Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Problemas de Kirchhoff com crescimento crítico

por

Luan Diego de Oliveira

Orientador: Marcelo Fernandes Furtado

Brasília

2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Op Oliveira, Luan
Problemas de Kirchhoff com Crescimento Crítico / Luan Oliveira; orientador Marcelo Furtado. -- Brasília, 2018.
94 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Problemas de Kirchhoff. 2. expoente crítico. 3. Teorema do passo da montanha generalizado. 4. Concentração compacidade. I. Furtado, Marcelo, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas de Kirchhoff com Crescimento Crítico

por

Luan Diego de Oliveira

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA*

Brasília, 05 de julho de 2018.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado – Orientador (MAT-UnB)

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (MAT-UnB)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (UFPB)

Edcarlos D. da Silva

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva (UFG)

* O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração desta tese.

Para

Lindalva.

Agradecimentos

A meus pais, Lindalva e José, minha vó Socorro e minha família.

Ao meu filho Lohan Pietro.

Ao Professor Marcelo, pela orientação e paciência.

Aos professores e funcionários do Departamento de matemática.

"Quando você olha muito tempo para um abismo,

o abismo olha para você"

Resumo

Neste trabalho, usamos o Método Variacional para resolver quatro equações do tipo Kirchoff com expoente crítico, uma equação escalar, um sistema em $\mathbb{R}^N$ com a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz, e uma equação e um sistema em $\mathbb{R}^3$ com uma condição mais fraca que a de Ambrosetti-Rabinowitz. Em todos os casos, utilizamos o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions e uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria.

Palavras-chave: Problemas elípticos, Problemas de kirchhoff, expoente crítico de Sobolev, Teorema do passo da montanha.

Abstract

In this work, we use the Variational Method to solve four Kirchoff equations with critical exponent, a scalar equation, a system in $\mathbb{R}^N$ with the well-known condition of Ambrosetti-Rabinowitz, and an equation and a system in $\mathbb{R}^3$ with a weaker condition than that of Ambrosetti-Rabinowitz. In all cases, we use the Lions Concentration-Compassion Principle and a version of the Mountain Pass Theorem with symmetry.

Keywords: Elliptical problems, kirchhoff problems, critical growth, mountain pass Theorem.

Sumário

Introdução

Considere o problema

$$-m\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = g(x,u), \text{ em } \Omega, \quad u=0, \text{ em } \partial\Omega, \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave, m é uma função positiva e a função não linear g tem crescimento polinomial. Dizemos que este é um problema não local devido à presença do termo $m(\cdot)$. A equação tem origem na teoria de vibração não linear. De fato, o caso $m(t) = a + bt$, com $a, b > 0$ segue do seguinte modelo para a equação da onda modificada, proposta por d'Alembert

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,u),$$

para vibrações livres de cordas elásticas. Aqui L é o comprimento da corda, h é a área secção, E é o modulo de Young do material, ρ é a densidade de massa e P_0 a tensão inicial.

Este tipo de equação foi proposto por Kirchhoff [20] e foi considerado teoricamente ou experimentalmente por alguns físicos depois disso (ver [35, 9, 34, 33]). Problemas não locais aparecem em outros campos além da física, como em sistemas biológicos, onde u descreve um processo que depende da sua própria média, por exemplo, densidade populacional. Outras motivações físicas podem ser encontradas em [12, 26, 25].

Neste trabalho, estudamos dois tipos de problemas elípticos envolvendo o termo não local m. Dois deles são problemas escalares e outros dois sistema. Todos eles envolvem o expoente crítico de Sobolev $2^* = 2N/(N-2)$ e o objetivo é encontrar múltiplas soluções. Fazemos isso utilizando versões do lema da concentração-compacidade de Lions e uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria.

Os problemas estão divididos em quatro capítulos que descrevemos na sequência. Para facilitar a leitura, todos os capítulos foram escritos de maneira independente um do outro. Deste modo, embora exista uma cronologia óbvia na distribuição, a ordem de leitura dos capítulo é formalmente irrelevante.

Multiplicidade de soluções para (P_λ)

No primeiro capítulo, consideramos a equação

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -m\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado suave, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $\lambda > 0$ é um parâmetro. Denotando $\mathbb{R}^+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$, as nossas hipóteses nas funções m e f são as seguintes:

(m_0) $m \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ é crescente e $m(0) > 0$;

(f_0) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é ímpar com relação a segunda variável;

(f_1) existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(f_2) existe $\theta \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s), \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \neq 0,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$;

(f_3) vale

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega.$$

As soluções fracas do problema são os pontos críticos do funcional energia

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2}M(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $M(s) = \int_0^s M(t)dt$ é uma primitiva da função m. Como f é ímpar, o funcional I_λ é par e portanto podemos esperar que sua simetria nos garanta a existência de múltiplos pontos críticos. Provamos que isso corre, desde que λ seja suficientemente grande.

Teorema A. *Suponha que m e f satisfaçam (m_0) e $(f_0) - (f_3)$, respectivamente. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_k^* > 0$ tal que o problema (P_λ) tem k pares de soluções fracas não nulas para todo $\lambda \geq \lambda_k^*$.*

Na prova do resultado acima, aplicamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria. A não compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é contornada pelas ideias de Brezis e Nirenberg [8] juntamente com o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions [27]. Como para dimensões $N \geq 4$ o expoente crítico 2^* é menor do que ou igual a 4, a integral $\int_\Omega |u|^{2^*}dx$ não domina o termo $M(\|u\|^2)$. Para contornar essa dificuldade usamos um argumento (ver [1]) que consiste em considerar uma equação truncada, trabalhar com esse novo problema, provar que as suas soluções têm norma pequena e portanto resolvem o problema original. Vamos enfatizar que a presença do termo não local no funcional torna a verificação das condições geométricas mais complexas do que aquelas apresentadas em [2].

Desde o trabalho pionmeiro de J.L.Lions [26] problemas não locais como (P_λ) foram estudados extensivamente (ver [1, 4, 3, 22, 5]). O primeiro artigo que trabalhou equações do tipo Kirchhoff via métodos variacionais foi [1]. Assumindo algumas condições técnicas nas funções m e f, os autores obtiveram soluções para o problema (1). Desde então, existe uma vasta literatura que considera questões de existência, não existência, multiplicidade e concentração de soluções para problemas não locais. Citamos aqui [18, 29, 19, 28, 39] para problemas subcríticos e [17, 16, 23] para problemas com crescimento crítico.

Nosso primeiro resultado foi inspirado nos resultados de [13], onde o autor considerou as hipóteses $(f_1) - (f_3)$ e obteve uma solução fraca positiva u_λ para $\lambda > 0$ suficientemente grande e provou também que $\|u_\lambda\| \to 0$, quando $\lambda \to +\infty$. Mencionamos também o trabalho [32], onde o autor obteve para $N = 3$ e $m(t) = a + tb$, a existência de uma solução positiva para qualquer $\lambda > 0$. Nosso primeiro teorema complementa os trabalhos citados, já que estamos considerando múltiplas soluções para a equação crítica com uma condição bem fraca para o termo não local m.

Multiplicidade de soluções para (P_μ)

No segundo capítulo, consideramos o problema

$$(P_\mu) \qquad \begin{cases} -m(\|u\|^2 \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u \;=\; = f(x,u) + \mu |u|^4 u, \quad \text{em } \Omega, \\ \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado suave, $\mu > 0$ é um parâmetro e a função m satisfaz

(m_0) $m \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$;

(m_1) $m(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$;

(m_2) $2M(t) \geq m(t)t$, para todo $t \geq 0$;

(m_3) existe $a > 0$ e $b \geq 0$, tal que

$$m(t) \leq a + bt, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Apresentamos na sequência exemplos de funções que satisfazem as condições acima:

Exemplo 1. Considere $m(t) = m_0 + bt^\delta$, com $\delta \in [0,1]$ e $m_0 > 0$, $b > 0$. As condições (m_0) e (m_1) são imediatas. Para verificar (m_2) basta notar que $2 \geq \delta + 1$. Portanto

$$2M(t) = 2m_0 t + \frac{2}{\delta+1} bt^{\delta+1} \geq m_0 t + bt^{\delta+1} = m(t)t.$$

Para a condição (m_3), basta usar $\delta \in [0,1]$ para obter que

$$m(t) = m_0 + bt^\delta \leq (m_0 + b) + bt.$$

Exemplo 2. Considere $m(t) = m_0(1 + \ln(1+t))$, com $m_0 > 0$. As condições (m_0), (m_1) e (m_3) são imediatas. Para provar (m_2) é suficiente mostrar que

$$2M(t) = 2\ln(1+t) + 2t\ln(1+t) \geq t + t\ln(1+t) = m(t)t,$$

ou seja, que

$$(2+t)\ln(1+t) \geq t.$$

Para ver isso, defina $g(t) = (2+t)\ln(1+t) - t$ e note que $g(0) =$

$$g'(t) = \frac{2+t}{1+t} + \ln(1+t) - 1 \geq 0, \quad \forall\, t > 0.$$

Para a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vamos supor que:

(f_0) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é ímpar com relação a segunda variável;

(f_1) vale

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^5} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega$$

(f_2) existe $\sigma \in [0,2)$ e c_1, $c_2 \in (0,+\infty)$ tal que

$$\frac{1}{4}f(x,s)s - F(x,s) \geq -c_1 - c_2|s|^\sigma, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

onde $F(x,s) := \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$;

(f_3) existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ com medida positiva, tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^4} = +\infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega_0.$$

Provamos que, para valores pequenos de $\mu > 0$, o problema (P_μ) possui múltiplas soluções. Mais especificamente, vale o seguinte:

Teorema B. *Suponha que m e f satisfaçam $(m_0) - (m_3)$ e $(f_0) - (f_3)$, respectivamente. Suponha ainda que uma das condições abaixo se verifica:*

(f_4) *existem* $q \in (4,6)$ *e* $c_3, c_4 \in (0,+\infty)$ *tal que*

$$F(x,s) \le c_3|s|^q + c_4, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R};$$

ou

(f_5) *a função*

$$a(x) := \limsup_{s\to 0} \frac{F(x,s)}{|s|^2}$$

é tal que $a^+(x) := \max\{a(x), 0\} \in L^\infty(\Omega)$.

Então, dado $k \in \mathbb{N}$, *existe* $\mu_k^* > 0$ *tal que o problema* (P_μ) *tem pelo menos* k *pares de soluções fracas não nulas para todo* $\mu \in (0, \mu_k^*)$.

Obviamente, a hipótese (f_1) desse problema é mais fraca que a do problema anterior. Se não tivermos um parâmetro grande multiplicando o termo $f(x,u)$, o argumento de truncamento usando na prova do Teorema A não funciona, neste caso é natural considerar a hipótese de Ambrosetti-Rabinowitz com $\theta > 4$ (veja [10, 32, 17, 19, 39]). Com essa hipótese, temos que $F(x,s) \ge C_1|s|^\theta$ para qualquer $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$. Então, a condição (f_2) que trabalhamos no segundo capítulo é mais fraca que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz com $\theta > 4$. Além disso, a condição de superlinearidade (f_5) é imposta somente em um conjunto de medida positiva, de modo que as condições sobre f na segunda parte deste trabalho são mais fracas que as usadas na primeira parte. Infelizmente, o argumento de truncamento não funciona sob essas hipóteses, o que nos impede de provar o resultado quando $N \ge 4$. O ponto principal é que não sabemos se a norma das soluções desse problema convergem para zero quando $\mu \to 0^+$.

Um exemplo de função $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ satisfazendo as hipóteses desse capítulo é a seguinte:

$$F(x,s) = a(x)|s| + b(x)\frac{|s|^5}{5},$$

com $a, b \in C(\overline{\Omega})$, de fato, as condições (f_0), (f_1), (f_3) e (f_4) são imediatas, para a condição (f_2), bastar notar que

$$\frac{1}{4}f(x,s)s - F(x,s) \ge c\left(\frac{1}{4} - 1\right)|s| \ge -c_1 - c_2|s|, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

O Capítulo 2 foi inspirado no artigo [37], onde os autores consideram o caso local $m \equiv 1$. Observamos porém que, mesmo neste caso, o nosso resultado é novo. De fato, as nossas condições (f_3) e (f_5) são mais gerais do que os seus análogos (f_4) e (f_7) em [37]. Deste modo, o Teorema B deste trabalho generaliza os Teoremas A e C de [37].

Existência e multiplicidade de soluções para (S_λ)

No terceiro capítulo, consideramos

$$(S_\lambda) \qquad \begin{cases} -m\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u & = & \lambda F_u(x,u,v) + \dfrac{1}{2^*}G_u(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ -l\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2\right)\Delta v & = & \lambda F_v(x,u,v) + \dfrac{1}{2^*}G_v(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ u, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave, $\lambda > 0$ é um parâmetro e as funções m, l satisfazem

(m_0) $m \in C([0,+\infty], \mathbb{R}^+)$ é crescente;

(l_0) $l \in C([0,+\infty], \mathbb{R}^+)$ é crescente.

Na formulação do problema estamos denotando por F_u e F_v as derivadas parciais com relação à segunda e terceira variável, respectivamente, da não linearidade $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. As hipóteses em F são:

(F_0) $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$;

(F_1) existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|\nabla F(x,z)|}{|z|^{q-1}} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(F_2) existe $\theta \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 \leq \theta F(x,z) \leq \nabla F(x,z) \cdot z, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^2,$$

onde $z_0 \cdot z_1$ denota o produto interno euclidiano de z_0, $z_1 \in \mathbb{R}^2$;

(F_3) vale o seguinte

$$\lim_{|z|\to 0} \frac{|\nabla F(x,z)|}{|z|} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(F_4) $F_u(x,0,t) = 0$, $F_v(x,s,0) = 0$, para todo $x \in \Omega$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Usando a mesma notação acima e $\mathbb{R}^2_+ = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s \geq 0,\ t \geq 0\}$, as hipóteses na função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

(G_0) $G \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é 2^*-homogênea, isto é,

$$G(\sigma s, \sigma t) = \sigma^{2^*} G(s,t), \qquad \forall\, \sigma > 0,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2;$$

(G_1) $G(s,t) > 0$, para todo $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$;

(G_2) vale uma das condições abaixo:

(a) $G_u(0,1) = 0$, $G_v(1,0) = 0$;

(b) $G_u(0,1) > 0$, $G_v(1,0) > 0$.

No nosso primeiro resultado estamos interessados em existência de solução não negativa para (S_λ), isto é, uma solução fraca $(u,v) \in H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ tal que cada uma das componentes é uma função não negativa em Ω. A condição (G_2) acima está intimamente relacionada com a maneira pela qual faremos um truncamento da função G de modo que os pontos críticos do funcional energia associado sejam não negativos. Mais especificamente, se vale o item (a) da condição (G_2), vamos trabalhar com a função

$$\widetilde{G}(s,t) := G(s^+, t^+), \quad \forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $s^+ := \max\{s, 0\}$. Porém, quando vale o item (b), a função $\widetilde{G}$ acima não é diferenciável. Neste caso, consideramos

$$\widetilde{G}(s,t) := G(s^+.t^+) - \nabla G(s^+, t^+) \cdot (s^-, t^-), \quad \forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $s^- := \max\{-s, 0\}$.

Apresentamos na sequência alguns exemplos (cf. [30]) de funções que satisfazem as hipóteses $(G_0) - (G_2)$: considere

$$P_q(s,t) := a_1 s^q + a_2 t^q + \sum_{i=1}^{k} b_i s_i^{\alpha_i} t_i^{\beta_i},$$

onde $\alpha_i, \beta_i > 1$, $\alpha_i + \beta_i = q$ e a_1, a_2, $b_i > 0$ As seguintes funções e suas possíveis combinações, com os coeficientes apropriados, satisfazem as hipóteses sobre G

$$G(s,t) = P_{2^*}(s,t), \qquad G(s,t) = \left(P_{2\cdot 2^*}(s,t)\right)^{1/2}, \qquad G(s,t) = \frac{P_{l_1}(s,t)}{P_{l_2}(s,t)},$$

com $l_1 - l_2 = 2^*$.

Os exemplos acima satisfazem a o item (a) da condição (G_2), porém o item (b) nos permite trabalhar com uma P mais geral,

$$\widetilde{P}_q(s,t) := a_1 s^{q-1} t + a_2 t^{q-1} s + \sum_{i=1}^{k} b_i s_i^{\alpha_i} t_i^{\beta_i},$$

já que

$$(\widetilde{P}_q)_s(0,1) = (\widetilde{P}_q)_t(1,0) = 1 > 0$$

No nosso primeiro resultado da Capítulo 3 obtemos, para λ grande, a existência de solução não negativa. Mais especificamente, provamos o seguinte:

Teorema C. *Suponha que m, l, F e G satisfaçam (m_0), (l_0), $(F_0) - (F_4)$ e $(G_0) - (G_2)$, respectivamente. Então existe λ^* tal que, para todo $\lambda > \lambda^*$, o problema (S_λ) tem uma solução não nula e não negativa $(u_\lambda, v_\lambda) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Além disso, $\|(u_\lambda, v_\lambda)\|_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$.*

Para a demonstração vamos considerar, como no Capítulo 1, um problema truncado. Provamos que o funcional associado a esse novo problema satisfaz uma condição local de compacidade [27] e usamos o Teorema do Passo da Montanha para encontrar solução do problema truncado. Finalizamos provando que, quando λ é grande, essa solução tem norma pequena, recuperando assim a solução para o problema inicial.

O argumento de existência é uma adaptação daquele usando para a equação escalar em [13]. O mesmo autor considera, em [14], uma versão para sistema em dimensão $N = 3$ supondo que a função F é homogênea e G satisfaz a condição $(G_2)(a)$. Uma diferença importante para o nosso trabalho é que, em [14], o termo não local pode ser acoplado e tem a forma $m_u(\|u\|^2, \|v\|^2)\Delta u$ e $m_v(\|u\|^2, \|v\|^2)\Delta v$, com a função m verificando um conjunto de hipóteses técnicas. No nosso resultado optamos por desacoplar o termo não local, o que nos permitiu uma classe m e n mais geral e, além disso, tratar o problema em dimensão maiores usando a técnica de truncamento. Nosso resultado complementa o de [14] no sentido que a nossa função F é mais geral, consideramos exemplos em que $(G_2)(b)$ pode ocorrer e não impomos restrição na dimensão. Ele também complementa os resultados de [30, 31], onde o problema local foi considerado. Citamos ainda os artigos [11, 15, 24, 40] onde sistemas envolvendo o operador de Kirchhoff foram considerados.

Para o segundo resultado deste capítulo, substituímos as hipóteses (F_0) e (G_0) por:

$(\widehat{F_0})$ $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é par com relação a segunda variável;

$(\widehat{G_0})$ $G \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é 2^*-homogênea e par.

Adaptando a demonstração do caso escalar provamos que o problema tem múltiplas soluções novamente quando λ é grande.

Teorema D. *Suponha que m, l, F e G satisfaçam (m_0), (l_0), $(\widehat{F_0})$, $(F_1) - (F_3)$, e $(\widehat{G_0})$, (G_1), respectivamente. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_k^* > 0$ tal que o problema (S_λ) tem k pares de soluções não nulas para todo $\lambda \geq \lambda_k^*$.*

Os resultados desse capítulo generalizam aqueles apresentados em [13] nos seguintes aspectos: consideramos um sistema em em troco de uma equação escalar; obtemos não só resultados de existência mas também resultados de multiplicidade; consideramos aqui uma classe maior de termos críticos. O Teorema D acima também complementa os resultados de [14] onde considerou-se um sisema mas foi provado somente um resultado de existência.

Multiplicidade de soluções para o problema (S_μ)

No quarto e último capítulo, consideramos

$$(S_\mu) \qquad \begin{cases} -m\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u &= F_u(x,u,v) + \mu_1|u|^4u, \qquad \text{em } \Omega, \\ -l\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2\right)\Delta v &= F_v(x,u,v) + \mu_2|v|^4v, \qquad \text{em } \Omega, \\ u, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, é um domínio limitado com fronteira suave, $2^* = 6$, μ_1, $\mu_2 \geq 0$ são parâmetros.

Vamos considerar as funções m e l pertencendo ao conjunto $\mathcal{A}$ de todas as funções $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que

$(\mathcal{A}_1)$ $g \in C([\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$;

$(\mathcal{A}_2)$ $g(t) \geq g_0 > 0$, para todo $t \geq 0$;

$(\mathcal{A}_3)$ vale

$$2G(t) \geq g(t)t, \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $G(t) = \int_0^t g(s)ds$.

Para a não linearidade F, supomos que

(F_0) $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é par com relação a segunda variável;

(F_1) vale

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|\nabla F(x,z)|}{|z|^5} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(F_2) existem σ_1, $\sigma_2 \in [0,2)$ e c_0, c_1, $c_2 \in (0,+\infty)$ tal que

$$\frac{1}{4}\nabla F(x,s,t)\cdot(s,t) - F(x,s,t) \geq -c_0 - c_1|s|^{\sigma_1} - c_2|t|^{\sigma_2}, \quad \forall\, x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Além disso, quando $\sigma_1 \neq 0$ ou $\sigma_2 \neq 0$, vamos assumir adicionalmente que existe $K > 0$ tal que

$$\begin{cases} \mu_2 \leq \mu_1, & \text{se } \sigma_1 \neq 0 \text{ e } \sigma_2 = 0; \\ \mu_2 \leq \mu_1 \leq K\mu_1, & \text{se } \sigma_1 \neq 0 \text{ e } \sigma_2 \neq 0; \\ \mu_1 \leq K\mu_2, & \text{se } \sigma_1 = 0 \text{ e } \sigma_2 \neq 0; \end{cases} \tag{2}$$

(F_3) existe um conjunto aberto, $\Omega_0 \subset \Omega$, com medida positiva, tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s,0)}{|s|^4} = +\infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega_0;$$

(F_4) existem θ_1 $\theta_2 \in (4,6)$ e $c_3, c_4, c_5 \in (0,+\infty)$ tal que

$$F(x,s,t) \leq c_3|s|^{\theta_1} + c_4|t|^{\theta_2} + c_5, \quad \forall\, x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

O resultado principal deste capítulo é a versão para sistema do Teorema B. Provamos o seguinte resultado:

Teorema E. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_4)$. Suponha ainda que m, $l \in \mathcal{A}$ e existem a, $b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$m(t) \leq a + bt, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\mu_k^* > 0$ tal que o problema (S_μ) tem pelo menos k pares de soluções fracas não nulas para todo μ_1, $\mu_2 \in (0, \mu_k^*)$.

Se substituirmos (F_3) pelo seu análogo

$(\widehat{F_3})$ existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$, com medida positiva, tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(x,0,t)}{|t|^4} = +\infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega_0,$$

temos a seguinte versão do último resultado:

Teorema E'. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_2)$, $(\widehat{F_3})$ e (F_4). Suponha ainda que m, $l \in \mathcal{A}$ e existem a, $b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$l(t) \leq a + bt, \quad \forall\, t \geq 0$$

Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\mu_k^* > 0$ tal que o problema (S_μ) tem pelo menos k pares de soluções fracas não nulas para todo μ_1, $\mu_2 \in (0, \mu_k^*)$.

Assim como no Capítulo 2, sem o parâmetro multiplicando a função F_u e F_v, não conseguimos usar o argumento de truncamento usado nas demonstrações do

Teorema A, C e D. Assim, consideramos a hipótese (F_2), que é mais geral que a tradicional condição de superlinearidade de Ambrosetti-Rabinoitz (ver [2, 6, 36]). Podemos observar que a adaptação para sistema que fizemos nesse capítulo foi diferente daquela feita no Capítulo 3. Aqui não iremos usar p e q tal que $p+q=2^*$ e sim o proprio $2^*=6$ em cada uma das equações do sistema. Outra diferença é que nosso termo crítico não permite termos mistos. Esse é um impedimento técnico que está relacionado com a limitação das sequências de Palais-Smale.

Assim como no Capítulo 2, podemos usar a seguinte função $F(x,s,t)$ como exemplo:

$$F(x,s,t) = a_1(x)|s| + b_1(x)\frac{|s|^5}{5} + a_2(x)|t| + b_2(x)\frac{|t|^5}{5},$$

com $a_i, b_i \in C(\overline{\Omega})$ Como já citado, exitem vários trabalhos resolvendo sistemas elípticos na literatura. Especificamente para esse Capítulo, citamos aqui [38], onde os autores consideraram a versão escalar para o operador p-laplaciano. O nosso resultado complementa o Teorema A de [38] para o caso $N=3$, visto que consideramos um sistema envolvendo termos não locais.

CAPÍTULO 1

Multiplicidade de soluções para (P_λ)

Neste capítulo, estudamos multiplicidade de soluções para o problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -m\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u, & \text{em } \Omega,\\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado suave, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $\lambda > 0$ é um parâmetro. Denotando $\mathbb{R}^+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$, as nossas hipóteses nas m e f são as seguintes:

(m_0) $m \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ é crescente, $m(0) > 0$;

(f_0) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é ímpar com relação a segunda variável;

(f_1) existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{q-1}} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(f_2) existe $\theta \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 < \theta F(x,s) \leq sf(x,s), \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \neq 0,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$;

(f_3) vale

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{f(x,s)}{s} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega.$$

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P_λ) se

$$m(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi) = \lambda \int_\Omega f(x,u)\phi + \int_\Omega |u|^{2^*-2}u\phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, as soluções fracas do problema são os pontos críticos do funcional

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2}M(\|u\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $M(s) = \int_0^s M(t)dt$. Como f é ímpar, o funcional I é par e portanto podemos esperar que sua simetria nos garanta múltiplos pontos críticos. O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema A. *Suponha que m e f satisfaçam (m_0) e $(f_0) - (f_3)$, respectivamente. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_k^* > 0$ tal que o problema (P_λ) tem k pares de soluções fracas não nulas para todo $\lambda \geq \lambda_k^*$.*

Para a demonstração do teorema, usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria, o princípio da concentração-compacidade de Lions e um problema auxiliar que apresentamos a seguir.

1.1 Problema auxiliar

Vamos inicialmente fazer um truncamento da função m da seguinte forma: seja $a \in m([0,\infty))$ tal que

$$m(0) < a < \frac{\theta}{2}m(0). \tag{1.1}$$

Como m é crescente, existe um $s_0 > 0$, tal que $m(s_0) = a$. Defina

$$m_a(s) = \begin{cases} m(s), & 0 \leq t \leq s_0, \\ a, & t \geq s_0. \end{cases}$$

Note que $m_a(s) \leq a$, para todo $s \geq 0$.

Observe que, para definir m_a precisamos apenas que m seja crescente em uma vizinhança do zero, porém se ela for limitada, não precisamos fazer o truncamento, por isso, estamos supondo que m é crescente em todo o domínio.

Estudaremos então o seguinte problema

$$(\widehat{P_\lambda}) \qquad \begin{cases} -m_a(\|u\|^2)\Delta u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Em analogia com (P_λ), dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de $(\widehat{P_\lambda})$ se

$$m_a(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi) = \lambda \int_\Omega f(x,u)\phi + \int_\Omega |u|^{2^*-2}u\phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Usando $(f_0) - (f_1)$ e cálculos padrões, podemos provar que o funcional energia $I_{a,\lambda}$ abaixo está bem definido

$$I_{a,\lambda}(u) = \frac{1}{2}M_a(\|u\|^2) - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $M_a(s) = \int_0^s m_a(t)dt$. Além disso, $I_{a,\lambda} \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e as soluções fracas de $(\widehat{P_\lambda})$ são pontos críticos de $I_{a,\lambda}$.

O lema abaixo deixa clara a estratégia para resolver o problema (P_λ).

Lema 1.1. *Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$ é tal que $I'_{a,\lambda}(u) = 0$ e $\|u\| \le s_0$. Então u é solução fraca do problema original (P_λ).*

Demonstração. O resultado segue da definição de m_a visto que, se $\|u\| < s_0$, então $m_a(\|u\|^2) = m(\|u\|^2)$. Neste caso, temos claramente $I'_\lambda(u) = 0$. □

Nas próximas seções vamos então procurar múltiplos pontos críticos de $I_{a,\lambda}$ com norma pequena.

1.2 A condição de Palais-Smale

Começamos essa seção lembrando a definição da condição de Palais-Smale. Seja então $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, que denotaremos simplesmente por $(PS)_c$, se toda sequência $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c, \qquad \lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0,$$

possui subsequência convergente. Uma sequência com as propriedades acima será chamada de sequência de $(PS)_c$.

Lema 1.2. *Suponha que m e f satisfaçam (m_0) e $(f_0) - (f_2)$, respectivamente. Se (u_n) é uma sequência de $(PS)_c$ para $I_{a,\lambda}$, então (u_n) é limitada.*

Demonstração. A condição (m_0) e a definição de m_a implica que

$$M_a(s) \geq m(0)s \ \text{ e } \ m_a(s) \leq a,$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Portanto, podemos usar (f_2) para obter

$$c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\| = I_{a,\lambda}(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \geq \left(\frac{m(0)}{2} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_n\|^2,$$

onde $o_n(1)$ se aproxima de zero quando $n \to \infty$. Por (1.1), o termo dentro dos parênteses acima é positivo e concluímos o desejado. $\square$

Antes de enunciar nosso próximo resultado vamos considerar $C(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções contínuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, que é um espaço de Banach quando munido da norma $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. Denotamos por $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ o espaço dual de $C(\overline{\Omega})$, que é comumente chamado de espaço das medidas de Radon.

De uma maneira geral, o espaço $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é maior do que $L^1(\Omega)$. Contudo, este último pode ser visto como um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ através da seguinte construção: dada $g \in L^1(\Omega)$, defina a aplicação $Tg : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ por

$$(Tg)(u) = \int_\Omega (gu)dx, \quad \forall u \in C(\overline{\Omega}).$$

Claramente, Tg é linear e $|(Tg)(u)| \leq \|u\|_{C(\overline{\Omega})}\|g\|_{L^1(\Omega)}$. Portanto $Tg \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Além disso, pode-se mostrar que (cf. [7, pg. 116])

$$\|Tg\|_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} = \sup_{u\in C(\overline{\Omega}), \|u\|\leq 1} \int_\Omega (gu)dx = \|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Variando agora $g \in L^1(\Omega)$ construímos uma isometria linear T entre $L^1(\Omega)$ e $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Assim, podemos identificar $L^1(\Omega)$ com um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Como $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é um subespaço do espaço separável $C(\overline{\Omega})$, ele tem algumas propriedades de compacidade na topologia fraca*. Em particular, se $(g_n) \subset L^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, então existe uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ tal que, a menos de subsequência, $g_n \rightharpoonup \mu$ na topologia fraca* $\sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$, isto é,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega g_n \varphi = \langle \mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C(\overline{\Omega}). \tag{1.2}$$

Denotando por S a melhor constante da imersão $H \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, isto é,

$$S := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{(\int_\Omega |u|^{2^*})^{2/2^*}},$$

e usando a notação introduzida acima podemos enunciar um resultado clássico de concentração-compacidade provado por Lions [27, Lemma 1.1].

Lema 1.3. *Suponha que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é tal que*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \textit{fracamente em } H_0^1(\Omega), \\ |\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \zeta, & \textit{na topologia fraca}^\star\ \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})), \\ |u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu, & \textit{na topologia fraca}^\star\ \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})), \end{cases}$$

onde ζ, $\nu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ são medidas não negativas e limitadas em $\overline{\Omega}$. Então existe um conjunto de índices enumerável J, que pode ser vazio, e uma família $\{x_j\ ,\ j \in J\}$ de pontos em $\overline{\Omega}$ tais que

(a) $\nu = |u|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu_j > 0;$

(b) $\zeta \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_{j \in J} \zeta_j \delta_{x_j}, \quad \zeta_j > 0.$

Além disso,

$$S \nu_j^{2/2^*} \leq \zeta_j, \quad \forall\, j \in J. \tag{1.3}$$

Provaremos que, para alguns tipos de sequências, o conjunto J é finito.

Lema 1.4. *Seja (u_n) como no Lemma 1.3. Suponha ainda que $I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0$, quando $n \to +\infty$. Então J é vazio ou um conjunto finito. Além disso,*

$$\nu_j \geq (m(0)S)^{N/2}, \quad \forall\, j \in J. \tag{1.4}$$

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_{1/2}(0)$ e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$. Suponha que $J \neq \varnothing$, fixe $j \in J$ e defina $\phi_\varepsilon(x) := \phi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$ onde $\varepsilon > 0$. Afirmamos que $(\phi_\varepsilon u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. De fato, usando a definição de norma e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi_\varepsilon u_n\|^2 = \int |\nabla(\phi_\varepsilon u_n)|^2 &= \int \langle \phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla \phi_\varepsilon, \phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla \phi_\varepsilon \rangle \\
&= \int \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2 + 2\phi_\varepsilon u_n \langle \nabla \phi_\varepsilon, \nabla u_n \rangle \\
&\leq \int \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2 + 2|\phi_\varepsilon||u_n||\nabla \phi_\varepsilon||\nabla u_n|.
\end{aligned}$$

A definição de ϕ_ε e a limitação de (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ nos diz que os quatro termos do lado direito da desigualdade acima são limitados, concluindo então a nossa afirmação.

Como $(\phi_\varepsilon u_n)$ é limitada e $I'_{a,\lambda}(u_n) \to 0$, temos que $I'_{a,\lambda}(u_n)(\phi_\varepsilon u_n) = o_n(1)$, e portanto

$$m(\|u_n\|^2)\left(A_{n,\varepsilon} + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \phi_\varepsilon\right) = o_n(1) + \int_\Omega |u_n|^{2^*}\phi_\varepsilon + \lambda \int_\Omega f(x,u_n)u_n\phi_\varepsilon, \quad (1.5)$$

com $A_{n,\varepsilon} = \int u_n(\nabla u_n \cdot \nabla \phi_\varepsilon)$. Usando (f_1) e (f_3) temos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x,s) \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon |s|^{q-1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto,

$$f(x,u_n)\phi_\varepsilon \leq \varepsilon|u_n|\phi_\varepsilon + C_\varepsilon|u_n|^{q-1}\phi_\varepsilon. \quad (1.6)$$

Usando as imersões compactas de $H_0^1(\Omega)$ nos espaços de Lebesgue e a recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, sabemos que

$$\begin{cases} u_n \to u, & \text{em } L^2(\Omega), \\ u_n(x) \to u(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |u_n(x)| \leq \min\{g_1(x), g_{q-1}(x)\}, & \text{q.t.p. em } \in \Omega, \end{cases}$$

com $g_1 \in L^1(\Omega)$ e $g_{q-1} \in L^{q-1}(\Omega)$. Substituindo em (1.6) obtemos

$$f(x,u_n)\phi_\varepsilon \leq \varepsilon|g_1(x)|\phi_\varepsilon + C_\varepsilon|g_{q-1}(x)|^{q-1}\phi_\varepsilon \in L^1(\Omega),$$

implicando pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x,u_n)u_n\phi_\varepsilon = \int_\Omega f(x,u)u\phi_\varepsilon.$$

Como (m_0) implica que $m(t) \geq \alpha_0 > 0$ para qualquer $t \geq 0$, temos de (1.5) e do Lema 1.3 que

$$\alpha_0 \left(\limsup_{n \to +\infty} A_{n,\varepsilon} + \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon d\zeta \right) \leq \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon d\nu + \lambda \int_{\Omega} f(x,u)u\phi_\varepsilon.$$

Afirmamos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} A_{n,\varepsilon} = 0. \tag{1.7}$$

Assumindo a afirmação, podemos tomar $\varepsilon \to 0$, e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter $\alpha_0 \zeta_j \leq \nu_j$. Lembrando que $S\nu_j^{2/2^*} \leq \zeta_j$, obtemos

$$m(0)S\nu_j^{2/2^*} \leq m(0)\zeta_j \leq \alpha_0 \zeta_j \leq \nu_j,$$

e portanto $\nu_j \geq (m(0)S)^{N/2}$. Deste modo,

$$\nu(\overline{\Omega}) \geq \sum_{j \in J} \nu_j \geq \sum_{j \in J} (m(0)S)^{N/2}. \tag{1.8}$$

Como $\nu(\overline{\Omega}) < +\infty$, concluímos que o conjunto J é finito.

Para provar (1.7), observe que

$$\begin{aligned} |A_{n,\varepsilon}| &\leq \int_\Omega |u_n||\nabla u_n||\nabla \phi_\varepsilon| \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

portanto fazendo uma mudança de variável $y = \frac{x - x_j}{\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} |A_{n,\varepsilon}| &\leq C \left(\int_\Omega |u|^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\int_{\{|x - x_j| \leq \varepsilon\}} |u(x)|^2 \left| \nabla \phi \left(\frac{x - x_j}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \frac{C}{\varepsilon} \left(\varepsilon^N \int_{\{|y| \leq \varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2 |\nabla \phi(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &= \frac{C}{\varepsilon} \varepsilon^{\frac{N}{2}} \left(\int_{\{|y| \leq \varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2 |\nabla \phi(y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &= o\left(\varepsilon^{(N-2)/2} \right) \to 0, \end{aligned}$$

em que usamos $N > 2$ na última linha acima. $\square$

Proposição 1.5. *Suponha que f satisfaça $(f_0)-(f_2)$ e defina*

$$c^* = \min\left\{\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2^*}\right)(m(0)S)^{N/2}, \left(\frac{m(0)}{2}-\frac{a}{\theta}\right)s_0^2\right\}.$$

Então o funcional $I_{a,\lambda}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c<c^*$.

Demonstração. Seja $(u_n)\subset H_0^1(\Omega)$ tal que $I'_{a,\lambda}(u_n)\to 0$ e $I_{a,\lambda}(u_n)\to c<c^*$. Vamos começar provando que o conjunto J do Lema 1.3 é vazio. De fato, suponha por contradição que J não é vazio. Se considerarmos ϕ_ε como na prova do Lema 1.4, podemos usar o Lema 1.2, (f_2) e (1.1) para obter

$$\begin{aligned} c+o_n(1) &= I_{a,\lambda}(u_n)-\frac{1}{\theta}I'_{a,\lambda}(u_n)u_n \\ &\geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{2^*} \geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \phi_\epsilon |u_n|^{2^*}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Passando ao limite e usando (1.4), concluímos que

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2^*}\right)\nu_j \geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2^*}\right)(m(0)S)^{\frac{N}{2}},$$

contradizendo $c<c^*$.

Como J é vazio, temos que $|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^*}dx$ na topologia fraca* $\sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$, e segue então de (1.2) que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx = \int_\Omega |u|^{2^*}dx,$$

onde $u\in H_0^1$ é o limite fraco de (u_n) em $H_0^1(\Omega)$. Relembrando que $I'_{a,\lambda}(u_n)u_n = o_n(1)$, podemos usar (f_1) para obter

$$\lim_{n\to\infty} m_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \lambda\int_\Omega f(x,u)u + \int_\Omega u^{2^*}. \tag{1.10}$$

Por outro lado, se definirmos

$$\alpha_0 = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|,$$

podemos usar $I'_{a,\lambda}(u_n)\to 0$ para obter

$$m_a(\alpha_0^2)\int_\Omega \nabla u\nabla\phi = \lambda\int_\Omega f(x,u)\phi + \int_\Omega u^{2^*-2}u\phi \quad \forall\phi\in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\phi=u$, obtemos juntamente com (1.10) que

$$\lim_{n\to\infty} m_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = m_a(\alpha_0^2)\|u\|^2.$$

Como m_a é continua e positiva, temos que $\alpha_0=\|u\|$, então a convergência fraca implica a convergência forte $u_n\to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e a proposição está provada. □

1.3 Prova do Teorema A

Para provar o Teorema A usaremos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha simétrico.

Teorema 1.6. *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Banach com $\dim V < \infty$. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional par satisfazendo $I(0) = 0$ e*

(I_1) *existem $\rho,\ \alpha > 0$ tais que*

$$\inf_{u \in \partial B_\rho(0) \cap W} I(u) \geq \alpha$$

(I_2) *existe um subespaço $\widehat{V} \subset E$ com $\dim V < \dim \widehat{V} < \infty$ tal que, para algum $M > 0$*

$$\max_{u \in \widehat{V}} I(u) \leq M;$$

(I_3) *considerando $M > 0$ dado por (I_2), I satisfaz a condição de $(PS)_c$ para $c \in (0, M)$.*

Então I possui pelo menos $(\dim \widehat{V} - \dim V)$ pares de pontos críticos não triviais.

A seguir, verificaremos que o funcional $I_{a.\lambda}$ satisfaz as condições (I_1) e (I_2).

Lema 1.7. *Suponha que m e f satisfaçam (m_0), (f_0), (f_1) e (f_3), respectivamente. Então, para cada $\lambda > 0$, existem ρ_λ, $\alpha_\lambda > 0$, tal que*

$$\inf_{u \in \partial B_\rho(0)} I_{a,\lambda}(u) \geq \alpha_\lambda$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar (f_1) e (f_3) para obter $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\varepsilon}{q}|s|^q \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_{a,\lambda}(u) &\geq \frac{m(0)}{2}\|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{q}C_\varepsilon \lambda \int_\Omega |u|^q - \frac{1}{2^*}\int_\Omega u^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{2}\left(m(0) - \frac{\varepsilon}{\lambda_1(\Omega)}\right)\|u\|^2 - \lambda C_1 \|u\|^q - C_2\|u\|^{2^*}. \end{aligned}$$

onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e C_1, $C_2 > 0$ são constantes que não dependem de λ. Escolhendo $\varepsilon = \lambda_1(\Omega)m(0)/2$, obtemos

$$I_{a,\lambda}(u) \geq \left(\frac{m(0)}{4} - \lambda C_1 \|u\|^{q-2} - C_2 \|u\|^{2^*-2} \right) \|u\|^2$$

e o resultado segue da expressão acima e da desigualdade $2 < q < 2^*$. □

Proposição 1.8. *Suponha que f satisfaça $(f_0) - (f_2)$. Então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $M^* > 0$, existe $\lambda_k^* > 0$ com a seguinte propriedade: para qualquer $\lambda \geq \lambda_k^*$ podemos encontrar um subespaço $V_k^\lambda \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\dim V_k^\lambda = k$ e*

$$\sup_{u \in V_k^\lambda} I_{a,\lambda}(u) < M^*.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ e escolha $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \Omega$ e $\delta > 0$ tal que, para i, $j \in I := \{1, \dots, m\}$, $B_\delta(x_i) \subset \Omega$ e $B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_j) = \varnothing$, se $i \neq j$. Para cada $i \in I$, defina $\varphi_i^\delta(x) := \varphi((x - x_i)/\delta)$ e note que, fazendo a mudança de variável $\frac{x - x_i}{\delta} = y$, obtemos

$$A_\delta := \frac{\|\varphi_i^\delta\|^2}{\|\varphi_i^\delta\|_\theta^2} = \frac{\int |\nabla \varphi\left(\frac{x-x_i}{\delta}\right)|^2}{\left(\int |\varphi\left(\frac{x-x_i}{\delta}\right)|^\theta\right)^{\frac{2}{\theta}}} = \frac{\int \frac{\delta^N}{\delta^2} |\nabla \varphi(y)|^2}{\left(\int \delta^N |\varphi(y)|^\theta\right)^{\frac{2}{\theta}}} = \delta^{\left(N-2-\frac{2N}{\theta}\right)} \frac{\|\varphi\|^2}{\|\varphi\|_\theta^2}. \tag{1.11}$$

Como $\mathbb{R}^m$ tem dimensão finita, existe $d_1 = d_1(k, \theta)$ tal que

$$\sum_{i=1}^k |y_i|^\theta \geq d_1 \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2 \right)^{\theta/2}, \quad \forall\, (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{1.12}$$

Portanto, se definirmos

$$V_{k,\delta} := \operatorname{span}\{\varphi_1^\delta, \dots, \varphi_k^\delta\},$$

teremos que, para qualquer $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i^\delta \in V_{k,\delta}$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^\theta &= \int_{B_\delta(x_1) \cup \dots \cup B_\delta(x_k)} \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i^\delta \right|^\theta \\ &= \sum_{i=1}^k \|\alpha_i \varphi_i^\delta\|_\theta^\theta \geq d_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\alpha_i \varphi_i^\delta\|_\theta^2 \right)^{\theta/2} \\ &= c_1 \left(\sum_{i=1}^k A_\delta^{-1} \|\alpha_i \varphi_i^\delta\|^2 \right)^{\theta/2} = d_2 \delta^{-(N-2-\frac{2N}{\theta})\frac{\theta}{2}} \|u\|^\theta, \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde $d_2 = d_1\|\varphi\|^2\|\varphi\|_q^{-2}$, usamos (1.11), (1.12) e o fato dos suportes das funções φ_i^δ serem disjuntos.

Como,

$$F(x,s) \geq d_3|s|^\theta - d_2, \quad \forall\, x \in \Omega,\, s \in \mathbb{R},$$

podemos usar (1.13) para obter

$$\begin{aligned} I_{a,\lambda}(u) &\leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \lambda \textstyle\sum_{i=1}^m \displaystyle\int_{B_\delta(x_i)} F(x,u) \\ &\leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \lambda d_2 d_3 \delta^{-(N-2-\frac{2N}{\theta})\frac{\theta}{2}}\|u\|^\theta - \lambda d_2 k \delta^N \omega_N, \end{aligned} \tag{1.14}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária. Portanto, para constantes positivas $d_5 = d_5(k,\theta)$, $d_6 = d_6(k,N)$ e

$$\gamma := -\left(N - 2 - \frac{2\theta}{N}\right)\frac{\theta}{2} > 0,$$

temos

$$I_{a,\lambda(u)} \leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \lambda d_5 \delta^\gamma \|u\|^\theta + \lambda d_6 \delta^N, \quad \forall\, u \in V_{k,\delta}. \tag{1.15}$$

Como $\theta < 2^*$, temos que $\gamma < N$ e portanto podemos pegar $\gamma_0 \in (\gamma, N)$ e considerar a função

$$h_\delta(t) := \frac{a}{2}t^2 - d_5\delta^{-\gamma_0+\gamma}t^\theta + d_6\delta^{-\gamma_0+N}, \quad t > 0.$$

que atinge seu máximo em $t_\delta = \left(\frac{a}{d_5\theta}\delta^{\gamma-\gamma_0}\right)^{1/(\theta-2)}$. Isto e $\gamma_0 \in (\gamma, N)$ implica que $h_\delta(t_\delta) \to 0$ quando $\delta \to 0^+$. Portanto, existe $\delta^* = \delta^*(k,\theta,N,a) > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} h_\delta(t) < \frac{M^*}{2}, \quad \forall\, \delta \in (0, \delta^*].$$

Agora vamos tomar $\lambda_k^* := (\delta^*)^{-\gamma_0}$. Seja $\lambda \geq \lambda_k^*$ e defina o subespaço k-dimensional $V_k^\lambda := V_{k,\delta}$ para $\delta = \lambda^{-1/\gamma_0}$. Como $\delta^{-\gamma_0} = \lambda \geq \lambda_k^* = (\delta^*)^{-\gamma_0}$, obtemos $\delta \leq \delta^*$. Portanto, para qualquer $u \in V_k^\lambda$, podemos usar (3.23) e a desigualdade acima para obter

$$I_{a,\lambda(u)} \leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \delta^{-\gamma_0}d_5\delta^\gamma\|u\|^\theta + \delta^{-\gamma_0}d_6\delta^N \leq \max_{t\geq 0} h_\delta(t) < \frac{M^*}{2},$$

e temos o desejado. $\square$

Estamos prontos para apresentar a prova do Teorema A.

Demonstração. Dado $k \in \mathbb{N}$ dado, vamos aplicar o Teorema 1.6 com $W = H_0^1(\Omega)$. A condição (I_1) é uma consequência direta do Lema 1.7. Para verificar as outras condições, vamos considerar $M^* < c^*$ como na Proposição 1.5. Falta obter um subespaço de dimensão k para o qual (I_2) vale. Porém, tal condição sempre vale para o subespaço V_k^λ dado na Proposição 1.8, se tomarmos $\lambda \geq \lambda_k^*$. Como $I_{a,\lambda}(0) = 0$ e este funcional é par, as hipóteses do Teorema 1.6 são satisfeitas, ou seja, para cada $\lambda \geq \lambda_k^*$, existem k pares de soluções não nulas para o problema $(\widehat{P_\lambda})$.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma das soluções obtidas acima. Como $I_{a,\lambda}(u) \leq M^* \leq c^*$, podemos usar a definição de c^* e (f_2) para obter

$$\left(\frac{m(0)}{2} - \frac{a}{\theta}\right) s_0^2 \geq c^* \geq M^* = I_{a,\lambda}(u) - \frac{1}{\theta} I'_{a,\lambda}(u)u \geq \left(\frac{m(0)}{2} - \frac{a}{\theta}\right) \|u\|^2. \tag{1.16}$$

Como $\|u\| \leq s_0$, segue do Lema 1.1 que u é uma solução fraca do problema (P_λ). $\square$

CAPÍTULO 2

Multiplicidade de soluções para (P_μ)

Neste capítulo, estudamos a multiplicidade de soluções para o problema

$$(P_\mu) \qquad \begin{cases} -m\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = f(x,u) + \mu |u|^4 u, & \text{em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado suave, $2^* = 6$ e $\mu > 0$ é um parâmetro. Denotando $\mathbb{R}^+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$, supomos que a função m satisfaz:

(m_0) $m \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$;

(m_1) $m(t) \geq m_0 > 0$, para qualquer $t \geq 0$;

(m_2) vale

$$2M(t) \geq m(t)t, \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $M(t) = \int_0^t m(s)ds$;

(m_3) existe $a > 0$ e $b \geq 0$, tal que

$$m(t) \leq a + bt, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Com respeito à não-linearidade f vamos supor as seguintes condições:

(f_0) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é ímpar com relação a segunda variável;

(f_1) vale

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^5} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega$$

(f_2) existem $\sigma \in [0,2)$ e c_1, $c_2 \in (0,+\infty)$ tais que

$$\frac{1}{4} f(x,s)s - F(x,s) \geq -c_1 - c_2|s|^\sigma, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

onde $F(x,s) := \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$;

(f_3) existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ com medida positiva, tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^4} = +\infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega_0.$$

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P_μ) se

$$m(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi) = \int_\Omega f(x,u)\phi + \int_\Omega |u|^4 u\phi, \quad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, as soluções fracas do problema são os pontos críticos do funcional

$$I_\mu(u) := \frac{1}{2}M(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u) - \frac{\mu}{6}\int_\Omega |u|^6, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Como f é ímpar, o funcional I_μ é par e portanto também podemos esperar que sua simetria nos garanta múltiplos pontos críticos. O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema B. *Suponha que m e f satisfaçam $(m_0)-(m_3)$ e $(f_0)-(f_3)$, respectivamente. Suponha ainda que uma das condições abaixo se verifica:*

(f_4) *existem $q \in (4,6)$ e $c_3, c_4 \in (0,+\infty)$ tais que*

$$F(x,s) \leq c_3|s|^q + c_4, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R};$$

ou

(f_5) *a função*

$$a(x) := \limsup_{s\to 0} \frac{F(x,s)}{|s|^2}$$

é tal que $a^+(x) := \max\{a(x),\, 0\} \in L^\infty(\Omega)$.

Então, dado $k \in \mathbb{N}$, *existe* $\mu_k^* > 0$ *tal que o problema* (P_μ) *tem pelo menos* k *pares de soluções fracas não nulas para todo* $\mu \in (0, \mu_k^*)$.

Para a demonstração do teorema, usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria e o princípio da concentração-compacidade de Lions.

2.1 A condição de Palais-Smale

Seja $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nivel c, que denotaremos simplesmente por $(PS)_c$, se toda sequência $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c, \qquad \lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0.$$

possui subsequência convergência. Uma sequência com as propriedades acima será chamada de sequência de $(PS)_c$.

Nesta seção provamos o seguinte resultado de compacidade:

Proposição 2.1. *Suponha que* f *satisfaça* $(f_1), (f_2)$ *e uma das condições* (f_4) *ou* (f_5). *Então, dado* $M > 0$, *existe* $\mu^* = \mu^*(\Omega, M, a, c_3, c_4, \sigma) > 0$ *tal que* I_μ *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *para todo* $c < M$ *e* $\mu \in (0, \mu^*)$.

A prova será feita em alguns passos. O primeiro deles é mostrar que sequências de Palais-Smale associadas ao funcional I_μ são limitadas.

Lema 2.2. *Suponha que* f *satisfaça* $(f_1), (f_2)$ *e uma das condições* (f_4) *ou* (f_5). *Se* $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *é tal que* $I_\mu(u_n) \to c$ *e* $I_\mu'(u_n) \to 0$, *então* (u_n) *é limitada em* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $I_\mu(u_n) \to c$, $I_\mu'(u_n) \to 0$ e considere $\sigma \in [0, 2)$ dado em (f_2). Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que,

$$|s|^\sigma \le \varepsilon |s|^6 + C_\varepsilon, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Isto, (m_2) e (f_2) mostram que, para n grande, vale

$$\begin{aligned} c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\| &\geq I_\mu(u_n) - \frac{1}{4}I'_\mu(u_n)u_n \\ &\geq \frac{\mu}{12}\|u_n\|_6^6 + \int_\Omega \left(\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right) \\ &\geq \frac{\mu}{12}\|u_n\|_6^6 - c_1|\Omega| - c_2\|u_n\|_\sigma^\sigma \\ &\geq \left(\frac{\mu}{12} - \varepsilon c_2\right)\|u_n\|_6^6 - c_1 C_\varepsilon|\Omega|. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos d_1, d_2 tal que

$$\|u_n\|_6^6 \leq d_1 + d_2\|u_n\|. \tag{2.2}$$

Por outro lado, desde que $I_\mu(u_n) = c + o_n(1)$, segue de (m_1), (m_2) e (f_4) que

$$\frac{m_0}{4}\|u_n\|^2 \leq \frac{1}{2}M(\|u_n\|^2) \leq \frac{\mu}{6}\|u_n\|_6^6 + c_4|\Omega| + c_3\|u_n\|_q^q + c + o_n(1). \tag{2.3}$$

Como $2 < q < 6$, temos uma desigualdade análoga a (2.1) com q no lugar de σ. Logo segue de (2.2) que

$$\frac{m_0}{4}\|u_n\|^2 \leq d_3\|u_n\|_6^6 + d_4 \leq d_5\|u_n\| + d_6,$$

e portanto, (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Suponha agora que f satisfaz (f_5) em vez de (f_4). Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar (f_1) para obter $d_7 > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq d_7 + \varepsilon|s|^6, \quad \forall x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R}.$$

Tomando $n \to +\infty$ e lembrando que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\limsup_{|s|\to+\infty} \frac{|F(x,s)|}{|s|^6} = 0.$$

Isto e (f_5) implicam que existe um $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq C_\varepsilon|s|^6 + \left(\|a^+\|_\infty + \varepsilon\right)s^2. \tag{2.4}$$

Usando mais uma vez o fato de $I_\mu(u_n) = c + o_n(1)$, (m_1), (m_2), (m_3) e (2.4), obtemos a seguinte desigualdade análoga à (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{4}\|u_n\|^2 &\leq \frac{1}{2}M(\|u_n\|^2) = I_\mu(u_n) - \int_\Omega F(x,u_n) + \frac{\mu}{6}\int_\Omega |u_n|^6 \\ &\leq \frac{\mu}{6}\|u_n\|_6^6 + C_\varepsilon\|u_n\|_6^6 + (\|a^+\|_\infty + \varepsilon)\|u_n\|_2^2 + c + o_n(1). \end{aligned}$$

Como $2 < 6$, obtemos também uma desigualdade análoga a (2.1), com 2 no lugar de σ. Segue então de (2.2) que

$$\frac{m_0}{4}\|u_n\|^2 \leq d_8\|u_n\|_6^6 + d_9 \leq d_{10}\|u_n\| + d_{11}.$$

Portanto, (u_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$. $\square$

O próximo lema é um resultado técnico que foi provado em [37, Lema 3.1].

Lema 2.3. *Suponha que f satisfaça $(f_0) - (f_1)$ e $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Então, a menos de subsequência,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u| = 0.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, segue de (f_1) que existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x,s)s| \leq C_\varepsilon + \varepsilon|s|^6, \quad \forall x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

De acordo com as imersões de Sobolev temos então que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{em } L^2(\Omega), \\ u_n(x) \to u(x), & \text{q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

Usando isso e a continuidade de f, temos que $f(x,u_n)u_n \to f(x,u)u$ quase sempre em Ω. Por outro lado, as imersões de Sobolev também nos garantem que

$$\max\{\|u\|_6^6, \|u_n\|_6^6\} \leq C, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Dado $\delta > 0$, podemos escolher $0 < \varepsilon < \delta/(4C)$ e aplicar o Teorema de Egorov para obter um conjunto mensurável $\widehat{\Omega} \subset \Omega$, tal que $f(x,u_n)u_n \to f(x,u)u$ uniformemente em $\widehat{\Omega}$ e $|\Omega\backslash\widehat{\Omega}| < \delta/(4C_\varepsilon)$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u| \\ &\leq \int_{\widehat{\Omega}} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u| + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|, \end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando agora (2.5) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus\widehat{\Omega}} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u| &\leq \int_{\Omega\setminus\widehat{\Omega}} C_\varepsilon + \int_{\Omega\setminus\widehat{\Omega}} \varepsilon|u_n|^6 + \int_{\Omega\setminus\widehat{\Omega}} C_\varepsilon + \int_{\Omega\setminus\widehat{\Omega}} \varepsilon|u|^6 \\
&\leq C_\varepsilon \frac{\delta}{4C_\varepsilon} + C\varepsilon + C_\varepsilon \frac{\delta}{4C_\varepsilon} + C\varepsilon \\
&\leq C_\varepsilon \frac{\delta}{4C_\varepsilon} + C\frac{\delta}{4C} + C_\varepsilon \frac{\delta}{4C_\varepsilon} + C\frac{\delta}{4C} \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.7), temos

$$0 \leq \int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u| \leq \int_{\widehat{\Omega}} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u| + \delta.$$

Da convergência uniforme em $\widehat{\Omega}$, segue que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u| \leq \delta.$$

e portanto, como $\delta > 0$ foi arbitrário, concluímos o resultado desejado. $\square$

Antes de enunciar nosso próximo resultado vamos considerar $C(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções contínuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, que é um espaço de Banach quando munido da norma $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. Denotamos por $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ o espaço dual de $C(\overline{\Omega})$, que é comumente chamado de espaço das medidas de Radon.

De uma maneira geral, o espaço $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é maior do que $L^1(\Omega)$. Contudo, este último pode ser visto como um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ através da seguinte construção: dada $g \in L^1(\Omega)$, defina a aplicação $Tg : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ por

$$(Tg)(u) = \int_\Omega (gu)dx, \quad \forall u \in C(\overline{\Omega}).$$

Claramente, Tg é linear e $|(Tg)(u)| \leq \|u\|_{C(\overline{\Omega})}\|g\|_{L^1(\Omega)}$, e portanto $Tg \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Além disso, pode-se mostrar que (cf. [7, pg. 116])

$$\|Tg\|_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} = \sup_{u\in C(\overline{\Omega}),\|u\|\leq 1} \int_\Omega (gu)dx = \|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Variando agora $g \in L^1(\Omega)$ construímos uma isometria linear T entre $L^1(\Omega)$ e $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Assim, podemos identificar $L^1(\Omega)$ com um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Como $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é um subespaço do espaço separável $C(\overline{\Omega})$, ele tem algumas propriedades de compacidade na topologia fraca*. Em particular, se $(g_n) \subset L^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, então existe uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ tal que, a menos de subsequência, $g_n \rightharpoonup \mu$ na topologia fraca* $\sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \varphi = \langle \mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C(\overline{\Omega}). \tag{2.8}$$

Denotando por S a melhor constante da imersão $H \hookrightarrow L^6(\Omega)$, isto é,

$$S := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{(\int_\Omega |u|^6)^{2/6}},$$

e usando a notação introduzida acima podemos enunciar um resultado clássico de concentração-compacidade provado por Lions [27, Lemma 1.1].

Lema 2.4. *Suponha que* $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *é tal que*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \textit{fracamente em } H_0^1(\Omega), \\ |\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \zeta, & \textit{na topologia fraca}^\star\, \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})), \\ |u_n|^6 \rightharpoonup \nu & \textit{na topologia fraca}^\star\, \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})), \end{cases}$$

onde ζ, $\nu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *são medidas não negativas e limitadas em* $\overline{\Omega}$. *Então existe um conjunto de índices enumerável* J, *que pode ser vazio, e uma família* $\{x_j\ ,\ j \in J\}$ *de pontos em* $\overline{\Omega}$ *tais que*

(a) $\nu = |u|^6 dx + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \nu_j > 0;$

(b) $\zeta \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_{j \in J} \zeta_j \delta_{x_j}, \quad \zeta_j > 0.$

Além disso,

$$S\nu_j^{1/3} \leq \zeta_j, \quad \forall\, j \in J. \tag{2.9}$$

Agora podemos enunciar o lema:

Lema 2.5. *Suponha que* f *satisfaça* (f_1) *e seja* $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ *como no Lema 2.4. Se* $I'_\mu(u_n) \to 0$, *então* J *é vazio ou um conjunto finito. Além disso,*

$$\nu_j \geq \left(\frac{m_0 S}{\mu}\right)^{3/2}, \quad \forall\, j \in J. \tag{2.10}$$

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_{1/2}(0)$ e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$. Suponha que $J \neq \varnothing$, fixe $j \in J$ e defina $\phi_\varepsilon(x) := \phi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$ onde $\varepsilon > 0$. Afirmamos que $(\phi_\varepsilon u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. De fato, usando a definição de norma e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}\|\phi_\varepsilon u_n\|^2 = \int_\Omega |\nabla(\phi_\varepsilon u_n)|^2 &= \int_\Omega \langle \phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla\phi_\varepsilon, \phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla \phi_\varepsilon\rangle \\ &= \int_\Omega \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2 + 2\phi_\varepsilon u_n \langle \nabla\phi_\varepsilon, \nabla u_n\rangle \\ &\leq \int_\Omega \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2 + 2|\phi_\varepsilon||u_n||\nabla\phi_\varepsilon||\nabla u_n|.\end{aligned}$$

A definição de ϕ_ε e a limitação de (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ nos diz que os quatro termos do lado direito da desigualdade acima são limitados, concluindo então a nossa afirmação.

Como $(\phi_\varepsilon u_n)$ é limitada e $I'_\mu(u_n) \to 0$, temos que $I'_\mu(u_n)(\phi_\varepsilon u_n) = o_n(1)$, e portanto

$$m(\|u_n\|^2)\left(A_{n,\varepsilon} + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \phi_\varepsilon\right) = o_n(1) + \mu \int_\Omega |u_n|^6 \phi_\varepsilon + \int_\Omega f(x,u_n) u_n \phi_\varepsilon,$$

com $A_{n,\varepsilon} = \int u_n(\nabla u_n \cdot \nabla \phi_\varepsilon)$. Como $m(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$, o Lema 2.4 implica que

$$m_0\left(\limsup_{n\to+\infty} A_{n,\varepsilon} + \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon d\zeta\right) \leq \mu \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon d\nu + \int_\Omega f(x,u)u\phi_\varepsilon.$$

Afirmamos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon} = 0. \tag{2.11}$$

Assumindo a afirmação, podemos tomar $\varepsilon \to 0$, e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter $m_0\zeta_j \leq \mu\nu_j$. Lembrando que $S\nu_j^{1/3} \leq \zeta_j$, obtemos

$$m_0 S \nu_j^{1/3} \leq m_0 \zeta_j \leq \mu\nu_j,$$

e portanto $\nu_j \geq (m_0 S/\mu)^{3/2}$. Deste modo,

$$\nu(\overline{\Omega}) \geq \sum_{j\in J} \nu_j \geq \sum_{j \in J}\left(\frac{m_0 S}{\mu}\right)^{3/2}. \tag{2.12}$$

e concluímos que o conjunto J é finito.

Para provar (2.11), vamos calcular

$$\begin{aligned}
|A_{n,\varepsilon}| &\leq \int_\Omega |u_n||\nabla u_n||\nabla \phi_\varepsilon| \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_n|^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C\left(\int_\Omega |u_n|^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

portanto fazendo uma mudança de variável $y = \frac{x-x_j}{\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |A_{n,\varepsilon}| &\leq C\left(\int_\Omega |u|^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon}\left(\int_{\{|x-x_j|\leq\varepsilon\}} |u(x)|^2 \left|\nabla\phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{\varepsilon}\left(\varepsilon^N \int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2|\nabla\phi(y)|^2 dy\right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{N}{2}}\left(\int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2|\nabla\phi(y)|^2 dy\right)^{1/2} \\
&= o\left(\varepsilon^{(N-2)/2}\right) \to 0,
\end{aligned}$$

em que usamos $N > 2$ na última linha acima. □

Estamos prontos para provar nosso resultado de compacidade.

Prova da Proposição 2.1. Seja $(u_n) \subset H_0^1$ tal que $I'_\mu(u_n) \to 0$ e $I_\mu(u_n) \to c < M$. Pelo Lema 2.2, esta sequência é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Portanto existe $u \in H_0^1(\Omega)$ e duas medidas limitadas ν, $\zeta \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ satisfazendo todas as hipóteses do Lema 2.4.

Argumentando como no Lema 2.2 e usando a desigualdade de Hölder obtemos, para n grande,

$$\begin{aligned}
M &> I'_\mu(u_n) - \frac{1}{4}I'_\mu(u_n)u_n \\
&\geq \left(\frac{\mu}{12}\right)\int_\Omega |u_n|^6 - c_1|\Omega| - c_2\int_\Omega |u_n|^\sigma \\
&\geq d_1\int_\Omega |u_n|^6 - d_2 - d_3\left(\int_\Omega |u_n|^6\right)^{\sigma/6}
\end{aligned}$$

com $d_1 := 1/12$, $d_2 := c_1|\Omega|$ e $d_3 = c_2|\Omega|^{(6-\sigma)/6}$. Fazendo $n \to +\infty$ e relembrando que $|u_n|^6 \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentindo das medidas, obtemos

$$\mu d_1\nu(\overline{\Omega}) \leq M + d_2 + d_3\nu(\overline{\Omega})^{\sigma/6}.$$

Se $\nu(\overline{\Omega}) > 1$, podemos usar a estimativa acima para obter

$$\nu(\overline{\Omega}) \leq \nu(\overline{\Omega})^{\frac{\sigma}{6}} \left(\frac{M + d_2 + d_3}{\mu d_1} \right).$$

Como $0 \leq \sigma < 2$, existe $\widetilde{\mu} > 0$ tal que

$$\nu(\overline{\Omega}) \leq \left(\frac{M + d_2 + d_3}{\mu d_1} \right)^{6/(6-\sigma)} \leq \left(\frac{m_0 S}{\mu} \right)^{3/2}, \quad \forall\, \mu \in (0, \widetilde{\mu}). \tag{2.13}$$

Por outro lado, se $\nu(\overline{\Omega}) \leq 1$, podemos escolher $\widehat{\mu} < m_0 S$ e mostrar que $\nu(\overline{\Omega}) < (m_0 S \mu^{-1})^{3/2}$, para qualquer $\mu \in (0, \widehat{\mu})$. Definindo $\mu^* := \min\{\widetilde{\mu}, \widehat{\mu}\}$, obtemos

$$\nu(\overline{\Omega}) < \left(\frac{m_0 S}{\mu} \right)^{3/2}, \quad \forall\, \mu \in (0, \mu^*),$$

e portanto segue de (2.10) que o conjunto J dado no Lema 2.4 é vazio . Assim, $|u_n|^6 \rightharpoonup \nu = |u|^6 dx$ na topologia fraca* $\sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$, e segue então de (2.8) que

$$\int_\Omega |u_n|^6 \to \int_\Omega |u|^6.$$

Afirmamos que $\int_\Omega |u_n|^4 u_n u \to \int_\Omega |u|^6$. De fato, pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^6(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega (|u_n|^5)^{6/5} = \int_\Omega |u_n|^6 \leq d_4.$$

Além disso, $|u_n(x)|^4 u_n(x) \to |u(x)|^4 u(x)$ q.t.p em Ω, portanto

$$|u_n(x)|^4 u_n(x) \rightharpoonup |u(x)|^4 u(x), \text{ fracamente em } L^{6/5}(\Omega),$$

ou seja

$$\int_\Omega |u_n|^4 u_n \phi \to \int_\Omega |u|^4 u \phi, \quad \forall \phi \in \left(L^{6/5}(\Omega)\right)' = L^6(\Omega),$$

A afirmação segue então do fato de que $u \in L^6(\Omega)$.

Argumentando como acima podemos mostrar que $\int_\Omega f(x, u_n) u \to \int_\Omega f(x, u) u$, e portanto segue do Lema 2.3 que $\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u) \to 0$. Logo,

$$o_n(1) = I'_\mu(u_n) u_n - I'_\mu(u_n) u = m(\|u_n\|^2) \left(\|u_n\|^2 - \|u\|^2 \right) + o_n(1).$$

Segue de (m_1) que $\|u_n\| \to \|u\|$. Isto e a convergência fraca de (u_n) implicam que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, o que finaliza a demonstração. $\square$

2.2 Prova do Teorema B

Para provar o Teorema B usaremos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha com Simetria.

Teorema 2.6. *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Banach com $\dim V < \infty$. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional par satisfazendo $I(0) = 0$ e*

(I_1) *existem $\rho,\ \alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{u \in \partial B_\rho(0) \cap W} I(u) \geq \alpha$$

(I_2) *existe um subespaço $\widehat{V} \subset E$ com $\dim V < \dim \widehat{V} < \infty$ tal que, para algum $M > 0$*

$$\max_{u \in \widehat{V}} I(u) \leq M;$$

(I_3) *considerando $M > 0$ dado por (I_2), I satisfaz a condição de $(PS)_c$ para $c \in (0, M)$.*

Então I possui pelo menos $(\dim \widehat{V} - \dim V)$ pares de pontos críticos não triviais.

Vamos considerar $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ as autofunções de $\sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ normalizadas. Para qualquer $m \in \mathbb{N}$, defina

$$V_m := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$$

e note que $H_0^1(\Omega) = V_m \oplus V_m^\perp$. O resultado abaixo foi provado em [37, Lema 3.1]

Lema 2.7. *Dado $2 \leq r < 6$ e $\delta > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq m_0$*

$$\int_\Omega |u|^r \leq \delta \|u\|^r, \quad \forall\, u \in V_m^\perp. \tag{2.14}$$

Demonstração. Vamos primeiro considerar $r = 2$. Argumentando por contradição, suponha que existe um $\delta > 0$ e $u_m \in V_m^\perp$, para todo $m \in \mathbb{N}$, tal que $\|u_m\|_2^2 > \delta \|u_m\|^2$. Tomando $v_m = u_m / \|u_m\|_2$, temos que $\|v_m\|_2 = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\|v_m\|^2 < 1/\delta$ Como $(v_m) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_m \rightharpoonup v$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, de modo que $v \in V_m^\perp$, para todo

$m \in \mathbb{N}$, isto é $v = 0$. Por outro lado, pela imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $\|v\| = 1$, gerando uma contradição.

Suponha agora que $2 < r < 6$ e considere $\theta \in (0,1)$ tal que

$$r = (1-\theta)2 + \theta 6.$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $(1/(1-\theta))$ e $1/\theta$, juntamente com a imersão de H em $L^6(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega |u|^r = \int_\Omega |u|^{(1-\theta)2}|u|^{\theta 6} \leq \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{1-\theta}\left(\int_\Omega |u|^6\right)^{\theta} \leq C\|u\|_2^{(1-\theta)2}\|u\|^{\theta 6}.$$

Aplicando o caso inicial com $\widetilde{\delta} = (\delta/C)^{1/(1-\theta)}$, obtemos

$$\|u\|_r^r \leq C\left[\left(\frac{\delta}{C}\right)^{1/(1-\theta)}\|u\|^2\right]^{1-\theta}\|u\|^{\theta 6} = \delta\|u\|^{(1-\theta)2+\theta 6} = \delta\|u\|^r,$$

concluindo a demonstração. □

Continuando a demonstração, estamos interessados em mostrar que nosso funcional satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha com Simetria. Vamos mostrar primeiro que I_μ satisfaz a condição (I_1).

Lema 2.8. *Suponha que f satisfaça (f_4) ou (f_5). Então existem*

$$\overline{\mu} = \overline{\mu}(a,b,\Omega,c_3,c_4) > 0,$$

$m \in \mathbb{N}$ e ρ, $\alpha > 0$ tal que, para qualquer $\mu \in (0,\overline{\mu})$, vale

$$I_\mu(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in \partial B_\rho(0) \cap V_m^\perp.$$

Demonstração. Primeiramente suponha que (f_4) vale. Então podemos aplicar a desigualdade (2.14) com $r = q$ e $\delta > 0$ (a ser escolhido posteriormente) para obter

$$\begin{aligned}
I_\mu(u) &\geq \frac{1}{4}m(\|u\|^2)\|u\|^2 - \int F(x,u) - \frac{\mu}{6}\int |u|^6 \\
&\geq \frac{m_0}{4}\|u\|^2 - \int F(x,u) - \frac{\mu}{6}\int |u|^6 \\
&\geq \frac{m_0}{4}\|u\|^2 - \left(c_3\int |u|^q + c_4\right) - \frac{\mu}{6}\int |u|^6 \\
&\geq \frac{m_0}{4}\|u\|^2 - c_3\|u\|_q^q - c_4|\Omega| - \frac{\mu}{6}\|u\|_6^6 \\
&\geq \frac{m_0}{4}\|u\|^2 - \delta c_3\|u\|^q - c_4|\Omega - c_5\frac{\mu}{6}\|u\|^6 \\
&\geq \|u\|^2\left(\frac{m_0}{4} - \delta c_3\|u\|^{q-2}\right) - c_4|\Omega| - c_5\frac{\mu}{6}\|u\|^6,
\end{aligned}$$

para todo $u \in V_m^{\perp}$, onde usamos (m_2), (m_1) e (f_4). Se $\rho = \rho(\delta) > 0$ é tal que $\delta c_3 \rho^{q-2} = m_0/8$, obtemos

$$I_\mu(u) \geq \frac{m_0}{8}\rho^2 - c_4|\Omega| - c_5\frac{\mu}{6}\rho^6, \quad \forall\, u \in \partial B_\rho(0) \cap V_m^{\perp}.$$

Como $\rho(\delta) \to +\infty$, quando $\delta \to 0^+$, podemos tomar $\delta > 0$ pequeno, de maneira que

$$\frac{m_0}{8}\rho^2 - c_4|\Omega| > \frac{m_0}{16}\rho^2,$$

para obter $\overline{\mu} > 0$ tal que,

$$I_\mu(u) \geq \frac{m_0}{8}\rho^2 - c_4|\Omega| - c_5\frac{\overline{\mu}}{6}\rho^6 \geq \frac{m_0}{16}\rho^2 - c_5\frac{\overline{\mu}}{6}\rho^6$$

e portanto

$$I_\mu(u) \geq \left(\frac{m_0}{16} - c_5\frac{\overline{\mu}}{6}\rho^4\right)\rho^2, \quad \forall\, u \in \partial B_\rho(0) \cap V_m^{\perp}.$$

A conclusão segue facilmente da desigualdade acima.

Se (f_5) vale, tomamos $\varepsilon > 0$ e usamos (m_2), (m_1) e (2.4) para obter

$$I_\mu(u) \geq \frac{m_0}{4}\|u\|^2 - \frac{(\mu + 6C_\varepsilon)}{6S^3}\|u\|^6 - (\|a^+\|_\infty + \varepsilon)\|u\|_2^2,$$

para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$. Escolhendo $r = 2$ e $\delta = m_0(8(\|a^+\|_\infty + \varepsilon))^{-1}$ em (2.14), obtemos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_\mu(u) \geq \left(\frac{m_0}{8} - \frac{(\mu + 6C_\varepsilon)}{6S^3}\rho^4\right)\rho^2, \quad \forall\, u \in \partial B_\rho(0) \cap V_m^{\perp}.$$

O lema segue da desigualdade acima e do mesmo argumento usado no primeiro caso. □

A condição de superlinearidade (f_3) vai nos garantir (I_2), como se pode ver do próximo lema.

Lema 2.9. *Suponha que f satisfaça (f_0) e (f_3). Então, para qualquer $l \in \mathbb{N}$, existe um subespaço $\widehat{V} \subset H_0^1(\Omega)$ de dimensão l e uma constante $M > 0$ tal que*

$$\sup_{u \in \widehat{V}} I(u) \leq M, \quad \forall\, \mu > 0.$$

Demonstração. Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ dado pela condição (f_3) e considere $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ as autofunções normalizadas de $\sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega_0))$. Vamos definir o subespaço

$$\widehat{V}_l := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}.$$

Como $\widehat{V}$ tem dimensão finita, existe $d_1 = d(\widehat{V}) > 0$ tal que

$$d\|u\|^4 \leq \int_\Omega |u|_4^4, \quad \forall\, u \in \widehat{V}. \tag{2.15}$$

Dado $\varepsilon > b/(4d_1)$, segue de (f_3) e da continuidade de F que, para algum $d_2 = d_2(d_1, b)$,

$$F(x,s) \geq \varepsilon|s|^4 - d_2, \quad \forall\, x \in \Omega_0,\ s \in \mathbb{R}.$$

Isto, (m_3) e (2.15) implicam que, para qualquer $u \in \widehat{V}_l$, temos

$$I_\mu(u) \leq \frac{a}{2}\|u\|^2 \left(\varepsilon d_1 - \frac{b}{4}\right)\|u\|^4 + d_2|\Omega| \leq \sup_{t>0}\left\{\frac{a}{2}t^2 + \varepsilon_0 t^4 + d_2|\Omega|\right\},$$

com $\varepsilon_0 = (\varepsilon d_1 - b/4) > 0$. Se denotarmos M o supremo acima, podemos usar $a > 0$ para concluir que $0 < M < +\infty$, finalizando a demonstração. $\square$

Observação 2.1. *No caso local $m \equiv 1$, a mesma conclusão do último lema é obtida, se trocarmos a condição (f_3) pela seguinte condição mais fraca*

$(\widehat{f_3})$ *existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ com medida positiva, tal que*

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{F(x,s)}{s^2} = +\infty, \quad \textit{uniformemente em } \Omega_0.$$

De fato, se $\widehat{d_1} > 0$ é tal que $\widehat{d_1}\|u\|^2 \leq \|u\|_2^2$, para todo $u \in \widehat{V}$, o mesmo argumento nos garante

$$I_\mu(u) \leq \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\widehat{d_1}\right)\|u\|^2 + d_2|\Omega| \leq \sup_{t>0}\left\{-\varepsilon_0 t^2 + d_2|\Omega|\right\},$$

com $\varepsilon_0 := \varepsilon\widehat{d_1} - (a/2) > 0$. Portanto, o lema vale com $M = d_2|\Omega|$.

Estamos prontos para provar o resultado principal do capítulo.

Prova do Teorema B. Seja $k \in \mathbb{N}$ fixado. Como os resultados anteriores valem para ambas as hipóteses (f_4) e (f_5), vamos apresentar a demonstração de maneira unificada.

Pelo Lema 2.8, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ grande suficiente tal que, para a decomposição $H = V \oplus W$, com

$$V := \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle, \qquad W := \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle^{\perp},$$

o funcional I_μ satisfaz (I_1) para qualquer $\mu \in (0, \overline{\mu})$. Além disso, pelo Lema 2.9, obtemos um subespaço $\widehat{V} \subset H_0^1(\Omega)$ e $M > 0$ tal que

$$\dim \widehat{V} = (k+m), \qquad \sup_{u \in \widehat{V}} I_\mu(u) \leq M, \quad \forall \mu > 0.$$

Portanto, I_μ satisfaz (I_2). Para a escolha de M acima, obtemos da Proposição 2.1 um número μ^* tal que I_μ satisfaz (I_3), para qualquer $\mu \in (0, \mu^*)$. Como $I_\mu(0) = 0$ e I_μ é par, podemos definir $\mu_k^* := \min\{\overline{\mu}, \mu^*\}$ e usar o Teorema 2.6 para concluir que, para todo $\mu \in (0, \mu_k^*)$, o funcional I_μ tem pelo menos $(k + m - m) = k$ pares de pontos críticos não nulos, o que prova o teorema. $\square$

CAPÍTULO 3

Existência e multiplicidade de soluções para (S_λ)

Neste capítulo, estudamos existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$
(S_\lambda) \qquad \begin{cases} -m\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u &= \lambda F_u(x,u,v) + \dfrac{1}{2^*}G_u(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ -l\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2\right)\Delta v &= \lambda F_v(x,u,v) + \dfrac{1}{2^*}G_v(u,v), \quad \text{em } \Omega, \\ u, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave, $\lambda > 0$ é um parâmetro e as funções m, l satisfazem

(m_0) $m \in C([0,+\infty],\mathbb{R}^+)$ é crescente;

(l_0) $l \in C([0,+\infty],\mathbb{R}^+)$ é crescente.

Na formulação do problema estamos denotando por F_u e F_v as derivadas parciais com relação à segunda e terceira variável, respectivamente, da não linearidade $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. As hipóteses em F são:

(F_0) $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$;

(F_1) existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|\nabla F(x,z)|}{|z|^{q-1}} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(F_2) existe $\theta \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 \leq \theta F(x,z) \leq \nabla F(x,z) \cdot z, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^2,$$

onde $z_1 \cdot z_2$ denota o produto interno Euclidiano de z_1, $z_2 \in \mathbb{R}^2$;

(F_3) vale o seguinte

$$\lim_{|z|\to 0} \frac{|\nabla F(x,z)|}{|z|} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(F_4) $F_u(x,0,t) = 0$, $F_v(x,s,0) = 0$, para todo $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Usando a mesma notação acima e $\mathbb{R}^2_+ = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s \geq 0,\, t \geq 0\}$, as hipóteses na função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

(G_0) $G \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é 2^*-homogênea, isto é,

$$G(\sigma s, \sigma t) = \sigma^{2^*} G(x,s), \qquad \forall\, \sigma > 0,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2;$$

(G_1) $G(s,t) > 0$, para todo $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$;

(G_2) vale uma das condições abaixo:

(a) $G_u(0,1) = 0$, $G_v(1,0) = 0$,

(b) $G_u(0,1) > 0$, $G_v(1,0) > 0$.

Daqui por diante vamos denotar por H o espaço de Hilbert $H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ munido da norma

$$\|(u,v)\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right)^{1/2}.$$

Para cada componente do vetor (u,v) acima, denotaremos ainda $\|\cdot\| = \left(\int_\Omega |\nabla \cdot|^2\right)^{1/2}$.

Por solução positiva não negativa entendemos uma solução $(u,v) \in H$ com cada uma das componentes sendo não negativa em Ω. No nosso primeiro resultado deste capítulo obtemos esse tipo de solução desde que o parâmetro λ seja grande. Mais especificamente, provamos o seguinte:

Teorema C. *Suponha que m, l, F e G satisfaçam (m_0), (l_0), $(F_0)-(F_4)$ e $(G_0)-(G_2)$, respectivamente. Então existe λ^* tal que, para todo $\lambda > \lambda^*$, o problema (S_λ) tem uma solução não nula e não negativa $(u_\lambda, v_\lambda) \in H$. Além disso, $\|(u_\lambda, v_\lambda)\| \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$.*

Para o segundo resultado deste capítulo não precisamos das hipóteses (F_4) e (G_2) mas, em contrapartida, substituímos as (F_0) e (G_0) por condições que garantam que o funcional energia associado ao problema seja par. Mais especificamente, supomos que:

$(\widehat{F_0})$ $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é par com relação a segunda variável;

$(\widehat{G_0})$ $G \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é 2^*-homogênea e par,

e provamos o seguinte resultado de multiplicidade:

Teorema D. *Suponha que m, l, F e G satisfaçam (m_0), (l_0), $(\widehat{F_0})$, $(F_1)-(F_3)$, e $(\widehat{G_0})$, (G_1), respectivamente. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_k^* > 0$ tal que o problema (S_λ) tem k pares de soluções não nulas para todo $\lambda \geq \lambda_k^*$.*

3.1 Problema auxiliar

Vamos inicialmente fazer um truncamento das funções m e l da seguinte forma: sejam $a \in m([0, +\infty])$ e $b \in l([0, +\infty])$ tais que

$$m(0) < a < \frac{\theta}{2} m(0), \quad l(0) < b < \frac{\theta}{2} l(0). \tag{3.1}$$

Como as funções m e l são crescentes, existem $s_0 > 0$, $s_1 > 0$ tais que $m(s_0) = a$ e $l(s_1) = b$. Definimos m_a, $l_a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ como abaixo:

$$m_a(s) := \begin{cases} m(s), & \text{se } 0 \leq s \leq s_0, \\ a, & \text{se } s \geq s_0, \end{cases}$$

$$l_b(s) = \begin{cases} l(s), & \text{se } 0 \leq s \leq s_1, \\ b, & \text{se } s \geq s_1. \end{cases}$$

Estudaremos então o seguinte problema

$$(\widehat{S_\lambda}) \qquad \begin{cases} -m_a(\|u\|^2)\Delta u = \lambda F_u(x,u,v) + \dfrac{1}{2^*}G_u(u,v), & \text{em } \Omega, \\ -l_b(\|v\|^2)\Delta v = \lambda F_v(x,u,v) + \dfrac{1}{2^*}G_v(u,v), & \text{em } \Omega, \\ u, v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Como estamos interessados em obter solução positiva vamos supor, sem perda de generalidade, que

$$\begin{cases} F_u(x,s,t) = 0, \forall\, x \in \Omega,\ s \leq 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ F_v(x,s,t) = 0, \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},\ t \leq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

A hipótese (F_4) implica que a suposição acima não afeta a continuidade de F_u e F_v. Além disso, usando (F_0), (F_1) e (F_3), obtemos após integração

$$|F(x,z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z|^2 + C|z|^q,\ \forall x \in \Omega\ z \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto o funcional

$$(u,v) \mapsto \int_\Omega F(x,u,v) \tag{3.3}$$

é de classe C^1 em H.

Antes de fazer um trucamento análogo para a função G vamos lembrar que, como G é 2^*-homogênea, valem as seguintes propriedades:

(i) definindo o número $M_G := \max\{G(s,t) : s,t \in \mathbb{R},\ |s|^{2^*} + |t|^{2^*} = 1\}$, para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$|G(s,t)| \leq M_G(|s|^{2^*} + |t|^{2^*}); \tag{3.4}$$

(ii) ∇G é uma função $(2^*-1)-$ homogênea e, para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, temos
$$\nabla G(s,t) \cdot (s,t) = 2^* G(s,t). \tag{3.5}$$

Vale o seguinte lema:

Lema 3.1. *Suponha que* G *satisfaça* (G_2)*. Então existe* $\widetilde{G} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$ *tal que* $\widetilde{G} \equiv G$ *em* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$*.*

Demonstração. Suponha inicialmente que o item (a) da condição (G_2) se verifica. Neste caso, definimos

$$\widetilde{G}(s,t) := G(s^+, t^+), \qquad \forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.6}$$

É suficiente provar a regularidade nos eixos $(s,0)$ e $(t,0)$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= (G_u(s,t), G_v(s,t)), && \text{para } s>0,\ t>0,\\
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= (0, G_v(0,t)), && \text{para } s<0,\ t>0,\\
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= (G_v(s,0), 0), && \text{para } s>0,\ t<0,\\
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= (0,0), && \text{para } s<0,\ t<0.
\end{aligned}$$

Fixando $t>0$, usando (3.5) e (G_2) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^-} \nabla\widetilde{G}(s,t) &= (0, G_v(0,t))\\
&= (t^{2^*-1} G_u(0,1), G_v(0,t))\\
&= (G_u(0,t), G_v((0,t))\\
&= \nabla G(0,t).
\end{aligned}$$

Isto nos diz que a função $\widetilde{G}$ é regular no semi eixo $(0,t)$ com $t \geq 0$. Também temos, para $s<0$ fixo,

$$\lim_{t\to 0^+} \nabla\widetilde{G}(s,t) = (0, G_v(0,0)) = (0,0),$$

fornecendo a regularidade no semi-eixo $(s,0)$ com $s \leq 0$, pois no terceiro quadrante $\widetilde{G} \equiv (0,0)$. Argumentando de modo análogo obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^-} \nabla\widetilde{G}(s,t) &= \nabla G(s,0), && \text{para } s>0,\\
\lim_{s\to 0^+} \nabla\widetilde{G}(s,t) &= (0,0), && \text{para } t<0,
\end{aligned}$$

concluindo então a regularidade nos dois semi-eixos restantes.

Suponha agora que o item (b) da condição (G_2) se verifica e defina

$$\widetilde{G}(s,t) := G(s^+, t^+) - \nabla G(s^+, t^+) \cdot (s^-, t^-), \qquad \forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.7}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= \nabla G(s,t), && \text{para } s>0,\ t>0,\\
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= (G_u(0,t), G_v(0,t)+(2^*-1)st^{2^*-2}G_u(0,1)), && \text{para } s<0,\ t>0,\\
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= (G_u(s,0)+(2^*-1)ts^{2^*-2}G_v(1,0), G_v(s,0)), && \text{para } s>0,\ t<0,\\
\nabla\widetilde{G}(s,t) &= (0,0), && \text{para } s<0,\ t<0.
\end{aligned}$$

Como $2^*>2$, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+}\nabla\widetilde{G}(s,t) = \nabla G(0,0) = (0,0), && \text{para } s<0,\\
&\lim_{s\to 0^-}\nabla\widetilde{G}(s,t) = \nabla G(0,t), && \text{para } t>0.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\widetilde{G}\equiv(0,0)$ no terceiro quadrante, a primeira equação mostra a regularidade no semi-eixo $(s,0)$ com $s<0$. A segunda equação mostra a regularidade no semi-eixo $(0,t)$ com $t>0$. A regularidade nos demais semi-eixos, é feita de forma análoga. □

Lema 3.2. *Suponha que G satisfaça o item (b) da condição (G_2) e seja $\widetilde{G}$ definida em (3.7). Então, $\widetilde{G}_u(s,t)\geq 0$ para $s\leq 0$, e $\widetilde{G}_v(s,t)\geq 0$, para $t\leq 0$.*

Demonstração. Se $s\leq 0$, podemos usar definição de $\widetilde{G}$ para escrever

$$\widetilde{G}(s,t) = G(0,t^+) - \nabla G(0,t^+)\cdot(-s,t^-).$$

Lembrando que ∇G é (2^*-1)-homogêneo, obtemos

$$\widetilde{G}(s,t) = \begin{cases} G(0,t)+st^{2^*-1}G_u(0,1), & \text{se } s\leq 0,\ t\geq 0,\\ G(0,0)-\nabla G(0,0)\cdot(-s,t^-), & \text{se } s\leq 0,\ t\leq 0,\end{cases}$$

de modo que podemos proceder como no lema anterior para concluir que, para $s\leq 0$, vale

$$\widetilde{G}_u(s,t) = \begin{cases} t^{2^*-1}G_u(0,1), & \text{se } t\geq 0,\\ 0, & \text{se } t\leq 0.\end{cases}$$

Como $G_u(0,1)>0$ concluímos que $\widetilde{G}_s(s,t)\geq 0$. A prova da outra desigualdade é análoga e será omitida. □

Para simplificar a notação, vamos na primeira parte deste capítulo escrever somente G para denotar a função truncada $\widetilde{G}$ dada pelo Lema 3.1.

As considerações acima mostram que o funcional $I_{a,b,\lambda} : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{a,b,\lambda}(u,v) = \frac{1}{2}M_a(\|u\|^2) + \frac{1}{2}L_b(\|v\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x,u,v) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(u,v),$$

$M_a(s) = \int_0^s m_a(t)dt$, $L_b(s) = \int_0^s l_b(t)dt$. A regularidade da aplicação definida em (3.3) e o Lema 3.1 implicam que $I_{a,b,\lambda} \in C^1(H,\mathbb{R})$. Além disso, vale o seguinte

Lema 3.3. *Se $(u,v) \in H$ é um ponto crítico do funcional $I_{a,b,\lambda}$, então (u,v) é não negativo.*

Demonstração. Se $I'_{a,b,\lambda}(u,v) = 0$, então, para todo par $(\phi,\psi) \in H$, temos que

$$\begin{aligned} 0 = I'_{a,b,\lambda}(u,v)(\phi,\psi) &= m_a(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \phi) + l_b(\|v\|^2)\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla \psi) \\ &\quad -\lambda \int_\Omega \nabla F(x,u,v)\cdot(\phi,\psi) - J'(u,v)(\phi,\psi), \end{aligned}$$

em que

$$J(u,v) = \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(u,v).$$

Observe agora que,por (3.2),

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla F(x,u,v)\cdot(u^-,0) &= \int_\Omega F_u(x,u,v)u^- \\ &= \int_{\{u\geq 0\}} F_u(x,u,v)u^- + \int_{\{u<0\}} F_u(x,u,v)u^- = 0. \end{aligned}$$

No caso em que a extensão de G foi dada por (3.6) temos que

$$J'(u,v)(u^-,0) = \frac{1}{2^*}\int_\Omega G_u(u^+,v^+)u^- = \frac{1}{2^*}\int_{\{u\leq 0\}} G_u(0,v^+)u^- = 0,$$

visto que $G_u(0,1) = 0$. Para o caso em que a extensão foi dada por (3.7) procedemos como acima e usamos o Lema 3.2 para obter

$$J'(u,v)(u^-,0) = \frac{1}{2^*}\int_{\{u\leq 0\}} \widetilde{G}_u(u,v)u^- \geq 0.$$

Portanto, em qualquer um dos casos, $J'(u,v)(u^-,0) \geq 0$.

As considerações acima, juntamente com $I'_{a,b,\lambda}(u,v)(u^-,0) = 0$, nos permite concluir que

$$0 \leq -m_a(\|u\|^2) \int_\Omega |\nabla u^-|^2,$$

o que implica que $u \geq 0$ q.t.p. em Ω. Um raciocínio análogo e a igualdade $I'_{a,b,\lambda}(u,v)(0,v^-) = 0$ implicam que $v \geq 0$ q.t.p. em Ω. □

De acordo com o resultado acima, encontrar soluções não negativas para o problema modificado $(\widehat{S_\lambda})$ é equivalente o obter pontos críticos para $I_{a,b,\lambda}$.

O lema abaixo deixa clara a estratégia para resolver o problema (S_λ):

Lema 3.4. *Suponha que $(u,v) \in H$ é tal que $I'_{a,b,\lambda}(u,v) = 0$, $\|u\| \leq s_0$ e $\|v\| \leq s_1$. Então (u,v) é uma solução do problema original (S_λ).*

Demonstração. O resultado segue das considerações acima e da definição de m_a e l_a visto que, se $\|u\| \leq s_0$ e $\|v\| \leq s_1$, então $m_a(\|u\|^2) = m(\|u\|^2)$ e $l_b(\|v\|^2) = l(\|u\|^2)$. Neste caso, temos claramente $(u,v) \in H$ é solução (positiva) de (S_λ). □

3.2 A condição de Palais-Smale

Começamos essa seção lembrando a definição da condiçao de Palais-Smale: seja $I \in C(H,\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, que denotaremos simplesmente por $(PS)_c$, se toda sequência $(z_n) \subset H$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} I(z_n) = c, \qquad \lim_{n\to+\infty} I'(z_n) = 0,$$

possui subsequência convergente. Uma sequência com as propriedades acima será chamada de sequência de $(PS)_c$.

Lema 3.5. *Suponha que F e G satisfaçam $(F_0)-(F_3)$ e $(G_0)-(G_2)$, respectivamente. Se $(z_n) = (u_n,v_n) \subset H$ é uma sequência de $(PS)_c$ para $I_{a,b,\lambda}$, então (z_n) é limitada.*

Demonstração. Seja $(z_n) = (u_n,v_n) \subset H$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} I_{a,b,\lambda}(z_n) = c, \qquad \lim_{n\to+\infty} I'_{a,b,\lambda}(z_n) = 0.$$

Uma vez que

$$d + o(1)\|z_n\| + o(1) = I_{a,b,\lambda}(z_n) - \frac{1}{\theta} I'_{a,b,\lambda}(z_n)(z_n),$$

em que $o(1)$ denota uma quantidade que tende a zero quando $n \to +\infty$, temos

$$\begin{aligned} d + o(1)\|z_n\| + o(1) &= \frac{1}{2} M_a(\|u_n\|^2) + \frac{1}{2} L_b(\|v_n\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{\theta} m_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\theta} l_b(\|v_n\|^2)\|v_n\|^2 \\ &\quad - \lambda \int_\Omega \left(F(x, z_n) - \frac{1}{\theta} \nabla F(x, z_n) \cdot z_n \right) \\ &\quad - \frac{1}{2^*} \int_\Omega G(z_n) + \frac{1}{\theta} \int_\Omega \nabla G(z_n) \cdot z_n. \end{aligned}$$

A hipótese (F_2) implica que

$$\int_\Omega \left(F(x, z_n) - \frac{1}{\theta} \nabla F(x, z_n) \cdot z_n \right) \leq 0.$$

Além disso, como (3.5) implica que $\nabla G(z_n) \cdot z_n = 2^* G(z_n)$, temos

$$-\frac{1}{2^*} \int_\Omega G(z_n) + \frac{1}{2^*\theta} \int_\Omega \nabla G(z_n) \cdot z_n = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*} \right) \int_\Omega G(z_n) \geq 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} d + o(1)\|z_n\| + o(1) &\geq \frac{1}{2} M_a(\|u_n\|^2) + \frac{1}{2} L_b(\|v_n\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{\theta} m_a(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 - \frac{1}{\theta} l_b(\|v_n\|^2)\|v_n\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(m(0)\|u_n\|^2 + l(0)\|v_n\|^2) - \frac{1}{\theta} a\|u_n\|^2 - \frac{1}{\theta} b\|v_n\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} m(0) - \frac{1}{\theta} a \right) \|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{2} l(0) - \frac{1}{\theta} b \right) \|v_n\|^2. \end{aligned}$$

Como $m(0) < a < \frac{\theta}{2} m(0)$ e $l(0) < b < \frac{\theta}{2} l(0)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$d + o(1)\|z_n\| \geq C_1\|z_n\|^2 + o(1),$$

implicando a limitação de $(z_n) \in H$. □

Antes de enunciar nosso próximo resultado vamos considerar $C(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções contínuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, que é um espaço de Banach quando munido da norma $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. Denotamos por $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ o espaço dual de $C(\overline{\Omega})$, que é comumente chamado de espaço das medidas de Radon.

De uma maneira geral, o espaço $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é maior do que $L^1(\Omega)$. Contudo, este último pode ser visto como um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ através da seguinte construção: dada $g \in L^1(\Omega)$, defina a aplicação $Tg : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ por

$$(Tg)(u) = \int_\Omega (gu)dx, \quad \forall u \in C(\overline{\Omega}).$$

Claramente, Tg é linear e $|(Tg)(u)| \leq \|u\|_{C(\overline{\Omega})}\|g\|_{L^1(\Omega)}$, e portanto $Tg \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Além disso, pode-se mostrar que (cf. [7, pg. 116])

$$\|Tg\|_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} = \sup_{u\in C(\overline{\Omega}),\|u\|\leq 1} \int_\Omega (gu)dx = \|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Variando agora $g \in L^1(\Omega)$ construímos uma isometria linear T entre $L^1(\Omega)$ e $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Assim, podemos identificar $L^1(\Omega)$ com um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Como $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é um subespaço do espaço separável $C(\overline{\Omega})$, ele tem algumas propriedades de compacidade na topologia fraca*. Em particular, se $(g_n) \subset L^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, então existe uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ tal que, a menos de subsequência, $g_n \rightharpoonup \mu$ na topologia fraca* $\sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n\varphi = \langle \mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C(\overline{\Omega}). \tag{3.8}$$

Seguindo as ideias de [30], vamos introduzir a constante S_G definida por

$$S = S(G) = \inf_{(u,v)\in H\setminus\{(0,0)\}} \frac{\int_\Omega(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)}{\left(\int_\Omega G(u,v)\right)^{2/2^*}}. \tag{3.9}$$

Seguindo as mesmas ideias da prova do resultado de concentração-compacidade devido a Lions [27, Lemma 1.1], podemos provar a seguinte versão para o nosso sistema:

Lema 3.6. *Suponha que $(u_n, v_n) \subset H$ é tal que*

$$\begin{cases} (u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v), & \textit{fracamente em } H,\\ (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) \rightharpoonup \zeta, & \textit{na topologia fraca}^\star\ \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})),\\ G(u_n, v_n) \rightharpoonup \nu, & \textit{na topologia fraca}^\star\ \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})), \end{cases}$$

onde ζ, $\nu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ são medidas não negativas e limitadas em $\overline{\Omega}$. Então existe um conjunto enumerável J, que pode ser vazio, e uma familia $\{x_j; j \in J\}$ de pontos em $\overline{\Omega}$, tais que *(a)* $\nu = G(u,v)dx + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \gamma_j > 0,$

(b) $\zeta \geq (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx + \sum_{j\in J} \zeta_j \delta_{x_j}, \quad \zeta_j \geq 0.$

Além disso,

$$S\nu_j^{2/2^*} \leq \zeta_j \quad \forall j \in J.$$

Provaremos que, para alguns tipos de sequências, o conjunto J é finito.

Lema 3.7. *Seja $(z_n) \subset H$ como no Lema 3.6. Suponha que $I'_{a,b,\lambda}(z_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Então J é vazio ou um conjunto finito. Além disso,*

$$\nu_j \geq (\min\{m(0), l(0)\}S)^{N/2}, \quad \forall\, j \in J. \tag{3.10}$$

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_{1/2}(0)$ e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$. Suponha que $J \neq \varnothing$, fixe $j \in J$ e defina $\phi_\varepsilon(x) := \phi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$ onde $\varepsilon > 0$.

Afirmamos que $(\phi_\varepsilon z_n) \subset H$ é limitada. De fato, usando a definição de norma e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi_\varepsilon u_n\|^2 = \int |\nabla(\phi_\varepsilon u_n)|^2 &= \int (\phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla\phi_\varepsilon)\cdot(\phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla \phi_\varepsilon)\\
&= \int \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2 + 2\phi_\varepsilon u_n(\nabla\phi_\varepsilon\cdot\nabla u_n)\\
&\leq \int \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2 + 2|\phi_\varepsilon||u_n||\nabla\phi_\varepsilon||\nabla u_n|.
\end{aligned}$$

A definição de ϕ_ε e a limitação de (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ nos diz que os quatro termos do lado direito da desigualdade acima são limitados, concluindo então que $(\phi_e u_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Do mesmo jeito prova-se que $(\phi_e v_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, de modo que a afirmação é verdadeira.

Como $(\phi_\varepsilon z_n) \subset H$ é limitada, temos que $I'_{a,b,\lambda}(z_n)(\phi_\varepsilon z_n) = o_n(1)$, isto é,

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= m_a(\|u_n\|^2)\left(A_{n,\varepsilon}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\phi_\varepsilon\right)\\
&+ l_b(\|v_n\|^2)\left(B_{n,\varepsilon} + \int_\Omega |\nabla v_n|^2\phi_\varepsilon\right)\\
&- \int_\Omega \phi_\varepsilon G(u_n,v_n) - \lambda\int_\Omega \nabla F(x,z_n)\cdot(\phi_\varepsilon z_n).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde

$$A_{n,\varepsilon} = \int u_n(\nabla u_n \cdot \nabla \phi_\varepsilon), \quad B_{n,\varepsilon} = \int v_n(\nabla v_n \cdot \nabla \phi_\varepsilon).$$

Como F tem crescimento subcrítico, podemos usar as imersões de Sobolev juntamente com o Teorema da Convergência Dominada concluímos que

$$\int_\Omega \nabla F(x, z_n) \cdot (\phi_\varepsilon z_n) \to \int_\Omega \nabla F(x, z) \cdot (\phi_\varepsilon z),$$

em que z é o limite fraco de (z_n). Como $m(t) \geq m(0)$ e $l(t) \geq l(0)$, podemos usar (3.11) e o Lema 3.6 para obter

$$\min\{m(0), l(0)\}\left(A_{n,\varepsilon} + B_{n,\varepsilon} + \int_\Omega \phi_\varepsilon d\zeta\right) \leq \int_\Omega \phi_\varepsilon d\nu + \lambda \int_\Omega \nabla F(x, z) \cdot (\phi_\varepsilon z). \quad (3.12)$$

Afirmamos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} A_{n,\varepsilon} = 0 \text{ e } \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} B_{n,\varepsilon} = 0. \quad (3.13)$$

Assumindo a afirmação, podemos fazer $\varepsilon \to 0$ em (3.12) e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\min\{m(0), l(0)\}\zeta_j \leq \nu_j.$$

Lembrando que $S\nu_j^{2/2^*} \leq \zeta_j$, obtemos

$$\min\{m(0), l(0)\}S\nu_j^{2/2^*} \leq \min\{m(0), l(0)\}\zeta_j \leq \nu_j.$$

Portanto $\gamma_j \geq [\min\{m(0), l(0)\}S]^{\frac{N}{2}}$. Deste modo,

$$\gamma(\overline{\Omega}) \geq \sum_{j \in J} \gamma_j \geq \sum_{j \in J} \left(\min\{m(0), l(0)\}S\right)^{N/2}. \quad (3.14)$$

Como $\gamma(\overline{\Omega}) < +\infty$, concluímos que o conjunto J é finito.

Para provar (3.13), vamos calcular

$$\begin{aligned} |A_{n,\varepsilon}| &\leq \int_\Omega |u_n||\nabla u_n||\nabla \phi_\varepsilon| \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2\right)^{1/2} \\ &\leq C\left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

portanto fazendo uma mudança de variável $y = \frac{x-x_j}{\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |A_{n,\varepsilon}| &\leq C\left(\int_\Omega |u|^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon}\left(\int_{\{|x-x_j|\leq\varepsilon\}} |u(x)|^2 \left|\nabla\phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{\varepsilon}\left(\varepsilon^N \int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2 |\nabla\phi(y)|^2 dy\right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{N}{2}}\left(\int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2 |\nabla\phi(y)|^2 dy\right)^{1/2} \\
&= o\left(\varepsilon^{(N-2)/2}\right) \to 0,
\end{aligned}$$

em que usamos $N > 2$ na última linha acima. A prova para $B_{n,\varepsilon}$ é análoga. □

Proposição 3.8. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_3)$ e defina*

$$c^* = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\left(\min\{m(0), l(0)\}S\right)^{N/2}.$$

Então o funcional $I_{a,b,\lambda}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < c^*$.

Demonstração. Seja $(z_n) \subset H$ tal que $I'_{a,b,\lambda}(z_n) \to 0$ e $I_{a,b,\lambda}(z_n) \to c < c^*$. Vamos provar que o conjunto J do Lema 3.6 é vazio. De fato, suponha por contradição que J não é vazio. Se considerarmos ϕ_ε como na prova do Lema 3.7, podemos usar a limitação de (z_n), (F_2), (3.1) e (3.5) para obter

$$\begin{aligned}
c &= I_{a,b,\lambda}(z_n) - \frac{1}{\theta}I'_{a,b,\lambda}(z_n)z_n + o_n(1) \\
&\geq \left(\frac{1}{2}m(0) - \frac{1}{\theta}a\right)\|u_n\|^2 + \left(\frac{1}{2}l(0) - \frac{1}{\theta}b\right)\|v_n\|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega G(u_n, v_n) + o_n(1) \\
&\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega G(u_n, v_n) + o_n(1) \\
&\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega \phi_\varepsilon G(u_n, v_n) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Passando ao limite e usando (3.10), obtemos

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right)\left(\min\{m(0), l(0)\}S\right)^{N/2},$$

contrariando $c < c^*$. Logo J é vazio.

Como o conjunto J é vazio concluímos do Lema 3.6 que $G(u_n, v_n) \rightharpoonup \nu = G(u,v)dx$ na topologia fraca* $\sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$. Assim, podemos usar (3.8) para obter

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega G(u_n, v_n) = \int_\Omega G(u,v).$$

Da limitação de $(z_n) \subset H$ sabemos que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, \ v_n \rightharpoonup v, & \text{fracamente em } H, \\ u_n \to u, \ v_n \to v, & \text{em } L^s(\Omega), \ 2 \le s < 2^*, \\ u_n(x) \to u(x), \ v_n(x) \to v(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ \max\{|u_n(x)|, |v_n(x)|\} \le g_s(x), & \text{q.t.p em } \Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

com $g_s \in L^s(\Omega)$, $2 \le s < 2^*$. Usando (F_0), (F_1) e (F_3) obtemos

$$|\nabla F(x,s,t)| \le \varepsilon|(s,t)| + C|(s,t)|^{q-1}, \quad \forall\, x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Segue de (3.15) e do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla F(x, z_n)\cdot z_n = \int_\Omega \nabla F(x,z)\cdot z,$$

em que $z = (u,v)$. Usando então $I'_{a,b,\lambda}(z_n)z_n \to 0$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty}[m_a(\|u\|^2)\|u_n\|^2 + l_b(\|v_n\|^2)\|v_n\|^2] = \lambda\int_\Omega \nabla F(x,z)\cdot z + \int_\Omega G(u,v). \tag{3.16}$$

Por outro lado, como $I'_{a,b,\lambda}(z_n)z \to 0$, vale o seguinte

$$m_a(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + l_b(\|v_n\|^2)\int_\Omega \nabla v_n \nabla v = A_n^1 + A_n^2 + o_n(1), \tag{3.17}$$

em que

$$A_n^1 = \lambda\int_\Omega \nabla F(z_n)\cdot z, \quad A_n^2 = \frac{1}{2^*}\int_\Omega \nabla G(u_n, v_n)\cdot(u,v).$$

O Teorema da Convergência Dominada nos fornece

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla F(z_n)\cdot z = \int_\Omega \nabla F(z)\cdot z.$$

Além disso, como as derivadas parciais de G são (2^*-1)-homogêneas, segue de (3.4) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |G_u(u_n, v_n)|^{2^*/(2^*-1)} &\le M_G^{2^*/(2^*-1)}\int_\Omega \left(|u_n|^{2^*-1} + |v_n|^{2^*-1}\right)^{2^*/2^*-1} \\ &\le C_1\int_\Omega \left(|u_n|^{2^*} + |v_n|^{2^*}\right) < C_2, \end{aligned}$$

o que mostra que $(G_u(u_n,v_n))$ é limitada em $L^{2^*/(2^*-1)}(\Omega)$. A convergência q.t.p. das sequências (u_n) e (v_n) implicam então $G(u_n,v_n) \rightharpoonup G(u,v)$ fracamente em $L^{2^*/(2^*-1)}(\Omega)$. Como $u \in \left(L^{2^*/2^*-1}(\Omega)\right)' = L^{2^*}(\Omega)$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega G_u(u_n,v_n)u = \int_\Omega G_u(u,v)u.$$

Analogamente, $\int_\Omega G_v(u_n,v_n)v \to \int_\Omega G_v(u,v)v$. As considerações acima e (3.5) mostram que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \nabla G(u_n,v_n)\cdot(u,v) = \int_\Omega \nabla G(u,v)\cdot(u,v) = 2^* \int_\Omega G(u,v).$$

Logo, se definirmos

$$\alpha_0 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|, \qquad \alpha_1 = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|,$$

passando (3.17) ao limite e usando a continuidade de m_a e l_b obtemos

$$m_a(\alpha_0^2)\|u\|^2 + l_b(\alpha_1^2)\|v\|^2 = \lambda \int_\Omega \nabla F(x,z)\cdot z + \int_\Omega G(u,v).$$

Isso e (3.16) implicam que

$$m_a(\alpha_0^2)\alpha_0^2 + l_b(\alpha_1^2)\alpha_1^2 = m_a(\alpha_0^2)\|u\|^2 + l_b(\alpha_1^2)\|v\|^2.$$

Da convergência fraca de (v_n), sabemos que $\|v\|^2 \le \alpha_1^2$. Assim,

$$\begin{aligned} m_a(\alpha_0^2)\alpha_0^2 + l_b(\alpha_1^2)\alpha_1^2 &= m_a(\alpha_0^2)\|u\|^2 + l_b(\alpha_1^2)\|v\|^2 \\ &\le m_a(\alpha_0^2)\|u\|^2 + l_b(\alpha_1^2)\alpha_1^2, \end{aligned}$$

isto é

$$m_a(\alpha_0^2)\alpha_0^2 \le m_a(\alpha_0^2)\|u\|^2.$$

Como $m_a(\alpha_0^2) > 0$, isso implica que $\alpha_0^2 \le \|u\|^2 \le \alpha_0^2$, o que mostra que $\|u_n\| \to \alpha_0$. Segue da convergência fraca de (u_n) que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. De maneira análoga mostramos que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, concluindo a demonstração da proposição. $\square$

3.3 Prova do Teorema C

Começamos essa seção mostrando que o funcional $I_{a,b,\lambda}$ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 3.9. *Suponha que F satisfaça (F_0), (F_1) e (F_3). Então existem $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tais que*

$$I_{a,b,\lambda}(u,v) \geq \alpha > 0, \quad \forall (u,v) \in H \cap \partial B_\rho(0).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar (F_0), (F_1) e (F_3) para obter

$$F(x,s,t) \leq \frac{\varepsilon}{2}(|s|^2 + |t|^2) + C(|t|^q + |s|^q),\ \forall x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Isso, (m_0) e (l_0) implicam que

$$\begin{aligned} I_{a,b,\lambda}(u,v) \geq \ & \frac{1}{2}m(0)\|u\|^2 + \frac{1}{2}l(0)\|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega (|u|^2 + |v|^2) \\ & -C_1\lambda \int_\Omega (|u|^q + |v|^q) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(u,v). \end{aligned}$$

Podemos então usar as imersões de Sobolev para obter $C_2 > 0$, tal que

$$I_{a,b,\lambda}(u,v) \geq C_2\|(u,v)\|^2 - \lambda C_2\|(u,v)\|^q - \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(u,v).$$

Por outro lado, usando (3.4), obtemos

$$\int_\Omega G(u,v) \leq C_3(\|u\|^{2^*} + \|v\|^{2^*}) \leq C_4\|(u,v)\|^{2^*}. \tag{3.18}$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned} I_{a,b,\lambda}(u,v) & \geq C_2\|(u,v)\|^2 - \lambda C_2\|(u,v)\|^q - C_4\|(u,v)\|^{2^*} \\ & = \|(u,v)\|^2\left(C_2 - \lambda C_2\|(u,v)\|^{q-2} - C_4\|(u,v)\|^{2^*-2}\right). \end{aligned}$$

Como $q \in (2, 2^*)$, o resultado segue para $\rho > 0$ suficientemente pequeno. □

Lema 3.10. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_3)$. Então, para todo $\lambda > 0$, existe $e \in H$, independente de $\lambda > 0$, tal que $I_{a,b,\lambda}(e) < 0$.*

Demonstração. Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $\|u_0\| = 1$ e $u_0 \geq 0$. Temos que

$$\begin{aligned} I_{a,b,\lambda}(t(u_0,u_0)) & \leq at^2 + bt^2 - \lambda\int_\Omega F(x,tu_0,tu_0) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(tu_0,tu_0) \\ & \leq at^2 + bt^2 - \lambda\int_\Omega F(x,tu_0,tu_0) - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega G(u_0,u_0) \end{aligned}$$

Segue de (G_1) que $\int_\Omega G(u_0, u_0) > 0$. Assim, usando (F_2) obtemos

$$I_{a,b,\lambda}(t(u_0, u_0)) \leq (a+b)t^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega G(u_0, u_0) \to -\infty, \text{ quando } t \to +\infty.$$

O resultado segue para $e = t_*(u_0, u_0)$, com $t_* > 0$ suficientemente grande. $\square$

Sabendo que nosso funcional satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, podemos construir uma sequência $(z_n) \subset H$ tal que

$$I_{a,b,\lambda}(z_n) \to c, \quad I'_{a,b,\lambda}(z_n) \to 0,$$

onde

$$c = c_{a,b,\lambda} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_{a,b,\lambda}(\gamma(t)) > 0,$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) \ : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } I_{a,b,\lambda}(\gamma(1)) < 0\}.$$

No resultado abaixo estudamos o comportamento assintótico dos níveis minimax quando $\lambda \to +\infty$.

Lema 3.11. *Suponha que F satisfaz $(F_0) - (F_3)$. Então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} c_{a,b,\lambda} = 0$$

Demonstração. Seja $u_0 \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$ tal que $\|u_0\| = 1$ e $u_0 \geq 0$. Para $z_0 = (u_0, u_0)$, defina $\phi(t) := I_{a,b,\lambda}(tz_0)$, isto é,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2}M_a(\|tu_0\|^2) + \frac{1}{2}L_b(\|tu_0\|^2) - \lambda\int_\Omega F(x, tz_0) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(tu_0, tu_0) \\ &= \frac{1}{2}M_a(t^2) + \frac{1}{2}L_b(t^2) - \lambda\int_\Omega F(x, tz_0) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega G(tu_0, tu_0). \end{aligned}$$

Sabemos que $I_{a,b,\lambda}(0) = 0$ e, do Lema 3.9, que $I_{a,b,\lambda}(\rho z_0/\|z_0\|) > 0$. Por outro lado, o Lema 3.10 nos diz que, para $t > 0$ suficientemente grande, $I_{a,b,\lambda}(tz_0) < 0$. Assim, existe $t_\lambda > 0$ tal que

$$I_{a,b,\lambda}(t_\lambda z_0) = \max_{t \geq 0} I_{a,b,\lambda}(z_0).$$

Pela escolha de t_λ, devemos ter $\phi'(t_\lambda)t_\lambda = 0$, isto é,

$$m_a(t_\lambda^2)t_\lambda^2 + l_b(t_\lambda^2)t_\lambda^2 - \lambda \int_\Omega \nabla F(x, t_\lambda z_0) \cdot (t_\lambda z_0) - \int_\Omega G(t_\lambda u_0, t_\lambda u_0) = 0,$$

ou ainda

$$t_\lambda^2(m_a(t_\lambda^2) + l_b(t_\lambda^2)) = \lambda \int_\Omega \nabla F(x, t_\lambda z_0) \cdot (t_\lambda z_0) + \int_\Omega G(t_\lambda u_0, t_\lambda u_0).$$

Como $m_a(t_\lambda^2) \leq a$, $l_b(t_\lambda^2) \leq b$ e $\nabla F(x, z) \cdot z \geq 0$, temos que

$$t_\lambda^{2^*-2} \int_\Omega G(u_0, u_0) \leq a + b,$$

o que implica que (t_λ) é limitado.

Seja agora $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \to +\infty$. A limitação de (t_λ) implica que

$$\lim_{n\to\infty} t_{\lambda_n} = \beta_0 \geq 0.$$

Logo, existe um $C_1 > 0$, tal que

$$t_{\lambda_n}^2(M_a(t_{\lambda_n}^2) + L_b(t_{\lambda_n}^2)) \leq C_1.$$

Lembrando que $I'_{a,b,\lambda}(t_{\lambda_n} z_0)(t_{\lambda_n} z_0) = 0$, obtemos

$$\lambda_n \int_\Omega F_u(x, t_{\lambda_n} z_0) t_{\lambda_n} u_0 + \int_\Omega F_v(x, t_{\lambda_n} z_0) t_{\lambda_n} u_0 + t_{\lambda_n}^{2^*} \int_\Omega G(u_0, u_0) \leq C_1,$$

implicando que $t_{\lambda_n} \to 0$.

Para concluir, vamos considerar o caminho $\gamma_*(t) = te$, $t \in [0, 1]$, em que $e \in H$ foi obtido no Lema 3.10. Note que

$$0 < c_{a,b,\lambda} \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_*(t)) = I(t_\lambda z_0) \leq \frac{1}{2} M_a(t_\lambda^2) + \frac{1}{2} L_b(t_\lambda^2).$$

Fazendo $\lambda \to +\infty$ e lembrando que $t_\lambda \to 0$, concluímos que $c_{a,b,\lambda_n} \to 0$ □

Estamos prontos para provar o resultado de existência de solução para (S_λ).

Demonstração do Teorema C De acordo com o último resultado, sabemos que os níveis minimax do Teorema do Passo da Montanha satisfazem $c_{a,b,\lambda} \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$. Logo, existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$c_{a,b,\lambda} < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*}\right) [\min\{m(0), l(0)\} S]^{\frac{N}{2}}, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0.$$

Para cada $\lambda > \lambda_0$, podemos usar a Proposição 3.8 e o Teorema do Passo da Montanha para obter $z_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda) \in H$ tal que $I_{a,b,\lambda}(z_\lambda) = c_{a,b,\lambda} > 0$ e $I'_{a,b,\lambda}(z_\lambda) = 0$, isto é, z_λ é uma solução (positiva) do problema truncado $(\widehat{S_\lambda})$.

Resta mostrar que, se λ é grande então $\|u\| \leq s_0$ e $\|v\| \leq s_1$. De fato, suponha por contradição que existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \to +\infty$ e as soluções $(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})$ são tais que $\|u_{\lambda_n}\| > s_0$ ou $\|v_{\lambda_n}\| > s_1$. Usando (F_2), (3.5) e (G_1) obtemos

$$\begin{aligned}
c_{a,b,\lambda_n} &= I_{a,b,\lambda}(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n}) - \frac{1}{\theta} I'_{a,b,\lambda_n}(z_n) z_n \\
&\geq \frac{1}{2} M_a(\|u_{\lambda_n}\|^2) + \frac{1}{2} L_b(\|v_{\lambda_n}\|^2) - \frac{1}{\theta} m_a(\|u^2_{\lambda_n}\|)\|u_{\lambda_n}\|^2 - \frac{1}{\theta} l_b(\|v_{\lambda_n}\|^2)\|v_{\lambda_n}\|^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} m(0) - \frac{a}{\theta}\right) s_0^2 + \left(\frac{1}{2} l(0) + \frac{b}{\theta}\right) s_1^2 > 0,
\end{aligned}$$

o que contradiz $c_{a,b,\lambda_n} \to 0$. Logo, existe $\lambda^* > 0$ tal que, para todo $\lambda > \lambda^*$, a solução (u_λ, v_λ) obtida acima satisfaz o problema (S_λ), conforme o Lema 3.4.

O mesmo argumento acima mostra que $\|(u_{\lambda_n}, v_{\lambda_n})\| \to 0$ quando $\lambda_n \to +\infty$ e portanto o Teorema C está provado. $\square$

3.4 Prova do Teorema D

Nessa seção vamos provar o resultado de multiplicidade para o nosso sistema. Lembremos que as condições (F_0) e (G_0) são agora substituídas por

$(\widehat{F_0})$ $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é par com relação a segunda variável;

$(\widehat{G_0})$ $G \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é 2^*-homogênea e par.

Como não estamos preocupados com o sinal das soluções, as condições (F_4) e (G_2) não são necessárias aqui. De fato, para o nosso funcional, não vamos considerar a função truncada $\widetilde{G}$, isto é, vamos considerar o funcional

$$I_{a,b,\lambda}(u, v) = \frac{1}{2} M_a(\|u\|^2) + \frac{1}{2} L_b(\|v\|^2) - \lambda \int_\Omega F(x, u, v) - \frac{1}{2^*} \int_\Omega G(u, v),$$

com F satisfazendo $(\widehat{F_0})$, $(F_1) - (F_3)$ e a função G verificando somente $(\widehat{G_0})$. Note que o funcional acima pertence a $C^1(H, \mathbb{R})$ e é par.

Vamos obter pontos críticos usando a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha com Simetria.

Teorema 3.12. *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Banach com $\dim V < \infty$. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional par satisfazendo $I(0) = 0$ e*

(I_1) *existem $\rho,\ \alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{u \in \partial B_\rho(0) \cap W} I(u) \geq \alpha$$

(I_2) *existe um subespaço $\widehat{V} \subset E$ com $\dim V < \dim \widehat{V} < \infty$ tal que, para algum $M > 0$*

$$\max_{u \in \widehat{V}} I(u) \leq M;$$

(I_3) *considerando $M > 0$ dado por (I_2), I satisfaz a condição de $(PS)_c$ para $c \in (0, M)$.*

Então I possui pelo menos $(\dim \widehat{V} - \dim V)$ pares de pontos críticos não triviais.

Utilizando o mesmo argumento da Proposição 3.8 podemos provar o seguinte resultado de compacidade local:

Proposição 3.13. *Suponha que F satisfaça $(\widehat{F_0})$, $(F_1) - (F_3)$ e G satisfaça $(\widehat{G_0})$. Se*

$$c^* = \min \left\{ \mu \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2^*} \right) \left(\frac{\min\{m(0), l(0)\} S}{\mu} \right)^{N/2}, \left(\frac{m(0)}{2} - \frac{a}{\theta} \right) s_0^2, \left(\frac{l(0)}{2} - \frac{b}{\theta} \right) s_1^2 \right\},$$

então o funcional $I_{a,b,\lambda}$ satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c < c^*$.

A seguir, verificaremos que o funcional $I_{a,b,\lambda}$ satisfaz as condições (I_1) e (I_2).

Lema 3.14. *Suponha que F satisfaça $(\widehat{F_0})$, (F_1), (F_3) e G satisfaça $(\widehat{G_0})$. Então existem $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tais que*

$$I_{a,b,\lambda}(u, v) \geq \alpha > 0, \quad \forall (u, v) \in H \cap \partial B_\rho(0).$$

Demonstração. Basta argumentar como na prova do Lema 3.9. $\square$

Proposição 3.15. *Suponha que F satisfaça $(\widehat{F_0})$, (F_1), (F_3) e G satisfaça $(\widehat{G_0})$, (G_1). Então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e $M^* > 0$, existe $\lambda^* > 0$ com a seguinte propriedade: para qualquer $\lambda \geq \lambda^*$ podemos achar um subespaço $V_k^\lambda \subset H_0^1(\Omega)$ tal que* $\dim V_k^\lambda = k$ *e*

$$\sup_{z \in V_k^\lambda} I_{a,b,\lambda}(z) < M^*.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ e escolha $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \Omega$ e $\delta > 0$ tal que, para $i,\, j \in I := \{1, \ldots, m\}$, $B_\delta(x_i) \subset \Omega$ e $B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_j) = \varnothing$, se $i \neq j$. Para cada $i \in I$, defina $\varphi_i^\delta(x) := \varphi((x - x_i)/\delta)$ e note que, fazendo a mudança de variável $\frac{x-x_i}{\delta} = y$, obtemos

$$A_\delta := \frac{\|\varphi_i^\delta\|^2}{\|\varphi_i^\delta\|_\theta^2} = \frac{\int |\nabla \varphi\left(\frac{x-x_i}{\delta}\right)|^2}{\left(\int |\varphi\left(\frac{x-x_i}{\delta}\right)|^\theta\right)^{\frac{2}{\theta}}} = \frac{\int \frac{\delta^N}{\delta^2} |\nabla \varphi(y)|^2}{\left(\int \delta^N |\varphi(y)|^\theta\right)^{\frac{2}{\theta}}} = \delta^{\left(N-2-\frac{2N}{\theta}\right)} \frac{\|\varphi\|^2}{\|\varphi\|_\theta^2}. \tag{3.19}$$

Como $\mathbb{R}^m$ tem dimensão finita, existe $d_1 = d_1(k,\theta)$ tal que

$$\sum_{i=1}^k |y_i|^\theta \geq d_1 \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^2\right)^{\theta/2}, \quad \forall\, (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^k. \tag{3.20}$$

Portanto, se definirmos

$$V_{k,\delta} := \operatorname{span}\{(\varphi_1^\delta, 0), \ldots, (\varphi_k^\delta, 0)\},$$

teremos que, para qualquer $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i^\delta \in V_{k,\delta}$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^\theta &= \int_{B_\delta(x_1) \cup \cdots \cup B_\delta(x_k)} \left|\sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i^\delta\right|^\theta \\
&= \sum_{i=1}^k \|\alpha_i \varphi_i^\delta\|_\theta^\theta \geq d_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\alpha_i \varphi_i^\delta\|_\theta^2\right)^{\theta/2} \\
&= c_1 \left(\sum_{i=1}^k A_\delta^{-1} \|\alpha_i \varphi_i^\delta\|^2\right)^{\theta/2} = d_2 \delta^{-(N-2-\frac{2N}{\theta})\frac{\theta}{2}} \|u\|^\theta,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $d_2 = d_1 \|\varphi\|^2 \|\varphi\|_q^{-2}$, usamos (3.19), (3.20) e o fato dos suportes das funções φ_i^δ serem disjuntos.

Como,

$$F(x, s, 0) \geq d_3 |s|^\theta - d_4, \quad \forall\, (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

podemos usar (3.21) para obter

$$\begin{aligned} I_{a,b,\lambda}(z) &\leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \lambda \sum_{i=1}^{m} \int_{B_\delta(x_i)} F(x,u,0) \\ &\leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \lambda d_2 d_3 \delta^{-(N-2-\frac{2N}{\theta})\frac{\theta}{2}}\|u\|^\theta - \lambda d_2 k \delta^N \omega_N, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária. Portanto, para constantes positivas $d_5 = d_5(k,\theta)$, $d_6 = d_6(k,N)$ e

$$\gamma := -\left(N - 2 - \frac{2\theta}{N}\right)\frac{\theta}{2} > 0,$$

temos

$$I_{a,\lambda(u)} \leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \lambda d_5 \delta^\gamma \|u\|^\theta + \lambda d_6 \delta^N, \quad \forall\, u \in V_{k,\delta}. \tag{3.23}$$

Como $\theta < 2^*$, temos que $\gamma < N$ e portanto podemos pegar $\gamma_0 \in (\gamma, N)$ e considerar a função

$$h_\delta(t) := \frac{a}{2}t^2 - d_5\delta^{-\gamma_0+\gamma}t^\theta + d_6\delta^{-\gamma_0+N}, \quad t > 0.$$

que atinge seu maximo em $t_\delta = \left(\frac{a}{d_5\theta}\delta^{\gamma-\gamma_0}\right)^{1/(\theta-2)}$. Isto e $\gamma_0 \in (\gamma, N)$ implica que $h_\delta(t_\delta) \to 0$ quando $\delta \to 0^+$. Portanto, existe $\delta^* = \delta^*(k,\theta,N,a) > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} h_\delta(t) < \frac{M^*}{2}, \quad \forall\, \delta \in (0, \delta^*].$$

Agora vamos tomar $\lambda_k^* := (\delta^*)^{-\gamma_0}$. Seja $\lambda \geq \lambda_k^*$ e defina o subespaço k-dimensional $V_k^\lambda := V_{k,\delta}$ para $\delta = \lambda^{-1/\gamma_0}$. Como $\delta^{-\gamma_0} = \lambda \geq \lambda_k^* = (\delta^*)^{-\gamma_0}$, obtemos $\delta \leq \delta^*$. Portanto, para qualquer $u \in V_k^\lambda$, podemos usar (3.23) e a desigualdade acima para obter

$$I_{a,\lambda(u)} \leq \frac{a}{2}\|u\|^2 - \delta^{-\gamma_0}d_5\delta^\gamma\|u\|^\theta + \delta^{-\gamma_0}d_6\delta^N \leq \max_{t\geq 0} h_\delta(t) < \frac{M^*}{2},$$

e temos o desejado. □

Estamos prontos para apresentar a prova do Teorema D.

Demonstração. Dado $k \in \mathbb{N}$ dado, vamos aplicar o Teorema 3.12 com $W = H$. A condição (I_1) é uma consequência direta do Lema 3.14. Para verificar as outras condições, vamos considerar $M^* < c^*$ como na Proposição 3.8. Falta obter um subespaço de dimensão k para o qual (I_2) vale. Porém, tal condição sempre vale para o subespaço V_k^λ dado na Proposição 3.15, se tomarmos $\lambda \geq \lambda_k^*$. Como $I_{a,b,\lambda}(0) = 0$ e este funcional é par, as hipóteses do Teorema 3.12 são satisfeitas, ou seja, para cada $\lambda \geq \lambda_k^*$, existem k pares de soluções não nulas para o problema $(\widehat{S_\lambda})$.

Seja $z \in H$ uma das soluções obtidas acima. Como $I_{a,b,\lambda}(z) \leq M^* \leq c^*$, podemos usar a definição de c^*, (F_2), (3.5) e (G_1) para obter

$$\left(\frac{1}{2}m(0) - \frac{a}{\theta}\right) s_0^2 \geq c^* > M^* = I_{a,b,\lambda}(u,v) - \frac{1}{\theta} I'_{a,b,\lambda_n}(z)z \geq \left(\frac{1}{2}m(0) - \frac{a}{\theta}\right) s_0^2 \quad (3.24)$$

Ou seja, $\|u\| \leq s_0$, analogamente temos também que $\|v\| \leq s_1$, segue então do Lema 3.4 que z é uma solução fraca do problema (S_λ). $\square$

CAPÍTULO 4

Multiplicidade de soluções para o problema (S_μ)

Neste capítulo, estudamos a multiplicidade de soluções para o problema

$$(S_\mu) \qquad \begin{cases} -m\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u &= F_u(x,u,v) + \mu_1|u|^4u, \quad \text{em } \Omega,\\ -l\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2\right)\Delta v &= F_v(x,u,v) + \mu_2|v|^4v, \quad \text{em } \Omega,\\ u, v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, é um domínio limitado com fronteira suave, $2^* = 6$, $\mu_1,\ \mu_2 \geq 0$ são parâmetros.

Vamos considerar as funções m e l pertencendo ao conjunto $\mathcal{A}$ de todas as funções $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que

$(\mathcal{A}_1)$ $g \in C([\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$;

$(\mathcal{A}_2)$ $g(t) \geq g_0 > 0$, para qualquer $t \geq 0$;

$(\mathcal{A}_3)$ vale

$$2G(t) \geq g(t)t, \qquad \forall t \geq 0,$$

onde $G(t) = \int_0^t g(s)ds$.

Para a não linearidade de F, supomos que

(F_0) $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ é par com relação a segunda variável;

(F_1) vale

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|\nabla F(x,z)|}{|z|^5} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega;$$

(F_2) existem σ_1, $\sigma_2 \in [0,2)$ e c_0, c_1, $c_2 \in (0,+\infty)$ tal que

$$\frac{1}{4}\nabla F(x,s,t)\cdot(s,t) - F(x,s,t) \geq -c_0 - c_1|s|^{\sigma_1} - c_2|t|^{\sigma_2}, \quad \forall\, x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $z_1 \cdot z_2$ denota o produto interno Euclidiano de z_1, $z_2 \in \mathbb{R}^2$. Além disso, quando $\sigma_1 \neq 0$ ou $\sigma_2 \neq 0$, vamos assumir adicionalmente que

$$\begin{cases} \mu_2 \leq \mu_1, & \text{se } \sigma_1 \neq 0 \text{ e } \sigma_2 = 0; \\ \mu_2 \leq \mu_1 \leq K\mu_1, & \text{se } \sigma_1 \neq 0 \text{ e } \sigma_2 \neq 0; \\ \mu_1 \leq K\mu_2, & \text{se } \sigma_1 = 0 \text{ e } \sigma_2 \neq 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

para algum $K > 0$;

(F_3) existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ com medida positiva, tal que

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{F(x,s,0)}{|s|^4} = +\infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega_0.$$

(F_4) existem θ_1 $\theta_2 \in (4,6)$ e $c_3, c_4, c_5 \in (0,+\infty)$ tal que

$$F(x,s,t) \leq c_3|s|^{\theta_1} + c_4|t|^{\theta_2} + c_5, \quad \forall x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2;$$

Daqui por diante vamos denotar por H o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|(u,v)\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)^{1/2}.$$

Para cada componente do vetor (u,v) acima, denotaremos ainda $\|\cdot\| = \left(\int_\Omega |\nabla \cdot|^2\right)^{1/2}$.

Dizemos que $z = (u,v) \in H$ é solução fraca de $(\mathcal{S}_\lambda)$ se

$$\begin{aligned} m(\|u\|^2)\int_\Omega (\nabla u \nabla \phi) + l(\|v\|^2)\int_\Omega (\nabla v \nabla \psi) \quad &- \int_\Omega \nabla F(u,v)\cdot(\phi,\psi) \\ &- \mu_1 \int_\Omega |u|^4 u\phi - \mu_2 \int_\Omega |v|^4 v\psi \quad = 0, \end{aligned}$$

para toda $(\phi, \psi) \in H$. Assim, as soluções fracas do problema são os pontos críticos do funcional $I_{\mu_1,\mu_2} : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{\mu_1,\mu_2}(u,v) = \frac{1}{2}M(\|u\|^2) + \frac{1}{2}L(\|v\|^2) - \frac{\mu_1}{6}\|u\|_6^6 - \frac{\mu_2}{6}\|v\|_6^6 - \int_\Omega F(x,u,v),$$

onde $\|w\|_6 = \left(\int_\Omega \|w\|\right)^{1/6}$ é a $L^6(\Omega)$-norma de w. O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema E. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_4)$. Suponha ainda que m, $l \in \mathcal{A}$ e existem a, $b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$m(t) \leq a + bt, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{4.2}$$

Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\mu_k^* > 0$ tal que o problema (S_μ) tem pelo menos k pares de soluções fracas não nulas para todo μ_1, $\mu_2 \in (0, \mu_k^*)$.

Se substituímos (F_3) pelo seu análogo

$(\widehat{F_3})$ existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ com medida positiva, tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(x,0,t)}{|t|^4} = +\infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega_0.$$

obtemos a seguinte versão do resultado acima.

Teorema E'. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_2)$, $(\widehat{F_3})$ e (F_4). Suponha ainda que m, $l \in \mathcal{A}$ e existem a, $b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$l(t) \leq a + bt, \quad \forall\, t \geq 0 \tag{4.3}$$

Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\mu_k^* > 0$ tal que o problema (S_μ) tem pelo menos k pares de soluções fracas não nulas para todo μ_1, $\mu_2 \in (0, \mu_k^*)$.

Para a demonstração dos teoremas, usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria e o princípio de concentração-compacidade de Lions.

4.1 A condição de Palais-Smale

Seja $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nivel c, que denotaremos simplesmente por $(PS)_c$, se toda sequência $(z_n) \in H(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} I(z_n) = c, \qquad \lim_{n\to+\infty} I'(z_n) = 0.$$

possui subsequência convergência. Uma sequência com as propriedades acima será chamada de sequência de $(PS)_c$.

Nesta seção provamos o seguinte resultado de compacidade:

Proposição 4.1. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_2)$ e (F_4). Então, dado $M > 0$, existe um $\mu^* > 0$ tal que I_{μ_1,μ_2} satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c < M$ e μ_1, $\mu_2 \in (0, \mu^*)$.*

A prova será feita em alguns passos. O primeiro deles é mostrar que sequências de Palais-Smale associadas ao funcional I_{μ_1,μ_2} são limitadas.

Lema 4.2. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_2)$ e (F_4). Se $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset H$ é tal que $I_{\mu_1,\mu_2}(z_n) \to c$ e $I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n) \to 0$, então (z_n) é limitada em H.*

Demonstração. Seja $(z_n) \subset H$ tal que $I_{\mu_1,\mu_2}(z_n) \to c$, $I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n) \to 0$ e considere σ_1, $\sigma_2 \in [0, 2)$ dados em (F_2). Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que,

$$|s|^{\sigma_1} \le \varepsilon|s|^6 + C_\varepsilon, \quad |t|^{\sigma_2} \le \varepsilon|t|^6 + C_\varepsilon, \quad \forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.4}$$

Isto, $(\mathcal{A}_2)$ e (F_2) mostram que,

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) + o_n(1)\|z_n\| &\ge I_{\mu_1,\mu_2}(z_n) - \frac{1}{4} I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n)z_n \\
&\ge \frac{\mu_1}{12}\|u_n\|_6^6 + \frac{\mu_2}{12}\|v_n\|_6^6 + \int_\Omega \left(\frac{1}{4}\nabla F(x,z_n)z_n - F(x,z_n)\right) \\
&\ge \frac{\mu_1}{12}\|u_n\|_6^6 + \frac{\mu_2}{12}\|v_n\|_6^6 - c_0|\Omega| - c_1\|u_n\|_{\sigma_1}^{\sigma_1} - c_2\|v_n\|_{\sigma_2}^{\sigma_2} \\
&\ge \left(\frac{\mu_1}{12} - \varepsilon c_1\right)\|u_n\|_6^6 + \left(\frac{\mu_2}{12} - \varepsilon c_2\right)\|v_n\|_6^6 - c_0 C_\varepsilon|\Omega|.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos d_1, d_2 tal que

$$\|z_n\|_6^6 \le d_1 + d_2\|z_n\|. \tag{4.5}$$

Por outro lado, desde que $I_{\mu_1,\mu_2}(z_n) = c + o_n(1)$, segue de $(\mathcal{A}_1)-(\mathcal{A}_3)$ e (F_4) que

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_0}{4}\|u_n\|^2 + \frac{\alpha_1}{4}\|v_n\|^2 &\leq \frac{1}{2}M(\|u_n\|^2) + \frac{1}{2}L(\|v_n\|^2)\\ &\leq C\|z_n\|_6^6 + c_5|\Omega| + c_3\|u_n\|_{\theta_1}^{\theta_1} + c_4\|v_n\|_{\theta_2}^{\theta_2} + c + o_n(1).\end{aligned}$$

Como θ_1, $\theta_2 \in (2,6)$, temos uma desigualdade análoga a (4.4) com θ_i no lugar de σ_i. Logo, segue de (4.5) que

$$\frac{\min\{\alpha_0,\alpha_1\}}{4}\|z_n\|^2 \leq d_3\|z_n\|_6^6 + d_4 \leq d_5\|z_n\| + d_6,$$

e portanto (z_n) é limitada em H. □

O próximo resultado é uma adaptação do Lema 3.1 em [37].

Lema 4.3. *Suponha que F satisfaça $(F_0)-(F_1)$ e $(z_n) = ((u_n,v_n)) \subset H$ é tal que $z_n \rightharpoonup z = (u,v)$ fracamente em H. Então, a menos de subsequência,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u| = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |F_v(x,z_n)v_n - F_u(x,z)v = 0.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, segue de (F_1) que existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|F_u(x,s,t)s| \leq C_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}(|s|^6 + |t|^5|s|), \quad \forall\, x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Usando a desigualdade de Young com $r = 6/5$ e $r' = 6$, obtemos

$$|F_u(x,s,t)s| \leq C_\varepsilon + \varepsilon(|s|^6 + |t|^6), \quad \forall\, x \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.6}$$

De acordo com as imersões de Sobolev temos então que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u,\ v_n \rightharpoonup v, & \text{fracamente em } L^2(\Omega),\\ u_n(x) \to u(x),\ v_n(x) \to v(x), & \text{q.t.p. em } \Omega.\end{cases}$$

Usando isso e a continuidade de F_u, temos que $F_u(x,z_n)u_n \to F_u(x,z)u$ para q.t.p. em em Ω. Por outro lado, as imersões de Sobolev nos garantem que

$$\max\{\|u\|_6^6, \|u_n\|_6^6, \|v\|_6^6, \|v_n\|_6^6\} \leq C, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Dado $\delta > 0$, podemos escolher $0 < \varepsilon < \delta/(8C)$ e aplicar o Teorema de Egorov para obter um conjunto mensurável $\widehat{\Omega} \subset \Omega$, tal que $F_u(x,z_n)u_n \to F_u(x,z)u$ uniformemente em $\widehat{\Omega}$ e $|\Omega\backslash\widehat{\Omega}| < \delta/(4C_\varepsilon)$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u| \\ &\leq \int_{\widehat{\Omega}} |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u| + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u|, \end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando (4.6) e (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u| &\leq \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} C_\varepsilon + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} \varepsilon|u_n|^6 + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} C_\varepsilon + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} \varepsilon|u|^6 \\ &\quad + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} \varepsilon|v_n|^6 + \int_{\Omega\backslash\widehat{\Omega}} \varepsilon|v|^6 \\ &\leq 2C_\varepsilon|\Omega \setminus \widehat{\Omega}| + 4C\varepsilon \\ &\leq 2C_\varepsilon\frac{\delta}{4C_\varepsilon} + 4c\frac{\delta}{8C} = \delta. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.8), temos

$$0 \leq \int_\Omega |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u| \leq \int_{\widehat{\Omega}} |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u| + \delta.$$

Da convergência uniforme em $\widehat{\Omega}$, segue que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,u)u| \leq \delta.$$

e portanto, como $\delta > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |F_u(x,z_n)u_n - F_u(x,z)u| = 0.$$

O segundo limite pode ser provado de maneira análoga. $\square$

Antes de enunciar nosso próximo resultado vamos considerar $C(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções contínuas $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, que é um espaço de Banach quando munido da norma $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. Denotamos por $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ o espaço dual de $C(\overline{\Omega})$, que é comumente chamado de espaço das medidas de Radon.

De uma maneira geral, o espaço $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é maior do que $L^1(\Omega)$. Contudo, este último pode ser visto como um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ através da seguinte construção: dada $g \in L^1(\Omega)$, defina a aplicação $Tg : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ por

$$(Tg)(u) = \int_\Omega (gu)dx, \quad \forall u \in C(\overline{\Omega}).$$

Claramente, Tg é linear e $|(Tg)(u)| \leq \|u\|_{C(\overline{\Omega})}\|g\|_{L^1(\Omega)}$, e portanto $Tg \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Além disso, pode-se mostrar que (cf. [7, pg. 116])

$$\|Tg\|_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} = \sup_{u\in C(\overline{\Omega}),\|u\|\leq 1} \int_\Omega (gu)dx = \|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Variando agora $g \in L^1(\Omega)$ construímos uma isometria linear T entre $L^1(\Omega)$ e $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Assim, podemos identificar $L^1(\Omega)$ com um subespaço de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Como $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ é um subespaço do espaço separável $C(\overline{\Omega})$, ele tem algumas propriedades de compacidade na topologia fraca*. Em particular, se $(g_n) \subset L^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, então existe uma medida de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ tal que, a menos de subsequência, $g_n \rightharpoonup \mu$ na topologia fraca* $\sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega}))$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n\varphi = \langle \mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C(\overline{\Omega}). \tag{4.9}$$

Denotando por S a melhor constante da imersão $H \hookrightarrow L^6(\Omega)$, isto é,

$$S := \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{(\int_\Omega |u|^6)^{2/6}},$$

e usando a notação introduzida nos capítulos anteriores, podemos enunciar um resultado clássico de concentração-compacidade provado por Lions [27, Lemma 1.1].

Lema 4.4. *Suponha que* $(z_n) = (u_n, v_n) \subset H$ *é tal que*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & v_n \rightharpoonup v, & \textit{fracamente em } H_0^1(\Omega), \\ |\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \zeta, & |\nabla v_n|^2 \rightharpoonup \overline{\zeta}, & \textit{na topologia fraca}^\star\ \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})), \\ |u_n|^6 \rightharpoonup \nu, & |v_n|^6 \rightharpoonup \overline{\nu}, & \textit{na topologia fraca}^\star\ \sigma(\mathcal{M}(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})), \end{cases}$$

onde ζ, $\overline{\zeta}$, ν, $\overline{\nu} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *são medidas não negativas e limitadas em* $\overline{\Omega}$. *Então existem conjuntos de índices enumeráveis* J_1 *e* J_2, *que podem ser vazios, e duas famílias* $\{x_j\ ,\ j \in J_1\}$ *e* $\{y_j\ ,\ j \in J_2\}$ *de pontos em* $\overline{\Omega}$ *tais que*

(a) $\nu = |u|^6dx + \sum_{j\in J_1} \nu_j\delta_{x_j}; \quad \overline{\nu} = |v|^6dx + \sum_{j\in J_2} \overline{\nu}_j\delta_{y_j} \quad \nu_j, \overline{\nu}_j > 0;$

(b) $\zeta \geq |\nabla u|^2dx + \sum_{j\in J_1} \zeta_j\delta_{x_j}; \quad \overline{\zeta} \geq |\nabla v|^2dx + \sum_{j\in J_2} \zeta_j\delta_{y_j} \quad \zeta_j, \overline{\zeta}_j > 0.$

Além disso,

$$S\nu_j^{1/3} \leq \zeta_j, \quad \forall\, j \in J_1, \quad S\overline{\nu}_j^{1/3} \leq \overline{\zeta}_j, \quad \forall\, j \in J_2. \tag{4.10}$$

Agora podemos enunciar o lema:

Lema 4.5. *Suponha que F satisfaça (F_1) e seja $(z_n) \subset H$ como no Lema 4.4. Se $I'(z_n) \to 0$, então J_i é vazio ou um conjunto finito. Além disso,*

$$\nu_j \geq \left(\frac{\alpha_0 S}{\mu_1}\right)^{3/2}, \quad \forall\, j \in J_1; \quad \overline{\nu}_j \geq \left(\frac{\alpha_1 S}{\mu_2}\right)^{3/2}, \quad \forall\, j \in J_2. \tag{4.11}$$

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_{1/2}(0)$ e $\phi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)$. Suponha que $J_1 \neq \varnothing$, fixe $j \in J_!$ e defina $\phi_\varepsilon(x) := \phi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$ onde $\varepsilon > 0$. Afirmamos que $(\phi_\varepsilon u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. De fato, usando a definição de norma e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi_\varepsilon u_n\|^2 = \int_\Omega |\nabla(\phi_\varepsilon u_n)|^2 &= \int_\Omega \langle \phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla\phi_\varepsilon, \phi_\varepsilon \nabla u_n + u_n \nabla \phi_\varepsilon\rangle \\
&= \int_\Omega \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2 + 2\phi_\varepsilon u_n \langle \nabla\phi_\varepsilon, \nabla u_n\rangle \\
&\leq \int_\Omega \phi_\varepsilon^2 |\nabla u_n|^2 + u_n^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2 + 2|\phi_\varepsilon||u_n||\nabla\phi_\varepsilon||\nabla u_n|.
\end{aligned}$$

A definição de ϕ_ε e a limitação de (u_n) em $H_0^1(\Omega)$ nos diz que os quatro termos do lado direito da desigualdade acima são limitados, concluindo então a nossa afirmação.

Como $(\phi_\varepsilon u_n)$ é limitada e $I'_{\mu_1,\mu_2}(u_n, v_n) \to 0$, temos que $I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n)(\phi_\varepsilon u_n, 0) = o_n(1)$, e portanto

$$m(\|u_n\|^2)\left(A_{n,\varepsilon} + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \phi_\varepsilon\right) = o_n(1) + \mu_1 \int_\Omega |u_n|^6 \phi_\varepsilon + \int_\Omega F_u(x, u_n, v_n) u_n \phi_\varepsilon,$$

com $A_{n,\varepsilon} = \int u_n(\nabla u_n \cdot \nabla\phi_\varepsilon)$. Como $m(t) \geq \alpha_0$, para todo $t \geq 0$, o Lema 4.4 implica que

$$\alpha_0 \left(\limsup_{n\to+\infty} A_{n,\varepsilon} + \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon d\zeta\right) \leq \mu \int_{\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon d\nu + \int_\Omega f(x,u) u \phi_\varepsilon.$$

Afirmamos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon} = 0. \tag{4.12}$$

Assumindo a afirmação, podemos tomar $\varepsilon \to 0$, e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter $\alpha_0 \zeta_j \leq \mu\nu_j$. Lembrando que $S\nu_j^{1/3} \leq \zeta_j$, obtemos

$$\alpha_0 S \nu_j^{1/3} \leq \alpha_0 \zeta_j \leq \mu\nu_j,$$

e portanto $\nu_j \geq (\alpha_0 S/\mu)^{3/2}$. Deste modo,

$$\nu(\overline{\Omega}) \geq \sum_{j\in J} \nu_j \geq \sum_{j\in J} \left(\frac{\alpha_0 S}{\mu}\right)^{3/2}. \tag{4.13}$$

e concluímos que o conjunto J_1 é finito.

Para provar (4.12), vamos calcular

$$\begin{aligned}
|A_{n,\varepsilon}| &\leq \int_\Omega |u_n||\nabla u_n||\nabla \phi_\varepsilon| \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u_n|^2 |\nabla \phi_\varepsilon|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C\left(\int_\Omega |u_n|^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

portanto fazendo uma mudança de variável $y = \frac{x-x_j}{\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |A_{n,\varepsilon}| &\leq C\left(\int_\Omega |u|^2|\nabla\phi_\varepsilon|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon}\left(\int_{\{|x-x_j|\leq\varepsilon\}} |u(x)|^2 \left|\nabla\phi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{\varepsilon}\left(\varepsilon^N \int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2 |\nabla\phi(y)|^2 dy)\right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{N}{2}}\left(\int_{\{|y|\leq\varepsilon\}} |u(y\varepsilon + x_j)|^2 |\nabla\phi(y)|^2 dy)\right)^{1/2} \\
&= o\left(\varepsilon^{(N-2)/2}\right) \to 0,
\end{aligned}$$

em que usamos $N > 2$ na última linha acima.

A demonstração para J_2 é análoga e será omitida. □

Estamos prontos para provar nosso resultado de compacidade.

Prova da Proposição 4.1. Vamos começar supondo que $\sigma_1 \neq 0$ e $\sigma_2 \neq 0$. Dado $M > 0$, vamos fixar μ_1, $\mu_2 \in (0, \mu_0)$, onde μ_0 será escolhido mais a frente. Dado $c \leq M$, seja $(z_n) = ((u_n, v_n)) \subset H$ tal que $I_{\mu_1,\mu_2}(z_n) \to 0$ e $I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n) \to 0$, quando $n \to +\infty$. Vamos mostrar que existe uma subsequência de (z_n) que converge forte em H.

Já sabemos do Lema 4.2 que (z_n) é limitada. Além disso, a menos de subsequência, podemos assumir as hipóteses do Lema 4.4. Usando a notação deste lema definimos

$$Q_1 = \sum_{j \in J_1} \nu_j, \quad Q_2 = \sum_{j \in J_2} \overline{\nu}_j,$$

de modo que

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_6^6 = \|u\|_6^6 + Q_1, \qquad \lim_{n \to +\infty} \|v_n\|_6^6 = \|v\|_6^6 + Q_2. \tag{4.14}$$

<u>*Afirmação 1:*</u> Se μ_0 é suficientemente pequeno, então

$$Q_1 < \left(\frac{\alpha_0 S}{\mu_1}\right)^{3/2}, \quad Q_2 < \left(\frac{\alpha_1 S}{\mu_2}\right)^{3/2}.$$

De fato, de (F_2), temos que

$$I_{\mu_1,\mu_2}(z_n) - \frac{1}{4} I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n) z_n \geq \frac{\mu_1}{12}\|u_n\|_6^6 + \frac{\mu_2}{12}\|v_n\|_6^6 - c_0|\Omega| - c_1\|u_n\|_{\sigma_1}^{\sigma_1} - c_2\|v_n\|_{\sigma_2}^{\sigma_2}.$$

Passando a desigualdade acima ao limite, usando (4.14) e as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma_i}(\Omega)$ e $L^{\sigma_1}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ obtemos

$$\frac{\mu_1}{12} Q_1 + \frac{\mu_2}{12} Q_2 \leq M + c_0|\Omega| + c_1 a_1 \|u\|_6^{\sigma_1} - \frac{\mu_1}{12}\|u\|_6^6 + c_2 a_2 \|u\|_6^{\sigma_2} - \frac{\mu_2}{12}\|v\|_6^6. \tag{4.15}$$

Escolhendo $C > 0$ tal que $\dfrac{\sigma_1}{6C} = \dfrac{\mu_1}{12 a_1 c_1}$ e aplicando a desigualdade de Young com expoentes $r = 6/\sigma$ e $r' = 6/(6-\sigma)$ obtemos

$$\|u\|_6^{\sigma_1} = \frac{C}{C}\|u\|_6^{\sigma_1} \leq \frac{\sigma_1}{6C}\|u\|_6^6 + \frac{C^{r'-1}}{r'} = \frac{\mu_1}{12 a_1 c_1}\|u\|_6^6 + \frac{C_1}{(\mu_1)^{\frac{6}{6-\sigma_1}-1}}.$$

Analogamente,

$$\|v\|_6^{\sigma_2} \leq \frac{\mu_2}{12 a_2 c_2}\|v\|_6^6 + \frac{C_2}{(\mu_2)^{\frac{\sigma_2}{6-\sigma_2}}}.$$

Substituindo as expressões acima em (4.15), obtemos

$$\frac{\mu_1}{12} Q_1 + \frac{\mu_2}{12} Q_2 \leq M + c_0|\Omega| + c_1 a_1 \frac{C_1}{(\mu_1)^{\frac{\sigma_1}{6-\sigma_1}}} + c_2 a_2 \frac{C_2}{(\mu_2)^{\frac{\sigma_2}{6-\sigma_2}}}. \tag{4.16}$$

Como $\mu_2 \leq \mu_1 \leq K\mu_2$ temos que

$$Q_1 \leq \frac{A}{\mu_1} + \frac{B}{(\mu_1)^{\frac{6}{6-\sigma_1}}} + \frac{C}{(\mu_1)^{\frac{6}{6-\sigma_2}}} \quad \text{e} \quad Q_2 \leq \frac{A}{\mu_2} + \frac{B}{(\mu_2)^{\frac{6}{6-\sigma_2}}} + \frac{D}{(\mu_2)^{\frac{6}{6-\sigma_2}}},$$

onde A, B, C e D são constantes positivas independentes de μ_1 e μ_2.

Lembrando que $\sigma_i \in (0,2)$, obtemos

$$\max\left\{1, \frac{6}{6-\sigma_1}, \frac{6}{6-\sigma_2}\right\} < \frac{3}{2}.$$

Portanto, escolhendo um $\mu_0 > 0$ tal

$$A(\mu_0)^{1/2} \leq \frac{(\alpha_0 S)^{3/2}}{3},$$

vem

$$\frac{A}{\mu_1} \leq \frac{(\alpha_0 S)^{3/2}}{3(\mu_0)^{1/2}\mu_1} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_0 S}{\mu_1}\right)^{3/2}.$$

Repetindo o argumento e diminuindo o μ_0 se necessário. obtemos $Q_1 < (\alpha_0 S/\mu_1)^{3/2}$. A demontração da desigualdade $Q_2 < (\alpha_1 S/\mu_2)^{3/2}$ é análoga e portanto a afirmação fica estabelecida.

Usando a Afirmação 1 e (4.11) concluímos que os conjuntos J_1 e J_2 do Lema 4.4 são vazios, de onde se conclui que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |u_n|^6 = \int_\Omega |u|^6, \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |v_n|^6 = \int_\Omega |v|^6. \tag{4.17}$$

Afirmação 2: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |u_n|^4 u_n u = \int_\Omega |u|^6.$

De fato, pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^6(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega (|u_n|^5)^{6/5} = \int_\Omega |u_n|^6 \leq C_3.$$

Além disso, $|u_n(x)|^4 u_n(x) \to |u(x)|^4 u(x)$ q.t.p em Ω, portanto

$$|u_n(x)|^4 u_n(x) \rightharpoonup |u(x)|^4 u(x), \text{ fracamente em } L^{6/5}(\Omega),$$

ou seja

$$\int_\Omega |u_n|^4 u_n \phi \to \int_\Omega |u|^4 u\phi, \quad \forall \phi \in \left(L^{6/5}(\Omega)\right)' = L^6(\Omega),$$

A Afirmação 2 segue então do fato de que $u \in L^6(\Omega)$.

Argumentando como acima podemos mostrar que $\int_\Omega F_u(x,z_n)u \to \int_\Omega F_u(x,z)u$, portanto segue do Lema 4.3 que $\int_\Omega F_u(x,z_n)(u_n - u) \to 0$. Além disso, um argumento análogo mostra que $\int_\Omega |v_n|^4 v_n v \to \int_\Omega |v|^6$, $\int_\Omega F_v(x,z_n)v \to \int_\Omega F_v(x,z)v$ e $\int_\Omega F_v(x,z_n)(v_n - v) \to 0$.

Usando todas as convergências acima e lembrando que $I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n)(u_n,0) = o_n(1)$ e $I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n)(u,0) = o_n(1)$, podemos escrever

$$o_n(1) = I_{\mu_1,\mu_2}(z_n)(u_n,0) - I'_{\mu_1,\mu_2}(z_n)(u,0) = m(\|u_n\|^2)\left(\|u_n\|^2 - \|u\|^2\right) + o_n(1).$$

Segue de $(\mathcal{A}_1)$ que $\|u\| \to \|u\|$. Isto e a convergência fraca de (u_n) implicam que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. De forma análoga $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, concluindo a demonstração para $\sigma_1 \neq 0$ e $\sigma_2 \neq 0$.

No caso em que $\sigma_1 \neq 0$ e $\sigma_2 = 0$, a equação (4.15) se torna

$$\frac{\mu_1}{12}Q_1 + \frac{\mu_2}{12}Q_2 \leq M + c_0|\Omega| + c_1 a_1\|u\|_6^{\sigma_1} - \frac{\mu_1}{12}\|u\|_6^6, \tag{4.18}$$

e o resultado segue da mesma linha de raciocínio. Finalmente, se $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, é suficiente considerar

$$\mu_1 < \left(\frac{\alpha_0 S^{3/2}}{3M}\right)^2, \qquad \mu_2 < \left(\frac{\alpha_1 S^{3/2}}{3M}\right)^2.$$

A proposição está provada. □

4.2 Prova dos Teoremas E e E'

Para demonstrar os nossos resultados principais usaremos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha com Simetria.

Teorema 4.6. *Seja $E = V \oplus W$ um espaço de Banach com $\dim V < \infty$. Suponha que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ é um funcional par satisfazendo $I(0) = 0$ e*

(I_1) *existem $\rho,\ \alpha > 0$ tal que*

$$\inf_{u\in\partial B_\rho(0)\cap W} I(u) \geq \alpha$$

(I_2) *existe um subespaço $\widehat{V} \subset E$ com $\dim V < \dim \widehat{V} < \infty$ tal que, para algum $M > 0$*

$$\max_{u\in\widehat{V}} I(u) \leq M;$$

(I_3) *considerando* $M > 0$ *dado por* (I_2), I *satisfaz a condição de* $(PS)_c$ *para* $c \in (0, M)$.

Então I *possui pelo menos* $(\dim \widehat{V} - \dim V)$ *pares de pontos críticos não triviais.*

Considere $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ as autofunções de $\sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ normalizadas. Para qualquer $m \in \mathbb{N}$, defina

$$V_m := \text{span}\{(\varphi_1, \varphi_1), \ldots, (\varphi_m, \varphi_m)\}$$

e note que $H_0^1(\Omega) = V_m \oplus V_m^{\perp}$. O resultado abaixo foi provado em [37, Lema 3.1]

Lema 4.7. *Dado* $2 \leq r < 6$ *e* $\delta > 0$, *existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $m \geq m_0$

$$\int_\Omega |u|^r \leq \delta \|u\|^r, \quad \forall\, u \in V_m^{\perp}. \tag{4.19}$$

Demonstração. Vamos primeiro considerar $r = 2$. Argumentando por contradição, suponha que existe um $\delta > 0$ e $u_m \in V_m^{\perp}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, tal que $\|u_m\|_2^2 > \delta \|u_m\|^2$. Tomando $v_m = u_m/\|u_m\|_2$, temos que $\|v_m\|_2 = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $\|v_m\|^2 < 1/\delta$ Como $(v_m) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, podemos supor, sem perda de generalidade, que $v_m \rightharpoonup v$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, de modo que $v \in V_m^{\perp}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, isto é $v = 0$. Por outro lado, pela imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $\|v\| = 1$, gerando uma contradição.

Suponha agora que $2 < r < 6$ e considere $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$r = (1 - \theta)2 + \theta 6.$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $(1/(1 - \theta))$ e $1/\theta$, juntamente com a imersão de H em $L^6(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega |u|^r = \int_\Omega |u|^{(1-\theta)2} |u|^{\theta 6} \leq \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{1-\theta} \left(\int_\Omega |u|^6\right)^{\theta} \leq C \|u\|_2^{(1-\theta)2} \|u\|^{\theta 6}.$$

Aplicando o caso inicial com $\widetilde{\delta} = (\delta/C)^{1/(1-\theta)}$, obtemos

$$\|u\|_r^r \leq C \left[\left(\frac{\delta}{C}\right)^{1/(1-\theta)} \|u\|^2 \right]^{1-\theta} \|u\|^{\theta 6} = \delta \|u\|^{(1-\theta)2 + \theta 6} = \delta \|u\|^r,$$

concluindo a demonstração. $\square$

Continuando a demonstração, estamos interessados em mostrar que nosso funcional satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha com Simetria. Vamos mostrar primeiro que I_{μ_1,μ_2} satisfaz a condição (I_1).

Lema 4.8. *Suponha que F satisfaça $(F_0) - (F_2)$ e (F_4). Então existem $\overline{\mu} > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e ρ, $\alpha > 0$ tal que, para qualquer μ_1, $\mu_2 \in (0, \overline{\mu})$, vale*

$$I_{\mu_1,\mu_2}(z) \geq \alpha, \quad \forall z \in \partial B_\rho(0) \cap V_m^\perp.$$

Demonstração. Usando (F_4), as imersões de Sobolev e a desigualdade (4.19) com $r = \sigma_i$ e $\delta > 0$ (a ser escolhido posteriormente) obtemos

$$\begin{aligned}
I(z) &\geq \frac{1}{4}m(\|u\|^2)\|u\|^2 + \frac{1}{4}l(\|v\|^2)\|v\|^2 - \int F(x,z) - \frac{\mu_1}{6}\|u\|_6^6 - \frac{\mu_2}{6}\|u\|_6^6 \\
&\geq \frac{\alpha_0}{4}\|u\|^2 + \frac{\alpha_1}{4}\|v\|^2 - \int F(x,u) - \frac{\mu_1}{6}\|u\|_6^6 - \frac{\mu_2}{6}\|v\|_6^6 \\
&\geq \frac{\alpha_0}{4}\|u\|^2 + \frac{\alpha_1}{4}\|v\|^2 - c_3|\Omega| - c_4\|u\|_{theta_1}^{\theta_1} - c_5\|v\|_{\theta_2}^{\theta_2} - \frac{\mu_1}{6}\|u\|_6^6 - \frac{\mu_2}{6}\|v\|_6^6 \\
&\geq \frac{\alpha_0}{4}\|u\|^2 + \frac{\alpha_1}{4}\|v\|^2 - c_3|\Omega| - c_4\|u\|_{\theta_1}^{\theta_1} - c_5\|v\|_{\theta_2}^{\theta_2} - \mu_1 b_1\|u\|^6 - \mu_2 b_2\|v\|^6 \\
&\geq \frac{\alpha_0}{4}\|u\|^2 + \frac{\alpha_1}{4}\|v\|^2 - c_3|\Omega| - c_4\delta\|u\|^{\theta_1} - c_5\delta\|v\|^{\theta_2} - \mu_1 b_1\|u\|^6 - \mu_2 b_2\|v\|^6
\end{aligned}$$

para todo $z \in V_m^\perp$, portanto

$$I(z) \geq \|z\|^2(c - c_4\delta\|z\|^{\theta_1-2} - c_5\delta\|z\|^{\theta_2-2}) - c_3|\Omega| - \mu_1 b_1\|z\|^6 - \mu_2 b_2\|z\|^6,$$

Se $\rho = \rho(\delta) > 0$ é tal que $c_4\delta\rho^{\theta_1-2} + c_5\delta\rho^{\theta_2-2} = c/2$, obtemos

$$I(z) \geq \frac{c}{2}\rho^2 - c_3|\Omega| - \mu_1 b_1\rho^6 - \mu_2 b_2\rho^6, \qquad \forall z \in \partial B_\rho(0) \cap V_m^\perp.$$

Note que pela escolha de delta, temos que $\rho(\delta) \to +\infty$, quando $\delta \to 0$ portanto podemos escolher $\delta > 0$, tal que $(c/2)\rho^2 - c_3|\Omega| > (c/4)\rho^2$, logo

$$I(z) \geq \frac{c}{4}\rho^2 - \mu_1 b_1\rho^6 - \mu_2 b_2\rho^6, \qquad \forall z \in \partial B_\rho(0) \cap V_m^\perp.$$

Agora basta escolher um $\overline{\mu}$ pequeno tal que

$$I_{\mu_1,\mu_2}(z) \geq \frac{c}{4}\rho^2 - \mu_1 b_1\rho^6 - \mu_2 b_2\rho^6 = \rho^2\left(\frac{c}{4} - \mu_1 b_1\rho^4 - \mu_2 b_2\rho^4\right) > 0, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in (0, \overline{\mu}),$$

concluindo a demonstração. □

A condição de superlinearidade (F_3) vai nos garantir (I_2), como se pode ver do próximo lema.

Lema 4.9. *Suponha que F e m satisfaçam (F_0), (F_3) e (4.2). Então, para qualquer $j \in \mathbb{N}$, existe um subespaço $\widehat{V} \subset H$ de dimensão j e uma constante $M > 0$ tal que*

$$\sup_{u \in \widehat{V}} I(z) \leq M, \quad \forall\, \mu_1, \mu_2 > 0.$$

O mesmo reslultado vale se trocarmos (F_3) por $(\widehat{F_3})$ e supormos que l satisfaz (4.3).

Demonstração. Vamos supor inicialmente que F e m satisfazem (F_3) e (4.2). Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ dado pela condição (F_3) e considere $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ as autofunções normalizadas de $\sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega_0))$. Vamos definir o subespaço

$$\widehat{V}_j := \operatorname{span}\{(\varphi_j, 0), \ldots, (\varphi_j, 0)\}.$$

Como $\widehat{V}$ tem dimensão finita, existe $d_1 = d(\widehat{V}) > 0$ tal que

$$d\|u\|^4 \leq \|u\|_4^4, \quad \forall\, u \in \widehat{V}. \tag{4.20}$$

Dado $\varepsilon > b/(4d_1)$, segue de (F_3) e da continuidade de F que, para algum $d_2 = d_2(d_1, b)$,

$$F(x, s, 0) \geq \varepsilon |s|^4 - d_2, \quad \forall\, x \in \Omega_0,\ s \in \mathbb{R}.$$

Isto, (4.2) e (4.20) implicam que, para qualquer $z \in \widehat{V}_j$, temos

$$I_{\mu_1,\mu_2}(z) \leq \frac{a}{2}\|u\|^2 \left(\varepsilon d_1 - \frac{b}{4}\right) \|u\|^4 + d_2|\Omega| \leq \sup_{t>0} \left\{\frac{a}{2}t^2 + \varepsilon_0 t^4 + d_2|\Omega|\right\},$$

com $\varepsilon_0 = (\varepsilon d_1 - b/4) > 0$. Se denotarmos M o supremo acima, podemos usar $a > 0$ para concluir que $0 < M < +\infty$, finalizando a demonstração.

A demonstração com $(\widehat{F_3})$ e (4.3) é análoga e será omitida. $\square$

Prova dos Teoremas E e E'. Seja $k \in \mathbb{N}$ fixado. Pelo Lema 4.8, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ grande suficiente tal que, para a decomposição $\overline{H} = V \oplus W$, com

$$V := \langle (\varphi_1, 0) \ldots, (\varphi_m, 0) \rangle, \qquad W := \langle (\varphi_1, 0), \ldots, (\varphi_m, 0) \rangle^{\perp},$$

o funcional I satisfaz (I_1) para qualquer μ_1, $\mu_2 \in (0, \overline{\mu})$. Além disso, pelo Lema 4.9, obtemos um subespaço $\widehat{V} \subset H$ e $M > 0$ tal que

$$\dim \widehat{V} = (k+m), \qquad \sup_{z \in \widehat{V}} I \leq M, \quad \forall \mu_1,\, \mu_2 > 0.$$

Portanto, I_{μ_1,μ_2} satisfaz (I_2). Para a escolha de M acima, obtemos da Proposição 4.1 um número μ^* tal que I_{μ_1,μ_2} satisfaz (I_3), para qualquer μ_1, $\mu_2 \in (0, \mu^*)$. Como $I(0) = 0$ e I é par, podemos definir $\mu_k^* := \min\{\overline{\mu}, \mu^*\}$ e usar o Teorema 4.6 para concluir que, para todo $\mu \in (0, \mu_k^*)$, o funcional I_{μ_1,μ_2} tem pelo menos $(k+m-m) = k$ pares de pontos críticos não nulos.

A prova do Teorema E' é análoga. $\square$

Referências

[1] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa and T.F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. **49** (2005) 85-93.

[2] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis **14** (1973) 349-381.

[3] A. Azzollini, *The elliptic Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^N$ perturbed by a local nonlinearity*, Differential Integral Equations **25** (2012), 543-554.

[4] A. Azzollini, P. d'Avenia and A. Pomponio, *Multiple critical points for a class of nonlinear functionals*, Ann. Mat. Pura Appl. **190** (2011), 507-523.

[5] A. Azzollini, *A note on the elliptic Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^N$ perturbed by a local nonlinearity*, Commun. Contemp. Math., **17** (2015), Art. ID 1450039, 5 pp.

[6] P. Bartolo, V. Benci and D. Fortunato *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal. TMA **7**(9) (1983), 981?1012

[7] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2010)

[8] H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983) 437-477.

[9] G.F. Carrier, *On the nonlinear vibration problem of the elastic string*, Quart. Appl. Math. **3**, (1945) 157-165.

[10] F.J.S.A. Corrêa and G.M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods.* Bull. Austral. Math. Soc. 74 (2006), no. 2, 263-277.

[11] F.J.S.A. Corrêa and R.G. Nascimento, *On an elliptic system of p-Kirchhoff-type under Neumann boundary condition.* Mathematical and Computer Modelling **49** (2009), 598-604.

[12] G. Eisley, *Nonlinear vibrations of beams and rectangular plates*, Z. Anger. Math. Phys. **15** (1964) 167-175.

[13] G.M. Figueiredo, *Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. Math. Anal. Appl. **401** (2013) 706-713.

[14] G.M. Figueiredo, *On a nonlocal system with critical growth* 1°ed.Athens: International Scientfic Press, 2012, p. 99-111.

[15] G.M. Figueiredo and Antonio Suarez *The sub-supersolution method for Kirchhoff systems: applications*, AMS Subject Classification (2000).

[16] G.M. Figueiredo and J.R.S. Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical and critical growth*, Diff. Int. Equations **25** (2012) 853-868.

[17] A. Hamydy, M. Massar and N. Tsouli, *Existence of solutions for p-Kirchhoff type problems with critical exponent.* Electron. J. Differential Equations 2011, No. 105, 8 pp.

[18] X.M. He and W.M. Zou, *Infinitely many positive solutions for Kirchhoff-type problems*, Nonlinear Anal. **70** (2009) 1407-1414.

[19] J. Jin and X. Wu, *Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010) 564-574.

[20] G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik, Teubner, Leipzig (1876).

[21] A. C. Lazer and P. McKenna, *On Steady State solutions of a system od reaction-diffusion equations from biology*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods e Applications, **6** (1982), 523-530.

[22] G. Li and H. Ye, *Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in* $\mathbb{R}^3$, J. Differential Equations **257** (2014), 566-600.

[23] L. Li and X. Zhong, *Infinitely many small solutions for the Kirchhoff equation with local sublinear nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016) 955-967.

[24] S. Liang and J. Zhang, *Multiplicity of solutions for the noncooperative Schodinger-Kirchhoff system involving the fractional p-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$, Z. Angew. Math. Phys. **63** (2017) 1-18.

[25] J. Limaco and L.A. Medeiros, *Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncylindrical domains*, Portugaliae Mathematica **14** (1999) 464-500.

[26] J. L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics.* International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro(1977), Mathematics Studies, North- Holland, Amsterdam, **30** (1978) 284-346.

[27] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Part I*, Revista Matemática Iberoamericana **1** (1985), no. 1, 145-201

[28] D.C. Liu, *On a p-Kirhhoff equation via fountain theorem and dual fountain theorem*, Nonlinear Anal. **72** (2010) 208-302.

[29] A.M. Mao and J.T. Zhang, *Sign-changing and multiple solutions of Kirchhoff type problems without the P.S. condition*, Nonlinear Anal. **70** (2009) 1275-1287.

[30] D.C de Morais Filho e M.A.S. Souto, *Systems of p-Laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees* Comm. Partial Diff. Equations **24** (1999), 1537-1553

[31] D.C de Morais Filho e M.A.S. Souto, *On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponent* Nonlinear analysis **42** (2000), 771-787

[32] D. Naimen, *Positive solutions of Kirchhoff type elliptic equations involving a critical Sobolev exponent.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 21 (2014), no. 6, 885-914.

[33] R. Narashima, *Nonlinear vibration of an elastic string*, J. Sound Vib. **8**, (1968) 134- 146.

[34] D.W. Oplinger, *Frequency response of a nonlinear stretched string*, J. Acoust. Soc. Am. **32**, (1960) 1529-1538.

[35] K. Schlesinger, *Saitenschwingungen mit endlicher amplitude.*, Z. Techn. Phys. **12** , (1931) 33-39.

[36] E.A.B. Silva, *Critical point theorems and applications to differential equations*, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin-Madison, 1988.

[37] E.A.B. Silva and M.S. Xavier, *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **20** (2003) 341-358.

[38] E.A.B. Silva and M.S. Xavier, *Multiplicity of solutions for quasilinear systems with critical growth.* Nonlinar Differential Equations and Aplications **13** (2007) 619-642

[39] J. Sun and C. Tang, *Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations*, Nonlinear Anal. **74** (2011) 1212-1222.

[40] Z. T. Zhang and Y.M. Sun, *Existence and Multiplicity of Solutions for Nonlocal Systems with Kirchhoff Type*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, **32** (2016) 35-54-1222.