

Autorização concedida ao Repositório Institucional da Universidade de Brasília (RIUnB) pelo Prof. Dr. Eduardo Stockler Tognetti, em 26 de setembro de 2018, para disponibilizar o trabalho, gratuitamente, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da obra.

REFERÊNCIA

ÂNGELO, Caio Gustavo Mesquita; TOGNETTI, Eduardo Stockler. Diagonalização de sistemas politópicos via miniação de norma H^∞ . In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 22, 2018, João Pessoa. **Proceedings...** João Pessoa: Sociedade Brasileira de Automática, set. 2018. Disponível: <<https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-1168.pdf>>. Acesso em: 27 set. 2018.

DIAGONALIZAÇÃO DE SISTEMAS POLITÓPICOS VIA MINIMIZAÇÃO DE NORMA \mathcal{H}_∞

CAIO G. M. ÂNGELO*, EDUARDO S. TOGNETTI*

**Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília – UnB, Brasília, DF, Brasil.*

Emails: caio.angelo@gmail.com, estognetti@ene.unb.br

Abstract— This paper considers the problem of designing robust dynamic precompensators for reducing the effects of interactions in uncertain multivariable systems obtaining as an outcome a diagonal system. The system has the same number of inputs and outputs and it is subject to time-invariant polytopic uncertainties. The conditions are expressed as linear matrix inequalities (LMIs) and synthesize robust dynamic precompensators by minimizing the \mathcal{H}_∞ norm of the compensated system with a reference system to yield diagonal dominance. As another contribution, a new indicator of diagonal dominance is proposed for polytopic systems, an open problem in the literature. The efficiency of the proposed synthesis procedure is illustrated by numerical experiments.

Keywords— Diagonal dominance, linear matrix inequalities, polytopic uncertain systems, Bounded Real Lemma.

Resumo— O artigo considera o problema de projeto de pré-compensadores dinâmicos robustos para reduzir os efeitos de interações entre malhas em sistemas incertos multivariáveis por meio da diagonalização da dinâmica resultante. São considerados sistemas com o mesmo número de entradas e saídas e sujeitos a incertezas politópicas invariantes no tempo. As condições de projeto, expressas por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs), sintetizam pré-compensadores dinâmicos robustos por meio da minimização da norma \mathcal{H}_∞ do processo compensado com uma dinâmica de referência como forma de obter dominância diagonal. Como outra contribuição, é proposto um indicador de dominância diagonal para sistemas politópicos, um problema ainda em aberto na literatura. A eficiência do procedimento de projeto é avaliada por meio de exemplos numéricos.

Palavras-chave— Dominância diagonal, desigualdades matriciais lineares, sistemas incertos politópicos, Bounded Real Lemma.

1 Introdução

O controle de processos industriais é desafiador devido a presença de incertezas, não linearidades e de uma grande quantidade de malhas que interagem entre si. A teoria de controle moderno apresenta um número considerável de técnicas de projeto de controladores multivariáveis para lidar com o acoplamento de malhas, contudo o controle descentralizado, por meio de controladores proporcional-integral-derivativos (PID), tornou-se bastante popular devido as facilidades no projeto, operação e manutenção por técnicos e engenheiros de campo (Dittmar et al., 2012). Quando o acoplamento entre as malhas é muito grande o controle descentralizado não é eficiente e o uso de um pré-compensador que desacople as malhas é desejado antes do projeto do controlador de realimentação. Dessa forma, os engenheiros de campo poderão utilizar múltiplos PID monovariáveis (controle multi-malha) para sintonia *ad-hoc*.

Uma das formas para reduzir as interações entre malhas de uma planta é a obtenção de dominância diagonal (Rosenbrock, 1974) por meio de um pré-compensador. O projeto de controle pode então ser feito por técnicas clássicas monovariáveis. A técnica tradicional de obtenção de dominância diagonal é por meio de pré-compensadores estáticos (Hawkins, 1972; Chughtai e Munro, 2004) cujo desempenho é pobre em frequência. Mais recentemente, pré-compensadores dinâmicos surgiram como uma alternativa mais atraente (Nobakhti, 2002; Chughtai et al., 2005; Jetto

et al., 2017).

Considerar incertezas de modelo no projeto de pré-compensadores robustos para obtenção de dominância diagonal tem sido feito de forma conservadora (Chughtai et al., 2005; Jetto et al., 2017). Em Chughtai e Munro (2004), o projeto de controladores estáticos foi realizado por meio de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) e em Chughtai et al. (2005) o caso incerto foi reescrito como um problema de minimização de norma \mathcal{H}_∞ . Em Siqueira et al. (2014), o desacoplamento e o projeto de controladores descentralizados são abordados para sistemas discretos no tempo sujeito à incertezas politópicas, mas recaindo em um problema de otimização não convexo resolvido em duas etapas.

Um dos principais problemas dos trabalhos que buscam a dominância diagonal por meio de condições convexas é considerar a minimização da norma \mathcal{H}_∞ do processo compensado em relação a identidade como termo dominante. Além do mais, esse valor de norma não reflete a relação de magnitude entre os elementos fora da diagonal (linha ou coluna) com os da diagonal principal em função da frequência.

Destaca-se que, apesar da larga aplicação em processos industriais, a diagonalização de sistemas politópicos tem recebido muito pouca atenção na literatura e, no conhecimento dos autores, propõe-se método inédito de projeto. São apresentadas nesse trabalho condições LMIs para o projeto de pré-compensadores dinâmicos robustos por meio

da minimização da norma \mathcal{H}_∞ do processo compensado com uma dinâmica diagonal de referência. O sistema é representado por incertezas politópicas pertencentes ao simplex unitário. Como outra contribuição, são apresentadas novas condições convexas para o cálculo de um indicador de dominância diagonal para sistemas politópicos, um problema ainda em aberto na literatura.

2 Formulação do Problema

O problema de diagonalização de um sistema $\mathbf{G}(s)$ com um pré-compensador $\mathbf{K}(s)$ pode ser formulado a partir da definição de dominância fundamental, como feito por Chughtai e Munro (2004) e Chughtai et al. (2005):

Definição 1 (Dominância Fundamental)

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que \mathbf{B} seja não-singular e $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$. Diz-se que \mathbf{B} é termo dominante de \mathbf{A} se

$$\rho(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}) < 1 \quad (1)$$

em que $\rho(\cdot)$ é o raio espectral (maior magnitude de autovalor).

Aplicando essa definição a uma matriz de transferência $\mathbf{G}(s) = \mathbf{X}(s) + \mathbf{Y}(s)$, em que $\rho(\mathbf{X}(s)^{-1}\mathbf{Y}(s)) < 1$, então o pré-compensador pode ser definido tal que $\mathbf{X}(s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{I}$. Assim, a identidade será o termo dominante do sistema compensado

$$\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{Y}(s)\mathbf{K}(s)$$

$$\rho(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}(s)\mathbf{K}(s)) = \rho(\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{I}) < 1$$

Como $\rho \leq \bar{\sigma}$, em que $\bar{\sigma}$ é o maior valor singular, chega-se ao seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{I}) &\leq \bar{\sigma}(\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{I}) \\ &\leq \|\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{I}\|_\infty < \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

Trata-se, portanto, de um problema de controle em malha aberta por modelo de referência, em que a matriz diagonal \mathbf{I} é o modelo de referência. Apesar de se tratar de um modelo de referência diagonal, que é o que se procura para um sistema desacoplado, é um modelo conservador, como salienta os autores de Chughtai et al. (2005).

Uma forma de evitar a necessidade de matriz não estritamente própria no termo diagonal dominante é escolher $\mathbf{K}(s)$ tal que $\mathbf{X}(s)\mathbf{K}(s) = \mathbf{N}(s)$, em que $\mathbf{N}(s)$ é uma matriz de transferência diagonal que serve como referência para a diagonalização, resultando em

$$\|\mathbf{N}(s)^{-1}\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{I}\|_\infty < \gamma \quad (3)$$

Uma vez que $\|\mathbf{N}(s)^{-1}\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{I}\|_\infty \leq \|\mathbf{N}(s)^{-1}\| \|\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{N}(s)\|$, por questões numéricas, pode-se optar por resolver o problema de otimização de minimizar γ^* sujeito à restrição

$$\|\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) - \mathbf{N}(s)\|_\infty < \gamma^* \quad (4)$$

A vantagem de escrever o problema de diagonalização como problema de minimização da norma \mathcal{H}_∞ é que podem ser utilizadas desigualdades matriciais lineares (LMIs) para resolver esse problema, em especial para sistemas incertos.

3 Principais Resultados

Seja $\mathbf{G}(s, \alpha)$ um sistema incerto invariante no tempo dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_G(t) &= \mathbf{A}_G(\alpha)x_G(t) + \mathbf{B}_G(\alpha)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_G(\alpha)x_G(t) + \mathbf{D}_G(\alpha)u(t) \end{aligned}$$

em que $\mathbf{A}_G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_G \times n_G}$, $\mathbf{B}_G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_G \times m}$, $\mathbf{C}_G(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n_G}$, $\mathbf{D}_G(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e α um vetor de parâmetros incertos pertencentes ao simplex unitário

$$\Lambda = \{p \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N p_i = 1, p_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N\}.$$

Por questão de notação, será dito que $\mathbf{G}(s, \alpha) := \{\mathbf{A}_G(\alpha), \mathbf{B}_G(\alpha), \mathbf{C}_G(\alpha), \mathbf{D}_G(\alpha)\}$ ou

$$\mathbf{G}(s, \alpha) := \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_G(\alpha) & \mathbf{B}_G(\alpha) \\ \hline \mathbf{C}_G(\alpha) & \mathbf{D}_G(\alpha) \end{array} \right]$$

Seja um pré-compensador robusto $\mathbf{K}(s) := \{\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K, \mathbf{D}_K\}$ e um modelo diagonal de referência $\mathbf{N}(s) := \{\mathbf{A}_N, \mathbf{B}_N, \mathbf{C}_N, \mathbf{D}_N\}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t) &= \mathbf{A}_K x_K(t) + \mathbf{B}_K v(t) \\ u(t) &= \mathbf{C}_K x_K(t) + \mathbf{D}_K v(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_N(t) &= \mathbf{A}_N x_N(t) + \mathbf{B}_N v(t) \\ z(t) &= \mathbf{C}_N x_N(t) + \mathbf{D}_N v(t) \end{aligned}$$

em que $\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{n_K \times n_K}$, $\mathbf{B}_K \in \mathbb{R}^{n_K \times m}$, $\mathbf{C}_K \in \mathbb{R}^{m \times n_K}$, $\mathbf{D}_K \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{A}_N \in \mathbb{R}^{n_N \times n_N}$, $\mathbf{B}_N \in \mathbb{R}^{n_N \times m}$, $\mathbf{C}_N \in \mathbb{R}^{m \times n_N}$, $\mathbf{D}_N \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Então o sistema $\mathbf{H}(s, \alpha) = \mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}(s) - \mathbf{N}(s)$, cujo diagrama é apresentado na Figura 1, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s, \alpha) &= \{\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\alpha), \mathbf{C}(\alpha), \mathbf{D}(\alpha)\} \\ &:= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}_G(\alpha) & \mathbf{B}_G(\alpha)\mathbf{C}_K & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_N & & & \\ \hline \mathbf{C}_G(\alpha) & \mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{C}_K & -\mathbf{C}_N & & & \\ & & & \mathbf{B}_G(\alpha)\mathbf{D}_K & & \\ & & & \mathbf{B}_K & & \\ & & & \mathbf{B}_N & & \\ \hline & & & \mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{D}_K - \mathbf{D}_N & & \end{array} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

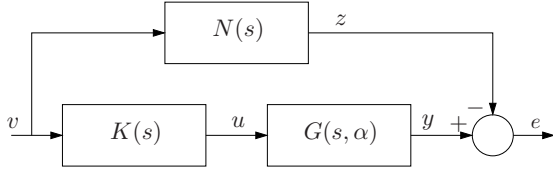


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema $\mathbf{H}(s, \alpha)$.

3.1 Condições de projeto via custo garantido \mathcal{H}_∞

Os problemas de minimização de norma \mathcal{H}_∞ do sistema (5) são formulados em LMIs pelo *Bounded Real Lemma* (Boyd et al., 1994), o qual, após aplicação do Lema de Finsler, resulta no seguinte lema (Lacerda et al., 2011):

Lema 1 *Seja o sistema politópico $\mathbf{H}(s, \alpha)$ dado por (5) e $\mathbf{A}(\alpha)$ Hurwitz estável. A desigualdade $\|\mathbf{H}(s, \alpha)\|_\infty < \gamma$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda$ se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{W}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matriz $\mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 2(n+m)}$, em que $n = n_G + n_K + n_N$, tais que¹*

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) < \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda \quad (6)$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha)' & -\mathbf{I} & \mathbf{C}(\alpha)' & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{W}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{B}(\alpha) \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

A desigualdade (6) envolve o produto de variáveis do problema (\mathbf{A}_K e \mathbf{C}_K) com a variável de otimização $\mathcal{X}(\alpha)$, devido ao produto $\mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)'$. Uma estratégia para obter LMIs é impor restrições à variável $\mathcal{X}(\alpha)$ de forma a eliminar esses produtos seguindo linhas apresentadas em Mazzoccante e Oliveira (2016).

Teorema 1 *Se existirem uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{W}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\mathcal{X}_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_G \times 2(n+m)}$, $\mathcal{X}_3(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_N \times 2(n+m)}$, $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{n_K \times n_K}$, $\mathbf{B}_K \in \mathbb{R}^{n_K \times m}$ e $\mathbf{D}_K \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{L}_{A_K} \in \mathbb{R}^{n_K \times n_K}$, $\mathbf{L}_{C_K} \in \mathbb{R}^{m \times n_K}$, em que $n = n_G + n_K + n_N$, e dado $\theta_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n_K \times 2(n+m)}$ com $\text{rank}(\theta_{\mathcal{X}}) = n_K$, tal que*

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{Y}(\alpha)\mathcal{A}(\alpha)) < \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda \quad (7)$$

em que

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{W}(\alpha) & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_G(\alpha)\mathbf{D}_K \\ \mathbf{B}_K \\ \mathbf{B}_N \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{D}_K - \mathbf{D}_N \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

¹Define-se a notação $\text{He}(M) := M + M'$ e \star como sendo o bloco simétrico da matriz.

$$\mathcal{A}(\alpha)' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_G(\alpha) & \mathbf{B}_G(\alpha)\mathbf{L}_{C_K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{A_K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_N \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{X}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C}_G(\alpha) & \mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{L}_{C_K} & -\mathbf{C}_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y}(\alpha)' = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1(\alpha) \\ \theta_{\mathcal{X}} \\ \mathcal{X}_3(\alpha) \end{bmatrix},$$

então $\mathbf{A}_K = \mathbf{L}_{A_K}\hat{\mathbf{X}}^{-1}$, $\mathbf{C}_K = \mathbf{L}_{C_K}\hat{\mathbf{X}}^{-1}$, \mathbf{B}_K e \mathbf{D}_K são as matrizes do pré-compensador $\mathbf{K}(s)$ que garantem $\|\mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}(s) - \mathbf{N}(s)\|_\infty < \gamma$.

Prova: Sejam

$$\mathcal{B}(\alpha)' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_G(\alpha) & \mathbf{B}_G(\alpha)\mathbf{C}_K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_N \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C}_G(\alpha) & \mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{C}_K & -\mathbf{C}_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{X}(\alpha)' = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1(\alpha) \\ \hat{\mathbf{X}}\theta_{\mathcal{X}} \\ \mathcal{X}_3(\alpha) \end{bmatrix}$$

Repare que

$$\mathcal{A}(\alpha)' = \mathcal{B}(\alpha)' \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{X}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}(\alpha)' = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{X}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{Y}(\alpha)'$$

Então $\mathcal{A}(\alpha)'\mathcal{Y}(\alpha)' = \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)'$, o que torna a condição (7) equivalente a

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' < \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda \quad (8)$$

Considere, ainda, $\mathbf{A}(\alpha)$, $\mathbf{B}(\alpha)$, $\mathbf{C}(\alpha)$, $\mathbf{D}(\alpha)$ as matrizes do sistema (5) e a seguinte base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$ (ou seja, $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}_\perp(\alpha) = \mathbf{0}$):

$$\mathcal{B}_\perp(\alpha)' = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(\alpha) & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo a partir da condição (8):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' < \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathcal{B}_\perp(\alpha)'(\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)))\mathcal{B}_\perp(\alpha) < \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathcal{B}_\perp(\alpha)'\mathcal{Q}(\alpha)\mathcal{B}_\perp(\alpha) = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{W}(\alpha)) & \mathbf{W}(\alpha)\mathbf{C}(\alpha)' & \mathbf{B}(\alpha) \\ \star & -\mathbf{I} & \mathbf{D}(\alpha) \\ \star & \star & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

$$\forall \alpha \in \Lambda$$

que é uma LMI para o *Bounded Real Lemma* do sistema (5) (Boyd et al., 1994). \square

Comentário 1 No Teorema 1 as matrizes de $\mathbf{N}(s)$ podem ser escolhidas de forma a representar as dinâmicas do sistema original em suas funções de transferência da diagonal. Assim, um $\mathbf{N}(s)$ possível é a matriz de transferência em que há apenas a diagonal de $\mathbf{G}(s)$ nominal. Contudo, como o critério de projeto ignora $\mathbf{N}(s)^{-1}$ de (3), uma forma de não privilegiar uns canais em detrimento de outros é normalizá-los aplicando à diagonal de $\mathbf{G}(s)$ a inversa da matriz de ganho estático dessa diagonal. Assim, os canais passam a ter pesos similares.

Comentário 2 A matriz $\theta_{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n_K \times 2(n+m)}$, por sua vez, pode ser escolhida de forma arbitrária, desde que tenha posto completo. Uma escolha possível é $\theta_{\mathcal{X}} = [0_{n_K \times n_G} \quad \mathbf{I} \quad 0_{n_K \times n_N + n_G} \quad \mathbf{I} \quad 0_{n_K \times n_N + 2m}]$. Salienta-se que a escolha de $\theta_{\mathcal{X}}$ repercute no conservadorismo do projeto.

Comentário 3 O parâmetro n_K deve ser escolhido por conveniência para implementação. Uma regra prática é escolher a mesma dimensão do sistema (n_G). A escolha de n_N , por sua vez, depende principalmente da forma com que a diagonal de $\mathbf{G}(s)$ é representada no espaço de estados. Normalmente, a representação aumenta o número de estados em relação ao sistema original, mas de forma virtual, com cancelamento de zeros e polos repetidos. É interessante, pois, diminuir a ordem da diagonal eliminando estados menos expressivos (no Matlab, pode ser utilizada função `modred` com ajuda da função `balreal`, para avaliar os estados).

3.2 Indicador de diagonalização

Seja o sistema compensado $\mathbf{H}(s, \alpha) = \mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}(s)$ dado por

$$\mathbf{H}(s, \alpha) = \{\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{B}(\alpha), \mathbf{C}(\alpha), \mathbf{D}(\alpha)\} := \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_G(\alpha) & \mathbf{B}_G(\alpha)\mathbf{C}_K & \mathbf{B}_G(\alpha)\mathbf{D}_K \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \hline \mathbf{C}_G(\alpha) & \mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{C}_K & \mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{D}_K \end{array} \right]. \quad (9)$$

Podemos representar $\mathbf{H}(s, \alpha)$ como

$$\mathbf{H}(s, \alpha) = \mathbf{H}_D(s, \alpha) + (\mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{H}_D(s, \alpha))$$

em que $\mathbf{H}_D(s, \alpha)$ é a diagonal do sistema compensado. Utilizando a abordagem pela dominância fundamental, $\mathbf{H}_D(s, \alpha)$ é termo dominante se

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}(\mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{H}_D(s, \alpha))) = \\ \rho(\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}\mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}) < 1 \end{aligned}$$

Assim, uma medida da diagonalização de $\mathbf{H}(s, \alpha)$ pode ser obtida minimizando λ sujeito a

$$\|\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}\mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}\|_{\infty} \leq \lambda \quad (10)$$

É possível representar $\mathbf{H}_D(s, \alpha)$ no espaço de estados construindo as funções de transferência de cada termo da diagonal em função das matrizes do sistema em (9)²:

$$H_{i,i}(s, \alpha) = \mathbf{C}_{i,:}(\alpha)(s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\alpha))^{-1}\mathbf{B}_{:,i}(\alpha) + \mathbf{D}_{i,i}(\alpha)$$

Agrupando as funções de transferência, o sistema $\mathbf{H}_D := \{\mathbf{A}_{\mathbf{H}_D}(\alpha), \mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha), \mathbf{C}_{\mathbf{H}_D}(\alpha), \mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)\}$ é dado por

$$\mathbf{A}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{:,1}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_{:,m}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,:}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_{m,:}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1,1}(\alpha) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}_{m,m}(\alpha) \end{bmatrix}$$

A inversão do sistema $\mathbf{H}_D(s, \alpha)$ no espaço de estados exige que $\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)$ seja não-singular para que seja realizável, ou seja, $\mathbf{D}_{i,i}(\alpha) \neq 0 \forall i = 1, \dots, m$, pois $\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1} = \text{diag}\{\mathbf{D}_G(\alpha)\mathbf{D}_K\}^{-1}$. No caso de $\mathbf{G}(s, \alpha)$ ou $\mathbf{K}(s)$ serem estritamente próprios, é necessário adicionar zeros até que o número de zeros seja igual ao de polos do sistema. Para não alterar significativamente o sistema, é importante que os zeros adicionados estejam longe dos zeros e polos originais, o que pode ser feito definindo $\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) = \mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}$ (independente de α) e suficientemente pequeno. No caso de processos com termo de transmissão direta não nulo, $\mathbf{D}_G(\alpha) \neq 0$, é necessário impor no projeto $\mathbf{D}_K = 0$, pois não é possível obter a inversa de uma matriz dependente de parâmetros, e $\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}$ suficientemente pequeno. A expressão para $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}$ a partir de suas matrizes no espaço de estados é dada por

$$\mathbf{H}_D^{-1}(s, \alpha) = \left[\begin{array}{c} \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) - \mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)}{-\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)} \\ \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}}{\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}} \end{array} \right]$$

com $\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D} = \varepsilon\mathbf{I}$, com ε suficientemente pequeno.

Por fim, para obter o sistema $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}\mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}$ em (10), basta escrever o sistema formado pela cascata entre

²A notação $M_{i,:}$ indica a i -ésima linha, $M_{:,j}$ a j -ésima coluna e $M_{i,j}$ o elemento (i, j) de M .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{A}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) - \mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) & \mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{G}}(\alpha) & \mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{D}_{\mathbf{G}}\mathbf{C}_{\mathbf{K}} & \mathbf{B}_{\mathbf{H}_D}(\alpha)\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathbf{G}}(\alpha) & \mathbf{B}_{\mathbf{G}}(\alpha)\mathbf{C}_{\mathbf{K}} & \mathbf{B}_{\mathbf{G}}(\alpha)\mathbf{D}_{\mathbf{K}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathbf{K}} & \mathbf{B}_{\mathbf{K}} \\ \hline -\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{H}_D}(\alpha) & \mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{G}}(\alpha) & \mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{D}_{\mathbf{G}}\mathbf{C}_{\mathbf{K}} & \mathbf{D}_{\mathbf{H}_D}^{-1}\mathbf{D}_{\mathbf{G}}\mathbf{D}_{\mathbf{K}} - \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (11)$$

$\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}$ e $\mathbf{H}(s, \alpha)$, dado por (9), e subtrair \mathbf{I} da matriz de transmissão direta do sistema resultante, conforme mostrado em (11).

Para calcular o menor valor para λ , chamado neste trabalho de grau garantido de diagonalização, pode-se utilizar o *Bounded Real Lemma* ou o resultado equivalente (6).

4 Exemplos Numéricos

Todas as rotinas foram implementadas em Matlab, versão R2016a usando Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999), em um computador Intel Core i7 CPU (2.00GHz), 8GB RAM. O pacote ROLMIP (Agulhari et al., 2012) é utilizado para implementar as condições dependentes de parâmetros em um conjunto de LMIs de dimensão finita.

Exemplo 1 Neste primeiro exemplo, será utilizado um processo de quatro tanques de ordem quatro com duas entradas e duas saídas (Johansson, 2000) (Siqueira et al., 2014). Trata-se de um sistema não-linear que, após linearizado, resulta no sistema $\mathbf{G}(s) := \{\mathbf{A}_{\mathbf{G}}, \mathbf{B}_{\mathbf{G}}, \mathbf{C}_{\mathbf{G}}, \mathbf{D}_{\mathbf{G}}\}$:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que $A_1, A_3 = 28 \text{ cm}^2$, $A_2, A_4 = 32 \text{ cm}^2$, $k_c = 0,50 \text{ V/cm}$, $k_1 = 3,14 \text{ cm}^3/\text{Vs}$, $k_2 = 3,29 \text{ cm}^3/\text{Vs}$, $\gamma_1 = 0,43$, $\gamma_2 = 0,34$, $T_3 = 39 \text{ s}$, $T_4 = 56 \text{ s}$ são parâmetros conhecidos e $T_1 = 63 \text{ s} \pm 10\%$, $T_2 = 91 \text{ s} \pm 10\%$ são parâmetros constantes, mas desconhecidos. A matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ nominal ($T_1 = 63 \text{ s}$, $T_2 = 91 \text{ s}$) é expressa como

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,024111}{s+0,01603} & \frac{0,000994}{(s+0,02564)(s+0,01603)} \\ \frac{0,000499}{(s+0,01786)(s+0,0111)} & \frac{0,17}{s+0,0111} \end{bmatrix}$$

Para aplicar a técnica descrita em 3.1, foram escolhidos $n_K = 4$, mesma ordem do sistema, e

$\mathbf{N}(s)$ obtido a partir da diagonal de $\mathbf{G}(s)$ e posterior normalização em relação aos ganhos estáticos e redução para ordem $n_N = 4$, conforme Comen-tários 1 e 3:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -0,0111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0160 & 0 & 0 \\ -0,0082 & -0,0012 & -0,0113 & 0,0175 \\ 0,0121 & 0,0014 & -0,0001 & -0,0141 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1054 \\ -0,1266 & 0 \\ -0,0047 & 0,0387 \\ 0,0055 & -0,0574 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 & -0,1266 & 0 & 0 \\ 0,1054 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso foi escolhido $\theta_{\mathcal{X}} = [\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{0}]$, resultando em $\gamma = 0,1007$ e no pré-compensador $\mathbf{K}(s) := \{\mathbf{A}_{\mathbf{K}}, \mathbf{B}_{\mathbf{K}}, \mathbf{C}_{\mathbf{K}}, \mathbf{D}_{\mathbf{K}}\}$:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -0,8468 & 0,1556 & 0,0002 & -0,0093 \\ 0,4272 & -1,5461 & -0,0694 & -0,0069 \\ 0,1236 & -0,3576 & -0,0408 & -0,0050 \\ -0,8553 & -0,2765 & -0,0487 & -0,0304 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0,0348 & 0,0495 \\ -0,1315 & 0,0040 \\ -0,0317 & 0,0029 \\ 0,0388 & 0,0577 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{K}} = - \begin{bmatrix} 15,7548 & 4,6932 & 0,8750 & 0,2248 \\ -1,8519 & 4,6843 & 0,2036 & 0,0669 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0,6952 & 1,0351 \\ -0,4082 & 0,0453 \end{bmatrix}$$

Para mostrar os resultados, serão apresentados dois tipos de gráficos. No primeiro tipo, as Figuras 2 e 3 mostram, respectivamente, os ganhos do diagrama de Bode dos sistemas sem pré-compensador $\mathbf{G}(s, \alpha)$ e do sistema compensado $\mathbf{G}(s, \alpha)$, para cada par entrada-saída (correspondentes a cada elemento da matriz de transferência). Idealmente, para um sistema desacoplado, apenas os elementos da diagonal devem ser diferentes de zero. Na prática, quanto maior o ganho do elemento da diagonal em relação aos demais elementos da mesma linha, menos a saída correspondente a essa linha é influenciada pelas outras entradas. Observe que, enquanto a Figura 2 mostra um sistema em que a saída 1 é influenciada mais pela entrada 2 que pela entrada 1, na banda

passante do sistema, a Figura 3 mostra um sistema bem desacoplado, com ganhos nos elementos da diagonal consideravelmente maiores que os demais da mesma linha. Essa melhora indica bom resultado do pré-compensador $\mathbf{K}(s)$.

O outro tipo de gráfico, ilustrado nas Figuras 4 e 5, mostra os valores singulares de $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1} \mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}$, que, conforme mostrado na Seção 3.2, indicam quanto o sistema $\mathbf{H}(s, \alpha)$ é diagonal/desacoplado. Para uma dada frequência, quanto menor o maior valor singular, mais desacoplado o sistema é nessa frequência. Em todos os gráficos, os valores mínimos e máximos dos ganhos foram obtidos após avaliar todos os $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_M]$ possíveis, em que M é o número de vértices, utilizando apenas valores $\alpha_i \in \{0; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8; 1, 0\}$. O indicador de diagonalização foi calculado conforme descrito na Seção 3.2, com a escolha $\mathbf{D}_{\mathbf{H}_D} = 10^{-7}$ para tornar o sistema compensado não estritamente próprio. Para o sistema $\mathbf{G}(s, \alpha)$ o indicador resultou em $\lambda_G = 1,6426$, enquanto para o sistema compensado $\mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}(s)$, $\lambda_{GK} = 9,0014$. Embora pareça contradizer o bom resultado, trata-se de um indicador conservador, por considerar todo o espectro de frequências. Isso pode ser analisado com as Figuras 4 e 5, que mostram os valores singulares em função da frequência de $\mathbf{G}_D(s, \alpha)^{-1} \mathbf{G}_D(s, \alpha) - \mathbf{I}$ e $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1} \mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}$, respectivamente. O indicador $\lambda_G = 1,6426$ (4,31 dB) é um limitante superior dos valores singulares de $\mathbf{G}_D(s, \alpha)^{-1} \mathbf{G}_D(s, \alpha) - \mathbf{I}$, que são maiores na banda passante do sistema (Figura 4). O indicador $\lambda_{GK} = 9,0014$ (19,09 dB), por sua vez, é um limitante superior dos valores singulares de $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1} \mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}$, que são altos apenas fora da banda passante do sistema. Dentro da banda, os valores singulares são significativamente menores em relação ao caso sem pré-compensador.

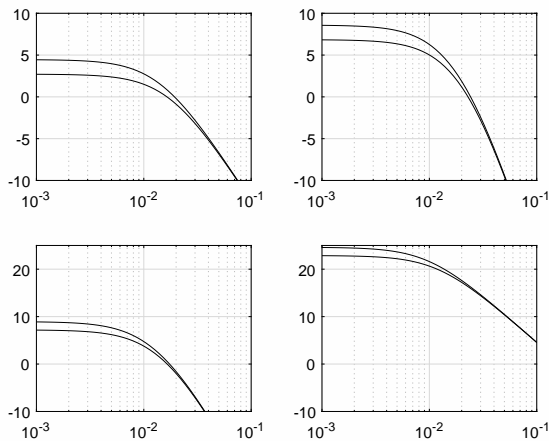


Figura 2: Valores mínimo e máximo do ganho (dB) em função da frequência (rad/s), para o sistema $\mathbf{G}(s, \alpha)$ do Exemplo 1.

Dentro da banda do sistema, o pré-compensador foi eficiente na diagonalização. Para frequências mais altas, porém, o sistema é pouco diagonal. De fato, a estratégia adotada

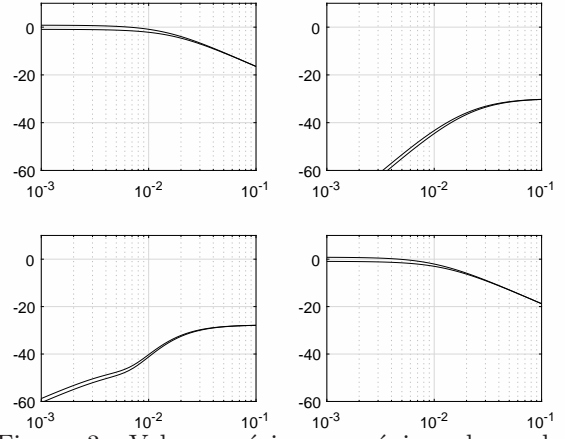


Figura 3: Valores mínimo e máximo do ganho (dB) em função da frequência (rad/s), para o sistema $\mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}(s)$ do Exemplo 1.

busca minimizar a diferença entre o sistema compensado e a referência e não especificamente a minimização do indicador de diagonalização. Assim, para ganhos muito pequenos, pouco relevantes para a minimização do critério de projeto, não há qualquer expectativa quanto à dominância diagonal. Por isso também, o indicador de diagonalização não foi baixo, pois considera o baixo desempenho em altas frequências.

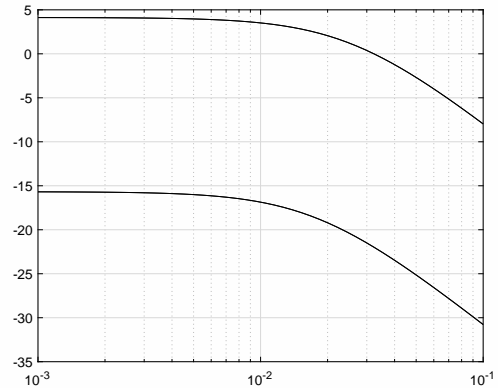


Figura 4: Gráfico de valores singulares (dB) em função da frequência (rad/s) para $\mathbf{G}_D(s, \alpha)^{-1} \mathbf{G}_D(s, \alpha) - \mathbf{I}$ do Exemplo 1.

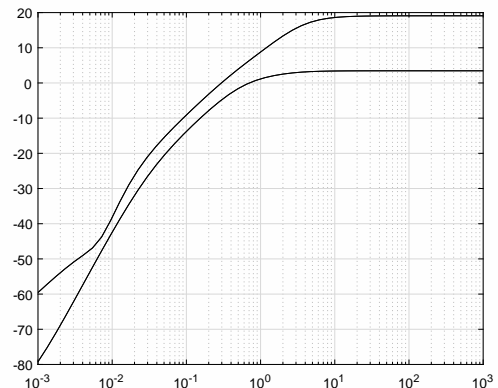


Figura 5: Gráfico de valores singulares (dB) em função da frequência (rad/s) para $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1} \mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}$, em que $\mathbf{H}(s, \alpha) = \mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}(s)$ do Exemplo 1.

Para efeito de comparação, as Figuras 6 e 7 mostram o resultado do desacoplamento com o pré-compensador obtido por Siqueira et al. (2014), aqui nomeado $\mathbf{K}_r(s)$. Nesse trabalho, que considera dinâmicas em tempo discreto, foi realizada discretização da dinâmica nominal $G(s)$ com tempo de amostragem $T = 2.5$ s. Para permitir a comparação, esse pré-compensador foi convertido para tempo contínuo para gerar as Figuras 6 e 7. O alto valor singular de $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}\mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}$ em baixas frequências retrata o mau desacoplamento da primeira saída em relação à segunda entrada, que também pode ser observado na Figura 6. Assim, a metodologia proposta nesse trabalho resultou em melhor desacoplamento entre as malhas.

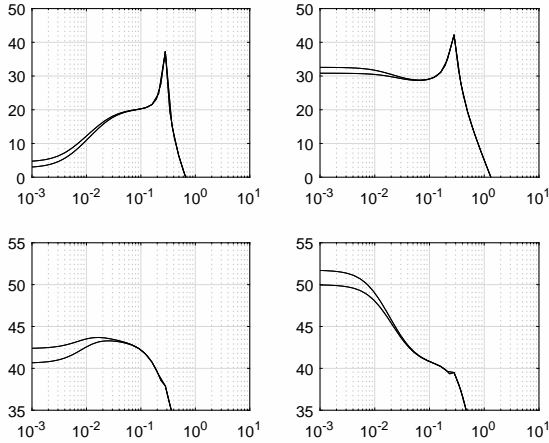


Figura 6: Valores mínimo e máximo do ganho (dB) em função da frequência (rad/s), para o sistema $\mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}_r(s)$ do Exemplo 1.

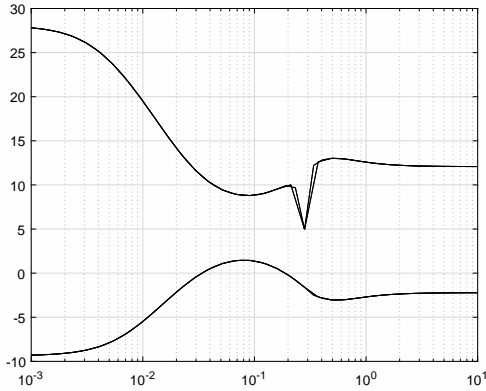


Figura 7: Gráfico de valores singulares (dB) em função da frequência (rad/s) para $\mathbf{H}_D(s, \alpha)^{-1}\mathbf{H}(s, \alpha) - \mathbf{I}$, em que $\mathbf{H}(s, \alpha) = \mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}_r(s)$ do Exemplo 1.

Exemplo 2 Neste exemplo, será avaliado um sistema hipotético passa-faixa. O sistema foi montado a partir de funções de transferência de segunda ordem subamortecidos, para as quais a faixa de frequência de interesse é na faixa de ressonância. O modelo nominal foi escolhido como sendo:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{100}{s^2 + 2,01s + 100} & \frac{10}{s^2 + 0,5002s + 100} \\ \frac{1000}{s^2 + 5,176s + 100} & \frac{200}{s^2 + 1,001s + 100} \end{bmatrix}$$

cuja representação no espaço de estados do sistema nominal $\mathbf{G}(s) := \{\mathbf{A}_G, \mathbf{B}_G, \mathbf{C}_G, \mathbf{D}_G\}$ utilizada foi obtida pela função `ssdata` do Matlab.

O sistema incerto estudado é obtido adicionando parâmetros incertos $\mathbf{G}(s, \alpha) := \{c_1\mathbf{A}_G, \mathbf{B}_G, c_2\mathbf{C}_G, \mathbf{D}_G\}$, em que $c_1, c_2 \in (0, 9; 1, 1)$. Os gráficos de ganho em função da frequência para esse sistema são mostrados na Figura 8.

Para aplicar a técnica descrita na Seção 3.1, foram escolhidos $n_K = n_N = 8$, mesma ordem do sistema, $\mathbf{N}(s)$ obtido a partir da diagonal de $\mathbf{G}(s)$ e posterior normalização em relação aos ganhos estáticos e redução de ordem, analogamente ao Exemplo 1, obtendo:

$$\mathbf{N}(s) = \text{diag}\left(\frac{100}{s^2 + 2,01s + 100}, \frac{100}{s^2 + 1,001s + 100}\right)$$

Da mesma forma, foi escolhido $\theta_\chi = [\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \mathbf{0}]$, resultando em $\gamma = 5,7526$. As Figuras 8 e 9 mostram os ganhos em função da frequência do sistema original e do sistema compensado para cada par entrada-saída. A saída 1 do sistema compensado é mais influenciado pela entrada 2 que pela entrada 1, o que significa que o desacoplamento nessa primeira linha foi ruim. A normalização de $\mathbf{N}(s)$ pelo ganho estático não ajuda no caso de sistemas passa-faixas, pois os ganhos mais relevantes para a minimização de γ são aqueles das faixas de ressonância. A Figura 8 mostra que na banda de ressonância a variação é maior em relação a α , o que pode explicar a dificuldade em aproximar o sistema compensado à referência $\mathbf{N}(s)$, que é independente de α .

Assim, percebe-se que a escolha de $\mathbf{N}(s)$ é importante para a eficiência da técnica. Como neste exemplo, o sistema não tem comportamento passa-baixas, a escolha da diagonal de $\mathbf{G}(s)$ normalizada não resultou em boa diagonalização.

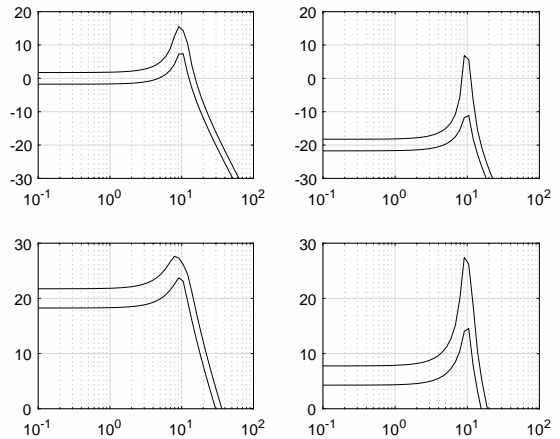


Figura 8: Valores mínimo e máximo do ganho (dB) em função da frequência (rad/s), para o sistema $\mathbf{G}(s, \alpha)$ do Exemplo 2.

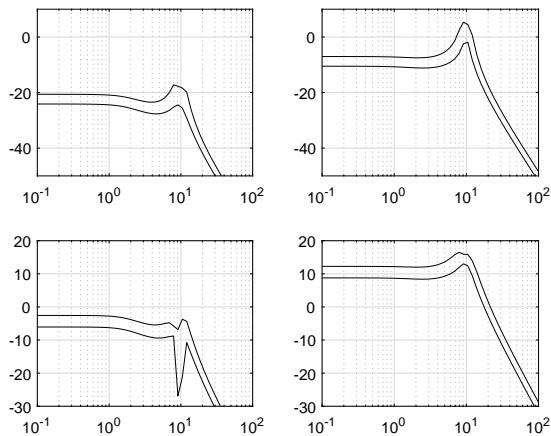


Figura 9: Valores mínimo e máximo do ganho (dB) em função da frequência (rad/s), para o sistema $\mathbf{G}(s, \alpha)\mathbf{K}(s)$ do Exemplo 2.

5 Conclusões

Condições de projeto de pré-compensadores robustos para sistemas politópicos multivariáveis foram apresentadas de forma a obter uma dinâmica o mais diagonal possível minimizando a interação entre as malhas. Condições LMIs foram formuladas para minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do sistema compensado com uma dinâmica de referência e um indicador de dominância diagonal. A escolha da dinâmica de referência mostrou-se sensível para a obtenção da dominância diagonal e em que faixa de frequência ela é alcançada. Verificou-se, ainda, ser uma fonte de conservadorismo a minimização da norma \mathcal{H}_∞ em todo o espectro de frequência.

Portanto, para trabalhos futuros, será considerada uma faixa seletiva na frequência na minimização do custo garantido. Outra frente de pesquisa é melhorar a escolha do sistema de referência $\mathbf{N}(s)$, como com um procedimento iterativo, em que o sistema de referência é tratado como variável e atualizado com o pré-compensador calculado. Outra possibilidade a ser explorada é incorporar os parâmetros incertos em $\mathbf{N}(s, \alpha)$.

Referências

- Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems, *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, Brasil, pp. 2298–2305.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Chughtai, S. S. e Munro, N. (2004). Diagonal dominance using lmis, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **151**(2): 225–233.
- Chughtai, S. S., Nobakhti, A. e Wang, H. (2005). A systematic approach to the design of robust

diagonal dominance based mimo controllers, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6875–6880.

- Dittmar, R., Gill, S., Singh, H. e Darby, M. (2012). Robust optimization-based multi-loop pid controller tuning: A new tool and its industrial application, *Control Engineering Practice* **20**(4): 355 – 370.

- Hawkins, D. J. (1972). ‘pseudodiagonalisation’ and the inverse-nyquist array method, *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of* **119**(3): 337–342.

- Jetto, L., Orsini, V. e Romagnoli, R. (2017). Gain margin based conditions for easy simultaneous achievement of open and closed loop diagonal dominance under unstructured uncertainties, *IFAC-PapersOnLine* **50**(1): 3660 – 3667.

- Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **8**(3): 456–465.

- Lacerda, M., Oliveira, R. e L. D. Peres, P. (2011). Robust H_2 and H_∞ filter design for uncertain linear systems via lmis and polynomial matrices, *Signal Processing* **91**: 1115–1122.

- Löfberg, J. (2004). YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the IEEE CCA/ISIC/CACSD Multiconference*, Taipei, Taiwan.

- Mazzocante, G. S. e Oliveira, R. C. (2016). Redução de ordem \mathcal{H}_∞ de sistemas incertos a tempo contínuo usando relaxações LMIs, *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática*, Vitória, pp. 948–953.

- Nobakhti, A. (2002). Procedure for systematic design of dynamic pre compensators, *Proceedings of Control 2002 UKACC Conference*, Sheffield.

- Rosenbrock, H. H. (1974). *Computer Aided Control System Design*, Academic Press, Englewood Cliffs, NJ.

- Siqueira, M. A. S., Silva, L. F. G., Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. e Takahashi, R. H. C. (2014). Robust decoupling control synthesis, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 4280–4285.

- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653. URL: <http://sedumi.mcmaster.ca/>.