos as consequências da quebra espontânea de simetria em modelos de calibre. O exemplo mais simples de tais modelos pode ser construído a partir do Lagrangiano do campo escalar complexo (1.4), introduzindo um campo de calibre local A_μ

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad , \quad (1.30)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Podemos ver que \mathcal{L} é invariante sob as transformações do grupo $U(1)$ local,

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{-i\theta(x)}\phi(x) \quad , \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi'^*(x) = e^{i\theta(x)}\phi^*(x) \quad , \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \quad . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Se $m^2 > 0$, (1.30) é precisamente o Lagrangiano para a eletrodinâmica de um campo escalar carregado. Se $m^2 < 0$, então devemos redefinir os campos para reescrever \mathcal{L} em termos de campos com valores esperados no vácuo nulos.

O valor esperado no vácuo para o campo ϕ pode ser escrito como

$$\langle\phi_0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad ,$$

onde $v^2 = -\frac{m^2}{\lambda}$ é real.

Ao invés de redefinir ϕ pela subtração de $\langle\phi_0\rangle$, iremos parametrizar ϕ exponencialmente. Os novos campos reais são ξ e η , definidos por

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{(v + \eta)}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\xi}{v}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta + i\xi + \text{termos de ordem quadrática}] \quad . \end{aligned} \quad (1.32)$$

O campo ξ está associado com a quebra espontânea da simetria $U(1)$ local. Na ausência do campo de calibre A_μ é tentador concluir que o campo ξ não possui massa, pois quando (1.30) é escrita em termos de ξ e η não há termos quadráticos em ξ . Este argumento não funciona. Para verificar isso, vamos escrever (1.30) em termos dos campos A_μ , ξ e η

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta + \frac{1}{2}\partial^\mu\xi\partial_\mu\xi \\ & + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - evA_\mu\partial^\mu\xi + m^2\eta^2 + \text{termos de ordem cúbica} \quad . \end{aligned} \quad (1.33)$$

O campo η possui massa $-2m^2$ enquanto os campos A_μ e ξ se acoplam, o que dificulta a interpretação destes. Sem o termo de acoplamento em (1.33), poderíamos concluir que o campo de calibre A_μ possui massa $m_c = e^2v^2$ e que o campo ξ não possui massa. O procedimento correto, no entanto, é calcular o propagador combinado dos campos A_μ e ξ , encontrar as regras de Feynman, e então examinar os pólos da matriz de espalhamento S . Porém, neste caso, podemos fazê-lo de maneira mais simples. O Lagrangiano (1.30) é invariante pelas transformações de calibre (1.31). Escolhendo $\theta(x) = \frac{\xi(x)}{v}$, temos

$$\begin{aligned} \phi & \rightarrow \phi' = e^{-i\frac{\xi(x)}{v}}\phi \\ & = \frac{(v + \eta)}{\sqrt{2}} \quad , \\ A_\mu & \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\xi \quad . \end{aligned} \quad (1.34)$$

Então podemos escrever, após aplicarmos as transformações em \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu + ieA'_\mu)(v + \eta)][(\partial_\mu - ieA'_\mu)(v + \eta)] - \frac{1}{2}m^2(v + \eta)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \quad , \quad (1.35)$$

que pode ser expandido como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\eta\partial^\eta + \frac{1}{2}e^2v^2A'_\mu A'^\mu \\ & + \frac{1}{2}e^2A'^2_\mu\eta(2v + \eta) - \frac{1}{2}\eta^2(3v^2\lambda + m^2) - v\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 \quad . \end{aligned} \quad (1.36)$$

Neste calibre não há termos de acoplamento entre diferentes partículas, então podemos fazer a leitura diretamente do Lagrangiano obtendo as massas através dos coeficientes dos termos quadráticos. O campo η possui massa $m_\eta^2 = 3\lambda^2 v^2 + m^2$, o campo de calibre A'_μ possui massa $m_c^2 = e^2 v^2$ enquanto não há partícula correspondendo ao campo ξ . No entanto, o número de graus de liberdade continua o mesmo.

A diferença entre o mecanismo de Higgs e o teorema de Goldstone reside no fato de que a quebra espontânea de uma simetria local resulta no desaparecimento de um campo enquanto o campo de calibre adquire massa; já no teorema de Goldstone, a quebra espontânea de uma simetria global resulta no aparecimento de um campo sem massa.

Se, por um lado, uma quebra espontânea de simetria tem efeito sobre os campos, conforme vimos até agora, por outro lado possibilita a existência de objetos topológicos com energia finita e que se propagam sem difusão. Assim como no teorema de Goldstone e no mecanismo de Higgs, a formação destes defeitos topológicos pode ser entendida em termos do grupo de simetria do Lagrangiano e do subgrupo de simetria do estado de vácuo. Na próxima seção iremos estudar defeitos topológicos primeiramente via as equações de campo das teorias e depois classificá-los via grupos de homotopia.

1.4 Formação de Defeitos Topológicos

Em algumas transições de fase o parâmetro de ordem não assume seu valor de equilíbrio em todos os pontos, podendo se anular dentro de objetos denominados defeitos topológicos. Estes defeitos podem ser unidimensionais, bidimensionais ou ainda de dimensão zero, e advêm das propriedades topológicas do conjunto de estados de vácuo.

Como exemplo, considere uma teoria de um campo escalar real, com simetria de

reflexão $\phi \rightarrow -\phi$. O funcional de energia para campos estáticos tem a forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad , \quad (1.37)$$

onde o potencial clássico à temperatura nula é $V(\phi) = \frac{1}{8}\lambda(\phi^2 - \eta^2)^2$. Os estados de vácuo correspondem a $\phi = \phi_{\pm} = \pm\eta$. Suponha que em alguma região do espaço o campo tenha valor ϕ_+ , e em uma região próxima tenha o valor ϕ_- . Então, ao longo da superfície que une estas duas regiões, o campo necessariamente se anula ao menos uma vez. O conjunto dos pontos para os quais o campo se anula forma uma superfície bidimensional, denominada *parede de domínio*, que separa o domínio $\phi = \phi_+$ do domínio $\phi = \phi_-$. Existe uma energia associada ao defeito, pois a densidade de energia livre em seu interior é superior ao seu valor de vácuo, e também porque o campo não é constante.

É a natureza desconexa do conjunto dos estados de vácuo que permite a existência das paredes de domínio. Aqui podemos notar que, para o exemplo de um cristal líquido nemático, são permitidos tanto defeitos tipo-linha quanto tipo-ponto². Em torno das desclinações tipo-linha as moléculas mudam sua orientação por uma rotação de um ângulo π em torno de um eixo ortogonal, enquanto em um defeito tipo-ponto as moléculas encontram-se em uma configuração de “ouriço”³, dirigida para fora da origem. Ao longo destes dois defeitos as moléculas não possuem qualquer direção de alinhamento e portanto o parâmetro de ordem se anula.

Na seção (2.5.2) iremos descrever como são formadas as cordas (defeitos tipo-linha) nas transições de fase cosmológicas. Porém, a analogia entre as transições de fase em um líquido nemático e em teoria de campos constitui uma interessante interface entre a

²Em matéria condensada tais defeitos são denominados desclinações.

³Do inglês “hedgehog”.

Física de Matéria Condensada e a Cosmologia, possibilitando a compreensão de alguns fenômenos ocorridos no Universo primordial.

1.5 Defeitos Topológicos e Números Topológicos

As equações não-lineares de campos clássicos permitem soluções que se comportam como objetos de energia finita que se propagam sem se difundirem. Os exemplos mais importantes de tais soluções são denominados de sólitons. Estes objetos só existem em teorias de campos com graus de liberdade internos.

Os graus de liberdade internos do campo dão origem a um espaço interno. As soluções da equação definem uma variedade do espaço interno que pode definir um mapeamento não-trivial em uma variedade do espaço-tempo. Cada mapeamento é caracterizado por um número inteiro denominado carga topológica ou número topológico. O número topológico se anula para os estados de vácuo enquanto campos definidos por soluções com números topológicos não-nulos são estáveis, e portanto não podem decair no vácuo.

O estudo dos mapas entre a variedade de um espaço interno e uma variedade do espaço-tempo é parte da teoria de homotopias.

Sejam dois mapeamentos contínuos $f(x)$ e $g(x)$, cada um de uma variedade M_x em uma variedade M_y . Estes mapeamentos são homotópicos se existir uma família de mapas $H(x, t)$ dependentes de um parâmetro $t \in (0, 1)$ tal que

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad H(x, 1) = g(x) \quad . \quad (1.38)$$

O conjunto de mapas $H(x, t)$ para diferentes valores de t descrevem as possíveis configurações da função $f(x)$, (ou $g(x)$) ao ser continuamente deformada em $g(x)$ (ou $f(x)$). Se $f(x)$ é homotópica a $g(x)$ por um conjunto de mapas $H(x, t)$ ($H : f \sim g$) e se $g(x)$

é homotópica a $k(x)$ por um conjunto de mapas $L(x, t)$ ($L : g \sim k$), então o conjunto $\mathcal{G}(x, t)$ de mapas

$$\mathcal{G}(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ L(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.39)$$

torna $f(x)$ homotópica a $k(x)$, isto é, $\mathcal{G} : f \sim k$. Portanto, homotopia é uma relação de equivalência. Mapas homotopicamente equivalentes formam uma classe $\{f\}$. O conjunto destas classes de homotopia formam um grupo. Podemos tomar como exemplo os mapas de um intervalo fechado $(0,1)$ com os pontos extremos identificados em um plano euclidiano sem a origem. Seja um dado ponto y_0 identificado com o ponto 0 ou 1 do intervalo, $f(0) = f(1) = y_0$. Os mapas de $(0,1)$ podem ser representados no plano sem origem como curvas fechadas iniciando e terminando em y_0 . Os laços que não englobam a origem podem ser deformados de forma a obtermos o ponto y_0 . Assim o conjunto de todos estes laços forma a classe identidade $\{e\}$. Os laços que englobam a origem (no sentido horário) uma vez no intervalo $(0,1)$ formam a classe $\{1\}$. A classe $\{n\}$ é o conjunto de todos os laços que englobam a origem n vezes no intervalo $(0,1)$. O número n é denominado *número de voltas* (“winding number”) e é um exemplo de número topológico.

1.5.1 Solução Tipo-Kink

Seja o Lagrangiano (em 1+1 dimensões)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (1.40)$$

onde $\phi = \phi(x, t)$ e $\lambda > 0$. Se adicionarmos uma constante $-\frac{m^4}{4\lambda}$ a este Lagrangiano, então podemos escrever

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (1.41)$$

A equação de campo para este Lagrangiano é

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - m^2)\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad . \quad (1.42)$$

Uma solução independente do tempo deve obedecer a equação

$$\partial_x^2\phi + m^2\phi - \lambda\phi^3 = 0 \quad . \quad (1.43)$$

As soluções são

$$\phi_k(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{mx}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \phi_{a-k}(x) = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{mx}{\sqrt{2}} \quad , \quad (1.44)$$

correspondendo a solução tipo-kink e anti-kink, respectivamente. A energia do kink é $H_k = \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{m^3}{\lambda}$ e está concentrada em torno da origem segundo uma gaussiana. A solução do kink tende a $\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, um dos valores no estado de vácuo, quando $x \rightarrow +\infty$; enquanto que, quando $x \rightarrow -\infty$ a solução do anti-kink tende ao outro estado de vácuo, $-\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$.

A função do grau de liberdade interno, neste caso a invariância $\phi \rightarrow -\phi$, é gerar o kink. Na seção (1.4) vimos que o efeito de tal simetria é gerar uma parede de domínio no cristal líquido. Isto equivale ao kink com uma dimensão a mais.

O mapeamento homotópico é a correspondência entre os dois estados de vácuo e os pontos $x = \pm\infty$, pois $\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ corresponde a $x = \infty$ para a solução tipo-kink e a $x = -\infty$ para a solução anti-kink. Portanto, deve existir um número topológico associado às soluções tipo-kink e anti-kink, definido por

$$k = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{1}{2} [\phi(+\infty) - \phi(-\infty)] \quad . \quad (1.45)$$

Neste caso particular, k é igual a

$$k = \int k_0(x) dx \quad , \quad (1.46)$$

cuja corrente associada é dada por

$$k_\mu(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi(x) \quad . \quad (1.47)$$

A corrente topológica é conservada, $\partial_\mu k^\mu = 0$, e portanto o número topológico também é conservado, implicando que a solução tipo-kink (ou anti-kink) não pode decair para estado de vácuo.

1.5.2 Solução Tipo-Vortex

Seja o Lagrangiano que descreve a interação entre um campo escalar complexo $\phi(x)$ e um campo eletromagnético em duas dimensões espaciais

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + c_2 \phi^* \phi - c_4 (\phi^* \phi)^2 \quad (1.48)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

As equações de campo da teoria são

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= ej^\mu \quad , \\ D_\mu D^\mu \phi &= -2c_2 \phi + 4c_4 \phi^2 \phi^* \quad , \end{aligned} \quad (1.49)$$

onde

$$j^\mu = \frac{1}{2} ie(\phi^* D^\mu \phi - \phi (D^\mu \phi)^*) = \frac{1}{2} ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) - e^2 A^\mu \phi^* \phi \quad . \quad (1.50)$$

Estamos interessados em soluções do tipo-vortex. Neste caso o campo $F_{\mu\nu}$ possui um significado simples: F_{xy} mede o número de linhas de vortex (na direção z) que passam por um quadrado unitário no plano $x - y$. Queremos identificar a linha de vortex com uma corda dual, para isto o fluxo deve ser necessariamente quantizado. As equações (1.49) são invariantes sob transformações do grupo $U(1)$ local. Considere um campo magnético B

na direção z e um círculo C , em torno da origem, no plano $x - y$ de tal modo que sobre o contorno ∂C de C , a corrente é nula. Escolhendo o ansatz

$$\phi = |\phi|e^{i\chi(\theta)} \quad , \quad (1.51)$$

e usando a equação (1.50) encontramos o valor do potencial A_μ como função da corrente j_μ

$$A_\mu = \frac{1}{e^2} \frac{j_\mu}{|\phi|^2} - \frac{1}{e} \partial_\mu \chi \quad . \quad (1.52)$$

Então podemos definir o fluxo magnético como sendo

$$\Phi = \int_C F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \oint_{\partial C} A_\mu(x) dx^\mu \quad , \quad (1.53)$$

onde $d\sigma^{\mu\nu}$ é um elemento de superfície bi-dimensional no espaço de Minkowski. Se calcularmos a integral (1.53) sobre um laço fechado sem corrente ∂C , obtemos

$$\Phi = \oint_{\partial C} A_\mu(x) dx^\mu = -\frac{1}{e} \oint_{\partial C} \partial_\mu \chi(\theta) dx^\mu \quad . \quad (1.54)$$

O requerimento sobre ϕ é que possua um único valor, implicando que χ varia 2π quando se realiza uma volta completa em torno do laço. Então,

$$\Phi = n\Phi_0 \quad , \quad \Phi_0 = -\frac{2\pi}{e} \quad . \quad (1.55)$$

O número n denominado número de voltas (“winding number”) caracteriza o mapa de um círculo no plano em um círculo descrito pela fase χ . Quando descrevemos um círculo no plano, no espaço-tempo, a fase $\chi(\theta)$ passa por valores no intervalo $(0, 2\pi)$. n é um número característico de cada classe de homotopia neste mapa.

Para mostrar que as equações de movimento (1.49) admitem soluções do tipo-vortex, considere o caso estático com uma escolha de calibre $A_0 = 0$. Devemos procurar soluções

com simetria cilíndrica em torno do eixo z . Seja a escolha

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_z}{r} |\mathbf{A}(\mathbf{r})| \quad , \quad (1.56)$$

onde \mathbf{e}_z é o vetor unitário de direção z . Então o fluxo é

$$\Phi(r) = 2\pi |\mathbf{A}(\mathbf{r})| \quad , \quad (1.57)$$

e portanto a indução magnética

$$|H| = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r |\mathbf{A}|) \quad . \quad (1.58)$$

Com a simetria cilíndrica as equações de movimento (1.49) são escritas como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} |\phi| \right) + \left[\left(\frac{1}{r} - e |\mathbf{A}| \right)^2 - 2c_2 + 4c_4 |\phi|^2 \right] |\phi| &= 0 \quad , \\ -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r |\mathbf{A}|) \right) + |\phi|^2 \left(|\mathbf{A}| e^2 - \frac{e}{r} \right) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.59)$$

Consideraremos $|\phi| \simeq \text{const}$ (para r muito grande), de forma que a segunda equação de movimento possa ser resolvida. Assim podemos escrever

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{er} + \frac{c}{e} K_1(e|\phi|r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{er} + \frac{c}{e} \sqrt{\frac{\pi}{2e|\phi|r}} e^{-e|\phi|r} \quad , \quad (1.60)$$

onde c é uma constante de integração. Obtemos a indução a partir de (1.58)

$$|H| = c|\phi| K_0(e|\phi|r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{c}{e} \sqrt{\frac{\pi|\phi|}{2er}} e^{-e|\phi|r} \quad . \quad (1.61)$$

A primeira equação de movimento é aproximadamente satisfeita para

$$|\phi| \simeq \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} \quad , \quad (1.62)$$

com c_2 e c_4 grandes o suficiente para compensar os termos $\frac{1}{er}$ em $|\mathbf{A}|$.

É útil definir o comprimento característico λ (denominado em Supercondutividade de *comprimento de penetração*),

$$\lambda \equiv \frac{1}{e|\phi|} = \sqrt{\frac{2c_4}{e^2c_2}} \quad , \quad (1.63)$$

que mede a região em que H é substancialmente diferente de zero, conforme pode ser visto a partir da equação (1.61).

Como vimos, a primeira equação de movimento é aproximadamente satisfeita (quando r muito grande) para $|\phi|$ dado pela equação (1.62) que é precisamente o valor de ϕ que minimiza o potencial. Isto é, $|\phi|$ é o valor esperado no vácuo do campo ϕ

$$|\phi| = \phi_0 = \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} \quad . \quad (1.64)$$

Redefinindo $|\phi| \rightarrow |\phi'| = \phi_0 + \rho(x)$, onde $\rho(x)$ representa as flutuações em torno do estado de vácuo, a segunda derivada do potencial

$$\left(\frac{dU(\phi)}{d\phi} \right)_{\phi=\phi_0} = 2c_2 \quad , \quad (1.65)$$

fornece o quadrado da massa da partícula escalar no mecanismo de Higgs. Então, as oscilações no potencial devidas à redefinição de ϕ (para satisfazer exatamente a primeira equação de movimento) são dadas por $2c_2\rho^2(x)$ e assim obtemos finalmente que

$$\rho(x) \sim e^{-\sqrt{2c_2}r} \quad . \quad (1.66)$$

Mais uma vez, é útil definir um novo comprimento característico ξ

$$\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{2c_2}} \quad . \quad (1.67)$$

que determina o alcance do campo ϕ até que este atinja seu valor esperado de vácuo.

A constante de integração c na equação (1.61) é determinada com o auxílio do fluxo $\Phi(r) = 2\pi r |\mathbf{A}(\mathbf{r})|$ que deve tender a zero para $\xi \ll r \ll \lambda$. Além disso, para $0 < e|\phi|r \ll 1$,

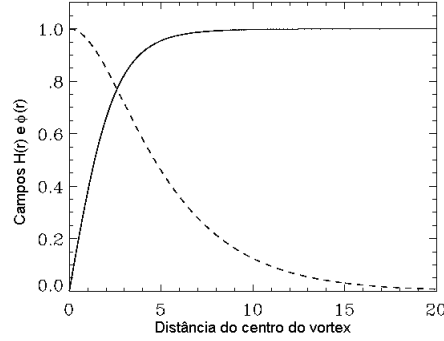


Figura 1.2: Comportamento dos campos ϕ e H . Os comprimentos característicos ξ e λ determinam a fronteira do vortex.

temos

$$K_1(e|\phi|r) \approx \frac{1}{e|\phi|r} \quad , \quad (1.68)$$

e portanto

$$c = -e|\phi| \quad . \quad (1.69)$$

A figura ilustra o comportamento dos campos \mathbf{H} e ϕ . Se ξ e λ são da mesma ordem de magnitude, então há um vortex bem definido. O estado de vácuo é descrito por $\mathbf{H} = 0$, e $|\phi| = \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}$, e o diâmetro do vortex é da ordem de $\xi \sim \lambda$.

Capítulo 2

Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

A teoria da relatividade geral de Einstein é uma teoria geométrica. Isto é, ela baseia-se fundamentalmente no tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Por esta razão, a teoria pode ser denominada uma “teoria métrica”. Uma “teoria escalar” da gravitação foi desenvolvida por Nordström, em 1910, elevando o potencial Newtoniano ao status de escalar de Lorentz [7]. A teoria de Nordström se baseia na equação

$$\square\varphi = 4\pi GT^\mu{}_\mu \quad . \quad (2.1)$$

As soluções da teoria de Nordström são conformalmente planas. Isto é, o tensor métrico pode ser escrito como $g_{\mu\nu} = A\eta_{\mu\nu}$, onde

- $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski;
- A é uma função escalar da posição.

Esta sugestão significa que a massa inercial de partículas fundamentais deve depender do campo escalar. A teoria de Nordström satisfaz a forma fraca do Princípio de Equivalência. Portanto,

- A teoria não prevê deflexão da luz passando próxima a um corpo massivo.

- A teoria prediz uma precessão anômala do perihélio de mercúrio, mas em desacordo com o sinal e magnitude observados.

Após o desenvolvimento da teoria da relatividade geral, e sua comprovação por observações de diversos fenômenos físicos, a própria forma da teoria incentivou muitas “teorias alternativas”. É do nosso interesse estudar uma classe destas teorias, denominada teoria escalar-tensorial, que combina a sólida fundamentação da teoria da relatividade geral a um campo escalar inserido de maneira não trivial, através de um acoplamento não-mínimo. As primeiras tentativas destas teorias se devem a Jordan [8], Fierz [9] e Brans-Dicke [3] considerando um campo escalar sem massa com acoplamento constante com a matéria. Bergmann [10], Wagoner [11] e Nordtvedt [12] formularam a teoria com um acoplamento dinâmico entre a matéria e o campo escalar. Damour e Nordtvedt [13] generalizaram a teoria introduzindo vários campos escalares gravitacionais.

2.1 A Teoria de Brans-Dicke

O modelo mais simples de teoria escalar-tensorial é a teoria desenvolvida por Brans e Dicke que se baseia na idéia de Mach, de que o fenômeno da inércia deve surgir de acelerações em relação à distribuição geral de massa no Universo. As massas inerciais das várias partículas elementares não seriam constantes fundamentais. Ao contrário, representariam a interação destas com um campo Φ devido à distribuição de massa no Universo¹. Mas a escala absoluta das massas de partículas elementares somente pode ser medida através de acelerações gravitacionais $\left(\frac{Gm}{r^2}\right)$. Então, uma conclusão equivalente, é que a constante gravitacional G deve estar relacionada com o valor médio do campo

¹Todas as quantidades desta seção estão no referencial de Jordan-Fierz. Isto é, o campo Φ e a métrica física estarão acoplados nas equações de campo.

escalar Φ , acoplado à densidade de massa do Universo.

A mais simples equação covariante de campo para o campo Φ é

$$\square_{\tilde{g}}\Phi = 4\pi\lambda\tilde{T}_M \quad , \quad (2.2)$$

onde $\square_{\tilde{g}}\Phi = \tilde{\nabla}_{;\rho}^{\rho}\Phi$ é o d'Alambertiano covariante calculado em relação da métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$, λ é uma constante de acoplamento e $\tilde{T}_M^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum devido aos campos de matéria do Universo. Uma estimativa grosseira do valor médio de Φ pode ser feita pelo cálculo do potencial central de uma esfera de gás com densidade cósmica de massa $\rho \sim 10^{-29}\text{g cm}^{-3}$ e raio igual ao raio aparente do universo $R \sim 10^{28}\text{cm}$,

$$\Phi \sim \lambda\rho R^2 \sim \lambda \times 10^{27}\text{g cm}^{-1} \quad . \quad (2.3)$$

Note que este valor é próximo ao valor $\frac{1}{G} = 1.35 \times 10^{28}\text{g cm}^{-1}$. Logo, podemos normalizar o campo Φ como

$$\langle \Phi \rangle \simeq \frac{1}{G} \quad , \quad (2.4)$$

de forma que λ seja da ordem da unidade. Estas considerações levaram Brans e Dicke a sugerir que as equações corretas para a gravitação são obtidas pela substituição da constante gravitacional G por $\frac{1}{\Phi}$ e pela inclusão de um tensor energia-momentum $\tilde{T}_{\Phi}^{\mu\nu}$ para o campo Φ na fonte do campo gravitacional

$$\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R} = -\frac{8\pi}{\Phi}[\tilde{T}_M^{\mu\nu} + \tilde{T}_{\Phi}^{\mu\nu}] \quad . \quad (2.5)$$

Isso, no entanto, não garante a validade do Princípio de Equivalência. Portanto, é necessário requerer que somente $\tilde{g}_{\mu\nu}$, e não Φ , esteja nas equações de movimento das partículas. Portanto a equação que descreve a troca de energia entre matéria e gravitação deve ser a mesma da Teoria da Relatividade Geral

$$\tilde{T}_M^{\mu}{}_{\nu;\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{T}_M^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\rho}^{\mu}\tilde{T}_M^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\tilde{T}_M^{\mu}{}_{\rho} = 0 \quad . \quad (2.6)$$

Calculando a divergência covariante da equação (2.5) multiplicada por Φ e usando as identidades de Bianchi, obtemos

$$(\tilde{R}_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \tilde{R})\Phi_{;\mu} = -8\pi \tilde{T}_\Phi{}^\mu{}_{\nu;\mu} \quad . \quad (2.7)$$

O tensor simétrico mais geral que pode ser construído a partir de termos contendo duas derivadas de um ou dois campos Φ , além do próprio Φ , é

$$\tilde{T}_\Phi{}^\mu{}_\nu = A(\Phi)\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + B(\Phi)\delta^\mu_\nu\Phi_{;\rho}\Phi_{;\rho} + C(\Phi)\Phi_{;\nu}{}^\mu{}_{;\mu} + \delta^\mu_\nu D(\Phi)\square\Phi \quad , \quad (2.8)$$

cuja divergência covariante é

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\Phi{}^\mu{}_{\nu;\mu} &= [A'(\Phi) + B'(\Phi)]\Phi_{;\nu}\Phi_{;\mu} \\ &+ [A(\Phi) + D'(\Phi)]\Phi_{;\nu}\square_{\tilde{g}}\Phi \\ &+ [A(\Phi) + 2B(\Phi) + C'(\Phi)]\Phi_{;\nu}{}^\mu{}_{;\mu} \\ &+ D(\Phi)(\square_{\tilde{g}}^2\Phi)_{;\nu} + C(\Phi)\square_{\tilde{g}}(\Phi_{;\nu}) \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $(') \equiv \frac{d}{d\Phi}$.

O primeiro termo da equação (2.7) pode ser determinado utilizando-se a relação de comutação de derivadas covariantes de um campo tensorial

$$\tilde{V}_{\mu;\nu;\kappa}^\lambda - \tilde{V}_{\mu;\kappa;\nu}^\lambda = \tilde{V}_\mu^\sigma \tilde{R}_{\sigma\nu\kappa}^\lambda - \tilde{V}_\sigma^\lambda \tilde{R}_{\mu\nu\kappa}^\sigma \quad , \quad (2.10)$$

que mostra que $\tilde{R}_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ expressa a presença de um campo gravitacional puro. Assim,

$$\Phi_{;\sigma}\tilde{R}_\nu^\sigma = \Phi_{;\mu}{}^\mu{}_{;\nu} - \Phi_{;\nu}{}^\mu{}_{;\mu} = (\square_{\tilde{g}}\Phi)_{;\nu} - \square_{\tilde{g}}(\Phi_{;\nu}) \quad . \quad (2.11)$$

Utilizando o traço da equação (2.5) juntamente com a equação (2.2), obtemos

$$\tilde{R} = \frac{8\pi}{\Phi} \left[\frac{1}{4\pi\lambda}\square_{\tilde{g}}\Phi + (A(\Phi) + 4B(\Phi))\Phi_{;\mu}\Phi_{;\mu} + (C(\Phi) + 4D(\Phi))\square_{\tilde{g}}\Phi \right] \quad . \quad (2.12)$$

Assim, o lado esquerdo da equação (2.7) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
(\tilde{R}_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \tilde{R})\Phi_{;\mu} &= (\square_{\tilde{g}}\Phi)_{;\nu} - \square_{\tilde{g}}(\Phi_{;\nu}) \\
&\quad - \frac{4\pi}{\Phi}\Phi_{;\nu} \left[\left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\Phi) + 4D(\Phi) \right) \square_{\tilde{g}}\Phi + (A(\Phi) + 4B(\Phi))\Phi_{;\mu}\Phi_{;\mu} \right] .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Comparando os coeficientes de $(\square_{\tilde{g}}\Phi)_{;\nu}$, $\square_{\tilde{g}}(\Phi_{;\nu})$, $\Phi_{;\nu}\square_{\tilde{g}}\Phi$, $\Phi_{;\mu}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}$ e $\Phi_{;\mu}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\mu}$ nas equações (2.9-2.13), a equação (2.7) requer o sistema de equações

$$\begin{aligned}
-8\pi D(\Phi) &= 1 \\
8\pi C(\Phi) &= 1 \\
\frac{4\pi}{\Phi} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\Phi) + 4D(\Phi) \right) &= 8\pi(A(\Phi) + D'(\Phi)) \\
\frac{4\pi}{\Phi}(A(\Phi) + 4B(\Phi)) &= 8\pi(A'(\Phi) + B'(\Phi)) \\
A(\Phi) + 2B(\Phi) + C'(\Phi) &= 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

cuja solução única é

$$\begin{aligned}
A(\Phi) &= \frac{\omega}{8\pi\Phi} \quad , \quad B(\Phi) = -\frac{\omega}{16\pi\Phi} \quad , \\
C(\Phi) &= \frac{1}{8\pi} \quad , \quad D(\Phi) = -\frac{1}{8\pi} \quad .
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde definimos o parâmetro adimensional $\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2}$. Finalmente podemos escrever as equações de campo da teoria de Brans-Dicke

$$\begin{aligned}
\square_{\tilde{g}}\Phi &= \frac{8\pi}{3 + 2\omega} \tilde{T}_M^{\mu\mu} \quad , \\
\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} &= \frac{8\pi}{\Phi}\tilde{T}_{M\mu\nu} - \frac{\omega}{\Phi^2}(\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\Phi_\rho\Phi_{;\rho}) \\
&\quad + \frac{1}{\Phi}(\Phi_{;\mu;\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu}\square_{\tilde{g}}\Phi) \quad .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Pela estimativa do valor de λ , feita no início da seção, ω também seria da ordem da unidade. Se ω for muito maior que a unidade, então

$$\square_{\tilde{g}}\Phi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad , \tag{2.17}$$

e portanto

$$\Phi = \langle \Phi \rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{G} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) . \quad (2.18)$$

Assim, a segunda equação de (2.16), para ω muito maior que a unidade, é escrita

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} = 8\pi G\tilde{T}_{M\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) . \quad (2.19)$$

Consequentemente, a Teoria de Brans-Dicke retoma a Teoria da Relatividade Geral no limite $\omega \rightarrow \infty$.

É importante observar que o campo escalar Φ , na teoria de Brans-Dicke, somente influencia as equações de campo gravitacional. Uma vez calculado $\tilde{g}_{\mu\nu}$, os efeitos da gravitação em um sistema físico arbitrário serão determinados pelas mesmas equações de movimento da Teoria da Relatividade Geral.

2.2 Formulação Lagrangiana das Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

Nesta seção iremos estudar uma classe mais geral de teorias escalares-tensoriais da gravitação. No que segue, a Teoria de Brans-Dicke pode ser obtida como um caso particular, fazendo-se o parâmetro ω constante. As equações de campo destas teorias decorrem da ação

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\Phi \tilde{R} - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right] + \mathcal{S}_m[\Psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}] , \quad (2.20)$$

onde \tilde{R} é o escalar de curvatura associado à métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e o parâmetro $\omega(\Phi)$ é função arbitrária do campo escalar da teoria. \mathcal{S}_m é a ação de matéria, composta pelos campos de matéria Ψ_m e pela métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$ que se acoplam não-minimamente, obedecendo ao Princípio de Equivalência.

A variação da ação (2.20) em relação à métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e ao campo escalar Φ fornece as equações de campo

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{\mu\nu} &= \frac{8\pi}{\Phi}\tilde{T}_{\mu\nu} \\ &+ \frac{\omega(\Phi)}{\Phi^2} \left[\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi \right] \\ &+ \frac{1}{\Phi} \left[\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\Phi - \tilde{g}_{\mu\nu}\square_{\tilde{g}}\Phi \right]\end{aligned}\quad (2.21)$$

$$\square_{\tilde{g}}\Phi = \frac{1}{2\omega(\Phi) + 3} \left(8\pi\tilde{T} - \frac{d\omega}{d\Phi}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi \right)\quad (2.22)$$

onde $\tilde{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta\mathcal{S}_m}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}$ e $\square_{\tilde{g}}\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\partial_\mu\left(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right)$.

Estas equações não são convenientes pois contêm termos de acoplamento entre a métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e o campo escalar Φ . A ação (2.20) e as equações de campo (2.22-2.21) estão no denominador referencial de Jordan-Fierz. É útil desacoplar $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e Φ , passando para o referencial de Einstein (ou conforme) em que os graus de liberdade, escalar e tensorial, são desacoplados através de uma transformação conforme [14]

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu} \quad .\quad (2.23)$$

Definindo as quantidades

$$\alpha(\varphi) \equiv \frac{d}{d\varphi}(\ln \Omega(\varphi)) = \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{\Omega'}{\Omega} \quad ,\quad (2.24)$$

e

$$G_*\Omega^2(\varphi) = \frac{1}{\Phi} \quad ,\quad (2.25)$$

onde $\Omega(\varphi)$ é uma função arbitrária de acoplamento² e $\alpha(\varphi)$ descreve o acoplamento da matéria com o campo φ , a ação (2.20) é, então, escrita no referencial de Einstein como

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi] + \mathcal{S}_m[\Psi_m, \Omega^2(\varphi)g_{\mu\nu}] \quad ,\quad (2.26)$$

²A especificação da função $\Omega(\varphi)$ define univocamente teorias escalares-tensoriais distintas.

onde R é o escalar de curvatura associado à métrica $g_{\mu\nu}$ e G_* é a constante de gravitação média.

Para relacionar as quantidades entre os referenciais de Einstein ($g_{\mu\nu}$, φ e $\Omega(\varphi)$) e de Jordan-Fierz ($\tilde{g}_{\mu\nu}$, Φ e $\omega(\Phi)$) devemos impor a condição

$$\alpha^2(\varphi) = \frac{1}{2\omega(\Phi) + 3} \quad . \quad (2.27)$$

Obtemos as equações de campo no referencial de Einstein fazendo a variação da ação (2.26) em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ e ao campo escalar φ

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_* T_{\mu\nu} + 2(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\lambda \varphi \partial_\lambda \varphi) \quad , \quad (2.28)$$

$$\square_g \varphi = -4\pi G_* \alpha(\varphi) T^\mu{}_\mu \quad , \quad (2.29)$$

onde $T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}$ e $\square_g \varphi \equiv \varphi_{;\mu}{}^\mu$ são o tensor energia-momentum e o operador de Laplace-Beltrami no referencial de Einstein, respectivamente.

As quantidades, no referencial de Einstein e no referencial de Jordan-Fierz se relacionam das seguintes formas

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \Omega^{-2}(\varphi) \tilde{g}_{\mu\nu} \quad , \\ g &= \Omega^{-4}(\varphi) \tilde{g} \quad , \\ T_{\mu\nu} &= \Omega^2(\varphi) \tilde{T}_{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (2.30)$$

No referencial de Jordan-Fierz a matéria se acopla minimamente à métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Neste referencial, o tensor energia-momentum $\tilde{T}_{\mu\nu}$ se conserva e o Princípio de Equivalência é válido. No entanto, no referencial de Einstein, o tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$ não se conserva. Utilizando as identidades de Bianchi e a equação de (2.28), obtemos

$$(T^\mu{}_\nu + S^\mu{}_\nu)_{;\mu} = 0 \quad , \quad (2.31)$$

onde

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi G_*} (\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\lambda \varphi \partial_\lambda \varphi) \quad , \quad (2.32)$$

indicando que existe troca de energia e momentum entre a matéria e o campo escalar.

Capítulo 3

Cordas Cóslicas Supercondutoras em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação

Conforme vimos no capítulo 2, vários modelos de calibre admitem defeitos topológicos como soluções solitônicas resultantes da quebra espontânea de simetrias locais. As cordas cósmicas, particularmente, têm atraído bastante atenção devido à possibilidade de formarem estruturas em grande escala no Universo [2]. Um mecanismo relevante para se compreender a formação de estruturas por cordas cósmicas envolve cordas longas se movendo com velocidades relativísticas no plano normal à corda, causando *wakes*¹ [15]. Este mecanismo foi considerado na Teoria da Relatividade Geral [16, 17]. No entanto, o mecanismo de formação de wakes, por cordas longas, também pode ser compreendido no contexto de Teorias Escalares-Tensoriais da gravitação [18]. Nestas teorias a presença do campo escalar induz uma estrutura no espaço-tempo similar àquela gerada por uma corda com velocidade relativística em Relatividade Geral [17]. Pode-se mostrar que este efeito é amplificado na presença de torção [19]. Este é apenas um dos muitos exemplos da riqueza do estudo de cordas cósmicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação.

¹Denominam-se wakes as perturbações no espaço-tempo geradas pelo movimento de cordas com velocidades relativísticas.

3.1 Cordas C3smicas Supercondutoras

A teoria microsc3pica que descreve um vortex supercondutor² 3 o modelo bos3nico de Witten [20], consistindo de dois pares de campos escalares complexos e de calibre (ϕ, B_μ) e (σ, A_μ) . Seja o Lagrangiano

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - \frac{1}{2}(D_\mu\sigma)(D^\mu\sigma)^* - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - V(|\phi|, |\sigma|) \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ e $H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. As derivadas covariantes nos termos cin3ticos, expressando o acoplamento m3nimo com os campos vetoriais, s3o dadas por

$$D_\mu\phi \equiv (\nabla_\mu + iqB_\mu)\phi \quad \text{e} \quad D_\mu\sigma \equiv (\nabla_\mu + ieA_\mu)\sigma \quad , \quad (3.2)$$

respectivamente. Conforme visto na se33o (2.5.2), a forma do potencial $V(|\phi|, |\sigma|)$, dada em termos gerais de acoplamento entre os campos escalares, 3 escolhida de forma tal que o par (ϕ, B_μ) quebre a simetria $U(1)$ no v3cuo originando a configura33o de vortex, e o par (σ, A_μ) quebre a simetria $U_{em}(1)$ no n3cleo do vortex originando a supercondutividade

$$V(|\phi|, |\sigma|) = \frac{\lambda_\phi}{8}(|\phi|^2 - \eta^2)^2 + f(|\phi|^2 - \eta^2)|\sigma|^2 + \frac{\lambda_\sigma}{4}|\sigma|^4 + \frac{m_\sigma^2}{2}|\sigma|^2 \quad . \quad (3.3)$$

O modelo de corda 3 aqui totalmente fixado se considerarmos a solu33o³ particular de Nielsen e Olesen [21]

$$\phi = \phi(r)e^{i\vartheta} \quad \text{e} \quad B_\mu = \frac{1}{q}[Q(r) - 1]\delta_\mu^\theta \quad . \quad (3.4)$$

para o par (ϕ, B_μ) . Para o par (σ, A_μ) o car3ter supercondutor 3 fixado pelas formas [20]

$$\sigma = \sigma(r)e^{i\chi(t,z)} \quad , \quad A_t = \frac{1}{e}[P_t(r) - \partial_t\chi] \quad , \quad A_z = \frac{1}{e}[P_z(r) - \partial_z\chi] \quad , \quad (3.5)$$

²Nos restringiremos a configura333es correspondentes a um vortex carregado de corrente, isolado e est3tico ao longo do eixo z .

³Em um sistema de coordenadas cil3ndricas (t, r, θ, z) tal que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

onde P_t e P_z correspondem, respectivamente, aos campos elétrico (corrente tipo-tempo) e magnético (corrente tipo-espço), respectivamente. As funções ϕ , $Q(r)$, $\sigma(r)$, $P_t(r)$ e $P_z(r)$ devem ser regulares em todo o espaço e satisfazem às condições [21, 22]

- No caso elétrico, onde $P_z = 0$,

$$\phi(0) = 0 \quad , \quad P_t(0) = 1 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \eta \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P_t(r) = 0 \quad . \quad (3.6)$$

- No caso magnético, onde $P_t = 0$,

$$\phi(0) = 0 \quad , \quad P_z(0) = 1 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \eta \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P_z(r) = 0 \quad . \quad (3.7)$$

- No caso misto, onde ambos P_z e P_t não se anulam

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 \quad , \quad P_t(0) = P_z(0) = 1 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \eta \quad , \\ \lim_{r \rightarrow \infty} P_t(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} P_z(r) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para estudarmos o campo gravitacional gerado pelas três configurações possíveis de uma corda supercondutora, iniciaremos com a ação no referencial de Jordan-Fierz

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} [\Phi \tilde{R} - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi] + \mathcal{S}_m[\psi_m, \tilde{g}_{\mu\nu}] \quad (3.9)$$

onde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é a métrica física que contém tanto os graus de liberdade escalares quanto os tensoriais. \mathcal{S}_m é a ação dos campos de matéria obtida a partir do Lagrangiano (3.1).

Através da transformação conforme (2.23), a ação (3.9) é escrita no referencial de Einstein como

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi] \\ + \int d^4x \sqrt{-g} [-\frac{1}{2} \Omega^2(\varphi) [(D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + (D_\mu \sigma)^* (D^\mu \sigma)] \\ - \frac{1}{16\pi} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + H_{\mu\nu} H^{\mu\nu}) - \Omega^2(\varphi) V(|\phi|, |\sigma|)] \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Escrevemos, então, a métrica geral com simetria cilíndrica [23, 24] na forma

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{2(\gamma-\psi)}(dr^2 + dz^2) + \beta^2 e^{-2\psi} d\theta^2 \quad , \quad (3.11)$$

onde $\psi = \psi(r)$, $\gamma = \gamma(r)$ e $\beta = \beta(r)$.

Variando a ação (3.10) em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ e ao campo escalar φ , obtemos as equações de campo (2.28-2.29) no referencial de Einstein. É importante notar que contraindo as equações (2.28) com a métrica $g^{\mu\nu}$ obtemos o escalar de curvatura no referencial de Einstein

$$R = 2\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \quad , \quad (3.12)$$

a partir do qual podemos reescrever as equações generalizadas de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_* T_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \quad . \quad (3.13)$$

Utilizando a métrica (3.11) obtemos as componentes não-nulas do tensor de Ricci

$$R_t^t = e^{2(\psi-\gamma)}[\psi'' + \frac{\beta'}{\beta}\psi'] \quad , \quad (3.14)$$

$$R_r^r = e^{2(\psi-\gamma)}[-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta}\psi' + 2(\psi')^2 + \gamma'' - \frac{\beta'}{\beta}\gamma' + \frac{\beta''}{\beta}] \quad , \quad (3.15)$$

$$R_\theta^\theta = e^{2(\psi-\gamma)}[-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta}\psi' + \frac{\beta''}{\beta}] \quad , \quad (3.16)$$

$$R_z^z = e^{2(\psi-\gamma)}[-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta}\psi' + \gamma'' + \frac{\beta'}{\beta}\gamma'] \quad . \quad (3.17)$$

onde (') expressa uma diferenciação em relação a r . Desta forma, as equações de campo são explicitamente escritas como

$$\beta'' = 8\pi G_* e^{2(\gamma-\psi)}\beta [T_t^t + T_\theta^\theta] \quad ,$$

$$(\beta\psi')' = 8\pi G_* e^{2(\gamma-\psi)}\beta T_t^t \quad ,$$

$$\beta'\gamma' = -\beta(\psi')^2 - \beta(\varphi')^2 + 4\pi G_* e^{2(\gamma-\psi)}\beta (T_t^t - T_r^r + T_\theta^\theta + T_z^z) \quad , \quad (3.18)$$

$$(\beta\gamma')' = 8\pi G_* e^{2(\gamma-\psi)}\beta (T_t^t + T_z^z) \quad ,$$

$$(\beta\varphi')' = -4\pi G_* \alpha(\varphi)T \quad .$$

O tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$ deve ser calculado para cada uma das configurações possíveis (elétrica, magnética e mista) a partir da definição

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (3.19)$$

Assim as componentes não nulas do tensor energia-momentum são

$$\begin{aligned} T_t^t = & -\frac{1}{2}\Omega^2(\varphi) \left\{ -g^{tt}\sigma^2 P_t^2 + g^{rr} \left[\phi'^2 + \sigma'^2 \right] + g^{\theta\theta}\phi^2 Q^2 + g^{zz}\sigma^2 P_z^2 \right\} \\ & - \frac{1}{8\pi} g^{rr} \left[-g^{tt} \frac{P_t'^2}{e^2} + g^{\theta\theta} \frac{Q'^2}{q^2} + g^{zz} \frac{P_z'^2}{e^2} \right] - \Omega^4(\varphi) V(|\sigma|, |\phi|) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} T_r^r = & -\frac{1}{2}\Omega^2(\varphi) \left\{ +g^{tt}\sigma^2 P_t^2 - g^{rr} \left[\phi'^2 + \sigma'^2 \right] + g^{\theta\theta}\phi^2 Q^2 + g^{zz}\sigma^2 P_z^2 \right\} \\ & + \frac{1}{8\pi} g^{rr} \left[+g^{tt} \frac{P_t'^2}{e^2} + g^{\theta\theta} \frac{Q'^2}{q^2} + g^{zz} \frac{P_z'^2}{e^2} \right] - \Omega^4(\varphi) V(|\sigma|, |\phi|) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} T_\theta^\theta = & -\frac{1}{2}\Omega^2(\varphi) \left\{ +g^{tt}\sigma^2 P_t^2 + g^{rr} \left[\phi'^2 + \sigma'^2 \right] - g^{\theta\theta}\phi^2 Q^2 + g^{zz}\sigma^2 P_z^2 \right\} \\ & - \frac{1}{8\pi} g^{rr} \left[+g^{tt} \frac{P_t'^2}{e^2} + g^{\theta\theta} \frac{Q'^2}{q^2} + g^{zz} \frac{P_z'^2}{e^2} \right] - \Omega^4(\varphi) V(|\sigma|, |\phi|) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} T_z^z = & -\frac{1}{2}\Omega^2(\varphi) \left\{ +g^{tt}\sigma^2 P_t^2 + g^{rr} \left[\phi'^2 + \sigma'^2 \right] + g^{\theta\theta}\phi^2 Q^2 - g^{zz}\sigma^2 P_z^2 \right\} \\ & - \frac{1}{8\pi} g^{rr} \left[+g^{tt} \frac{P_t'^2}{e^2} + g^{\theta\theta} \frac{Q'^2}{q^2} - g^{zz} \frac{P_z'^2}{e^2} \right] - \Omega^4(\varphi) V(|\sigma|, |\phi|) \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde, no caso elétrico a componente P_z se anula, e no caso magnético a componente P_t se anula. Para resolver as equações de campo dividimos o espaço em duas regiões distintas: uma região interior à corda $0 < r \leq r_0$, onde todos os campos de matéria contribuem para o tensor energia-momentum; e uma região exterior à corda $r \geq r_0$, onde os únicos campos de matéria que contribuem para o tensor energia-momentum são os campos P_t e P_z . r_0 é o raio da corda determinado pela relação entre os comprimentos característicos definidos na seção (1.5.2). Após resolvermos as equações de campo nas duas regiões aplicamos as condições de continuidade em $r = r_0$ à métrica e suas derivadas, obtendo assim a relação

entre os parâmetros internos da corda e a geometria do espaço-tempo [24]. Neste trabalho, nos concentraremos na obtenção das soluções exteriores à corda para as três configurações possíveis de campos. As soluções da região interior para os casos elétrico e magnético são obtidas nos trabalhos de Guimarães e Naves de Oliveira [25, 26] e de Ferreira, Guimarães e Helayël-Neto [27], respectivamente.

3.2 Álgebra de Rainich Generalizada e as Soluções das Equações de Campo

Conforme exposto na seção anterior, na região exterior à corda ($r > r_0$), o único campo que contribui para o tensor energia-momentum é o campo eletromagnético. Portanto, para $r > r_0$, podemos observar que o tensor energia-momentum possui a forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[H^{\mu\alpha} H_{\alpha}{}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \right] , \quad (3.24)$$

com as seguintes propriedades particulares

$$T_{\mu}{}^{\mu} = 0 \quad \text{e} \quad T_{\mu}{}^{\alpha} T_{\alpha}{}^{\nu} = \frac{1}{4} (T^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}) \delta_{\mu}{}^{\nu} . \quad (3.25)$$

Estas propriedades foram primeiramente estabelecidas por Rainich [28] e foram posteriormente denominadas de *condições de Rainich*⁴. Mais tarde, estas propriedades foram retomadas por Misner e Wheeler [29] através das rotações de dualidade⁵. L. Witten [23] as obteve através do cálculo espinorial [14] e as aplicou às equações de campo da Relatividade Geral. Assim, as propriedades do tensor energia-momentum implicam em propriedades do tensor de Ricci denominadas “*álgebra de Rainich*”.

⁴Juntamente com propriedades diferenciais sobre $T_{\mu\nu}$, que no caso deste trabalho são trivialmente satisfeitas.

⁵Estas propriedades são a base da “*Geometrodinâmica*” desenvolvida por Misner e Wheeler.

Na teoria escalar-tensorial as propriedades (3.25) de $T_{\mu\nu}$ se refletem diretamente no tensor de Einstein descreverendo uma situação física onde há a presença de campos gravitacionais e campos eletromagnéticos. Portanto, nesta situação os campos eletromagnéticos são tratados da mesma forma que os campos gravitacionais, sendo necessário somente a métrica (3.11) e suas derivadas para a solução do problema. Aqui reside a vantagem do método em relação à solução via equações de campo (3.18), que envolvem os campos de matéria juntamente com os campos geométricos.

As condições de Rainich sobre o tensor de Einstein podem ser reescritas em termos do tensor de Ricci, que no caso da teoria escalar tensorial são modificadas pela presença do campo escalar φ e denominam-se “álgebra de Rainich generalizada” [25, 26, 27, 30, 31]

$$R = R_t^t + R_r^r + R_\theta^\theta + R_z^z = 2g^{rr}(\phi')^2 \quad , \quad (3.26)$$

$$(R_t^t)^2 = (R_r^r - 2g^{rr}(\phi')^2)^2 = (R_\theta^\theta)^2 = (R_z^z)^2 \quad . \quad (3.27)$$

As equações (3.26-3.27) admitem três casos possíveis de soluções

- Caso I: Caso Elétrico

$$R_t^t = -R_\theta^\theta \quad , \quad R_t^t = R_r^r - 2g^{rr}(\phi')^2 \quad , \quad R_\theta^\theta = R_z^z \quad . \quad (3.28)$$

- Caso II: Caso Magnético

$$R_t^t = R_\theta^\theta \quad , \quad R_t^t = -R_r^r + 2g^{rr}(\phi')^2 \quad , \quad R_\theta^\theta = -R_z^z \quad . \quad (3.29)$$

- Caso III: Caso Misto

$$R_t^t = -R_\theta^\theta \quad , \quad R_t^t = -R_r^r + 2g^{rr}(\phi')^2 \quad , \quad R_\theta^\theta = -R_z^z \quad . \quad (3.30)$$

A identificação de cada caso com o eletromagnetismo é feita por Witten [23] e está de acordo com os três casos (3.6, 3.7, 3.8) da seção anterior. No que segue, utilizaremos as equações (3.28-3.30) para obter a métrica exterior à corda.

3.2.1 Caso I: Corda Portando Corrente Tipo-Tempo

Utilizando a métrica cilíndrica geral (3.11), que aqui será rotulada ds_E^2 para distinguir dos outros casos, temos

$$ds_E^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{2(\gamma-\psi)}(dr^2 + dz^2) + \beta^2 e^{-2\psi} d\theta^2 \quad (3.31)$$

onde ψ , γ e β são funções de r , e são determinadas a seguir pela álgebra de Rainich. As componetes não nulas do tensor de Ricci para a métrica (3.31) são

$$R_t^t = g^{rr}(\psi'' + \frac{\beta'}{\beta}\psi') \quad , \quad (3.32)$$

$$R_r^r = g^{rr}(-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta}\psi' + 2(\psi')^2 + \gamma'' - \frac{\beta'}{\beta}\gamma' + \frac{\beta''}{\beta}) \quad , \quad (3.33)$$

$$R_\theta^\theta = g^{rr}(-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta}\psi' + \frac{\beta''}{\beta}) \quad , \quad (3.34)$$

$$R_z^z = g^{rr}(-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta}\psi' + \gamma'' + \frac{\beta'}{\beta}\gamma') \quad . \quad (3.35)$$

Então, a partir das condições (3.28) e da equação de campo (2.29) para o campo escalar φ , obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\beta'' = 0 \quad , \quad (3.36)$$

$$\psi'' + \frac{\beta'}{\beta}\psi' - (\psi')^2 - \gamma'' = (\varphi')^2 \quad , \quad (3.37)$$

$$\gamma'' + \frac{\beta'}{\beta}\gamma' = 0 \quad , \quad (3.38)$$

$$(\beta\varphi')' = 0 \quad , \quad (3.39)$$

cuja solução única é (ver apêndice A)

$$\beta(r) = Br \quad , \quad (3.40)$$

$$\phi(r) = D \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad , \quad (3.41)$$

$$\gamma(r) = m^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad , \quad (3.42)$$

$$\psi(r) = n \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - \ln \left(\frac{\frac{r}{r_0} + k}{1 + k} \right) \quad . \quad (3.43)$$

Portanto, o campo gravitacional exterior a uma corda cósmica portando corrente tipo-tempo é determinado pela métrica

$$ds_E^2 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2m^2-2n} W^2(r) (dr^2 + dz^2) + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2n} W^2(r) B^2 r^2 d\theta^2 \quad , \\ - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2n} \frac{1}{W^2(r)} dt^2 \quad (3.44)$$

onde

$$W(r) \equiv \frac{\left(\frac{r}{r_0} \right)^{2n} + k}{1 + k} \quad . \quad (3.45)$$

As constantes m, n, k, B e D são funções dos parâmetros internos da corda e determinadas após a inclusão dos campos de matéria.

3.2.2 Caso II: Corda Portando Corrente Tipo-Espaço

Neste caso é conveniente escrever a métrica (3.11), realizando a transformação $dz \rightarrow idt$. Desta forma, temos ainda a métrica geral cilíndrica, porém mais conveniente para o cálculo.

$$ds_M^2 = e^{2\psi} dz^2 + e^{\gamma-\psi} (dr^2 - dt^2) + \beta^2 e^{-2\psi} d\theta^2 \quad . \quad (3.46)$$

O propósito desta transformação é obter o mesmo sistema de equações gerado pela álgebra de Rainich da corda com corrente tipo-tempo. Para a métrica ds_M^2 as componentes não nulas do tensor de Ricci são (ver apêndice A)

$$R_t^t = g^{rr} \left(-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta} \psi' + \gamma'' + \frac{\beta'}{\beta} \gamma' \right) \quad , \quad (3.47)$$

$$R_r^r = g^{rr} \left(-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta} \psi' + 2(\psi')^2 + \gamma'' - \frac{\beta'}{\beta} \gamma' + \frac{\beta''}{\beta} \right) \quad , \quad (3.48)$$

$$R_\theta^\theta = g^{rr} \left(-\psi'' - \frac{\beta'}{\beta} \psi' + \frac{\beta''}{\beta} \right) \quad , \quad (3.49)$$

$$R_z^z = g^{rr} \left(\psi'' + \frac{\beta'}{\beta} \psi' \right) \quad . \quad (3.50)$$

A álgebra de Rainich (3.29), juntamente com a equação de campo para o campo escalar φ , fornece o mesmo conjunto de equações (3.36-3.39) com soluções (3.40-3.43). A métrica exterior à corda portando corrente tipo-espaco é escrita como

$$ds_M^2 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2m^2-2n} W^2(r) (dr^2 - dt^2) + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2n} W^2(r) B^2 r^2 d\theta^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2n} \frac{1}{W^2(r)} dz^2 \quad , \quad (3.51)$$

onde $W(r)$ é dado pela expressão (3.45) e as constantes m , n , k , D são determinadas a partir dos campos de matéria, após a realização das condições de continuidade [25] sobre a métrica no ponto $r = r_0$.

3.2.3 Caso III: Corda Portando Corrente Mista

Utilizando agora a álgebra de Rainich para o caso onde há corrente tipo-tempo e corrente tipo-espaço, que denominamos caso misto, impomos a métrica geral (3.11)

$$ds_{E-M}^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{2(\gamma-\psi)}(dr^2 + dz^2) + \beta^2 e^{-2\psi} d\theta^2 \quad . \quad (3.52)$$

Obtendo daí o sistema de equações diferenciais

$$\beta'' = 0 \quad , \quad (3.53)$$

$$\psi'' + \frac{\beta'}{\beta}\psi' - (\psi')^2 = \gamma'' + \frac{\beta''}{\beta} - (\varphi')^2 \quad , \quad (3.54)$$

$$\gamma'' + \frac{\beta'}{\beta}\gamma' = 2\psi'' + 2\frac{\beta'}{\beta}\psi' \quad , \quad (3.55)$$

$$(\beta\varphi')' = 0 \quad . \quad (3.56)$$

Cuja solução única é (ver apêndice A)

$$\beta(r) = Br \quad , \quad (3.57)$$

$$\phi(r) = D \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad , \quad (3.58)$$

$$\gamma(r) = 2\psi(r) + \left(\frac{C}{B} \right) \ln r \quad , \quad (3.59)$$

$$\psi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r^2}{n-1} [-c_1 \sin(\sqrt{n-1} \ln r) + c_2 \cos(\sqrt{n-1} \ln r)]^2 \right) \quad , \quad (3.60)$$

com

$$n \equiv (F - D^2) \quad . \quad (3.61)$$

Portanto, o campo gravitacional exterior à corda mista é determinado pela métrica

$$ds_{E-M}^2 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{V^2(r)}{(n-1)} dz^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{F+1} \frac{V^2(r)}{(n-1)} (dr^2 - dt^2) + B^2 \frac{(n-1)}{V^2(r)} d\theta^2 \quad , \quad (3.62)$$

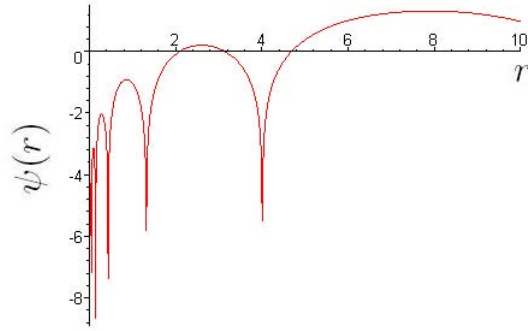


Figura 3.1: Comportamento da solução ψ da equação de Rainich (aqui fixamos $n = 2$ e $C_1 = C_2 = 1$).

onde

$$V(r) = [-c_1 \sin(\sqrt{n-1} \ln r) + c_2 \cos(\sqrt{n-1} \ln r)] \quad . \quad (3.63)$$

As constantes C_1, C_2, C, B, D e F serão determinadas após a inclusão dos campos de matéria.

O comportamento das componentes da métrica está ilustrado nas figuras (3.2-3.4). Observamos que, apesar do comportamento oscilatório de $\psi(r)$, os coeficientes métricos não mudam de sinal. Porém, fica evidente que esta solução não é assintoticamente correspondente à métrica de Minkowski.

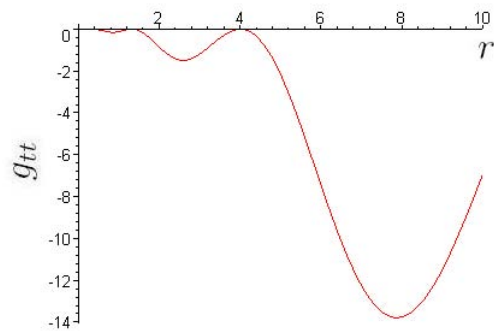


Figura 3.2: Comportamento de g_{tt} para $n = 2$ e $C_1 = C_2 = 1$.

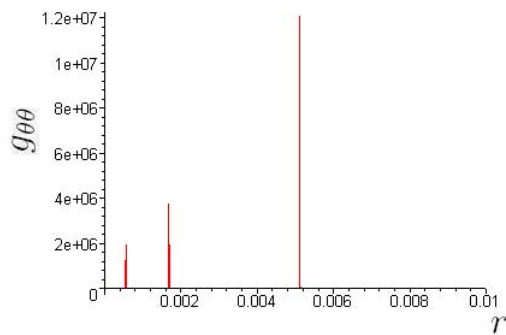


Figura 3.3: Comportamento de $g_{\theta\theta}$ para $n = 2$ e $C_1 = C_2 = 1$.

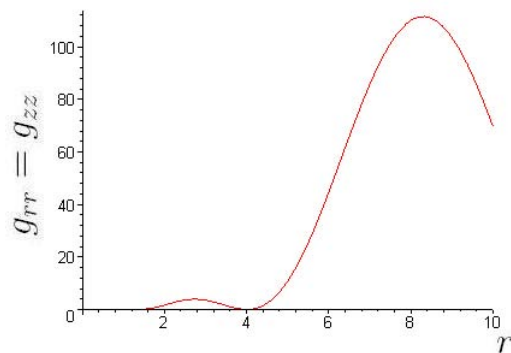


Figura 3.4: Comportamento de g_{rr} e g_{zz} para $n = 2$ e $C_1 = C_2 = 1$.

Capítulo 4

Uma Aplicação da Métrica da Corda Cósmica Supercondutora do Tipo-Elétrico

Cordas cósmicas podem ser responsáveis pela formação de estruturas em larga escala no Universo [32], pela anisotropia da radiação cósmica de fundo [33, 34] e por efeitos de lentes gravitacionais [35]. Neste capítulo, utilizaremos a métrica (3.44) para tratar o problema das curvas de rotação de galáxias [36].

4.1 Condições Geométricas Sobre os Tipos de Matéria

Nesta seção determinaremos as condições necessárias e suficientes para que a velocidade tangencial de partículas teste, percorrendo curvas de rotação fechadas, seja constante. Os resultados apresentados nesta seção independem da configuração material presente no halo da galáxia. A análise aqui apresentada é puramente geométrica.

Iremos supor que a matéria luminosa não contribui de forma determinante para a densidade de energia total da galáxia. Esta hipótese é sustentada pelos dados experimentais¹ mostrando que os halos de galáxias são compostas por pelo menos 90% de matéria escura.

¹Ao menos na região onde se observa o fenômeno de achatamento das curvas de rotação.

Portanto, iremos considerar a matéria escura como o principal gerador da dinâmica do sistema, sendo uma boa aproximação desprezar os efeitos devidos à matéria luminosa. É ainda razoável supor que o halo de matéria escura é simétrico em relação ao eixo de rotação da galáxia, o que deve se refletir na simetria do espaço-tempo.

4.1.1 Determinação da Forma do Elemento de Linha

O elemento de linha que possui as características descritas acima pode ser escrito genericamente na forma

$$ds^2 = -e^{2\psi}(dt + \omega d\theta)^2 + e^{-2\psi}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \mu^2 d\theta^2] \quad , \quad (4.1)$$

onde ψ , ω , γ e μ , são funções de (ρ, z) .

O Lagrangiano para uma partícula teste em um espaço-tempo estático², $\omega = 0$, descrito pelo elemento de linha (4.1) é dado por³

$$2\mathcal{L} = -e^{2\psi}\dot{t}^2 + e^{-2\psi}[e^{2\gamma}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + \mu^2\dot{\theta}^2] \quad , \quad (4.2)$$

cujos momenta canônicos associados, $p_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\alpha}$, são

$$p_t \equiv -E = -e^{2\psi}\dot{t} \quad , \quad (4.3)$$

$$p_\theta \equiv L = \mu^2 e^{-2\psi}\dot{\theta} \quad , \quad (4.4)$$

$$p_\rho = e^{-2(\psi-\gamma)}\dot{\rho} \quad , \quad (4.5)$$

$$p_z = e^{-2(\psi-\gamma)}\dot{z} \quad . \quad (4.6)$$

onde E e L são constantes de movimento características de cada geodésica. No que segue, iremos restringir o movimento ao plano equatorial, onde $z = \dot{z} = 0$. Iremos encontrar os

²Nestes sistemas não há o termo cruzado entre dt e $d\theta$, o que é apoiado observacionalmente pela conservação do momento angular do sistema.

³Aqui (\cdot) representa a diferenciação em relação ao tempo próprio τ .

vínculos impostos pelas geodésicas circulares sobre a energia e o momentum angular de partículas em tais órbitas.

Como não há dependência explícita do tempo, então o Hamiltoniano, $\mathcal{H} = p_\alpha \dot{x}^\alpha - \mathcal{L}$, é também uma quantidade conservada⁴. Desta forma podemos escrever a seguinte expressão para a geodésica relativa ao movimento radial

$$\dot{\rho}^2 - e^{2(\psi-\gamma)}[E\dot{t} - L\dot{\theta} - 1] = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Como estamos interessados em órbitas circulares estáveis, impomos as três condições seguintes a serem satisfeitas

- $\dot{\rho} = 0$,
- $\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} = 0$, onde $V(\rho) = -e^{2(\psi-\gamma)}[E\dot{t} - L\dot{\theta} - 1]$.
- $\frac{\partial^2 V(\rho)}{\partial \rho^2}|_{extr} > 0$, para que haja um mínimo.

Estas condições, em conjunto com a equação (4.7), implicam em um sistema de duas equações diferenciais

$$E\dot{t} - L\dot{\theta} - 1 = 0 \quad , \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(e^{2\psi-\gamma}[E\dot{t} - L\dot{\theta} - 1] \right) = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Usando as equações (4.3-4.4), podemos escrever \dot{t} e $\dot{\theta}$ em termos das constantes de movimento E , L e dos coeficientes da métrica como

$$\dot{t} = e^{-2\psi} E \quad , \quad (4.10)$$

$$\dot{\theta} = \frac{e^{2\psi}}{\mu^2} L \quad , \quad (4.11)$$

⁴Normalizaremos o Hamiltoniano como $\mathcal{H} = \frac{1}{2}$ para geodésicas do tipo-tempo.

que, inseridas nos vínculos (4.8-4.9), nos fornecem as equações

$$\mu^2 e^{-2\psi} (1 - e^{-2\psi} E^2) + L^2 = 0 \quad , \quad (4.12)$$

$$-(e^{-2\psi})' E^2 + \left(\frac{e^{2\psi}}{\mu^2} \right)' L^2 = 0 \quad , \quad (4.13)$$

onde $(\prime) = \frac{\partial}{\partial \rho}$. Portanto, podemos obter as constantes E e L características de cada órbita em termos dos coeficientes da métrica

$$E = e^\psi \sqrt{\frac{\frac{\mu'}{\mu} - \psi'}{\frac{\mu'}{\mu} - 2\psi'}} \quad , \quad (4.14)$$

$$L = \mu e^{-\psi} \sqrt{\frac{\psi'}{\frac{\mu'}{\mu} - 2\psi'}} \quad . \quad (4.15)$$

A segunda derivada do potencial $V(\rho)$ tomada no extremo também pode ser calculada

$$V''|_{extr} = \frac{2e^{2(\psi-\gamma)}}{\frac{\mu'}{\mu} - 2\psi'} \left[\frac{\mu'}{\mu} \psi'' - \frac{\mu''}{\mu} \psi' + 4(\psi')^3 - 6 \frac{\mu'}{\mu} (\psi')^2 + 3 \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 \psi' \right] \quad . \quad (4.16)$$

Será útil ainda encontrar a expressão para a velocidade angular de uma partícula teste em movimento circular no plano equatorial em termos dos coeficientes da métrica. Notando que a velocidade angular, Ω , é dada por

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{t}} \quad , \quad (4.17)$$

podemos reescrevê-la como

$$\Omega = \frac{e^{2\psi}}{\mu} \sqrt{\frac{\psi'}{\frac{\mu'}{\mu} - \psi'}} \quad . \quad (4.18)$$

Esta expressão será útil no cálculo da velocidade tangencial feito a seguir.

4.1.2 Cálculo da Velocidade Tangencial

Para o cálculo da velocidade tangencial de partículas teste em movimento circular no plano equatorial em termos dos coeficientes da métrica, iremos seguir a prescrição de

Chandrasekhar [37]. Desta forma, reescrevemos o elemento de linha (4.1) como

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} \mu^2 d\theta^2 + e^{-2(\psi-\gamma)} (d\rho^2 + dz^2) \quad . \quad (4.19)$$

Definindo o tempo próprio como $d\tau^2 = -ds^2$, (4.19) pode ser expresso por

$$d\tau^2 = e^{2\psi} dt^2 \left\{ 1 - e^{-4\psi} \mu^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - e^{2\gamma} e^{-4\psi} \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\} \quad , \quad (4.20)$$

a partir do qual podemos escrever a expressão

$$1 = e^{2\psi} u_0^2 [1 - v^2] \quad , \quad (4.21)$$

onde $u_0 = \frac{dt}{d\tau}$, temos

$$\begin{aligned} v^2 &\equiv e^{-4\psi} \mu^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + e^{2\gamma} e^{-4\psi} \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \\ &= v_\theta^2 + v_\rho^2 + v_z^2 \quad , \end{aligned} \quad (4.22)$$

que nos fornece as componentes da 4-velocidade das partículas teste. Em particular, a velocidade tangencial é dada por

$$v_\theta = e^{-2\psi} \mu \Omega \quad . \quad (4.23)$$

Substituindo a expressão (4.18) para a velocidade angular, Ω , obtemos uma expressão da velocidade tangencial de uma partícula teste em um movimento circular estável. em termos dos coeficientes do elemento de linha (4.1)

$$v_\theta = \sqrt{\frac{\psi'}{\frac{\mu'}{\mu} - \psi'}} \quad . \quad (4.24)$$

Para o caso de órbitas circulares esta velocidade deve ser constante, $v_\theta = v_c$. Assim a equação (4.24) é escrita, para cada órbita, como

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1 + v_c^2}{v_c^2} \psi' \quad . \quad (4.25)$$

Este resultado nos leva a enunciar o seguinte teorema [38]

Teorema 1 *A velocidade tangencial de órbitas equatoriais estáveis é constante se e só se os coeficientes do elemento de linha satisfazem à relação*

$$e^\psi = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^l \quad , \quad (4.26)$$

com $l = \frac{v_c^2}{1+v_c^2}$.

Esta é uma condição necessária e suficiente para que a velocidade v_c seja a mesma para órbitas circulares no plano equatorial.

É importante notar que o coeficiente métrico γ não influi nesta análise, sendo o movimento estudado determinado apenas pelos coeficientes ψ e μ .

Portanto, para que as velocidades tangenciais de objetos em órbitas equatoriais distintas de uma galáxia sejam independentes do raio da órbita, devemos ter um elemento de linha da forma

$$ds^2 = - \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{2l} dt^2 + \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-2l} [e^{2\gamma} d\rho^2 + \mu^2 d\theta^2] \quad . \quad (4.27)$$

É importante notar que o elemento de linha calculado em [26] possui a mesma forma que (4.27). Neste caso l é identificado com parâmetros internos à corda que dependem de detalhes microscópicos do modelo. Nesta configuração, consistindo de uma corda cósmica portando corrente tipo-tempo, devemos ter

$$l = 2G_0\alpha(\phi_0)[U + T + I^2] \quad , \quad (4.28)$$

onde U , T e I^2 são a energia por unidade de comprimento, a tensão por unidade de comprimento e a corrente da corda, respectivamente.

Para cordas cósmicas formadas em escalas de grande unificação, $G_0[U + T + I^2] \sim 3 \times 10^{-6}$, e para uma função de acoplamento⁵ $\alpha(\phi_0) < 10^{-3}$ [39], o parâmetro l (e também a velocidade tangencial v_c) têm valores muito pequenos. Portanto a magnitude observada da velocidade tangencial [40, 41, 42], $v_c > 3 \times 10^{-5}$, não pode ser explicada por uma corda cósmica portando corrente tipo-tempo somente. No entanto, para uma rede de N cordas cósmicas formadas em escalas de grande unificação, a magnitude total da velocidade tangencial deve ser Nv_c [43]. Então, para que o resultado obtido neste trabalho seja compatível com as observações astronômicas, devemos ter uma rede com $N \sim 10^5$ cordas. A única situação na qual um número tão grande de cordas é possível em escalas de energia muito menores (eletrofraca). Porém, tal escala de energia seria muito pequena para ter qualquer relevância na formação de estruturas.

⁵Valor compatível com experimentos atuais.

Conclusão

Neste trabalho estudamos vários modelos de cordas cósmicas supercondutoras em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação. Obtivemos as métricas exteriores à corda cósmica para os três casos possíveis de corrente, utilizando relações entre as componentes do tensor de Ricci denominadas de “álgebra de Rainich generalizada”. Posteriormente, aplicamos o resultado obtido no caso elétrico (corrente tipo-tempo) ao problema das curvas de rotação das galáxias. As contribuições originais deste trabalho são as seguintes

- Cálculo da métrica exterior para a corda cósmica portando corrente tipo-mista;
- Estudo das curvas de rotação de galáxias através da métrica da corda cósmica portando corrente do tipo-tempo.

Estes resultados estão publicados nas referências [30, 31, 36].

O estudo de cordas cósmicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação pode trazer alguns resultados significativamente diferentes de seu estudo na Relatividade Geral [44]. No caso particular da corda cósmica portando corrente tipo-mista essa diferença se acentua mais, tendo em vista que na Relatividade Geral não é admitida uma solução estática para este caso.

Temos como perspectivas de estudo os seguintes problemas:

- Cálculo da métrica interna à corda cósmica portando corrente do tipo-mista, através das equações de campo linearizadas;
- Obtenção das equações de movimento para partículas teste no espaço-tempo gerado pela corda cósmica portando corrente tipo-mista;
- Estudo do mecanismo de formação de wakes para o caso misto através do método desenvolvido por Zel'dovich.

Obtenção das Soluções das Equações Diferenciais de Rainich

Seja a equação diferencial ordinária (3.36)

$$\beta''(r) = 0 \quad , \quad (29)$$

por integração direta obtemos a solução

$$\beta'(r) = B \rightarrow \beta(r) = Br + C_1 \quad . \quad (30)$$

Escolheremos $C_1 = 0$ no que segue. Seja agora a equação (3.39)

$$(\beta\varphi')' = 0 \quad , \quad (31)$$

temos que

$$\beta\varphi' = C_2 \rightarrow \varphi' = \frac{C_2}{\beta} \quad , \quad (32)$$

então

$$\varphi(r) = \int_{r_0}^r \frac{D}{r} \rightarrow \varphi = D \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad , \quad (33)$$

onde $D = \frac{C_2}{B}$.

A equação diferencial (3.38) pode ser escrita como

$$\gamma'' + \frac{\beta'}{\beta}\gamma' = 0 \rightarrow \gamma'' + \frac{\gamma'}{r} = 0 \quad , \quad (34)$$

com solução da forma

$$\gamma(r) = r^p \quad , \quad (35)$$

que implica na seguinte equação característica

$$p(p-1) + p = 0 \rightarrow p^2 = 0 \rightarrow p = 0 \quad . \quad (36)$$

Assim devemos ter

$$\gamma(r) = C_3 + C_4 \ln(r) = l^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad . \quad (37)$$

Com os resultados anteriores, a equação (3.37) é escrita como

$$\begin{aligned} \psi'' + \frac{1}{r}\psi' - (\psi')^2 + \frac{l^2}{r^2} &= \frac{D}{r^2} \quad , \\ \psi'' + \frac{1}{r}\psi' - (\psi')^2 &= \frac{n}{r^2} \quad . \end{aligned} \quad (38)$$

onde $n = D^2 - l^2$. Portanto a solução é dada por

$$n \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \ln\left[\frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n} + k}{1+k}\right] \quad . \quad (39)$$

A equação (3.59)

$$\gamma'' + \frac{\beta'}{\beta}\gamma' = 2(\psi'' + \frac{\beta'}{\beta}\psi') \quad , \quad (40)$$

que com os resultados anteriores pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 2(r\psi'' + \psi') &= r\gamma'' + \gamma' \quad , \\ 2(r\psi')' &= (r\gamma') \end{aligned} \quad (41)$$

Assim

$$\gamma' = 2\psi' + \frac{F}{r} \rightarrow \gamma = 2\psi + F \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad , \quad (42)$$

Com o resultado (42) podemos escrever a equação (3.60)

$$\psi'' + \frac{\beta'}{\beta}\psi' - (\psi')^2 = \gamma'' - (\varphi')^2 \quad (43)$$

como

$$-\psi'' + \frac{\psi'}{r} - (\psi')^2 = \frac{F - D^2}{r^2} \quad , \quad (44)$$

com solução

$$\psi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r^2}{n-1} [-c_1 \sin(\sqrt{n-1} \ln r) + c_2 \cos(\sqrt{n-1} \ln r)]^2 \right) \quad , \quad (45)$$

onde

$$n \equiv (F - D^2) \quad . \quad (46)$$

Referências Bibliográficas

- [1] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 1387 (1976).
- [2] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, “*Cosmic Strings and Other Topological Defects*” (Cambridge: University Press, 1994).
- [3] C. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).
- [4] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, “*Superstring Theory*”, (Cambridge: University Press, 1987).
- [5] L. H. Ryder, “*Quantum Field Theory*”, (Cambridge: University Press, 1996).
- [6] J. Leite Lopes, “*Gauge Field Theories: An Introduction*”, (Pergamon Press, 1981).
- [7] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*”, (John Wiley & Sons, 1972).
- [8] P. Jordan, *Nature* **164**, 637 (1949); *Z. Phys.* **157**, 112 (1959).
- [9] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **29**, 128 (1956).
- [10] P. G. Bergmann, *Int. J. Theor. Phys.* **1**, 25 (1968).
- [11] R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D* **1**, 3209 (1970).

- [12] K. Nordtvedt, *Astrophys. J.* **161**, 1059 (1970).
- [13] Th. Damour e K. Nordtvedt, *Phys. Rev. D* **48**, 3436 (1993).
- [14] R. Penrose e W. Rindler, em “*Spinors and Space-Time*” (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, New York, 1984).
- [15] J. Silk and A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1700 (1984).
- [16] T. Vachaspati, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1655 (1986); A. Stebbins, S. Veeraraghavan, R. H. Brandenberger, J. Silk e N. Turok, *Ap. J.* **1**, 322 (1987); N. Deruelle e B. Linet, *Class. Quantum Grav.* **5**, 55 (1988); W. Hiscock e B. Lail, *Phys. Rev. D* **37**, 869 (1988); L. Perivolaropoulos, R. H. Brandenberger e A. Stebbins, *Phys. Rev. D* **41**, 1764 (1990).
- [17] T. Vachaspati, *Phys. Rev. D* **45**, 3487 (1992).
- [18] S. R. M. Masalskiene e M. E. X. Guimarães, *Class. Quantum Grav.* **17**, 3055 (2000).
- [19] V. B. Bezerra e C. N. Ferreira, *Phys. Rev. D* **65**, 084030 (2002).
- [20] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **249**, 557 (1985).
- [21] H. B. Nielsen e P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **61**, 45 (1973).
- [22] B. Carter, em “*Formation and Evolution of Cosmic Strings*”, ed. G. W. Gibbons, S. W. Hawking and T. Vachaspati (Cambridge: Univ. Press, 1990).
- [23] L. Witten, em “*Gravitation: an Introduction to Current Research*”, ed. L. Witten (John Wiley and Sons, New York, 1962).
- [24] K. S. Thorne, *Phys. Rev. D* **138**, 251 (1965).

- [25] A. L. Naves de Oliveira e M. E. X. Guimarães, *Phys. Rev. D* **67**, 123514 (2003).
- [26] A. L. Naves de Oliveira e M. E. X. Guimarães, *Phys. Lett. A* **311**, 474 (2003).
- [27] C. N. Ferreira, M. E. X. Guimarães e J. A. Helayël-Neto, *Nucl. Phys. B* **581**, 165 (2000).
- [28] G. Y. Rainich, *Trans. Am. Math. Soc.* **27**, 106 (1925).
- [29] C. W. Misner e J. A. Wheeler, *Ann. Phys.* **2**, 525 (1957).
- [30] M. Leineker Costa, M. E. X. Guimarães, A. L. Naves de Oliveira, *Braz. J. Phys.* **35**, 1055 (2005).
- [31] M. Leineker Costa, M. E. X. Guimarães, A. L. Naves de Oliveira, *Phys. Lett. A* (2006), aceito para publicação
- [32] Ya. B. Zel'dovich, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **192**, 663 (1980).
- [33] B. Carter, P. Peter e A. Gagui, *Phys. Rev. D* **55**, 4647 (1997).
- [34] V. C. Andrade, P. Peter e M. E. X. Guimarães, *Phys. Rev. D* **67**, 123509 (2003).
- [35] A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **23**, 852 (1980).
- [36] M. Leineker Costa, A. L. Naves de Oliveira e M. E. X. Guimarães, *Int. J. Mod. Phys. D*, (2006), aceito para publicação.
- [37] S. Chandrasekhar, “*Mathematical Theory of the Black Holes*” (Claredon Press, Oxford, 1983).

- [38] T. Matos, D. Núñez, F. Siddhartha Guzmán e E. Ramírez, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 283 (2002).
- [39] Th. Damour, *Astrophys. Space Sci.* **283**, 445 (2003).
- [40] V. C. Rubin, N. Thonnard e W. K. Ford, *Ap. J.* **225**, L107 (1978); *Ap. J.* **238**, 471 (1980).
- [41] M. Persic e P. Salucci, *Ap. J. Suppl. Ser.* **99**, 501 (1995).
- [42] M. Persic, P. Salucci e F. Stel, *M.N.R.A.S.* **281**, 27 (1996).
- [43] T. H. Lee, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 2929 (2004).
- [44] A. L. Naves de Oliveira, *Soluções de Cordas Cósmicas em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação*, Tese de Doutorado, UnB, (2005)