



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS
MECÂNICAS

ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DO
EFEITO DA TENSÃO DE TRIAXIALIDADE EM
AÇO APLICADO À INDÚSTRIA NAVAL

LEANDRO DE TOLEDO BURBA

Brasília, 10 de julho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASILIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS
MECÂNICAS

ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DO
EFEITO DA TENSÃO DE TRIAXIALIDADE EM AÇO
APLICADO À INDÚSTRIA NAVAL

LEANDRO DE TOLEDO BURBA

ORIENTADOR: LUCIVAL MALCHER

PUBLICAÇÃO: ENM-DM 285/2018

BRASÍLIA/DF: JULHO - 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DO
EFEITO DA TENSÃO DE TRIAXIALIDADE EM AÇO
APLICADO À INDÚSTRIA NAVAL

LEANDRO DE TOLEDO BURBA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADO POR:

Lucival Malcher, Dr, (ENM/FT – UnB)
(Orientador)

Luís Augusto Conte Mendes Veloso, Dr, (ENM/FT – UnB)
(Examinador Externo)

Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr, (ENM/FT – UnB)
(Examinador Interno)

Fabio Comes de Castro, Dr, (ENM/FT – UnB)
(Suplente)

FICHA CATALOGRÁFICA

BURBA, LEANDRO DE TOLEDO

Estudo Numérico e Experimental do Efeito da Tensão de Triaxialidade em Aço Aplicado à Indústria Naval.

101p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2018).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

- | | |
|----------------------------|--------------------|
| 1. Tensão de Triaxialidade | 2. Estudo Numérico |
| 3. Plasticidade | 4. Bai |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BURBA, L. T. (2018). Estudo Numérico e Experimental do Efeito da Tensão de Triaxialidade em Aço Aplicado à Indústria Naval. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas. Publicação ENM-DM – 285/2018, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 101p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Leandro de Toledo Burba

TÍTULO: Estudo Numérico e Experimental do Efeito da Tensão de Triaxialidade em Aço Aplicado à Indústria Naval.

GRAU: Mestre ANO: 2018

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Leandro de Toledo Burba
leandro.burba@gmail.com

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao Professor Dr. Lucival Malcher pela excelente orientação prestada ao longo da elaboração deste trabalho.

Aos Professores Edgar Mamiya, Jorge Ferreira e novamente ao Professor Lucival Malcher pelo apoio dado durante os meus primeiros meses no curso de mestrado, quando passei por problemas pessoais de natureza complexa. Não fosse todo o apoio e solidariedade, minha continuidade no curso se tornaria impossível naqueles momentos difíceis.

A todos os demais professores do corpo docente do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

Aos amigos Guilherme e Raniere, pelo apoio ao longo dos experimentos realizados durante a elaboração deste trabalho.

Ao amigo Leonel Morales pela ajuda ao longo do trabalho, e também pela intermediação junto à UDF para a fabricação dos Corpos de Prova utilizados nos experimentos necessários para a realização deste trabalho. Também ao Vinícius, que ajudou na fabricação dos Corpos de Prova e na posterior análise dos mesmos.

À UDF pela disponibilização dos equipamentos necessários para a usinagem dos Corpos de Prova utilizados neste trabalho.

A todos os amigos da Pós-Graduação, que ajudaram a tornar o ambiente da nossa sala um pouco melhor: Cainã, Stefânia, Luiz, Matheus, Eduardo, Guilherme, Raniere, Felipe, André, Leonel, Silvia, Diego, Thiago, Rayssa e Maycol.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelos recursos financeiros que possibilitaram a realização deste trabalho.

Leandro de Toledo Burba

Nesta contribuição, é realizado um estudo do comportamento mecânico do aço U2, da série 1524, comumente utilizado em aplicações na Indústria Naval. O estudo aqui realizado é com relação ao comportamento do material para diferentes condições e triaxialidade, de forma a se buscar entender a reação do material para diversas formas de carregamento. Para tanto, são realizados ensaios experimentais de carregamento monotônico em diferentes Corpos de Prova do material, de modo a se definir as curvas de reação do aço U2 para diversas condições de triaxialidade. Para tanto, são elaborados Corpos de Prova com diferentes condições de entalhe, de modo a se representar os diversos níveis de triaxialidade estudados, possibilitando a definição de um mapeamento do comportamento do material para casos de carregamento tratativo.

De forma a buscar uma metodologia para a previsão do material para diferentes condições de triaxialidade, também são realizados estudos numéricos por meio do Método dos Elementos Finitos utilizando o modelo elastoplástico de Bai. O estudo numérico aqui proposto tem o objetivo de encontrar uma calibração do modelo que seja ótima para o caso do material estudado neste trabalho. Como comparação, as mesmas análises pelo Método de Elementos Finitos também são realizadas utilizando o modelo elastoplástico de von Mises, de forma a comparar os resultados dos dois modelos e justificar a utilização de um modelo mais complexo em determinados casos de condição de carregamento.

A comparação dos resultados experimentais com as simulações numéricas indicou uma boa correlação entre os modelos elastoplásticos e o comportamento real do material, obtido experimentalmente. No entanto, para condições de tensão de triaxialidade maiores, o erro associado ao efeito da tensão de triaxialidade se mostrou evidente nas soluções pelo modelo de von Mises, tornando o modelo de Bai mais adequado para essas condições.

ABSTRACT

In this contribution, a study of the mechanical behavior of the U2 steel of the 1524 series, commonly used in applications in the Naval Industry, is carried out. The study performed here is related to the behavior of the material for different conditions of triaxiality, in order to understand the material behavior for different conditions of loading. In order to determine the reaction curves of the U2 steel for several triaxiality conditions, monotonic loading tests are performed in different specimen of the material. In this purpose, specimen with different notch conditions were elaborated, in order to represent the different levels of triaxiality studied, allowing the definition of a mapping of the behavior of the material for cases of trative loading.

In order to find a methodology for the prediction of the material for different conditions of triaxiality, numerical studies are also carried out using the Finite Element Method, using the Bai elastoplastic model. The numerical study proposed here has the objective of finding a calibration of the model that is optimal for the case of the material studied in this work. As a comparison, the same analyzes by the Finite Element Method are also performed using the von Mises elastoplastic model, in order to compare the results of the two models and justify the use of a more complex model in certain case of loading condition.

The comparison of the experimental results with the numerical simulations indicated a good correlation between the elastoplastic models and the real behavior of the material, obtained experimentally. However, for higher stress triaxiality conditions, the error associated with the effect of the stress triaxiality was shown to be evident in the solutions by the von Mises model, making the Bai model more suitable for these conditions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	4
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	5
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1	DEFINIÇÕES PRELIMINARES	6
2.1.1	Tensor Tensão, Tensor das Tensões Desviadoras e Tensão Hidrostática	10
2.1.2	Invariantes do tensor tensão	12
2.1.3	Tensão Equivalente de von Mises	13
2.1.4	Tensão de triaxialidade e ângulo de Lode	14
2.1.5	Plasticidade associativa	21
2.1.6	Leis de endurecimento	22
2.1.7	Modelos Elastoplásticos	25
3	MODELOS NUMÉRICOS	33
3.1	MODELO DE VON MISES	34
3.1.1	Método de Newton-Raphson	39
3.2	MODELO DE BAI	41
3.2.1	Método de Newton-Raphson	44
4	ENSAIOS EXPERIMENTAIS	45
4.1	GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA	46
4.2	METODOLOGIA EXPERIMENTAL	50
4.3	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	51
4.4	DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DO MATERIAL	54
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	56
5.1	ESTUDO DE CONVERGÊNCIA DE MALHA	58
5.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	61
5.2.1	Simulações Numéricas pelo Modelo de von Mises	61
5.2.2	Simulações Numéricas pelo Modelo de Bai Simplificado	65
5.2.3	Comparação de Resultados – von Mises x Bai Simplificado	74
6	CONCLUSÕES	92
7	REFERÊNCIAS	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Gráfico Força x Deslocamento – Exemplo de ensaio e simulação numérica de uma barra cilíndrica lisa. (Bai, 2008)	2
Figura 1.2 – Gráfico Força x Deslocamento – Exemplo de ensaio e simulação numérica de uma barra cilíndrica entalhada. (Bai, 2008)	2
Figura 2.1 – Exemplo esquemático das regiões elástica e plástica em uma curva de Tensão por Deformação. (Dowling, 2007) – Com modificações.....	6
Figura 2.2 – Exemplo de comportamento típico da curva de Tensão por Deformação de um material dúctil. (Dowling, 2007) – Com modificações.	7
Figura 2.3 – Exemplo de curvas de Tensão por Deformação para materiais dúcteis e frágeis. (Dowling, 2007) – Com modificações.	8
Figura 2.4 – Exemplo de simulação do processo de estampagem em componente automotivo. (ESI Group, 2018)	9
Figura 2.5 – Exemplo de componente da indústria automotiva após processo de estampagem. (Huanghe Die & Mould, 2018).....	9
Figura 2.6 – Representação do Vetor Tensão e Tensor Tensão. (SouzaNeto, 2018).....	10
Figura 2.7 – Exemplo de comportamento de um material em função da deformação plástica equivalente na ruptura e da tensão de triaxialidade. (Malcher, 2011).....	16
Figura 2.8 – Representação do ângulo de Lode com relação a três sistemas de coordenadas diferentes. (Bai, 2008) – Com modificações.	18
Figura 2.9 – Tipos de carregamento para diferentes combinações de tensão de triaxialidade e ângulo de Lode normalizado. (Bai & Wierzbicki, 2008) – Com modificações.	19
Figura 2.10 – Parâmetros de entalhe utilizados no dimensionamento através da equação de <i>Bridgman</i> . (Bai, 2008) – Com modificações.....	20
Figura 2.11 – Superfície de Escoamento na condição de endurecimento perfeitamente plástico. (SouzaNeto, et al., 2008) – Com modificações.	23
Figura 2.12 – Superfície de Escoamento na condição de endurecimento isotrópico. (SouzaNeto, et al., 2008) – Com modificações.	24
Figura 2.13 – Superfície de Escoamento na condição de endurecimento cinemático. (SouzaNeto, et al., 2008) – Com modificações.	25
Figura 3.1 – Esquema ilustrativo da estratégia numérica.....	34
Figura 4.1 – Comparação dos três tipos de CPs entalhados.....	48
Figura 4.2 – Desenho em cotas do CP ($\eta = 0.72$).....	49

Figura 4.3 – Desenho em cotas do CP ($\eta = 0.61$).....	49
Figura 4.4 – Desenho em cotas do CP ($\eta = 0.51$).....	49
Figura 4.5 – Exemplo de montagem dos corpos de prova na máquina de ensaio, com o <i>clip gage</i> instalado.....	50
Figura 4.6 – Resultados experimentais para os corpos de prova cilíndrico lisos ($\eta = 0.33$). 51	
Figura 4.7 – Resultados experimentais para os corpos de prova cilíndrico entalhados ($\eta = 0.51$), ($\eta = 0.61$) e ($\eta = 0.72$).	52
Figura 4.8 – Deformação na fratura experimental por tensão de triaxialidade teórico.....	53
Figura 4.9 – Curva de encruamento do material.	55
Figura 5.1 – Exemplo de malha utilizado, representando $\frac{1}{4}$ do corpo de prova entalhado em modelagem axissimétrica.	57
Figura 5.2 – Discretizações de malha consideradas para o estudo de convergência de malha.58	
Figura 5.3 – Esquema de discretização utilizado para o estudo de convergência de malha. ...	59
Figura 5.4 – Comparação de resultados para o estudo de convergência de malha – Gráficos Força por Deslocamento.....	60
Figura 5.5 – Comparação de Resultados Experimentais e Numéricos utilizando o modelo elastoplástico de von Mises.	62
Figura 5.6 – Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$).	62
Figura 5.7 - Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 10 mm ($\eta = 0.51$).....	63
Figura 5.8 - Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 6 mm ($\eta = 0.61$).....	63
Figura 5.9 - Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 4 mm ($\eta = 0.72$).....	64
Figura 5.10 – Deformação Plástica Equivalente por Deslocamento para as simulações por meio do modelo elastoplástico de von Mises.	64
Figura 5.11 – Deformação Plástica de Fratura Numérico no ponto crítico por Tensão de Triaxialidade Numérico para as simulações feitas com base no modelo de von Mises.....	65
Figura 5.12 – Gráfico de Força por Deslocamento para o corpo de prova cilíndrico liso pelas simulações pelo modelo de von Mises e Bai com C_η nulo.....	66
Figura 5.13 – Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico liso com diferentes condições do parâmetro C_η	67

Figura 5.14 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico liso com diferentes condições do parâmetro C_η com enfoque na região de amolecimento.	67
Figura 5.15 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio = 10 mm ($\eta = 0.51$) com diferentes condições do parâmetro C_η	68
Figura 5.16 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio = 6 mm ($\eta = 0.61$) com diferentes condições do parâmetro C_η	69
Figura 5.17 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio = 4 mm ($\eta = 0.71$) com diferentes condições do parâmetro C_η	69
Figura 5.18 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$).	70
Figura 5.19 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 10 mm ($\eta = 0.51$).	71
Figura 5.20 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 6 mm ($\eta = 0.61$).	71
Figura 5.21 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 4 mm ($\eta = 0.72$).	72
Figura 5.22 - Deformação Plástica Equivalente no ponto crítico por Deslocamento para as simulações por meio do modelo elastoplástico de Bai.	72
Figura 5.23 - Deformação Plástica de Fratura Numérico no ponto crítico por Tensão de Triaxialidade Numérico para as simulações feitas com base no modelo de Bai.	73
Figura 5.24 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	74
Figura 5.25 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	74
Figura 5.26 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	75
Figura 5.27 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	75
Figura 5.28 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	75

Figura 5.29 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	75
Figura 5.30 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	76
Figura 5.31 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	76
Figura 5.32 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	76
Figura 5.33 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	76
Figura 5.34 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	77
Figura 5.35 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$	77
Figura 5.36 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$ 78	
Figura 5.37 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	78
Figura 5.38 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	79
Figura 5.39 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	79
Figura 5.40 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	79
Figura 5.41 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	79
Figura 5.42 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	80
Figura 5.43 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	80
Figura 5.44 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	80

Figura 5.45 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	80
Figura 5.46 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	81
Figura 5.47 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$	81
Figura 5.48 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$.	82
Figura 5.49 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	82
Figura 5.50 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	83
Figura 5.51 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	83
Figura 5.52 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	83
Figura 5.53 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	83
Figura 5.54 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	84
Figura 5.55 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	84
Figura 5.56 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	84
Figura 5.57 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	84
Figura 5.58 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	85
Figura 5.59 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$	85
Figura 5.60 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$.	86

Figura 5.61 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	86
Figura 5.62 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	87
Figura 5.63 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	87
Figura 5.64 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	87
Figura 5.65 – Deformação Plástica Acumulada no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	87
Figura 5.66 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	88
Figura 5.67 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	88
Figura 5.68 – Triaxialidade no Passo Inicial (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	88
Figura 5.69 – Triaxialidade no Passo Final (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	88
Figura 5.70 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de Bai) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	89
Figura 5.71 – Tensão Equivalente na ruptura (Simulação pelo modelo de von Mises) – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$	89
Figura 5.72 – Comparação dos resultados de Deformação Plástica Equivalente no ponto crítico por Deslocamento das simulações pelos dois modelos elastoplástico para as diferentes condições de triaxialidade.	90
Figura 5.73 - Comparação dos resultados de Deformação Plástica na Fratura por Tensão de Triaxialidade das simulações pelos dois modelos elastoplástico para as diferentes condições estudadas.....	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Faixas de Tensão de Triaxialidade e respectivas Condições de Carregamento.	15
Tabela 2 – Estados de tensão em função dos parâmetros elastoplásticos.	18
Tabela 3 – Parâmetros de entalhe para cada corpo de prova.	47
Tabela 4 – Propriedades do Material.....	54
Tabela 5 – Quantidade de elementos em cada lado das malhas consideradas para o estudo de convergência de malha.	59
Tabela 6 – Parâmetros de simulação para o estudo de convergência de malha.	60

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Raio da seção interna do entalhe no Corpo de Prova
a_0	Raio inicial da seção interna do entalhe no Corpo de Prova
a_f	Raio na fratura da seção interna do entalhe no Corpo de Prova
β	Tensor das tensões cinemáticas
C_η	Parâmetro material relacionado ao modelo elastoplástico de Bai
C_θ^S	Parâmetro material relacionado ao modelo elastoplástico de Bai
C_θ^{ax}	Parâmetro material relacionado ao modelo elastoplástico de Bai
\mathbb{D}^e	Tensor de quarta ordem elástico isotrópico
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor das deformações elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$	Tensor das deformações elásticas no instante $t = n + 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$	Tensor das deformações elásticas tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tensor das deformações plásticas
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica
$\dot{\bar{\varepsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica equivalente
$\bar{\varepsilon}_f$	Deformação equivalente na fratura
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$	Tensor das deformações plásticas no instante $t = n + 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$	Tensor das deformações plásticas tentativa no instante $t = n + 1$
$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$	Deformação plásticas equivalente tentativa no instante $t = n + 1$
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$	Incremento de deformação elástica
E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de cisalhamento
H	Módulo de endurecimento cinemático
I	Tensor identidade de segunda ordem
\mathbb{I}^4	Tensor identidade de quarta ordem
\mathbb{I}^d	Tensor identidade desviador de quarta ordem
I_1	Primeiro invariante do tensor tensão
I_2	Segundo invariante do tensor tensão
I_3	Terceiro invariante do tensor tensão
J_1	Primeiro invariante do tensor desviador
J_2	Segundo invariante do tensor desviador
J_3	Terceiro invariante do tensor desviador

m	Parâmetro material relacionado ao modelo elastoplástico de Bai
ν	Coefficiente de Poisson
σ_{y0}	Limite de escoamento inicial
σ_y	Limite de escoamento
σ_{eq}	Tensão equivalente de von Mises
\mathbf{N}	Vetor de Fluxo
\mathbf{N}_{n+1}	Vetor de Fluxo no instante $t = n + 1$
p	Tensão hidrostática
r	terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras em sua forma alternativa
R	Raio do entalhe no Corpo de Prova
ϕ	Função de escoamento
ϕ_{n+1}	Função de escoamento no instante $t = n + 1$
ϕ_{n+1}^T	Função de escoamento tentativa no instante $t = n + 1$
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
Ψ	Potencial de fluxo
σ	Tensor tensão de Cauchy
σ_{n+1}	Tensor tensão no instante $t = n + 1$
σ_{n+1}^T	Tensor tensão tentativa $t = n + 1$
\mathbf{S}	Tensor das tensões desviadoras
\mathbf{S}_{n+1}	Tensor desviador no instante $t = n + 1$
\mathbf{S}_{n+1}^T	Tensor desviador tentativa $t = n + 1$
\mathbf{t}	Vetor Tensão
η	Tensão de triaxialidade
$\boldsymbol{\eta}$	Tensor relativo
ξ	Terceiro invariante normalizado
θ	Ângulo de Lode
$\bar{\theta}$	Ângulo de Lode normalizado

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO

A capacidade de prever com exatidão o comportamento de um material sujeito aos mais variados tipos de carregamento é um dos grandes desafios da engenharia. Engenheiros e projetistas devem se atentar, sempre com muito cuidado, às condições as quais seus componentes desenvolvidos estarão sendo submetidos. Para tanto, é de suma importância que se tenha em mãos uma boa gama de informações a respeito dos materiais que são utilizados nos projetos de engenharia e como os mesmos se comportam de acordo com cada tipo de solicitação a que serão submetidos. Além disso, é importante que se utilize as teorias mais adequadas para se prever o comportamento de um material que será aplicado à indústria.

Ao longo da evolução da engenharia, foram desenvolvidas uma série de teorias que ajudam a prever o comportamento de materiais. Para o caso da maioria dos materiais dúcteis, os modelos elastoplásticos propostos por von Mises e Tresca se apresentam como abordagens clássicas relativamente confiáveis. No entanto, tais teorias têm se mostrado deficientes em determinadas condições de carregamento para alguns materiais, encorajando engenheiros e pesquisadores a desenvolverem modelos elastoplásticos mais complexos e que sejam capazes de prever com maior exatidão o comportamento esperado dos mesmos. Diante deste cenário, uma vasta gama de modelos mais complexos já foi proposta por diversos pesquisadores, normalmente considerando parâmetros adicionais àqueles adotados nos modelos clássicos. Neste sentido, modelos elastoplásticos que consideram mais efeitos relacionados aos invariantes do tensor das tensões desviadoras vêm sendo estudados de forma exaustiva nos últimos anos (Gao, et al., 2011; Cazacu, et al., 2013; Kroon & Faleskog, 2013; Yoon, et al., 2014; Cortese, et al., 2016). As Figuras 1.1 e 1.2 apresentam um comparativo de resultados para simulações e ensaios em barra cilíndrica lisa e entalhada que consideram tanto modelos clássicos, como modelos mais complexos.

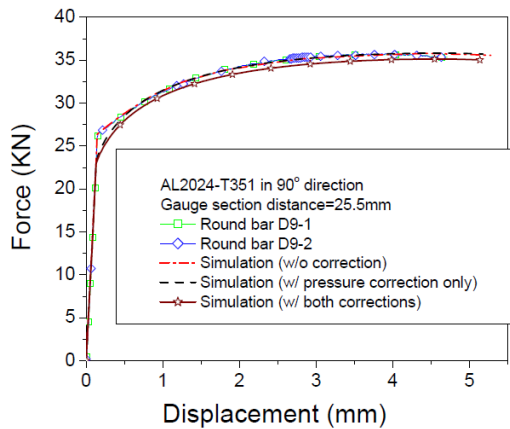


Figura 1.1 – Gráfico Força x Deslocamento – Exemplo de ensaio e simulação numérica de uma barra cilíndrica lisa. (Bai, 2008)

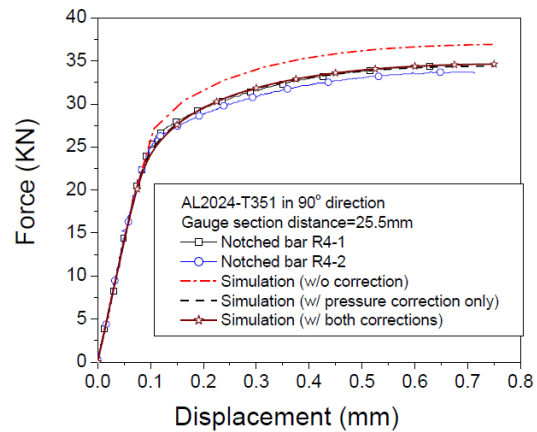


Figura 1.2 – Gráfico Força x Deslocamento – Exemplo de ensaio e simulação numérica de uma barra cilíndrica entalhada. (Bai, 2008)

A Figura 1.1 é um comparativo de resultados experimentais de um ensaio monotônico e suas respectivas simulações numéricas para uma barra cilíndrica lisa fabricada a partir de uma liga de alumínio AL2024-T351. Os gráficos de Força por Deslocamento apresentados indicam uma boa correlação entre os modelos elastoplásticos utilizados nas simulações e os dados provenientes dos ensaios. Já a Figura 1.2 apresenta os gráficos de Força por Deslocamento de ensaios para o mesmo material, porém para uma barra entalhada. Nota-se dos gráficos da Figura 1.2 que a série em vermelho apresenta um erro relativamente grande se comparado aos resultados experimentais e às demais simulações numéricas. Tal erro se deve ao uso de teorias clássicas nesta simulação e à não adição de demais efeitos ao modelo elastoplástico utilizado. O erro observado neste caso está relacionado aos efeitos da chamada tensão de triaxialidade e é consequência do uso de modelos elastoplásticos que consideram poucos efeitos em sua formulação (Bai & Wierzbicki, 2008).

Neste cenário, dentre os vários modelos elastoplásticos em destaque atualmente, o modelo proposto por Bai (Bai & Wierzbicki, 2008) se apresenta como uma boa alternativa para a simulação numérica de materiais dúcteis. Ao contrário do modelo de von Mises, que considera em sua formulação apenas os efeitos associados ao segundo invariante do tensor tensão, o modelo de Bai considera também os efeitos associados ao terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras. Diante disto, tal modelo se apresenta como

mais adequado para a previsão do comportamento de alguns materiais em determinadas condições de carregamento.

Um importante parâmetro associado a materiais dúcteis é a sua deformação na fratura. Estudos anteriores indicam que a deformação na fratura não é constante, variando de acordo com diferentes condições de carregamento (Wierzbicki, et al., 2005; Bai & Wierzbicki, 2010; Luo & Wierzbicki, 2010; Cortese, et al., 2014). Dessa forma, a tensão de triaxialidade, que está relacionada à tensão hidrostática normalizada, é o mais importante parâmetro de controle da fratura (Bai, 2008). Neste sentido, os efeitos relacionados à tensão de triaxialidade vêm sendo bastante estudados nas últimas décadas, com vários trabalhos relacionados a este tema (Mirza & Barton, 1996; Bao & Wierzbicki, 2005; Gao, et al., 2009; Yu & Jeong, 2010; Dunand & Mohr, 2011; Lou & Huh, 2013; Lou, et al., 2014).

Uma forma comumente utilizada para a calibração do ponto de fratura em materiais dúcteis é o teste axissimétrico em barras cilíndricas lisas e entalhadas. As Figuras 1.1 e 1.2 mostram resultados de experimentos realizados por meio deste método. No entanto, este tipo de teste cobre apenas a faixa conhecida como alta triaxialidade (Bai, 2008). Nesse sentido, outras formas de testes foram desenvolvidas de modo a cobrir outras faixas de triaxialidade.

Para os ensaios relativos à região de alta triaxialidade, é possível a utilização de barras cilíndricas lisas e entalhadas, de forma que a tensão de triaxialidade inicial do corpo de prova varia de acordo com o entalhe utilizado. Um importante estudo realizado por Bridgman ajudou a definir uma formulação que fosse capaz de relacionar os parâmetros do entalhe com a tensão de triaxialidade (Bridgman, 1952). Dessa forma, é possível dimensionar uma série de corpos de prova com diferentes condições de entalhe, e obter um mapeamento do comportamento do material para várias tensões de triaxialidade.

Um material comumente utilizado na indústria é o aço U2, conforme nomenclatura comercial. Tal aço é uma liga da série 1524 e tem sua aplicação principalmente na indústria naval. Um estudo aprofundado do comportamento sob várias condições de carregamento deste material é de extrema relevância para futuros projetos de engenharia relacionados ao mesmo. Dada a natureza dos trabalhos atualmente realizados pelo Grupo

de Fadiga, Fratura e Materiais do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília (GFFM), a caracterização deste material é de grande valia para as pesquisas desenvolvidas pelo grupo. Dessa forma, o presente trabalho busca contribuir com o mapeamento do comportamento do material U2(1524) para diferentes condições de tensão de triaxialidade inicial.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal do trabalho aqui desenvolvido é estudar o efeito da tensão de triaxialidade no aço U2 através de ensaios experimentais e simulações numéricas, onde são implementados os modelos elastoplásticos de von Mises e Bai. Tal implementação é realizada com o objetivo de se prever o comportamento do material de forma numérica para as diferentes condições estudadas.

Para os objetivos específicos, foram desenvolvidos diferentes corpos de prova, relativos a diferentes condições de tensão de triaxialidade, de modo a se obter a curva de reação do material para essas diferentes condições. Para tanto, são realizados ensaios de tração monotônicos em barras cilíndricas lisas e entalhadas, de forma a obter resultados relativos a diferentes condições de tensão de triaxialidade inicial. Com base nesses resultados, também é objetivo específico do trabalho a realização de um mapeamento do material com relação a sua deformação na fratura em função da tensão de triaxialidade inicial.

Para a previsão do comportamento do material utilizando os modelos elastoplásticos de von Mises e Bai, os mesmos foram implementados em modelo numérico para solução por meio do método dos Elementos Finitos, de forma a se encontrar os resultados numéricos relativos às diferentes condições de tensão de triaxialidade estudadas.

Para o caso das simulações pelo modelo de Bai, uma etapa inicial de calibração foi realizada, com o objetivo de encontrar a melhor calibração do modelo que seja capaz de prever da melhor forma o comportamento do material U2.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

De forma a organizar e cumprir os objetivos apresentados na seção 1.2, este trabalho foi dividido em seis capítulos. No capítulo 1, é apresentada a introdução do tema a ser estudado no trabalho, bem como os objetivos propostos.

No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica necessária para a elaboração do trabalho e para que os objetivos propostos sejam cumpridos. Neste capítulo, são apresentadas as teorias relativas a plasticidade de materiais dúcteis e conceitos básicos necessários ao desenvolvimento do trabalho, como Tensor Tensão, Tensor das Tensões Desviadoras, Tensão Hidrostática, Invariantes do Tensor Tensão, Tensão de Triaxialidade, Ângulo de Lode, dentre outros. Também são apresentados os modelos elastoplásticos utilizados no trabalho.

No capítulo 3, são apresentados os Modelos Numéricos utilizados para a solução pelo Método dos Elementos Finitos dos dois modelos elastoplásticos de von Mises e Bai, escolhidos previamente para utilização neste trabalho. Neste capítulo também é apresentada a estratégia de solução pelo método de Newton-Raphson para os sistemas de equações não lineares resultantes da estratégia numérica apresentada para cada modelo elastoplástico.

No capítulo 4, são apresentados os resultados experimentais obtidos para cada caso estudado. Este capítulo também apresenta a estratégia de dimensionamento dos Corpos de Prova, suas dimensões finais, a metodologia experimental utilizada, e a definição das propriedades do material realizada com base nos resultados encontrados.

O capítulo 5 é referente às simulações numéricas realizadas com base nos modelos elastoplásticos de von Mises e Bai. Inicialmente, é mostrada a estratégia de simulação utilizada e o estudo de convergência de malha realizado. Posteriormente, são apresentados os resultados numéricos para cada condição de triaxialidade com base nos dois modelos elastoplásticos. Ao final, é feita uma breve análise dos resultados encontrados.

O capítulo 6 é relativo às conclusões do trabalho e indicações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, serão descritos alguns conceitos e fundamentações teóricas relativas à plasticidade em materiais dúcteis. Será dada ênfase nos conceitos relativos a tensão de triaxialidade e modelos elastoplásticos, por serem esses os fundamentos mais importantes no que se refere ao objeto de estudo deste trabalho.

2.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

No âmbito da mecânica dos sólidos, a deformação induzida em materiais dúcteis pode ser dividida em uma parte elástica e outra plástica. Quando a deformação é reversível, de forma que o material volta ao seu estado de origem apenas com a retirada do esforço que ocasionou a deformação, a mesma é considerada elástica. Caso contrário, quando a deformação é irreversível e permanente, esta é chamada plástica. Com isso, uma curva de Tensão por Deformação de um material pode ser dividida nas regiões elástica e plástica. A Figura 2.1 apresenta um exemplo esquemático de como as regiões elástica e plástica podem ser observadas em uma curva de Tensão por Deformação de um material.

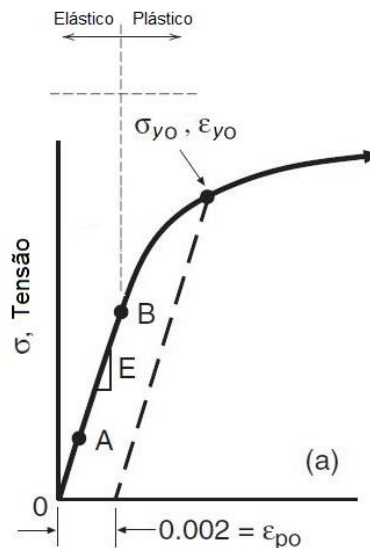


Figura 2.1 – Exemplo esquemático das regiões elástica e plástica em uma curva de Tensão por Deformação. (Dowling, 2007) – Com modificações.

No exemplo da Figura 2.1, σ_{yo} representa o “limite de escoamento inicial” do material.

A Figura 2.2 apresenta um exemplo esquemático de uma curva de Tensão por Deformação completa obtida através de um ensaio de tração monotônico.

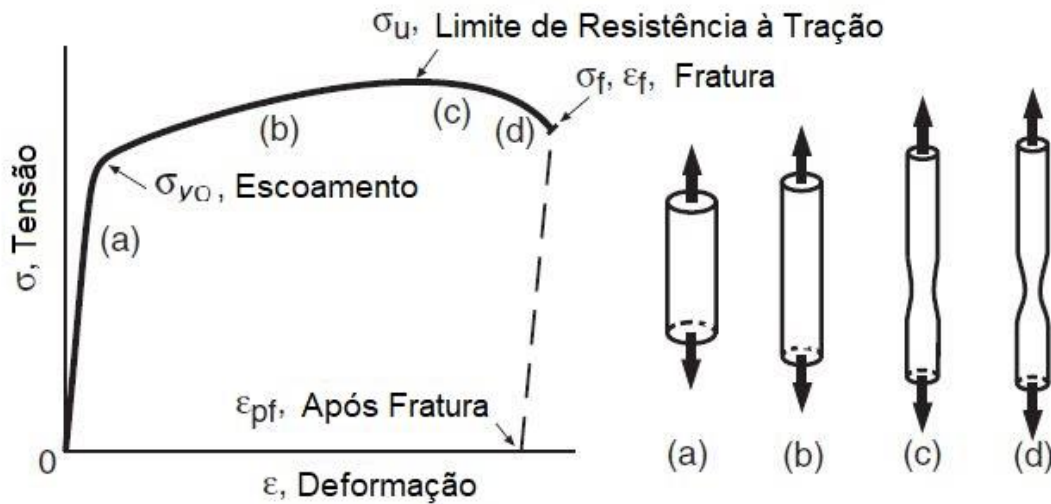


Figura 2.2 – Exemplo de comportamento típico da curva de Tensão por Deformação de um material dúctil. (Dowling, 2007) – Com modificações.

No exemplo da Figura 2.2, o “ σ_u ” representa o limite de resistência a tração, sendo este o ponto de maior tensão no gráfico e onde se inicia o fenômeno de amolecimento, visualizado no gráfico como a subsequente diminuição da tensão na curva, e no corpo de prova como o “empescoamento” da região de menor raio de seção do CP. No gráfico da figura, “ σ_f ” e “ ϵ_f ” representam o ponto de ruptura do corpo de prova, de forma que a deformação plástica neste ponto será representada no trabalho como ϵ_f , ou deformação na ruptura.

Alguns tipos de materiais, como os metais, apresentam uma grande parcela de deformação plástica antes da ruptura, e por isso são chamados de materiais dúcteis. Materiais com predominância de deformação elástica, como os cerâmicos, são chamados materiais frágeis. O material estudado neste trabalho é um aço da série 1524, e com base em resultados previamente observados do mesmo, pode-se dizer que este é um exemplo de material dúctil.

A Figura 2.3 apresenta uma esquematização de curvas de Tensão por Deformação para materiais dúcteis e frágeis, de forma a facilitar o entendimento da diferença entre esses dois tipos de materiais.

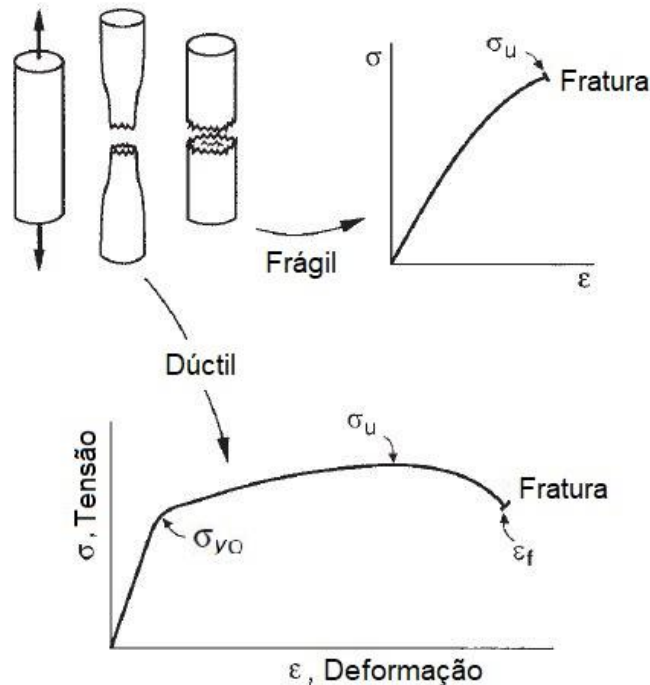


Figura 2.3 – Exemplo de curvas de Tensão por Deformação para materiais dúcteis e frágeis. (Dowling, 2007) – Com modificações.

Os estudos acerca do comportamento de materiais, tanto no que se refere ao seu regime elástico quanto ao regime plástico, são de extrema importância para várias aplicações da engenharia. São vários os exemplos de aplicação em projetos que consideram apenas a região elástica do material e tomam como critério de projeto o seu limite de escoamento. Exemplos incluem o dimensionamento de alguns tipos de estruturas e componentes mecânicos que não permitem deformações permanentes em seu funcionamento. Com relação a aplicações relacionadas ao domínio plástico do material, também são vários os exemplos de projetos que exigem considerações ligadas a esta região de comportamento do mesmo. Exemplos incluem o processo de estampagem de chapas, extrusão de eixos, e vários outros. A Figura 2.4 apresenta um exemplo de simulação numérica de uma chapa em processo de estampagem que será utilizada na indústria automotiva. Já a Figura 2.5 mostra um exemplo real de chapa que foi submetida

a um processo de estampagem para posteriormente configurar o mesmo componente automotivo do exemplo anterior.

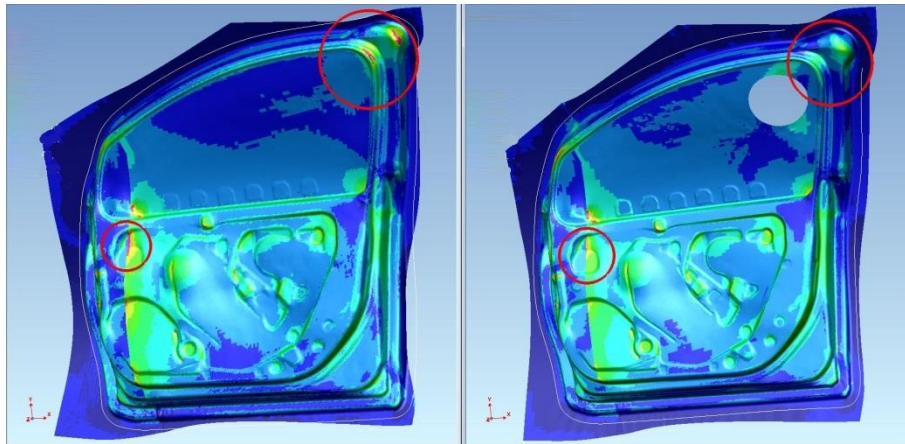


Figura 2.4 – Exemplo de simulação do processo de estampagem em componente automotivo. (ESI Group, 2018)



Figura 2.5 – Exemplo de componente da indústria automotiva após processo de estampagem. (Huanghe Die & Mould, 2018)

Conforme é possível inferir da grande gama de possibilidades de aplicações que exigem um estudo mais aprofundado do comportamento dos materiais em regime plástico, o estudo das teorias de plasticidade é de suma importância e se mostra como uma contribuição efetiva para a engenharia aplicada.

Com relação às teorias de plasticidade, as relações tensão por deformação e força por deslocamento dos materiais foram definidas ao longo dos anos por meio de observações experimentais e representações matemáticas, estas chamadas também de modelos constitutivos. Existe uma série de modelos constitutivos desenvolvidos ao longo dos últimos séculos, onde se destacam os modelos de Tresca, von Mises, Prandtl, entre outros.

Nos últimos anos, alguns parâmetros relacionados aos modelos elastoplásticos vem despertando o interesse de diversos pesquisadores, de forma que estão sendo bastante estudados. Destes parâmetros, os que mais se destacam são a tensão hidrostática “ p ”, a tensão de triaxialidade “ η ” e o ângulo de Lode “ θ ”.

Para o melhor entendimento destes parâmetros e como os mesmos se relacionam com o trabalho aqui desenvolvido, será feita uma breve explanação dos conceitos básicos relacionados às teorias da plasticidade.

2.1.1 Tensor Tensão, Tensor das Tensões Desviadoras e Tensão Hidrostática

A tensão “ σ ” é, por definição, a razão entre a força aplicada e a área da seção transversal a que a mesma é submetida. Esta definição, no entanto, é relativa a um caso unidirecional e escalar. A definição completa da tensão envolve um tensor, que relaciona as variáveis de tensão nos três eixos de simetria. Dessa forma, a Figura 2.6 apresenta uma representação do tensor tensão “ σ ” em função do vetor tensão “ t ”.

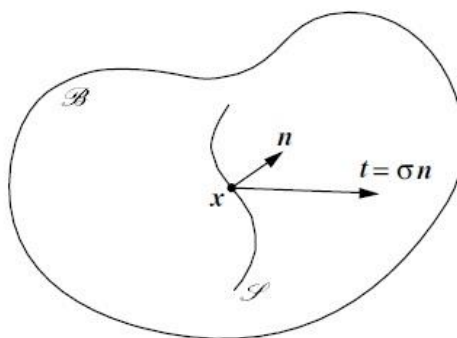


Figura 2.6 – Representação do Vetor Tensão e Tensor Tensão. (SouzaNeto, 2018)

Na representação da Figura 2.6, “ x ” é um ponto material e “ n ” é o vetor normal ao plano. Com isso, o vetor tensão “ t ” e o tensor tensão “ σ ” podem ser representados conforme a equação 2.1.

$$t(x, n) = \sigma(x) n \quad (2.1)$$

Dessa forma, o tensor tensão “ σ ” pode ser representado, em termos de uma base ortonormal, conforme a equação 2.2.

$$\sigma = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j \quad (2.2)$$

O tensor tensão σ pode ser decomposto como o somatório de uma parcela volumétrica e uma parcela desviadora (SouzaNeto, et al., 2008), conforme apresenta a equação 2.3.

$$\sigma = S + pI \quad (2.3)$$

Onde S é o tensor das tensões desviadoras e representa a parcela desviadora do tensor tensão, e pI é a parcela volumétrica da equação. O termo “ p ” é a chamada tensão hidrostática, e I é a identidade de segunda ordem. Rearranjando a equação 2.3 é possível descrever o tensor das tensões desviadoras de acordo com a equação 2.4.

$$S = \sigma - pI \quad (2.4)$$

Por definição, a tensão hidrostática “ p ” é dada de acordo com a equação 2.5 (SouzaNeto, et al., 2008).

$$p \equiv \frac{1}{3} tr(\sigma) \quad (2.5)$$

Onde o termo “ $tr(\boldsymbol{\sigma})$ ” representa o “traço” do tensor tensão, que pode ser definido, neste caso, como o somatório das componentes diagonais do tensor. Dessa forma, o tensor das tensões desviadoras pode ser escrito de acordo com a equação 2.6.

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (2.6)$$

E a tensão hidrostática “ p ” pode ser escrita de acordo com a equação 2.7.

$$p \equiv \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.7)$$

2.1.2 Invariantes do tensor tensão

O tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e o tensor das tensões desviadoras \mathbf{S} possuem, cada um, três invariantes. Esses parâmetros são de grande importância no estudo de plasticidade, de forma a configurar efeitos que serão acoplados aos modelos elastoplásticos. Os invariantes são parâmetros do tensor, que independentemente do sistema de coordenadas utilizado, terão o mesmo valor (Holzapfel, 2000).

Por convenção, os invariantes do tensor tensão são indicados pela letra “ I ”, enquanto que os invariantes do tensor das tensões desviadoras são indicados pela letra “ J ”. As equações 2.8, 2.9 e 2.10 apresentam os três invariantes do tensor tensão.

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.8)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[tr(\boldsymbol{\sigma})^2 - tr(\boldsymbol{\sigma}^2)] \quad (2.9)$$

$$I_3 = det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.10)$$

As equações 2.11, 2.12 e 2.13 apresentam os invariantes do tensor das tensões desviadoras.

$$J_1 = tr(\mathbf{S}) = 0 \quad (2.11)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}:\mathbf{S}) \quad (2.12)$$

$$J_3 = det(\mathbf{S}) \quad (2.13)$$

Os invariantes do tensor tensão e do tensor das tensões desviadoras são relacionados a alguns efeitos comumente considerados na elaboração de modelos elastoplásticos. O “ I_1 ”, por exemplo, é relacionado a uma característica da contribuição volumétrica do tensor tensão. O “ J_2 ” é uma característica da magnitude da tensão, e o “ J_3 ” apresenta uma característica da forma da superfície de escoamento.

O terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras também pode ser escrito por meio de uma forma alternativa, conforme apresenta a equação 2.14 (Bai, 2008).

$$r = \left[\frac{27}{2} det(\mathbf{S}) \right]^{1/3} = \left[\frac{27}{2} J_3 \right]^{1/3} \quad (2.14)$$

Onde “ r ” é relativo à representação do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras em sua forma alternativa.

2.1.3 Tensão Equivalente de von Mises

Um importante parâmetro que é bastante útil na elaboração de modelos elastoplásticos e se mostra presente em uma série de formulações matemáticas a respeito de plasticidade, é a tensão equivalente de von Mises “ σ_{eq} ”. Tal parâmetro é uma função do segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, conforme apresenta a equação 2.15.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \quad (2.15)$$

Dado que o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras já foi apresentado na equação 2.12, a tensão equivalente de von Mises pode ser reescrita conforme a equação 2.16.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S} : \mathbf{S})} \quad (2.16)$$

Resolvendo a parcela relativa à dupla contração do tensor das tensões desviadoras na equação 2.16, é possível escrever novamente a tensão equivalente de von Mises conforme apresenta a equação 2.17.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2.17)$$

2.1.4 Tensão de triaxialidade e ângulo de Lode

O mais importante parâmetro de controle de fratura é a tensão de triaxialidade “ η ” (Bai, 2008). A “tensão de triaxialidade” também é chamada de “razão de triaxialidade” ou “nível de triaxialidade”, de forma que os três termos têm o mesmo significado prático. Neste trabalho, por questões de conveniência, será utilizada apenas a terminologia “tensão de triaxialidade”.

Por definição, a tensão de triaxialidade é um parâmetro adimensional que define a relação entre tensões normais e cisalhantes em um corpo. O parâmetro pode ser escrito em função da tensão hidrostática “ p ” apresentada na equação 2.5, e da tensão equivalente de von Mises “ σ_{eq} ”, apresentado na equação 2.15. A equação 2.18 apresenta a tensão de triaxialidade.

$$\eta = \frac{p}{\sigma_{eq}} \quad (2.18)$$

De modo que os parâmetros de tensão hidrostática e tensão equivalente de von Mises são funções dos invariantes do tensor tensão e do tensor das tensões desviadoras, é possível escrever a tensão de triaxialidade também em função desses parâmetros, conforme mostra a equação 2.19.

$$\eta = \frac{\frac{1}{3}I_1}{\sqrt{3J_2}} \quad (2.19)$$

Onde “ I_1 ” é o primeiro invariante do tensor tensão, e “ J_2 ” é o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras.

O valor relativo da tensão de triaxialidade pode ser utilizado para definir a condição de carregamento do corpo em estudo (Malcher, 2011). A Tabela 1 apresenta um comparativo entre as faixas de tensão de triaxialidade e suas correspondentes condições de carregamento.

Tabela 1 – Faixas de Tensão de Triaxialidade e respectivas Condições de Carregamento.

Faixa da Tensão de Triaxialidade	Condição
$\left(\eta \leq -\frac{1}{3}\right)$	Predominantemente compressivo
$\left(\eta \geq \frac{1}{3}\right)$	Predominantemente trativo
$\left(-\frac{1}{3} \leq \eta < 0\right)$	Combinação de esforços normais compressivos e cisalhantes (região de baixa triaxialidade)
$(\eta = 0)$	Cisalhamento puro
$\left(0 < \eta \leq \frac{1}{3}\right)$	Combinação de esforços normais trativos e cisalhantes (região de baixa triaxialidade)

Para o caso de uma condição de carregamento puramente cisalhante, a tensão de triaxialidade é nula.

A deformação plástica equivalente de fratura varia de acordo com a tensão de triaxialidade a qual o material está submetido. A Figura 2.7 apresenta um exemplo clássico de comportamento de um material em função de sua deformação plástica equivalente na ruptura e a tensão de triaxialidade.

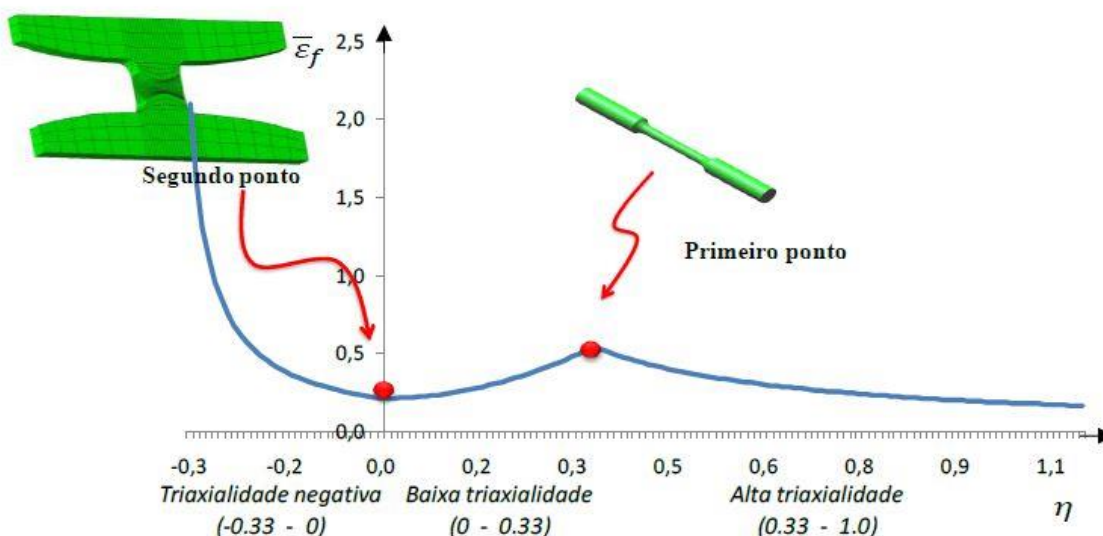


Figura 2.7 – Exemplo de comportamento de um material em função da deformação plástica equivalente na ruptura e da tensão de triaxialidade. (Malcher, 2011)

É importante ressaltar o caráter de exemplo da Figura 2.7, de forma que o comportamento da curva apresentado pode variar significativamente de acordo com o material analisado.

Os dois “pontos de calibração” apresentados no exemplo da Figura 2.7 são relativos ao ponto de tensão de triaxialidade nula, onde a condição de carregamento é puramente cisalhante, e o ponto de tensão de triaxialidade igual a 1/3, que representa uma condição de carregamento predominantemente normal em uma barra cilíndrica sem entalhe, ou lisa.

De posse do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras escrito na forma alternativa apresentado na equação 2.14, e da tensão equivalente de von Mises

apresentada na equação 2.15, é possível definir o terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras em sua forma normalizada, conforme apresenta a equação 2.20.

$$\xi = \left(\frac{r}{\sigma_{eq}} \right)^3 \quad (2.20)$$

Onde “ r ” é o terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras em sua forma alternativa e “ σ_{eq} ” é a tensão equivalente de von Mises.

Através do terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras em sua forma normalizada, é possível definir o chamado ângulo de Lode. O significado físico de tal parâmetro é o ângulo formado entre a projeção do tensor das tensões desviadoras no plano π e a linha de cisalhamento puro (Bai, 2008). Com isso, o ângulo de Lode “ θ ” pode ser expresso conforme a equação 2.21.

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\xi) \quad (2.21)$$

O ângulo de Lode “ θ ” pode ainda ser escrito em sua forma normalizada, conforme a equação 2.22.

$$\bar{\theta} = -\frac{6\theta}{\pi} \quad (2.22)$$

De forma a facilitar o entendimento do conceito do ângulo de Lode, é possível fazer a sua representação gráfica através de diferentes sistemas de coordenadas, conforme é apresentado na Figura 2.8.

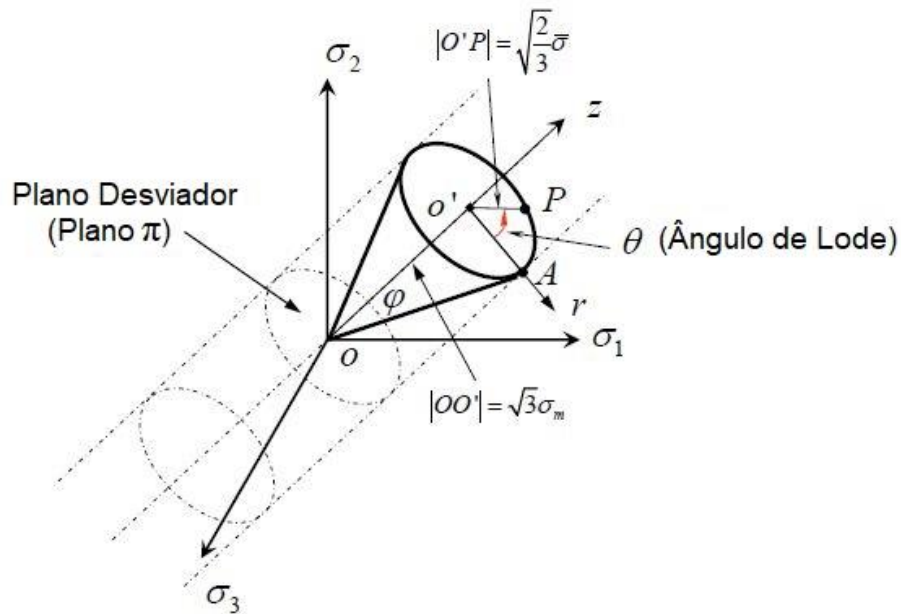


Figura 2.8 – Representação do ângulo de Lode com relação a três sistemas de coordenadas diferentes. (Bai, 2008) – Com modificações.

A combinação dos parâmetros de tensão de triaxialidade “ η ”, terceiro invariante do tensor das tensões desviadoras em sua forma normalizada “ ζ ” e ângulo de Lode “ θ ” indica o estado de tensão ao qual o corpo está submetido, conforme é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Estados de tensão em função dos parâmetros elastoplásticos.

Estado de Tensão	Parâmetro Elastoplástico			
	η	ζ	θ	$\bar{\theta}$
Tração Uniaxial	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{\pi}{6}$	1
Compressão Uniaxial	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{\pi}{6}$	-1
Cisalhamento Puro	0	0	0	0

A Figura 2.9 apresenta um comparativo visual das diferentes combinações de tensão de triaxialidade e ângulo de Lode normalizado e suas respectivas condições de carregamento.

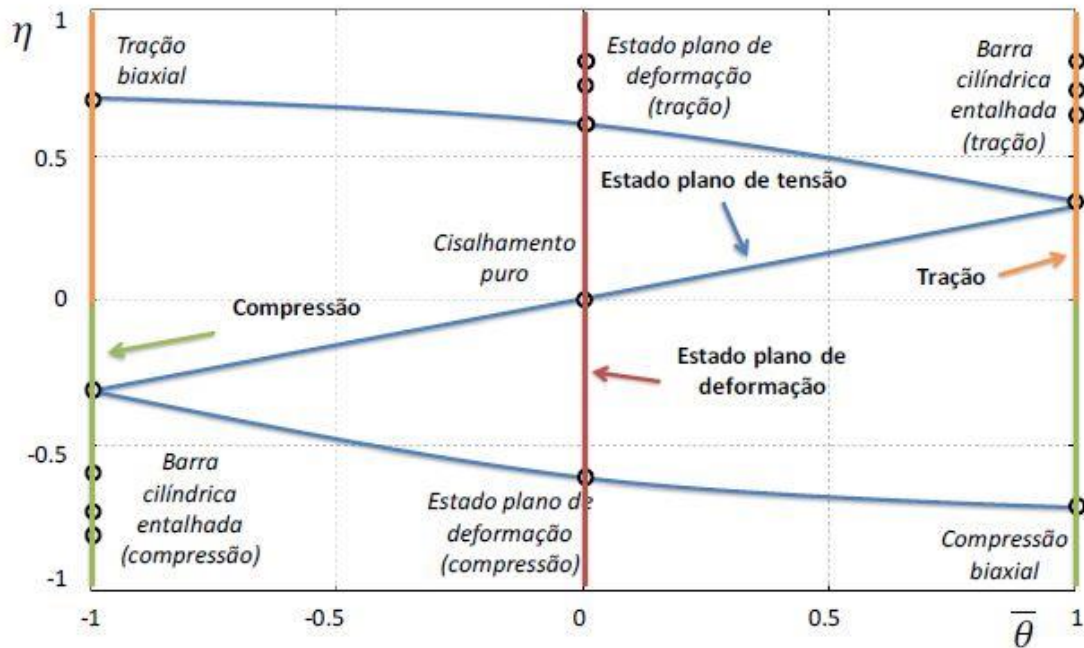


Figura 2.9 – Tipos de carregamento para diferentes combinações de tensão de triaxialidade e ângulo de Lode normalizado. (Bai & Wierzbicki, 2008) – Com modificações.

2.1.4.1 Modelo aproximado de Bridgman

Para a realização de testes monotônicos relativos a diferentes condições de tensão de triaxialidade, é possível o uso de corpos de prova cilíndricos com e sem entalhe. O limitante deste tipo de ensaio é que o mesmo apenas cobre a região de alta triaxialidade, onde “ η ” é maior ou igual a 1/3, conforme apresenta a Tabela 1 (Bai, 2008).

As condições do entalhe utilizados no corpo de prova definem a tensão de triaxialidade inicial relativa ao ensaio. O modelo proposto por *Bridgman* (Bridgman, 1952) relaciona a tensão de triaxialidade inicial no ponto relativo ao centro da seção interna com os parâmetros de raio interno da seção e raio de entalhe utilizado. A Figura 2.10 apresenta de forma visual os parâmetros de entalhe que são utilizados para o seu dimensionamento.

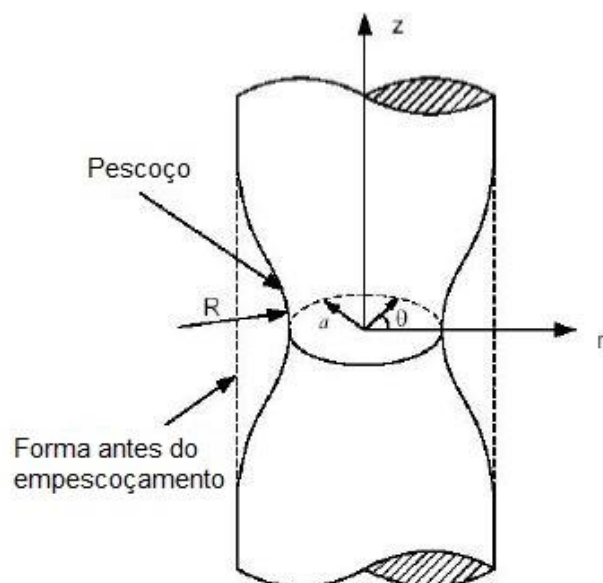


Figura 2.10 – Parâmetros de entalhe utilizados no dimensionamento através da equação de Bridgman. (Bai, 2008) – Com modificações.

Na Figura 2.10, “ R ” é o raio do entalhe e “ a ” é o raio da seção interna do mesmo, conforme pode ser observado na ilustração.

A relação entre os dois parâmetros apresentados na Figura 2.10 com a tensão de triaxialidade inicial do corpo de prova é apresentada na equação 2.23 (Bridgman, 1952).

$$\eta = \frac{1}{3} + \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) \quad (2.23)$$

Onde “ a ” e “ R ” são os parâmetros apresentados na Figura 2.10.

A partir dos resultados do ensaio, a deformação equivalente de fratura “ $\bar{\epsilon}_f$ ” pode ser definida através da equação 2.24.

$$\bar{\epsilon}_f = 2 \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \quad (2.24)$$

Onde “ a_0 ” é o raio de seção interna inicial do corpo de prova, e “ a_f ” é o raio da seção interna na fratura do corpo de prova.

2.1.5 Plasticidade associativa

No âmbito da plasticidade associativa, a função de escoamento do material “ Φ ” é definida através do seu potencial de fluxo “ Ψ ” conforme apresenta a equação 2.25, de forma que qualquer potencial de fluxo que não corresponde igualmente à função de escoamento, não pode ser considerado como um modelo elastoplástico associativo (SouzaNeto, et al., 2008).

$$\Psi \equiv \Phi \quad (2.25)$$

Com isso, os modelos elastoplásticos definidos como associativos indicam que a taxa de crescimento da deformação plástica é um tensor normal à superfície de escoamento (Sahadi, 2015). Dessa forma, a relação que define a evolução da deformação plástica é dada na equação 2.26.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (2.26)$$

Onde “ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ ” representa a taxa de evolução da deformação plástica, “ $\dot{\gamma}$ ” é o multiplicador plástico, e “ \mathbf{N} ” representa o vetor de fluxo plástico, definido conforme a equação 2.27.

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.27)$$

Dessa forma, a evolução da deformação plástica pode ser escrita de acordo com a equação 2.28.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.28)$$

Por fim, é possível definir uma variável interna conhecida como deformação plástica equivalente “ $\dot{\epsilon}^p$ ” e apresentada na equação 2.29.

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} \quad (2.29)$$

2.1.6 Leis de endurecimento

O histórico de deformação plástica aplicado ao material induz o efeito conhecido como endurecimento, onde a tensão de escoamento é uma característica da deformação plástica. A variação da força termodinâmica associada ao endurecimento é capaz de afetar o tamanho, forma ou posição da superfície de escoamento (SouzaNeto, et al., 2008).

De uma forma geral, pode-se destacar três condições de endurecimento: Endurecimento perfeitamente plástico, endurecimento isotrópico e endurecimento cinemático. Dependendo do modelo elastoplástico considerado, é possível a utilização em conjunto de tais condições.

Os modelos cujas condições de endurecimento são consideradas como perfeitamente plásticas se caracterizam pela superfície de escoamento não se alterar conforme a aplicação da deformação plástica. Já os modelos com endurecimento isotrópico apresentam a característica de uma evolução igualitária em todos os sentidos do domínio elástico, no plano- π . E os modelos com endurecimento cinemático apresentam uma translação da superfície de escoamento.

2.1.6.1 Endurecimento Perfeitamente Plástico

Conforme indicado anteriormente, o tipo de endurecimento conhecido como perfeitamente plástico se caracteriza por não haver uma dependência da superfície de escoamento em relação à deformação plástica aplicada. De forma a facilitar a visualização do comportamento do material conforme endurecimento perfeitamente plástico, a Figura 2.11 apresenta uma superfície de escoamento típica para o modelo elastoplástico de von Mises com endurecimento perfeitamente plástico no plano- π .

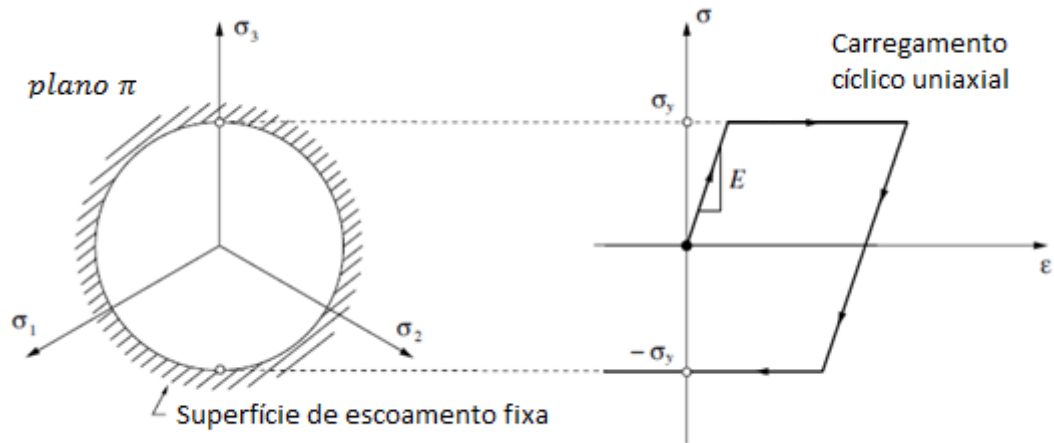


Figura 2.11 – Superfície de Escoamento na condição de endurecimento perfeitamente plástico.
(SouzaNeto, et al., 2008) – Com modificações.

O uso de modelos que utilizam endurecimento perfeitamente plástico em sua composição é comum em análises de estabilidade de estruturas e solos, e para a determinação de carregamentos limites e fatores de segurança em projetos de engenharia (SouzaNeto, et al., 2008).

2.1.6.2 Endurecimento Isotrópico

O endurecimento é dito isotrópico quando a superfície de escoamento evolui de forma homogênea em todas as direções do plano- π conforme a evolução da deformação plástica, e sem translação. Ou seja, neste tipo de endurecimento, o domínio elástico do material se expande de forma igualitária para tração ou compressão ao longo do fluxo plástico (SouzaNeto, et al., 2008). A Figura 2.12 apresenta um exemplo típico de evolução da superfície de escoamento em um modelo elastoplástico de von Mises com a condição de endurecimento isotrópico.

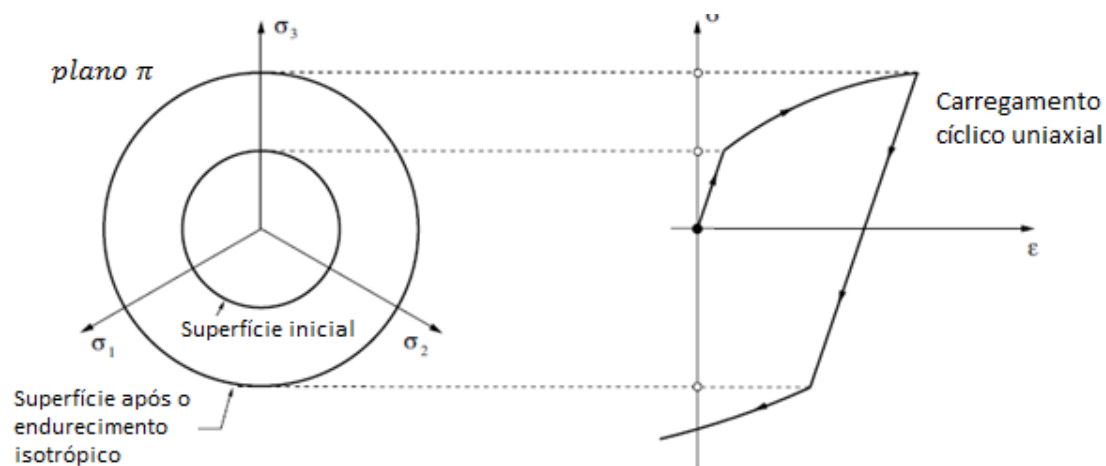


Figura 2.12 – Superfície de Escoamento na condição de endurecimento isotrópico. (SouzaNeto, et al., 2008) – Com modificações.

Um dos modelos de curva bastante utilizado e onde se considera o comportamento de endurecimento isotrópico é o modelo proposto por *Ramberg-Osgood*, apresentado na equação 2.30 em função da sua tensão de escoamento (Dowling, 2007).

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} + H\bar{\epsilon}^n \quad (2.30)$$

Onde “ σ_{y_0} ” é a tensão de escoamento inicial do material, “ $\bar{\epsilon}^p$ ” é a deformação plástica equivalente, e “ H ” e “ n ” são os dois parâmetros elastoplásticos, de forma que “ H ” é o módulo de endurecimento isotrópico e “ n ” é o expoente de endurecimento.

2.1.6.3 Endurecimento Cinemático

Modelos elastoplásticos que consideram endurecimento cinemático têm a característica de apresentar uma translação da superfície de escoamento. É frequentemente observado em experimentos que muitos materiais apresentam um decaimento na resistência do material conforme a aplicação de deformação plástica na direção oposta ao carregamento (SouzaNeto, et al., 2008). Tal comportamento é conhecido como efeito de *Bauschinger*. A Figura 2.13 apresenta um exemplo de comportamento apresentado por um modelo com endurecimento cinemático.

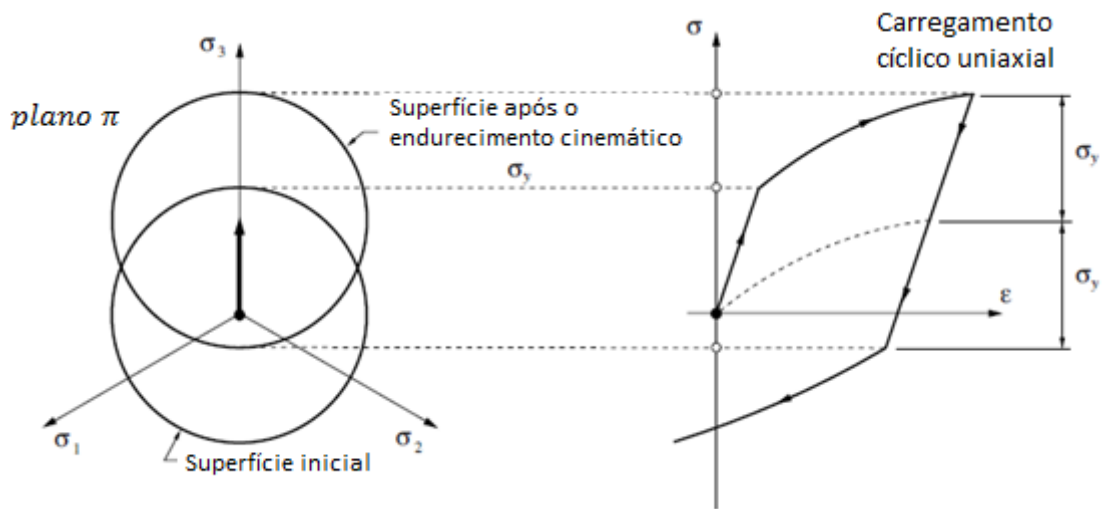


Figura 2.13 – Superfície de Escoamento na condição de endurecimento cinemático. (SouzaNeto, et al., 2008) – Com modificações.

O termo “ β ” indicado na ilustração da Figura 2.13 é referente ao tensor das tensões cinemáticas e representa o traslado da superfície de escoamento correspondente ao efeito de *Bauschinger*. A equação 2.31 apresenta a relação do tensor das tensões cinemáticas com o tensor das tensões desviadoras.

$$\eta = S - \beta \quad (2.31)$$

Onde “ η ” é o tensor relativo, “ S ” é o tensor das tensões desviadoras apresentado da equação 2.4, e “ β ” é o tensor das tensões cinemáticas.

2.1.7 Modelos Elastoplásticos

Este trabalho propõe a utilização e calibração do critério elastoplástico de *Bai* (Bai & Wierzbicki, 2008) como forma a prever o comportamento do material U2 para diferentes condições de tensão de triaxialidade. Como forma de comparação de resultados, as simulações numéricas serão realizadas tanto para o critério de *Bai* utilizadas neste trabalho, como para o critério clássico de von Mises. Dessa forma, esta seção apresenta de forma resumida as formulações matemáticas relativas a tais teorias. Neste trabalho, os critérios elastoplásticos de von Mises e Bai, em conjunto com as considerações de endurecimento e efeitos utilizadas, serão chamados apenas de “Modelos Elastoplásticos”.

2.1.7.1 von Mises

O modelo elastoplástico de von Mises é um dos mais utilizados na engenharia por conta de sua simplicidade e relativa acurácia. No entanto, para análises mais complexas, como a desenvolvida neste trabalho, este modelo não se apresenta como uma boa alternativa. As Figuras 1.1 e 1.2 apresentadas na introdução deste trabalho mostram um caso de deficiência do modelo de von Mises, de forma que outros modelos mais complexos se mostram mais vantajosos em determinados casos. Ainda assim, é importante o uso do modelo de von Mises como referência para demais modelos mais complexos. Dessa forma, esta seção irá apresentar o modelo de von Mises com endurecimento isotrópico não linear em seu aspecto matemático para futura utilização nas simulações numéricas do trabalho.

A função de escoamento para o modelo elastoplástico de von Mises é escrita em função da sua tensão equivalente e da tensão de escoamento. A equação 2.32 apresenta a função de escoamento de von Mises.

$$\Phi = \sigma_{eq} - \sigma_y \quad (2.32)$$

Onde “ σ_{eq} ” é a tensão equivalente de von Mises apresentada na equação 2.15 e “ σ_y ” é a tensão de escoamento.

O modelo elastoplástico de von Mises utiliza em sua composição apenas o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras “ J_2 ”, apresentado na equação 2.12. Dessa forma, a função de escoamento do modelo de von Mises pode também ser escrita em função dos termos relativos ao segundo invariante do tensor das tensões desviadoras, conforme é apresentado na equação 2.33.

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}:\mathbf{S})} - \sigma_y \quad (2.33)$$

Pelo vetor de fluxo plástico “ \mathbf{N} ” apresentado na equação 2.27 e considerando a plasticidade associativa, é possível resolver a derivada da função de escoamento de von Mises em relação ao tensor tensão de forma a se chegar ao vetor de fluxo apresentado na equação 2.34.

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\mathbf{S}}{2\sigma_{eq}} \quad (2.34)$$

Onde “ \mathbf{S} ” é o tensor das tensões desviadoras e “ σ_{eq} ” é a tensão equivalente de von Mises.

Com isso, é possível definir a taxa de evolução da deformação plástica, conforme é apresentado na equação 2.35.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \frac{3\mathbf{S}}{2\sigma_{eq}} \quad (2.35)$$

Por meio da taxa de evolução da deformação plástica para o modelo de von Mises, é possível definir a sua deformação plástica equivalente, conforme a equação 2.36.

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\dot{\gamma} \frac{3\mathbf{S}}{2\sigma_{eq}} \right) : \left(\dot{\gamma} \frac{3\mathbf{S}}{2\sigma_{eq}} \right)} \quad (2.36)$$

A solução da equação 2.36 indica que, para o caso do modelo elastoplástico de von Mises com endurecimento isotrópico não linear, a deformação plástica equivalente é igual ao multiplicador plástico, conforme apresenta a equação 2.37.

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \quad (2.37)$$

Por último, é possível definir as condições de complementaridade de *Kuhn-Tucker*, conforme o conjunto de equações 2.38, 2.39 e 2.40.

$$\Phi \leq 0 \quad (2.38)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad (2.39)$$

$$\dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (2.40)$$

Com isso, um resumo do modelo matemático é apresentado no Quadro 1.

MODELO MATEMÁTICO

Critério Elastoplástico de von Mises, com Endurecimento Isotrópico não linear regido pela equação de *Ramberg-Osgood*

- i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

- ii) Lei de *Hooke* generalizada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

- iii) Função de Escoamento:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S})} - \sigma_y$$

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}^p$$

- iv) Lei de Fluxo Plástico

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3\boldsymbol{S}}{2\sigma_{eq}}$$

- v) Atualização de Demais Variáveis

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$$

- vi) Regras de Complementaridade

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \dot{\gamma}\Phi = 0$$

2.1.7.2 Bai

O modelo elastoplástico proposto por *Bai* (Bai & Wierzbicki, 2008) se caracteriza por considerar mais efeitos em sua formulação, mais especificamente com relação à consideração dos efeitos relacionados à tensão de triaxialidade e ao ângulo de Lode.

Para a utilização do modelo de Bai, é necessária a utilização de algumas considerações. O modelo tem bons resultados para materiais homogêneos e isotrópicos, com comportamento elasto-plástico com endurecimento isotrópico. O efeito de compressibilidade plástica também deve ser considerado (Bai & Wierzbicki, 2008).

Assim como para o modelo de von Mises, a função de escoamento do material é dada conforme a equação 2.32, anteriormente apresentada. No entanto, para o caso do modelo de Bai, a função para o limite de escoamento é dada conforme a equação 2.41.

$$f = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}_p) \left[1 - C_\eta(\eta - \eta_0) \right] \left[C_\theta^S + (C_\theta^{ax} - C_\theta^S) \left(\gamma - \frac{\gamma^{m+1}}{m+1} \right) \right] \quad (2.41)$$

Onde “ η ” é a tensão de triaxialidade, “ η_0 ” é a tensão de triaxialidade na calibração, “ γ ” representa a diferença entre von Mises e Tresca no plano de tensões desviadoras, de modo que para o caso de simetria axial este parâmetro é igual a 1, e “ C_η ”, “ C_θ^S ”, “ C_θ^{ax} ” são constantes materiais a serem calibradas. O termo “ $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}_p)$ ” representa a tensão de escoamento e pode ser escrito conforme a equação 2.42.

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}_p) = \sigma_y = \sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}^p \quad (2.42)$$

Dessa forma, a função de escoamento para o modelo de Bai pode ser escrita conforme a equação 2.43 (Bai & Wierzbicki, 2008).

$$\Phi = \sigma_{eq} - \sigma_y \left[1 - C_\eta(\eta - \eta_0) \right] \left[C_\theta^S + (C_\theta^{ax} - C_\theta^S) \left(\gamma - \frac{\gamma^{m+1}}{m+1} \right) \right] \quad (2.43)$$

De modo que neste trabalho se busca uma forma simplificada do modelo elastoplástico de Bai, é possível suprimir alguns termos das equações da função de escoamento e do modelo. Para o caso estudado neste trabalho, onde estão sendo analisados apenas os efeitos relacionados à tensão de triaxialidade, os efeitos relacionados ao ângulo de Lode podem ser desconsiderados na equação. Com isso, os termos relativos às constantes “ C_{θ}^S ” e “ C_{θ}^{ax} ” foram tomados como iguais a 1, de forma que a função de escoamento pode ser simplificada e escrita conforme a equação 2.44.

$$\Phi = \sigma_{eq} - \sigma_y [1 - C_{\eta}(\eta - \eta_0)] \quad (2.44)$$

Com isso, o vetor de fluxo “ \mathbf{N} ” para o modelo de Bai Simplificado pode ser escrito de acordo com a equação 2.45.

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \sigma_y C_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.45)$$

Onde os termos $\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ podem ser escritos conforme as equações 2.46 e 2.47, respectivamente.

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\mathbf{S}}{2\sigma_{eq}} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3\sigma_{eq}} \mathbf{I} - \frac{3\eta}{2\sigma_{eq}^2} \mathbf{S} \quad (2.47)$$

Com isso, é possível definir a taxa de evolução da deformação plástica, conforme é apresentado na equação 2.48.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left[\frac{3\mathbf{S}}{2\sigma_{eq}} + \sigma_y C_{\eta} \left(\frac{1}{3\sigma_{eq}} \mathbf{I} - \frac{3\eta}{2\sigma_{eq}^2} \mathbf{S} \right) \right] \quad (2.48)$$

A partir da taxa de evolução da deformação plástica, e considerando a equivalência do trabalho plástico, define-se a deformação plástica equivalente, dada pela equação 2.49.

$$\dot{\tilde{\epsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}{\sigma_{eq}} = \dot{\gamma} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{N}}{\sigma_{eq}} \quad (2.49)$$

Por fim, define-se as equações de complementaridade, conforme as equações 2.50, 2.51 e 2.52.

$$\Phi \leq 0 \quad (2.50)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad (2.51)$$

$$\dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (2.52)$$

Dessa forma, é possível escrever um resumo do modelo matemático para Bai Simplificado, conforme é apresentado no Quadro 2.

MODELO MATEMÁTICO

Critério Elastoplástico de Bai Simplificado, com Endurecimento Isotrópico não linear.

i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii) Lei de *Hooke* generalizada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii) Função de Escoamento:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S} : \mathbf{S})} - \sigma_y [1 - C_\eta (\eta - \eta_0)]$$

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} + H \bar{\varepsilon}^p$$

iv) Lei de Fluxo Plástico

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left[\frac{3\mathbf{S}}{2\sigma_{eq}} + \sigma_y C_\eta \left(\frac{1}{3\sigma_{eq}} \mathbf{I} - \frac{3\eta}{2\sigma_{eq}^2} \mathbf{S} \right) \right]$$

v) Atualização de Demais Variáveis

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{N}}{\sigma_{eq}}$$

vi) Regras de Complementaridade

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$$

3 MODELOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são apresentadas as estratégias numéricas utilizadas para as soluções, por meio do método dos elementos finitos, do problema proposto com a utilização dos modelos elastoplásticos apresentados no Capítulo 2.

Os modelos de solução numérica adotados neste trabalho utilizam uma série de estratégias de solução das variáveis internas inerentes ao problema. A estratégia numérica utiliza a metodologia da decomposição do operador (SouzaNeto, et al., 2008), onde o problema é dividido em um preditor elástico e um corretor plástico. Na primeira parte, do preditor elástico, o problema é assumido como completamente elástico e as variáveis são calculadas de forma direta. Nesta etapa, a cada incremento é realizado o cálculo da função de escoamento, de forma que enquanto esta não for violada, o sistema é considerado ainda como elástico. Caso a função de escoamento seja violada, a condição prática é que o modelo não está mais em regime elástico e, portanto, é necessária a utilização do corretor plástico. Nesta parte, os valores encontrados para as variáveis pelo preditor elástico são utilizados como valores iniciais e um sistema de equações residuais é resolvido. Esta parte da estratégia numérica conta com um sistema de equações não lineares discretizado que é resolvido por meio do método de *Newton-Raphson*.

De uma forma geral, o modelo numérico adotado neste trabalho utiliza o conceito de se utilizar um incremento de deformação conhecido $\Delta\varepsilon$ para se obter as variáveis internas no instante de tempo t_{n+1} , tomando como ponto de partida o tempo t_n .

A Figura 3.1 apresenta um esquema ilustrativo para a estratégia numérica utilizada neste trabalho.

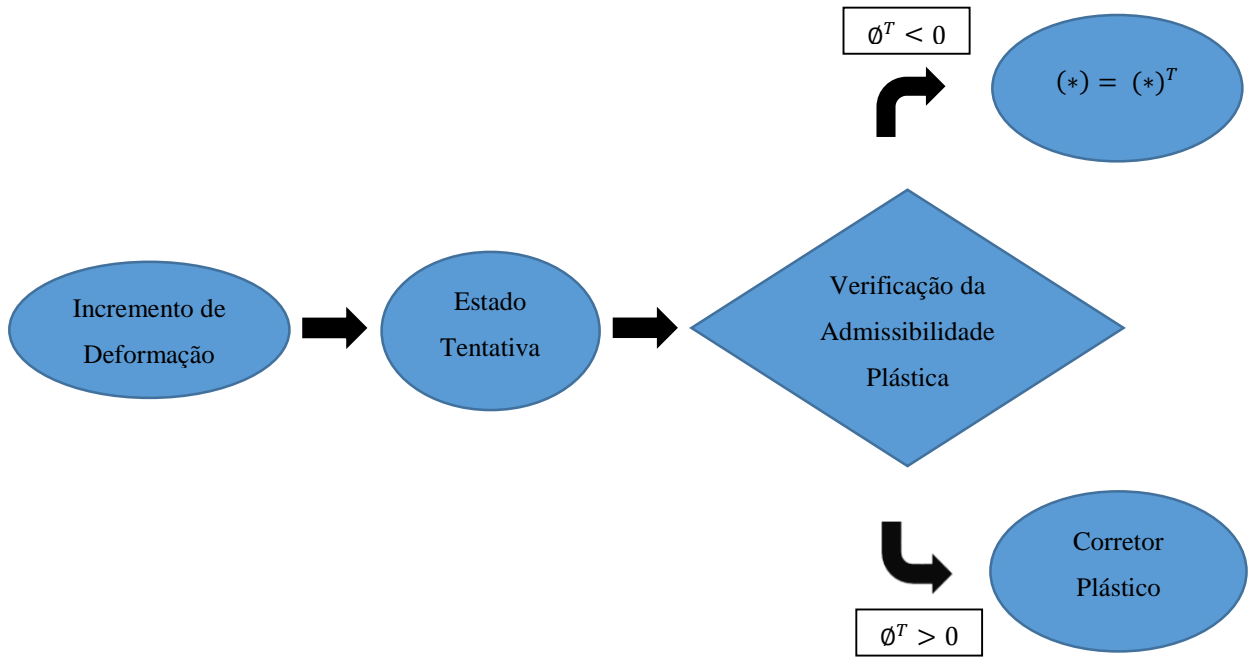


Figura 3.1 – Esquema ilustrativo da estratégia numérica.

Nas seções seguintes, serão apresentadas as estratégias numéricas utilizadas para as soluções por meio dos modelos elastoplásticos de von Mises e Bai.

3.1 MODELO DE VON MISES

Para a elaboração do modelo numérico para a lei elastoplástica de von Mises utilizada neste trabalho, com endurecimento isotrópico não linear, deve-se inicialmente definir o estado tentativa do modelo, que é apresentado no conjunto de equações 3.1.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\
 \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$ é o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$ é o tensor tensão, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$ é o tensor das deformações plásticas, e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT}$ é a deformação plástica equivalente. Todas as

equações apresentadas no conjunto de equações 3.1 são relativos ao estados tentativa de suas respectivas variáveis. Por conta de se assumir que o estado tentativa em questão é relativo apenas à parcela elástica, os termos definidos para o estado tentativa do tensor das deformações plásticas e da deformação plástica equivalente são definidos como iguais aos seus valores iniciais, no instante de tempo “ n ”, conforme é apresentado no conjunto de equações 3.1.

Com base nos resultados obtidos em cada incremento do estado tentativa, a admissibilidade plástica é checada. Tal procedimento é feito tomando por base a função de escoamento definida para o modelo e apresentada na equação 2.33, de forma que caso o valor encontrado para a função de escoamento seja menor ou igual a zero, o passo é considerado elástico. Neste caso, os termos definidos para cada variável são tomados como equivalentes ao seu termo “tentativa” para aquele incremento. Caso a função de escoamento seja maior que zero, o passo é considerado como plástico e o corretor plástico é acionado.

A admissibilidade plástica é checada conforme apresenta a equação 3.2.

$$\Phi_{n+1}^T = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S}_{n+1}^T : \mathbf{S}_{n+1}^T)} - \sigma_{y_0} - H\bar{\epsilon}_{n+1}^p \quad (3.2)$$

Para o uso do corretor plástico, é realizada a correção do estado tentativa do tensor das deformações elásticas por meio da retirada da parcela relativa ao incremento de deformação plástica, conforme é apresentado na equação 3.3.

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (3.3)$$

De forma que o incremento de deformação plástica “ $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p$ ” pode ser escrito em função do vetor de fluxo plástico, conforme apresenta a equação 3.4.

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p = \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \quad (3.4)$$

Com isso, o estado tentativa do tensor das deformações elásticas pode ser reescrito conforme é apresentado na equação 3.5.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.5)$$

Dessa forma, é possível utilizar a parcela subtraída na equação 3.5 para a atualização da variável de deformação plástica, conforme é apresentado na equação 3.6.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.6)$$

Onde o vetor de fluxo “ \mathbf{N}_{n+1} ” é dado, para o modelo elastoplástico de von Mises, conforme apresentado na equação 3.7.

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}} \quad (3.7)$$

É possível utilizar a lei de *Hooke* generalizada para escrever a equação 3.5 em função do campo de tensão. O conjunto de equações 3.8 apresenta essa transformação de variáveis.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}) \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Com base nas transformações apresentadas no conjunto de equações 3.8, e por meio da definição do vetor de fluxo “ \mathbf{N}_{n+1} ” é possível escrever o termo relativo ao tensor tensão conforme é apresentado na equação 3.9.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - 2G\Delta\gamma \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \quad (3.9)$$

A atualização da deformação plástica equivalente conforme é apresentado na equação 3.10.

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \quad (3.10)$$

Por fim, é possível escrever a atualização da função de escoamento, conforme é apresentado na equação 3.11.

$$\Phi_{n+1} = \sigma_{eq_{n+1}} - \sigma_{y0} - H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (3.11)$$

Com isso, as equações 3.9, 3.10 e 3.11 configuram o conjunto de equações e variáveis a ser resolvido pelo método de *Newton-Raphson*.

Após a etapa do corretor plástico, ainda é realizada a atualização das variáveis de deformação elástica e deformação plástica, conforme é apresentado nas equações 3.12 e 3.13.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e^r} - \Delta\gamma \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}} \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^r} + \Delta\gamma \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}} \quad (3.13)$$

O resumo do modelo numérico para a lei elastoplástica de von Mises com endurecimento isotrópico não linear é apresentado no Quadro 3.

MODELO NUMÉRICO

Critério Elastoplástico de von Mises, com Endurecimento Isotrópico não linear regido pela equação de *Ramberg-Osgood*

i) Determinação do estado tentativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

ii) Verificação da admissibilidade plástica:

$$\Phi_{n+1}^T = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{S}_{n+1}^T : \boldsymbol{S}_{n+1}^T)} - \sigma_{y0} - H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT}$$

Se $\Phi_{n+1}^T \leq 0$, o passo é considerado elástico, portanto:

$$(*)_{n+1}^T = (*)_{n+1}$$

Caso contrário, utilizar o corretor plástico.

iii) Corretor Plástico: Resolver o sistema para “ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ”, “ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ ” e “ $\Delta\gamma$ ”.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - 2G\Delta\gamma\boldsymbol{N}_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \\ \Phi_{n+1} = \sigma_{eq_{n+1}} - \sigma_{y0} - H\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \end{array} \right.$$

iv) Atualizar demais variáveis:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma\boldsymbol{N}_{n+1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} + \Delta\gamma\boldsymbol{N}_{n+1}$$

3.1.1 Método de Newton-Raphson

Para a solução do sistema de equações não lineares apresentado na etapa “iii” do Quadro 3, é utilizado o Método de Newton-Raphson. Para tanto, inicialmente deve-se transformar as equações apresentadas em equações residuais, conforme é indicado no conjunto de equações 3.14.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T + 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \\
 R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \\
 R_{\Delta\gamma} &= \sigma_{eq_{n+1}} - \sigma_{y0} - H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

De posse das equações residuais, é possível escrever o sistema em sua forma linearizada, conforme é apresentado na equação 3.15.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \tag{3.15}$$

O método funciona de forma iterativa, onde na primeira iteração ($k = 0$), os valores são definidos de acordo com o estado tentativa. Posteriormente, as variáveis são atualizadas conforme o resultado obtido para “ δ ”. A cada incremento é realizado um teste de tolerância para, de modo que as iterações são finalizadas quando o critério de parada é atingido. A equação 3.16 apresenta o critério de parada utilizado.

$$erro = \left| \frac{\Phi_{n+1}}{\sigma_{y0}} \right| \leq tolerância \tag{3.16}$$

O resumo do método de *Newton-Raphson* para a solução das equações não lineares definidas para o modelo elastoplástico de von Mises é apresentado no Quadro 4.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Critério Elastoplástico de von Mises, com Endurecimento Isotrópico não linear regido pela equação de *Ramberg-Osgood*

i) Definição do estado inicial ($k = 0$):

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_{n+1}^T$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p{}^{(0)} = \bar{\varepsilon}_n^p$$

$$\Delta\gamma^{(0)} = 0$$

ii) Solução do sistema linearizado para “ $\delta\sigma_{n+1}$ ”, “ $\delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ ” e “ $\delta\Delta\gamma$ ”:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

iii) Verificação da convergência:

$$erro = \left| \frac{\Phi_{n+1}}{\sigma_{y_0}} \right| \leq tolerância$$

Se “*erro*” for menor que a “*tolerância*”, finalizar o processo.

Caso contrário, repetir a etapa “*ii*”.

A solução das derivadas indicadas no Quadro 4 é apresentada em Anexo, ao final deste trabalho.

3.2 MODELO DE BAI

Para o modelo elastoplástico de Bai Simplificado, conforme as relações indicadas no Quadro 2, o conjunto de equações 3.17 apresenta a estratégia inicial para o estado tentativa do modelo.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\
 \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$ é o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$ é o tensor tensão, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT}$ é o tensor das deformações plásticas, e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT}$ é a deformação plástica equivalente. A estratégia para atualização de valores a cada instante de tempo “ n ” é a mesma adotada para o modelo de von Mises e explicada na seção 3.1, de forma que os resultados obtidos através do conjunto de equações 3.17 a cada incremento de tempo são utilizados para a admissibilidade plástica. O procedimento para checagem da admissibilidade plástica é realizado conforme a equação 3.18.

$$\Phi_{n+1}^T = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}_{n+1}^T : \mathbf{S}_{n+1}^T) - (\sigma_{y_0} + H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) [1 - C_\eta (\eta_{n+1}^T - \eta_0)]} \tag{3.18}$$

Para o uso do corretor plástico, é realizada a correção do estado tentativa do tensor das deformações elásticas por meio da retirada da parcela relativa ao incremento de deformação plástica, conforme é apresentado na equação 3.19.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1} \tag{3.19}$$

A correção do estado tentativa do tensor tensão é realizada conforme a equação 3.20.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \Delta \gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \tag{3.20}$$

Onde o vetor de fluxo “ \mathbf{N}_{n+1} ” é atualizado de acordo com a equação 3.21.

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}} + \sigma_{y_{n+1}} \left(\frac{1}{3\sigma_{eq_{n+1}}} \mathbf{I} - \frac{3\eta_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}^2} \mathbf{S}_{n+1} \right) C_\eta \quad (3.21)$$

A relação para a atualização da deformação plástica equivalente é apresentada na equação 3.22.

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \quad (3.22)$$

Onde a função de atualização para a tensão equivalente pode ser escrita conforme a equação 3.23

$$\sigma_{eq_{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}_{n+1}^T : \mathbf{S}_{n+1})} \quad (3.23)$$

Por fim, é possível escrever a função para atualização da função de escoamento, apresentada na equação 3.24.

$$\Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1})} - (\sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}_n^p) [1 - C_\eta (\eta_{n+1} - \eta_0)] \quad (3.24)$$

Dessa forma, é possível escrever um resumo da estratégia para o modelo numérico utilizada para o modelo de Bai Simplificado. O resumo da estratégia numérica é apresentado no Quadro 5.

MODELO NUMÉRICO

Critério Elastoplástico de Bai Simplificado, com Endurecimento Isotrópico.

i) Determinação do estado tentativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pT} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{pT} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$$

ii) Verificação da admissibilidade plástica:

$$\Phi_{n+1}^T = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{S}_{n+1}^T : \boldsymbol{S}_{n+1}^T)} - (\sigma_{y_0} + H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) [1 - C_\eta (\eta_{n+1}^T - \eta_0)]$$

Se $\Phi_{n+1}^T \leq 0$, o passo é considerado elástico, portanto:

$$(*)_{n+1}^T = (*)_{n+1}$$

Caso contrário, utilizar o corretor plástico.

iii) Corretor Plástico: Resolver o sistema para “ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ”, “ $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ ” e “ $\Delta\gamma$ ”.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T - \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \boldsymbol{N}_{n+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \\ \Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{S}_{n+1} : \boldsymbol{S}_{n+1})} - (\sigma_{y_0} + H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) [1 - C_\eta (\eta_{n+1} - \eta_0)] \\ \boldsymbol{N}_{n+1} = \frac{3\boldsymbol{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}} + \sigma_{y_{n+1}} \left(\frac{1}{3\sigma_{eq_{n+1}}} \boldsymbol{I} - \frac{3\eta_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}^2} \boldsymbol{S}_{n+1} \right) C_\eta \end{array} \right.$$

iv) Atualizar demais variáveis:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} - \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1}$$

3.2.1 Método de Newton-Raphson

Assim como é realizado na resolução numérica do modelo de von Mises, para o modelo de Bai Simplificado também é utilizado o método de *Newton-Raphson* para solucionar o sistema de equações não lineares apresentado na etapa “iii” do Quadro 5. O conjunto de equações 3.25 apresenta as equações residuais para a solução do sistema.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\
 R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \\
 R_{\Delta\gamma} &= \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1})} - (\sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}_n^p) [1 - C_\eta (\eta_{n+1} - \eta_0)]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

De posse das equações residuais, é possível escrever o sistema em sua forma linearizada, conforme é apresentado na equação 3.26.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \tag{3.26}$$

A solução pelo método de *Newton-Raphson* segue a mesma lógica apresentada na seção 3.1.1, de modo que na primeira iteração ($k = 0$), os valores são definidos de acordo com o estado tentativa, e nas demais, as variáveis são atualizadas de acordo com os resultados para “ δ ”.

A equação 3.27 apresenta o critério de parada utilizado.

$$erro = \left| \frac{\Phi_{n+1}}{(\sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}_n^p) [1 - C_\eta (\eta_{n+1} - \eta_0)]} \right| \leq tolerância \tag{3.27}$$

O resumo do método de *Newton-Raphson* para a solução das equações não lineares definidas para o modelo elastoplástico de Bai é apresentado no Quadro 6.

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Critério Elastoplástico de Bai Simplificado, com Endurecimento Isotrópico.

i) Definição do estado inicial ($k = 0$):

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p{}^{(0)} = \bar{\varepsilon}_n^p$$

$$\Delta\gamma^{(0)} = 0$$

ii) Solução do sistema linearizado para “ $\delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ”, “ $\delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ ” e “ $\delta\Delta\gamma$ ”:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k$$

iii) Verificação da convergência:

$$erro = \left| \frac{\Phi_{n+1}}{(\sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}_n^p) [1 - C_\eta(\eta_{n+1} - \eta_0)]} \right| \leq tolerância$$

Se “*erro*” for menor que a “*tolerância*”, finalizar o processo.

Caso contrário, repetir a etapa “*ii*”.

A solução das derivadas indicadas no Quadro 6 é apresentada em Anexo, ao final deste trabalho.

4 ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção são apresentados os resultados dos ensaios experimentais realizados para a confecção deste trabalho. Primeiramente, é feita uma descrição da geometria dos corpos de prova utilizados, bem como a formulação das equações que definiram seus parâmetros de entalhe para cada condição de tensão de triaxialidade. Também é apresentada a metodologia utilizada para a realização dos experimentos. Posteriormente, são apresentados os resultados dos ensaios.

4.1 GEOMETRIA DOS CORPOS DE PROVA

Para a realização dos ensaios, foram utilizados corpos de prova do tipo cilíndrico liso e entalhado do tipo “ampulheta”. Conforme apresentado na seção 2.1.4.1, este tipo de corpo de prova, quando submetido a ensaio de tração uniaxial e monotônico, é capaz de cobrir apenas a faixa de tensão de triaxialidade maior que $1/3$, também conhecida como faixa de alta triaxialidade.

Dessa forma, para o mapeamento do comportamento do material U2 com relação a diferentes tensões de triaxialidade, foram definidos 3 pontos de referência na faixa de alta triaxialidade para a realização de ensaios. Tais pontos são equivalentes às tensões de triaxialidade “ $\eta = 0.50$ ”, “ $\eta = 0.60$ ” e “ $\eta = 0.70$ ”, além da tensão de triaxialidade “ $\eta = 0.33$ ” que é equivalente ao corpo de prova cilíndrico liso. Tais valores para a tensão de triaxialidade foram tomados como uma referência para o projeto da geometria dos corpos de prova, de forma que o valor final utilizado para as respectivas tensões de triaxialidade foram levemente diferentes dos estipulados inicialmente.

Com isso, tomando por base os valores de tensão de triaxialidade definidos de forma inicial, os parâmetros de entalhe para cada corpo de prova foram calculados por meio da fórmula de *Bridgman* (Bridgman, 1952), já apresentada anteriormente por meio da equação 2.23.

Por uma questão de padronização dos corpos de prova, foi definido que todos os *CPs* entalhados contariam com o raio da menor seção “*a*” igual a 3.75 milímetros. O

procedimento adotado foi de calcular o valor de “*R*” para cada tensão de triaxialidade definida previamente, e posteriormente tais valores de “*R*” foram arredondados de forma a deixar os valores exatos. Com isso, os valores de tensão de triaxialidade relativos a cada corpo de prova foram calculados novamente por meio dos parâmetros definidos. Tal procedimento foi adotado para deixar os parâmetros de entalhe com valores cheios e de maior facilidade para fabricação. A Tabela 3 apresenta os valores relativos aos parâmetros de entalhe para cada corpo de prova e suas respectivas tensões de triaxialidade. Os parâmetros de tensão de triaxialidade inicial são relativos ao centro da seção interna na região do entalhe, de forma que este ponto é considerado, pela teoria, como onde se inicia a trinca no momento da fratura.

Tabela 3 – Parâmetros de entalhe para cada corpo de prova.

Raio da menor seção “<i>a</i>” [mm]	Raio do entalhe “<i>R</i>” [mm]	Tensão de Triaxialidade
3,75	4,00	0,72
3,75	6,00	0,61
3,75	10,00	0,51

Dessa forma, os três corpos de prova cujos parâmetros são apresentados na Tabela 3 foram fabricados e ensaiados para se obter as suas respectivas curvas de força por deslocamento.

Além dos corpos de prova apresentados na Tabela 3, também foi desenvolvido um corpo de prova cilíndrico liso, de forma a este cobrir a tensão de triaxialidade relativa a 1/3, conforme já mencionado anteriormente.

De forma a mostrar as diferenças de entalhe entre cada configuração utilizada, a Figura 4.1 apresenta um comparativo dos quatro tipos de Corpo de Prova desenvolvidos neste trabalho, de forma que são três entalhados e um liso.



Figura 4.1 – Comparação dos três tipos de CPs entalhados.

Os Corpos de Prova apresentados na Figura 4.1 representam os dados indicados na Tabela 3. Dos CPs indicados na figura, o de entalhe mais severo, com raio equivalente a 4 milímetros, está apresentado à direita na foto. O CP liso, relativo à tensão de triaxialidade $\eta = 0.33$ e utilizado para calibração do material, é apresentado à esquerda na foto.

As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam os desenhos em cotas de cada corpo de prova entalhado utilizado no trabalho.

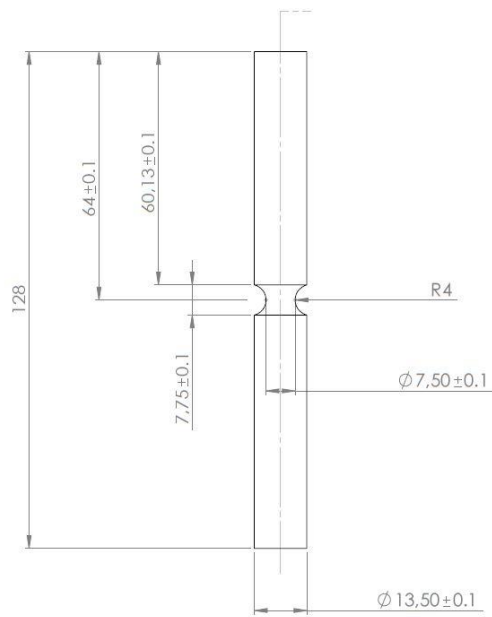


Figura 4.2 – Desenho em cotas do CP ($\eta = 0,72$).

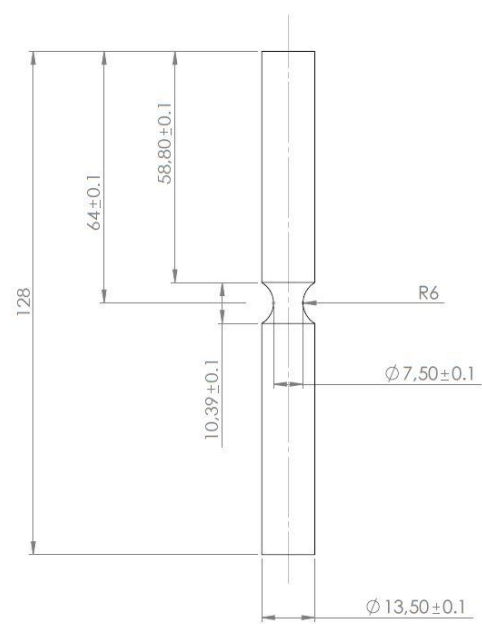


Figura 4.3 – Desenho em cotas do CP ($\eta = 0,61$).

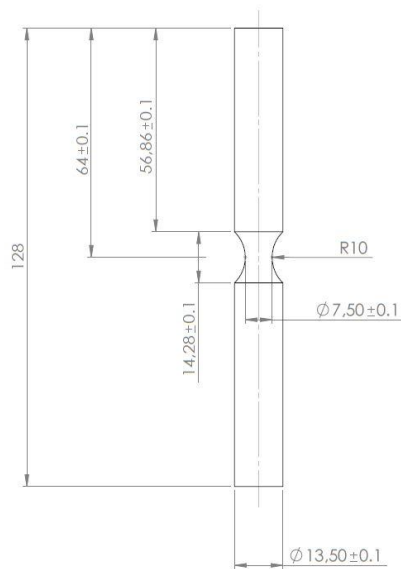


Figura 4.4 – Desenho em cotas do CP ($\eta = 0,51$)

4.2 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Os ensaios de tração foram realizados por meio de uma máquina *MTS*, de forma que os dados de saída foram definidos como o deslocamento da garra da máquina e a força aplicada. Além dos dados brutos provenientes da máquina, foi instalado um “*clip gage*” de modo a capturar os dados de deformação e deslocamento na região de estudo do corpo de prova, em cada ensaio. O “*clip gage*” foi instalado de forma a estar posicionado exatamente no meio dos corpos de prova em cada ensaio, configurando assim a região em estudo do CP. A Figura 4.5 apresenta um dos corpos de prova na máquina, já com o “*clip gage*” instalado.



Figura 4.5 – Exemplo de montagem dos corpos de prova na máquina de ensaio, com o *clip gage* instalado.

O uso do “*clip gage*” nos ensaios se justifica por conta deste tipo de equipamento ter grande precisão e possibilitar que a área de controle do ensaio seja limitada pelo seu comprimento. No entanto, por uma razão de segurança do equipamento, nenhum ensaio foi realizado até a fratura com o “*clip gage*” montado. O procedimento adotado em cada ensaio foi de conduzir o experimento, com o “*clip gage*” montado no corpo de prova, até um determinado ponto de segurança, e posteriormente o mesmo foi retirado e o ensaio continuado até a ruptura. Dessa forma, para os resultados experimentais apresentados

neste trabalho, os ensaios são controlados pela deformação até um ponto aproximadamente próximo ao limite de resistência à tração do material, e deste ponto em diante, os ensaios são controlados pelo deslocamento.

4.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Inicialmente, foram realizados os ensaios referentes ao corpo de prova cilíndrico liso, que corresponde a uma tensão de triaxialidade “ $\eta = 0.33$ ”. Para esta tensão de triaxialidade, foi ensaiado um conjunto de três corpos de prova. Por conta da tensão de triaxialidade equivalente a 1/3 ser relativa ao principal ponto de calibração do material, os resultados destes ensaios foram usados também para a definição dos principais parâmetros do material.

A Figura 4.6 apresenta os resultados obtidos para as curvas de força por deslocamento para os corpos de prova cilíndricos lisos.

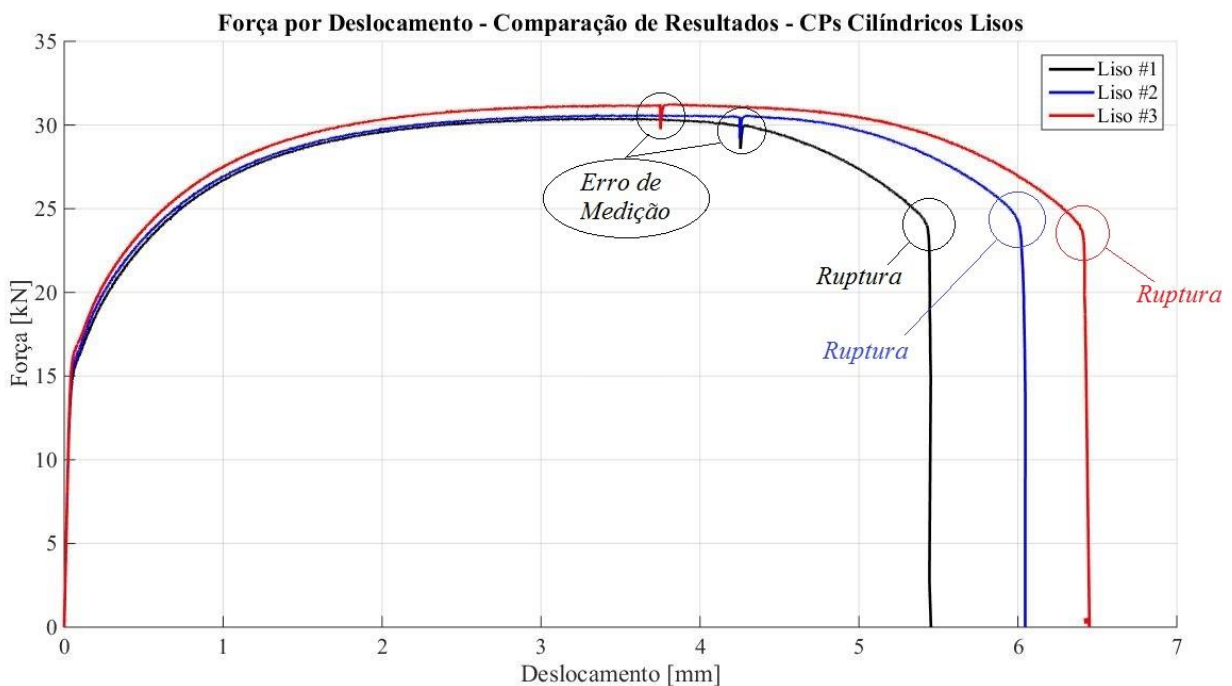


Figura 4.6 – Resultados experimentais para os corpos de prova cilíndrico lisos ($\eta = 0.33$).

Os dois pontos indicados no gráfico como “erro de medição” são concernentes a um erro de leitura da máquina no momento em que o experimento foi pausado para a retirada do “clip gage”, e portanto, são irrelevantes para a análise dos dados.

Para a utilização como dado experimental a ser utilizado como fonte para a definição dos parâmetros do material, foram utilizados os dados da curva “Liso #2” da Figura 4.6, relativa à série em azul do gráfico. Os resultados dos demais corpos de prova não foram utilizados por conta de um aparente erro de fabricação dos mesmos, que resultou na diferença entre os três modelos observada na Figura 4.6.

Para os corpos de prova entalhados, com tensões de triaxialidade na faixa acima de 1/3, foi realizado o ensaio de um CP para cada ponto de observação definido previamente, conforme apresentado na Tabela 3.

A Figura 4.7 apresenta os resultados experimentais para os corpos de prova cilíndricos entalhados.

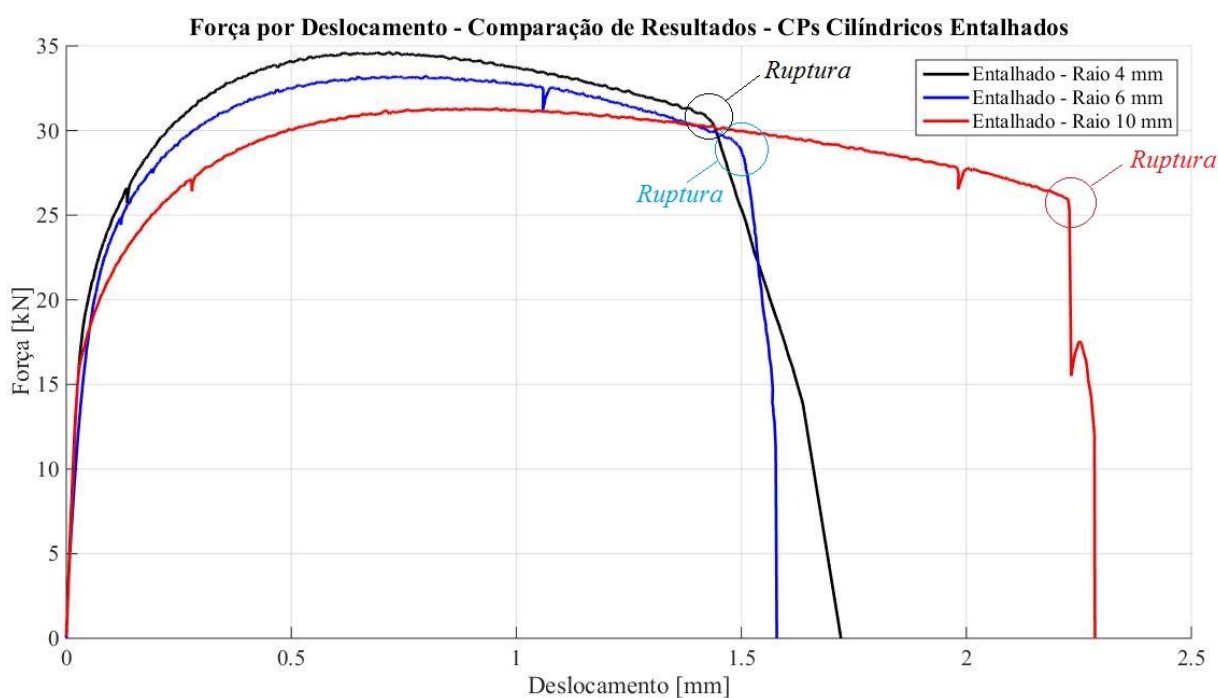


Figura 4.7 – Resultados experimentais para os corpos de prova cilíndrico entalhados ($\eta = 0.51$), ($\eta = 0.61$) e ($\eta = 0.72$).

Os dados apresentados nos resultados experimentais das Figuras 4.6 e 4.7 são uma correlação feita através dos dados fornecidos pelo “clip gage” e pela máquina. Os deslocamentos apresentados nos gráficos de resultados são relativos aos extremos da região em estudo do corpo de prova, que se refere à região onde o “clip gage” é instalado e mede 25 mm. Dessa forma, os deslocamentos medidos pela máquina, e concernentes ao posicionamento da garra, foram correlacionados de modo a se apresentar resultados relativos à região de estudo dos CPs.

Os dados apresentados nos gráficos das Figuras 4.6 e 4.7 são relativos aos valores brutos do ensaio. Portanto, a mudança abrupta de força ao final de cada série é referente ao ponto do ensaio onde ocorreu a ruptura do material. Tais pontos de ruptura estão indicados nos gráficos para melhor entendimento.

Dessa forma, é possível ainda traçar um gráfico de deformação de ruptura por tensão de triaxialidade, utilizando os pontos de ruptura de cada ensaio. A Figura 4.8 apresenta o gráfico de deformação na fratura experimental por tensão de triaxialidade teórico, juntamente com uma linha de tendência para os pontos. A equação para a linha de tendência é indicada na figura apenas para conferência.

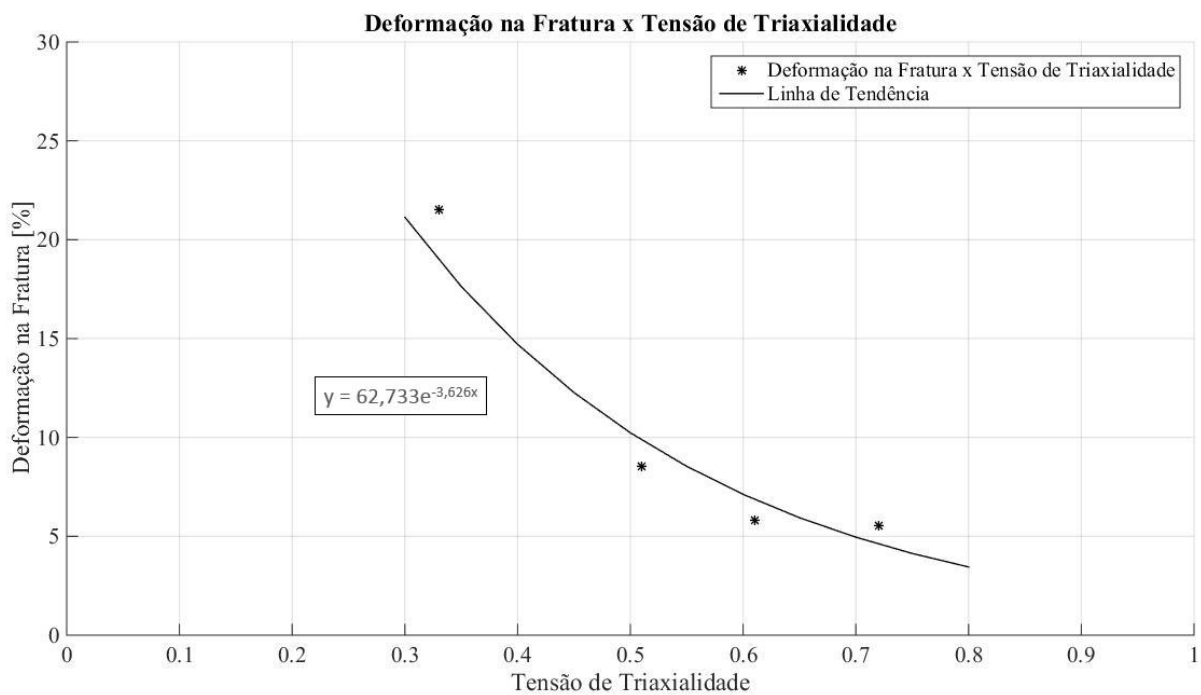


Figura 4.8 – Deformação na fratura experimental por tensão de triaxialidade teórico.

4.4 DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DO MATERIAL

Por meio dos resultados experimentais apresentados na seção 4.3 é possível definir as principais propriedades do material estudado. Tais propriedades foram utilizadas posteriormente para a implementação em códigos de elementos finitos para a solução numérica do problema.

Neste contexto, as propriedades importantes para o estudo são o módulo de elasticidade do material “ E ”, o coeficiente de *Poisson* “ ν ”, a tensão de escoamento inicial “ σ_{y_0} ” e a curva de encruamento. Para a definição de tais parâmetros, inicialmente os resultados de força por deslocamento foram transformados para dados de tensão por deformação. As propriedades foram definidas com base no resultado intermediário obtido para os corpos de prova cilíndricos lisos, que compreendem o ponto de calibração relativo a uma tensão de triaxialidade igual a 1/3.

Para a definição do módulo de elasticidade e da tensão de escoamento inicial do material, foram utilizados os procedimentos indicados na norma ASTM E8/E8M – 09. Tal procedimento encontrou um valor equivalente a 207.3 GPa para o módulo de elasticidade e 325 MPa para a tensão de escoamento.

A definição do coeficiente de *Poisson* foi feita por meio de pesquisa literária. O valor do coeficiente encontrado comumente na literatura para aços, e utilizado neste trabalho, é igual a 0.30 (Dowling, 2007).

A Tabela 1 apresenta as propriedades do material definidas para uso no trabalho.

Tabela 4 – Propriedades do Material.

Coefficiente	Valor
Módulo de Elasticidade “ E ”	207.3 GPa
Coefficiente de <i>Poisson</i> “ ν ”	0.30
Tensão de Escoamento “ σ_{y_0} ”	325 MPa

Para a geração da curva de encruamento, foi adotado o procedimento de transformar os dados de tensão de engenharia e deformação de engenharia em tensão real e

deformação real, e posteriormente foi feita uma regressão da região plástica do material de forma a gerar uma equação que fosse capaz de representar tal região do comportamento do mesmo. A Figura 4.9 apresenta a curva de encruamento encontrada para o material, e que foi introduzida posteriormente nos modelos de solução numérica realizados ao longo do trabalho. A equação de regressão que representa a curva de encruamento do material é indicada no gráfico apenas para conferência.

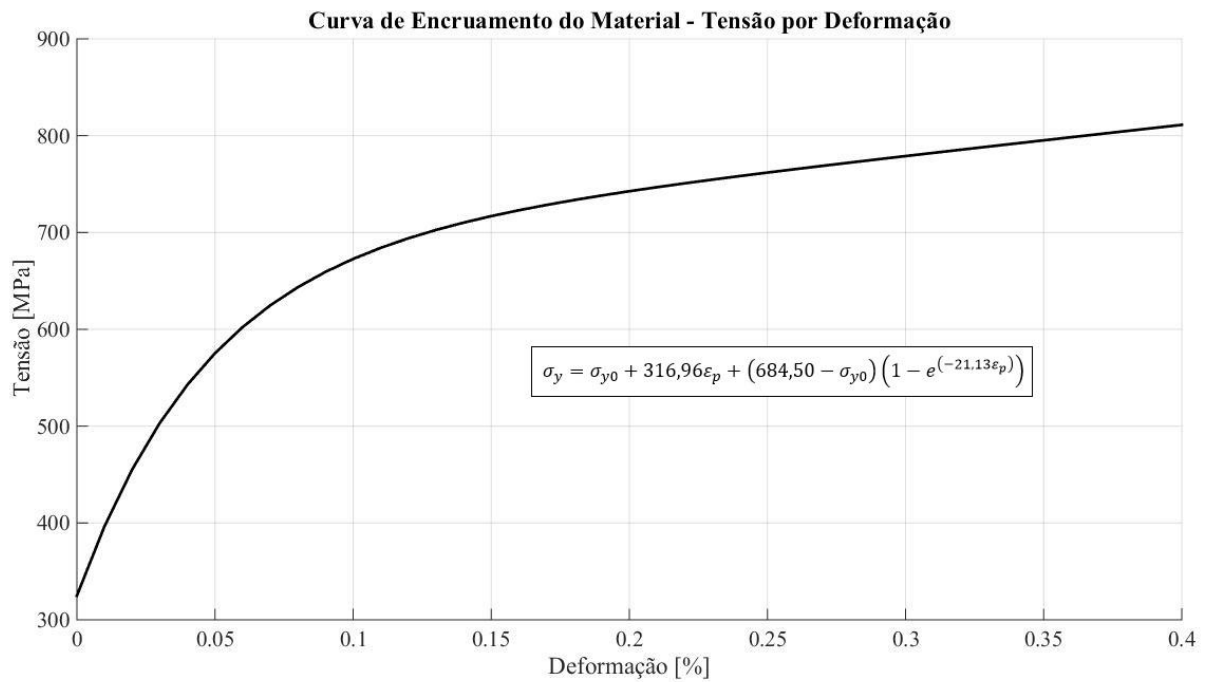


Figura 4.9 – Curva de encruamento do material.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As simulações numéricas foram realizadas por meio de um *software* acadêmico de elementos finitos, o *Hyplas* (SouzaNeto, 2018). Para a confecção das malhas e posterior visualização de alguns resultados, foi utilizado o *software* *GID* (GID, 2018).

O procedimento adotado para a realização das simulações numéricas foi, primeiramente, a discretização das malhas relativas a cada corpo de prova por meio do *software* *GID*. Posteriormente, as malhas foram exportadas para a plataforma *Hyplas* de modo a se realizar as simulações numéricas propriamente ditas. O *Hyplas* conta com um banco de dados que cobre uma série de modelos elastoplásticos, dentre eles os modelos de von Mises e Bai, que foram apresentados nas seções 2.1.7.1 e 2.1.7.2.

Primeiramente, foram realizadas as simulações numéricas relativas ao corpo de prova cilíndrico liso, utilizando o modelo elastoplástico de von Mises. Tal procedimento foi realizado inicialmente para se ter uma garantia de que a metodologia adotada estava correta. De posse de resultados coerentes para esta análise, as demais foram realizadas para os demais corpos de prova e para o modelo elastoplástico de Bai.

De modo que o objetivo do trabalho é encontrar uma calibração correta do modelo de Bai para a previsão do comportamento do material para várias condições de tensão de triaxialidade, a metodologia adotada nas simulações por meio do modelo elastoplástico de Bai foi de realizar uma série de simulações numéricas com diferentes valores do parâmetro C_{η} , apresentado anteriormente na seção 2.1.7.2. Com isso, foi buscada a melhor correlação dos resultados numéricos com os experimentais de modo a se obter a calibração ideal para o modelo.

Dado que o problema a ser estudado numericamente se trata de corpos de prova cilíndricos, com carregamento uniaxial e monotônico, é possível simplificar o problema para uma modelagem em duas dimensões, axissimétrica. Dessa forma, todas as simulações numéricas apresentadas no trabalho são relativas a modelagens axissimétricas, onde o modelo simulado representa $\frac{1}{4}$ da região em estudo dos corpos de prova. A Figura 5.1 apresenta um exemplo de malha axissimétrica utilizada nas simulações numéricas, e mostra a região do corpo de prova ao qual o modelo é referente.

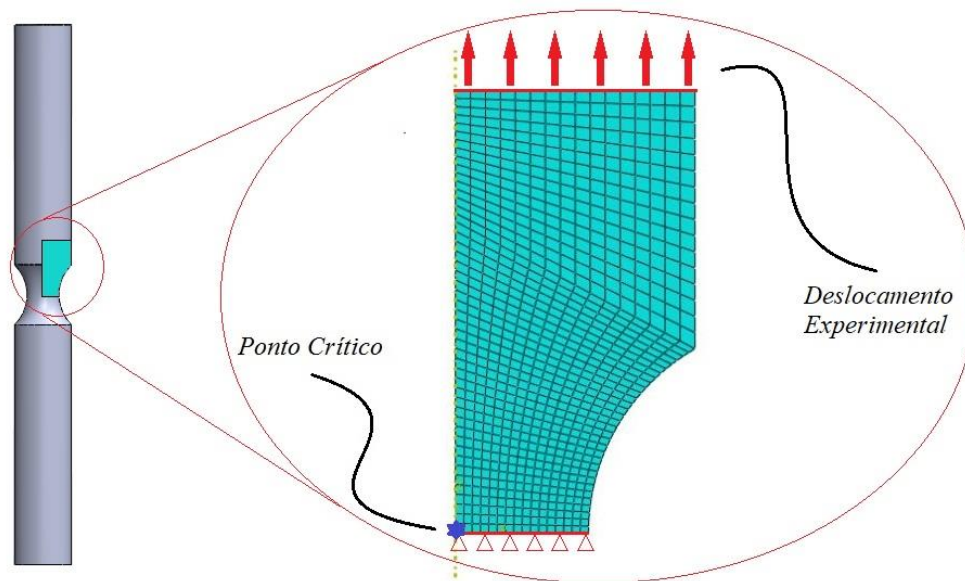


Figura 5.1 – Exemplo de malha utilizado, representando $\frac{1}{4}$ do corpo de prova entalhado em modelagem axissimétrica.

Para a correta caracterização das condições impostas aos corpos de prova nos ensaios reais, foram aplicadas condições de contorno nos nós das bases superior e inferior do modelo exemplificado na Figura 5.1. Na base inferior, foi aplicada a condição de contorno de fixação na direção do eixo de simetria do corpo de prova e o deslocamento nos demais eixos foi deixado livre. Já para a base superior, a condição de contorno aplicada foi a metade do deslocamento máximo do ensaio na direção do eixo de simetria, e o deslocamento nos demais eixos foi deixado livre. As indicações apresentadas na malha da Figura 5.1 foram inseridas para facilitar o entendimento das condições de contorno utilizadas e o deslocamento aplicado. Com relação à lateral esquerda do modelo, esta se comporta de forma a permitir deslocamentos apenas na direção do eixo de simetria, dado que este é um modelo axissimétrico.

Com relação à metodologia de análise dos resultados numéricos, além das curvas de reação relativas a cada caso de tensão de triaxialidade, também foram obtidos os dados de evolução da deformação plástica equivalente e evolução da triaxialidade ao longo do deslocamento aplicado. Para esses casos, os valores são relativos ao ponto crítico do corpo de prova, representado graficamente no modelo da Figura 5.1. O ponto crítico do ponto de prova representa o ponto onde se espera, pela teoria, o início da trinca no momento da ruptura. Para este caso, de corpo de prova cilíndrico sob tração axial, tal ponto é relativo ao centro do CP, conforme apresentado na figura.

5.1 ESTUDO DE CONVERGÊNCIA DE MALHA

Inicialmente, foi realizado um estudo de convergência de malha para o problema proposto. O procedimento adotado foi de discretizar a geometria dos corpos de prova com diferentes condições de refinamento de malha e comparar os resultados de forma a achar o melhor modelo. Foram realizadas uma série de simulações, e os parâmetros de tempo de solução e força ao longo do ensaio foram comparados para cada refinamento de malha, de forma a se escolher a melhor discretização a ser adotada no trabalho. Para o estudo de convergência de malha, foram realizadas apenas simulações numéricas referentes ao modelo elastoplástico de von Mises com endurecimento isotrópico não linear. A Figura 5.2 apresenta as malhas consideradas no estudo de acordo com os diferentes níveis de refinamento considerados.

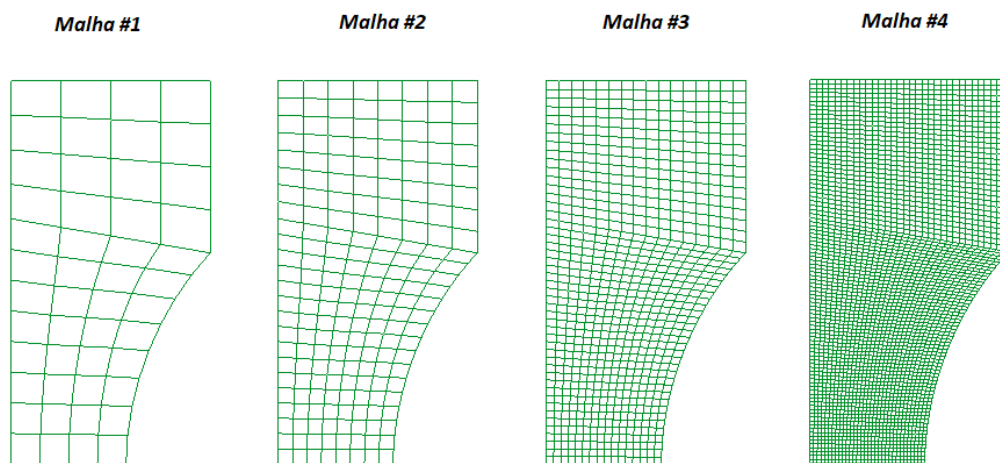


Figura 5.2 – Discretizações de malha consideradas para o estudo de convergência de malha.

Para a definição de uma estratégia de discretização de malha, foi utilizado o procedimento de dividir a geometria a ser analisada em duas partições. Na partição superior, foi arbitrado um valor “X” de quantidade de elementos em cada lado da partição. Na partição inferior, foi arbitrado o mesmo valor “X” para os lados “horizontais”, e um valor “Y” para os lados “verticais”, de modo que o valor “Y” equivale ao dobro do valor “X”. Para cada malha subsequente, os valores de “X” e “Y” foram dobrados, e esse procedimento foi repetido para todas as malhas do estudo de convergência. A Figura 5.3 apresenta uma esquematização da estratégia adotada para a discretização das malhas.

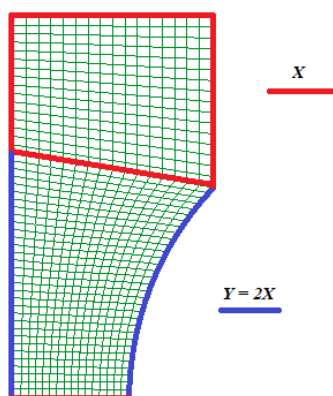


Figura 5.3 – Esquema de discretização utilizado para o estudo de convergência de malha.

A Tabela 5 apresenta os valores de “X” e “Y” para cada malha considerada no estudo de convergência de malha.

Tabela 5 – Quantidade de elementos em cada lado das malhas consideradas para o estudo de convergência de malha.

<i>Malha</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>
#1	4	8
#2	8	16
#3	16	32
#4	32	64

A Figura 5.4 apresenta os gráficos de força por deslocamento obtidos por meio das simulações numéricas realizados com as malhas apresentadas na Figura 5.2.

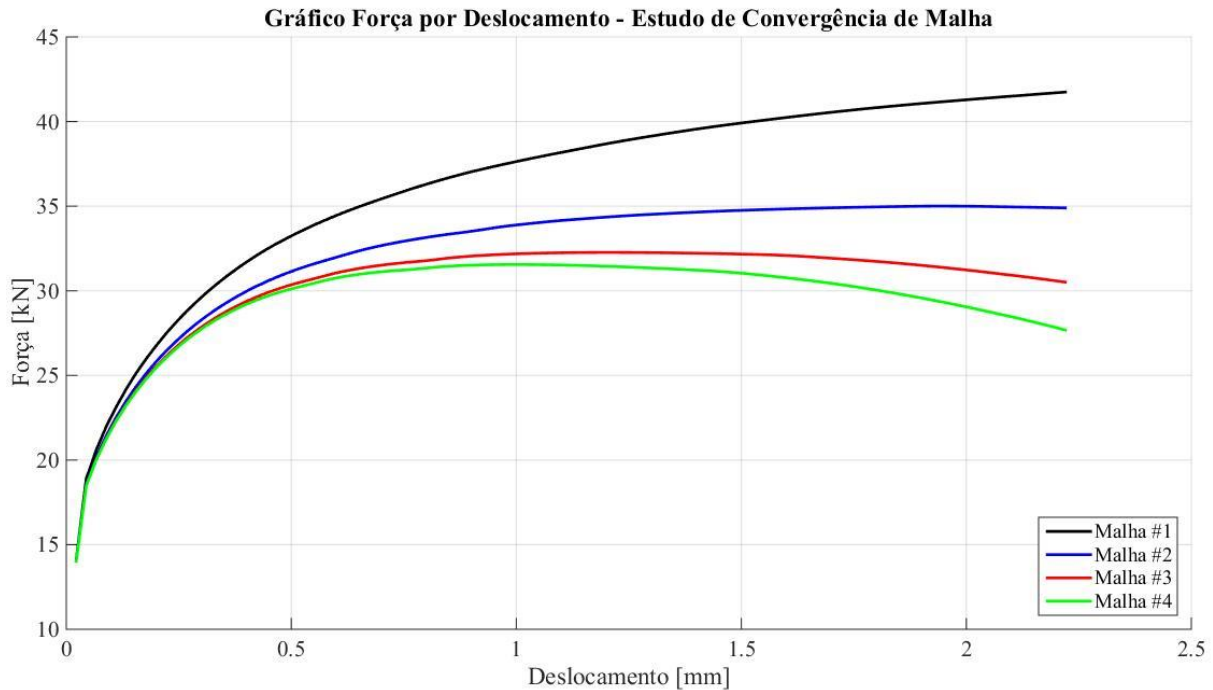


Figura 5.4 – Comparação de resultados para o estudo de convergência de malha – Gráficos Força por Deslocamento.

Os parâmetros adotados para a análise das malhas utilizados no estudo de convergência foram o tempo de simulação e a força calculada no ponto equivalente a 1 milímetro de deslocamento, para cada ensaio. A Tabela 6 apresenta os parâmetros utilizados para comparação.

Tabela 6 – Parâmetros de simulação para o estudo de convergência de malha.

<i>Malha</i>	<i>Tempo [s]</i>	<i>Força em 1 mm de deslocamento [kN]</i>
1	12,000	37,63
2	37,610	33,89
3	148,609	32,18
4	710,766	31,55

A partir dos dados apresentados na Tabela 6, é possível observar que a partir da malha #4, o tempo de simulação aumenta de forma considerável. Além disso, é possível notar que a diferença de força não é significativamente grande a partir da malha #3. Dessa forma, com base no custo computacional atrelado a cada malha, juntamente com a qualidade dos resultados obtidos, foi definida a discretização de malha #3 como o padrão de utilização para o trabalho. De forma que as geometrias dos corpos de prova são relativamente parecidas, não foram realizados estudos de convergência de malha para

cada tipo de entalhe. Portanto, a escolha de malha realizada neste estudo se estende para todas as simulações numéricas do trabalho, de modo que para cada corpo de prova, foi utilizada a mesma estratégia de discretização de malha definida neste estudo.

5.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As simulações numéricas foram realizadas para cada corpo de prova, utilizando os modelos de von Mises e Bai. Os deslocamentos aplicados em cada simulação numérica são relativos a metade dos deslocamentos máximos encontrados nos ensaios experimentais, visto que os modelos representam uma metade simétrica dos corpos de prova. Dessa forma, as simulações numéricas foram realizados até o ponto de fratura do material.

5.2.1 Simulações Numéricas pelo Modelo de von Mises

Nesta subseção, são apresentadas as comparações dos resultados experimentais com os resultados das simulações numéricas pelo modelo elastoplástico de von Mises.

A Figura 5.5 apresenta uma comparação geral dos resultados experimentais para todas as condições de triaxialidade estudadas com as suas respectivas simulações pelo modelo elastoplástico de von Mises.

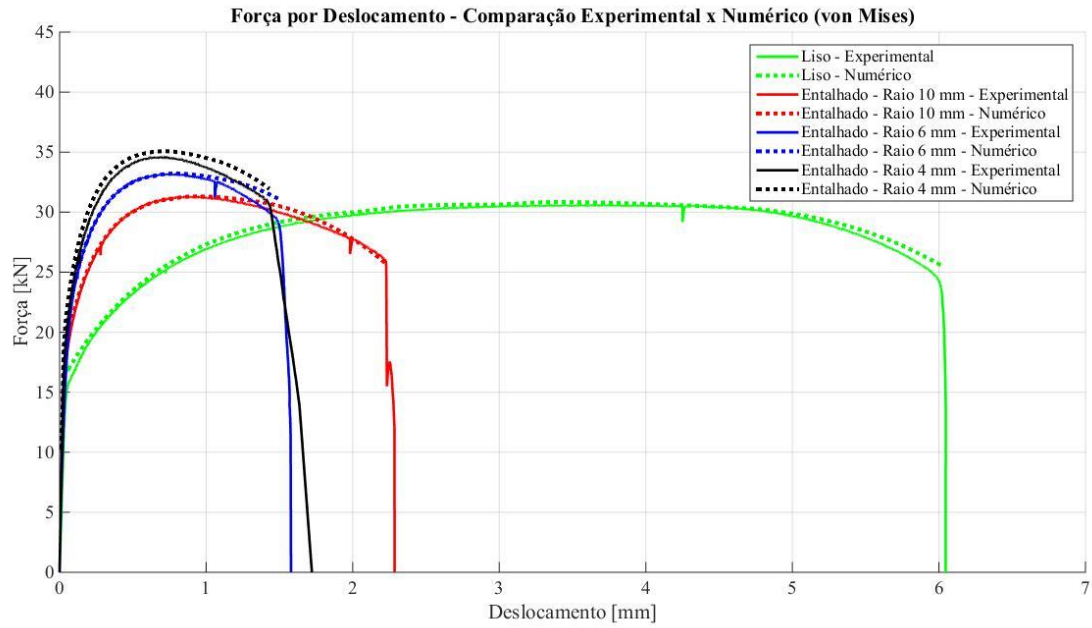


Figura 5.5 – Comparação de Resultados Experimentais e Numéricos utilizando o modelo elastoplástico de von Mises.

A Figura 5.6 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de von Mises para o corpo de prova cilíndrico liso.

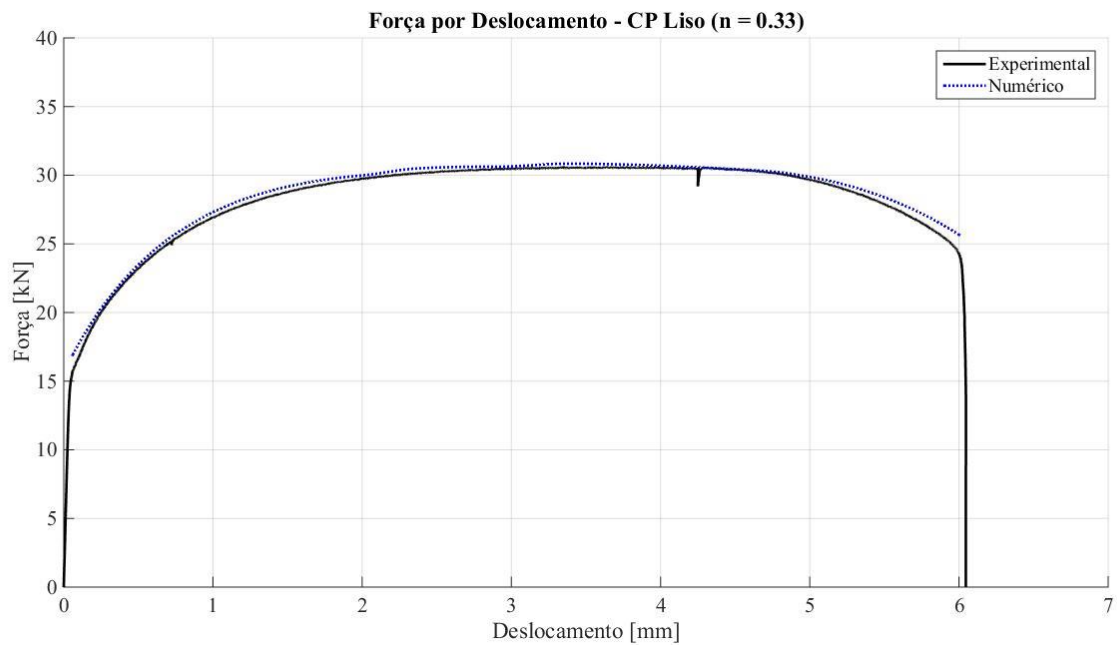


Figura 5.6 – Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$).

A Figura 5.7 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de von Mises para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 10 mm.

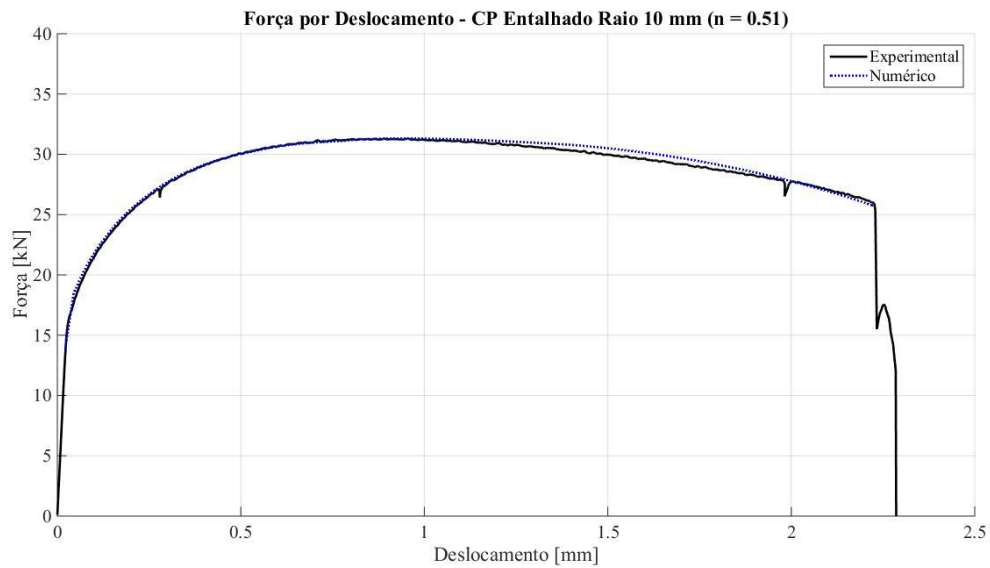


Figura 5.7 - Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 10 mm ($\eta = 0.51$).

A Figura 5.8 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de von Mises para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 6 mm.

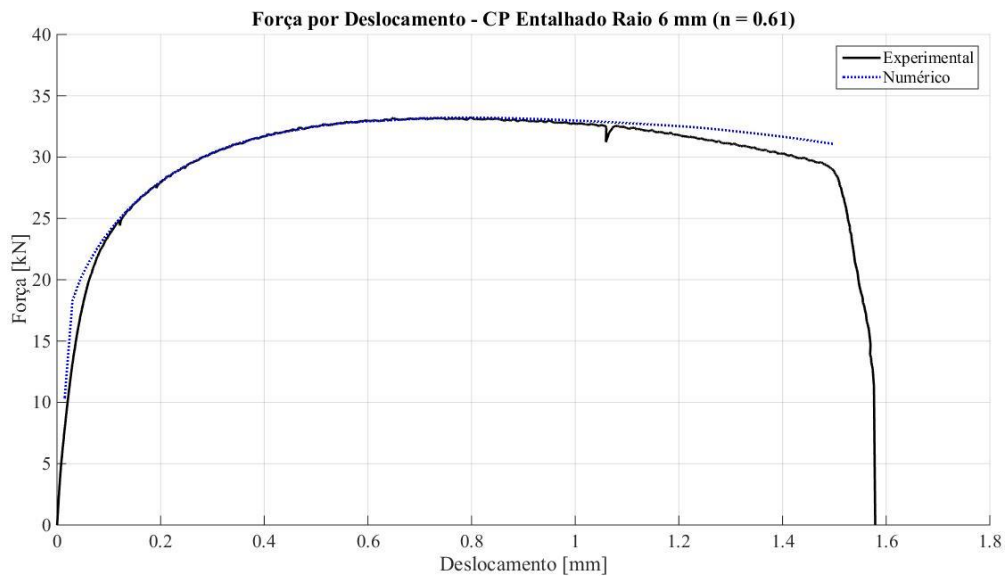


Figura 5.8 - Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 6 mm ($\eta = 0.61$).

A Figura 5.9 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de von Mises para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 4 mm.

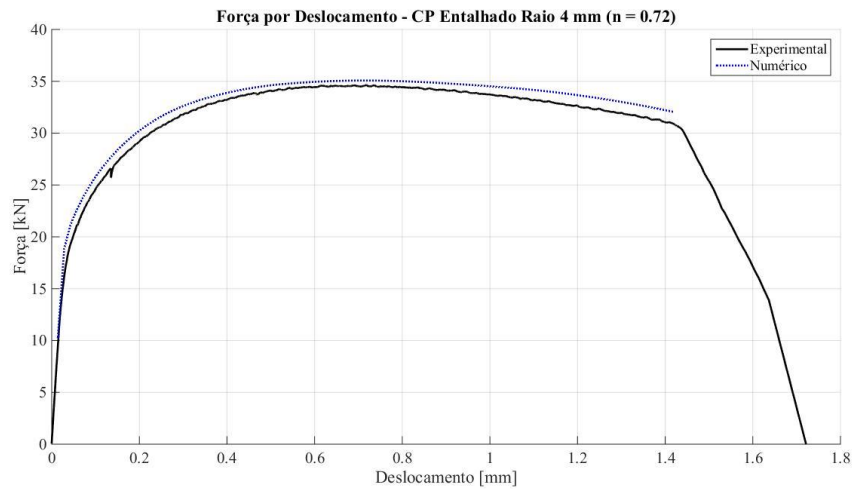


Figura 5.9 - Comparação Experimental x Numérico (von Mises) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 4 mm ($\eta = 0.72$).

A Figura 5.10 apresenta o conjunto de gráficos de Deformação Plástica Equivalente por Deslocamento para as quatro condições de triaxialidade estudadas, com base nas simulações por meio do modelo elastoplástico de von Mises. Tais gráficos são relativos ao ponto crítico do corpo de prova, que é referente ao ponto central no CP e onde se considera o início da trinca.

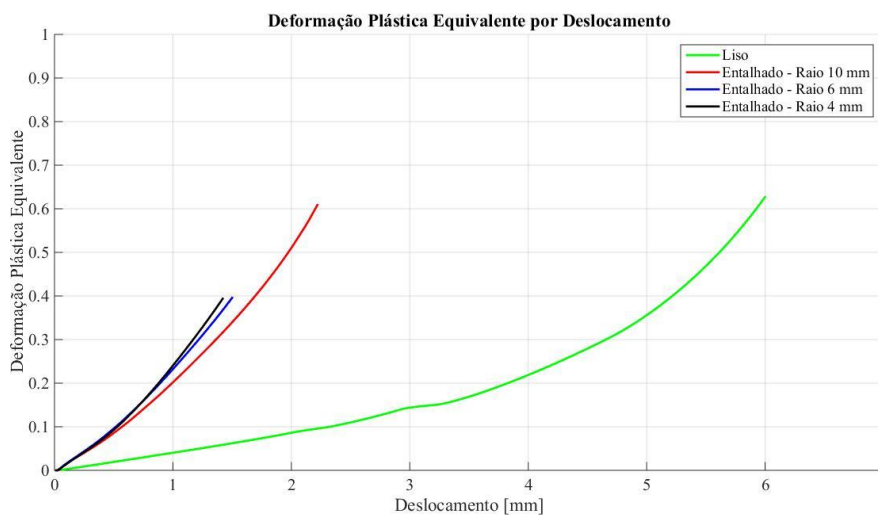


Figura 5.10 – Deformação Plástica Equivalente por Deslocamento para as simulações por meio do modelo elastoplástico de von Mises.

A Figura 5.11 apresenta o gráfico de deformação plástica de fratura numérico por tensão de triaxialidade numérico para as simulações feitas com base no modelo elastoplástico de von Mises. É apresentado também uma linha de tendência para os pontos, juntamente com a sua equação, apenas para conferência. Por conta do ponto relativo à tensão de triaxialidade de 0.51 estar fora da previsão teórica, o mesmo não foi considerado para a definição da linha de tendência, de modo que esta é usada apenas para conferência e comparação com a teoria.

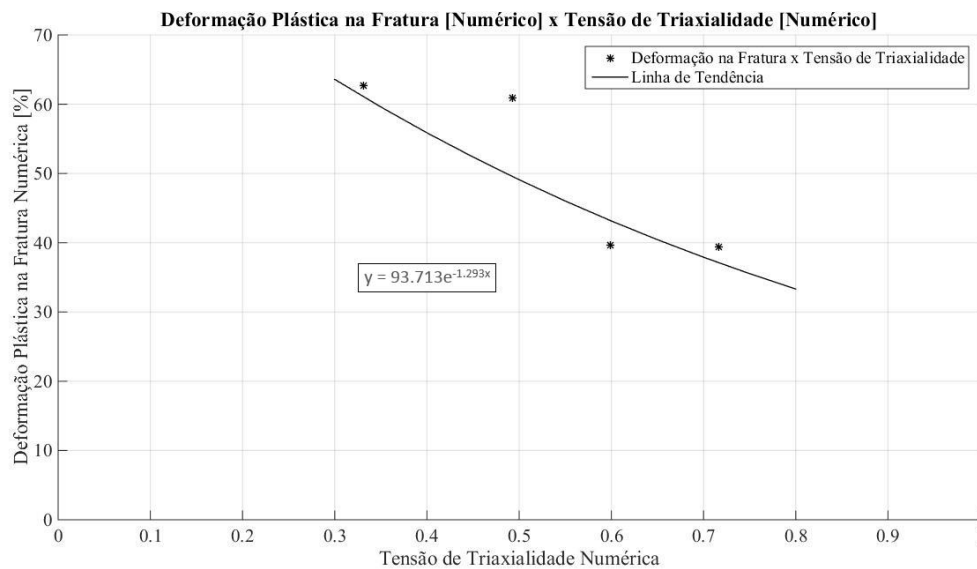


Figura 5.11 – Deformação Plástica de Fratura Numérico no ponto crítico por Tensão de Triaxialidade Numérico para as simulações feitas com base no modelo de von Mises.

5.2.2 Simulações Numéricas pelo Modelo de Bai Simplificado

Nesta subseção, são apresentados os resultados para as simulações feitas por meio do modelo elastoplástico de Bai. De forma que o objetivo do trabalho é encontrar uma calibração do modelo de Bai que seja condizente com o problema em estudo, são apresentados resultados para várias condições diferentes do parâmetro C_η . O caso da simulação com C_η nulo representa uma correlação com o modelo de von Mises e é apresentado apenas para fins de comprovação do código utilizado.

A Figura 5.12 apresenta o resultado para a simulação numérica pelo modelo de Bai com C_η nulo em comparação com o modelo de von Mises para o caso do corpo de prova

cilíndrico liso, de forma a demonstrar a equivalência dos dois modelos nesta configuração.

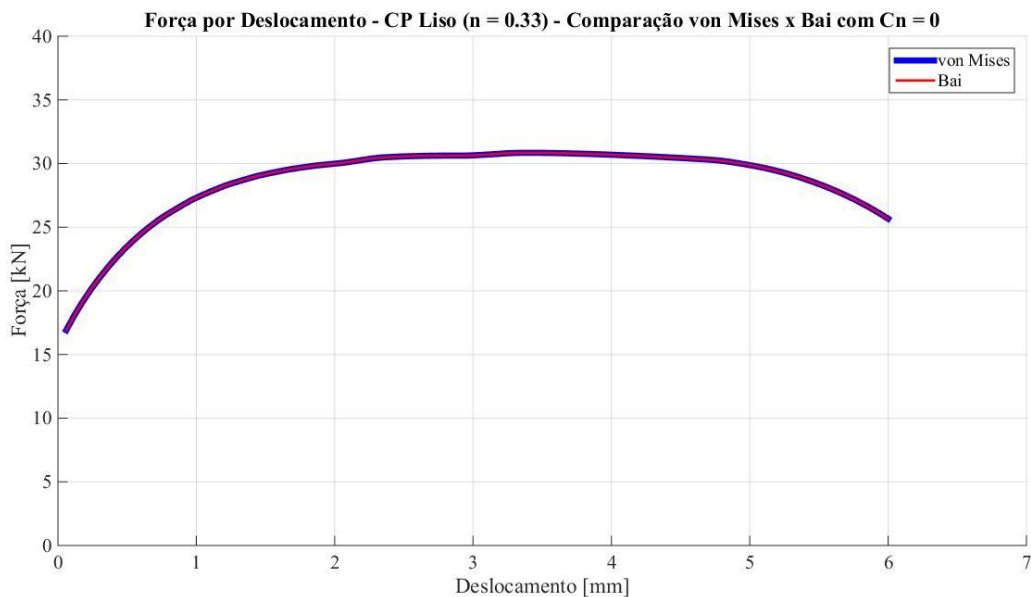


Figura 5.12 – Gráfico de Força por Deslocamento para o corpo de prova cilíndrico liso pelas simulações pelo modelo de von Mises e Bai com C_η nulo.

Para a definição da melhor calibração do modelo de Bai para o problema proposto, foi escolhido fazer uma análise dos resultados numéricos para todas as condições de triaxialidade estudadas no trabalho, com um enfoque maior no caso onde é apresentado o entalhe mais severo. Tal opção se justifica por permitir encontrar uma calibração que seja capaz de prever bem o comportamento do material para a maior faixa possível de triaxialidade do material, dando maior importância para o caso onde o efeito da tensão de triaxialidade é maior. Dessa forma, são apresentados os resultados dos gráficos de Força por Deslocamento para as todas as condições de tensão de triaxialidade consideradas neste trabalho.

As simulações pelo modelo de Bai para os casos do corpo de prova cilíndrico liso e para os corpos de prova cilíndricos entalhados foram feitas para várias condições diferentes do parâmetro C_η . A Figura 5.13 apresenta o resultado de Força por Deslocamento para as diferentes condições de C_η relativa ao corpo de prova cilíndrico liso.

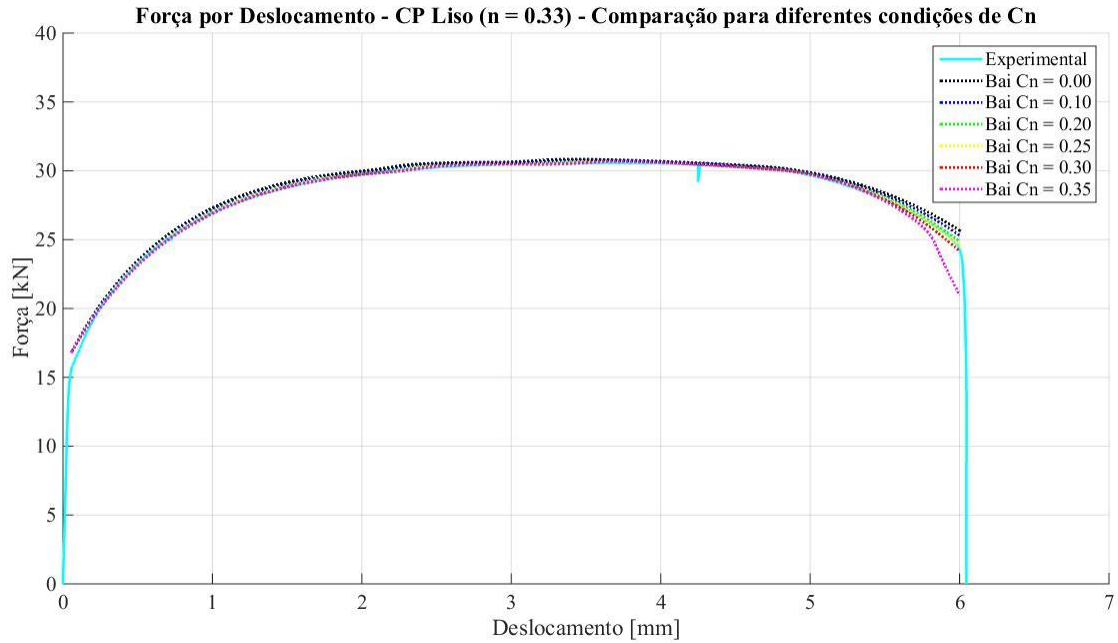


Figura 5.13 – Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico liso com diferentes condições do parâmetro C_n .

De forma a facilitar a visualização dos resultados numéricos, a Figura 5.14 apresenta o mesmo gráfico da Figura 5.13, porém com enfoque na região de amolecimento da curva.

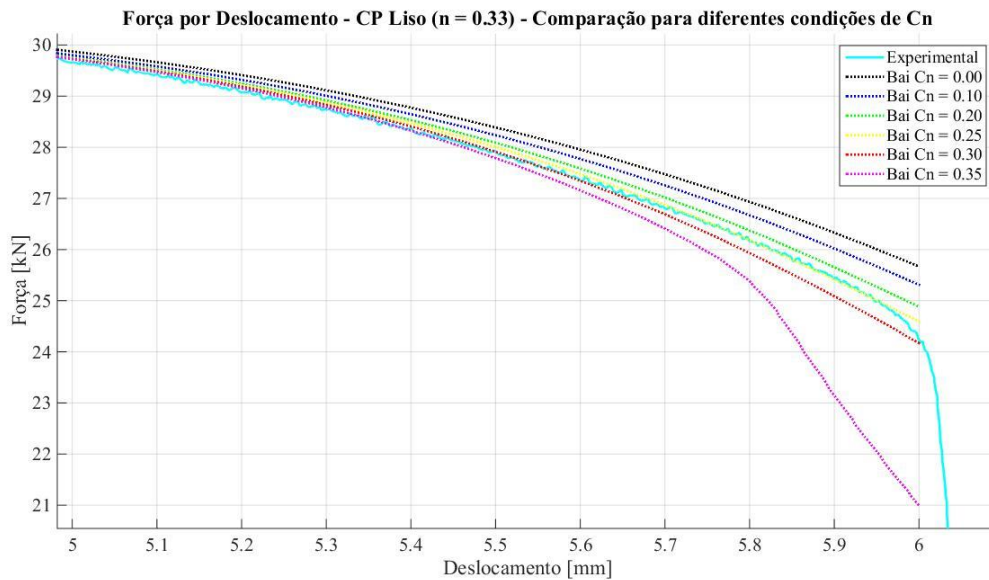


Figura 5.14 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico liso com diferentes condições do parâmetro C_n com enfoque na região de amolecimento.

A Figura 5.15 apresenta as simulações com diferentes condições do parâmetro C_η para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 10 mm, relativo à tensão de triaxialidade de 0.51.

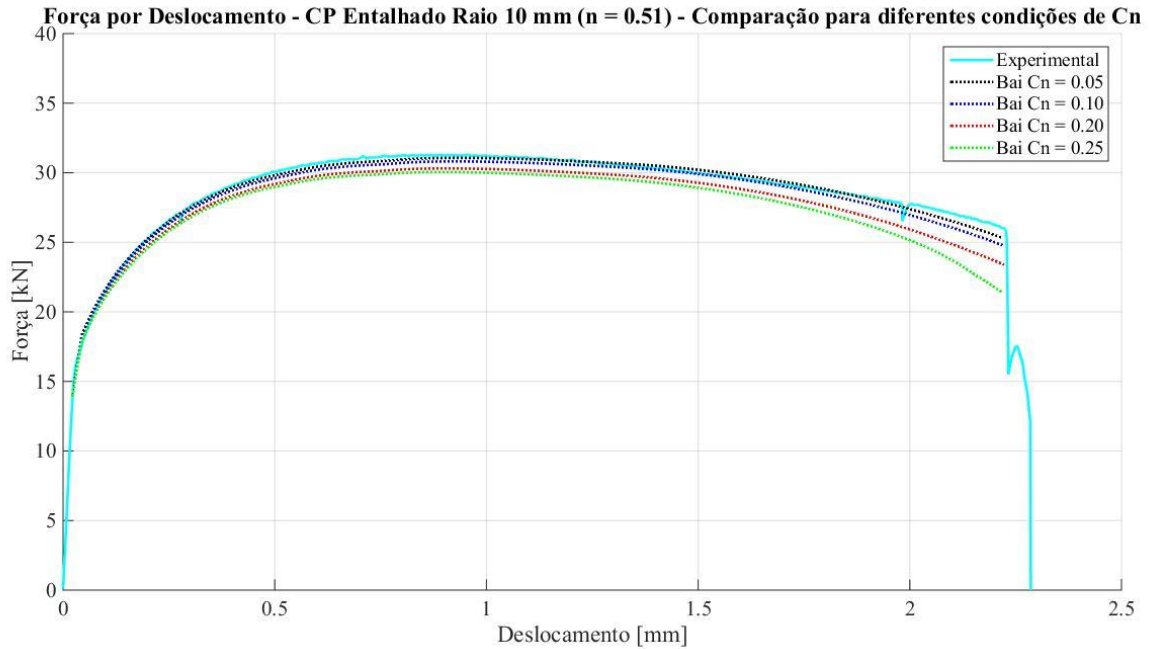


Figura 5.15 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio = 10 mm ($\eta = 0.51$) com diferentes condições do parâmetro C_η .

A Figura 5.16 apresenta as simulações com diferentes condições do parâmetro C_η para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 6 mm, relativo à tensão de triaxialidade de 0.61.

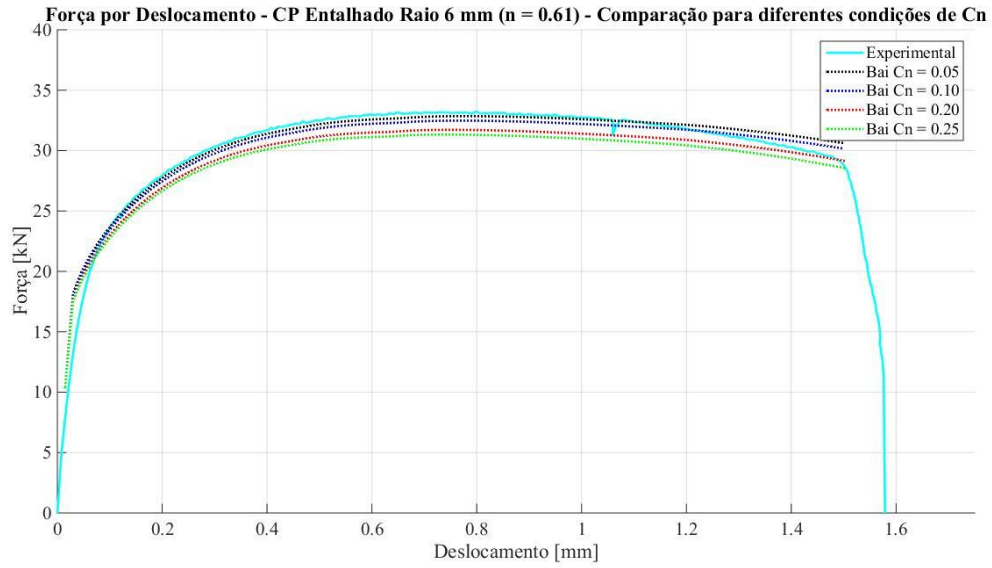


Figura 5.16 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio = 6 mm ($\eta = 0.61$) com diferentes condições do parâmetro C_η .

A Figura 5.17 apresenta as simulações com diferentes condições do parâmetro C_η para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 4 mm, relativo à tensão de triaxialidade de 0.72.

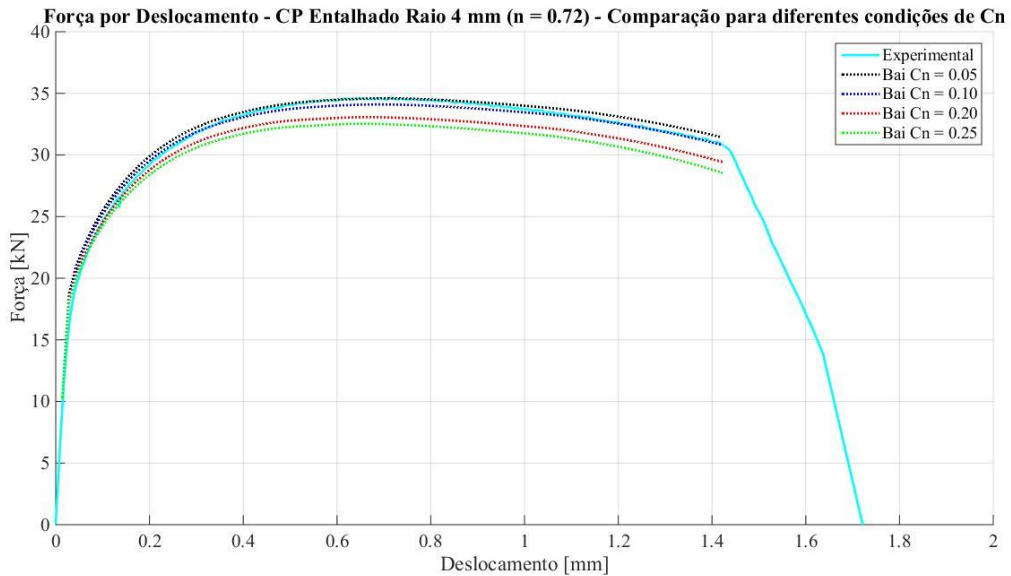


Figura 5.17 - Gráfico de Força por Deslocamento para simulação por meio do modelo de Bai para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio = 4 mm ($\eta = 0.71$) com diferentes condições do parâmetro C_η .

A análise dos resultados obtidos para curva de força por deslocamento das diferentes condições de tensão de triaxialidade, com base principalmente nos erros de simulação entre os resultados experimentais e numéricos apresentados na Figura 5.17 e relativo ao caso com entalhe mais severo, indica que a melhor calibração do modelo de Bai Simplificado para o problema estudado neste trabalho é utilizando o parâmetro $C_\eta = 0.10$. Este é o valor que será utilizado para as simulações pelo modelo de Bai para as demais condições de tensão de triaxialidade. Além disso, ainda é possível identificar, por meio dos resultados mostrados na Figura 5.14, que a partir do valor $C_\eta = 0.35$, as simulações apresentam um erro consideravelmente grande e, portanto, não devem ser consideradas.

Dessa forma, o valor final de C_η definido para a calibração do modelo de Bai é igual a 0.10.

A Figura 5.18 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de Bai simplificado com $C_\eta = 0.10$ para o corpo de prova cilíndrico liso.

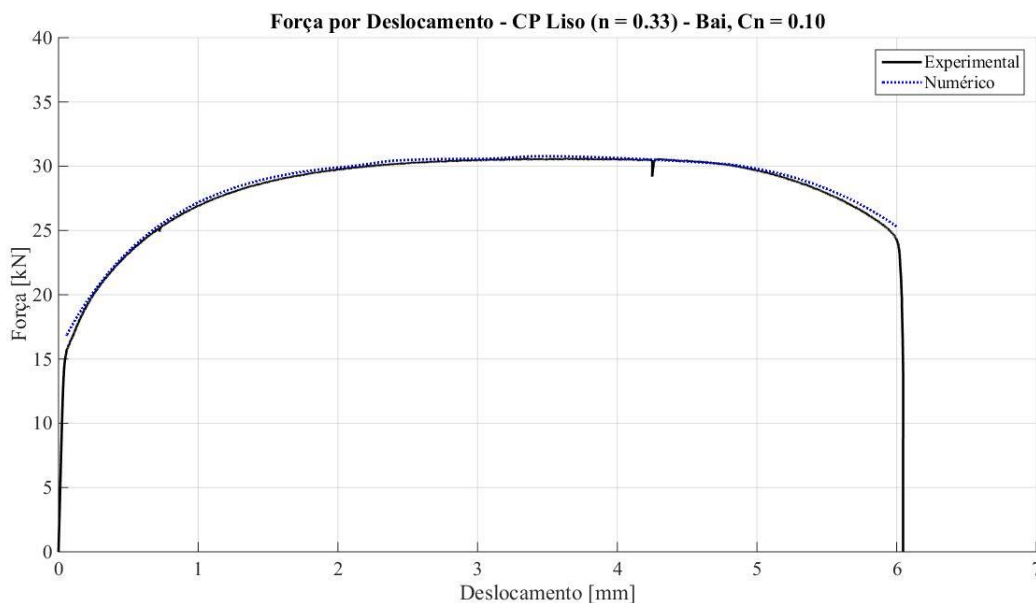


Figura 5.18 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$).

A Figura 5.19 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de Bai simplificado com $C_\eta = 0.10$ para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 10 mm.

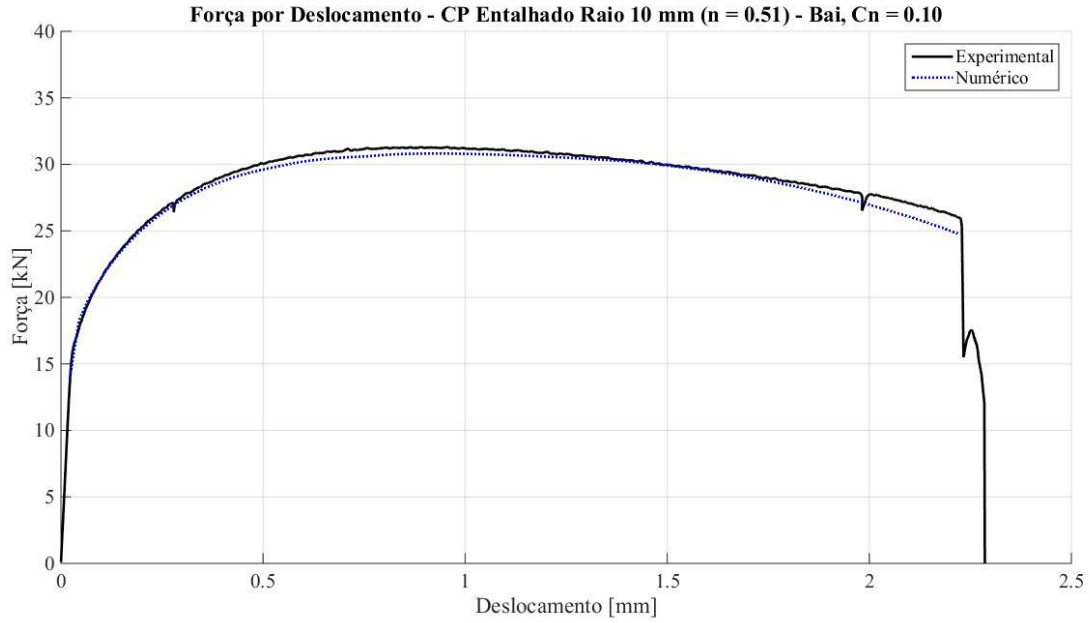


Figura 5.19 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 10 mm ($\eta = 0.51$).

A Figura 5.20 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de Bai simplificado com $C_\eta = 0.10$ para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 6 mm.

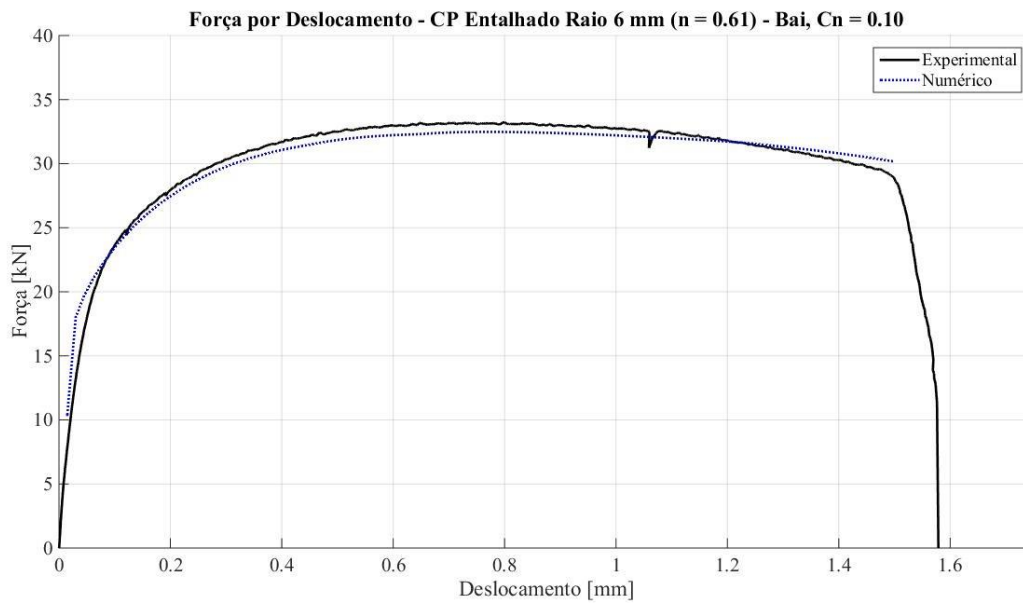


Figura 5.20 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 6 mm ($\eta = 0.61$).

A Figura 5.21 apresenta a comparação dos resultados experimentais e numéricos pelo modelo de Bai simplificado com $C_\eta = 0.10$ para o corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 4 mm.

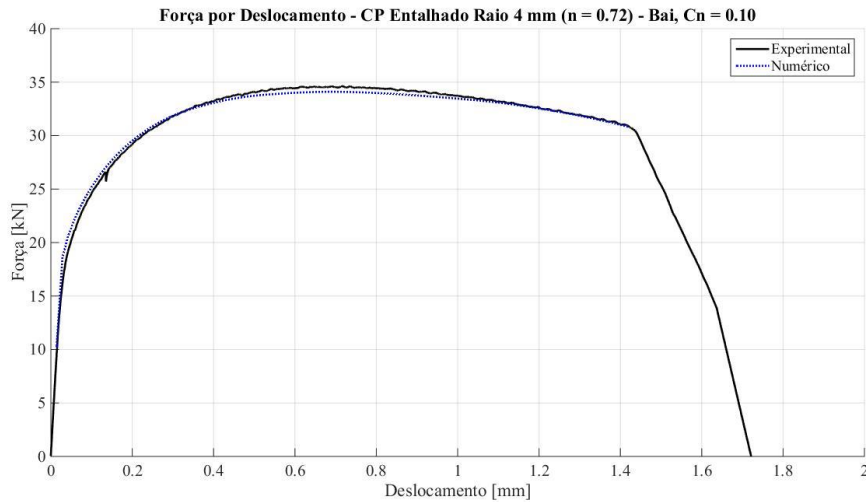


Figura 5.21 - Comparação Experimental x Numérico (Bai Simplificado) para o corpo de prova cilíndrico entalhado com Raio de 4 mm ($\eta = 0.72$).

A Figura 5.22 apresenta o conjunto de gráficos de Deformação Plástica Equivalente por Deslocamento para as quatro condições de triaxialidade estudadas, com base nas simulações por meio do modelo elastoplástico de Bai simplificado com $C_\eta = 0.10$. O gráfico é relativo ao ponto crítico dos CPs.

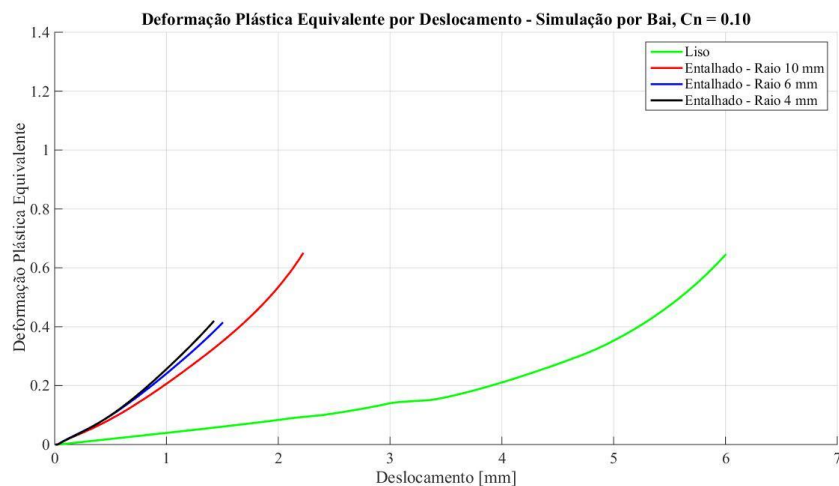


Figura 5.22 - Deformação Plástica Equivalente no ponto crítico por Deslocamento para as simulações por meio do modelo elastoplástico de Bai.

A Figura 5.23 apresenta o gráfico de deformação plástica na fratura numérico por tensão de triaxialidade numérico para as simulações feitas com base no modelo elastoplástico de Bai simplificado com $C_\eta = 0.10$. A linha de tendência e sua equação são apresentados apenas para conferência. Da mesma forma que foi feito anteriormente, a linha de tendência foi feita sem considerar o ponto relativo à tensão de triaxialidade de 0.51, de modo que existe um aparente erro com relação à teoria neste caso. As deformações apresentadas são relativas ao ponto crítico dos CPs.

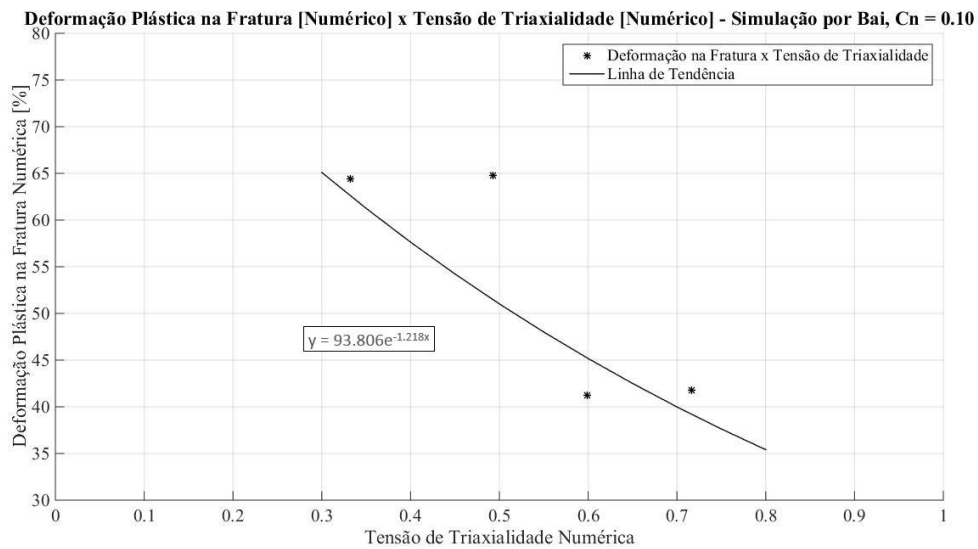


Figura 5.23 - Deformação Plástica de Fratura Numérico no ponto crítico por Tensão de Triaxialidade Numérico para as simulações feitas com base no modelo de Bai.

5.2.3 Comparação de Resultados – von Mises x Bai Simplificado

Nesta subsecção, são apresentados os resultados das simulações numéricas de forma comparativa entre os modelos elasto-plásticos de von Mises e Bai Simplificado conforme configuração determinada e apresentada na Seção 5.2.2. Os gráficos apresentados para a evolução da tensão de triaxialidade são relativos ao ponto crítico dos Corpos de Prova. As Figuras 5.24 e 5.25 mostram os resultados de Força por Deslocamento e Triaxialidade por Deslocamento, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$).

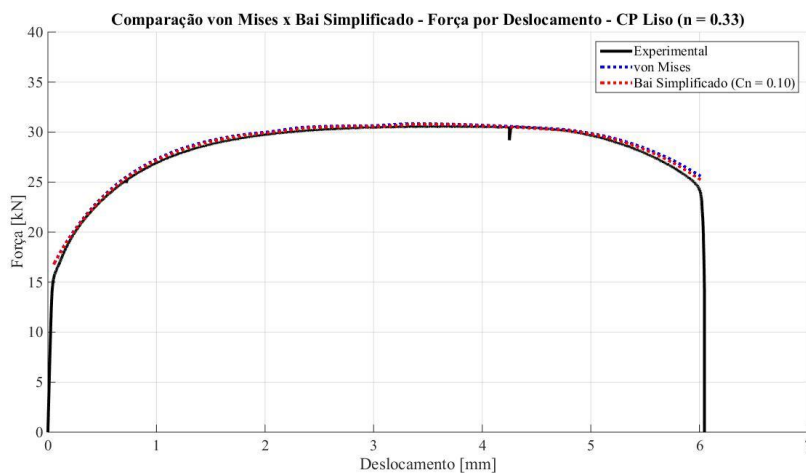


Figura 5.24 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$

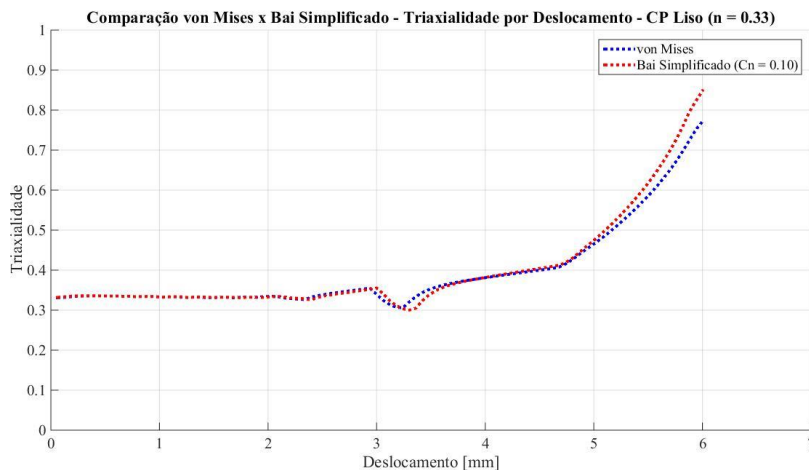
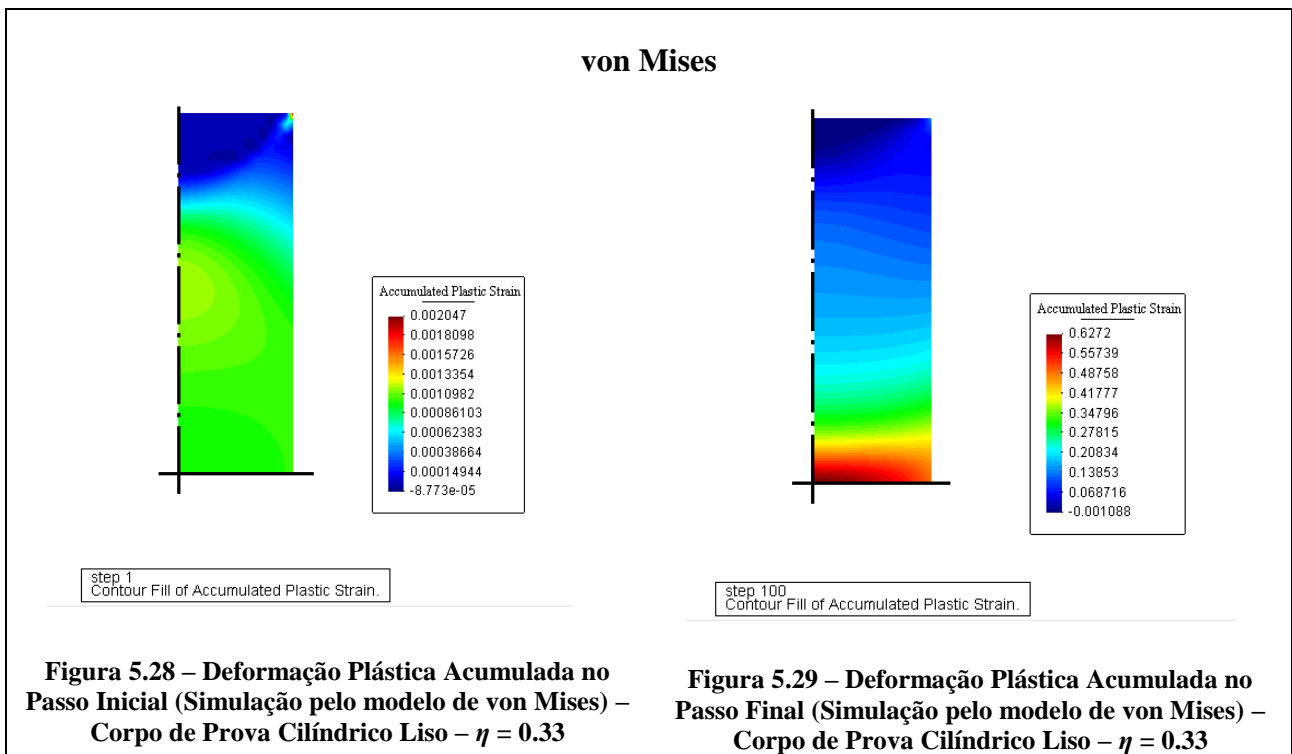
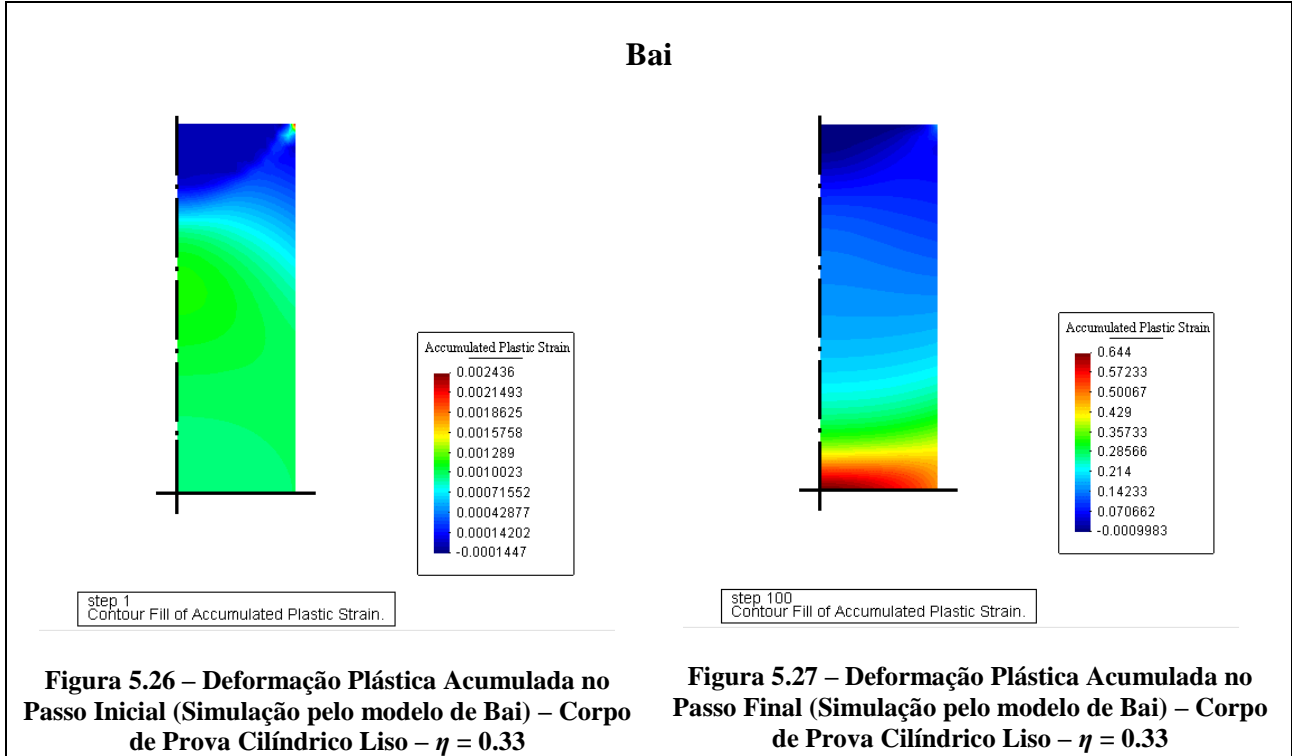
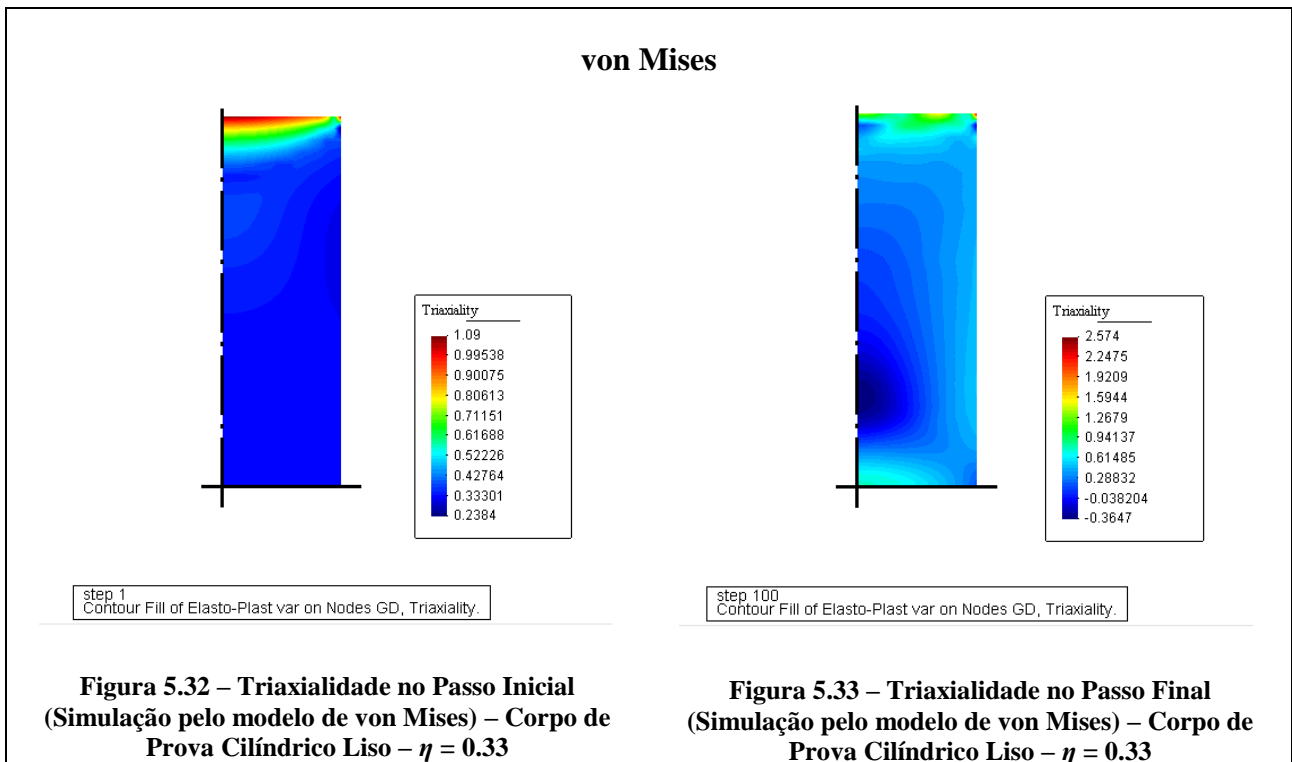
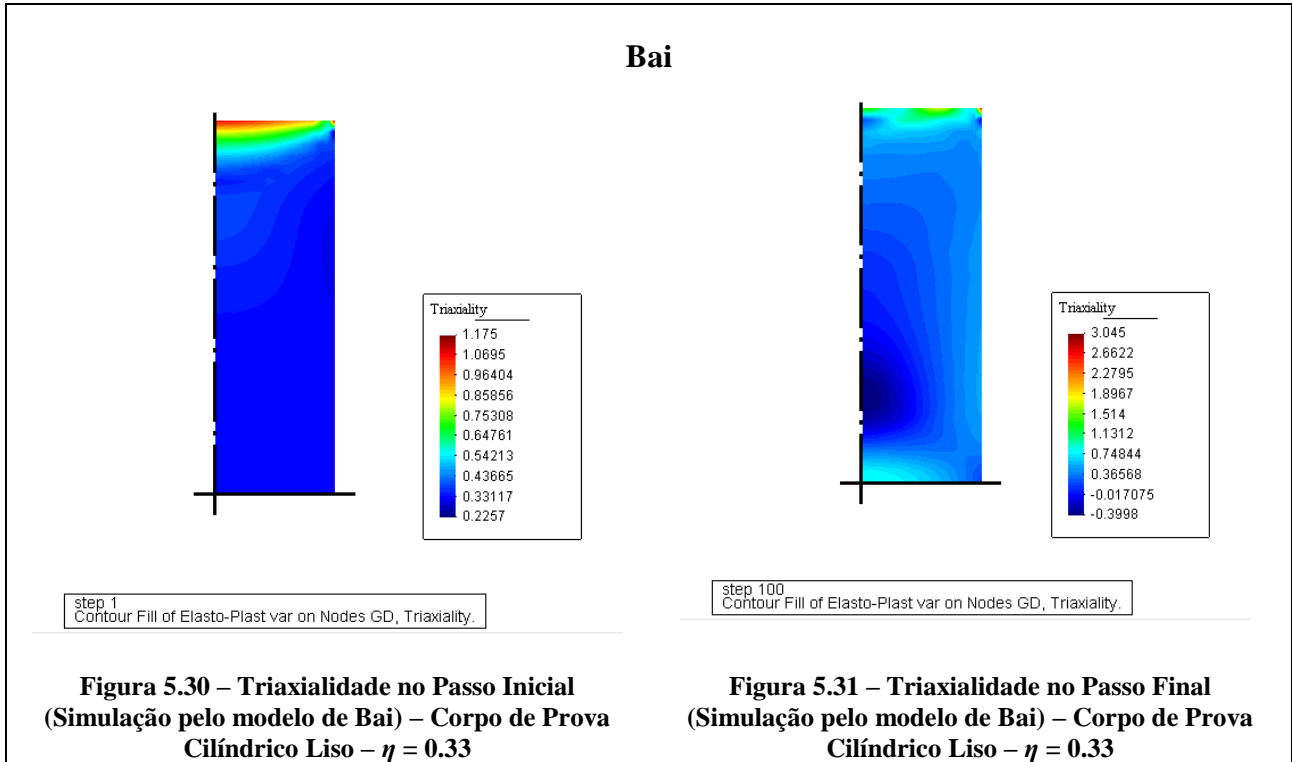


Figura 5.25 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Liso – $\eta = 0.33$

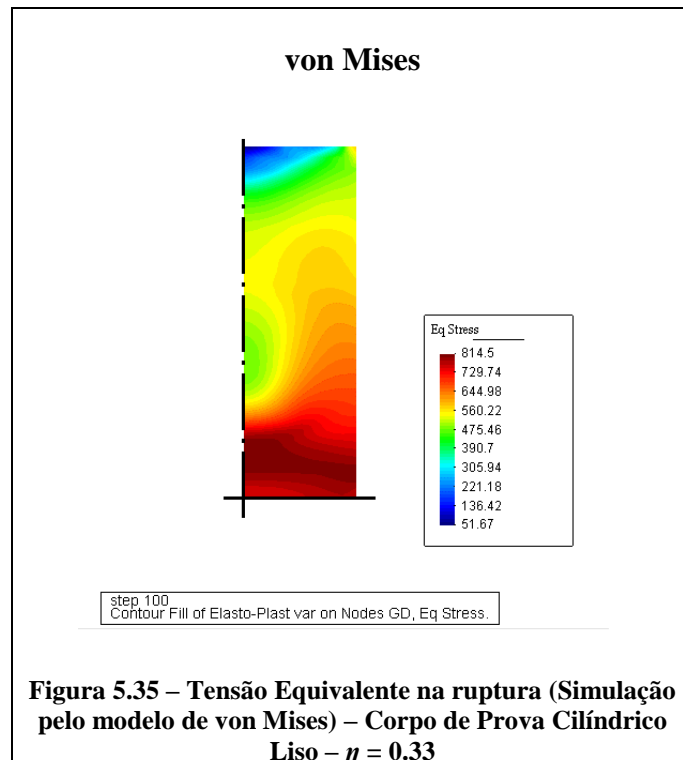
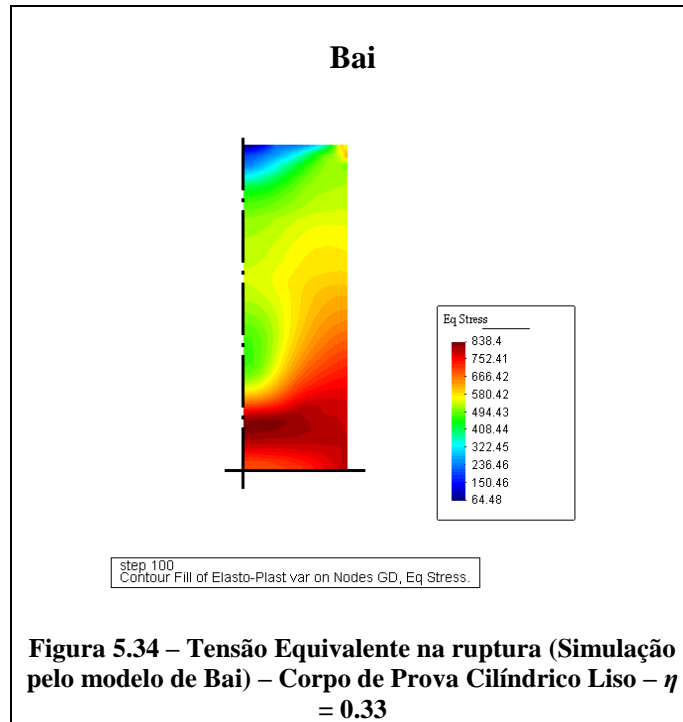
As Figuras 5.26 e 5.27 apresentam os resultados para Deformação Plástica Acumulada no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.28 e 5.29 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.



As Figuras 5.30 e 5.31 apresentam os resultados para Triaxialidade no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.32 e 5.33 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.



As Figuras 5.34 e 5.35 apresentam os resultados para Tensão Equivalente na ruptura para as simulações pelo modelo de Bai e de von Mises, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico liso ($\eta = 0.33$).



As Figuras 5.36 e 5.37 mostram os resultados de Força por Deslocamento e Triaxialidade por Deslocamento, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 10 mm ($\eta = 0.51$).

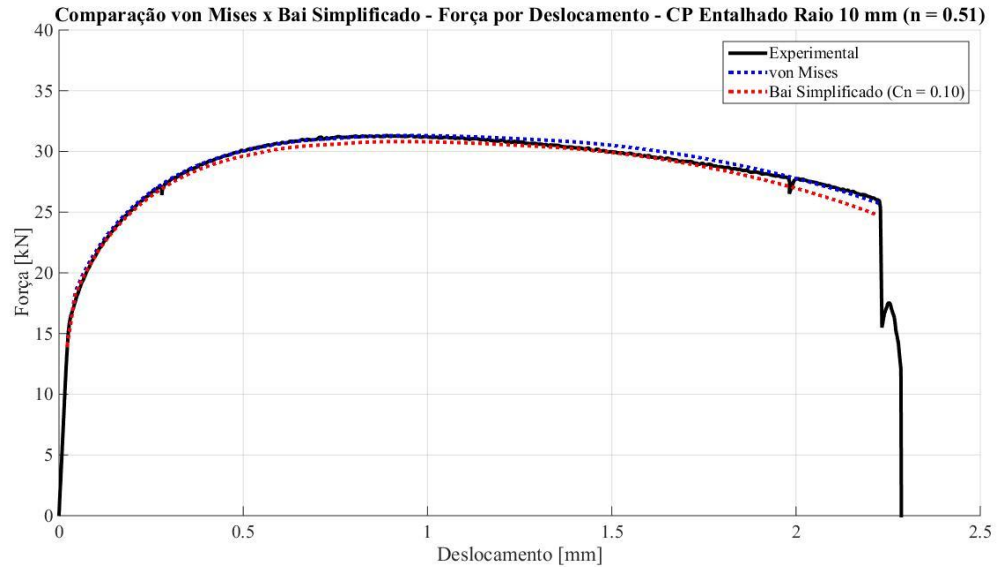


Figura 5.36 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$

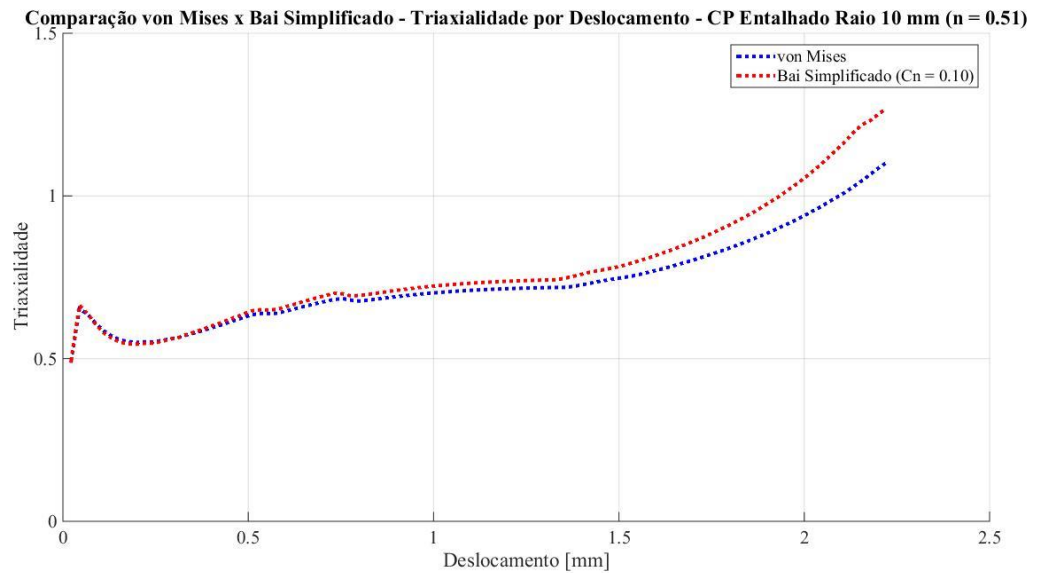
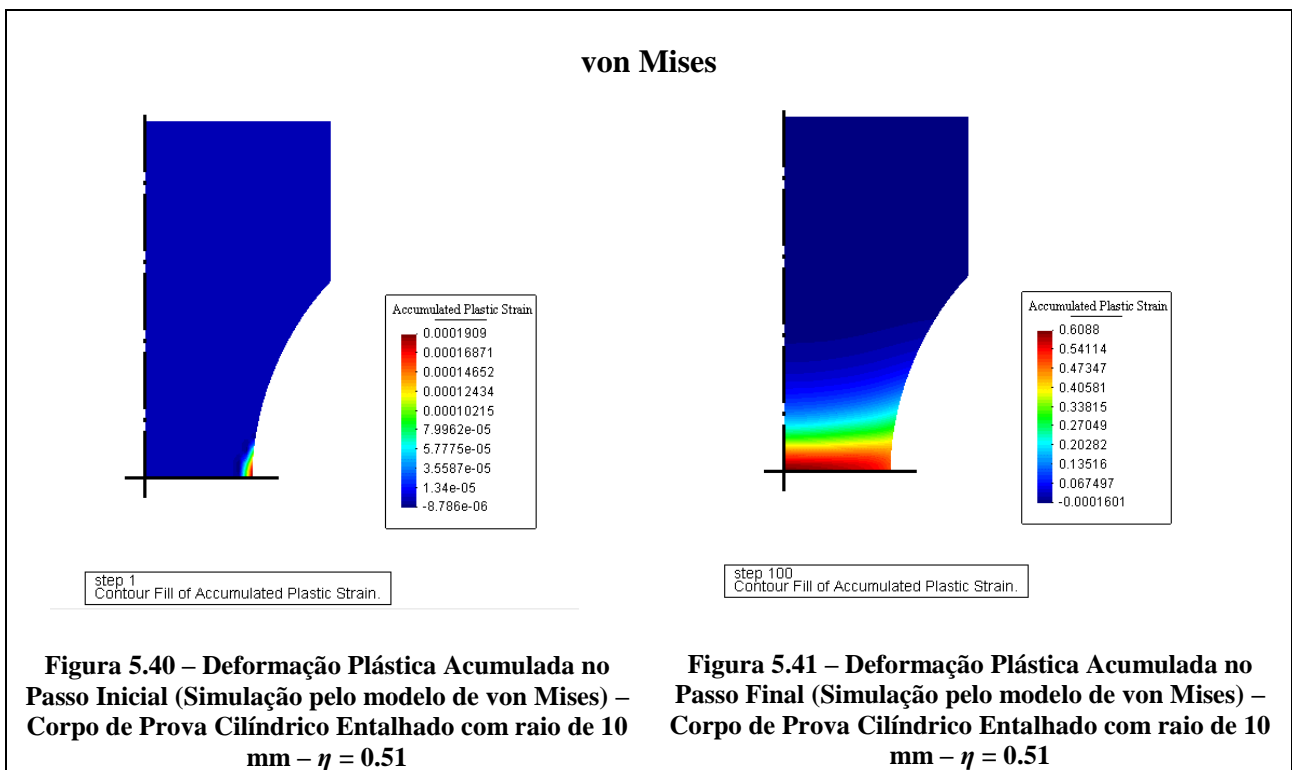
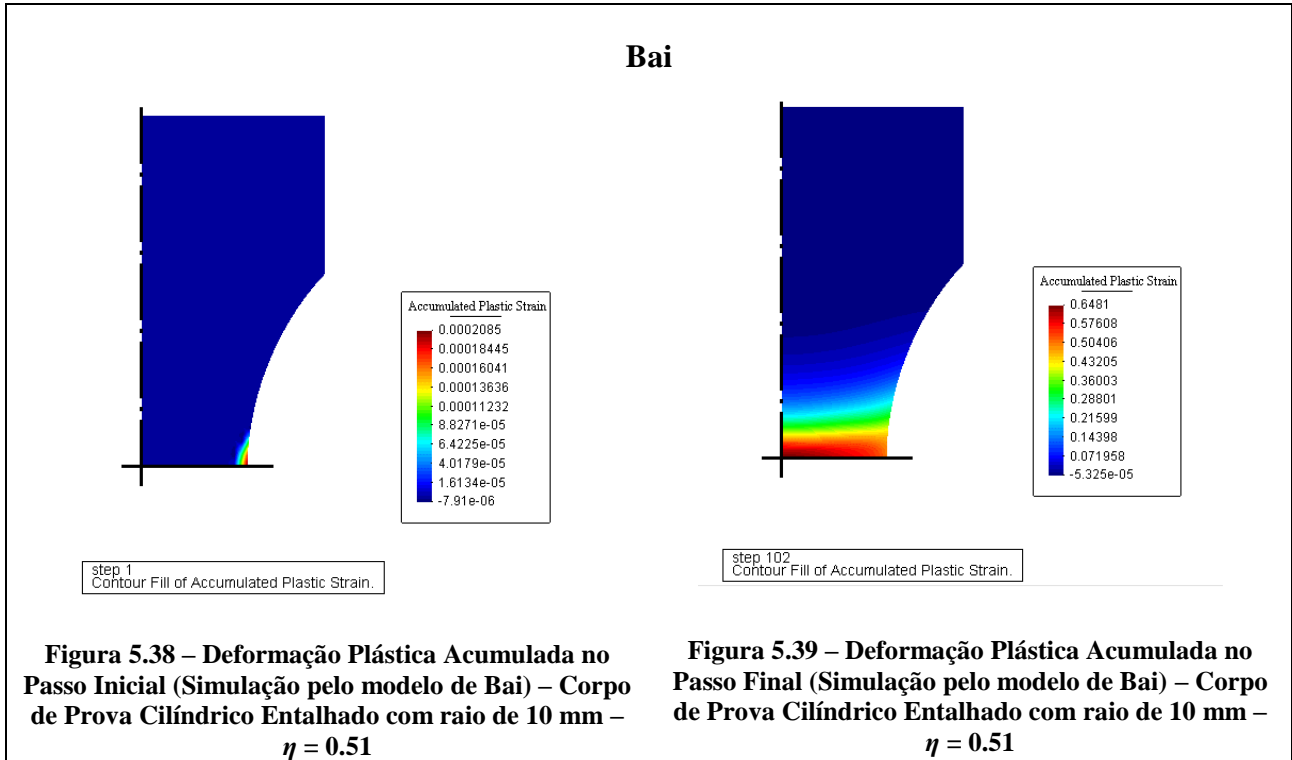
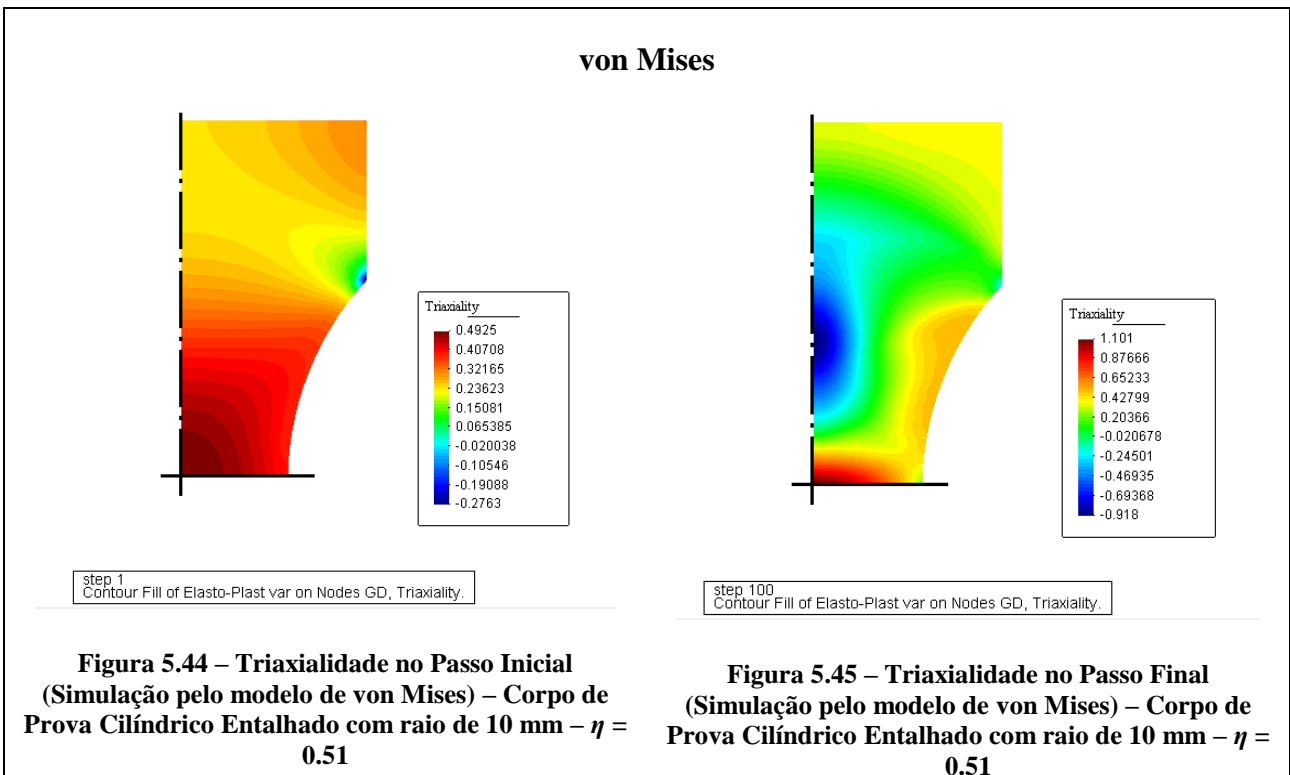
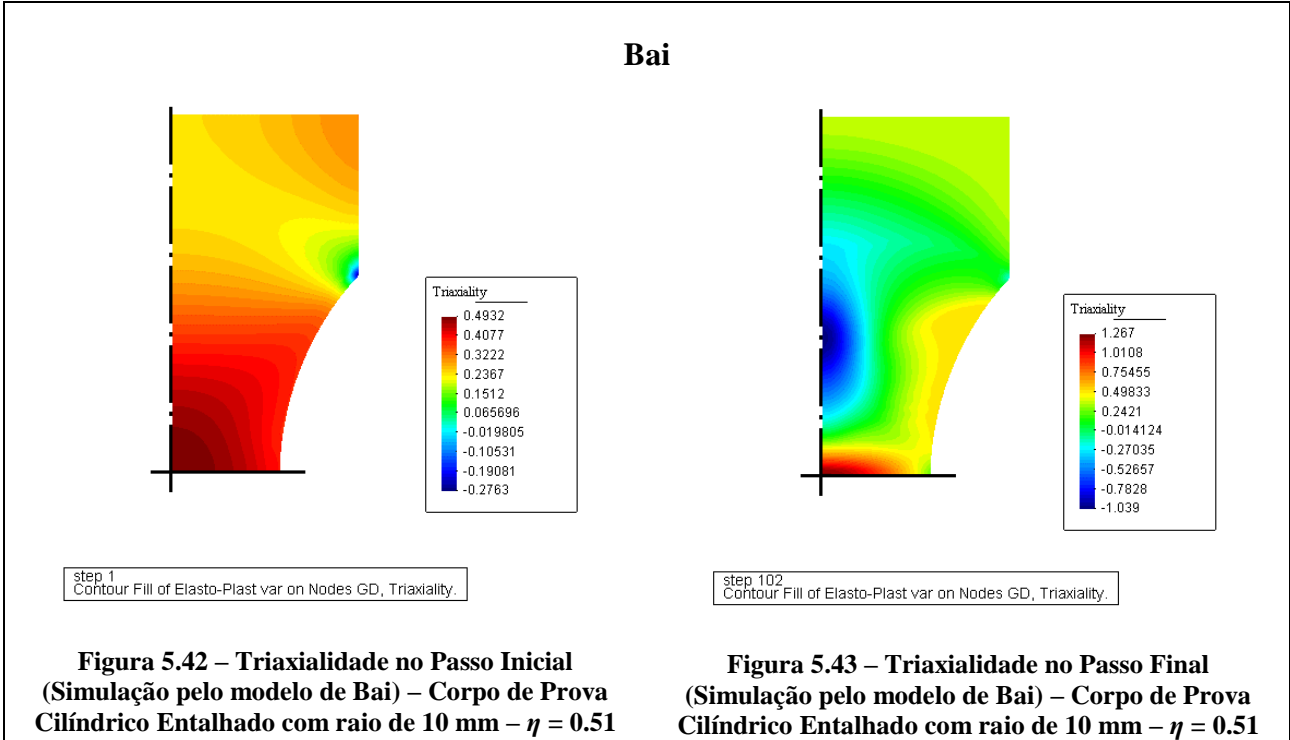


Figura 5.37 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 10 mm – $\eta = 0.51$

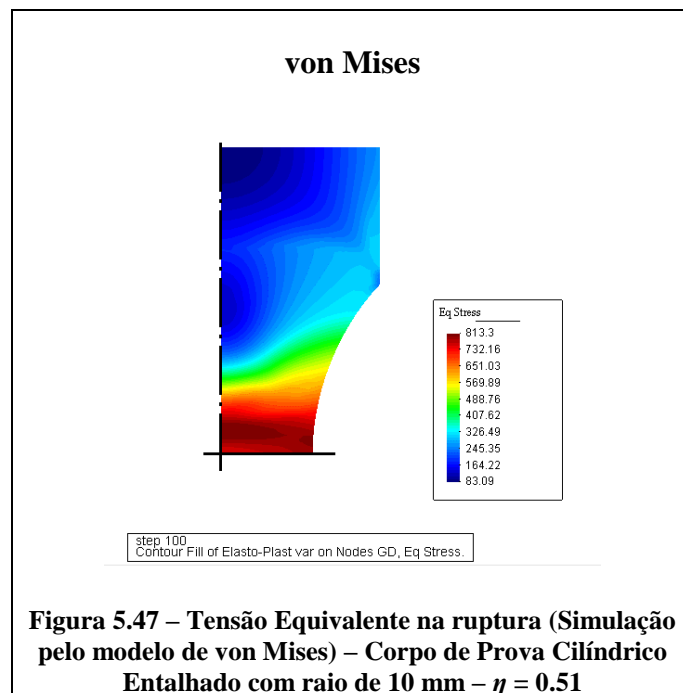
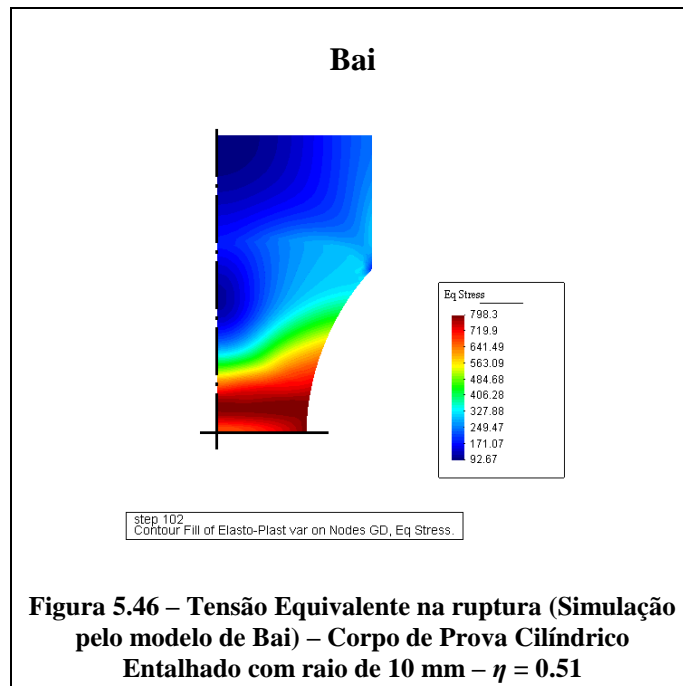
As Figuras 5.38 e 5.39 apresentam os resultados para Deformação Plástica Acumulada no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 10 mm ($\eta = 0.51$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.40 e 5.41 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.



As Figuras 5.42 e 5.43 apresentam os resultados para Triaxialidade no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 10 mm ($\eta = 0.51$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.44 e 5.45 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.



As Figuras 5.46 e 5.47 apresentam os resultados para Tensão Equivalente na ruptura para as simulações pelo modelo de Bai e de von Mises, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 10 mm ($\eta = 0.51$).



As Figuras 5.48 e 5.49 mostram os resultados de Força por Deslocamento e Triaxialidade por Deslocamento, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 6 mm ($\eta = 0.61$).

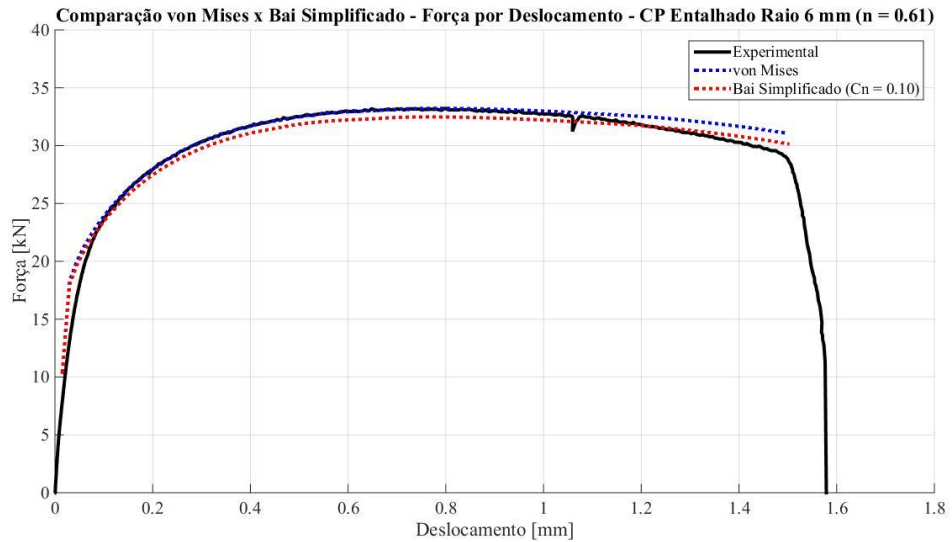


Figura 5.48 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$

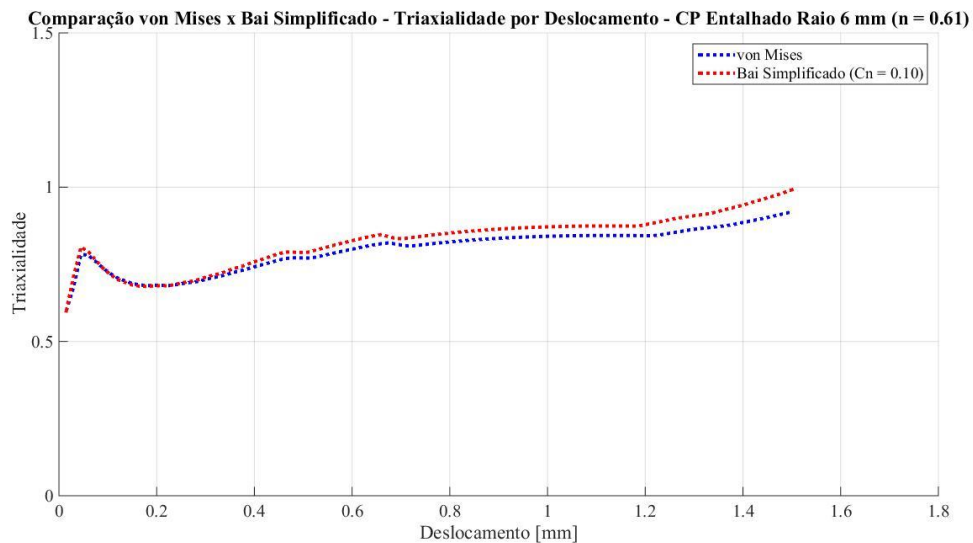
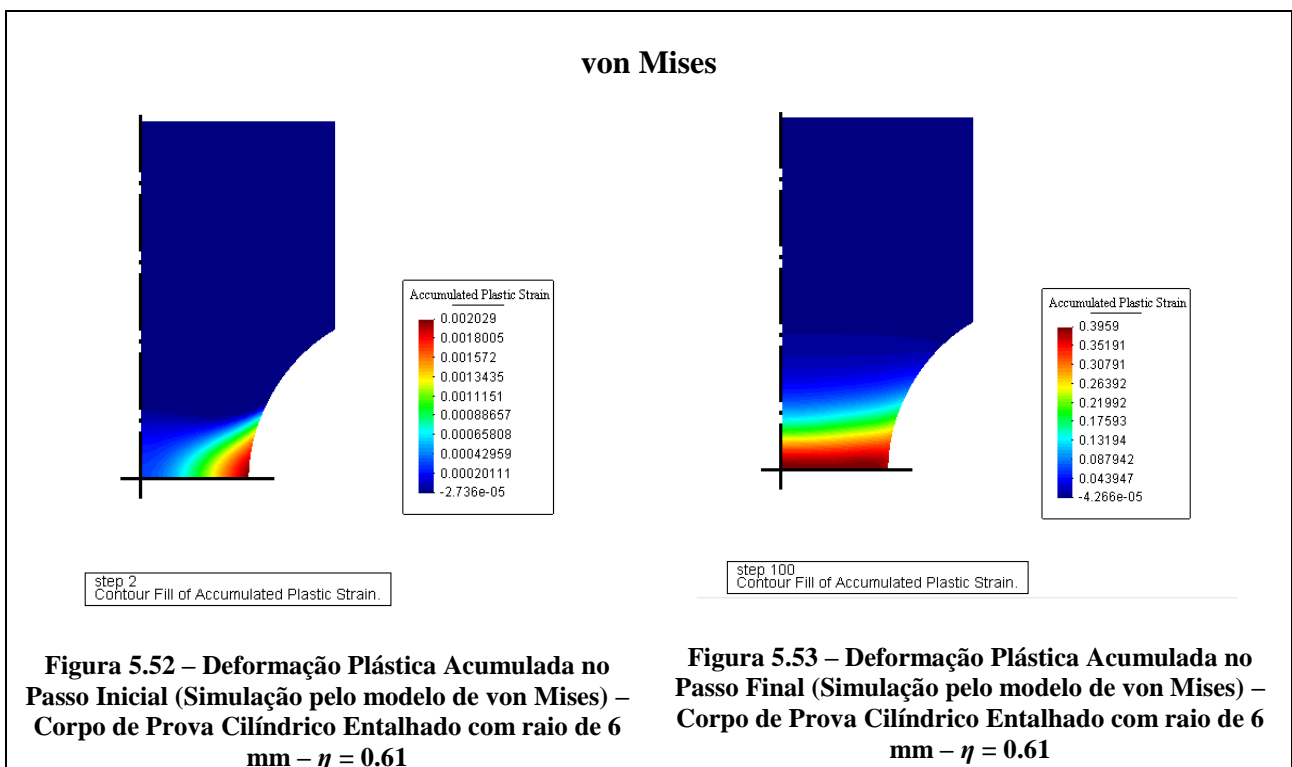
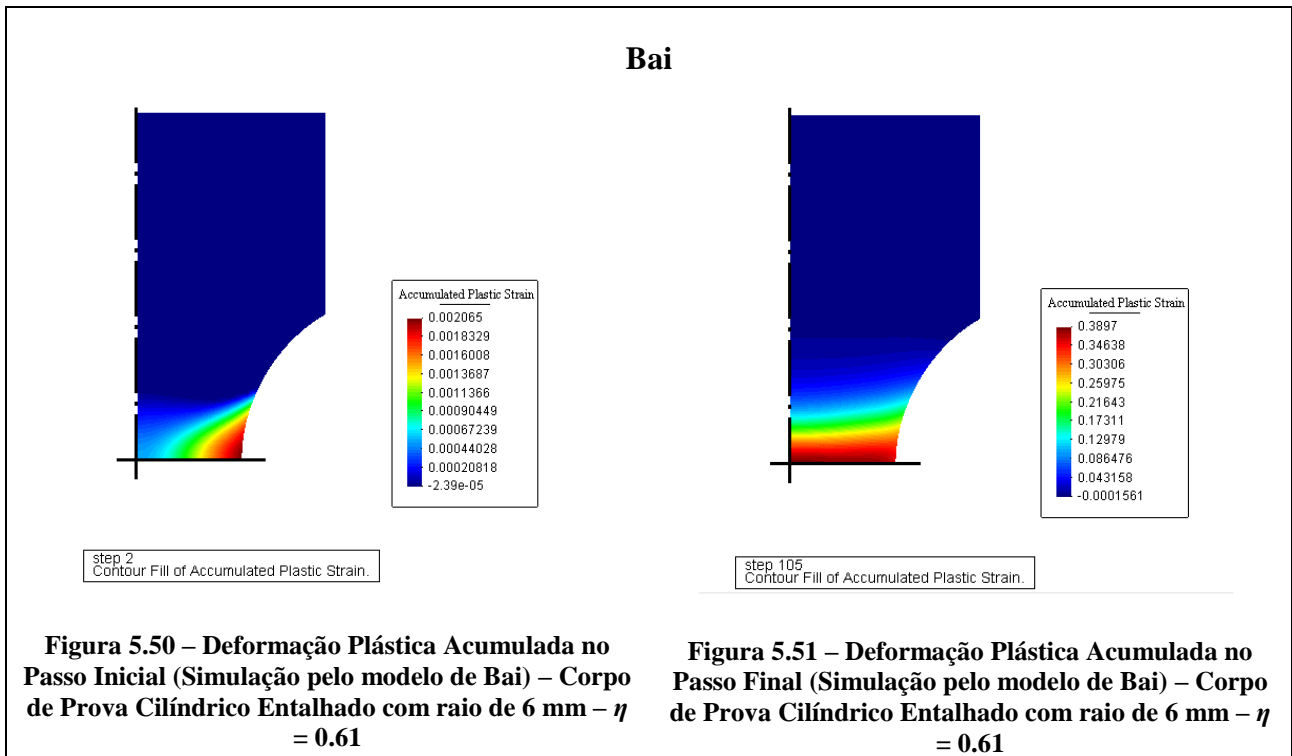


Figura 5.49 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 6 mm – $\eta = 0.61$

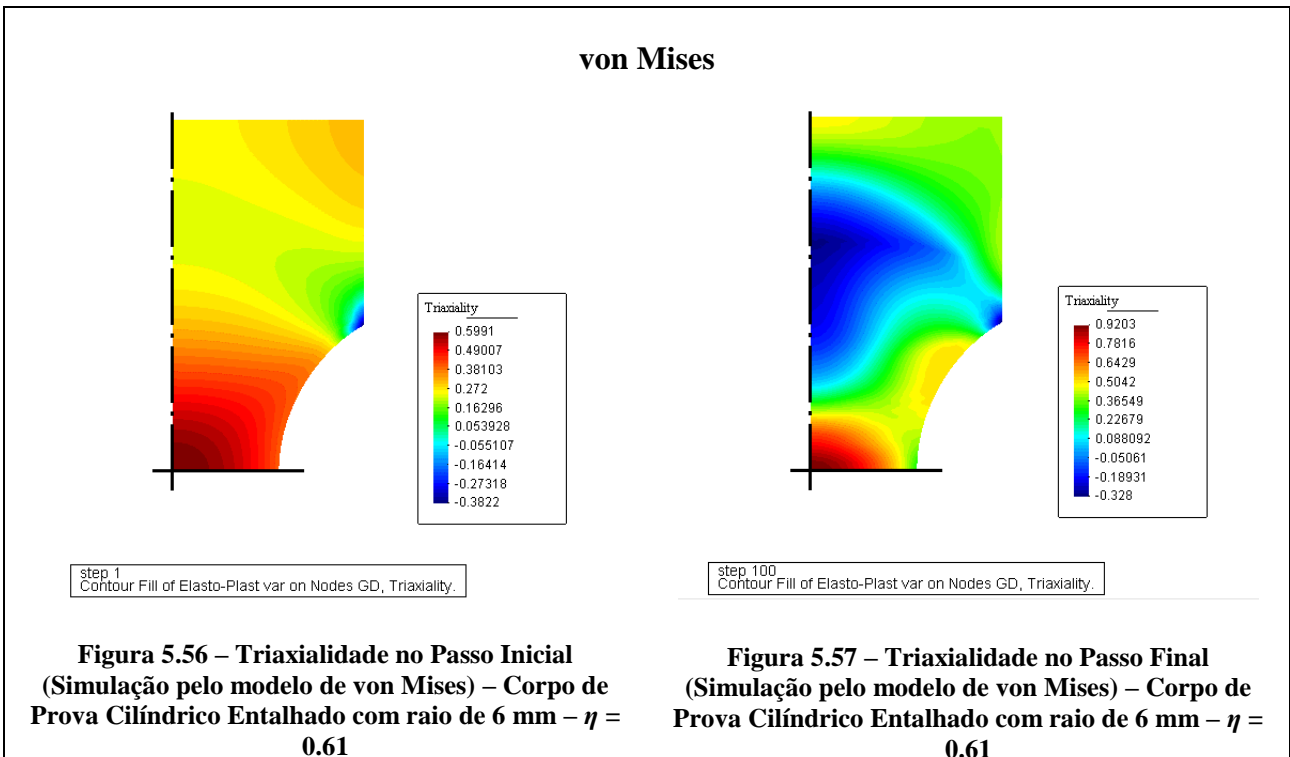
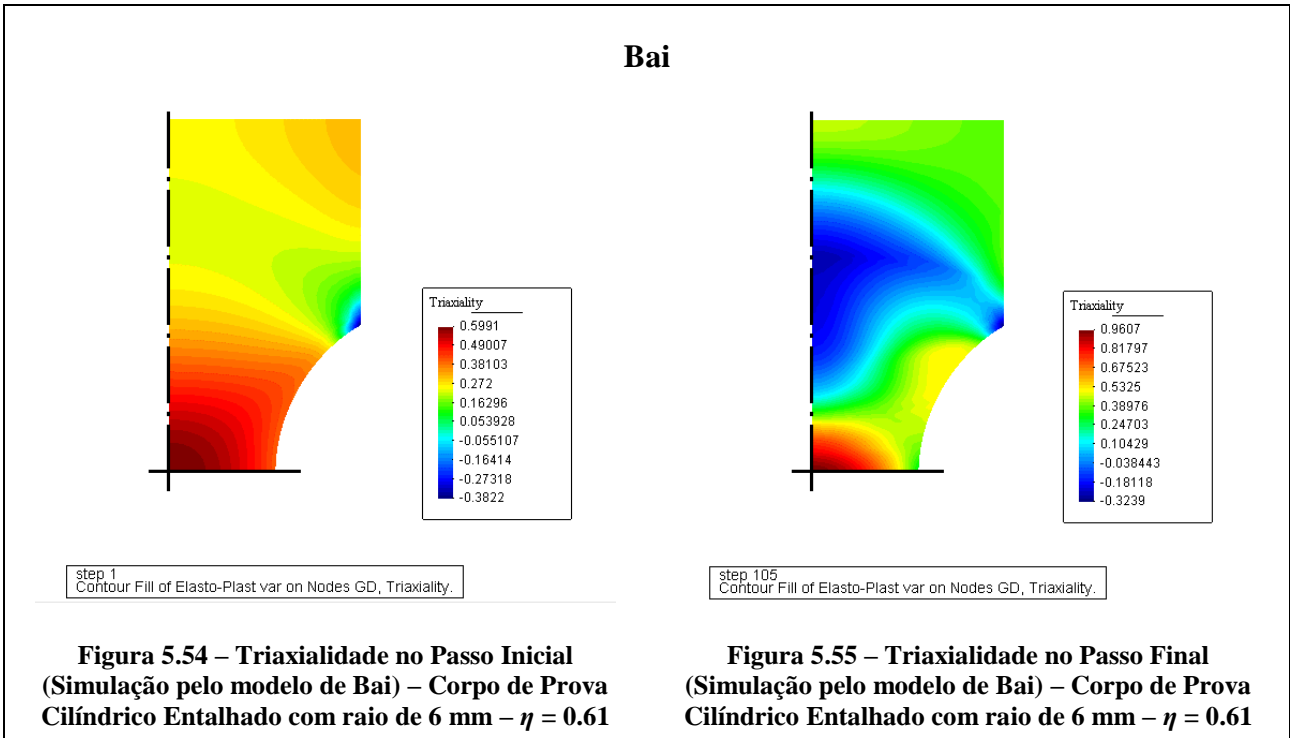
As Figuras 5.50 e 5.51 apresentam os resultados para Deformação Plástica Acumulada no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico

entalhado com raio de 6 mm ($\eta = 0.61$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.52 e 5.53 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.

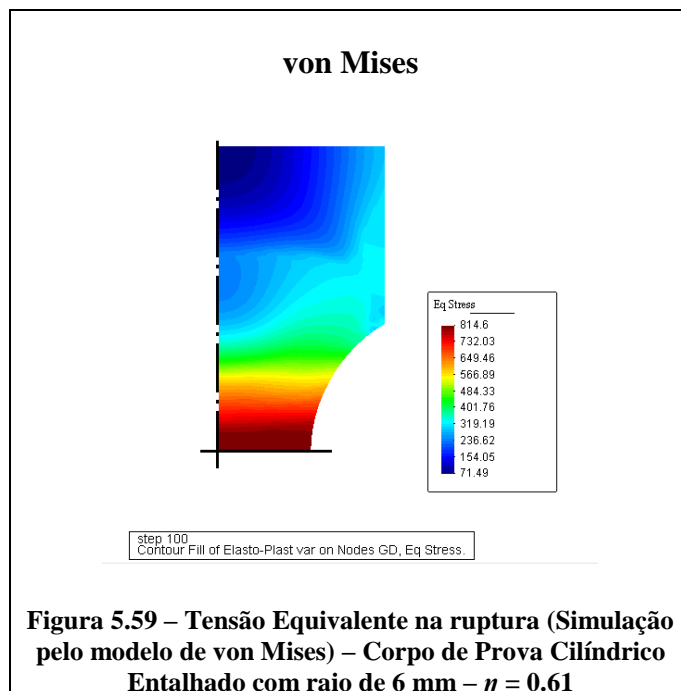
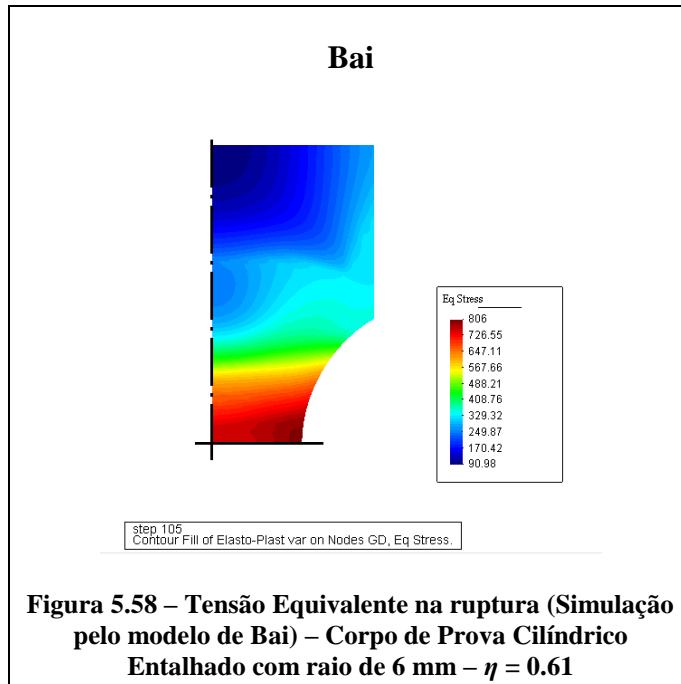


As Figuras 5.54 e 5.55 apresentam os resultados para Triaxialidade no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 6

mm ($\eta = 0.61$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.56 e 5.57 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.



As Figuras 5.58 e 5.59 apresentam os resultados para Tensão Equivalente na ruptura para as simulações pelo modelo de Bai e de von Mises, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 6 mm ($\eta = 0.61$).



As Figuras 5.60 e 5.61 mostram os resultados de Força por Deslocamento e Triaxialidade por Deslocamento, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 4 mm ($\eta = 0.72$).

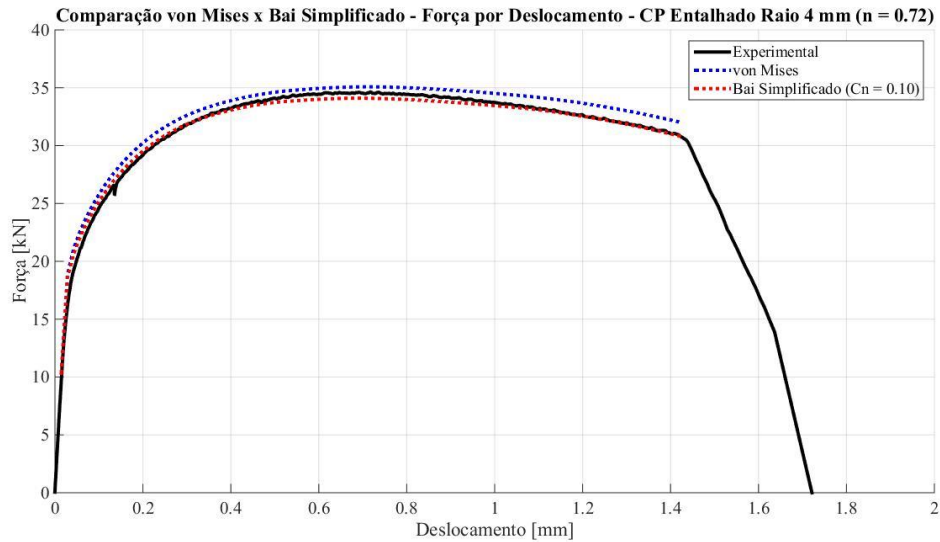


Figura 5.60 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Força por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$

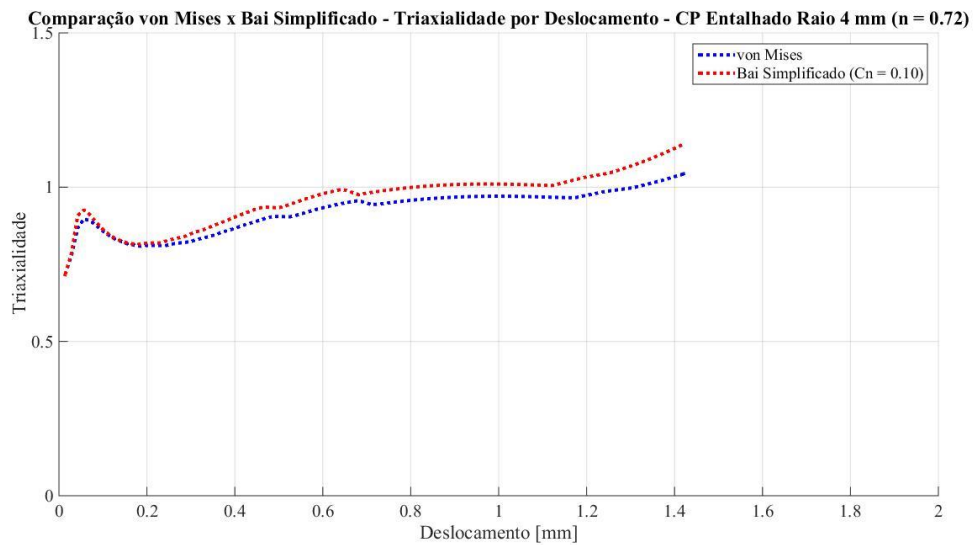
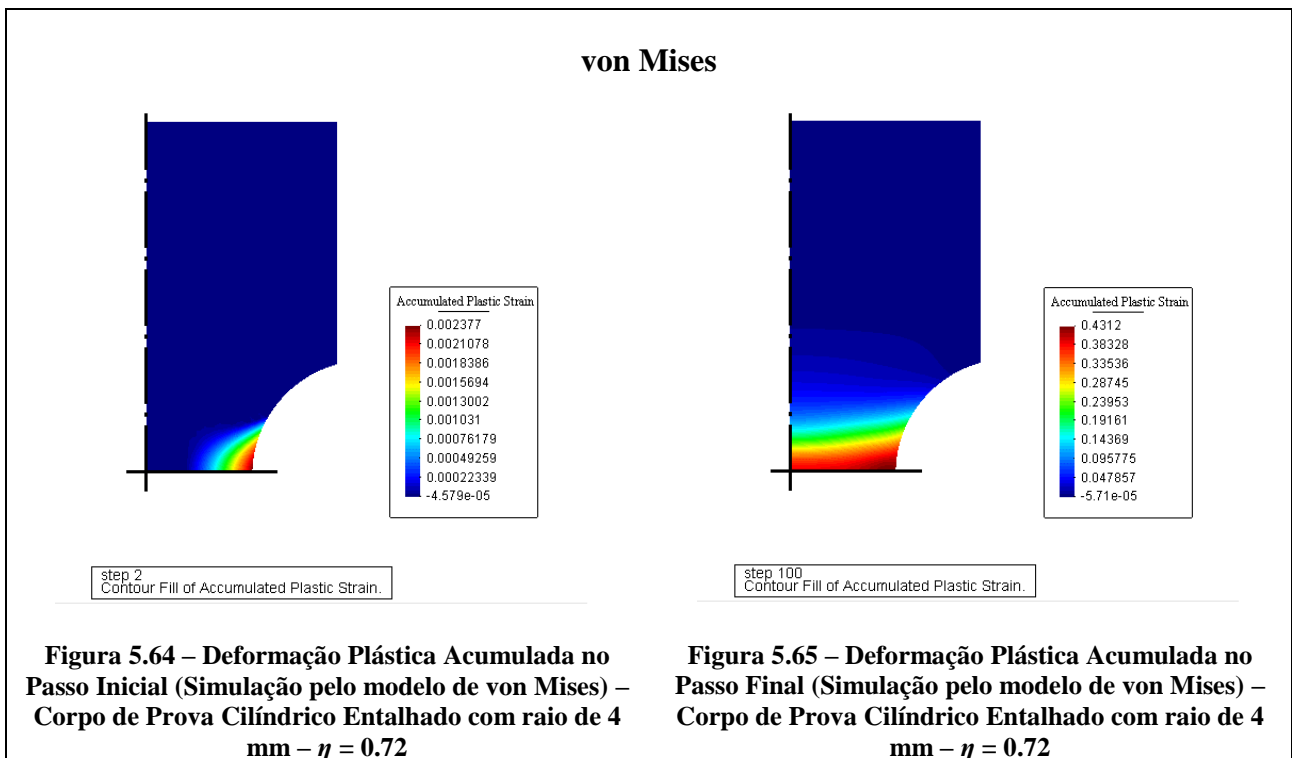
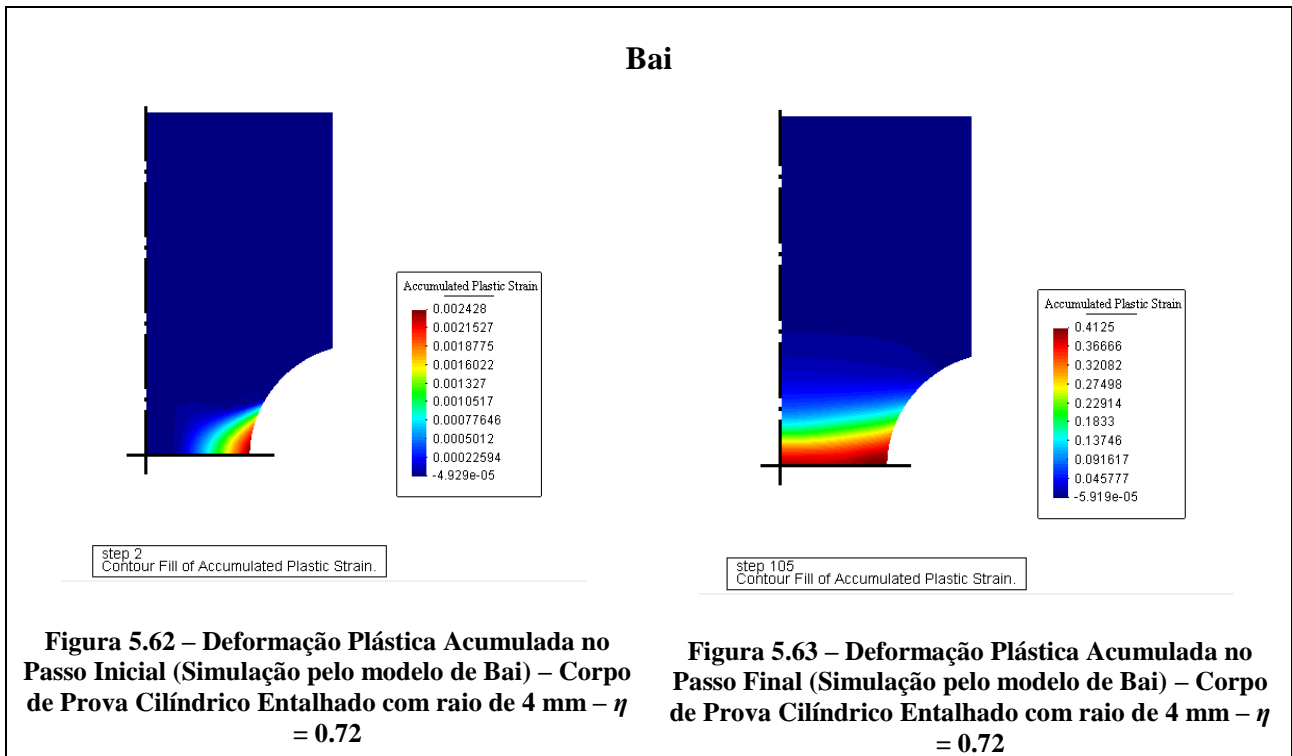


Figura 5.61 – Comparação de resultados para von Mises e Bai Simplificado – Gráfico de Triaxialidade no ponto crítico por Deslocamento – Corpo de Prova Cilíndrico Entalhado com raio de 4 mm – $\eta = 0.72$

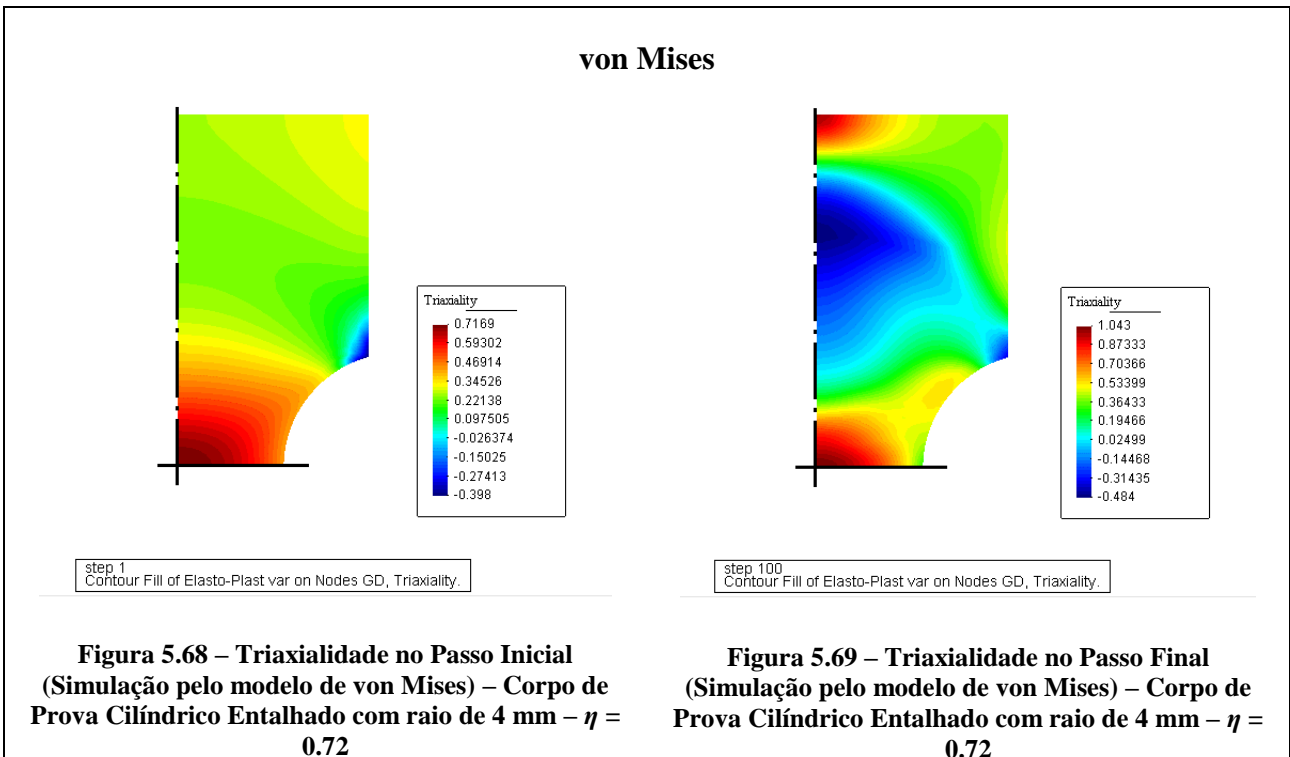
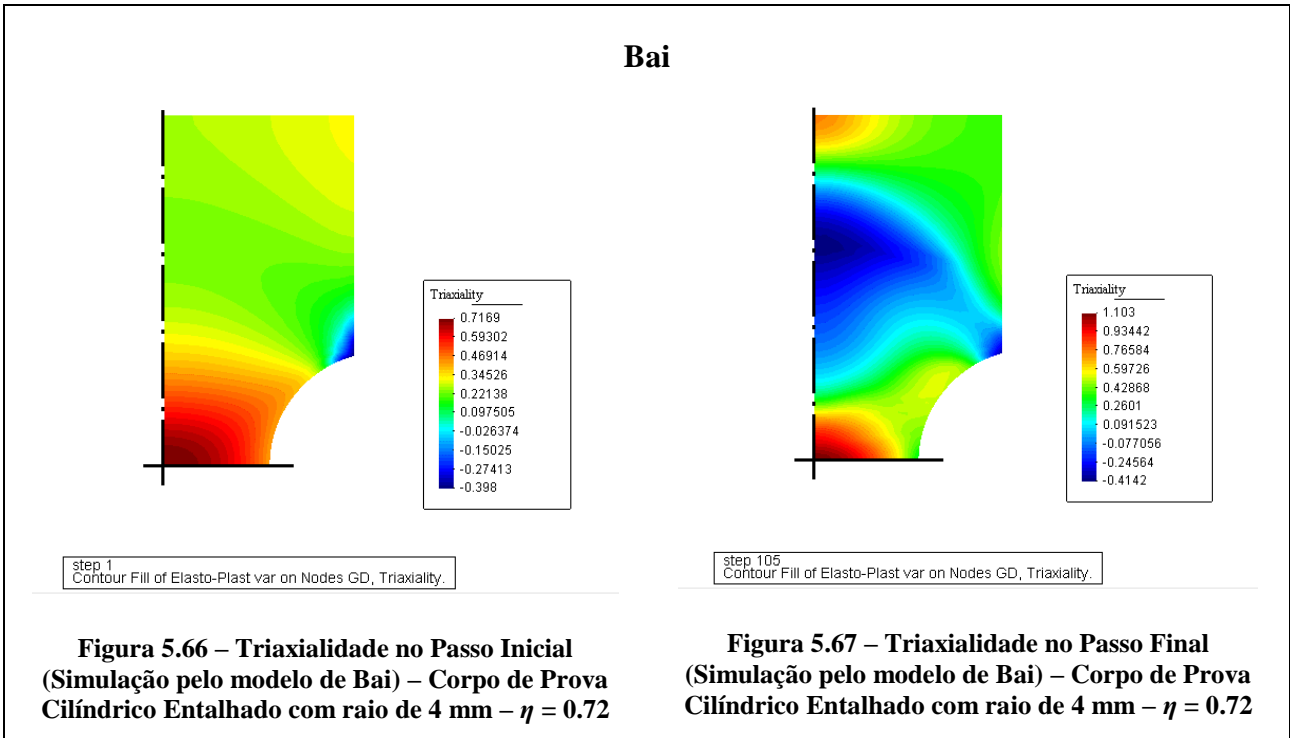
As Figuras 5.62 e 5.62 apresentam os resultados para Deformação Plástica Acumulada no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico

entalhado com raio de 4 mm ($\eta = 0.72$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.64 e 5.65 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.

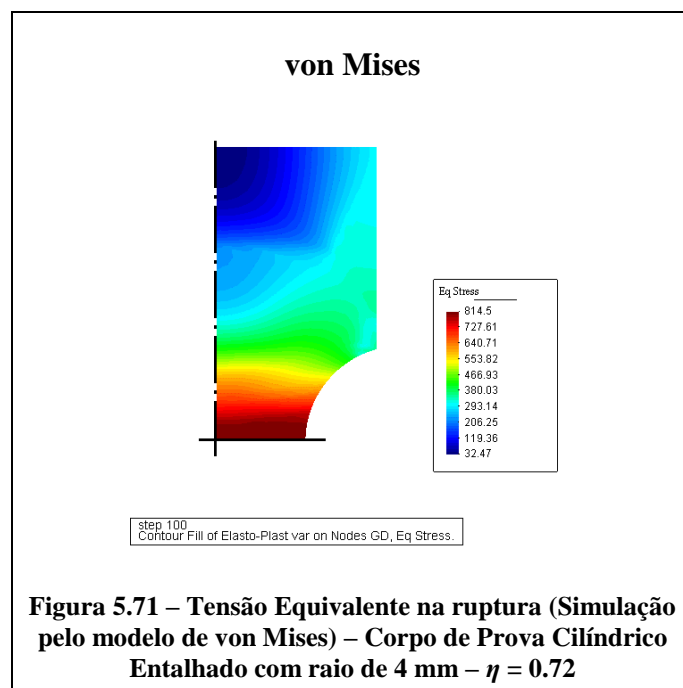
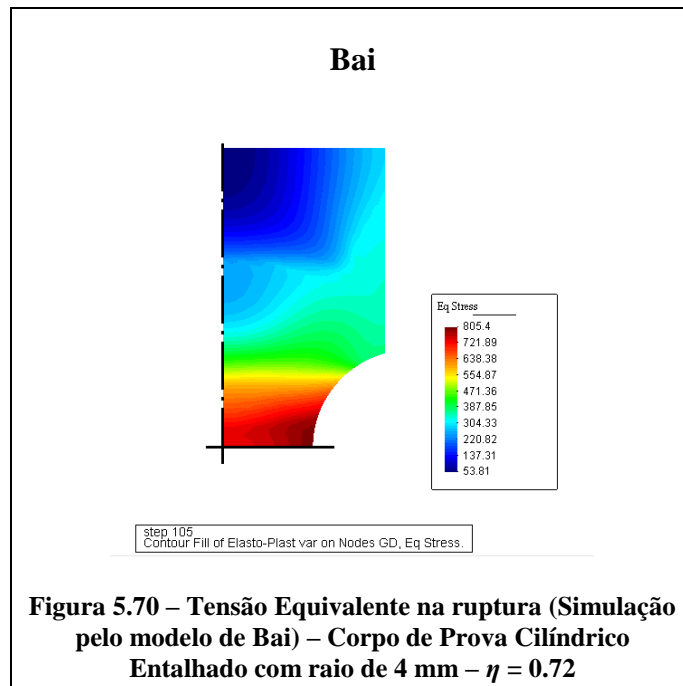


As Figuras 5.66 e 5.67 apresentam os resultados para Triaxialidade no passo inicial e final, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 4

mm ($\eta = 0.72$) pelo modelo de Bai. As Figuras 5.68 e 5.69 apresentam esses resultados para as simulações pelo modelo de von Mises.



As Figuras 5.70 e 5.71 apresentam os resultados para Tensão Equivalente na ruptura para as simulações pelo modelo de Bai e de von Mises, respectivamente, para o caso do corpo de prova cilíndrico entalhado com raio de 4 mm ($\eta = 0.72$).



A Figura 5.72 apresenta uma comparação dos dois modelos elastoplástico com relação ao resultado de Deformação Plástica Equivalente por Deslocamento para as diferentes condições de triaxialidade estudadas. O gráfico é relativo ao ponto crítico dos CPs.

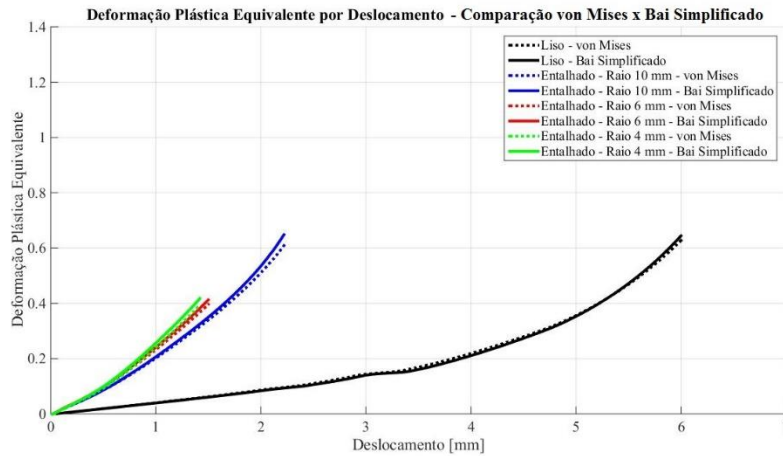


Figura 5.72 – Comparação dos resultados de Deformação Plástica Equivalente no ponto crítico por Deslocamento das simulações pelos dois modelos elastoplástico para as diferentes condições de triaxialidade.

A Figura 5.73 apresenta a comparação dos gráficos de deformação plástica de fratura numérico por tensão de triaxialidade numérico para as simulações feitas com base nos modelos elastoplásticos de Bai e von Mises.

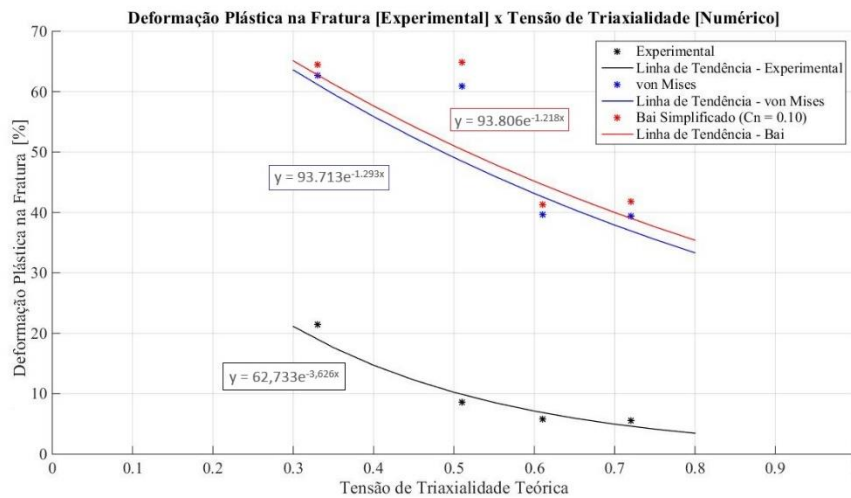


Figura 5.73 - Comparação dos resultados de Deformação Plástica na Fratura por Tensão de Triaxialidade das simulações pelos dois modelos elastoplástico para as diferentes condições estudadas.

Para o caso dos gráficos apresentados na Figura 5.73, relativos às deformações plásticas no ponto de fratura, deve-se destacar que as séries relativas aos resultados numéricos são concernentes às deformações no ponto crítico dos Corpos de Prova. Em contrapartida, a série referente às deformações experimentais é referente a uma média de deformação, calculada pelo “clip gage” e pela máquina, durante o ensaio. Dessa forma, a diferença entre os dados numéricos e experimentais no gráfico é esperada, e natural que a média apresentada na série relativa aos dados experimentais seja menor que o calculado numericamente no ponto crítico.

Os resultados numéricos apresentados nesta seção indicam uma boa correlação entre o modelo elastoplástico de von Mises e o modelo elastoplástico de Bai Simplificado com as configurações escolhidas. O efeito da tensão de triaxialidade é visível nas simulações referentes aos corpos de prova cilíndricos entalhados conforme o raio de entalhe fica mais severo. Dessa forma, pode-se dizer que para esse material, o problema em estudo é bem representado tanto pelo modelo de von Mises quanto pelo modelo de Bai, com a observação de que para condições de triaxialidade maiores, o modelo de Bai Simplificado com a calibração $C_\eta = 0.10$ se mostra como uma opção melhor.

Com isso, o modelo elastoplástico de Bai Simplificado, conforme adotado neste trabalho, apresenta uma vantagem com relação ao modelo clássico de von Mises para os casos relativos a maiores condições de tensão de triaxialidade.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi realizado um estudo do aço comumente conhecido como U2 no que diz respeito ao seu comportamento em tração para diferentes condições de tensão de triaxialidade. O material em questão é um aço da série 1524 e tem aplicação predominante na indústria naval.

Para o estudo, foram dimensionados corpos de prova com diferentes condições de entalhe, sendo estes relativos a condições de triaxialidade distintas. Dessa forma, foi possível analisar o comportamento do material para diferentes tensões de triaxialidade. Os corpos de prova foram testados em ensaio de tração simples monotônico, de modo a se obter as curvas de Força por Deslocamento do material para as diferentes condições de triaxialidade escolhidas para o estudo. Com isso, foi possível obter um mapeamento da tensão de fratura experimental do material para uma faixa da região de alta triaxialidade.

De forma a se encontrar uma forma de prever com exatidão o problema proposto por meio de análise numérica, os modelos elastoplásticos de von Mises e Bai foram implementados por meio de análise por elementos finitos. As análises por meio do modelo clássico de von Mises foram realizadas como forma de se obter uma referência, enquanto que as análises por meio do modelo de Bai foram realizadas com o objetivo de se encontrar uma boa calibração do mesmo que fosse capaz de prever o comportamento do material em estudo para diferentes condições de triaxialidade.

O modelo de Bai utilizado no trabalho foi uma simplificação do seu modelo original, de forma que apenas um de seus parâmetros, C_η , foi tomado como variável. A análise dos resultados numéricos indicou que a melhor calibração do modelo de Bai Simplificado para este problema é relativa ao parâmetro $C_\eta = 0.10$. O modelo de Bai utilizado foi capaz de melhorar os resultados numéricos quando em comparação com as simulações pelo modelo de von Mises para os casos onde a condição de tensão de triaxialidade era relativa a valores maiores deste parâmetro.

Ainda assim, recomenda-se para trabalhos futuros uma investigação mais aprofundada do modelo de Bai, sem simplificações ou com uma condição que considere mais efeitos, de forma a se encontrar uma configuração do modelo que seja ainda mais

eficiente na previsão do comportamento do material em estudo. Também é importante uma investigação do comportamento do material U2 para as demais faixas de tensão de triaxialidade, visto que neste trabalho foi considerado apenas a faixa conhecida como alta triaxialidade.

7 REFERÊNCIAS

- Bai, Y., 2008. *Effect of Loading History on Necking and Fracture*, Tese de Doutorado
- Bai, Y. & Wierzbicki, T., 2008. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and lode dependence.. *International Journal of Plasticity*, Issue 24, pp. 1071-1096.
- Bai, Y. & Wierzbicki, T., 2010. Application of extended Mohr-Coulomb criterion to ductile fracture. *International Journal of Fracture*, Issue 161, pp. 1-20.
- Bao, Y. & Wierzbicki, T., 2005. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, Issue 72, pp. 1049-1069.
- Bridgman, P. W., 1952. *Studies in large plastic flow and fracture*.. New York: McGraw-Hill.
- Cazacu, O., Revil-Baudard, B., Lebensohn, R. A. & Garajeu, M., 2013. On the Combined Effect of Pressure and Third Invariant on Yielding of Porous Solids With von Mises Matrix. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 80.
- Cortese, L., Coppola, T., Campanelli, F. & Broggiato, G. B., 2016. A J2–J3 Approach in Plastic and Damage Description of Ductile Materials. *International Journal of Damage Mechanics*, Volume 25(2), pp. 228-250.
- Cortese, L. et al., 2014. Prediction of ductile failure in materials for onshore and offshore pipeline applications. *International Journal of Damage Mechanics*, Issue 23(1), pp. 104-123.
- Dowling, N. E., 2007. *Mechanical Behavior of Materials – Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue*. Livro
- Dunand, M. & Mohr, D., 2011. On the predictive capabilities of the shear modified Gurson and the modified Mohr-Coulomb fracture models over a wide range of stress triaxialities and Lode angles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Issue 59, pp. 1374-1394.

- Gao, X., Zhang, T., Hayden, M. & Roe, C., 2009. Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy. *International Journal of Plasticity*, Issue 25, pp. 2366-2382.
- Gao, X. et al., 2011. On stress-state dependent plasticity modeling Significance of the hydrostatic stress the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule. *International Journal of Plasticity*, Issue 27, pp. 217-231.
- Holzapfel, G., 2000. *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*.
- Kroon, M. & Faleskog, J., 2013. Numerical implementation of a J2- and J3-dependent plasticity model based on a spectral decomposition of the stress deviator. *Computational Mechanics*, Issue 52, pp. 1059-1070.
- Lou, Y. & Huh, H., 2013. Extension of a shear-controlled ductile fracture model considering the stress triaxiality and the Lode parameter. *International Journal of Solids and Structures*, Issue 50, pp. 447-455.
- Lou, Y., Yoon, J. W. & Huh, H., 2014. Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. *International Journal of Plasticity*, Issue 54, pp. 56-80.
- Luo, M. & Wierzbicki, T., 2010. Numerical failure analysis of a stretch-bending test on dual-phase steel sheets using a phenomenological fracture model. *International Journal of Solids and Structures*, Issue 47, pp. 3084-3102.
- Malcher, L., 2011. *Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma Evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração.*, Tese de Doutorado
- Mirza, M. S. & Barton, D. C., 1996. The effect of stress triaxiality and strain-rate on the fracture characteristics of ductile metals. *Journal of Materials Science*, Issue 31, pp. 453-461.
- Sahadi, J. V., 2015. *Estudo da Fratura Dúctil Através de Modelos Dependentes do Terceiro Invariante do Tensor Desviador*, Dissertação de Mestrado

- SouzaNeto, Peric, D. & Owen, D., 2008. *Computational Methods for Plasticity - Theory and Applications*. Livro
- Wierzbicki, T., Bao, Y., Lee, Y.-W. & Bai, Y., 2005. Calibration and evaluation of seven fracture models. *International Journal of Mechanical Sciences*, Issue 47, pp. 719-743.
- Yoon, J. W., Lou, Y., Yoon, J. & Glazoff, M. V., 2014. Asymmetric yield function based on the stress invariants for pressure sensitive metals. *International Journal of Plasticity*, Issue 56, pp. 184-202.
- Yu, H. & Jeong, D., 2010. Application of a stress triaxiality dependent fracture criterion in the finite element analysis of unnotched Charpy specimens. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Issue 54, pp. 54-62.

ANEXO

A.1 Derivadas das equações residuais para a solução pelo Método de Newton-Raphson – Modelo de Bai Simplificado

Sistema de solução por Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \quad (\text{A.1})$$

Equações Residuais:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} &= \sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^T + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \frac{\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}) - \sigma_{y_{n+1}} [1 - C_\eta (\eta_{n+1} - \eta_0)]}$$

A.1.1 Derivadas:

A.1.1.1 Primeira equação residual

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} &= \mathbb{I}^4 + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= \mathbb{D}^e : \mathbf{N}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.1.1.2 Segunda equação residual

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= -\Delta\gamma \left\{ \frac{1}{\sigma_{eq_{n+1}}} \left[\mathbf{N}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \right] - [\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}] \left[\frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2(\sigma_{eq_{n+1}})^3} \right] \right\} \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} &= 1 - \Delta\gamma \left[\frac{1}{\sigma_{eq_{n+1}}} \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} \right] \right] \\ \frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} &= - \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{N}_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \right]\end{aligned}\tag{A.4}$$

A.1.1.3 Terceira equação residual

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \mathbf{N}_{n+1} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} &= -H[1 - C_\eta(\eta_{n+1} - \eta_0)] \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} &= 0\end{aligned}\tag{A.5}$$

A.1.1.4 Demais derivadas e equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} &= \frac{3}{2} \left[\frac{\mathbb{I}^d}{\sigma_{eq_{n+1}}} - \frac{3}{2(\sigma_{eq_{n+1}})^3} \mathbf{S}_{n+1} \otimes \mathbf{S}_{n+1} \right] \\ &\quad + \sigma_{y_{n+1}} C_\eta \left\{ \left[-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{S}_{n+1}}{(\sigma_{eq_{n+1}})^3} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{(\sigma_{eq_{n+1}})^3} \left[\frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{3} - \frac{3\eta_{n+1}}{\sigma_{eq_{n+1}}} \left(\frac{1}{2} + \mathbf{S}_{n+1} \right) \right] \otimes \mathbf{S}_{n+1} + \frac{\eta_{n+1}}{(\sigma_{eq_{n+1}})^2} \mathbb{I}^d \right\} \right\} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}^p} &= HC_\eta \left(\frac{\mathbf{I}}{3\sigma_{eq_{n+1}}} - \frac{3\eta_{n+1}}{2(\sigma_{eq_{n+1}})^2} \mathbf{S}_{n+1} \right)\end{aligned}\tag{A.6}$$

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}} + \sigma_{y_{n+1}} \left(\frac{1}{3\sigma_{eq_{n+1}}} \mathbf{I} - \frac{3\eta_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}^2} \mathbf{S}_{n+1} \right) C_\eta$$

$$\sigma_{y_{n+1}} = (\sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)$$

$$\sigma_{eq_{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1})}$$

$$\mathbb{I}^d = \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

A.2 Derivadas das equações residuais para a solução pelo Método de Newton-Raphson – Modelo de von Mises

Sistema de solução por Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \quad (\text{A.7})$$

Equações Residuais:

$$\mathbf{R}_{\sigma_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^T + 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}$$

$$R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \quad (\text{A.8})$$

$$R_{\Delta\gamma} = \sigma_{eq_{n+1}} - \sigma_{y_0} - H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$$

A.2.1 Derivadas:

A.2.1.1 Primeira equação residual

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \sigma_{n+1}} = \mathbb{I}^4 + 3G\Delta\gamma \left[\frac{\mathbb{I}^d}{\sigma_{eq_{n+1}}} - \frac{3}{2(\sigma_{eq_{n+1}})^3} \mathbf{S}_{n+1} \otimes \mathbf{S}_{n+1} \right]$$
$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = \mathbf{0} \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = 2GN_{n+1}$$

A.2.1.2 Segunda equação residual

$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \sigma_{n+1}} = 0$$
$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = 1 \tag{A.10}$$
$$\frac{\partial R_{\varepsilon_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} = -1$$

A.2.1.3 Terceira equação residual

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \sigma_{n+1}} = N_{n+1}$$
$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -H \tag{A.11}$$
$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = 0$$

A.2.1.4 Demais equações

$$N_{n+1} = \frac{3\mathbf{S}_{n+1}}{2\sigma_{eq_{n+1}}}$$

$$\sigma_{y_{n+1}} = (\sigma_{y_0} + H\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)$$

$$\sigma_{eq_{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S}_{n+1}:\mathbf{S}_{n+1})}$$

(A.12)

$$\mathbb{I}^d = \mathbb{I}^4 - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$$