

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) APLICADO PARA  
ANÁLISES VISCOELÁSTICAS E TERMOELÁSTICAS**

**DANIEL CANONGIA FURTADO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) APLICADO PARA**  
**ANÁLISES VISCOELÁSTICAS E TERMOELÁSTICAS**

**DANIEL CANONGIA FURTADO**

**ORIENTADORA: PROF<sup>a</sup> DR<sup>a</sup> CARLA TATIANA MOTA ANFLOR**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS**

**BRASÍLIA: MARÇO DE 2018**  
**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) APLICADO PARA**  
**ANÁLISES VISCOELÁSTICAS E TERMOELÁSTICA**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA**  
**MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE**  
**BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A**  
**OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**APROVADO POR:**

---

**Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Carla Tatiana Mota Anflor (Faculdade do Gama/UnB)**  
**(Orientadora)**

---

**Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque (Departamento de Engenharia Mecânica**  
**/UnB)**  
**(Examinador interno)**

---

**Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes (Departamento de Engenharia Mecânica**  
**/UnB)**  
**(Examinador externo)**

**BRASÍLIA, 29 DE MARÇO DE 2018.**

## FICHA CATALOGRÁFICA

FURTADO, DANIEL CANONGIA

Método dos Elementos de Contorno (MEC) Aplicado para Análises Viscoelásticas e Termoelásticas. [DISTRITO FEDERAL] 2018 xv, 90p., 210 x 297 mm (ENMC/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2018).

Dissertação de Mestrado Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

1. Método dos Elementos de Contorno

2. Método da Reciprocidade Dual

3. Viscoelasticidade

4. Termoelasticidade

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FURTADO, DANIEL CANONGIA (2018). Método dos Elementos de Contorno (MEC) Aplicado para Análises Viscoelásticas e Termoelásticas. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM DM 279/2018

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília- DF 90p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Furtado, Daniel Canongia.

TÍTULO: Método dos Elementos de Contorno (MEC) Aplicado para Análises Viscoelásticas e Termoelásticas.

GRAU: Mestre ANO: 2018.

É concedido à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta Dissertação de Mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa Dissertação de Mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Daniel Canongia Furtado

daniel.canongia@gmail.com

“Não deixe para reconhecer um bom momento só quando ele virar uma lembrança”.

Nanda – Os dias eram assim.

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado a oportunidade de realizar esse mestrado, e por ter me dado, também, sabedoria, autoconfiança, saúde e determinação para concluir esta pesquisa, sem desistir no meio da jornada.

A minha família, principalmente minha mãe por sempre me apoiar e incentivar, e por ter muito orgulho de mim, o que me impulsiona a acreditar nas minhas habilidades.

Aos meus companheiros de aula desde a graduação, Vinícius e Drica, por me ajudarem e me darem apoio durante todo o curso; e aos amigos que o mestrado me proporcionou, Matheus e Gisele, principalmente pelo companheirismo nas apresentações nos eventos internacionais.

Aos meus irmãos, primos e amigos que sempre me incentivaram nesses 2 anos e meio de mestrado, e a minha namorada Fernanda pela compreensão carinho e paciência nesses meses finais de conclusão da dissertação.

Ao professor Besim Baranoglu da *Atilim University* na Turquia, pelas valiosas discussões e intercâmbio de conhecimento.

A minha orientadora por toda paciência, apoio, confiança, conhecimento, estímulo e amizade em todos os momentos, em especial, nos que eu apresentei dificuldades ao longo do curso.

Ao Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC) por me acolher e proporcionar conhecimentos e toda infraestrutura necessária para realização da pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas da UnB pela excelente oportunidade.

A Universidade de Brasília: campus Darcy e campus Gama (FGA).

Ao CNPq pelos 2 anos de auxílio de bolsa de pesquisa de mestrado, e à FAP/DF e DPG pelos auxílios recebidos para a minha participação em eventos científicos internacionais, apresentando os resultados parciais alcançados no mestrado.

E, por fim, a todos que direta ou indiretamente me apoiaram em tudo, nestes últimos anos.

## RESUMO

Esta pesquisa refere-se à aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em análises viscoelásticas e termoelásticas, por meio de simulações e validações, 2D e 3D, com uso da linguagem computacional MATLAB. O comportamento de materiais viscoelásticos foi analisado a partir da utilização de três modelos reológicos, sendo o modelo de Boltzmann o que melhor representou tal comportamento, pois conseguiu prever tanto o comportamento elástico, quanto o comportamento viscoso do material. Devido à característica dos materiais viscoelásticos, sua análise se estendeu à problemas heterogêneos, quando o material possui regiões em seu domínio com propriedades mecânicas distintas. Essa análise foi conduzida através da utilização da técnica de sub-regiões do MEC, capaz de transformar um problema heterogêneo em problemas homogêneos, garantindo as condições de compatibilidade e de equilíbrio do material. Por outro lado, as análises termoelásticas foram conduzidas com a utilização do Método da Reciprocidade Dual (MRD), uma vez que é necessário tratar a integral de domínio decorrente do fenômeno termoelástico. O MRD é capaz de considerar a influência das forças que atuam no domínio de análise, somente analisando o contorno, mantendo, assim, a utilização do MEC atrativa, pois não há necessidade de discretizar o domínio e, conseqüentemente, reduz-se uma dimensão das integrais governantes do problema. Dentre as vantagens deste método numérico, destacam-se a otimização do tempo de processamento e a racionalização dos custos, quando comparado a outros métodos. Os resultados obtidos, confirmaram o potencial da aplicabilidade do MEC na solução de problemas complexos da engenharia, pois foi possível estender a análise termoelástica à problemas de difusão, quando o material sofre uma mudança abrupta de temperatura, como por exemplo, materiais sujeitos ao processo de soldagem. Além disso, os resultados alcançados apresentaram valores alinhados e aderentes quando comparados aos resultados das soluções analíticas e com os da literatura obtidos com o Método de Elementos Finitos (MEF).

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno (MEC); Método da Reciprocidade Dual (MRD); Viscoelasticidade; Termoelasticidade.

## **ABSTRACT**

This research refers to the application of the Boundary Element Method (BEM) in viscoelastic and thermoelastic analyzes by 2D and 3D simulations and validations, using MATLAB computational language. Among the advantages of this method are the processing time optimization and the costs rationalization, when compared to other numerical methods. The results obtained confirm the potential applicability of BEM to solve complex engineering problems. The numerical results showed good agreement with the analytical solution and those reported in the literature.

Keywords: Boundary Element Method (BEM); Dual Reciprocity Method (DRM); Viscoelasticity; Thermoelasticity.



## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
1.1. JUSTIFICATIVA .....	18
1.2. OBJETIVOS .....	19
<b>1.2.1. Objetivo geral.....</b>	<b>19</b>
<b>1.2.2. Objetivos específicos.....</b>	<b>19</b>
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	19
<b>2. REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>21</b>
2.1. MÉTODOS MATEMÁTICOS: MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) E MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL (MRD) .....	21
2.2. FERRAMENTA COMPUTACIONAL: SOFTWARE MATLAB E GMSH .....	24
<b>3. COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO.....</b>	<b>25</b>
3.1. MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN-VOIGT .....	28
3.2. MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL.....	29
3.3. MODELO VISCOELÁSTICO DE BOLTZMANN .....	30
3.4. MEC PARA VISCOELASTICIDADE (2D).....	31
<b>3.4.1. Cálculo deslocamento modelo de Kelvin-Voigt .....</b>	<b>32</b>
<b>3.4.2. Cálculo tensões internas modelo de Kelvin-Voigt .....</b>	<b>34</b>
<b>3.4.3. Formulação Matricial do MEC modelo Kelvin-Voigt.....</b>	<b>35</b>
<b>3.4.4. Formulação Matricial do MEC modelo Maxwell.....</b>	<b>36</b>
<b>3.4.5. Formulação Matricial do MEC modelo Boltzmann.....</b>	<b>36</b>
3.5. MEC COM SUB-REGIÕES PARA VISCOELASTICIDADE .....	37
3.6. APLICAÇÃO DO MEC PARA PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS (2D) .....	38
<b>3.6.1. Simulação do comportamento viscoelástico: Código 2D .....</b>	<b>39</b>
<b>3.6.2. Simulação e validação do código viscoelástico 2D .....</b>	<b>42</b>
<b>3.6.3. Simulação e validação do código viscoelástico com sub-regiões 2D... 44</b>	<b>44</b>
<b>4. COMPORTAMENTO TERMOELÁSTICO .....</b>	<b>49</b>
4.1. APLICAÇÃO DO MRD .....	51
<b>4.1.1. O vetor <math>\alpha</math> .....</b>	<b>52</b>

4.1.2.	A expansão $f$ .....	53
4.1.3.	Difusão: Comportamento do material em rápida variação de temperatura .....	54
4.2.	MEC PARA TERMOELASTICIDADE (2D e 3D) .....	56
4.2.1.	Método: Integral particular.....	57
4.2.2.	Implementação da integral particular.....	60
4.3.	COMPORTAMENTO DO MATERIAL SUJEITO AO PROCESSO DE SOLDAGEM .....	61
4.3.1.	Soluções de processos de soldagem empregando o MEC.....	64
4.4.	APLICAÇÃO DO MEC PARA O PROBLEMA TERMOELÁSTICO .....	68
4.4.1.	Solução do problema da equação de Poisson 2D .....	69
4.4.2.	Solução do problema da equação de Poisson 3D .....	71
4.4.3.	Solução do problema da equação de Difusão 3D .....	73
4.4.4.	Simulação e validação do código termoelástico 2D .....	75
4.4.5.	Simulação e validação do código termoelástico 3D .....	77
4.4.6.	Verificação em processo de soldagem.....	79
4.5.	INFLUÊNCIA DA PERFORMANCE DO MATLAB NA APLICABILIDADE DO MEC .....	83
5.	CONCLUSÕES .....	84
6.	RECOMENDAÇÕES E PERSPECTIVAS .....	86
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	87

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Propriedades mecânicas (Fonte: Mesquita e Coda, 2002).....	39
Tabela 2. Propriedades mecânicas (Fonte: Mesquita e Coda, 2002).....	42
Tabela 3. Comparação resultados.....	45
Tabela 4. Comparação dos resultados .....	46
Tabela 5. Propriedades mecânicas dos dois domínios (Fonte: Oliveira, 2009).....	47
Tabela 6. Comparação dos resultados análise sub-regiões.....	48
Tabela 7. Parâmetros para a função double-ellipsoidal (Fonte: Kuşçu et al. (2016)) .....	63
Tabela 8. Comparação dos resultados .....	70
Tabela 9. Comparação resultados análise Poisson 3D .....	72
Tabela 10. Comparação resultados nova função aproximação $f$ .....	73
Tabela 11. Propriedades do material (Fonte: Kuşçu et al., 2016) .....	81

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Elemento de mola (Fonte: Canevarolo Jr, 2010) .....	26
Figura 2. Elemento de amortecedor (Fonte: Canevarolo Jr, 2010) .....	27
Figura 3. Associação em série e em paralelo (Fonte: Adaptado de Dinis, 2005).....	27
Figura 4. Modelos reológicos (Fonte: Canevarolo Jr, 2010).....	28
Figura 5. Material heterogêneo com duas sub-regiões homogêneas (Fonte: Oberg, 2013) .....	38
Figura 6. Geometria analisada (Fonte Própria) .....	39
Figura 7. Comparação modelos viscoelásticos (Fonte Própria) .....	40
Figura 8. Análise retirando a carga (Fonte Própria).....	41
Figura 9. Geometria analisada (Fonte Própria) .....	42
Figura 10. Comparação solução analítica e numérica (Fonte Própria) .....	43
Figura 11. Análise viscoelástica com só um domínio (Fonte Própria).....	44
Figura 12. Geometria análise viscoelástica com dois domínios com mesmas propriedades (Fonte Própria).....	45
Figura 13. Resultado análise viscoelástica do ponto $A$ , com dois domínios com mesmas propriedades (Fonte Própria).....	45
Figura 14. Deslocamento longitudinal em um ponto entre os dois domínios (Fonte Própria)....	46
Figura 15. Resultado análise viscoelástica sub-regiões (Fonte Própria) .....	47
Figura 16. Função double-ellipsoidal (Fonte: Goldak e Akhlaghi, 2005).....	62
Figura 17. Ilustração para resolução de problemas termoelásticos (Fonte Própria).....	68
Figura 18. Geometria e pontos internos equação Poisson 2D (Fonte Própria) .....	70
Figura 19. Geometria análise Poisson 3D (Fonte Própria).....	71
Figura 20. Distribuição pontos internos análise Poisson 3D (Fonte Própria) .....	72
Figura 21. Geometria análise difusão 3D (Fonte Própria) .....	74
Figura 22. Comparação resultados difusão 3D (Fonte Própria) .....	74
Figura 23. Geometria análise termoelástica (Fonte Própria).....	75
Figura 24. Distribuição de temperatura análise termoelástica 2D (Fonte Própria) .....	76
Figura 25. Deslocamentos análise termoelástica 2D (Fonte Própria) .....	77
Figura 26. Geometria discretizada e pontos internos (Fonte Própria).....	78
Figura 27. Variação da temperatura no começo da placa ( $x = 0, y = 0.5$ e $z = 0.5$ ) (Fonte Própria).....	78
Figura 28. Deslocamento no final da placa ( $x = 1, y = 0.5$ e $z = 0.5$ ) (Fonte Própria) .....	79
Figura 29. Componente traseira e frontal da função double-ellipsoidal (Fonte Própria).....	80
Figura 30. Representação da soldagem (Fonte: Furtado et al., 2017) .....	80
Figura 31. Placa em 2D sujeita ao processo de soldagem (Fonte Própria) .....	81
Figura 32. Solda percorrendo todo o material (Fonte Própria) .....	82
Figura 33. Variação de temperatura no centro da placa (Fonte Própria).....	82

## LISTA DE ABREVIACOES

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
MSF	Método das Soluções Fundamentais
EVR	Elemento de Volume Representativo
DRM	<i>Dual Reciprocity Method</i>
MRD	Método da Reciprocidade Dual

## SÍMBOLOS MATEMÁTICOS E ITÁLICOS

$C$	Tensor constitutivo elástico
$L$	Transformação que associa cada histórico de deformações a um histórico de tensões
$E$	Módulo de Young
$k$	Coefficiente de condução de calor
$C_v$	Capacidade de calor sob volume constante
$u_i$	Componentes do vetor deslocamento
$f_i$	Componentes do vetor força de corpo
$T_0$	Temperatura de referência
$r$	Geração interna de calor
$\ddot{u}_i$	Acelerações induzidas no domínio
$r_f$	Componente frontal da função <i>double-ellipsoidal</i>
$r_r$	Componente traseira da função <i>double-ellipsoidal</i>
$V$	Velocidade da solda na direção $y$
$Q_t$	Força total da fonte de calor
$f_f$	Coefficiente de fração frontal
$f_r$	Coefficiente de fração traseira
$a$	Parâmetro de ajuste geométrico da função <i>double-ellipsoidal</i>
$b_r$	Parâmetro de ajuste geométrico da função <i>double-ellipsoidal</i>
$b_f$	Parâmetro de ajuste geométrico da função <i>double-ellipsoidal</i>
$c$	Parâmetro de ajuste geométrico da função <i>double-ellipsoidal</i>
$C_0$	Constante analítica da função <i>double-ellipsoidal</i>

$\partial$	Operador de derivada
$P$	Ponto de um domínio infinito e homogêneo
$u_{ij}^*$	Solução fundamental de deslocamento
$p_{ij}^*$	Solução fundamental de força de superfície
$n_j$	Vetor normal na direção $j$
$s$	Ponto do domínio
$p$	Ponto fonte
$b_i$	Forças de volume
$\underline{\underline{H}}$	Matriz das integrais de deformações
$\underline{\underline{G}}$	Matriz das integrais de força de superficiais
$N$	Nós no contorno
$L$	Pontos internos
$f_i$	Função de aproximação
$u_i(x)$	Deslocamento real
$p_i(x)$	Força de superfície real
$L( )$	Operador linear diferencial
$C(x, \xi_n)$	Função de forma global
$h(x)$	Deslocamento potencial termoelástico
$A_0$	Comprimento característico
$D_{ijkl}$	Tensor constitutivo elástico
$R_1$	Raio interno da circunferência
$R_2$	Raio externo da circunferência
$T_f$	Temperatura final
$G$	Módulo de cisalhamento
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas

## SÍMBOLOS GREGOS

$\sigma^e$	Tensão elástica
$\varepsilon^e$	Deformação elástica
$\sigma^v$	Tensão viscosa
$\dot{\varepsilon}^v$	Deformação viscosa
$\eta$	Tensor constitutivo viscoso

$\sigma$	Tensão total
$\varepsilon$	Deformação total
$\lambda$	Constante de Lamé
$\mu$	Constante de Lamé
$\theta_\lambda$	Parâmetro viscoso hidrostático
$\theta_\mu$	Parâmetro viscoso deviatório
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\gamma$	Constante constitutiva viscosa
$\rho$	Densidade
$\beta$	Parâmetro de expansão térmica
$\alpha$	Coefficiente de expansão térmica isotrópica
$\theta$	Diferença da temperatura atual da temperatura de referência
$\psi$	Acoplamento mecânico
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\Gamma$	Contorno
$\Omega$	Domínio
$\varepsilon_{kij}^*$	Deformação fundamental
$\delta(p, s)$	Distribuição do Delta de Dirac
$\nabla t$	Variação do tempo
$q$	Fluxo de calor
$o_\theta$	Parâmetro que posiciona o valor de temperatura
$o_q$	Parâmetro que posiciona o valor de fluxo
$\phi(\xi)$	Densidade fictícia da integral particular
$\bar{\alpha}$	Coefficiente de expansão térmica para estado plano de tensão
$\bar{\lambda}$	Constante de Lamé para estado plano de tensão

## SUFIXOS E PREFIXOS

e	Elástico
v	Viscoso
ve	Viscoelástico
,	Derivada espacial
$\nabla^2$	Operador de Laplace-Beltrami

$H$	Homogêneo
$D$	Difusão
$TF$	Transferência calor
$i, j, k, l$	Notação indicial
	$i, j, k = 1, 2$ em duas dimensões
	$i, j, k = 1, 2, 3$ em três dimensões



## 1. INTRODUÇÃO

Desde o advento dos processadores no século passado, as análises numéricas de problemas complexos têm, num ritmo acelerado, se tornado padrão em todos os setores da sociedade. Nas engenharias tal avanço vem adquirindo várias novas aplicações, podendo-se dizer que simulações numéricas vêm desempenhando um papel fundamental atualmente. Problemas que antes não eram imaginados, hoje podem ser resolvidos com o auxílio dos processadores e ferramentas de alta performance.

Ademais, soluções inovadoras na área da engenharia, como por exemplo, para o projeto mecânico de componentes, demandam o uso de ferramentas computacionais adequadas, desenvolvidas acompanhando avanços tecnológicos, para viabilizar uma descrição mais realística da resposta dos materiais utilizados quando sujeitos a carregamentos, sejam eles a aplicação de uma força, ou de calor.

Tais ferramentas podem ser desenvolvidas para o uso de análises experimentais ou numéricas. Para o caso de problemas complexos, a análise experimental pode ser extremamente cara, levando-se em conta tanto a aquisição de equipamentos de alta precisão, capazes de retornar resultados confiáveis, quanto o tempo de processamento muito demorado. Com isso, a análise numérica e computacional ganhou força, pois a partir dela é possível uma flexibilidade na modelagem dos problemas, além de agilidade na resolução de casos de elevada complexidade, de forma aproximada por simulação.

Os métodos computacionais podem ser utilizados para resolver diversos tipos de problemas de engenharia, mas para isso é necessário conhecê-los de forma aprofundada, a fim de que seja escolhido o método mais eficiente e eficaz para solução de cada problema.

Atualmente, os métodos computacionais mais utilizados são os Métodos das Diferenças Finitas (MDF), Métodos dos Elementos Finitos (MEF) e Métodos dos Elementos de Contorno (MEC).

No MDF, as equações do problema são obtidas a partir do uso de operadores agindo em todos os pontos distribuídos pelo domínio do corpo. Já no MEF, há a utilização de elementos finitos, que são utilizados para dividir o domínio em pequenos subdomínios, com o objetivo de aproximar as variáveis do problema que se pretende analisar. Com isso, estes 2 (dois) métodos necessitam da discretização de todo o domínio a ser analisado.

Todos os métodos mencionados possuem vantagens e desvantagens, mas, segundo Brebbia *et al.* (1984), para a solução de problemas relacionados à engenharia, o MEC é o mais atrativo, uma vez que necessita de discretização apenas no contorno do domínio a ser analisado, diminuindo assim, o custo computacional e o tempo de processamento para resolver a equação integral governante dos problemas.

Assim sendo, a aplicabilidade do MEC vem crescendo conforme se observa na literatura, porém, ainda são poucos os grupos de pesquisa no país que vêm se aprofundando nesta metodologia se comparado com o amplo uso da metodologia MEF, o que caracteriza a contribuição acadêmica desta pesquisa de mestrado.

### 1.1. JUSTIFICATIVA

Para o MEF tradicional, o mercado já oferece várias ferramentas para o tratamento de dados na busca de soluções dos problemas de engenharia.

Por outro lado, o mesmo não ocorre para o MEC, o que de certa forma justifica que o mesmo ainda não seja considerado um método totalmente eficiente, exatamente por tratar-se de uma metodologia que ainda se encontra em processo de desenvolvimento e experimentação, não dispondo de softwares comerciais acreditados e amigáveis de amplo uso.

Uma das importantes vantagens é que o MEC possui uma formulação matemática mais sofisticada, em comparação com outros métodos numéricos, como por exemplo, o já citado método dos elementos finitos (MEF). Essa sofisticação matemática o torna uma técnica de solução de problemas bem mais interessante para ser aplicada, em especial na solução de casos complexos.

A partir da sua formulação matemática, é possível reduzir o número de incógnitas de um dado problema, uma vez que se trabalha com integrais de contorno, para análises de problemas 2D, bem como, integrais de superfícies, para o caso de análises em 3D. Conseqüentemente, reduz-se, também, o tamanho das matrizes, que, apesar de serem mais preenchidas que as dos MEF, tornam-se mais atrativas de se trabalhar por possuírem menos linhas e colunas para processamento.

Além disso, é possível alcançar bons resultados utilizando-se poucos elementos, ou seja, com uma menor discretização do problema. Esses fatores favorecem a utilização

do MEC, inclusive, para análises de problemas transientes, aqueles dependentes do tempo.

Nesta direção, são apresentados a seguir, o objetivo geral e os objetivos específicos deste trabalho de mestrado, tomando como hipóteses: i) que a aplicabilidade do MEC na análise de problemas viscoelásticos e termoelásticos confere resultados confiáveis; e ii) que o MEC apresenta potencial de aplicabilidade na solução de problemas complexos de engenharia.

## 1.2. OBJETIVOS

### 1.2.1. Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo geral aplicar e validar a modelagem computacional denominada Método dos Elementos de Contorno (MEC) para análises viscoelásticas e termoelásticas.

### 1.2.2. Objetivos específicos

1. Aplicar o MEC em 2D para análises viscoelásticas, utilizando o software MATLAB, voltado para cálculos numéricos;
2. Validar o código elaborado em 2D, analisando o comportamento de materiais viscoelásticos;
3. Aplicar o MEC em 2D para análises termoelásticas, utilizando o mesmo software;
4. Validar o código elaborado em 2D, analisando o comportamento de materiais termoelásticos;
5. Aplicar o MEC em 3D para análises termoelásticas, utilizando o MATLAB;
6. Validar o código elaborado em 3D, analisando o comportamento de materiais termoelásticos; e
7. Verificar a aplicabilidade do MEC em materiais sujeitos ao processo de soldagem.

## 1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Na sequência do Capítulo 1 que apresenta a Introdução, os demais Capítulos no decorrer desta dissertação, encontram-se organizados da seguinte forma.

O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico, a partir de uma revisão bibliográfica, que indica os trabalhos, as pesquisas e os principais conceitos utilizados como base para a produção de conhecimento desta dissertação.

No Capítulo 3 são descritos os modelos reológicos mais utilizados para representar o comportamento de materiais viscoelásticos, as formulações do MEC utilizadas neste trabalho de pesquisa para analisar problemas viscoelásticos e, além disso, os resultados e discussões relativos à aplicação e validação do MEC para análises viscoelásticas em 2D.

No Capítulo 4 são descritas as formulações do MEC utilizadas neste trabalho de pesquisa para problemas termoelásticos, demonstrando, inclusive, a aplicação do Método da Reciprocidade Dual (MRD) ou, em inglês, *Dual Reciprocity Method* (DRM). A formulação ora indicada demonstra a maneira rápida e prática de calcular tensões e deslocamentos, para além dos pontos externos, incluindo os pontos internos do domínio em análise. Também são apresentados nesse capítulo, os resultados e discussões relativos à aplicação e validação do MEC para análises termoelásticas em 2D e 3D, incluindo uma análise de material sujeito ao processo de soldagem.

A apresentação de forma agregada e sequencial dos Capítulos 3 e 4 se deu pelo entendimento de que seria mais adequado, no sentido de facilitar a compreensão das formulações, simulações e validações realizadas passo a passo, tanto para análises viscoelásticas, quanto para análises termoelásticas.

Por fim, o Capítulo 5 contém as conclusões desta dissertação, seguido do Capítulo 6 com recomendações e perspectivas futuras de trabalhos acadêmicos.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1. MÉTODOS MATEMÁTICOS: MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC) E MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL (MRD)

Nas últimas três décadas, o MEC vem ganhando destaque em trabalhos de pesquisa básica, porém, sem grandes aplicações e simulações de engenharia. O MEC é um método computacional utilizado para a obtenção da solução de problemas de valor de contorno descritos por formulações integrais. Consiste, segundo Brebbia *et al.* (1984), Brebbia e Domingues (1987) e Aliabadi (2002), na aquisição das equações integrais somente considerando as informações contidas no contorno do material, ou seja, uma discretização apenas no contorno que utiliza técnicas avançadas de integração numérica. Com isso, há uma redução de uma ordem da dimensão do problema, por exemplo, na análise de um problema bidimensional de mecânica dos sólidos, o problema se reduz à análise no contorno unidimensional, por outro lado, se o problema é tridimensional, a análise se reduz a um contorno bidimensional representado pela respectiva superfície.

Segundo Carbone (2007), a primeira análise do MEC é feita com os valores de forças de superfície e deslocamentos para os nós dos elementos discretizados no contorno. Para realizar essa análise é necessário o conhecimento prévio de uma solução particular do problema, a qual é conhecida como solução fundamental. Posteriormente, os resultados em qualquer ponto do contorno são obtidos através da interpolação, dos valores adquiridos na primeira análise, em cada um dos elementos.

O MEC está em crescente desenvolvimento, por trata-se de um método relativamente novo e ainda tem muitas vertentes para serem estudadas. Uma delas são os estudos da utilização do método para problemas de sub-regiões, como por exemplo para modelagem do suporte de túneis realizado por Oliveira (2009). E, para processos de homogeneização de materiais viscoelásticos, onde deseja-se encontrar o Elemento de Volume Representativo (EVR) de um compósito possuindo uma matriz com inclusões sólidas. Nesse caso, as inclusões são tratadas como sub-regiões da matriz que os abriga como pode ser visto nos trabalhos de Oberg (2013), Furtado *et al.* (2016) e Arroyave (2017).

Outra vertente são os estudos realizados a respeito dos métodos de transformação de integral de domínio em integral de contorno. Esse problema ocorre, principalmente,

em problemas relacionados à termoelasticidade, devido aos efeitos térmicos causados por um campo de temperatura imposto ao domínio da análise, gerando assim, integrais de domínio fazendo parte das integrais governantes do problema.

O método tem, portanto, se mostrado promissor, por permitir a aplicação de análises numéricas por meio de sistemas de equações, característica de modelagem computacional, que indica sua aplicabilidade em várias áreas, o que inclui análises de problemas de engenharia. No entanto, constata-se que não há na literatura do país, muitos trabalhos utilizando o MEC para solucionar problemas específicos de termoelasticidade, como por exemplo, o processo de soldagem de um material. Vale dizer que há na literatura nacional e internacional, pesquisas sobre a utilização de metodologias capazes de transformar as integrais de contorno em integrais de domínio.

De acordo com Partridge *et al.* (1992), para lidar com as forças de volume e variação de temperatura, ou seja, com termos que não pertencem ao contorno, vários autores preferiam discretizar o domínio da análise em uma série de células internas. Essa discretização acarreta no aumento da quantidade de dados a serem manipulados, acabando, assim, com um dos motivos do MEC ser atrativo, o de não precisar discretizar o domínio e, conseqüentemente, diminuir uma dimensão das integrais governantes do problema.

Nesse sentido, diversos estudos foram realizados com o objetivo de tornar eficiente a transformação de uma integral de domínio em uma integral de contorno. Rizzo e Shippy (1977) propuseram o uso do teorema de Green para contornar esse problema. Essa alternativa foi testada por Karami e Kuhn (1993) e demonstrou-se ser mais eficiente que o da discretização do domínio da análise em uma série de células internas.

Henry e Banerjee (1988) utilizaram as integrais particulares para lidar com a integral de domínio. Em seu trabalho, eles desenvolveram uma nova formulação do MEC para resolver problemas termoelásticos, comprovando sua eficiência através da solução de exemplos e comparação dos resultados obtidos numericamente com os analíticos. A metodologia apresentada por Henry e Banerjee (1988) foi utilizada neste trabalho para calcular o deslocamento sofrido pelo material na análise termoelástica.

Na direção da evolução contínua das pesquisas, Cruse (1979) propôs a utilização do Método do Tensor de Galerkin (MTG) no qual possuiria maior eficiência para solução da equação de Laplace ou de Poisson. Além de resolver essas duas equações, Brebbia e

Domingues (1987), mostraram que o método também pode ser utilizado em problemas de elasticidade contendo forças gravitacionais, centrífugas ou carregamento térmico.

Outro método formulado com o objetivo de evitar essa discretização extra foi o Método da Reciprocidade Dual (MRD). Nardini e Brebbia (1982) introduziram o método aplicando-o em problemas de vibrações, entretanto, Partridge e Wrobel (1990) e Partridge e Brebbia (1990), ampliaram sua aplicabilidade, contemplando problemas mais gerais, sendo possível utilizá-lo neste trabalho para representar a contribuição difusiva na análise termoelástica.

Segundo Partridge *et al.* (1992), o MRD é uma forma generalizada de encontrar uma solução particular capaz de resolver problemas não-lineares, transientes (dependentes do tempo) e problemas com uma solicitação agindo no interior do domínio.

No estudo, os autores realizaram comparações das funções de aproximações globais com funções radiais utilizadas em problemas onde a integral de volume possui derivada de primeira e segunda ordem, confirmando a eficiência do método.

O pesquisador Baranoglu (2003), utilizou, então, o MRD para solucionar problemas de termoelasticidade e viscoelasticidade, introduzindo uma forma de unificar a formulação do MRD para análises de problemas termoviscoelásticos acoplados e desacoplados. Para tanto, a formulação foi realizada no espaço da frequência, através da transformação de Fourier conseguindo, assim, eliminar a necessidade da utilização de soluções fundamentais muito complexas.

Já a pesquisadora Medeiros (2001), utilizou o MRD combinado com o Método das Soluções Fundamentais (MSF), um método que não requer malha, nem integração, para analisar problemas de potencial em duas e três dimensões. A pesquisadora conseguiu obter resultados com uma precisão elevada utilizando as funções *Polyharmonic Splines* junto com funções polinomiais de até quinta ordem.

Com base nas informações contidas nos trabalhos citados, foi possível a aplicação e validação do MEC para análises viscoelásticas e termoelásticas. Por tratar-se de um método numérico, sua utilização está condicionada à utilização de um software capaz de calcular as integrais de sua formulação matemática. Para realização desses cálculos, foi utilizado o software MATLAB.

## 2.2.FERRAMENTA COMPUTACIONAL: SOFTWARE MATLAB E GMSH

A ferramenta computacional MATLAB (MATrix LABoratory) é um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico, e integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente amigável e onde problemas e soluções são expressos matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

O MATLAB é, assim, um sistema interativo cujo elemento básico de informação é uma matriz que não requer dimensionamento, que permite a resolução de problemas numéricos em fração do tempo que se gastaria para escrever um programa semelhante em linguagens como Fortran, Basic ou C, além de possuir uma interface gráfica amigável que permite o acesso fácil à grande quantidade de recursos. (Chapman, 2010)

Por tratar-se de um software matemático, para análises de problemas em 3D, onde a criação da geometria e geração da discretização torna-se mais complexa, fez-se uso do software GMSH, um gerador de malha de elementos finitos.

Apesar do GMSH ser um gerador de malha utilizado em análises de MEF, é possível gerar a malha só considerando a superfície do material, com isso, a malha gerada nessas condições pode ser utilizada em análises de MEC.

O GMSH foi utilizado nesta dissertação por ser um software livre, acessível e possibilitar a importação dos nós e conectividades da malha gerada. Com esses dados em formato de texto, é possível criar uma rotina no MATLAB para reproduzir a malha e prosseguir com uma análise utilizando MEC.



### 3. COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO

O termo viscoelástico refere-se a materiais cujo comportamento é intermediário aos sólidos hookeanos (puramente elástico) e líquidos newtonianos (puramente viscoso). Com isso, esse tipo de material possui simultaneamente propriedades elásticas e viscosas, conforme apresentado na Equação (1) (Furtado *et al.*, 2016)

$$\begin{array}{ccc} \text{Sólido Elástico} & \text{Fluido Viscoso} & \text{Sólido Viscoelástico} \\ \sigma^e = C \varepsilon^e & + \quad \sigma^v = \eta \dot{\varepsilon}^v & = \quad \underline{\sigma}(t) = \underline{L} \underline{\varepsilon}(t) \end{array} \quad (1)$$

onde  $\sigma^e$ ,  $\varepsilon^e$ ,  $\sigma^v$  e  $\dot{\varepsilon}^v$  são, respectivamente, a tensão elástica, deformação elástica, tensão viscosa, derivada da deformação viscosa,  $C$  é o tensor constitutivo elástico,  $\eta$  é o tensor constitutivo viscoso e  $L$  é uma transformação que associa cada histórico de deformações a um histórico de tensões. Equação deste tipo, em que há uma dependência explícita do histórico das variáveis envolvidas, são conhecidas como equações hereditárias.

A descrição e previsão das condições de repouso ou movimento dos corpos descritos por este tipo de equações, sob ação de forças, deu origem a mecânica hereditária, que modernamente passou a ser chamada de teoria da viscosidade (Gurtin e Sternberg, 1962).

Um material viscoelástico linear possui um comportamento mecânico dependente do tempo, conforme mostrado na Equação (1). Segundo Pagliosa (2004), esse comportamento pode ser manifestado pela deformação de fluência e pela relaxação de tensão.

Para o caso da fluência, é aplicada ao material uma tensão constante e este exhibe uma deformação dependente do tempo, superior a uma deformação elástica inicial. No caso da relaxação de tensão, o material é submetido a uma deformação constante e, com isso, ocorre a relaxação que depende do tempo. Para representar o comportamento mecânico de um material viscoelástico a longo prazo, é necessário estabelecer a equação constitutiva do material, determinando-se seus parâmetros através de ensaios de fluência ou relaxação obtidos experimentalmente. Também é possível obter esses parâmetros a partir de modelos reológicos, que aproximam o comportamento do material a arranjos de molas e amortecedores viscosos.

Segundo Arroyave (2017), o elemento de mola, mostrado na Figura (1), é utilizado para representar o material com comportamento elástico linear, obedecendo a Lei de Hooke, onde o material em questão consegue reverter a deformação sofrida e voltar para a condição inicial depois de retirada a solitação sofrida e, além disso, tanto a deformação, quanto a recuperação ocorre instantaneamente (Figura (1)). A relação constitutiva para o elemento de mola é descrita na Equação (2). (Canevarolo Jr, 2010 e Anacleto, 2010)

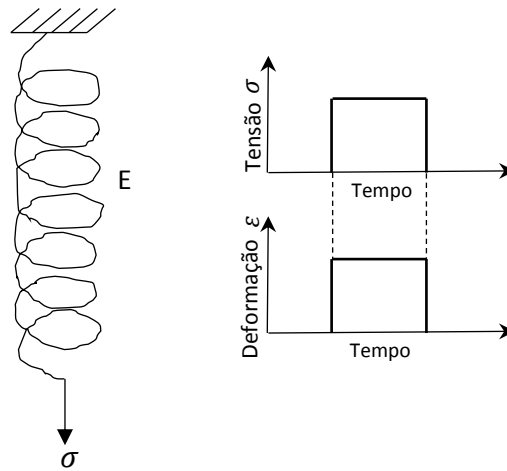


Figura 1. Elemento de mola (Fonte: Canevarolo Jr, 2010)

$$\sigma^e = E\varepsilon^e \quad (2)$$

onde  $E$  é o módulo de Young da mola.

Por outro lado, o elemento de amortecedor, ilustrado na Figura (2), é utilizado para representar o material com comportamento puramente viscoso, descrito pelo modelo de Newton, possuindo tensões proporcionais à taxa de deformação e à deformação que o material sofre, com isso, é possível que o material apresente deformações permanentes, ou seja, que modifique sua configuração inicial (Figura (2)). A relação constitutiva para o elemento de amortecedor é descrita na Equação (3).

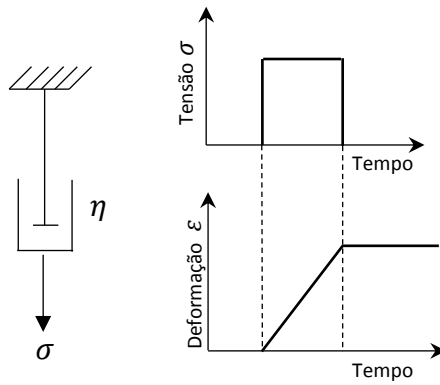


Figura 2. Elemento de amortecedor (Fonte: Canevarolo Jr, 2010)

$$\sigma^v = \eta \dot{\epsilon} \quad (3)$$

onde  $\eta$  é o coeficiente viscoso e o ponto em cima da deformação viscosa ( $\dot{\epsilon}$ ) representa a derivada temporal.

A partir da associação em série ou em paralelo dos modelos reológicos apresentados acima, é possível descrever o comportamento viscoelástico do material, conforme mostrado na Figura (3).

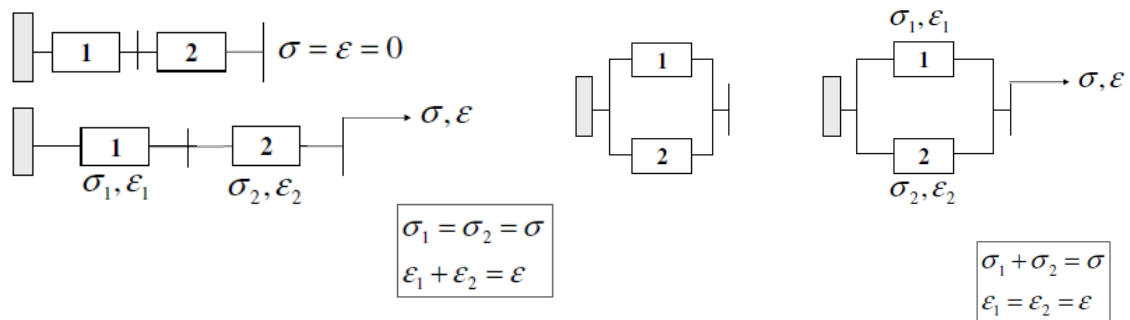


Figura 3. Associação em série e em paralelo (Fonte: Adaptado de Dinis, 2005)

Conforme apresentado na Figura (3), quando utilizado a associação em série, a tensão total é equivalente à tensão elástica na mola e à tensão viscosa no amortecedor, já a associação em paralelo, a deformação total é equivalente à deformação elástica na mola e à deformação viscosa no amortecedor

A Figura (4) mostra, então, os três modelos mais utilizados para representar o comportamento viscoelástico do material a partir da associação dos elementos de mola e amortecedor (Canevarolo Jr, 2010).

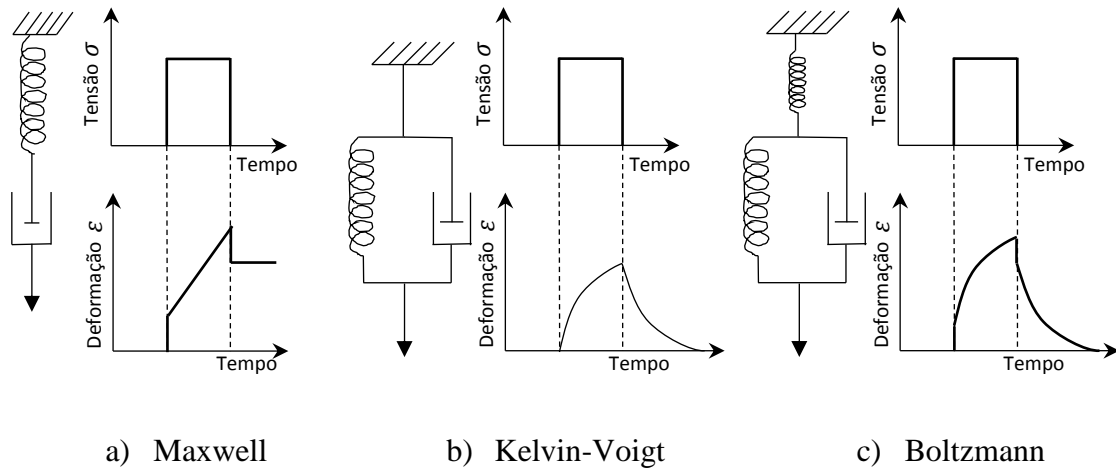


Figura 4. Modelos reológicos (Fonte: Canevarolo Jr, 2010)

O modelo de Maxwell, ilustrado na Figura (4-a), utiliza-se da associação em série do elemento de mola com o de amortecedor, o modelo de Kelvin-Voigt (Figura (4-b)), utiliza-se da associação em paralelo e, o modelo de Boltzmann, utiliza-se de uma associação em série de um elemento de mola com a configuração do modelo de Kelvin-Voigt (Figura (4-c)).

### 3.1. MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN-VOIGT

A partir das Equações mostradas na Figura (3), nota-se que as equações equivalentes para o elemento de amortecimento e de mola, para o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, são descritas nas Equações (4) e (5), respectivamente.

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (4)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (5)$$

A partir das Equações (2), (3), (4) e (5), segundo Mesquita (2002) e Mesquita e Coda (2002), a tensão pode ser reescrita conforme a Equação (6) ou, de forma generalizada para um modelo tridimensional, conforme Equação (7), a seguir:

$$\sigma = C\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \quad (7)$$

O tensor constitutivo elástico  $C_{ijkl}$  e o tensor constitutivo viscoso  $\eta_{ijkl}$  são dados pelas Equações (8) e (9) respectivamente.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (8)$$

$$\eta_{ijkl} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \theta_\mu \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (9)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé,  $\theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são os parâmetros viscosos hidrostático e desviatório e  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker, dado pela Equação (10).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (10)$$

É importante salientar que  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são parâmetros do material determinados experimentalmente. Assumindo a simplificação apresentada na Equação (11), na qual os parâmetros viscosos são equivalentes a constante constitutiva viscosa  $\gamma$ , pode-se escrever a relação entre os tensores constitutivos segundo a Equação (12).

$$\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma \quad (11)$$

$$\eta_{ijkl} = \gamma C_{ijkl} \quad (12)$$

Com isso, a relação constitutiva para análises viscoelásticas, utilizando o modelo de Kelvin-Voigt, é dada pela Equação (13).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} + \gamma \dot{\varepsilon}_{kl}) \quad (13)$$

### 3.2. MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL

O modelo viscoelástico de Maxwell trata-se da associação em série de um elemento de mola e de amortecedor. Com isso, a deformação total pode ser calculada a partir da soma da deformação elástica sofrida pela mola com a deformação viscosa sofrida pelo amortecedor. Por outro lado, a tensão total será equivalente à tensão na mola e à tensão no amortecedor, conforme descrito nas Equações (14) e (15).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (14)$$

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (15)$$

Utilizando as Equações (2), (3), (14) e (15), e utilizando os conceitos mostrados anteriormente, a relação constitutiva para análises viscoelásticas, utilizando o modelo de Maxwell, é dada pela Equação (16) (Oliveira e Leonel, 2014).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{E} + \frac{\sigma_{ij}}{\eta} \quad (16)$$

Escrevendo a Equação (16) em termos da tensão, utilizando os conceitos vistos anteriormente, temos que a relação constitutiva para análises viscoelásticas utilizando o modelo de Maxwell é dada por:

$$\sigma_{ij} = \gamma \left( C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \quad (17)$$

### 3.3. MODELO VISCOELÁSTICO DE BOLTZMANN

O modelo viscoelástico de Boltzmann trata-se da associação em série de um elemento de mola com a configuração do modelo de Kelvin-Voigt. Com isso, a deformação total pode ser calculada a partir da soma da deformação elástica sofrida pela mola ( $\varepsilon_{lm}^e$ ) com a deformação total sofrida pelo modelo de Kelvin-Voigt ( $\varepsilon_{lm}^{ve}$ ) (Equação (5)). Por outro lado, a tensão total será equivalente à tensão na mola ( $\sigma_{ij}^e$ ) e à tensão sofrida pelo modelo de Kelvin-Voigt ( $\sigma_{ij}^{ve}$ ) (Equação (4)), conforme descrito nas Equações (18), (19) e (20).

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (18)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{ve} \quad (19)$$

$$\sigma_{ij}^{ve} = \sigma_{ij}^{el} = \sigma_{ij}^v \quad (20)$$

A partir das Equações (18), (19) e (20), a tensão pode ser reescrita conforme a Equação (21).

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{E_{ve} E_e}{E_{ve} + E_e} \right) \tilde{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \left( \frac{E_{ve} E_e}{E_{ve} + E_e} \right) \tilde{\eta}_{ij}^{lm} \tilde{D}_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (21)$$

onde  $\tilde{C}_{ij}^{lm}$ ,  $\tilde{\eta}_{ij}^{lm}$  e  $\tilde{D}_{ij}^{lm}$  são os tensores constitutivos adimensionais.

Com o objetivo de escrever a relação constitutiva para análises viscoelásticas utilizando o modelo de Boltzmann, utilizando somente elementos no contorno, é necessário impor novamente a simplificação apresentada na Equação (11), na qual os parâmetros viscosos são equivalentes a constante constitutiva viscosa  $\gamma$ , podendo

escrever a relação entre os tensores constitutivos segundo a Equação (12). Com isso, manipulando a Equação (21), temos a Equação (22). (Mesquita e Coda, 2002)

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{E_{ve} E_e}{E_{ve} + E_e} \right) C_{ij}^{0n} \varepsilon_{lm} + \left( \frac{\gamma E_{ve} E_e}{E_{ve} + E_e} \right) C_{ij}^{0n} \varepsilon_{lm} - \left( \frac{\gamma E_{ve}}{E_{ve} E_e} \right) \alpha_{ij} \quad (22)$$

### 3.4.MEC PARA VISCOELASTICIDADE (2D)

A fim de simplificar as equações utilizadas, a formulação será representada utilizando notação cartesiana indicial em conjunto com a notação matricial, onde as matrizes são denotadas com dois traços abaixo de sua nomenclatura. A notação indicial é utilizada para suprimir o símbolo de somatório quando ocorrerem dois índices iguais no mesmo termo, conforme abaixo:

$$\sigma_i \sigma_i = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (23)$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (24)$$

Já as derivadas no plano serão representadas por uma vírgula antes da direção na qual a derivada será realizada, como por exemplo:

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_f} = \sigma_{jk,j} \quad (25)$$

Dito isso, a obtenção da solução fundamental, no caso de análise de tensões, deve considerar que uma carga unitária concentrada é aplicada em um ponto  $P$  de um domínio infinito e homogêneo. A solução fundamental dos deslocamentos  $u_{ij}^*$  e forças de superfícies  $p_{ij}^*$  para problemas bidimensionais podem ser escritas segundo as Equações (26) e (27), respectivamente.

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (26)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{dr}{dn} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] - (1-2\nu) (n_{,j} r_{,i} - n_{,i} r_{,j}) \right\} \quad (27)$$

e, para o problemas tridimensionais é dado por:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (28)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (29)$$

Onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\mu$  é a segunda constante de Lamé,  $n$  é a componente normal no ponto onde a força de superfície  $p_{ij}^*$  é medida,  $r$  é a distância entre o ponto em que  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  são observados e o ponto  $P$  e  $r_{,i}r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}$ .

Os problemas apresentados no decorrer da dissertação encontram-se em equilíbrio na posição inicial e podem ser analisados tanto para o estado plano de tensão, quanto para o estado plano de deformação.

No estado plano de tensão, todas as componentes de tensão em uma direção (tensões axiais e cisalhantes) podem ser consideradas nulas, resultando em um estado de tensão que só depende de duas direções. Já no estado plano de deformação, as componentes de deformação em uma direção podem ser consideradas nulas, resultando em um estado de deformação que só depende de duas direções.

O estado plano de tensão ocorre quando é considerado análise de materiais com uma espessura muito fina, onde uma direção é muito menor que a outra, e, o estado plano de deformação ocorre quando é considerado análise de materiais que possuem uma dimensão muito grande em relação às outras, como por exemplo, análise de barragens.

A demonstração da formulação integral viscoelástica do MEC utilizando o modelo de Kelvin-Voigt, apresentada a seguir, foi realizada com base na dissertação de doutorado de Mesquita (2002).

### 3.4.1. Cálculo deslocamento modelo de Kelvin-Voigt

O equilíbrio de forças de um elemento infinitesimal dentro de um domínio  $\Omega$  pode ser expressa conforme a Equação (30).

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (30)$$



Utilizando a técnica dos resíduos ponderados para integrar a Equação (30) e adotando a solução fundamental de Kelvin-Voigt como sendo uma função residual da Equação (30), resulta a Equação (31).

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (31)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo da Equação (31), resulta a Equação (32).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (32)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno do problema analisado. Sabe-se que  $\sigma_{ij} n_j = p_i$  e  $u_{ki,j}^* \sigma_{ij} = \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}$ , onde  $\varepsilon_{kij}^*$  é a deformação fundamental. Com isso, a Equação (32), pode ser escrita conforme a Equação (33).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (33)$$

A Equação (33) é o ponto inicial para obtenção da representação da integral viscoelástica. Impondo a relação constitutiva apresentada na Equação (13) à Equação (33), tem-se a Equação (34).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ijlm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ijlm} \varepsilon_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (34)$$

Sabe-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ijlm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (35)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ijlm} \varepsilon_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \gamma \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (36)$$

Com isso, a Equação (34) é reescrita conforme a Equação (37).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (37)$$

Integrando o segundo e terceiro termo por partes, tem-se a Equação (38).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (38)$$

Lembrando que o equilíbrio fundamental de Kelvin-Voigt é dado por  $\sigma_{kij,j}^* = -\delta(p, s) \delta_{ki}$ , onde  $\delta(p, s)$  é a distribuição do Delta de Dirac,  $s$  é o ponto do domínio e  $p$

é o ponto fonte. Aplicando o equilíbrio fundamental de Kelvin-Voigt à Equação (38), considerando as propriedades do Delta de Dirac e que  $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ , tem-se a Equação (39).

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (39)$$

O termo  $\bar{C}_{ki}$  é o mesmo obtido na formulação elasto-estática e, segundo Mesquita e Coda (2002), pode ser encontrado em referências clássicas sobre MEC como Brebbia *et al.* (1984).

A Equação (39) é a equação integral viscoelástica alternativa do modelo de Kelvin-Voigt. Admitindo que não haja forças de volume  $b_i = 0$  e tampouco sua variação com o tempo  $\dot{b}_i = 0$ , a equação se resume a Equação (40).

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (40)$$

### 3.4.2. Cálculo tensões internas modelo de Kelvin-Voigt

Primeiramente é necessário escrever a integral dos deslocamentos para os pontos internos, que é dada conforme Equação (41).

$$u_k(p) + \gamma \dot{u}_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (41)$$

A relação entre deslocamentos e deformações considerando pequenas deformações é dada de acordo com a Equação (42).

$$\varepsilon_{ke} = \frac{1}{2} (u_{k,e} + u_{e,k}) \quad (42)$$

Aplicando a Equação (42) na Equação (41), resulta a Equação (43).

$$\varepsilon_{ke}(p) + \gamma \dot{\varepsilon}_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \varepsilon_{kie}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kie}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kie}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (43)$$

A tensão total é obtida aplicando a equação constitutiva apresentada na Equação (13) à Equação (43), com isso tem-se a Equação (44).

$$\sigma_{pq}^e(p) + \sigma_{pq}^v(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{piq}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (44)$$

Aplicando a Equação (4) à Equação (44), resulta a Equação (45).

$$\sigma_{pq}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{piq}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (45)$$

Utilizando a igualdade apresentada na Equação (46), conforme mostrado em Mesquita (2002), pode-se reescrever a Equação (4) conforme a Equação (47).

$$\sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\epsilon}_{ij}^l \quad (46)$$

$$\gamma \dot{\epsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij} = 0 \quad (47)$$

### 3.4.3. Formulação Matricial do MEC modelo Kelvin-Voigt

Aproximando as variáveis do problema a partir de uma parametrização com relação aos seus valores nodais e utilizando as funções de forma, é possível, de acordo com Mesquita (2002), obter a equação matricial para os deslocamentos, conforme Equação (48).

$$\underline{H} \underline{u}(t) + \gamma \underline{H} \dot{\underline{u}}(t) = \underline{G} \underline{p}(t) \quad (48)$$

As tensões podem ser escritas segundo Equação (49).

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{G}' \underline{p}(t) - \underline{H}' \underline{u}(t) - \gamma \underline{H}' \dot{\underline{u}}(t) \quad (49)$$

onde  $t$  representa o tempo e  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  são as matrizes que contêm todos os coeficientes de integração do contorno. Mesquita e Coda (2002) salienta que a Equação (49) pode ser resolvida numericamente adotando uma aproximação linear do tempo conforme Equação (50).

$$\dot{\underline{u}}_{s+1} = \frac{u_{s+1} - u_s}{\Delta t} \quad (50)$$

Aplicando a Equação (50) na Equação (48), resulta a Equação (51).

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \underline{H} \underline{u}_{s+1} = \underline{G} \underline{p}_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \underline{H} \underline{u}_s \quad (51)$$

A Equação (51) é o sistema de equação que deve ser resolvida ao longo do tempo para encontrar os valores dos deslocamentos no contorno, utilizando o modelo de Kelvin-Voigt. Para calcular as tensões totais nos pontos internos, a Equação (49) pode ser escrita no instante  $t_{s+1}$  conforme a Equação (52).

$$\underline{\sigma}_{s+1} = \underline{G}' \underline{p}_{s+1} - \underline{H}' \underline{u}_{s+1} - \gamma \underline{H}' \dot{\underline{u}}_{s+1} \quad (52)$$

Assumindo a aproximação linear da Equação (53) e substituindo na Equação (47), resulta a Equação (54).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e = \frac{\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e - \underline{\underline{\sigma}}_s^e}{\Delta t} \quad (53)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e = \frac{\underline{\underline{\sigma}}_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \underline{\underline{\sigma}}_s^e}{1 + \frac{\gamma}{\Delta t}} \quad (54)$$

As tensões viscosas nos pontos internos serão dadas de acordo com a Equação (55).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^v = \underline{\underline{\sigma}}_{s+1} - \underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e \quad (55)$$

#### 3.4.4. Formulação Matricial do MEC modelo Maxwell

A equação que permite a determinação dos valores desconhecidos no contorno do corpo, é obtida de forma similar aos procedimentos usados para o modelo de Kelvin-Voigt. Com isso, toda a manipulação matemática utilizada nesse subitem foi omitida a fim de simplificar as contas e tentar facilitar o entendimento.

Portanto, o sistema de equação que deve ser resolvida ao longo do tempo para encontrar os valores dos deslocamentos no contorno, utilizando o modelo de Maxwell, está descrito na Equação (56).

$$\underline{\underline{H}}u_{s+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{\gamma}\right) \underline{\underline{G}}p_{s+1} + \underline{\underline{H}}u_s - \underline{\underline{G}}p_s \quad (56)$$

As tensões totais nos pontos internos são determinadas usando a Equação (57).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1} = \Delta t \underline{\underline{G}} \left( \frac{1}{\gamma} p_{s+1} + p_s \right) - \Delta t \underline{\underline{H}}u_{s+1} + \underline{\underline{\sigma}}_s \quad (57)$$

#### 3.4.5. Formulação Matricial do MEC modelo Boltzmann

A equação governante do modelo viscoelástico de Boltzmann é obtida de maneira similar aos procedimentos usados para o modelo de Kelvin-Voigt, assim sendo, foi considerado dispensável apresentar as etapas de manipulação matemática aplicada nesse subitem, a fim de simplificar as contas e facilitar o entendimento.

Portanto, o sistema de equação que deve ser resolvida ao longo do tempo para encontrar os valores dos deslocamentos no contorno, utilizando o modelo de Boltzmann, está descrito na Equação (58).

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \underline{\underline{Hu}}_{s+1} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) \underline{\underline{G}} + \frac{\gamma}{\Delta t} (\underline{\underline{Hu}}_s - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{p}}_s) \quad (58)$$

A tensão total é calculada segundo a Equação (59).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1} = \frac{\left(\underline{\underline{G}} \underline{\underline{p}}_{s+1} - \frac{E_2}{E_1 + E_2} \underline{\underline{Hu}}_{s+1} - \frac{\gamma E_2}{E_1 + E_2} \underline{\underline{Hu}}_{s+1} + \frac{\gamma E_2}{E_1 + E_2} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{p}}_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \underline{\underline{\sigma}}_s\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2}\right)} \quad (59)$$

A tensão total foi dividida em uma parte elástica e outra viscosa. A parte elástica é calculada conforme Equação (60) e a parte viscosa, conforme Equação (61).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e = \frac{\left(\underline{\underline{\sigma}}_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \underline{\underline{\sigma}}_s^e\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)} \quad (60)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^v = \underline{\underline{\sigma}}_{s+1} - \underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e \quad (61)$$

### 3.5.MEC COM SUB-REGIÕES PARA VISCOELASTICIDADE

A técnica das sub-regiões, ou multi-zona, é utilizada quando pretende-se analisar um domínio compostos por várias regiões que possuem propriedades mecânicas distintas, isto é, as características do material não são constantes (Anacleto, 2010). A formulação do MEC para sub-regiões consiste em discretizar o contorno de cada região aplicando nas interfaces comuns, onde os elementos são solidários às duas regiões, as condições de compatibilidade, para garantir a continuidade do campo de deslocamento, e de equilíbrio, garantindo o equilíbrio de forças, conforme as Equações (62) e (63).

$$u^{12} - u^{21} = 0 \rightarrow u^{12} = u^{21} \quad (62)$$

$$p^{12} + p^{21} = 0 \rightarrow p^{12} = -p^{21} \quad (63)$$

onde o índice ij significa os nós compartilhados pelas duas sub-regiões.

Com isso, o problema heterogêneo é transformado em dois ou mais problemas homogêneos, onde as integrais de contorno governantes são as mesmas mostradas anteriormente. Resolvendo as integrais e aplicando as Equações (62) e (63), temos a matriz montada na Equação (64) para o problema ilustrado na Figura (5) (Obergh, 2013).

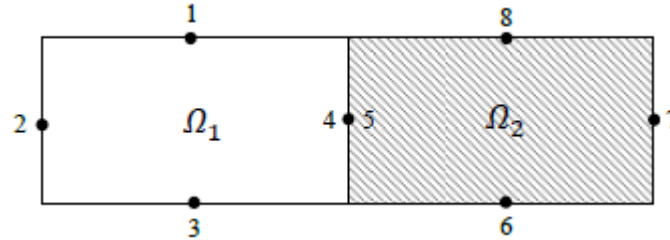


Figura 5. Material heterogêneo com duas sub-regiões homogêneas (Fonte: Obergh, 2013)

$$\begin{bmatrix} H_{ij}^1 & 0 \\ 0 & H_{ij}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ij}^1 & 0 \\ 0 & G_{ij}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Reagrupando a Equação (64), de modo que os valores conhecidos nos nós do contorno fiquem no lado esquerdo da equação e os valores desconhecidos, no outro lado, o problema é reduzido para um simples sistema linear  $\underline{Ax} = \underline{y}$ .

### 3.6. APLICAÇÃO DO MEC PARA PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS (2D)

Neste item são apresentados os desenvolvimentos, análises e os resultados de simulação e de validação dos códigos utilizados para análise de problemas viscoelásticos com o auxílio do software MATLAB.

O esforço desta pesquisa se concentrou especialmente nos desenvolvimentos das programações das equações mais adequadas para cada caso previsto nos objetivos específicos para análise viscoelásticas, bem como nas respectivas simulações, ao rodá-las no citado software, visando alcançar resultados satisfatórios e comparáveis aos resultados obtidos com a metodologia MEF e com métodos analíticos.

A validação foi realizada a partir da comparação dos resultados obtidos numericamente com a solução analítica dos problemas apresentados ou com artigos da literatura.

Foi elaborado um código para analisar materiais com comportamento viscoelástico utilizando o MEC com o intuito de tornar o MEC familiar, sendo possível assim, a implementação de problemas mais complexos, como por exemplo, análises de sub-regiões e com MRD.

### 3.6.1. Simulação do comportamento viscoelástico: Código 2D

A rotina produzida para calcular o comportamento de materiais viscoelásticos foi testada a partir da simulação de uma barra submetida a um carregamento distribuído aplicado na face em balanço. A geometria analisada é mostrada na Figura (6) e suas propriedades físicas são apresentadas na Tabela (1).

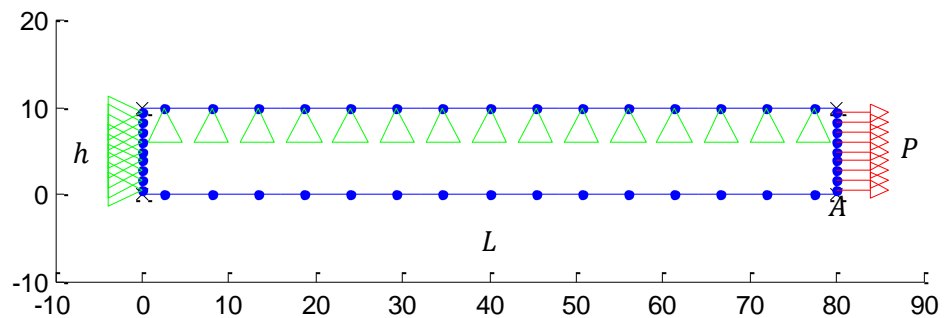


Figura 6. Geometria analisada (Fonte Própria)

Tabela 1. Propriedades mecânicas (Fonte: Mesquita e Coda, 2002)

Propriedade	Magnitude
$E_1$	22.5757 kgf/cm <sup>2</sup>
$E_2$	11 kgf/cm <sup>2</sup>
$\gamma$	45.4545 dias
$\nu$	0
L	80 cm
h	10 cm
$\Delta t$	1 dia

Tempo total de análise	450 dias
P(t)	5 kgf/cm <sup>2</sup>

Para a análise em questão, foram utilizados os três modelos descritos no presente trabalho para representar o comportamento do material viscoelástico, a fim de realizar uma comparação entre a aproximação proporcionada por cada modelo, conforme ilustrado na Figura (7).

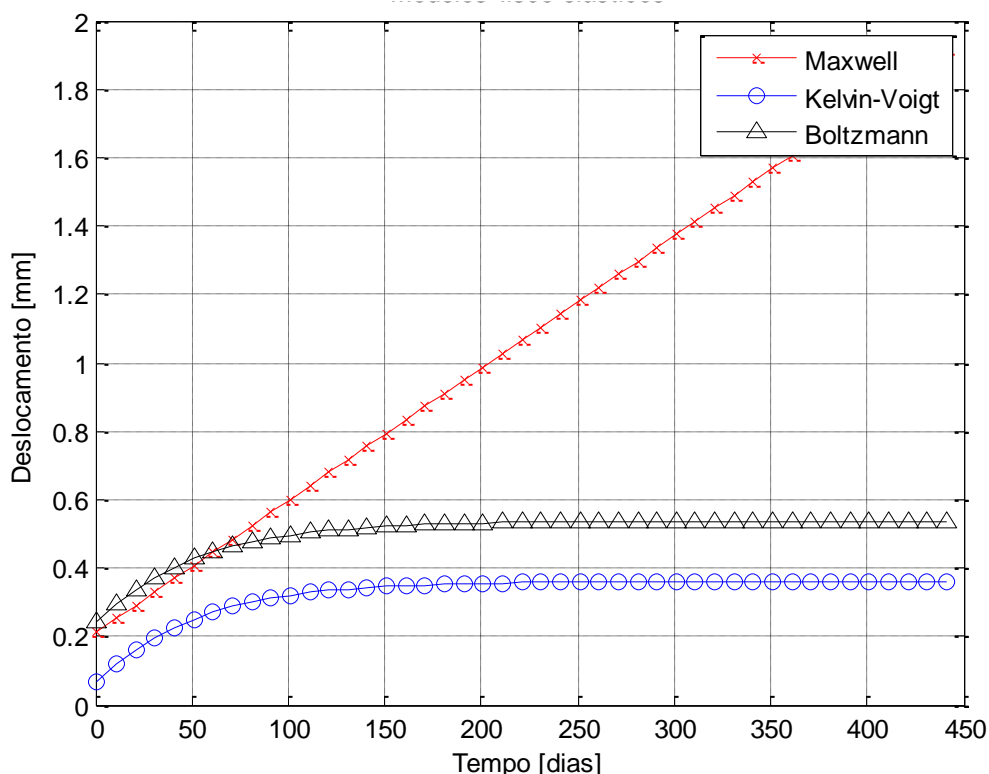


Figura 7. Comparação modelos viscoelásticos (Fonte Própria)

Percebe-se que o modelo de Maxwell, por ser o mais simples, apresenta a pior aproximação, uma vez que, por trata-se do modelo de associação em série de uma mola com um amortecedor, somente consegue representar a deformação instantânea no início da análise e o comportamento elástico até o final da análise. Já o modelo de Kelvin-Voigt, intermediário no quesito complexidade, consegue representar bem o comportamento viscoso, mas por tratar-se do modelo de associação em paralelo de uma mola com um amortecedor, não consegue retratar a deformação instantânea no início da análise causado pela contribuição elástica do material. Por fim, percebe-se que o modelo de Boltzmann, o mais complexo dentre os três, consegue retratar com uma boa aproximação o comportamento tanto viscoso, dado pela deformação até ficar estabilizada, quanto elástico, dado pela deformação inicial.



Também foi realizado uma análise do mesmo problema sendo retirado a carga após 200 dias de análise. Esse tipo de análise é realizado a fim de visualizar o retorno do material viscoelástico à posição inicial, sem deformações residuais, conforme ilustrado na Figura (8).

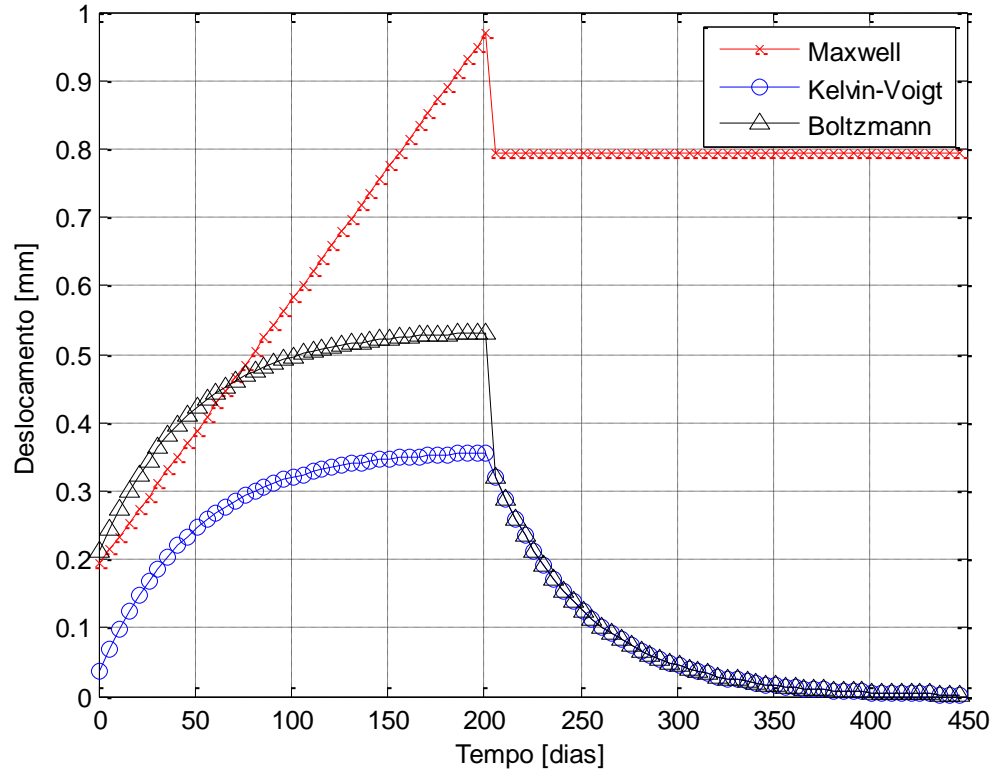


Figura 8. Análise retirando a carga (Fonte Própria)

Analisando a Figura (8), percebe-se que tanto o modelo de Kelvin-Voigt e Boltzmann conseguem representar o comportamento do material após a retirada da carga aplicada, mas mais uma vez, o modelo de Boltzmann apresenta uma melhor aproximação, uma vez que é capaz de mostrar a recuperação instantânea do material ao ser retirada a carga. Já o modelo de Maxwell, apesar de também mostrar a recuperação instantânea do material, não consegue representar a volta no material a posição não deformada.

Apesar do comportamento do gráfico da Figura (8) ser similar ao comportamento mostrado no livro do Canevarolo Jr (2010) (Figura (4)), o mesmo não serve como validação do código, por tratar-se de comparação meramente visual. Para tanto, foram utilizados os modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann, por tratar-se de modelos mais complexos e os que melhor representam o comportamento do material viscoelástico, para validarem os códigos, a partir da comparação dos resultados obtidos numericamente com suas soluções analíticas.

### 3.6.2. Simulação e validação do código viscoelástico 2D

A validação do código para análises viscoelásticas foi realizada considerando um cilindro de parede espessa submetido a uma pressão interna  $P$ , conforme mostrado na Figura (9). Esse problema mecânico foi analisado assumindo o estado plano de deformação e, como citado anteriormente, utilizando o modelo de Kelvin-Voigt e Boltzmann para representar o comportamento viscoelástico do material.

A geometria analisada é apresentada na Figura (9) e suas propriedades físicas na Tabela (2). (Mesquita e Coda, 2002)

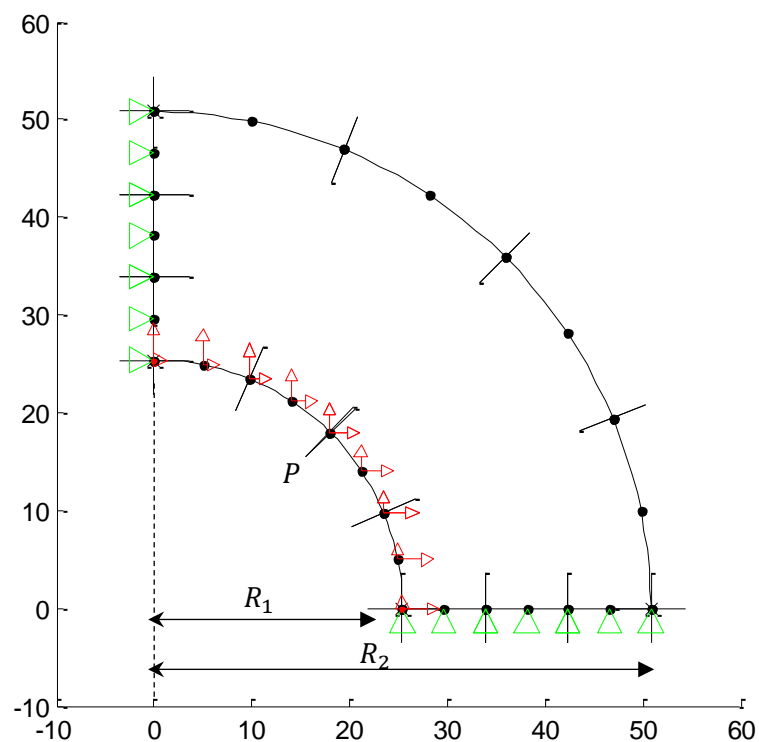


Figura 9. Geometria analisada (Fonte Própria)

Tabela 2. Propriedades mecânicas (Fonte: Mesquita e Coda, 2002)

Propriedade	Magnitude
$E_1$	90 kgf/cm <sup>2</sup>
$E_2$	35 kgf/cm <sup>2</sup>
$\gamma$	7.14285 dias
$\nu$	0.4
$R_1$	25.4 cm

$R_2$	50.8 cm
$\Delta t$	1 dia
Tempo total de análise	90 dias
$P(t)$	7.031 kgf/cm <sup>2</sup>

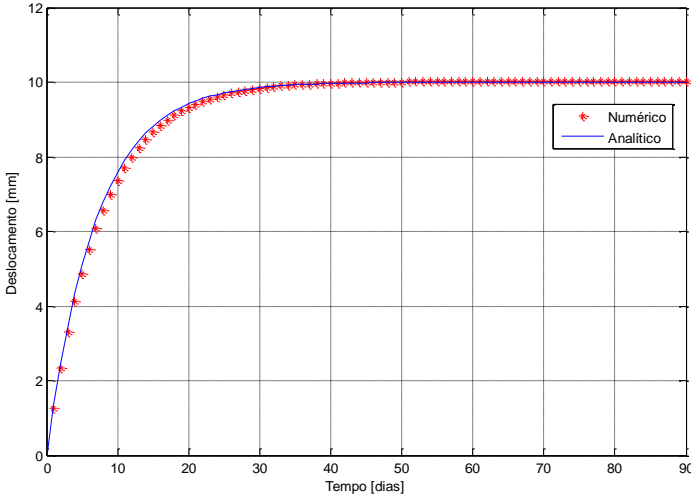
A solução analítica para o deslocamento radial da parede interna desse problema bidimensional, sob estado plano de deformação, como uma função dependente do tempo, para o modelo de Kelvin-Voigt, é dada por:

$$u_r(t) = \frac{P(1+\nu)}{R_2^2 - R_1^2} [(1-2\nu)R_1^3 + R_1R_2^2] \left[ \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_2} \left( -e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \quad (65)$$

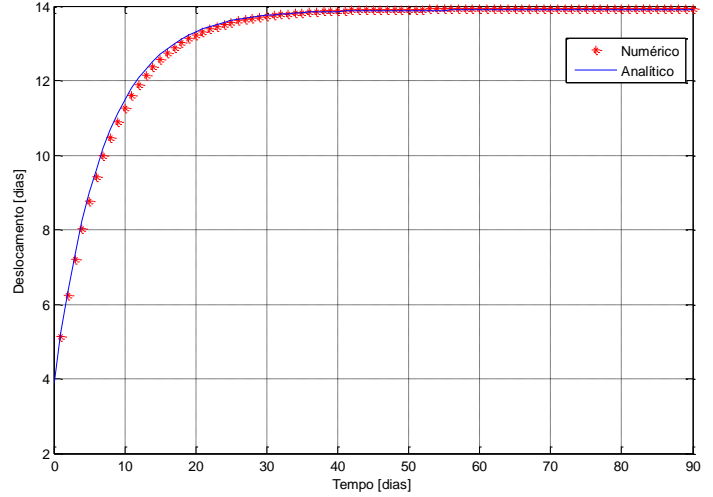
e, para o modelo de Boltzmann, é dada por:

$$u_r(t) = \frac{P(1+\nu)}{R_2^2 - R_1^2} [(1-2\nu)R_1^3 + R_1R_2^2] \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left( -e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \quad (66)$$

A comparação entre o resultado obtido a partir da solução analítica, dada pela Equação (65) e (66), e a implementação da formulação do MEC é apresentada na Figura (10).



a) Kelvin-Voigt



b) Boltzmann

Figura 10. Comparação solução analítica e numérica (Fonte Própria)

De acordo com os resultados apresentados, percebe-se uma boa concordância entre os resultados das duas soluções utilizadas, validando, assim, a rotina criada para simular o comportamento de materiais viscoelásticos.

Com a validação do código, o mesmo foi utilizado para o caso de problemas com sub-regiões.

### 3.6.3. Simulação e validação do código viscoelástico com sub-regiões 2D

Com a finalidade de validar a rotina elaborada para análise de dois materiais viscoelásticos apresentando propriedades físicas diferentes, foram realizadas três análises distintas, a saber:

- i. Problema com somente um domínio;
- ii. Problema com dois domínios e mesmas propriedades físicas; e
- iii. Problema com dois domínios e propriedades físicas diferentes.

O problema analisado será o mesmo utilizado anteriormente, representado pela Figura (6) com suas propriedades mecânicas descritas na Tabela (1).

No primeiro caso, problema com somente um domínio, tem-se o seguinte resultado, conforme Figura (11):

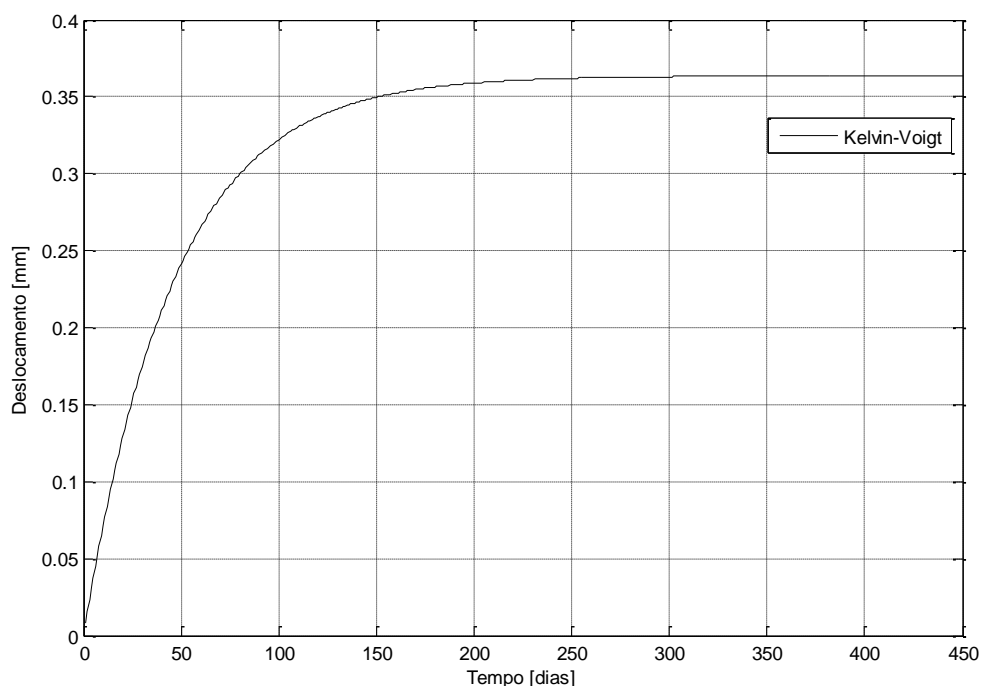


Figura 11. Análise viscoelástica com só um domínio (Fonte Própria)

O deslocamento longitudinal no ponto A, localizado na Figura (6), no fim da análise, isto é, para  $t = 450$  dias, foi comparado com o resultado analítico e o resultado obtido por Oliveira (2009) utilizando MEC e MEF. A comparação é apresentada na Tabela (3), a seguir:

Tabela 3. Comparação resultados

Análise	Deslocamento (mm)
Analítica	0.363618
MEF (Oliveira, 2009)	0.363618
MEC (Oliveira, 2009)	0.363616
MEC presente trabalho	0.363609

Os resultados apresentados estão em concordância e alinhados, sendo que a pequena divergência entre os resultados deve-se à quantidade de elementos utilizados na análise.

No segundo caso, problema com dois domínios (Figura (12)), e mesmas propriedades físicas, tem-se o resultado apresentado na Figura (13):

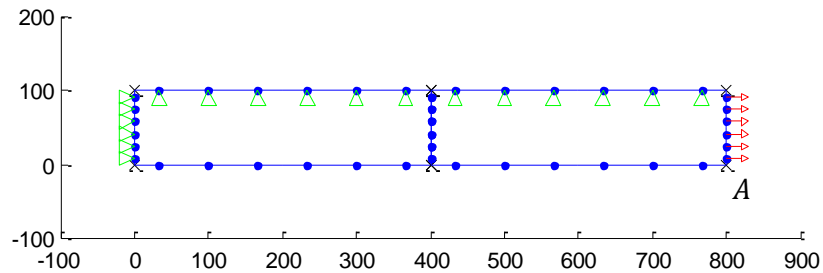


Figura 12. Geometria análise viscoelástica com dois domínios com mesmas propriedades (Fonte Própria).

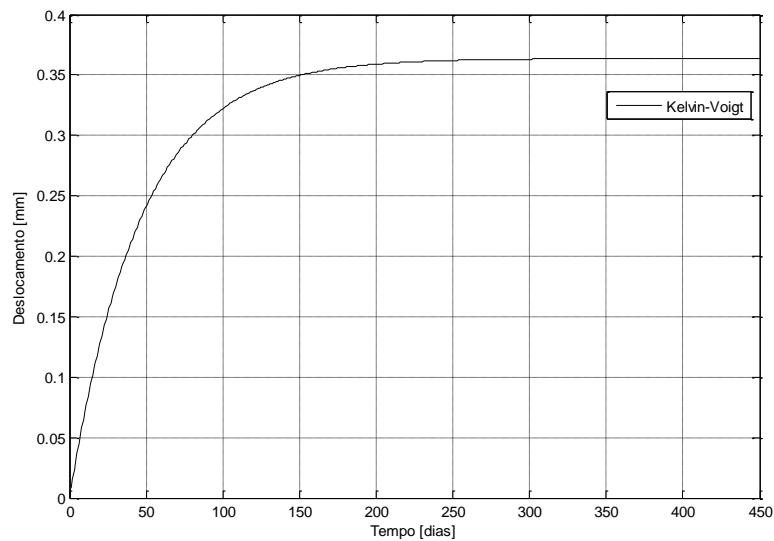


Figura 13. Resultado análise viscoelástica do ponto A, com dois domínios com mesmas propriedades (Fonte Própria)

Conforme esperado, o deslocamento longitudinal em  $A$  obteve o mesmo deslocamento para o caso de um só domínio e, para confirmar a eficácia do código, foi comparado o deslocamento longitudinal em um ponto entre os dois domínios (Figura (14)) no fim da análise com o resultado analítico e o resultado obtido por Oliveira (2009) utilizando MEC e MEF. A comparação é apresentada na Tabela (4).

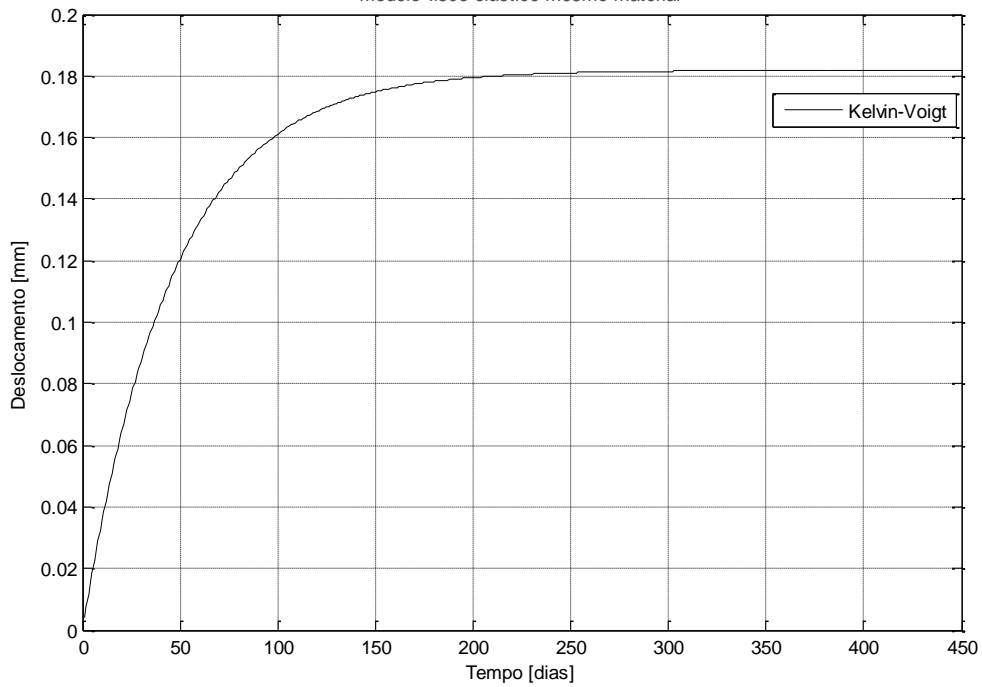


Figura 14. Deslocamento longitudinal em um ponto entre os dois domínios (Fonte Própria)

Tabela 4. Comparação dos resultados

<b>Análise</b>	<b>Deslocamento (mm)</b>
Analítica	0.181809
MEF (Oliveira, 2009)	0.181818
MEC (Oliveira, 2009)	0.181808
MEC presente trabalho	0.181804

Os resultados apresentados estão com boa precisão, sendo que a pequena divergência entre os resultados deve-se à quantidade de elementos utilizados na análise.

No terceiro e último caso, problema com dois domínios (Figura (12)), e propriedades físicas diferentes, conforme descritas na Tabela (5), foi obtido o resultado apresentado na Figura (15):

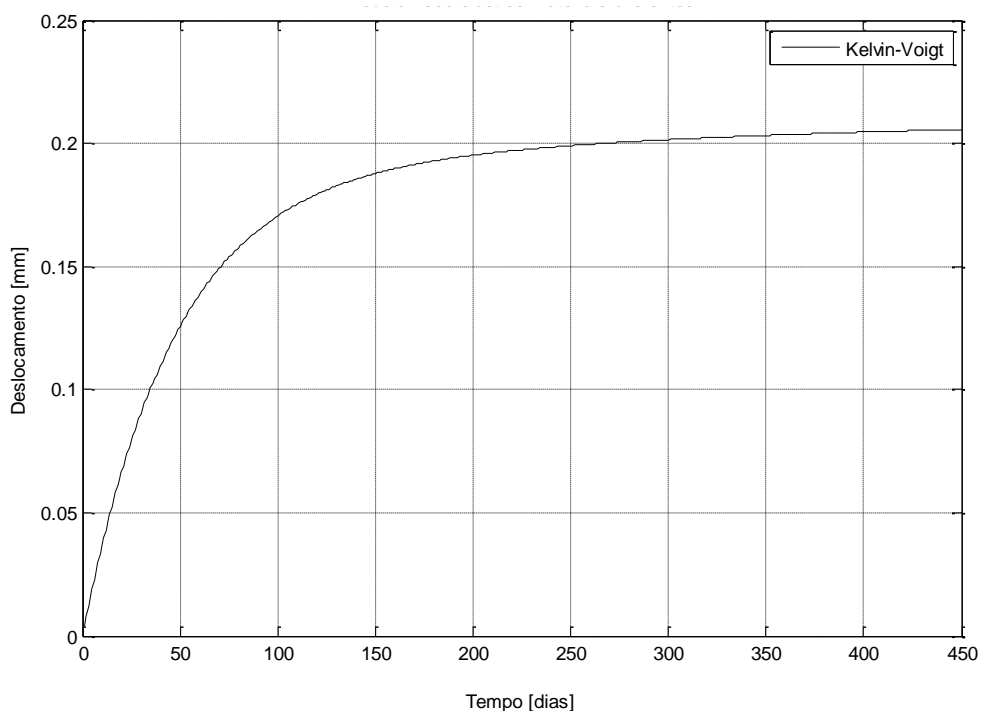


Figura 15. Resultado análise viscoelástica sub-regiões (Fonte Própria)

Tabela 5. Propriedades mecânicas dos dois domínios (Fonte: Oliveira, 2009)

<b>Propriedade</b>	<b>Magnitude</b>
$E_1$ (domínio 1)	70 kgf/cm <sup>2</sup>
$E_1$ (domínio 2)	11 kgf/cm <sup>2</sup>
$\gamma$ (domínio 1)	250 dias
$\gamma$ (domínio 2)	45.454545 dias
$\nu$ (domínio 1)	0
$\nu$ (domínio 2)	0
$\Delta t$	1 dia
Tempo total de análise	450 dias
P(t)	5 kgf/cm <sup>2</sup>

O deslocamento longitudinal no ponto *A* no fim da análise, foi comparado com o resultado analítico e o resultado obtido por Oliveira (2009) utilizando MEC e MEF. A comparação é apresentada na Tabela (6).

Tabela 6. Comparação dos resultados análise sub-regiões

<b>Análise</b>	<b>Deslocamento (mm)</b>
Analítica	0.205353
MEF (OLIVEIRA, 2009)	0.205353
MEC (OLIVEIRA, 2009)	0.205639
MEC presente trabalho	0.205643

Os resultados apresentados continuam com boa convergência, sendo que a pequena divergência entre os resultados deve-se à quantidade de elementos utilizados na análise. É importante salientar que, como o módulo de elasticidade do primeiro domínio aumentou, o deslocamento longitudinal diminuiu, como esperado.

Com todas essas simulações, o código para análise de materiais viscoelásticos com sub-regiões está validado.

A partir desse ponto, após variadas e sucessivas aplicações do MEC, já é possível a simulação de problemas, considerando forças agindo no interior do material. Para tanto, faz-se necessário a implementação do MRD, um método capaz de considerar a influência das forças que atuam no domínio, somente analisando o contorno, conforme explicado anteriormente.



#### 4. COMPORTAMENTO TERMOELÁSTICO

O estudo da termoelasticidade é realizado em materiais perfeitamente elásticos submetidos a pequenas deformações e variações de temperatura. A equação diferencial governante para problemas de termoelasticidade, desconsiderando a dissipação viscosa, é dada pela equação mecânica (Equação (67)) e pela equação de energia (Equação (68)) (Furtado *et al.*, 2017):

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} - \beta \theta_{,i} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (67)$$

$$C_v \dot{\theta} + T_0 \beta u_{k,k} = R + k \theta_{,kk} \quad (68)$$

As duas equações acima estão acopladas pelos termos denominados: acoplamento térmico (Equação (69)) e acoplamento mecânico (Equação (70)).

$$\eta_i = \beta \theta_{,i} \quad (69)$$

$$\psi = T_0 \beta u_{k,k} \quad (70)$$

As propriedades do material são: módulo de cisalhamento,  $\mu$ , módulo de Lamé,  $\lambda$ , densidade,  $\rho$ , coeficiente de condução de calor,  $k$ , capacidade de calor sob volume constante,  $C_v$  e parâmetro de expansão térmica, dada pela Equação (71).

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha \quad (71)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica isotrópica.

Nas equações acima,  $u_i$  são os componentes do vetor deslocamento,  $f_i$  são os componentes do vetor de força do corpo,  $\theta$  é a diferença da temperatura atual da temperatura de referência ( $T_0$ ) e  $R$  é geração interna de calor.

No presente trabalho, a análise termoelástica é tratada como um problema desacoplado, com isso, primeiramente é calculada a variação de temperatura do material e, posteriormente, utilizando a temperatura calculada, é possível calcular o deslocamento sofrido pelo material. Além disso, também é considerado um caso quase estático, com isso, segundo Baranoglu (2003), é assumido que:

- O acoplamento mecânico é negligenciado, ou seja,  $\psi \cong 0$ ;
- As acelerações induzidas no domínio são negligenciadas, ou seja,  $\ddot{u}_i \cong 0$ ;

e

- As componentes do vetor de forças no corpo são negligenciadas, ou seja,  $f_i \cong 0$ .

Com isso, a equação diferencial governante para termoelasticidade quase estática desacoplada, dada pela equação de Navier, é expressada em termos de deslocamento como:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ik} - \eta_i = 0 \quad (72)$$

E a equação de energia para termoelasticidade quase estática desacoplada, desconsiderando a geração interna de calor ( $R$ ), é dada por:

$$C_v \dot{\theta} = k \theta_{,kk} \quad (73)$$

A equação acima é conhecida como equação da difusão e descreve o comportamento do material quando ocorre uma variação abrupta de temperatura, sua análise é importante para conhecer como o material se comporta após passar por variação elevada de temperatura.

A equação transiente que governa esse tipo de problema (Equação 73) pode ser escrita conforme mostrado na Equação (74). Para resolver a equação da difusão, além das condições de contorno, também é necessário conhecer as condições de temperatura iniciais.

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (74)$$

Manipulando a equação acima, temos:

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (75)$$

Reescrevendo a Equação (72), substituindo o termo de acoplamento térmico dado pela Equação (69) e (71), e rearrumando os termos, temos:

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = (3\lambda + 2\mu) \alpha \theta_{,i} \quad (76)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  variam de 1 à 2, para problemas bidimensionais e de 1 à 3, para problemas tridimensionais.

#### 4.1.APLICAÇÃO DO MRD

Com o objetivo de demonstrar a formulação do MRD utilizando MEC, serão apresentadas as equações necessárias do método para resolver a equação de Poisson dada pela Equação (77).

$$\nabla^2 \theta = b \quad (77)$$

onde  $b$  é uma função conhecida. De acordo com Partridge *et al.* (1992), a equação de Poisson satisfeita pelo potencial  $\theta^*$  em um domínio  $\Omega$  com um contorno  $\Gamma$  pode ser escrita na forma de equação integral conforme a Equação (78).

$$c_i \theta_i + \int_{\Gamma} \theta q^* d\Gamma + \int_{\Omega} b \theta^* d\Omega = \int_{\Gamma} q \theta^* d\Gamma \quad (78)$$

Como dito anteriormente, a função  $b$  é conhecida e, conseqüentemente, é necessário lidar com a integral de domínio, diferente dos outros casos apresentados acima que não consideravam forças agindo no domínio da análise, zerando a integral.

Para evitar ter que resolver a integral de domínio e tirar uma das características mais importante do MEC, é necessário escrever a Equação (78) como uma soma da solução homogênea, dada pela solução da equação de Laplace, e a solução particular, denominada  $\hat{\theta}$ . A equação de Poisson escrita nos termos da solução particular é dada pela Equação (79).

$$\nabla^2 \hat{\theta} = b \quad (79)$$

De acordo, ainda, com Partridge *et al.* (1992), é muito difícil achar uma solução particular que satisfaça a Equação (79). Levando em conta essa informação, o MRD propõe o uso de uma série de soluções particulares  $\hat{\theta}_j$  ao invés de uma simples função  $\hat{\theta}$ . Com isso, terão  $N + L$  valores de  $\hat{\theta}_j$  contanto que haja  $N$  nós no contorno e  $L$  pontos internos.

A expressão que considera uma série de soluções particulares para aproximar  $b$ , é dada pela Equação (80).

$$b ; \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (80)$$

onde  $\alpha_j$  são coeficientes inicialmente desconhecidos e  $f_j$  é uma função de aproximação. Os termos mencionados estão ligados pela relação dada pela Equação (81).

$$\nabla^2 \hat{\theta}_j = f_j \quad (81)$$

Juntando as Equações (79), (80) e (81), temos a Equação (82) dada por:

$$\nabla^2 \theta = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{\theta}_j) \quad (82)$$

Utilizando a equação integral dada pela solução da equação de Laplace (Equação (83)), a Equação (82) pode ser escrita como a Equação (84):

$$c\theta + \int_{\Gamma} \theta q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q \theta^* d\Gamma \quad (83)$$

$$c_i \theta_i + \int_{\Gamma} \theta q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q \theta^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( c_i \hat{\theta}_{ij} + \int_{\Gamma} \hat{\theta}_j q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{q}_j \theta^* d\Gamma \right) \quad (84)$$

onde o termo  $\hat{q}_j$  é dado por:

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{\theta}_j}{\partial n} \quad (85)$$

onde  $n$  é o vetor normal ao contorno  $\Gamma$ . Manipulando a Equação (84) e a escrevendo na forma matricial, temos:

$$\underline{\underline{H}}\theta - \underline{\underline{G}}q = (\underline{\underline{H}}\hat{\theta} - \underline{\underline{G}}\hat{q})\alpha \quad (86)$$

#### 4.1.1. O vetor $\alpha$

Escrevendo a Equação (80) em forma de matriz, temos:

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}}\alpha \quad (87)$$

Invertendo a Equação (87) com o objetivo de encontrar  $\alpha$ , temos que:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{b}} \quad (88)$$

e aplicando a Equação (88) no lado direito da Equação (86), temos que:

$$\underline{\underline{H}}\theta - \underline{\underline{G}}q = (\underline{\underline{H}}\hat{\theta} - \underline{\underline{G}}\hat{q})\underline{\underline{F}}^{-1}\underline{\underline{b}} \quad (89)$$

Aplicando as condições de contorno e reagrupando a Equação (89), de modo que os valores conhecidos nos nós do contorno fiquem no lado esquerdo da equação e os

valores desconhecidos, no outro lado, o problema é reduzido para um sistema linear, dado pela Equação (90).

$$\underline{\underline{A}}x = \underline{y} \quad (90)$$

#### 4.1.2. A expansão $f$

De acordo com Partridge *et al.* (1992), a matriz  $\underline{\underline{F}}$  não pode ser singular, com isso, para definir os valores da solução particular ( $\hat{\theta}$ ) e de sua derivada na direção normal ( $\hat{q}$ ), considerando essa condição, é utilizado a expansão  $f$ , dada pela Equação (91).

$$f = 1 + r + r^2 + L + r^m \quad (91)$$

As funções correspondentes, considerando análises térmicas, de  $\hat{\theta}$  e  $\hat{q}$  utilizando a Equação (91) são dadas pelas Equações (92) e (93), para o caso 2D, e pelas Equações (94) e (95), para o caso 3D.

$$\hat{\theta} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \quad (92)$$

$$\hat{q} = \left( r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{3} \right) \quad (93)$$

$$\hat{\theta} = \frac{r^2}{6} + \frac{r^3}{12} + L + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2 + m + 2} \quad (94)$$

$$\hat{q} = \left( r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n} + r_z \frac{\partial z}{\partial n} \right) \left( \frac{1}{3} + \frac{r}{4} + L + \frac{r^m}{m+3} \right) \quad (95)$$

Para o caso de análises elásticas, as Equações (92), (93), (94) e (95) se tornam as Equações (96), (97), (98) e (99), respectivamente.

$$\hat{u}_{mk} = \frac{1-2\nu}{5-4\nu G} r_{,m} r_{,k} r^2 + \frac{1}{30(1-\nu)G} \left[ \left( 3 - \frac{10\nu}{3} \right) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k} \right] r^3 \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{mk} &= \frac{2(1-2\nu)}{5-4\nu} \left[ \frac{1+\nu}{1-2\nu} r_{,m} n_k + \frac{1}{2} r_{,k} n_m + \frac{1}{2} \delta_{mk} \frac{\partial r}{\partial n} \right] r + \dots \\ &\dots + \frac{1}{15(1-\nu)} \left[ (4-5\nu) r_{,k} n_m - (1-5\nu) r_{,m} n_k + \left[ (4-5\nu) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \right] r^2 \end{aligned} \quad (97)$$

$$\hat{u}_{mk} = \frac{1-2\nu}{(6-4\nu)G} r_{,m} r_{,k} r^2 + \frac{1}{48(1-\nu)G} \left[ \left( \frac{11}{3} - 4\nu \right) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k} \right] r^3 \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{mk} &= \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \left[ \frac{1+2\nu}{1-2\nu} r_{,m} n_{,k} + \frac{1}{2} r_{,k} n_{,m} + \frac{1}{2} \delta_{mk} \frac{\partial r}{\partial n} \right] r + \dots \\ \dots &+ \frac{1}{24(1-\nu)} \left[ (5-6\nu) r_{,k} n_{,m} - (1-6\nu) r_{,m} n_{,k} + \left[ (5-6\nu) \delta_{mk} - r_{,m} r_{,k} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \right] r^2 \end{aligned} \quad (99)$$

#### 4.1.3. Difusão: Comportamento do material em rápida variação de temperatura

Segundo Partridge *et al.* (1992), A equação transiente que governa esse tipo de problema é dada pela Equação (100) e, além das condições de contorno, também é necessário conhecer as condições de temperatura iniciais.

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (100)$$

A solução da Equação (100) segue os mesmos passos da solução da Equação de Poisson (Equação (77)), mas, neste caso, por depender da constante de difusividade do material ( $k$ ), a equação na forma matricial será dada pela Equação (101) (Partridge *et al.*, 1992)

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\theta}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{q}} = \frac{1}{k} \left( \underline{\underline{H}}\underline{\underline{\hat{\theta}}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{\hat{q}}} \right) \underline{\underline{\alpha}} \quad (101)$$

O cálculo do vetor alfa será diferente, devido à presença da derivada temporal da temperatura, expressa de maneira simplificada como  $\hat{\theta}$ , com isso a expressão do vetor alfa é dado pela Equação (102).

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\hat{\theta}}} \quad (102)$$

Substituindo a equação acima na Equação (101), obtemos a seguinte expressão:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\theta}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{q}} = \frac{1}{k} \left( \underline{\underline{H}}\underline{\underline{\hat{\theta}}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{\hat{q}}} \right) \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\hat{\theta}}} \quad (103)$$

Com o objetivo de facilitar a visualização, é comum definir a matriz  $\underline{\underline{S}}$  como sendo:

$$\underline{\underline{S}} = \left( \underline{\underline{H}}\underline{\underline{\hat{\theta}}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{\hat{q}}} \right) \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\hat{\theta}}} \quad (104)$$

O termo que aparece multiplicando  $\underline{\dot{\theta}}$  é conhecido como capacidade calorífica e é dado por:

$$\underline{C} = -\frac{1}{k} \underline{S} \quad (105)$$

Dessa forma, podemos reescrever a Equação (103) da seguinte maneira:

$$\underline{C} \underline{\dot{\theta}} + \underline{H} \underline{\theta} = \underline{G} \underline{q} \quad (106)$$

Para lidar com a variável dependente do tempo na equação acima, utiliza-se uma aproximação linear para a variação de  $\theta$  e  $q$  em cada passo de tempo (Partridge *et al.* (1992)), conforme mostrado na Equação (107).

$$\begin{aligned} \theta &= (1 - O_\theta) \theta^m + O_\theta \theta^{m+1} \\ q &= (1 - O_q) q^m + O_q q^{m+1} \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\Delta t} (\theta^{m+1} - \theta^m) \end{aligned} \quad (107)$$

onde,  $O_\theta$  e  $O_q$  são parâmetros que posicionam os valores de  $\theta$  e  $q$ , respectivamente.

Substituindo a equação acima na Equação (106), obtém-se:

$$\left( \frac{1}{\Delta t} C + O_\theta H \right) \theta_{m+1} - O_q G q_{m+1} = \left[ \frac{1}{\Delta t} C - (1 - O_\theta) H \right] \theta_m + (1 - O_q) G q_m \quad (108)$$

Ressalta-se que, de acordo com Partridge *et al.* (1992), uma boa aproximação pode ser obtida quando os valores de  $O_\theta$  e  $O_q$  são iguais à 0.5 e 1.0, respectivamente. Com isso, a Equação (108) pode ser reescrita como mostrado na Equação (109).

$$\left( \frac{2}{\Delta t} C + H \right) \theta_{m+1} - 2G q_{m+1} = \left[ \frac{2}{\Delta t} C - H \right] \theta_m \quad (109)$$

Analisando a equação acima, percebe-se que seu lado direito possui os valores de temperatura no instante de tempo anterior, isto é, são valores obtidos das condições de contorno ou calculados anteriormente, com isso, são valores já conhecidos. Por outro lado, os valores do lado esquerdo da equação são dados pelas condições de contorno e os que necessitam serem obtidos. Nos pontos internos, é considerado condição de contorno de Neumann igual a zero, ou seja,  $q = 0$ .

Resolvendo o sistema linear, originado a partir da Equação (109), sucessivamente, encontra-se os valores das temperaturas em cada passo de tempo.

#### 4.2.MEC PARA TERMOELASTICIDADE (2D e 3D)

Conforme explicado no item 4, a equação, com as devidas simplificações, para esse tipo de problema é dada por:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta_i \quad (110)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  variam de 1 à 2, para problemas bidimensionais e de 1 à 3, para problemas tridimensionais.

De acordo com Henry e Banerjee (1988), o carregamento térmico pode ser considerado uma força de corpo e, com isso, incorporado na equação integral de contorno com uma integral de volume, conforme mostrado na Equação (111).

$$C_{ij}(\xi)u_i(\xi) = \int_S [G_{ij}(x, \xi)p_i(x) - F_{ij}(x, \xi)u_i(x)]dS(x) + \dots \quad (111)$$

$$\dots + \int_V (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta(x)H_j(x, \xi)dV(x) \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

onde:

- $u_i(x)$  é o deslocamento real;
- $t_i(x) = \sigma_{ij}n_j$  é a força de superfície real;
- $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker
- $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$  para os pontos internos e é dependente da superfície da geometria em  $\xi$  para pontos no contorno; e
- $G_{ij}, F_{ij}$  e  $H_j$  são as matrizes definidas no item 3.4.

Importante salientar que o operador de gradiente foi removido da variável de temperatura  $\theta(x)$  a partir da aplicação do teorema divergente e que a equação para tensões pode ser escrita de forma similar à Equação (111).

Para evitar utilizar na formulação uma integral de volume, que consome muito tempo para realizar sua solução numérica, Henry e Banerjee (1988) desenvolveram uma formulação para lidar com esse tipo de integrais utilizando integrais particulares, conforme apresentado adiante.



Primeiramente, escreve-se a Equação (110) utilizando uma notação de operador como:

$$L(u_i) = \beta\theta_i \quad (112)$$

onde  $L(u_i)$  é a parte homogênea da equação diferencial, representa o lado esquerdo da Equação (110) e  $\beta\theta_i$  representa a parte não-homogênea.

A solução da equação diferencial pode ser dada pela soma da solução homogênea  $u_i^c$ , satisfazendo a Equação (113).

$$L(u_i^c) = 0 \quad (113)$$

e a integral particular  $u_i^p$ , satisfaz a parte não homogênea.

$$L(u_i^p) = \beta\theta_i \quad (114)$$

Com isso, o deslocamento total  $u_i$  será dado por:

$$u_i = u_i^c + u_i^p \quad (115)$$

onde  $u_i^p$  é a integral particular para o deslocamento.

#### 4.2.1. Método: Integral particular

Na formulação apresentada, será assumido que a integral particular para o deslocamento pode ser expressa, segundo Henry e Banerjee (1988), como um gradiente do potencial do deslocamento termoelástico  $h(x)$ , conforme mostrado na Equação (116) de acordo com o desenvolvimento da teoria termoelástica quase estática linear.

$$u_i^p(x) = kh_i(x) \quad (116)$$

onde  $k$  é definido como:

$$k = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \quad (117)$$

Substituindo a Equação (116) na Equação (110) e simplificando, temos:

$$h_{,ji}(x) = \theta(x) \quad (118)$$

Consequentemente, obtemos uma relação entre a solução de deslocamento, dada pelo uso das integrais particulares, e a distribuição de temperatura. Essa relação é obtida a partir do uso da função potencial  $h(x)$ .

Portanto, a escolha da função  $h(x)$  será crucial para precisão do método, pois esta deverá ser capaz de representar a distribuição de temperatura conforme descrito na Equação (118), fator de sucesso.

Para problemas apresentando uma distribuição de temperatura complexa, é necessário assumir que a função  $h(x)$  pode ser representada como uma série infinita, uma expressão relacionando  $h(x)$  com um conjunto de densidades escalar fictícias  $\phi(\xi_n)$  através da função de forma global  $C(x, \xi_n)$  conforme abaixo: (Henry e Banerjee (1988)).

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (119)$$

onde  $C(x, \xi_n)$  uma função diferente para cada par de  $x$  e  $\xi_n$ .

Assim, de acordo com Henry e Banerjee (1988), bons resultados são obtidos utilizando a equação abaixo para o valor da função de forma global.

$$C(x, \xi_n) = A_0^2 [\rho^2 - b_n \rho^3] \quad (120)$$

onde  $A_0$  é o comprimento característico,  $\rho$  é a distância Euclidiana entre o ponto campo  $x$  e o campo fonte  $\xi_n$ , e  $b_n = 1$

Importante salientar que todas as distâncias devem ser adimensionalizadas pelo comprimento característico  $A_0$ .

Usando as Equações (116) e (119), a integral particular para o deslocamento é dada por:

$$u_i^p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_i(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (121)$$

onde:

$$D_i(x, \xi_n) = kC_{,i}(x, \xi_n) = kA_0 [2 - 3b_n \rho] y_i \quad (122)$$

e  $y_i = [x_i - (\xi_n)_i]$

Aplicando o operador de Laplace na Equação (119), encontra-se a expressão para a distribuição de temperatura:

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (123)$$

onde:

$$K(x, \xi_n) = C_{,ii}(x, \xi_n) = [2d - 3(1+d)b_n \rho] \quad (124)$$

sendo  $d = 3$  para análises tridimensionais e  $d = 2$  para análises bidimensionais.

A integral particular para deformação pode ser encontrada substituindo a Equação (121) na relação entre deformação e deslocamento:

$$\varepsilon_{kl}^p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{kl}(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (125)$$

onde:

$$E_{kl}(x, \xi_n) = kC_{,kl}(x, \xi_n) = k \left[ 2\delta_{kl} - 3b_n \left( \delta_{kl} \rho + \frac{y_k y_l}{\rho} \right) \right] \quad (126)$$

O resultado colocado dentro da lei de tensão-deformação para termoelasticidade, produz a seguinte integral particular para a tensão:

$$\sigma_{ij}^p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{ij}(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (127)$$

onde:

$$S_{ij}(x, \xi_n) = D_{ijkl}^e E_{kl}(x, \xi_n) - \delta_{ij} \beta K(x, \xi_n) \quad (128)$$

e:

$$D_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (129)$$

lembrando que  $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$

Por último, a integral particular para tração é obtida pela multiplicação da equação acima com suas normais apropriadas.

$$p_i^p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_i(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (130)$$

onde:

$$H_i(x, \xi_n) = S_{ij}(x, \xi_n) n_j(x) \quad (131)$$

e  $n_j(x)$  = vetor unitário normal ao ponto  $x$ , na direção de  $j$

As equações mostradas acima valem tanto para resolução de problemas 2D e 3D, mas para análises bidimensionais, é considerado estado plano de deformação. A formulação equivalente para o estado plano de tensão, pode ser obtida a partir da equação de estado plano de deformação, substituindo as constantes do material para  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\lambda}$  da seguinte maneira:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)}{2(2\lambda + \mu)} \quad (132)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad (133)$$

#### 4.2.2. Implementação da integral particular

A integral particular para o deslocamento  $u_i^p(x)$  e as forças de superfícies  $p_i^p(x)$  deve ser calculada, segundo Henry e Banerjee (1988), para cada nó do contorno antes da solução da equação governante ser calculada.

Para a implementação numérica, as séries infinitas que representam as integrais particulares são truncadas em um número finito  $N + L$ , onde  $N$  é o total de nós no contorno e  $L$  é o total de pontos internos. Com isso, a integral particular para deslocamento, forças de superfícies e distribuição de temperatura podem ser reescritas considerando agora  $N + L$  termos, conforme abaixo:

$$u_i^p(x) = \sum_{n=1}^{N+L} D_i(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (134)$$

$$p_i^p(x) = \sum_{n=1}^{N+L} H_i(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (135)$$

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{N+L} K(x, \xi_n) \phi(\xi_n) \quad (136)$$

Na forma de matriz, temos:

$$\underline{\theta} = \underline{K} \underline{\phi} \quad (137)$$

onde  $K$  é uma matriz  $N + L \times N + L$ . Com isso, conhecendo a distribuição de temperatura, os valores nodais fictícios  $\phi(\xi_n)$  são determinados de acordo com a Equação (138).

$$\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{\theta}} \quad (138)$$

Com isso, para encontrar os valores das integrais particulares para o deslocamento e forças, basta substituir o termo acima nas Equações (134) e (135), respectivamente.

Logo, na forma matricial teremos:

$$\underline{\underline{G}} \underline{\underline{p}}^c - \underline{\underline{H}} \underline{\underline{u}}^c = 0 \quad (139)$$

Utilizando a Equação (115) junto com a Equação (139), podemos suprimir a solução homogênea, com isso temos:

$$\underline{\underline{G}} \underline{\underline{p}} - \underline{\underline{H}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{p}}^p - \underline{\underline{H}} \underline{\underline{u}}^p \quad (140)$$

onde os termos referentes à integral particular (lado direito da equação), são conhecidos conforme formulação descrita acima.

Resolvendo o sistema linear, originado a partir da Equação (140), encontra-se os valores da distribuição dos deslocamentos em cada nó e ponto interno utilizado na análise.

#### 4.3.COMPORTAMENTO DO MATERIAL SUJEITO AO PROCESSO DE SOLDAGEM

Um dos problemas que devem ser analisados a partir da análise termoelástica, bastante utilizado na indústria, é o processo de soldagem. Ela pode ser usada para juntar diversos tipos de materiais, como por exemplo metais. Além disso, existem vários métodos de soldagem que podem ser utilizados no processo de fabricação de um material, e todos esses métodos possuem vantagens e desvantagens.

Durante o processo de soldagem, o material sofre uma variação abrupta de temperatura, fundindo o material. Com isso, ocorre a formação de poças de solda que após um tempo, esfria e se solidifica. As tensões provenientes desse tipo de processo de fabricação do material tendem a aumentar de acordo com o esfriamento não homogêneo.

De acordo com Aarbogh *et al.* (2010), para simular o comportamento do material sujeito ao processo de soldagem, é necessário um código numérico capaz de prever tanto a variação de temperatura, quanto a variação do deslocamento, pois, em todo processo de soldagem, a geração de calor resulta em uma zona afetada termicamente, modificando as propriedades do material, tornando-o mais suscetível a falhas mecânicas.

Por isso, em análises de materiais sujeitos ao processo de soldagem, a geração interna de calor ( $R$ ) da equação de energia (Equação (68)) não pode ser desconsiderada. Com isso, diversos métodos foram formulados para ser possível prever a temperatura do material em um ponto longe da área onde a solda está atuando e, assim, representar a geração interna de calor gerada pelo processo de soldagem.

Rosenthal (1941) encontrou uma solução capaz de quantificar essa temperatura, mas não conseguiu prever a temperatura na vizinhança da solda. Eagar e Tsai (1983) modificaram a formulação de Rosenthal e conseguiram encontrar uma solução analítica da temperatura para um material sujeito à uma distribuição Gaussiana de calor.

Goldak e Akhlaghi (2005) utilizaram a fonte de calor em movimento como sendo uma função *double-ellipsoidal* em 3-D, com isso, a representatividade da geração volumétrica de calor gerada pelo processo de soldagem, representada por uma função *double-ellipsoidal* (Figura (16)), é dada pela Equação (141).

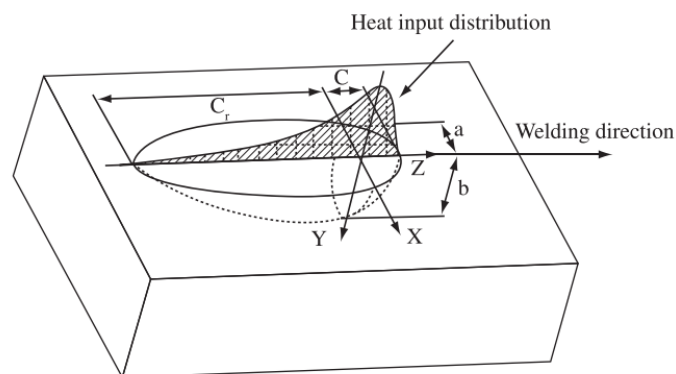


Figura 16. Função *double-ellipsoidal* (Fonte: Goldak e Akhlaghi, 2005)

$$R(X, Y, Z, t) = R_f(X, Y, Z, t) + R_r(X, Y, Z, t) \quad (141)$$

onde,  $R_f$  é o componente frontal e  $R_r$  é o componente traseira. Esses dois componentes estão relacionados à:

- Velocidade da solda na direção  $y$ ,  $V$ ;

- Força total da fonte de calor,  $Q_t$ ;
- Coeficiente de fração,  $f_f$  e  $f_r$ , para a componente frontal e traseira, respectivamente;
- Parâmetros de ajuste geométricos,  $a$ ,  $b_r$ ,  $b_f$  e  $c$ ; e
- Constante analítica geral,  $C_0 = \frac{6\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}}$

Possuindo a forma dada pelas Equações (142) e (143)

$$R_f = C_0 \frac{f_f Q_t}{ab_f c} \exp\left[-3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \exp\left[-3\left(\frac{y-Vt}{b_f}\right)^2\right] \exp\left[-3\left(\frac{z}{c}\right)^2\right] \quad (142)$$

$$R_r = C_0 \frac{f_r Q_t}{ab_r c} \exp\left[-3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \exp\left[-3\left(\frac{y-Vt}{b_r}\right)^2\right] \exp\left[-3\left(\frac{z}{c}\right)^2\right] \quad (143)$$

As Equações (141), (142) e (143) representam uma fonte de calor atuando na superfície do material, conforme mostrado na Figura (16), e, para análises utilizando o MEC, geram integrais de domínio indesejáveis. O MRD é utilizado para lidar com essa fonte de calor, sem precisar discretizar o domínio da análise.

Kuşçu *et al.* (2016), simulou a parte térmica do processo de soldagem de um aço com baixo teor de carbono utilizando o MEF. Seu trabalho não considerou a transformação de fase que o material sofre em tal processo, mas foi capaz de analisar dois métodos de soldagem: soldagem a arco e à laser. Os parâmetros utilizados por eles para introduzir a função *double-ellipsoidal* é mostrado na Tabela a seguir.

Tabela 7. Parâmetros para a função *double-ellipsoidal* (Fonte: Kuşçu et al. (2016))

Parâmetros	Soldagem a arco	Soldagem a laser
$a$	0.01	0.001
$b_r$	0.017	0.002
$b_f$	0.008	0.001
$c$	0.003	0.001
$f_f$	0.6	0.6
$f_r$	1.4	1.4
$Q_t$	2000	150
$V$	0.01	0.01

$C_0$	$\frac{6\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}}$	$\frac{6\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}}$
-------	-----------------------------------	-----------------------------------

Mesmo com essa complexidade e a necessidade de utilizar modelos simplificados para determinar a zona afetada termicamente em decorrência do processo de soldagem, de acordo com Chiumenti *et al.* (2016), os modelos numéricos utilizados para representar o processo de soldagem se mostraram muito eficiente quando comparados aos estudos utilizando análises experimentais.

#### 4.3.1. Soluções de processos de soldagem empregando o MEC

A equação de transferência de calor (Equação (68)), desconsiderando o acoplamento mecânico, é dada por:

$$k\theta_{,kk} + R(X, Y, Z, t) = C_v \phi \quad (144)$$

Manipulando a equação acima, tem-se que:

$$\theta_{,kk} = \frac{C_v}{k} \phi - \frac{1}{k} R(X, Y, Z, t) \quad (145)$$

A Equação (145) é uma equação diferencial não homogênea. Para solucionar esse tipo de equação, é necessário inicialmente resolver a parte homogênea, e separadamente, a parte não homogênea. Depois de obtidos os dois resultados, basta somar as duas contribuições para alcançar o resultado final.

Analisando a Equação (145), percebe-se que a parte não homogênea é composta pela contribuição de duas funções distintas, sendo uma a representação matemática da transferência de calor (Equação (146)) e a outra a representação matemática da difusão (Equação (147)).

$$\theta_{,kk} = -\frac{1}{k} R(X, Y, Z, t) \quad (146)$$

$$\theta_{,kk} = \frac{C_v}{k} \phi \quad (147)$$



#### 4.3.2.1 Equação de energia: Parte homogênea

Para resolver a parte homogênea, usando o MEC, é utilizada a mesma formulação para a solução da equação de Laplace, dada pela Equação (148).

$$\theta_{,kk} = \nabla^2 \theta = 0 \quad (148)$$

De acordo com Partridge *et al.* (1992), a equação de Laplace resolvida com o potencial  $\theta^*$  no domínio  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$ , na forma integral é dada pela Equação (149).

$$c\theta + \int_{\Gamma} \theta q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q \theta^* d\Gamma \quad (149)$$

onde  $\theta$  é a temperatura,  $q$  é o fluxo e os termos com \* são as soluções fundamentais. Considerando um domínio bidimensional, as soluções fundamentais são dadas pelas Equações (150) e (151) (Partridge *et al.*, 1992).

$$\theta^* = -\frac{1}{2\pi k} \ln(r) \quad (150)$$

$$q^* = -k \frac{\partial \theta^*}{\partial n} \quad (151)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica,  $r$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo e  $n$  é a direção normal.

A Equação (152) ilustra o desenvolvimento do MEC a partir da manipulação da Equação (149).

$$c_i \theta_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \theta_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (152)$$

onde  $\theta_j$  e  $q_j$  são os valores de  $\theta$  e  $q$  no nó  $j$ .  $\hat{H}_{ij}$  e  $G_{ij}$  são dadas pelas Equações (153) e (154), respectivamente.

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma} w_f(s) q^* ds \approx \int_{\Gamma_N} w_f(s) q^* ds \quad (153)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma} w_f(s) \theta^* ds \approx \int_{\Gamma_N} w_f(s) \theta^* ds \quad (154)$$

onde  $w_f(s)$  é conhecida como função base e, a considerando como uma função de forma, com o objetivo de definir os valores de  $u$  e  $q$ , definindo:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \hat{H}_{ij} \quad \text{where } i \neq j \\ H_{ij} &= \hat{H}_{ij} + c_i \quad \text{where } i = j \end{aligned} \quad (155)$$

A Equação (152) pode ser escrita de acordo com a equação abaixo:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \theta_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (156)$$

Na forma de matriz, o sistema de equações lineares é dado por:

$$\underline{H}\underline{\theta} = \underline{G}\underline{q} \quad (157)$$

Dessa forma, aplicando as condições de contorno e reagrupando as equações, colocando os valores conhecidos no contorno no lado esquerdo do sinal de igualdade e os valores desconhecidos no outro lado, o problema se reduz a um simples sistema linear, conforme Equação (158) e o resultado da parte homogênea será dada pela solução desse sistema linear.

$$A\theta^H = y \quad (158)$$

Por outro lado, a parte não homogênea está atuando no domínio da análise, com isso, faz-se necessário utilizar o MRD, conforme já visto anteriormente.

#### 4.3.2.2 Equação de energia: Parte não homogênea

Como mencionado anteriormente, existem duas funções que tornam a equação diferencial não homogênea, sendo uma referente à transferência de calor e outra referente à difusão.

Em relação à parte referente à difusão ( $\theta^D$ ), sua resolução é realizada a partir da mesma formulação apresentada no item 4.1.3.

Por outro lado, a parte referente à transferência de calor é resolvida de maneira similar ao apresentado no item 4.1, porém, neste caso, o termo constante ( $b$ ) será trocado pela função de transferência de calor dado pela função *double-ellipsoidal* (Figura (16)), conforme equação abaixo:

$$\nabla^2 \theta = -\frac{1}{k_d} R(X, Y, Z, t) \quad (159)$$

onde  $R$  é uma função conhecida, no caso a função que representa a transferência de calor gerado pelo processo de soldagem, dada pelas Equações (141), (142) e (143).

Dessa forma, a Equação (159), pode ser escrita como:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\theta}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{q}} = -\frac{1}{k_d} \left( \underline{\underline{H}}\hat{\underline{\underline{\theta}}} - \underline{\underline{G}}\hat{\underline{\underline{q}}} \right) \underline{\underline{\alpha}} \quad (160)$$

e o vetor  $\underline{\underline{\alpha}}$  será dado por:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{R}}(X, Y, Z, t) \quad (161)$$

Aplicando a Equação acima na Equação (160), temos que:

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\theta}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{q}} = -\frac{1}{k_d} \left( \underline{\underline{H}}\hat{\underline{\underline{\theta}}} - \underline{\underline{G}}\hat{\underline{\underline{q}}} \right) \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{R}}(X, Y, Z, t) \quad (162)$$

A Equação (162) refere-se à equação de Poisson utilizando uma função no lugar do termo constante. É importante salientar que a primeira parte da Equação (162), para o problema de soldagem, será diferente do apresentado, pois o problema ainda usará a equação de difusão. Portanto, somente o termo do lado direito do sinal de igual é importante, sendo a contribuição da parte não homogênea referente à transferência de calor dada por:

$$\theta^{TF} = -\frac{1}{k_d} \left( \underline{\underline{H}}\hat{\underline{\underline{\theta}}} - \underline{\underline{G}}\hat{\underline{\underline{q}}} \right) \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{R}}(X, Y, Z, t) \quad (163)$$

Conforme mencionado anteriormente, a função  $R(x, y, z, t)$  é a representatividade da geração volumétrica de calor gerada pelo processo de soldagem, representada por uma função *double-ellipsoidal* (Figura 16), dada pelas Equações (141), (142) e (143).

Portanto, a variação de temperatura decorrente de processos de soldagem (Equação (145)), é dada por  $\theta^T = \theta^H + \theta^D + \theta^{TF}$ . Substituindo essa temperatura na equação de Navier (Equação (76)) e seguindo os passos apresentados no item 4.2, encontram-se os valores da distribuição dos deslocamentos, sendo possível analisar a zona afetada termicamente devido tal processo de fabricação.

Com o objetivo de facilitar a compreensão da formulação apresentada, a Figura (17) mostra esquematicamente os passos necessários para a análise de problemas termoelásticos, considerando a geração interna de calor ( $R$ ).

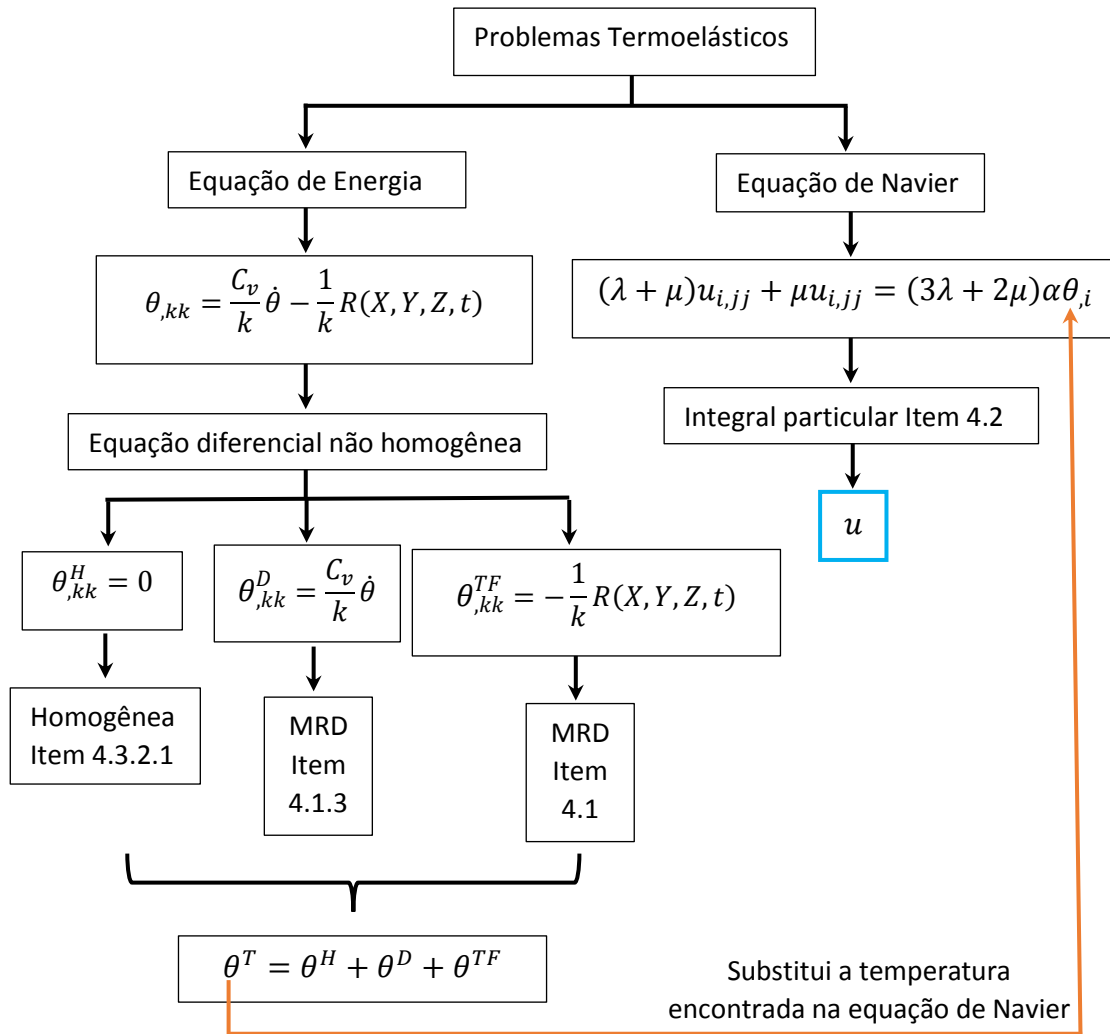


Figura 17. Ilustração para resolução de problemas termoelásticos (Fonte Própria)

#### 4.4.APLICAÇÃO DO MEC PARA O PROBLEMA TERMOELÁSTICO

Neste item são apresentados os desenvolvimentos, análises e os resultados de simulação e de validação dos códigos utilizados para análise de problemas termoelásticos com o auxílio do software MATLAB.

O esforço desta pesquisa se concentrou especialmente nos desenvolvimentos das programações das equações mais adequadas para cada caso previsto nos objetivos específicos para análise termoelásticas, bem como nas respectivas simulações, ao rodá-las no citado software, visando alcançar resultados satisfatórios e comparáveis aos resultados obtidos com a metodologia MEF e com métodos analíticos.

A validação foi realizada a partir da comparação dos resultados obtidos numericamente com a solução analítica dos problemas apresentados ou com artigos da literatura.

A implementação do código considerando forças agindo no domínio da análise, a partir do MRD, deu-se em várias etapas, abrangendo análises simples, como por exemplo, solução da equação de Poisson agindo no corpo, e análises complexas, como por exemplo, análise de difusão e termoelasticidade. Cabe ressaltar que os desenvolvimentos e simulações em 3D foram marcados por requisitos de tempo e de complexidade.

Posteriormente foi incluído a função *double-ellipsoidal* para simular o processo de soldagem de um material.

#### 4.4.1. Solução do problema da equação de Poisson 2D

Para análises potenciais, ou seja, de problemas envolvendo calor, serão considerados os valores de temperatura e fluxo. Na equação de Poisson, as forças de campo não são nulas, ou seja, para resolvê-la é necessário o uso de métodos capazes de considerar em sua análise, tais forças atuando no interior do material.

Para o presente trabalho, foi utilizado o MRD adotando a expansão da função  $f$  como sendo  $f = 1 + r$ .

O problema analisado possui equação de Poisson dada por:

$$\nabla^2 \theta = -x^2 \quad (164)$$

e a geometria analisada será a de uma elipse com seu eixo maior medindo 2 e o menor medindo 1, possuindo condições de contorno de Dirichlet,  $\theta = 0$ , em todo seu contorno. Portanto, a equação da elipse é dada pela Equação (165) e sua geometria com pontos internos está ilustrada na Figura (18).

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad (165)$$

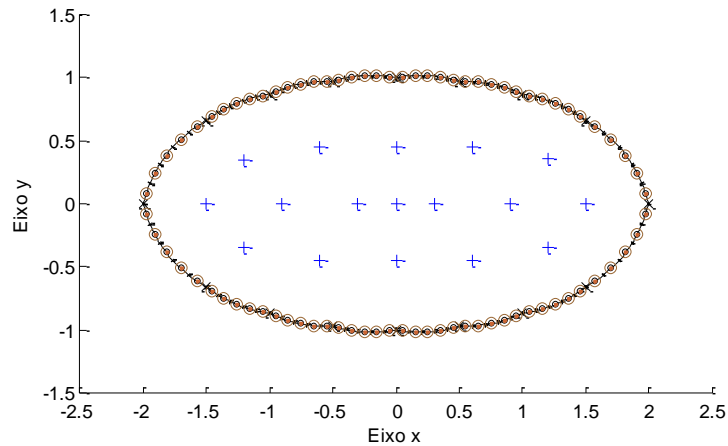


Figura 18. Geometria e pontos internos equação Poisson 2D (Fonte Própria)

A solução exata para essa análise é dada por:

$$\theta = -\frac{1}{246} (50x^2 - 8y^2 + 33.6) \left( \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right) \quad (166)$$

A solução potencial nos pontos internos, assim como sua comparação com a solução analítica, é mostrada na Tabela (8).

Tabela 8. Comparação dos resultados

Posição X	Posição Y	MRD	Exata
1.50	0.00	0.2552	0.2598
1.20	-0.35	0.2213	0.2201
0.60	-0.45	0.1453	0.1437
0.00	-0.45	0.1039	0.1037
0.00	0.00	0.1374	0.1366
0.30	0.00	0.1524	0.1514
0.90	0.00	0.2416	0.2402

Observa-se que a solução numérica do MEC utilizando o MRD foi também, satisfatória, uma vez que os resultados apresentam boa convergência com a solução exata. Com isso, o código para cálculo da equação de Poisson está validado.

#### 4.4.2. Solução do problema da equação de Poisson 3D

Para a validação do código em 3D, foi realizada a comparação dos resultados obtidos na análise tridimensional com a solução exata e a solução encontrada por Medeiros (2001) utilizando o MSF.

A geometria em 3D, foi gerada de maneira similar à metodologia utilizada por Arroyave (2017). Primeiramente foi desenhada e gerada uma malha somente no contorno da geometria utilizando o software GMSH 3.0, posteriormente, a partir dos nós e conectividades importadas do GMSH, foi criada a geometria no software MATLAB e realizada a análise com MEC.

Para isso, foi simulado o problema governado pela seguinte equação:

$$\nabla^2 \theta = -x^2 \quad (167)$$

A geometria trata-se de um cubo ( $2 \times 2 \times 2$ ), modelado utilizando elementos quadrilaterais constantes, contendo 225 pontos no contorno de cada face, como mostrado na Figura (19). O cubo em questão possui condutividade térmica igual à 1 e foram utilizados 28 pontos internos nas posições:  $(\pm 0.5, \pm 0.5, \pm 0.5)$ ,  $(0, \pm 0.5, \pm 0.5)$ ,  $(\pm 0.5, 0, \pm 0.5)$ ,  $(\pm 0.5, \pm 0.5, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 0.5)$ ,  $(0, \pm 0.5, 0)$ ,  $(\pm 0.5, 0, 0)$  e  $(0, 0, 0)$ , conforme mostrado na Figura (20).

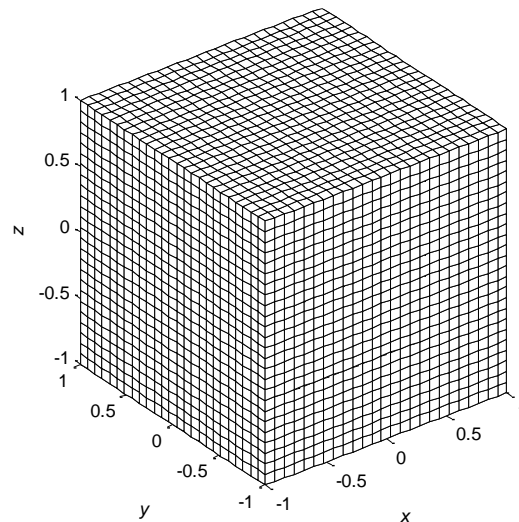


Figura 19. Geometria análise Poisson 3D (Fonte Própria)

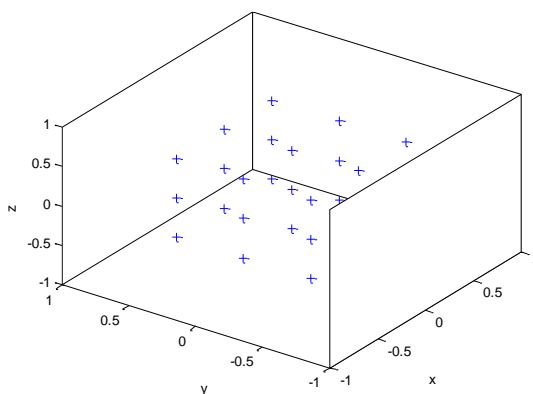


Figura 20. Distribuição pontos internos análise Poisson 3D (Fonte Própria)

Devido à ausência de uma solução exata para este caso, foi utilizado a solução particular, dada pela Equação (168), como condição de contorno e, também, para conferir os resultados obtidos, pois, por ser usada como condição de contorno, também serve como a solução do problema.

$$\hat{\theta} = -\frac{x^4}{12} \quad (168)$$

Os resultados obtidos para a distribuição de temperatura, utilizando a função de aproximação  $f = 1 + r$ , comparados com a solução exata e a solução utilizando MSF, são apresentados na Tabela (9).

Tabela 9. Comparação resultados análise Poisson 3D

Posição $x$	Posição $y$	Posição $z$	MEC 3D (Resultado obtido)	MSF 3D (Medeiros, 2001)	Solução Analítica
0.50	0.50	0.50	-0.004628	-0.005208	-0.005208
0.50	0.00	0.50	-0.004107	-0.005208	-0.005208
0.50	0.50	0.00	-0.004107	-0.005208	-0.005208
0.50	0.00	0.00	-0.003272	-0.005208	-0.005208
0.00	0.50	0.50	-0.000232	0.000000	0.000000
0.00	0.00	0.50	0.0007924	0.000000	0.000000
0.00	0.50	0.00	0.0007924	0.000000	0.000000
0.00	0.00	0.00	0.001726	0.000000	0.000000

Analisando a Tabela (9), é possível observar que os resultados obtidos utilizando o MEC não estão com precisão satisfatória. Tal fato pode ter ocorrido, pois o MEC é um método dependente da função de aproximação  $f$ .



Com o objetivo de obter resultados mais precisos, realizou-se nova simulação, neste momento utilizando outra função de aproximação,  $f = 1 + r + r^2$ . Os novos resultados são mostrados na Tabela (10).

Tabela 10. Comparação resultados nova função aproximação  $f$

Posição $x$	Posição $y$	Posição $z$	MEC 3D (Resultado obtido)	MSF 3D (Medeiros, 2001)	Solução Analítica
0.50	0.50	0.50	-0.005068	-0.005208	-0.005208
0.50	0.00	0.50	-0.004653	-0.005208	-0.005208
0.50	0.50	0.00	-0.004653	-0.005208	-0.005208
0.50	0.00	0.00	-0.004006	-0.005208	-0.005208
0.00	0.50	0.50	-0.0005712	0.000000	0.000000
0.00	0.00	0.50	-0.0002384	0.000000	0.000000
0.00	0.50	0.00	-0.0002384	0.000000	0.000000
0.00	0.00	0.00	0.0003366	0.000000	0.000000

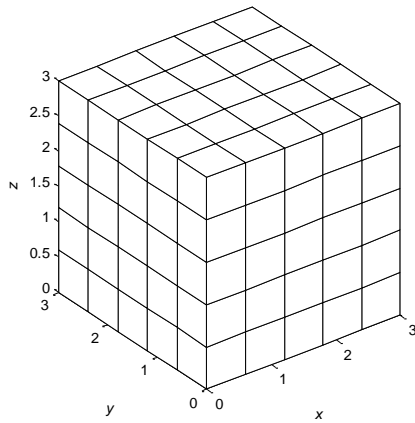
Com a nova função  $f$ , é possível observar que os resultados apresentaram melhor concordância com a literatura e a solução analítica. Esses resultados reafirmam a dependência entre o MRD e a função de aproximação  $f$ .

Após essa análise, o código desenvolvido para solucionar a equação de Poisson, utilizando a formulação do MEC em 3D com o MRD, foi validado.

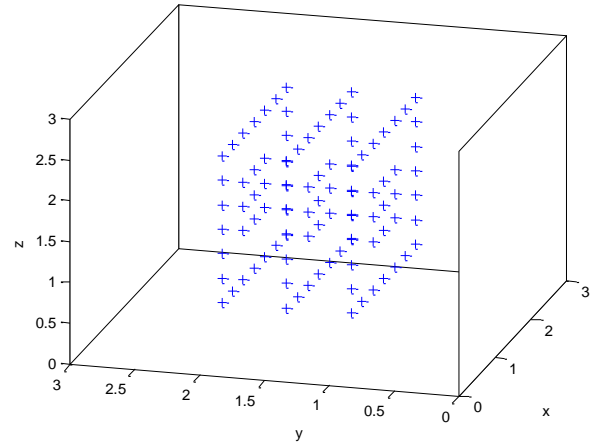
#### 4.4.3. Solução do problema da equação de Difusão 3D

Conforme mencionado anteriormente, a difusão ocorre quando há uma variação abrupta de temperatura no material, sua análise é importante para conhecer como o material se comporta após passar por essa variação de temperatura.

Para validar o código em questão, foi simulado um cubo (Figura 21-a)) inicialmente a  $30^{\circ}\text{C}$  que sofreu um choque térmico, sendo resfriado para  $0^{\circ}\text{C}$ . A distribuição dos pontos no interior do domínio do cubo é mostrada na Figura 21-b). A condutividade térmica do cubo em questão é  $k_x = k_y = k_z = 1.25$ , sua capacidade térmica sob volume constante é dada por  $C_v = 1$  e foi utilizando a função de aproximação  $f = 1 + r$ .



a) Geometria



b) Pontos Internos

Figura 21. Geometria análise difusão 3D (Fonte Própria)

A Figura 22 mostra a comparação entre o resultado numérico e analítico. Como pode ser visto, os resultados apresentaram uma pequena oscilação no início da análise, devido à natureza global da função de aproximação utilizada ( $f = 1 + r$ ), porém, no decorrer da análise, os resultados apresentam boa precisão, validando o código para análise de problemas de difusão.

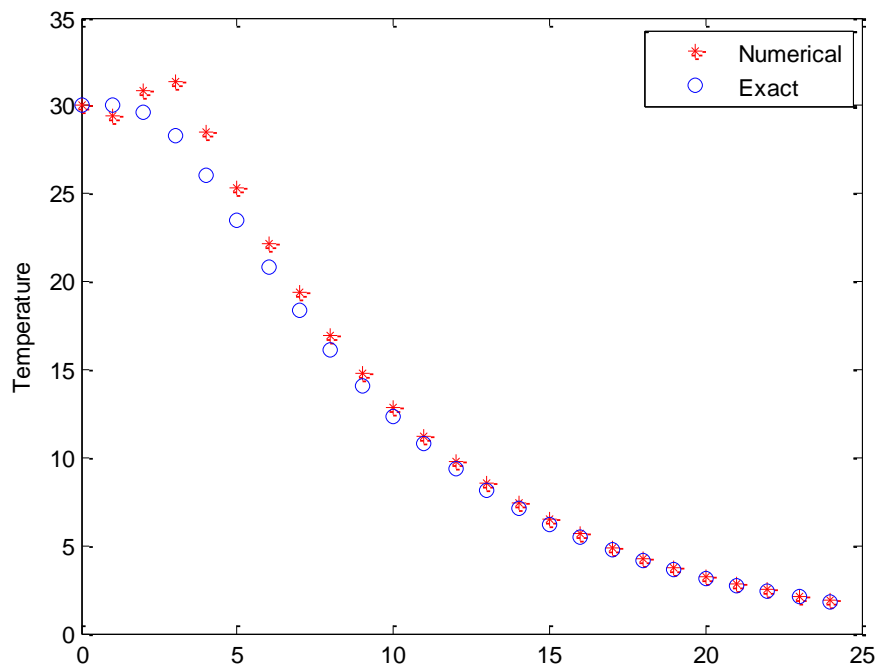


Figura 22. Comparação resultados difusão 3D (Fonte Própria)

#### 4.4.4. Simulação e validação do código termoelástico 2D

A análise termoelástica foi tratada como um problema desacoplado, dessa forma, primeiramente foi calculada a variação de temperatura do material e, posteriormente, utilizando a temperatura calculada, foi possível calcular o deslocamento sofrido pelo material.

O código responsável por calcular a distribuição de temperatura é o mesmo utilizado para o cálculo de problemas de difusão, utilizando a função de aproximação  $f = 1 + r$ . Já o código responsável pela distribuição do deslocamento foi criado utilizando o conceito de Integrais Particulares apresentado por Henry e Banerjee (1988).

Com isso, foi analisado o comportamento de um cubo unitário bidimensional, inicialmente em equilíbrio termodinâmico com temperatura igual a zero, submetido ao aumento repentino de temperatura.

Para a análise em questão, foi assumido que o cubo está em estado plano de deformação com três, das suas 4 faces laterais isoladas e restringidas na direção normal ao deslocamento, conforme mostrado na Figura (23).

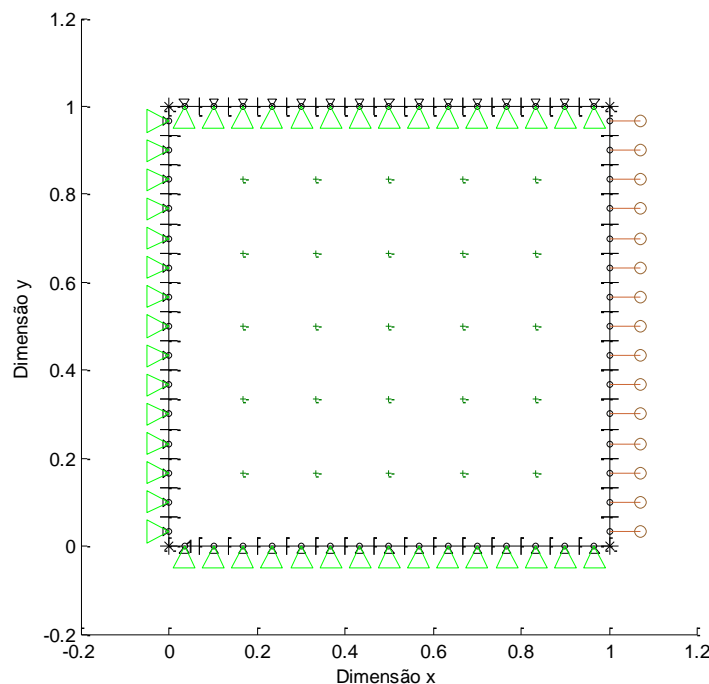


Figura 23. Geometria análise termoelástica (Fonte Própria)

Quando a temperatura da face não restringida é aumentada e mantida à  $100^{\circ}F$ , um gradiente de temperatura transiente é criado no corpo. A Figura (24) mostra a distribuição de temperatura calculada analiticamente e numericamente para cinco tempos

de análise distintos:  $t = 0.8, 1.6, 3.2, 6.4$  e  $12.8$  segundos, onde a difusividade do material é  $0.125 \text{ m}^2/\text{s}$  e suas propriedades mecânicas são iguais às do alumínio ( $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $\alpha = 13 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{F}$  e  $\nu = 0.33$ ).

A partir da temperatura calculada, é possível encontrar os deslocamentos sofridos pelo material em cada tempo da análise. Os resultados obtidos para o deslocamento longitudinal são mostrados na Figura (25) junto com a solução analítica.

As soluções analíticas de distribuição de temperatura e deslocamento e dada por:

$$\theta(x,t) = \theta_f - \frac{4\theta_f}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 kt}{4L^2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) \quad (169)$$

$$u(x,t) = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)} \int_0^x \theta dx \quad (170)$$

onde  $\theta_f$  é a temperatura final,  $L$  é o comprimento do material na direção da difusão e  $k$  é a difusividade do material, os dois últimos parâmetros foram considerados como valores unitários.

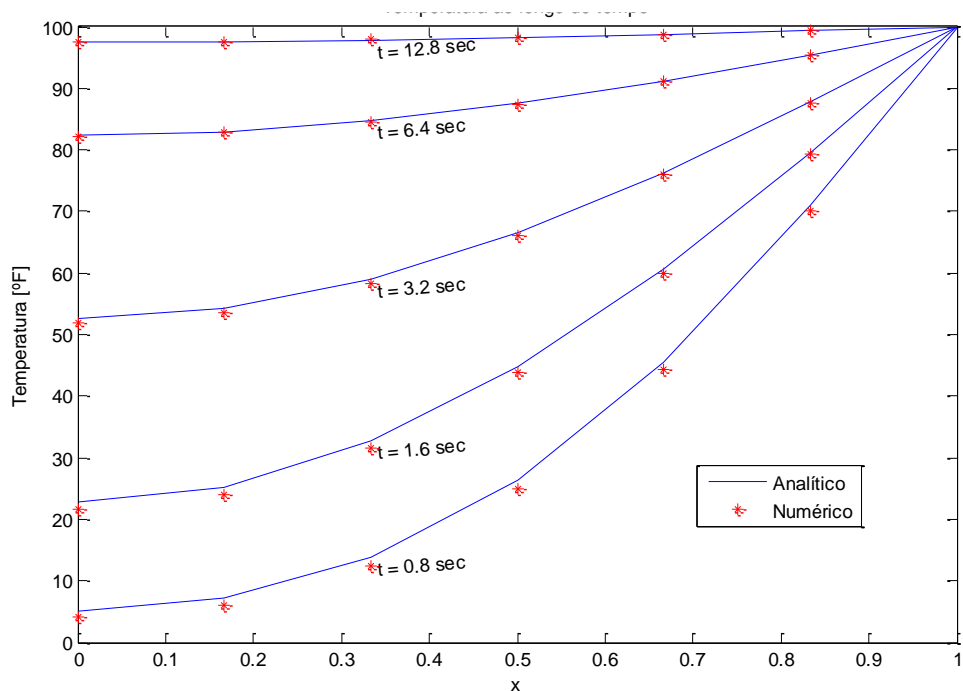


Figura 24. Distribuição de temperatura análise termoelástica 2D (Fonte Própria)

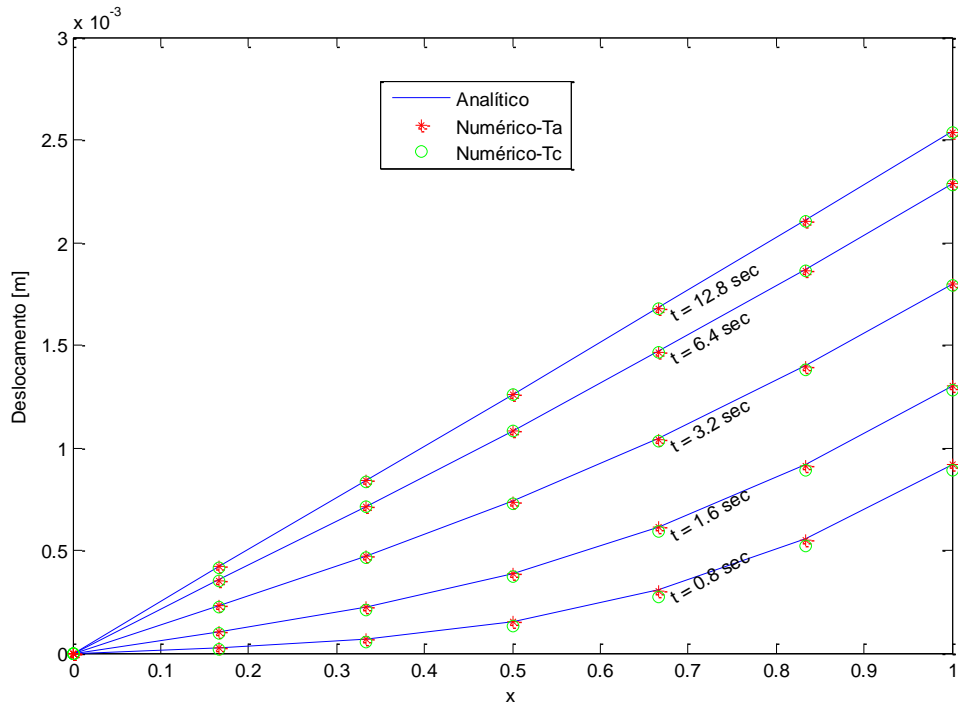


Figura 25. Deslocamentos análise termoelástica 2D (Fonte Própria)

Constata-se que tanto os resultados obtidos para a distribuição de temperatura, quanto para o deslocamento, tiveram boa precisão com os resultados analíticos, validando assim o código termoelástico 2D.

#### 4.4.5. Simulação e validação do código termoelástico 3D

A validação do código para análise de problemas termoelásticos tridimensionais, foi realizada utilizando o mesmo exemplo do caso bidimensional, sendo induzido, a partir das condições de contorno, que o material analisado em 3D possuísse duas superfícies opostas com fluxo de calor igual a zero, assim, o problema se comporta do mesmo jeito que um problema bidimensional.

Com isso, a geometria analisada é mostrada na Figura (26) e os resultados obtidos, comparados com a solução analítica, é ilustrada no gráfico da Figura (27) e (28). Para esse caso, o gráfico foi gerado considerando o valor da temperatura no começo da placa ( $x = 0, y = 0.5$  e  $z = 0.5$ ) e deslocamento no final da placa ( $x = 1, y = 0.5$  e  $z = 0.5$ ).

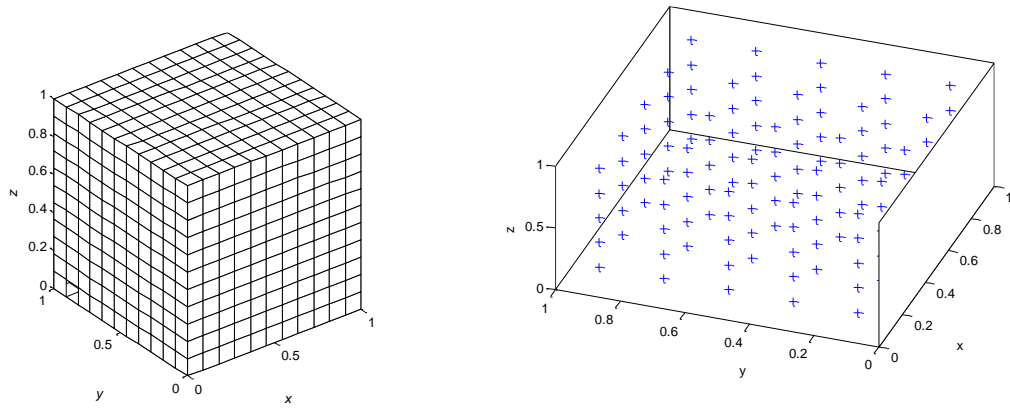


Figura 26. Geometria discretizada e pontos internos (Fonte Própria)

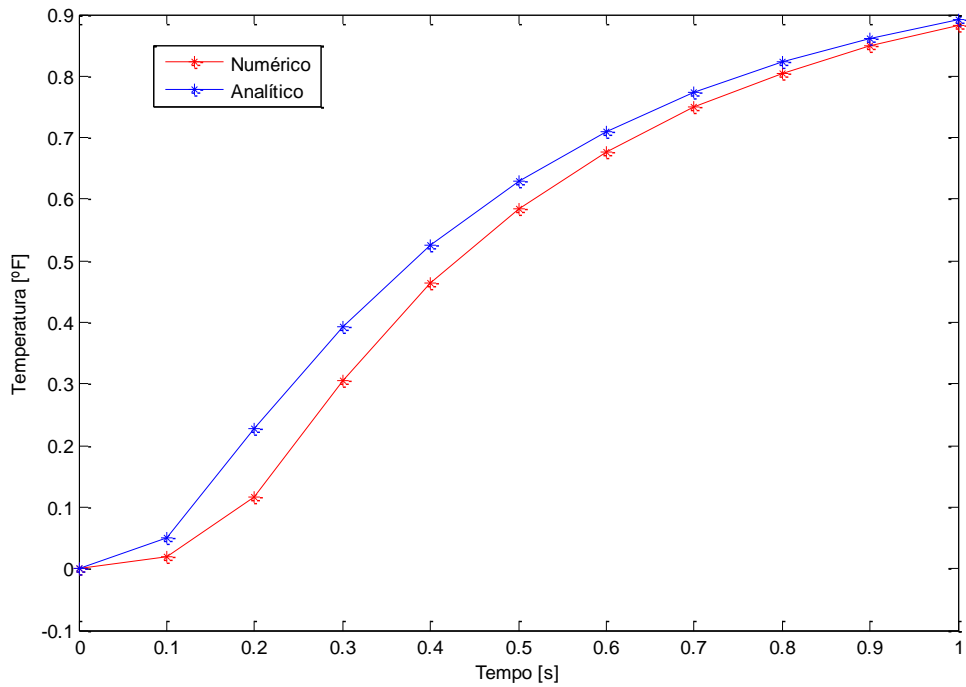


Figura 27. Variação da temperatura no começo da placa ( $x = 0$ ,  $y = 0.5$  e  $z = 0.5$ ) (Fonte Própria)

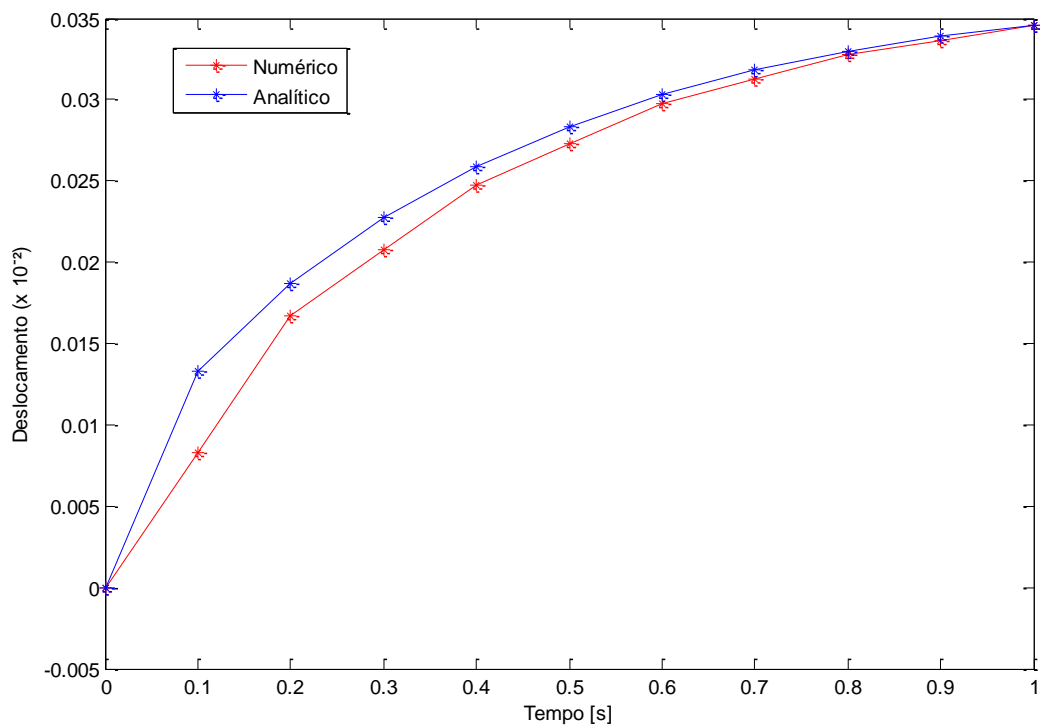


Figura 28. Deslocamento no final da placa ( $x = 1, y = 0.5$  e  $z = 0.5$ ) (Fonte Própria)

Constata-se que tanto os resultados obtidos para a distribuição de temperatura, quanto para o deslocamento, tiveram boa concordância com os resultados analíticos ao final da análise, não obtendo boa aproximação no começo da mesma. Esse fato deve-se ao número de discretização utilizado na análise, devendo possuir melhores resultados quando refinado a discretização e aumentado a distribuição dos pontos internos. Porém, tais considerações quando implementadas, trouxeram um tempo de processamento elevado, não compensando sua implementação. Mesmo com os valores obtidos e ilustrados nas Figuras (27) e (28) foi possível validar o código termoelástico 3D, uma vez que o gráfico teve comportamento próximo e similar ao da solução analítica.

#### 4.4.6. Verificação em processo de soldagem

Para a verificação da formulação apresentada de simular o processo de soldagem, primeiramente foi realizado um gráfico (Figura 29) mostrando o comportamento da componente frontal e traseira da função *double-ellipsoidal* dada pelas Equações (141), (142) e (143).

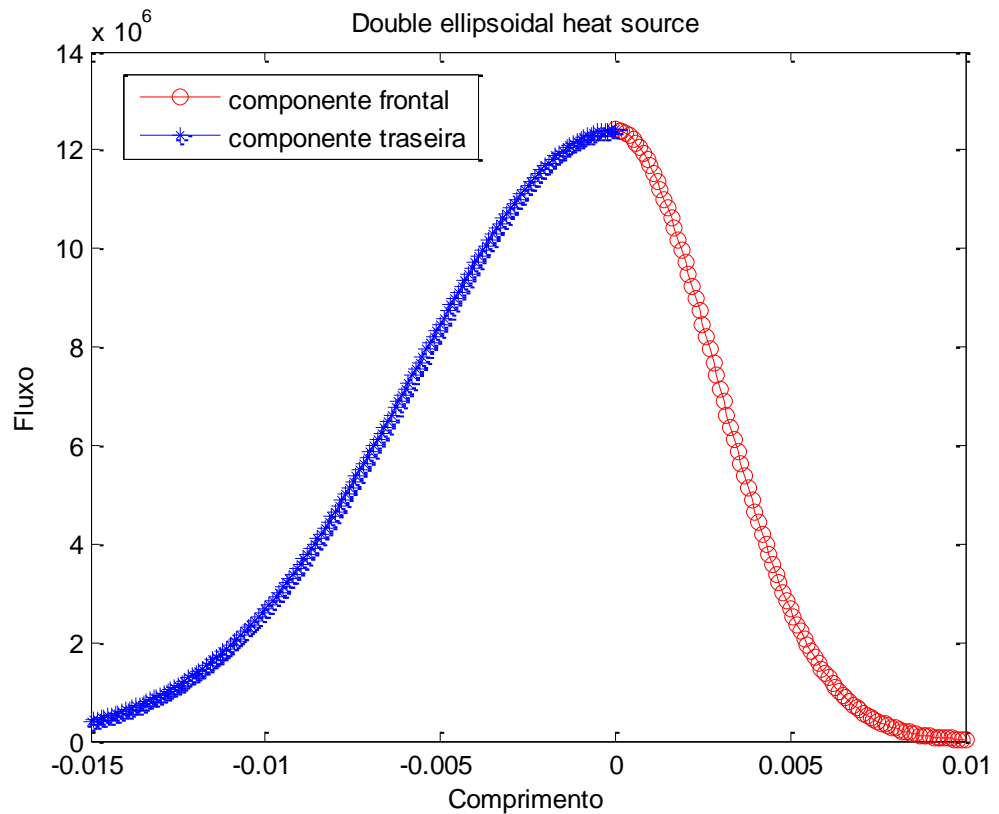


Figura 29. Componente traseira e frontal da função *double-ellipsoidal* (Fonte Própria)

Percebe-se que o gráfico apresentado está de acordo com a ilustração da Figura (16), com isso, a implementação das equações que representam a função *double-ellipsoidal* está correta.

Posteriormente foi realizada a simulação do processo de soldagem, para isso, foi considerado que a ponta do arco da solda se movimenta na direção *y* com uma velocidade constante, conforme mostrado na Figura (30) (Furtado *et al.* (2017)).

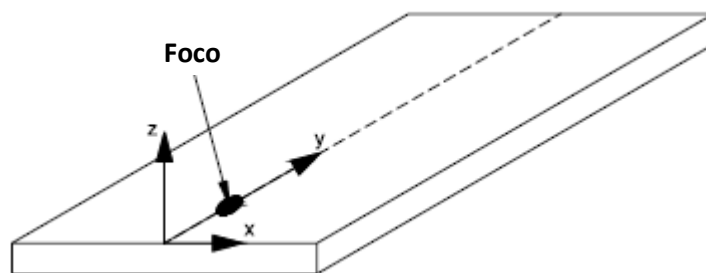


Figura 30. Representação da soldagem (Fonte: Furtado *et al.*, 2017)

O processo de soldagem foi simulado utilizando a mesma geometria e material que Kusçu *et al.* (2016), com isso, os parâmetros utilizados para introduzir a função *double-ellipsoidal* foram os mesmos apresentados na Tabela (7), para solda em arco, e os parâmetros do material utilizado são apresentados na Tabela (11).



Tabela 11. Propriedades do material (Fonte: Kusçu et al., 2016)

$\rho$	$7850 \text{ kg/m}^3$
$C_v$	$475 \text{ J/kgK}$
$k$	$44.5 \text{ W/mK}$

A geometria analisada é mostrada na Figura (31) e, a Figura (32) mostra a solda, representada pela função *double-ellipsoidal*, percorrendo todo o material em um tempo de análise de 3s.

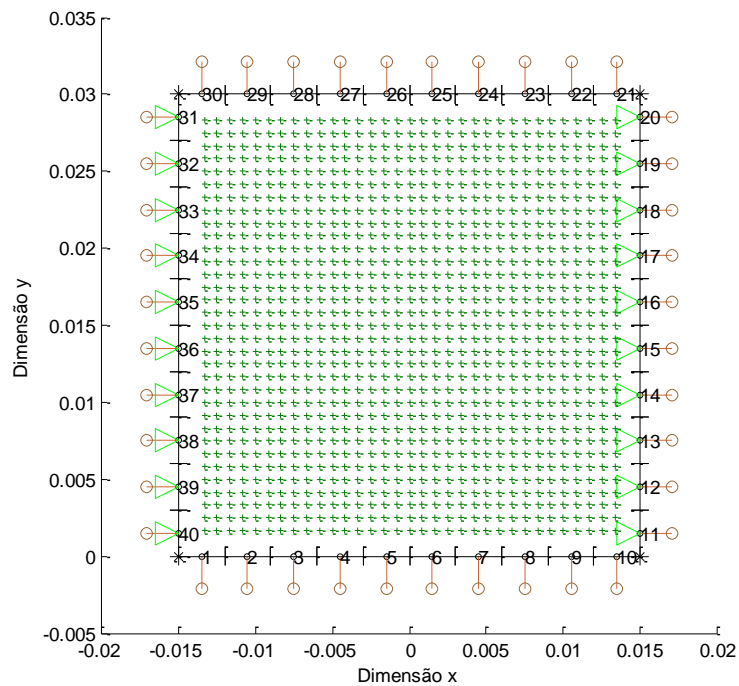
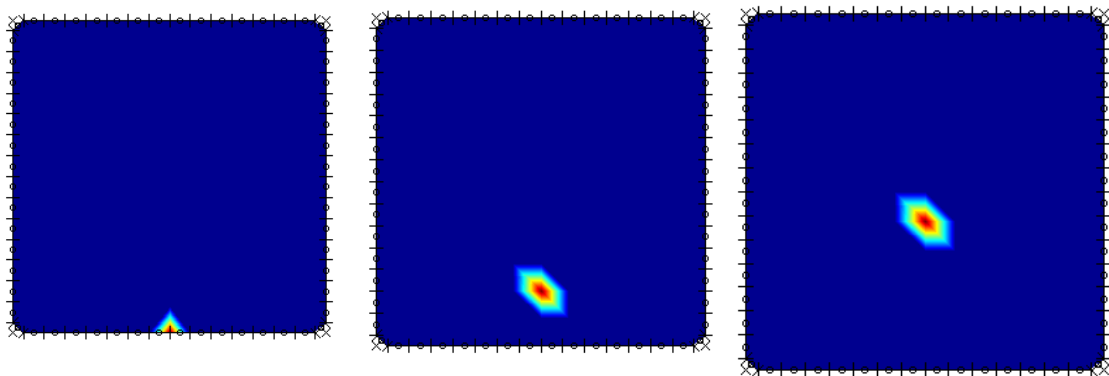


Figura 31. Placa em 2D sujeita ao processo de soldagem (Fonte Própria)



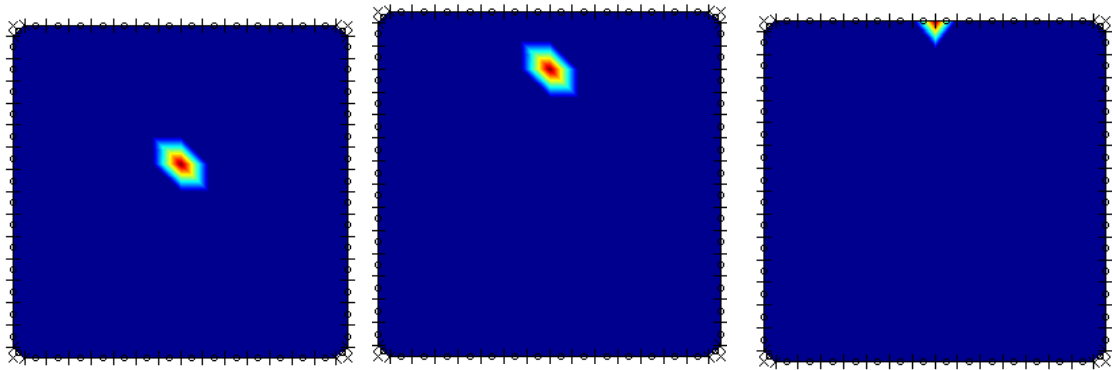


Figura 32. Solda percorrendo todo o material (Fonte Própria)

Fixando um ponto no centro da placa, obteve-se a variação de temperatura mostrada na Figura (33):

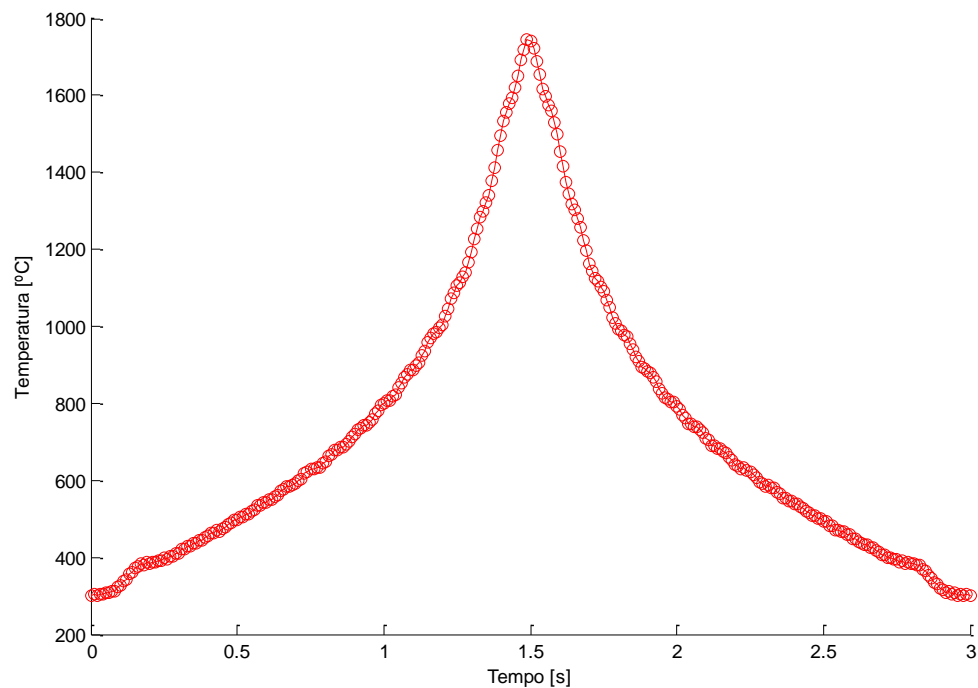


Figura 33. Variação de temperatura no centro da placa (Fonte Própria)

O resultado obtido para o valor máximo de temperatura que o material atinge durante o processo de soldagem está de acordo com o obtido por Kusçu *et al.* (2016) utilizando o MEF. Com isso, a metodologia utilizada para simular o processo de soldagem utilizando o MEC foi verificada.

Cabe dizer, por fim, que para este caso, adicionalmente, foram simuladas equações para verificação do quesito deslocamento, porém, ocorreram dificuldades no processamento das mesmas para a verificação do citado quesito com uso do software MATLAB, extrapolando o tempo de processamento e deduzindo respostas não

satisfatórias se comparadas com os resultados da literatura, assim sendo, estes resultados foram então descartados nesta pesquisa, pois a verificação inicialmente pretendida no respectivo objetivo específico foi alcançada com o quesito temperatura.

#### 4.5. INFLUÊNCIA DA PERFORMANCE DO MATLAB NA APLICABILIDADE DO MEC

O software MATLAB atendeu às expectativas, sendo possível realizar todas as análises especificadas nos objetivos específicos, mostrando sua flexibilidade e abrangência, além de ser um software com uma linguagem computacional de fácil utilização.

Além disso, foi possível importar resultados obtidos a partir do GMSH para geração da malha para problemas em 3D e realizar todos os gráficos necessários para facilitar a análise dos resultados.

Entretanto, como o presente trabalho tratou de análises transientes, quando simulado o caso tridimensional, o software apresentou dificuldades no tempo de processamento, demorando para concluir a análise e gerar os resultados, retardando simulações. Constatou-se que para os casos de processamento em 3D a resposta do software foi cerca de 3 vezes maior do que para os casos de processamento em 2D.

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho de pesquisa acadêmica, de nível de mestrado, permitiu que o objetivo geral proposto fosse alcançado, bem como os objetivos específicos, cabendo observar que o objetivo específico relativo à verificação da aplicabilidade do MEC em processo de soldagem foi alcançado parcialmente, tendo em vista a complexidade da matéria, aplicação do MEC, *versus* o tempo de desenvolvimento da pesquisa.

Em termos da aplicabilidade do MEC em análises viscoelástica, constatou-se que a aplicação apresentou resultados totalmente aderentes e alinhados àqueles analíticos, com códigos 2D, conforme apresentado no item 3.6.2.

No que se refere à aplicabilidade do MEC em análise termoelástica, verificou-se que a aplicação apresentou, também, resultados aderentes e alinhados aos analíticos, tanto em 2D, quanto em 3D, conforme apresentado nos itens 4.4.4 e 4.4.5.

Ademais, foi possível validar os códigos das equações de Poisson 2D e 3D, bem como o código de difusão 3D. Que viabilizou a implementação do MEC com MRD para análise termoelástica, conforme apresentado nos itens 4.4.1, 4.4.2 e 4.4.3, respectivamente.

No que se refere à verificação da aplicabilidade do MEC em materiais sujeitos ao processo de soldagem, observou-se que para obtenção da distribuição de temperatura o mesmo se mostrou adequado, mas não foi possível obter os deslocamentos gerados pelo processo em questão, conforme apresentado no item 4.4.6. Ressalta-se que a pesquisa obteve resultado satisfatório no foco do quesito distribuição de temperatura, confirmando a aplicabilidade do MEC em problemas complexos da engenharia, como o ora estudado, materiais sujeitos a soldagem.

Assim sendo, as simulações e validações apresentadas nesta pesquisa de mecânica computacional podem contribuir com o estado da arte da matéria, bem como podem alavancar pesquisas, em nível nacional e internacional, a exemplo do intercâmbio de informação e conhecimento ocorridos por ocasião da disseminação dos resultados parciais da pesquisa, nas apresentações em eventos nacionais e internacionais, cuja abrangência temática inclui áreas de estudos de materiais, de problemas acoplados no âmbito da engenharia mecânica e de modelagens numéricas/computacionais.

Ademais, o software MATLAB foi eficaz no atendimento do propósito desta pesquisa, porém sua performance apresentou certas restrições quanto à eficiência do mesmo, em especial no quesito capacidade de processamento de volume de dados *versus* tempo de finalização dos resultados, sendo que tais restrições se mostraram mais evidentes no processamento em 3D.

Por fim, os resultados alcançados confirmaram as hipóteses desta pesquisa, ou seja: i) a aplicabilidade do MEC se mostrou com índices de confiabilidade bem satisfatórios para análise de materiais com comportamento viscoelástico e termoelástico; e ii) o método estudado apresenta potencial de aplicabilidade na solução de problemas complexos de engenharia.

## **6. RECOMENDAÇÕES E PERSPECTIVAS**

Inicialmente cabe recomendar a realização de pesquisas utilizando outras linguagens computacionais, que não a do software MATLAB, de forma a buscar melhores performances na velocidade de processamento das análises numéricas, obtendo-se mesmos resultados aderentes e alinhados aos analíticos.

Vale também indicar a necessidade de avanços na diversificação dos problemas a serem analisados pelo MEC, tais como, viscoplástico e termoplástico, contribuindo assim, com o processo de amadurecimento da aplicabilidade do mesmo, em especial na engenharia mecânica.

Recomenda-se, ainda, a realização de estudos que permitam aprofundar a aplicação do MEC em material sujeito ao processo de soldagem no âmbito de pesquisas de mestrado e doutorado, dada a agregação de valor que tais estudos poderão trazer aos avanços científicos e tecnológicos da matéria. Orienta-se o uso de linguagem computacional diferente da aplicada, software MATLAB, de forma a comparar os resultados alcançados nesta pesquisa, e evoluir na análise comparativa das melhores performances para solução de problemas de engenharia, em especial no caso concreto de processo sujeito a soldagem.

Por fim, com relação às perspectivas, observa-se a tendência de desenvolvimento de ferramentas, comerciais e softwares livres, eficientes, eficazes e amigáveis, para uso amplo do MEC na solução de problemas complexos de engenharia, com otimização do tempo da análise, e racionalização do custo computacional. Soma-se a importância de ações contínuas que fortaleçam e ampliem as parcerias, no país e exterior, com grupos de pesquisa nesta matéria, impulsionando o intercâmbio de informação e conhecimento.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aarbogh, H. M.; Hamide, M.; Fjaer, H. G.; Bellet, M.; Experimental Validation of Finite Element Codes for Welding Deformations. *Journal of Materials Processing Technology*, v. 210, p.1681-1689, 2010

Anacleto, F. E. S.; Análise Viscoelástica e Viscoplastica de Sólidos Bidimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno. [Dissertação de mestrado] Universidade Federal de Minas Gerais, 2010

Aliabadi MH.; *The Boundary Element Method, Volume 2, Applications in Solids and Structures*. 1ª edition. Chichester (United Kindom). Wiley; 2002.

Arroyave, A. A. B.; Estudo da Homogeneização de Materiais Micro-Heterogêneos e Viscoelásticos Empregando o MEC. [Dissertação de Doutorado] Universidade de Brasília, 2017

Baranoglu, B.; *The Use of Dual Reciprocity Boundary Element Method in Thermoelasticity and Thermoviscoelasticity*. [Dissertação de Doutorado] Department of Engineering Sciences. Atilim University, Ankara, Turkey, 2003

Brebbia, C. A.; Domingues, J.; *Boundary Elements An Introductory Course*. Second Ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

Brebbia, C. A.; Telles, J. C. F.; Wrobel, L. C.; *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, Berlim, 1984

Canevarolo Jr, S. V.; *Ciência dos Polímeros*. Artliber Editora LTDA, 2º Edição, 2010

Carbone, M.; Desenvolvimento de um Novo Algoritmo para Análise Viscoplastica com o Método dos Elementos de Contorno. [Dissertação de Mestrado] Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2007

Chapman, S. J.; *Programação em MATLAB para engenheiros*. CENCAGE Learning, 2º edição, 2010

Chiument, M.; Cervera, M.; Dalami, N.; Wu, B.; Jinwei, L.; Saracibar, C. A.; Numerical Modeling of the Electron Beam Welding and its Experimental Validation. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 121, p.118-133, 2016

Cruse, T. A.; Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastoestatics, *Int. J. Solids and Structs*, v.5, p.1259-1274, 1979

Dinis, L.; Viscoelasticidade: Apresentação de Aula (Mecânica não linear; Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade do Porto, 34p, 2005. Disponível em: <http://www.fe.up.pt/~ldinis>. Acesso em: 01/09/2016.

Eagar, T.; Tsai, N.; Temperature Fields Produced by Traveling Distributed Heat Sources. *Welding Journal*, 62, p.346-355, 1983

Furtado, D. C.; Arroyave, A. A. B.; Anflor, C. T. M.; A Microstructural Analysis Using BEM for Viscoelastic Materials. XXXVII Iberian Latin American Congress in Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Brasília, DF, 2016

Furtado, D. C.; Anflor, C. T. M.; Baranoglu, B.; Thermoelastic Boundary Element Modeling of Heat Affected Zone of Low Carbon Steel in Laser Welding. VII International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, COUPLED PROBLEMS, Rhodes, Greece, 2017

Goldak, J.; Akhlaghi, M.; *Computational Welding Mechanics*. Springer, United States, 2005

Gurtin, M. E.; Sternberg, E.; On the Linear Theory of Viscoelasticity. *Arch. Rational Mech, Anal*, vol. 11, Brown University, 1962

Henry Jr, D. P.; Banerjee, P. K.; A New Boundary Element Formulation for Two and Three-Dimensional Thermoelasticity Using Particular Integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.26, p.2061-2077, 1988

Karami, G.; Kuhn, G.; Body-force Linear Elastic Stress Intensity Factor Calculation Using Boundary Element Method. *Computers & Structures*, v.49, n.1, p.107-115, 1993

Kuşçu, Y. F.; Atay, A.; Meço, Ç. H.; Çetin, B.; Thermal Modeling of Heat Affected Zone of a Low Carbon Steel in Gas Metal Arc and Laser Welding. *Proceeding of the 17th International Conference on Machine Design and Production*, 2016

Medeiros, G. C.; *O Método das Soluções Fundamentais com Reciprocidade Dual para Problemas de Poencial*. [Dissertação de Mestrado] Universidade de Brasília, 2001



Mesquita, A. D.; Novas Metodologias e Formulações para o Tratamento de Problemas Inelásticos com Acoplamento MEC/MEF Progressivo. [Dissertação de Doutorado] Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, 2002

Mesquita, A. D.; Coda, H. B.; Boundary Integral Equation Method for General Viscoelastic Analysis. *International Journal of Solids and Structures*. V. 39, p.2643-2664, 2002

Nardini, D.; Brebia, C. A.; A New Approach to Free Vibration Analysis Using BE in BEM. Springer Verlag, 1982

Oberg, M. B. A. M.; Análise Numérica Via MEC e Experimental Via Imagens Térmicas para Predição da Condutividade Térmica Efetiva. [Projeto de Graduação] Universidade de Brasília, 2013

Oliveira, H. L.; Leonel, E. D.; Boundary Element Formulations Applied to Analysis of Fracture Problems in Viscoelastic Materials. 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM IX), 5th European Congress on Computational Mechanics (ECCM V), 6th European Congress on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI), Barcelona, Spain, 2014

Oliveira, T. R. S. T.; Modelagem do Suporte de Túneis com Comportamento Viscoelástico Usando o Método dos Elementos de Contorno. [Dissertação de Mestrado] Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009

Pagliosa, C.; Determinação Experimental de Propriedades Viscoelásticas de Material Polimérico. [Dissertação de Mestrado] Universidade Federal de Santa Catarina, 2004

Partridge, P. W.; Brebia, C. A.; The BEM Dual Reciprocity Method for Diffusion Problem. *Computational Methods in Water Resources VIII, Computational Mechanics Publications, Southampton e Springer-Verlag, Berlin e New York*, 1990

Partridge, P. W.; Brebbia, C. A.; Wrobel, L. C.; The Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Computational Mechanics Publications (CMP), Southampton, London*, 1992

Partridge, P. W.; Wrobel, L. C.; The Dual Reciprocity Boundary Element Method for Spontaneous Ignition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, 1990

Rizzo, F.A.; Shippy, D. J.; Na Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 1977

Rosenthal, D.; Mathematical Theory of Heat Distribution During Welding and Cutting. *Welding Journal*. 20, p.220-234, 1941