

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Bifurcação de Hopf generalizada para um sistema  
planar suave por partes**

por

Izabel Santana Almeida Arantes

2007

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Bifurcação de Hopf generalizada para um sistema planar suave por partes

por

**Izabel Santana Almeida Arantes**

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 09 de Novembro de 2007.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Jorge Carlos Lucero - MAT/UnB Orientador

---

Prof. Helmar Nunes Moreira - MAT/UnB Membro

---

Prof. Edson Cataldo - MAT/UFF Membro

À minha família, ao meu noivo e meus amigos.

---

# Agradecimentos

“Agradecei ao Senhor porque Ele é bom, porque a Sua misericórdia dura para sempre.”

(Salmo 135,1)

Deus, com certeza é para Ele que vão meus primeiros agradecimentos, por iluminar e guiar meus passos e me ajudar incondicionalmente todos os dias.

Agradeço aos meus pais Luiz Antônio e Maria Beatriz por todo amor, paciência, incentivo, apoio e por sempre acreditarem em minha capacidade. Às minhas irmãs Cecília e Alice pelo companheirismo, pela força, boas conversas e por sempre torcerem por mim. Ao meu noivo Luiz Alberto por toda dedicação, cumplicidade e por sempre estar ao meu lado em minhas lutas.

Agradeço ao Professor Jorge Carlos Lucero pela orientação, paciência, confiança em meu trabalho e disposição para compartilhar seus conhecimentos matemáticos. Agradeço aos professores Helmar Moreira, UnB, Edson Cataldo, UFF, pelo tempo dispensado à avaliação de meu trabalho e pela oportunidade de enriquecê-lo com suas correções e sugestões. Agradeço a todos os professores que contribuíram de certo modo em minha caminhada e a todos os funcionários do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

Agradeço aos meus amigos Paola, Alexandra, Allan, Bruno, Aline, Hélio, Paulo Boni, Shelly, Luiz Alberto, Vera, Luany, Zeca, Fred, Alessandra, Ricardo, Sandra, Kátia, Cris, Adriana pelo apoio, pelos conselhos e momentos de descontração.

E, claro, agradeço àqueles que me acompanharam nessa caminhada e conhecem cada etapa pela qual passei nesses dois anos, pelas horas de estudo, pelo apoio tanto nas horas alegres quanto nas tristes, por sempre me darem força e sobretudo pela amizade, meus amigos e cúmplices Mary, Lú, Magno, Miguel, Léo, Jorge. E aos meus colegas Vagner, Karise, Manú, Anyele, Ricardo, Flávia, Teo, Tertu, Kélem, Lineu, Luverci e todos que me ajudaram a concluir este trabalho.

Muito obrigada a todos aqueles que me ajudaram nessa conquista.

---

# Resumo

Neste trabalho utilizamos a teoria qualitativa das equações diferenciais para estudar rapidamente a bifurcação de Hopf para um sistema dinâmico planar suave mediante a variação do parâmetro de controle do sistema, e a bifurcação de Hopf generalizada emanada de um canto de um sistema planar suave por partes, sobre a geração de uma família de órbitas periódicas bifurcando, também variando o parâmetro de controle.

Para isso, definimos o número de Liapunov e a aplicação de Poincaré. E, a partir da composição de aplicações de Poincaré, construímos uma aplicação Retorno e estudamos seus pontos fixos.

Ilustramos esses fenômenos de bifurcação através de uma análise dos modelos suave e suave por partes da oscilação das pregas vocais no processo de produção da voz (fonação). A maior parte desta dissertação está baseada em [28, 30, 35, 37, 40].

**Palavras-chaves:** bifurcação de Hopf, solução periódica, aplicação de Poincaré, aplicação Retorno, modelo da fonação.

---

# Abstract

In this work we use the qualitative theory of the differential equations to quickly study the Hopf bifurcation for a smooth planar dynamical system under the variation of the control parameter of the system, and a generalized Hopf bifurcation emanated from a corner for piecewise smooth planar dynamical system, about the generation of a branch of periodic orbits bifurcating, varying the control parameter.

For this, we define the Liapunov number and the Poincaré map. And, through the composition of the Poincaré maps, we build a Return map and we study its fixed points.

We illustrate those bifurcation phenomena by a analysis of the smooth and piecewise smooth models for a vocal fold oscillation in process of the voice production (phonation). The main part of this dissertation is based on [28, 30, 35, 37, 40].

**Key words:** Hopf bifurcation, periodic solution, Poincaré map, Return map, phonation model.

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Aplicação de Poincaré . . . . .	5
1.2 Sistemas analíticos . . . . .	10
<b>2 Bifurcação de Hopf para um sistema planar suave</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	13
2.2 A bifurcação de Hopf . . . . .	14
2.3 Teorema da Bifurcação de Hopf . . . . .	17
2.4 Modelo suave da oscilação das pregas vocais . . . . .	19
<b>3 Bifurcação de Hopf generalizada para um sistema planar suave por partes</b>	<b>27</b>
3.1 Sistema planar suave por partes e canto simples . . . . .	28



3.2	Aplicação Retorno para um sistema linear por partes . . . . .	32
3.3	Aplicação Retorno para um sistema não linear . . . . .	40
3.4	Bifurcação de Hopf generalizada para um canto simples . . . . .	45
3.5	Extensão para o canto geral . . . . .	50
3.6	Modelo suave por partes da oscilação das pregas vocais . . . . .	54
<b>Conclusão</b>		<b>62</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>64</b>

---

# Introdução

*“ Hopf bifurcation is the door that opens from the small room of equilibria to the large hall of periodic solutions, which in turn is just a small part of the realm of functions.”*

Rüdiger Seydel

O surgimento de órbitas periódicas através da bifurcação de Hopf é um mecanismo bem conhecido na teoria da bifurcação. Esse assunto foi muito explorado por Poincaré, Andronov e Hopf [7]. Os resultados básicos sobre esse fenômeno foram mostrados por Poincaré; o caso planar foi especialmente explorado por Andronov em 1929 [3].

A bifurcação de Hopf para sistemas suaves é caracterizada analiticamente por um simples cruzamento de um par de autovalores complexos conjugados do sistema linearizado pelo eixo imaginário. Geometricamente isso significa que, enquanto a solução estacionária do sistema muda sua estabilidade, soluções periódicas surgem. Essa descrição analítica da bifurcação de Hopf exige suavidade do problema considerado já que precisamos das propriedades de linearização. Por isso, essa aproximação não é suficiente para o caso do sistema não ser suave, pois a noção de um sistema linearizado não existe. Para lidar com esse caso, alguns autores como em [24] e [40] baseiam-se em um método geométrico para investigar a bifurcação de Hopf.

Atualmente, o conjunto das bifurcações causadas por algum tipo de descontinuidade

ou não-diferenciabilidade é chamado de C-bifurcação. Mas esse termo foi mencionado pela primeira vez por Feigin ao estudar a duplicação do período de oscilação em sistemas contínuos por parte.

Alguns tipos de C-bifurcação, bem como suas classificações podem ser encontrados em [13]. A bifurcação ‘Grazing’ de ciclos limites, por exemplo, ocorre quando uma órbita periódica cruza tangencialmente a linha de descontinuidade [6, 12]. Já a bifurcação ‘Sliding’ acontece quando parte da órbita periódica coincide com a linha de descontinuidade [23, 15]. E a bifurcação ‘Border-collision’ de pontos fixos em aplicações ocorre quando uma família de pontos fixos cruza transversalmente a linha de descontinuidade à medida em que o parâmetro de controle do sistema considerado varia [13, 32, 33]. Um caso especial desse fenômeno é a bifurcação ‘corner-collision’, explorado em [11].

Estudaremos um tipo de C-bifurcação chamada de bifurcação de Hopf generalizada, que ocorre quando uma órbita periódica é criada ou desaparece [24, 39, 38, 40]. Mais especificamente, estudaremos a bifurcação de Hopf generalizada quando a solução estacionária permanece em um canto do domínio para todo valor do parâmetro de controle [37, 38]. Outros tipos desse fenômeno de bifurcação como o caso em que órbitas periódicas são criadas no infinito [17, 16] ou quando o equilíbrio permanece em uma linha suave de descontinuidade e a órbita periódica bifurcada cruza essa linha pelo menos duas vezes [24, 39, 40], também têm sido muito explorados recentemente.

O estudo e classificação dos tipos de C-bifurcação em sistemas dinâmicos suaves por partes têm despertado o interesse de muitos matemáticos, engenheiros e cientistas pela teoria da bifurcação. E cada vez mais esses fenômenos de bifurcação têm sido estudados em diferentes aplicações. Em [30], por exemplo, é investigada a bifurcação de Hopf generalizada no modelo suave por partes da oscilação das pregas vocais no processo da fonação.

Nosso objetivo nesse trabalho é estudar rapidamente a bifurcação de Hopf para um sistema dinâmico planar suave e, posteriormente, estudar a bifurcação de Hopf generalizada para um sistema dinâmico planar suave por partes e observá-la no modelo suave por partes da oscilação das pregas vocais baseado nos artigos [28, 30]. Todo nosso estudo

é feito em  $\mathbb{R}^2$ .

Começaremos nosso trabalho definindo a aplicação de Poincaré, que é uma ferramenta muito utilizada na teoria das bifurcações das órbitas periódicas e estabilidade. Em seguida, faremos uma discussão para sistemas analíticos planares sobre a aplicação de Poincaré na vizinhança de um foco e definiremos o número de Liapunov.

No segundo capítulo, trataremos da definição da bifurcação de Hopf. Em seguida, enunciaremos o principal resultado desse capítulo, o Teorema da Bifurcação de Hopf, o qual garante a existência de uma bifurcação de Hopf para um sistema planar suave que depende de um parâmetro  $\mu$ , da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + p(x, y) \\ \dot{y} = x + \mu y + q(x, y) \end{cases},$$

com  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  funções analíticas. Por último, aplicaremos esse teorema na equação que modela os movimentos das pregas vocais no processo da fonação dada por

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}},$$

com  $x_0 + x + \tau\dot{x} > 0$ .

No terceiro capítulo o estudo é mais minucioso. Ele é dividido em seis seções. Começaremos na primeira seção com algumas definições preliminares. Na segunda seção, definiremos a aplicação de Poincaré para cada subsistema de um sistema planar linear por partes e, fazendo uma composição, obteremos uma aplicação Retorno para tal sistema. Usando um método similar ao utilizado na segunda seção, na terceira definiremos a aplicação Retorno para um sistema planar não linear.

Os principais resultados do nosso trabalho encontram-se nas três últimas seções. Na quarta, estudaremos o surgimento da bifurcação de Hopf generalizada no canto (simples) de um sistema planar não linear suave por partes da forma

$$(\dot{x}, \dot{y})^T = F(x, y, \mu),$$

onde  $(x, y)$  pertence a um disco  $\Omega$  de raio  $r$ ,  $\mu$  pertence a um intervalo  $M$  contendo a origem e a função  $F = (F_1, F_2)^T$  descreve o campo de vetores do sistema. A idéia do método usado é simples: a procura por pontos fixos não triviais da aplicação Retorno. Na quinta seção, estenderemos os resultados principais da seção anterior para o caso de um domínio contendo um canto qualquer. Na última seção, faremos uma aplicação dos resultados apresentados ao modelo da fonação suave por partes

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = \begin{cases} \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}}, & \text{se } \dot{x} \geq 0 \\ 0, & \text{se } \dot{x} < 0 \end{cases},$$

onde o retrato de fase é dividido em duas regiões nas quais o campo de vetores do sistema é suave e na fronteira entre essas duas regiões o campo de vetores não é suave.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

*Neste capítulo, vamos definir a aplicação de Poincaré ou aplicação de Primeiro Retorno, definida por Henri Poincaré em 1881, [35], que é uma ferramenta muito utilizada na teoria das bifurcações das órbitas periódicas e estabilidade. Trabalharemos no espaço de dimensão dois,  $\mathbb{R}^2$ , mas os resultados podem ser facilmente estendidos para dimensões superiores. Posteriormente, faremos uma discussão para sistemas analíticos planares sobre a aplicação de Poincaré na vizinhança de um foco e definiremos o número de Liapunov que será bastante usado no capítulo seguinte. Basearemos o presente capítulo em [35] e [36].*

---

### 1.1 Aplicação de Poincaré

---

Resumidamente, um sistema dinâmico planar é uma função  $\phi(t, \mathbf{x})$ ,  $C^1$ , definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^2$ , que descreve como pontos  $\mathbf{x} \in E$  movem-se com relação ao tempo  $t$  ([35], Seção 3.1). E, se  $\phi(t, \mathbf{x})$  é um sistema dinâmico em  $E \subset \mathbb{R}^2$ , em geral

temos que a função  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\phi(t, \mathbf{x})|_{t=0}$  define um campo de vetores  $C^1$  em  $E$ . Além disso, para cada  $\mathbf{x}_0 \in E$ ,  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}$$

e o intervalo máximo de existência de  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  é  $I(\mathbf{x}_0) = (-\infty, \infty)$ .

Logo, cada sistema dinâmico causa um campo vetorial- $C^1$ ,  $\mathbf{f}$ , e descreve o conjunto solução da equação diferencial definida por esse campo vetorial. Nesse caso, então, dizemos que  $\phi(t, \mathbf{x})$  é o sistema dinâmico em  $E$  definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Agora, podemos definir a aplicação de Poincaré.

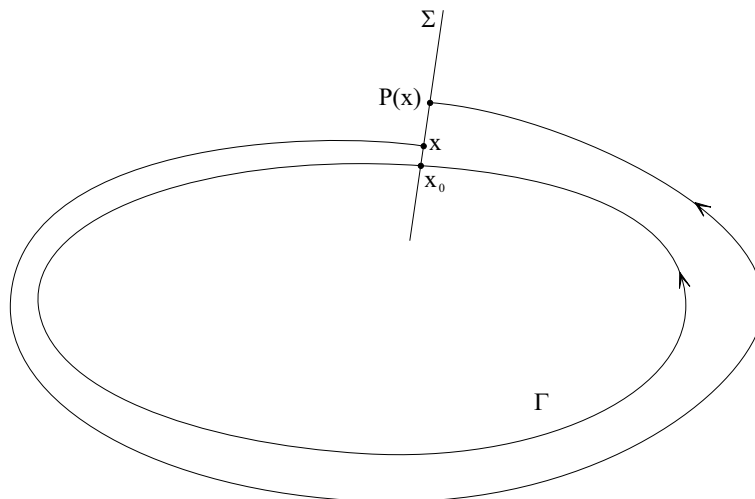


Figura 1.1: A aplicação de Poincaré.

Vamos, primeiramente, apresentar a idéia da aplicação de Poincaré: Considere um sistema dinâmico planar da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

com  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  e  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\Gamma$  uma órbita periódica desse sistema que passa pelo ponto  $\mathbf{x}_0$  e  $\Sigma$  uma reta normal a  $\Gamma$  em  $\mathbf{x}_0$ . Para um ponto  $\mathbf{x} \in \Sigma$

da vizinhança de  $\mathbf{x}_0$ ,  $V_\xi(\mathbf{x}_0)$ , a solução do sistema (1.1) por  $\mathbf{x}$  em  $t = 0$ ,  $\phi_t(\mathbf{x})$ , cruzará a reta  $\Sigma$  novamente em algum ponto  $P(\mathbf{x})$  próximo de  $\mathbf{x}_0$ . Chamamos a aplicação que leva  $\mathbf{x}$  a  $P(\mathbf{x})$  de aplicação de Poincaré (ver figura 1.1).

Apresentamos então, um teorema que garante a existência e continuidade de  $P(\mathbf{x})$ , bem como a continuidade de suas primeiras derivadas  $DP(\mathbf{x})$ .

**Teorema 1.1.** Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Suponha que  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  seja uma órbita periódica do sistema (1.1) de período  $T$  e que  $E$  contenha o ciclo

$$\Gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{x}_0) \text{ com } 0 \leq t \leq T \}.$$

Seja agora  $\Sigma$  a reta normal a  $\Gamma$  em  $\mathbf{x}_0$ . Então existe uma constante  $\xi > 0$  e uma única função  $\tau(\mathbf{x})$ , definida e continuamente diferenciável para  $\mathbf{x} \in V_\xi(\mathbf{x}_0)$ , tal que  $\tau(\mathbf{x}_0) = T$  e  $\phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma$  para todo  $\mathbf{x} \in V_\xi(\mathbf{x}_0)$ .

**Demonstração:** Usaremos nesta demonstração basicamente o teorema da função implícita [27]. Como  $\Sigma$  é a reta normal a  $\Gamma$  em  $\mathbf{x}_0$ , podemos escrevê-la da forma

$$\Sigma = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0 \}.$$

Vamos definir para cada ponto  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma \subset E$ , a função

$$F(t, \mathbf{x}) = [\phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0] \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Segundo Perko ([35], Teorema 1, Seção 2.5), temos que  $F \in C^1(\mathbb{R} \times E)$ . E, devido a periodicidade de  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  ( $\phi_T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ), temos ainda que  $F(T, \mathbf{x}_0) = 0$ . Além disso, sendo  $\phi(t, \mathbf{x}_0) = \phi_t(\mathbf{x}_0)$  uma solução de (1.1) e desde que  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  não seja ponto de equilíbrio de (1.1) pois, nesse caso o campo vetorial  $\mathbf{f}$  é nulo, temos

$$\frac{\partial F(T, \mathbf{x}_0)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(T, \mathbf{x}_0)}{\partial t} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \dot{\phi}(T, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = |\dot{\phi}(T, \mathbf{x}_0)|^2 \neq 0$$



Então, pelo torema da função implícita, existe uma constante  $\xi > 0$  e uma única função  $\tau(\mathbf{x})$  definida e continuamente diferenciável para todo  $\mathbf{x} \in V_\xi(\mathbf{x}_0)$  tal que

$$\tau(\mathbf{x}_0) = T \text{ e } F(\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$$

para todo  $\mathbf{x} \in V_\xi(\mathbf{x}_0)$ .

Portanto, para todo  $\mathbf{x} \in V_\xi(\mathbf{x}_0)$ ,

$$[\phi(\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0] \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0,$$

ou seja,

$$\phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma.$$

□

Essa demonstração, para  $\mathbb{R}^n$ , pode ser encontrada em [[35], p.194, 195].

**Definição 1.1.** (Aplicação de Poincaré) Sejam  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\xi$  e  $\tau(\mathbf{x})$  como no Teorema 1.1. Então a função  $P(\mathbf{x}) = \phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ , para  $\mathbf{x} \in V_\xi(\mathbf{x}_0) \cap \Sigma$ , é chamada a *aplicação de Poincaré* para  $\Gamma$  em  $\mathbf{x}_0$ .

**Observação 1.2.** 1. Segue do **Teorema 1.1** que  $P \in C^1(V)$  onde  $V = V_\xi(\mathbf{x}_0) \cap \Sigma$ . E, se  $\mathbf{f}$  é analítica em  $E$ , segue pelo teorema da função implícita para funções analíticas que  $P$  é analítica em  $V$ .

2. Se considerarmos o sistema (1.1) com  $t \rightarrow -t$ , pode ser mostrado que a aplicação de Poincaré  $P$  tem uma inversa  $C^1$ ,  $P^{-1}$ , ou seja, que  $P$  é um difeomorfismo (função suave com inversa suave).

**Definição 1.3.** (Ponto Fixo) Os pontos  $\mathbf{x} \in \Sigma$  tais que  $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  são chamados de *pontos fixos* da aplicação de Poincaré.

Vamos assumir, sem perda de generalidade, que  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma \cap \Sigma$  seja a origem do sistema (1.1) (se necessário é só fazer uma translação). Então,  $\Sigma$  será a reta normal à  $\Gamma$

que passa pela origem de (1.1). Note que  $\mathbf{0} \in \Gamma \cap \Sigma$  divide  $\Sigma$  em dois segmentos (abertos). Denotaremos por  $\Sigma_i$  e  $\Sigma_e$  os segmentos que permanecem inteiramente no interior e no exterior da região delimitada por  $\Gamma$ , respectivamente. Agora consideremos  $s$  a distância (da origem) marcada ao longo de  $\Sigma$ , sendo  $s > 0$  para pontos em  $\Sigma_i$  e  $s < 0$  para pontos em  $\Sigma_e$  (ver figura 1.2).

Observe que, pelo Teorema 1.1, a aplicação de Poincaré  $P(s)$  está definida para  $|s| < \xi$ , uma vizinhança da origem, e que  $P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

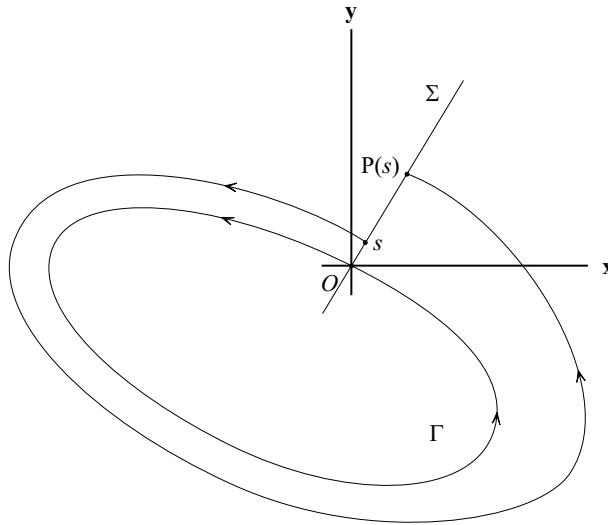


Figura 1.2: A reta  $\Sigma$  normal a  $\Gamma$  na origem.

Nosso objetivo agora é concluir que a estabilidade do ciclo  $\Gamma$  é determinada pela derivada  $P'(0)$ , onde  $(\cdot)$  denota a derivada com relação a  $s$ . Para isso, vamos introduzir a *função deslocamento*

$$d(s) = P(s) - s.$$

Daí, temos que  $d(0) = 0$  e  $d'(s) = P'(s) - 1$ . Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante  $k$  entre 0 e  $s$  tal que

$$d(s) = d'(k)s \tag{1.2}$$

Como  $d'(s)$  é contínua (Teorema 1.1), temos que, para  $|s|$  suficientemente pequeno, o sinal de  $d'(s)$  e, conseqüentemente, o de  $d'(k)$ , será o mesmo de  $d'(0)$ , já que  $d'(0) \neq 0$ .

Então, se  $P(0) = 0$  e  $P'(0) < 1$ , temos que  $d'(0) < 0$ , o que implica, por (1.2), em  $d(s) < 0$  para  $s > 0$  e em  $d(s) > 0$  para  $s < 0$ . Daí, concluímos que  $\Gamma$  é uma órbita periódica (isolada) estável ou um ciclo  $\omega$ -limite de (1.1). E, se  $P(0) = 0$  e  $P'(0) > 1$ , temos que  $d'(0) > 0$ , o que implica, por (1.2), em  $d(s) > 0$  para  $s > 0$  e em  $d(s) < 0$  para  $s < 0$ . Daí,  $\Gamma$  é uma órbita periódica (isolada) instável ou um ciclo  $\alpha$ -limite de (1.1).

Portanto, concluímos que a estabilidade da órbita periódica  $\Gamma$  do sistema (1.1) é determinada pela derivada  $P'(0)$ .

---

## 1.2 Sistemas analíticos

---

Para sistemas analíticos planares a discussão sobre a aplicação de Poincaré na vizinhança de um foco é importante para o presente trabalho.

Considere que (1.1) seja analítico. Suponha que esse sistema possua um foco na origem (se necessário faça uma translação) e que sua matriz Jacobiana aplicada na origem tenha determinante não-nulo. Então, desde de que  $b \neq 0$ , o sistema (1.1) é linearmente equivalente ao sistema (na forma canônica)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by + p(x, y) \\ \dot{y} = bx + ay + q(x, y) \end{cases}, \quad (1.3)$$

onde  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  são funções analíticas dadas pelas séries

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j \\ &= (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

e

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j \\
 &= (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

**Teorema 1.2.** Seja  $P(s)$  a aplicação de Poincaré para um foco na origem do sistema analítico planar (1.3) com  $b \neq 0$  e suponha que  $P(s)$  está definida em  $0 < s < \zeta_0$ . Então existe  $\zeta > 0$  tal que  $P(s)$  pode ser estendida por uma função analítica definida para  $|s| < \zeta$ . Além disso,  $P(0) = 0$  e  $P'(0) = \exp\left(\frac{2\pi a}{|b|}\right)$ .

**Demonstração:** Esse teorema está demonstrado em [2].

□

Quando

$$d(0) = 0 \text{ e } d'(0) \neq 0,$$

o foco é chamado um *foco simples* e, de acordo com o teorema anterior, vemos que se no sistema (1.3),  $b \neq 0$ , então esse sistema possui um foco simples na origem se, e somente se,  $a \neq 0$ , já que, nesse caso,  $d'(0) = P'(0) - 1$  é estritamente positivo ou estritamente negativo.

Observe que o sinal de  $d'(0) = P'(0) - 1$  ou, equivalentemente, o sinal de  $a$  determina a estabilidade da origem: se  $a < 0$  a origem é um foco estável e se  $a > 0$ , a origem é um foco instável. Mas se  $d'(0) = 0$ , ou seja,  $a = 0$ , então por ([35], Seção 2.10, Teorema 5) se o sistema (1.3) for não-linear, ele tem um foco ou um centro na origem.

Se  $d'(0) = 0$ , o foco é chamado de *foco múltiplo* e a primeira derivada não nula da função deslocamento aplicada nele é o seu número de Liapunov  $\sigma$ :  $\sigma \equiv d^{(k)}(0) \neq 0$ . Além

disso, o foco é estável se  $\sigma < 0$  e instável se  $\sigma > 0$  ([18], Seção 1.3). Em particular, se  $d'(0) = d''(0) = 0$  e  $d'''(0) \neq 0$ , o número de Liapunov para o foco na origem é dado pela fórmula

$$\begin{aligned} \sigma \equiv d'''(0) = & \frac{3\pi}{2b} \{ [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21})] \\ & - \frac{1}{b} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})] \}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são os coeficientes das séries (1.4) e (1.5), respectivamente. O valor do número de Liapunov será muito útil no próximo capítulo para garantir a existência da bifurcação de Hopf.

**Observação 1.4.** Para um sistema analítico planar na forma geral

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + p(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + q(x, y) \end{cases}, \quad (1.7)$$

onde  $\Delta = ad - bc > 0$ ,  $a + d = 0$  e as funções analíticas  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  são dadas pelas séries (1.4) e (1.5), respectivamente, a fórmula do número de Liapunov é dada por

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{-3\pi}{2b\Delta^{\frac{3}{2}}} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \\ & + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\ & - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] \\ & - (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

As condições  $\Delta = ad - bc > 0$  e  $a + d = 0$  sobre o sistema (1.7) são colocadas para garantir que a matriz Jacobiana desse sistema aplicada na origem,

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

possua um par de autovalores imaginários [35] e que, com isso, a origem possa ser um foco, um centro desse sistema ou um centro-foco [35, 1].

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# Bifurcação de Hopf para um sistema planar suave

*Neste capítulo, primeiramente, falaremos sobre a definição da bifurcação de Hopf e a ilustraremos através de um exemplo. Em seguida, enunciaremos o Teorema da Bifurcação de Hopf para um sistema planar não-linear suave (particular) o qual garante a existência de uma bifurcação de Hopf para tal sistema e, em seguida, aplicaremos esse teorema na equação (suave) que modela os movimentos das pregas vocais no processo da fonação.*

---

### 2.1 Introdução

---

Em nosso estudo faremos uso de um sistema dinâmico planar não-linear, que depende de um parâmetro real  $\mu$  da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu), \tag{2.1}$$

com  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Na teoria de sistemas não-lineares, uma bifurcação seria a mudança qualitativa do comportamento dinâmico para um valor crítico do parâmetro [1, 36, 29]. E existem vários tipos de bifurcação que ocorrem no ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_0$  de um sistema como (2.1).

Trabalharemos com uma bifurcação que aparece quando a matriz  $Df(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ , do sistema (2.1), tem somente um par de autovalores imaginários puros, e os autovalores de  $Df(\mathbf{x}_\mu, \mu)$  atravessam transversalmente o eixo imaginário quando  $\mu = \mu_0$ , fazendo com que a estabilidade do ponto de equilíbrio mude à medida em que  $\mu$  passa pelo valor de bifurcação  $\mu_0$ . Essa bifurcação é chamada de bifurcação de Hopf. Geometricamente, a bifurcação de Hopf ocorre se existe uma mudança de estabilidade do ponto de equilíbrio, de foco estável para foco instável (ou o contrário), gerando um ciclo limite.

Logo, esse comportamento dos autovalores de  $Df(\mathbf{x}_\mu, \mu)$ , para o caso do sistema planar ser suave, é essencial que ocorra para garantir a existência da bifurcação de Hopf. Contudo, no caso não-suave, tratado em outro capítulo, veremos que a mudança de estabilidade do ponto de equilíbrio pode ocorrer por outros motivos, mas ainda produzindo a bifurcação.

---

## 2.2 A bifurcação de Hopf

---

A partir deste momento, vamos considerar o seguinte sistema planar suave, dependente de um parâmetro  $\mu$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + p(x, y) \\ \dot{y} = x + \mu y + q(x, y) \end{cases}, \quad (2.2)$$

com  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  funções analíticas dadas pelas séries (1.4) e (1.5), respectivamente.

Observe que a matriz do sistema linear correspondente (matriz Jacobiana),

$$\begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

está na forma normal. Nesse caso, temos a garantia que tal matriz possui um par de autovalores complexos conjugados e, em particular, para  $\mu = 0$  ela tem um par de autovalores imaginários.

Com o intuito de ilustrar a bifurcação de Hopf, apresentaremos um exemplo exposto em ([35], p.315). Toda a análise usada neste exemplo foi baseada na própria teoria desse livro e de [1].

**Exemplo 2.1.** Considere o sistema planar suave

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (2.3)$$

O sistema linear correspondente é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y \\ \dot{y} &= x + \mu y \end{cases}, \quad (2.4)$$

e é baseado nele que analisaremos as soluções do sistema (2.4).

Para (2.3), temos que a origem é o único ponto crítico.

Observando que a matriz Jacobiana de (2.3) aplicada na origem,

$$Df(\mathbf{0}, \mu) = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix},$$

está na forma normal, vemos que a origem é um foco estável desse sistema não linear quando  $\mu < 0$  e um foco instável quando  $\mu > 0$ . Para  $\mu = 0$ , a matriz  $Df(\mathbf{0}, 0)$  tem um par de autovalores imaginários puros, ou seja, a origem é um centro para o sistema linear



(2.4), então, por ([35], Seção 2.10, Teorema 5) e Teorema de Dulac [35], a origem ou é um centro ou um foco de (2.3).

Vamos analisar melhor tal teoria baseando-nos no retrato de fase do sistema (2.3). Para isso, usaremos coordenadas polares:  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ , lembrando que tanto  $r$  quanto  $\theta$  dependem do tempo  $t$ . Os cálculos serão omitidos, mas o processo para obter a equação paramétrica de  $\dot{r}$  consiste em multiplicar a primeira equação em (2.3) por  $x$ , a segunda por  $y$  e adicionar as equações resultantes. E, para obter a equação paramétrica de  $\dot{\theta}$ , multiplicamos a equação de  $\dot{x}$  por  $y$  e a de  $\dot{y}$  por  $x$  e subtraímos os resultados. Com isso, escrevemos o sistema (2.3) da forma

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}.$$

Da equação de  $\dot{r}$ , para  $\mu = 0$  a origem é um foco estável, assim como para  $\mu < 0$ . Mas se  $\mu > 0$ , existe um ciclo limite estável, pois quando  $t \rightarrow \infty$ , no interior do círculo de raio  $\sqrt{\mu}$ , as trajetórias estão dirigidas para fora desse círculo, enquanto, no seu exterior, as trajetórias estão dirigidas para dentro (ver figura 2.1). O ciclo limite ocorre exatamente quando  $r = \sqrt{\mu}$ .

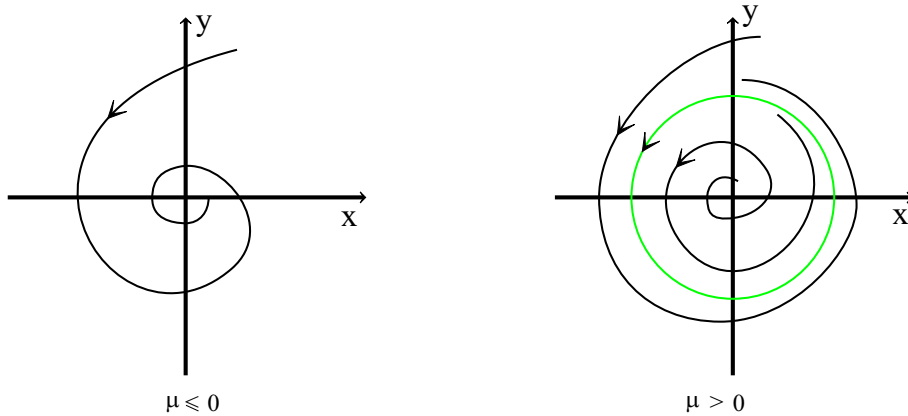


Figura 2.1: Retrato de fase para o sistema (2.3).

Como tal ciclo limite depende do valor de  $\mu$  escrevemos

$$\Gamma_\mu : \gamma_\mu(t) = \mu(\cos t, \sin t)^T.$$

Observe que as curvas  $\Gamma_\mu$  representam, na verdade, uma família de ciclos limites do sistema (2.3) (para cada  $\mu$  temos um ciclo limite) e essa família, por sua vez, define uma superfície em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , ver Figura 2.2.

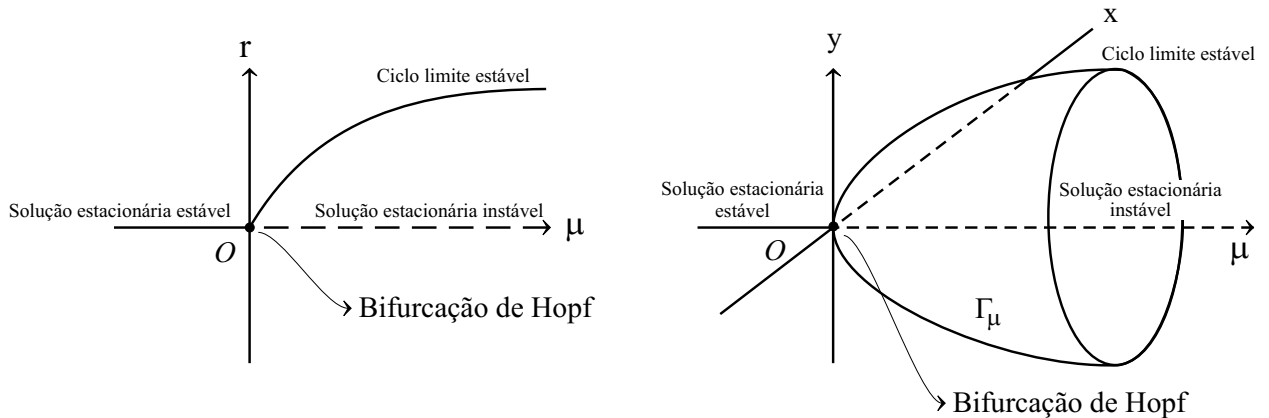


Figura 2.2: Diagrama de bifurcação (esquerda); Família de ciclos limites  $\Gamma_\mu$  resultando na bifurcação de Hopf de (2.3) (direita).

A bifurcação do ciclo limite da origem que ocorre à medida que essa muda sua estabilidade no valor de bifurcação  $\mu = 0$ , é a chamada bifurcação de Hopf.

Mais informações sobre a bifurcação de Hopf em sistemas dinâmicos suaves e sua definição podem ser encontradas em ([36], Seção 2.6).

---

## 2.3 Teorema da Bifurcação de Hopf

---

Além da resolução explícita do sistema, que muitas vezes é trabalhosa, a bifurcação de Hopf pode ser investigada através do estudo de pontos fixos da aplicação de Poincaré.

Mas não faremos um estudo tão detalhado no caso de sistema suave. Apresentaremos, então, um teorema que garante a existência da bifurcação de Hopf na origem do sistema (2.2).

Esse teorema é baseado no valor do número de Liapunov  $\sigma$  para o foco na origem

desse sistema, para  $\mu = 0$ . Já a estabilidade do ciclo limite de (2.2), é determinada pela derivada da aplicação de Poincaré, ver **Capítulo 1** ([35], Seção 3.4).

Apresentaremos aqui somente a fórmula do número de Liapunov para o foco na origem de (2.2) ([35], Seção 4.3), comparar com (1.6) no **Capítulo 1**:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{3\pi}{2} [3(a_{30} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) \\ & + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})]. \end{aligned}$$

Agora podemos enunciar o teorema que garante a existência de uma bifurcação de Hopf na origem de (2.2) e mais, o surgimento de um ciclo limite como solução, na versão proposta por [35].

**Teorema 2.1.** (Bifurcação de Hopf) Se o número de Liapunov  $\sigma$  é diferente de zero, então uma bifurcação de Hopf ocorre no ponto de equilíbrio do sistema planar suave (2.2) para o valor de bifurcação  $\mu = 0$ . Além disso,

- se  $\sigma < 0$ , então o sistema (2.2) tem um único ciclo limite estável para  $\mu > 0$  e não possui ciclo limite para  $\mu \leq 0$ ;
- se  $\sigma > 0$ , o sistema (2.2) tem um único ciclo limite instável para  $\mu < 0$  e não possui ciclo limite para  $\mu \geq 0$ .

**Demonstração:** A demonstração desse teorema pode ser encontrado em ([2] ou [18] p.25-27).

□

A seção seguinte, ilustra a aplicação do teorema da bifurcação Hopf na equação que modela a oscilação das pregas vocais na produção da voz (fonação) apresentada por [28].

## 2.4 Modelo suave da oscilação das pregas vocais

Esse modelo foi minuciosamente estudado em [18], nosso objetivo é fazer uma rápida análise qualitativa do modelo, como forma de ilustrar a aplicação do Teorema (2.1).

O modelo supõe completa simetria entre as pregas vocais. A vibração é caracterizada por um movimento ondulatório dos tecidos que se propaga ao longo da glote na direção do fluxo de ar.

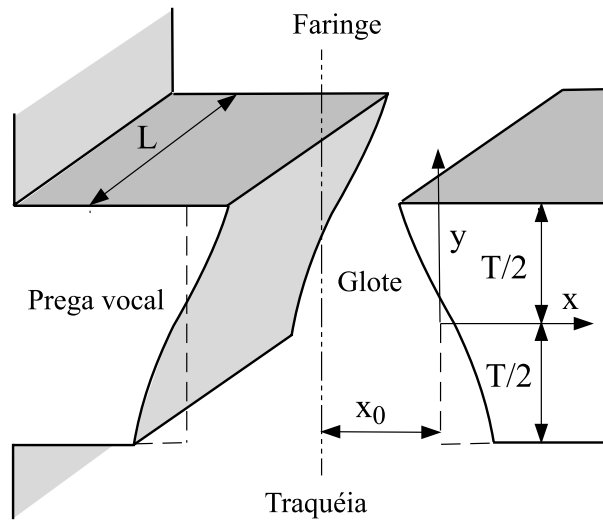


Figura 2.3: Modelo das pregas vocais.

A aerodinâmica da glote é modelada desconsiderando todos os efeitos do trato vocal, e mais, assumindo que a pressão subglotal<sup>1</sup> é constante e igual à pressão pulmonar  $P_L$ , pois são desconsideradas as perdas de pressão nos brônquios e traquéia, e a pressão supraglotal<sup>2</sup> é constante e igual à pressão atmosférica  $P_0 = 0$ . Essas são considerações padrões para se investigar os principais mecanismos da oscilação das pregas vocais, e correspondem aproximadamente a condições de laboratório [28, 30, 4].

Considerando que a distância entre as pregas vocais ao longo da altura  $T$  da glote é constante, quando estão em sua posição de repouso, a área  $a$  da secção transversal da

<sup>1</sup> Pressão na entrada da laringe. <sup>2</sup> Pressão na saída da laringe.

glote a uma altura  $y$  é

$$a = 2L(x_0 + \xi),$$

onde  $x_0$  é a distância das pregas vocais ao ponto médio da glote quando elas estão em sua posição de repouso,  $L$  é o comprimento da glote e  $\xi$  é o deslocamento horizontal dos tecidos das pregas vocais [28].

Observe que, quando as pregas vocais opostas colidem uma com a outra, fechando a glote, a posição delas é  $-x_0$ .

A área  $a_1$  na margem inferior das pregas vocais,  $y = -T/2$ , e  $a_2$  na margem superior,  $y = T/2$ , são dadas aproximadamente por

$$a_1 = 2L(x_0 + x + \tau\dot{x}) \quad (2.5)$$

e

$$a_2 = 2L(x_0 + x - \tau\dot{x}), \quad (2.6)$$

onde  $x$  é o deslocamento dos tecidos do ponto médio da glote,  $\tau$  é o tempo gasto para a onda superficial se deslocar metade da altura da glote  $T/2$ .

Então, concentrando as propriedades mecânicas dos tecidos das pregas vocais no ponto médio da glote, temos a equação

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = P_g, \quad (2.7)$$

onde  $M$  é a massa da glote,  $B$  é o coeficiente de amortecimento e  $K$ , o coeficiente da mola, por unidade de área da superfície média das pregas vocais.  $P_g$  é a pressão de ar na glote e  $\eta$  é um coeficiente ad-hoc que representa características não lineares dos tecidos.

A pressão na glote  $P_g$  é dada por

$$P_g = P_L \left( 1 - \frac{a_2}{a_1} \right), \quad (2.8)$$

com  $a_1 > 0$  e onde  $P_L$  é a pressão de ar pulmonar.

Substituindo  $a_1$  e  $a_2$  em (2.8), obtemos

$$P_g = \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}}, \quad (2.9)$$

com  $x_0 + x + \tau\dot{x} > 0$ .

Assim,

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}}, \quad (2.10)$$

Queremos descobrir se essa equação (2.10) possui uma bifurcação de Hopf e sob qual condição há o surgimento de um ciclo limite.

Vamos então obter um sistema bidimensional de equações diferenciais similar a (1.7) para a equação (2.10). Nesse processo, precisaremos normalizar o modelo (2.10).

Utilizaremos a seguinte variável adimensional

$$\nu = U.t,$$

onde  $U$  denotaremos no decorrer do processo.

Lembrando que  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ , temos agora

$$x' = \frac{dx}{d\nu} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\nu} = \frac{dx}{dt} \frac{1}{U} = \dot{x} \frac{1}{U} \quad (2.11)$$

e

$$x'' = \frac{d}{d\nu} \left( \frac{dx}{d\nu} \right) = \frac{d}{d\nu} \left( \frac{dx}{dt} \frac{1}{U} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dt}{d\nu} \frac{1}{U} = \frac{1}{U^2} \ddot{x}. \quad (2.12)$$

Primeiramente, dividimos a equação (2.10) por  $M$

$$\ddot{x} + \frac{B}{M}(1 + \eta x^2)\dot{x} + \frac{K}{M}x = \frac{2P_L\tau\dot{x}}{M(x_0 + x + \tau\dot{x})},$$

e, em seguida, substituímos as equações (2.11) e (2.12), obtendo

$$U^2 x'' + \frac{BU}{M}(1 + \eta x^2)x' + \frac{K}{M}x = \frac{2P_L \tau U x'}{M(x_0 + x + \tau U x')}. \quad (2.13)$$

Para que o coeficiente de  $x''$  seja um, consideramos  $U = \sqrt{\frac{K}{M}}$  e dividimos (2.13) por  $U^2$ . Com isso, obtemos,

$$x'' + \frac{B}{\sqrt{KM}}(1 + \eta x^2)x' + x = \frac{2P_L \tau x'}{\sqrt{KM}(x_0 + x + \tau \sqrt{\frac{K}{M}}x')}. \quad (2.14)$$

Com o intuito de simplificar a equação em (2.14), consideramos os seguintes parâmetros

$$\alpha = \frac{B}{\sqrt{KM}}, \quad \gamma = \frac{2P_L \tau}{\sqrt{KM}} \quad \text{e} \quad \rho = \tau \sqrt{\frac{K}{M}},$$

da mesma maneira que é feito em [28]. Logo, (2.14) fica da forma

$$x'' + \alpha(1 + \eta x^2)x' + x = \frac{\gamma x'}{(x_0 + x + \rho x')}.$$

Agora, introduzimos a segunda variável adimensional  $u = \frac{x}{x_0}$  do nosso processo.

Daí,

$$x_0 u'' + \alpha(1 + \eta x_0^2 u^2)x_0 u' + x_0 u = \frac{\gamma x_0 u'}{(x_0 + x_0 u + \rho x_0 u')},$$

ou seja, obtemos a seguinte equação normalizada para (2.10)

$$u'' + \alpha(1 + \beta u^2)u' + u = \frac{\gamma u'}{(1 + u + \rho u')},$$

sendo  $\beta = \eta x_0^2$  e com  $1 + u + \rho u' > 0$ .

Por fim, consideramos  $u' = v$  e, correspondendo à equação (2.10), obtemos o seguinte sistema planar

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\alpha(1 + \beta u^2)v - u + \frac{\gamma v}{(1 + u + \rho v)} \end{cases}, \quad (2.15)$$

com  $1 + u + \rho v > 0$ .

Abaixo temos o retrato de fase de (2.15) para  $\alpha = 0,32$ ,  $\beta = 100$ ,  $\gamma = 0,78$  e  $\rho = 0,97$ , valores característicos de um adulto, com seis trajetórias. A linha tracejada corresponde à condição  $1 + u + \rho v = 0$ , e marca a validade de (2.15). Para mais detalhes ver [28].

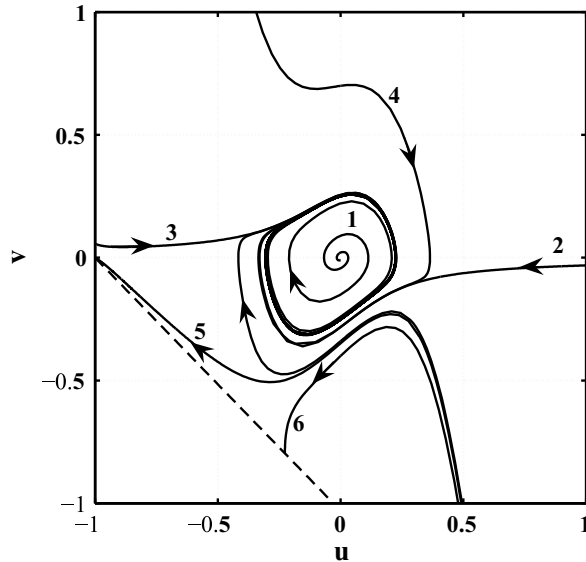


Figura 2.4: Retrato de fase de (2.15) para  $\alpha = 0,32$ ,  $\beta = 100$ ,  $\gamma = 0,78$  e  $\rho = 0,97$ .

Agora, nosso objetivo é aplicar o teorema da bifurcação de Hopf ao sistema suave de equações diferenciais (2.15).

Temos que a pressão pulmonar  $P_L$  é o principal parâmetro de controle do início e fim do processo da fonação e também da intensidade da voz [28]. E, diretamente ligado à ela está o parâmetro  $\gamma$ ,

$$\gamma = \frac{2P_L\tau}{\sqrt{KM}}.$$



Por isso,  $\gamma$  será considerado como o parâmetro de controle da estrutura dinâmica do modelo que estamos trabalhando. Mas, a fim de usarmos a mesma variável  $\mu$  do teorema da bifurcação de Hopf, faremos a seguinte adaptação:  $\mu = -\alpha + \gamma$ . Então, o sistema (2.15) ficará em função de  $\mu$ .

Observemos que (2.15) possui uma posição de equilíbrio em  $(u, v) = (0, 0)$ . Então, a matriz Jacobiana  $J(u, v, \mu)$  desse sistema em  $(0, 0)$  é dada por

$$J(\mathbf{0}, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix},$$

já que

$$J(u, v, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\alpha\beta uv - 1 - \frac{(\mu + \alpha)v}{(1 + u + \rho v)^2} & -\alpha(1 + \beta u^2) + \frac{(\mu + \alpha)(1 + u)}{(1 + u + \rho v)^2} \end{bmatrix}.$$

Enfim, para  $\mu = 0$  ( $\gamma = \alpha$ ), usando o auxílio do software Maple na equação de  $v'$  em (2.15) para fazermos uma extensão em série de Taylor, obtemos o sistema

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u - \alpha v u - \alpha(\beta - 1)u^2 v + 2\alpha\rho u v^2 + \alpha\rho^2 v^3 + \dots \end{cases} \quad (2.16)$$

Comparando (2.16) com o sistema (1.7), temos que  $a = d = 0$ ,  $b = 1$  e  $c = -1$  e, com isso,  $a + d = 0$  e  $\Delta = 1$ , ou seja, o determinante da matriz Jacobiana é positivo; além disso, as funções  $p(u, v)$  e  $q(u, v)$  de (2.16) podem ser escritas através das séries (1.4) e (1.5), respectivamente. Então, através da fórmula (1.8) vemos que a expressão do número de Liapunov fica

$$\sigma = \frac{-3\pi}{2}[-b_{11}b_{20} - b_{11}b_{02} + (-3b_{03} - b_{21})].$$

E, utilizando as informações da função  $q(u, v)$ , obtemos enfim

$$\sigma = \frac{3\pi}{2}\alpha(1 - \beta + \alpha\rho + 3\rho^3). \quad (2.17)$$

Agora, considerando os seguintes valores para os parâmetros adimensionais:  $\alpha = 0.32$ ,  $\beta = 100$  e  $\rho = 0.97$ , que são valores característicos de um adulto, basta substituí-los em (2.17) e descobrir o valor do número de Liapunov. Logo,  $\sigma \cong -144,6$ .

Então, pelo Teorema da Bifurcação de Hopf, como  $\sigma$  é não-nulo, ocorre uma bifurcação de Hopf na origem do sistema planar (2.16) para o valor de bifurcação  $\mu = 0$  (equivalentemente  $\gamma = \alpha$ ). Além disso, como  $\sigma < 0$ , o sistema (2.16) possui um único ciclo limite estável se  $\mu > 0$  ( $\gamma > \alpha$ ) e não possui ciclo limite se  $\mu < 0$  ( $\gamma < \alpha$ ).

Logo, concluímos que a equação do modelo da fonação apresenta uma bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio para o valor de parâmetro  $\mu = 0$  ( $\gamma = \alpha$ ) e um único ciclo limite para  $\mu > 0$  ( $\gamma > \alpha$ ), que é estável.

**Observação 2.1.** A equação característica da matriz Jacobiana aplicada na posição de equilíbrio  $J(\mathbf{0}, \mu)$  possui um par de autovalores imaginários puros se  $\mu = 0$  ou, equivalentemente,  $\gamma = \alpha$ . De fato, sua equação característica é dada por

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0,$$

E suas raízes (dependentes do parâmetro  $\mu$ ) são:  $\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ .

Observe que o par de autovalores complexos de tal matriz (que acontece se  $-2 < \mu < 2$ ) atravessa transversalmente o eixo imaginário à medida que  $\mu$  passa por zero, ou seja, à medida que  $\gamma$  passa por  $\gamma = \alpha$  quando seu valor aumenta.

Já  $J(u, v, \mu)$ , para  $(u, v) \neq (0, 0)$  e  $1 + u + \rho v > 0$ , possui um par de autovalores complexos, com parte real não nula para  $\mu \neq 0$ .

Todos esses resultados eram esperados, visto que uma bifurcação de Hopf ocorre

na origem do sistema (2.16).

Portanto, se temos um sistema planar suave, a existência de uma bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio desse sistema fica condicionada ao valor do número de Liapunov para o valor de bifurcação. Pois, se  $\sigma \neq 0$ , temos que à medida que o parâmetro de controle do sistema atravessa o valor de bifurcação, a estabilidade do ponto de equilíbrio muda (já que o par de autovalores complexos da matriz Jacobiana, aplicada nesse ponto, corta transversalmente o eixo imaginário) e um ciclo limite é gerado, conseqüentemente, uma bifurcação de Hopf ocorre.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# Bifurcação de Hopf generalizada para um sistema planar suave por partes

*Neste capítulo, trabalharemos a bifurcação de Hopf generalizada considerando uma situação especial em que o ponto de equilíbrio se localiza em um canto do domínio para todo valor do parâmetro de controle. Mais do que isso, apresentaremos o teorema que garante a existência de uma família de órbitas periódicas bifurcando para o ponto de equilíbrio, o canto. Este capítulo será baseado nos trabalhos [1, 28, 30, 37, 40].*

*Faremos nossas conclusões, primeiramente, em um canto "simples" e, então, estenderemos as mesmas para um canto geral.*

*Por último, aplicaremos o teorema "estendido" na equação suave por partes que modela os movimentos das pregas vocais no processo da fonação.*

Como vimos no capítulo anterior, no caso suave, a bifurcação de Hopf é determinada por um par de autovalores complexos que atravessa o eixo imaginário. Mas no caso

suave por partes, os autovalores de cada subsistema suave não precisam, necessariamente, atravessar o eixo imaginário para garantir a existência da bifurcação de Hopf. Essa garantia vem da descontinuidade do sistema que causará a troca de estabilidade do canto do domínio.

Fazemos a observação de que o sistema a ser trabalhado neste capítulo (definido na próxima seção) é específico e representa, na verdade, uma classe de sistemas suaves por partes que incluem fenômenos especiais de bifurcação e que apresentam resultados interessantes de serem estudados. Não podemos utilizá-lo como um sistema geral a ser analisado.

---

### 3.1 Sistema planar suave por partes e canto simples

---

Seja  $\Omega$  um disco aberto com raio  $r$  positivo e centrado na origem.

Definindo  $J = \{I, II, III, IV\}$  como sendo um conjunto de índices, seja  $\Omega^j$ , com  $j \in J$ , a interseção do domínio  $\Omega$  com os quatro quadrantes do plano cartesiano, respectivamente; note que  $\Omega^j$ , para cada  $j \in J$ , não contém pontos dos semi-eixos. E denotamos por  $L^j$ ,  $j \in J$ , a interseção do domínio  $\Omega$  com os quatro semi-eixos, ver Figura 3.1.

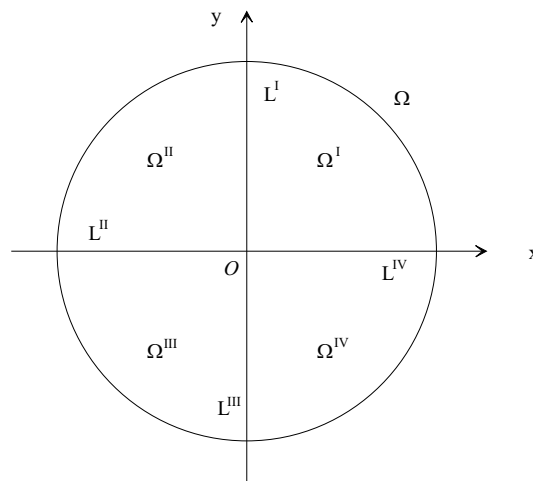


Figura 3.1: Domínio  $\Omega$ .

E mais, seja  $M$  um intervalo aberto contendo zero.

Vamos então, considerar um sistema dinâmico planar suave por partes, que depende de um parâmetro  $\mu$ , da forma

$$(\dot{x}, \dot{y})^T = F(x, y, \mu), \quad (3.1)$$

com  $(x, y) \in \Omega$  e  $\mu \in M$ , onde a função  $F = (F_1, F_2)^T : \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida como

$$F(x, y, \mu) = F^j(x, y, \mu), \quad (3.2)$$

$(x, y) \in \Omega^j$ ,  $j \in J$ . As funções  $F^j = (F_1^j, F_2^j)$ ,  $j \in J$ , descrevem o campo de vetores de (3.1).

No decorrer do trabalho, apresentaremos quatro hipóteses que serão a base do nosso resultado principal, apresentado na Seção 3.4 e sua versão para o caso geral apresentada na Seção 3.5. Nesta seção apresentaremos três delas, ficando a quarta hipótese para a próxima seção.

A primeira hipótese considerada neste capítulo é sobre as funções  $F^j$ , e ela implica que a descontinuidade do sistema (3.1) ocorre em  $L^j$ , para todo  $j \in J$ , ver a definição em (3.2).

**H<sub>1</sub>** As funções  $F^j(x, y, \mu)$ ,  $j \in J$  são  $C^K$ -suaves,  $K \geq 2$ , para  $(x, y, \mu) \in \Omega \times M$ .

Seguindo os autores Zou e Küpper [37], o canto em um domínio é o ponto de interseção das linhas de descontinuidade de um sistema definido nesse domínio. Quando essas linhas de descontinuidade coincidem com os quatro semi-eixos do plano cartesiano, os mesmos autores denominam esse canto de canto simples. Então, pela hipótese **H<sub>1</sub>**, temos que a origem de  $\Omega$  é um canto simples, ver Figura 3.1.

Já a segunda hipótese, assegura que a origem é ponto de equilíbrio, ou solução estacionária, de (3.1), pois como sabemos, as funções  $F^j$ ,  $j \in J$ , descrevem o campo de vetores desse sistema.

**H<sub>2</sub>**  $F^j(0, 0, \mu) \equiv 0$ ,  $j \in J$  para todo valor de  $\mu \in M$ .

A partir de **H<sub>1</sub>** e **H<sub>2</sub>** podemos expandir a função  $F^j(x, y, \mu)$ , para algum  $j \in J$ , usando a fórmula de Taylor [27] em  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$F^j(x_0 + x, y_0 + y, \mu) = F^j(x_0, y_0, \mu) + A^j(\mu)(x, y)^T + (g_1^j(x, y, \mu), g_2^j(x, y, \mu))^T,$$

ou seja,

$$F^j(x, y, \mu) = A^j(\mu)(x, y)^T + (g_1^j(x, y, \mu), g_2^j(x, y, \mu))^T, \quad (3.3)$$

onde  $A^j(\mu)$  é uma matriz  $2 \times 2$  e  $(g_1^j, g_2^j)^T$ , o termo não linear de ordem superior, é  $C^k$ -suave e satisfaz  $|g_{1,2}^j| = O(x^2 + y^2)$  à medida em que  $(x, y)$  tende uniformemente a  $(0, 0)$ , para  $\mu \in M$ .

Para garantir que a matriz  $A^j(\mu)$  tenha um par de autovalores complexos,  $\alpha^j(\mu) \pm i\beta^j(\mu)$  ( $i^2 = -1$ ), vamos assumir:

**H<sub>3</sub>** Para cada  $j \in J$ , a matriz  $A^j(\mu)$  está na forma normal:

$$A^j(\mu) = \begin{bmatrix} \alpha^j(\mu) & \beta^j(\mu) \\ -\beta^j(\mu) & \alpha^j(\mu) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

com  $\beta^j(0) > 0$ .

A condição  $\beta^j(0) > 0$  é assumida para que as soluções de (3.1) cruzem as linhas de descontinuidade no sentido horário à medida em que o tempo aumenta, ver Figura 3.2.

Lembremos que, se a matriz  $A^j(\mu)$  tem um par de autovalores complexos, a solução estacionária do sistema (3.1) é um foco se  $\alpha \neq 0$  e, caso contrário, a solução estacionária é um centro se o sistema é linear e pode ser um centro, um foco ou um foco-centro se o sistema é não-linear [1, 35].

**Observação 3.1.** A partir da hipótese **H<sub>1</sub>**, sendo  $K^j$  uma função  $C^K$ -suave para todo  $j \in J$ , temos que cada coordenada da matriz  $A^j(\mu)$  em (3.4) será  $C^K$ -suave também. Daí,

como em  $\mathbf{H}_3$  assumimos que  $\beta^j(0) > 0$ , temos que  $\beta^j(\mu)$  será positivo em uma vizinhança de  $\mu$ , ou seja, existe uma constante  $\beta^* > 0$  tal que  $\beta^j(\mu) \geq \beta^*$  para  $\mu \in M$ , se necessário, reduz-se o intervalo  $M$ .

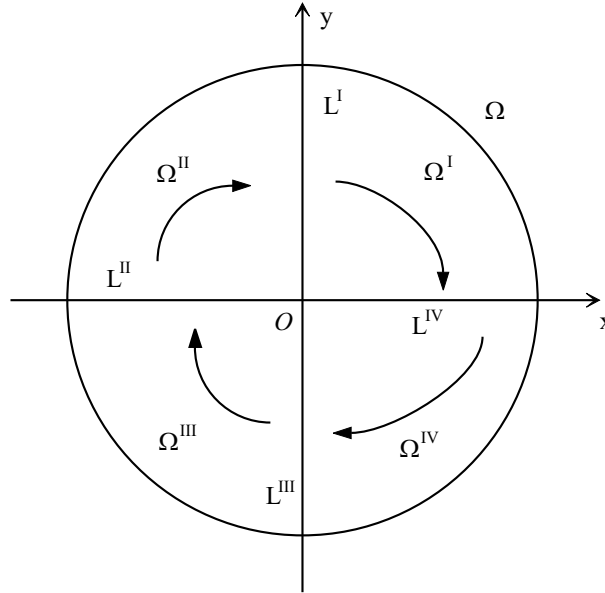


Figura 3.2: Direção do fluxo de (3.1) sob a hipótese  $\mathbf{H}_3$ .

A seguir, apresentamos uma extensão padrão do sistema (3.1) [10, 20, 24] de forma que ele também fique definido em  $L^j$ , para todo  $j \in J$

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T \in \mathcal{F}(x(t), y(t), \mu), \quad (3.5)$$

onde definimos  $\mathcal{F} : \Omega \times M \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$  por

$$\mathcal{F}(x, y, \mu) = \begin{cases} \{F^j(x, y, \mu)\} & \text{se } (x, y) \in \Omega^j, j \in J \\ \{qF^j(x, y, \mu) + (1-q)F^{j+1}(x, y, \mu) \mid 0 \leq q \leq 1\} & \text{se } (x, y) \in L^j, j \in J \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $F^{IV+I} = F^I$ .

O parâmetro  $q$  é um parâmetro que define uma combinação convexa e não tem significado físico. A extensão de um sistema descontínuo por uma inclusão diferencial (3.6) é conhecida como *método convexo de Filippov* [26].



E de acordo com [10, 20] a existência e unicidade de solução do sistema (3.5) em uma vizinhança da origem, são obtidas sob as hipóteses  $H_1$ - $H_3$ .

---

## 3.2 Aplicação Retorno para um sistema linear por partes

---

Nessa seção definiremos a aplicação de Poincaré para cada subsistema de um sistema planar linear por partes e, fazendo uma composição, obteremos uma aplicação Retorno para o sistema. Por fim, a partir dessa aplicação, obteremos condições que garantam a existência de uma família de órbitas periódicas bifurcando .

A equação (3.3) nos permite definir uma linearização para o sistema (3.1). Mas, nesta seção, podemos trabalhar em um domínio mais amplo que  $\Omega$ .

Denominamos o  $j$ -ésimo quadrante do plano cartesiano por  $\Pi^j$  e por  $\Sigma^j$  denotamos o semi-eixo que contém  $L^j$ , continuamos com  $j \in J$ .

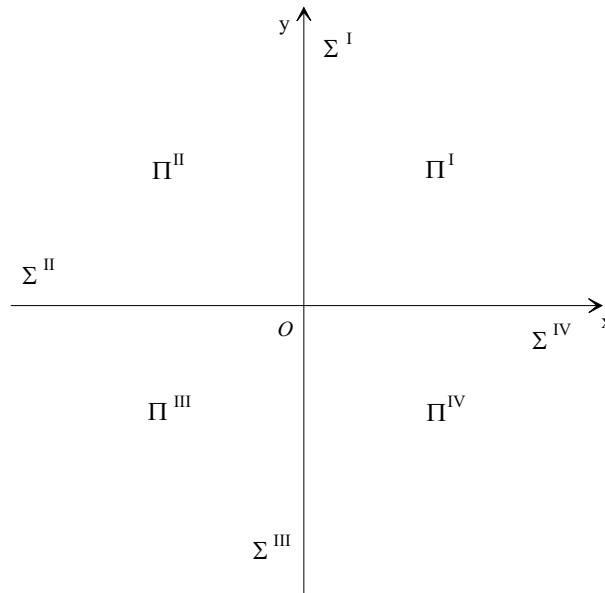


Figura 3.3: Domínio do sistema (3.7).

Agora vamos considerar o seguinte sistema linear por partes

$$(\dot{x}, \dot{y})^T = A^j(\mu)(x, y)^T, \quad (3.7)$$

com  $(x, y) \in \Pi^j$ ,  $\mu \in M$  e  $j \in J$ .

**Observação 3.2.** Lembramos que, dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y})^T = A(\mu)(x, y)^T \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}, \quad (3.8)$$

onde a matriz  $A(\mu)$  está na forma normal

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{bmatrix},$$

temos que o fluxo desse problema é dado por

$$\Phi(x_0, y_0, \mu, t) = \varphi(\mu, t)(x_0, y_0)^T, \quad (3.9)$$

onde

$$\varphi(\mu, t) = \begin{bmatrix} \cos(\beta(\mu)t) & \text{sen}(\beta(\mu)t) \\ -\text{sen}(\beta(\mu)t) & \cos(\beta(\mu)t) \end{bmatrix}.$$

Essa matriz representa a rotação da órbita em  $\mu$  radianos.

Vamos agora definir a aplicação de Poincaré em cada subsistema de (3.7). Faremos essa definição de forma que aplicação de Poincaré fique em termos da coordenada  $y$ .

Para algum ponto  $(0, y_0) \in \Sigma^I$ , o fluxo  $\Phi^I(0, y_0, \mu, t)$  fará o seguinte trajeto, à medida em que o tempo aumenta: saíra de  $\overline{\Pi^I}$  atravessando o semi-eixo  $\Sigma^I$  e entrará em  $\overline{\Pi^I}$ .

Daí, definimos a aplicação de Poincaré do subsistema definido no primeiro quadrante  $P^I : \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que  $(P^I(y, \mu), 0)^T \in \Sigma^{IV}$ , como sendo o primeiro ponto de saída do conjunto  $\overline{\Pi^I}$  para o valor inicial  $(0, y_0)^T \in \Sigma^I$  sob o fluxo  $\Phi^I(x, y, \mu, t)$ , ou seja, é a coordenada- $x$  do ponto de interseção do fluxo  $\Phi^I(0, y_0, \mu, t)$  com  $\Sigma^{IV}$ .

Denotaremos a aplicação Período (tempo mínimo de passagem) de  $\Phi^I(x, y, \mu, t)$  pelo conjunto  $\overline{\Pi^I}$ , por  $T^I : \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Analisando de maneira análoga o trajeto do fluxo de (3.7) através dos outros três quadrantes, podemos definir as aplicações de Poincaré em termos dos outros subsistemas

$$P^{II} : \mathbb{R}^- \times M \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad P^{III} : \mathbb{R}^- \times M \rightarrow \mathbb{R}^- \quad \text{e} \quad P^{IV} : \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^-,$$

ver Figura 3.4, bem como as aplicações Período correspondentes

$$T^{II} : \mathbb{R}^- \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad T^{III} : \mathbb{R}^- \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad T^{IV} : \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow \mathbb{R}.$$

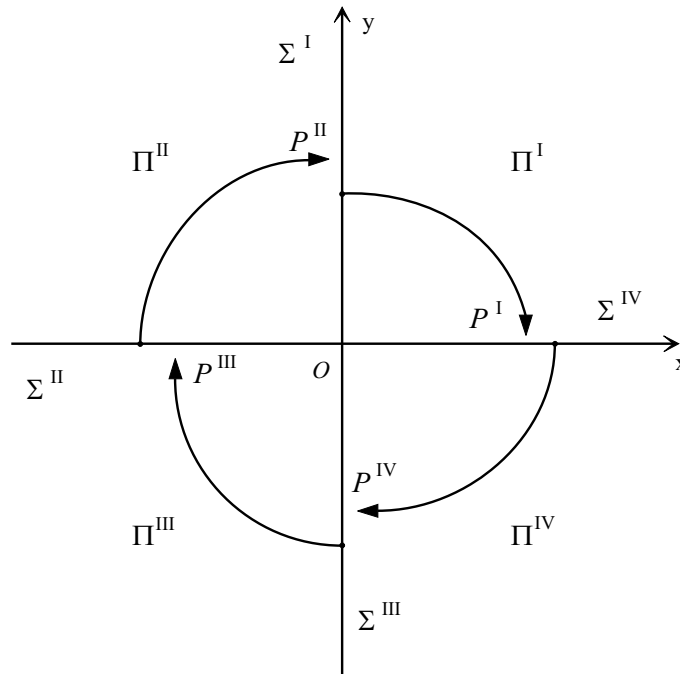


Figura 3.4: Aplicação de Poincaré para cada subsistema linear de (3.7).

Logo, se as hipóteses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  e  $\mathbf{H}_3$  são satisfeitas e  $\mu \in M$ , podemos expor as expressões da aplicação de Poincaré e da aplicação Período em termos de cada subsistema de (3.7).

Primeiramente, vamos apresentar a expressão da aplicação Período, de cada subsistema, pois ela será usada para encontrar a expressão da aplicação de Poincaré.

**Definição 3.3.** A aplicação Período  $T^j$  é dada por

$$T^j(y, \mu) \equiv \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^j(\mu)} \quad (3.10)$$

com  $j \in J$ .

Observe que a aplicação Período não depende de  $y$ . Para mais detalhes sobre essa definição ver [40].

A partir da Definição 3.3 da aplicação Período e da expressão do fluxo dada na Observação 3.2, basta substituir (3.10) em (3.9), para obtermos uma expressão para a aplicação de Poincaré  $P^j$  para cada subsistema de (3.7).

**Definição 3.4.** A aplicação de Poincaré  $P^j$  para  $y \neq 0$  é dada por

$$P^j(y, \mu) = e_1^T \Phi(0, \kappa^j y, \mu, T^j(y, \mu)) = \kappa^j y \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^j(\mu)}{\beta^j(\mu)}\right), \quad (3.11)$$

onde  $e_1^T = (1, 0)$ ,  $j \in J$ ,  $\kappa^j = 1$  se  $j = I, III$  e  $\kappa^j = -1$  se  $j = II, IV$ .

Vamos estender a definição das funções  $P^j$  e  $T^j$ ,  $j \in J$ , para  $y \equiv 0$ , de modo que elas sejam (suficientemente) suaves no domínio  $(\{0\} \cup \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-) \times M$ , da seguinte forma

$$P^j(0, \mu) \equiv 0 \quad \text{e} \quad T^j(0, \mu) \equiv \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^j(\mu)}.$$

Basta verificarmos que os limites (laterais) dessas funções e de suas derivadas quando  $y$  tende a zero são iguais as suas respectivas extensões feitas para  $y = 0$ .

Tal extensão é necessária pois o valor de  $\kappa^j$  não foi definido para  $y = 0$ , conseqüentemente, as funções  $P^j$ ,  $j \in J$ , também não.

Agora podemos construir a aplicação Retorno  $P(y, \mu)$  do sistema linear por partes (3.7) definida no eixo- $y$ , compondo as quatro aplicações de Poincaré referentes aos quatro

subsistemas  $C^K$ -suaves. Então temos,

$$P(y, \mu) := \begin{cases} P^{II}(P^{III}(P^{IV}(P^I(y, \mu), \mu), \mu), \mu), & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ P^{IV}(P^I(P^{II}(P^{III}(y, \mu), \mu), \mu), \mu), & y < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

E

$$T(\mu) := \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^I(\mu)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{II}(\mu)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{III}(\mu)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{IV}(\mu)}, \quad (3.13)$$

que, na verdade, é a soma dos períodos definidos para cada subsistema.

Usando recursivamente a Definição 3.4, encontramos uma expressão para a aplicação Retorno (3.12).

De fato, consideremos primeiramente o caso  $y > 0$ . Para  $j = I$  temos,

$$P^I(y, \mu) = y \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^I(\mu)}{\beta^I(\mu)}\right)$$

Defina  $a := P^I(y, \mu)$ . Com isso,

$$P^{IV}(P^I(y, \mu), \mu) = P^{IV}(a, \mu) = -a \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{IV}(\mu)}{\beta^{IV}(\mu)}\right).$$

Defina  $b := P^{IV}(a, \mu)$ . Daí,

$$P^{III}(P^{VI}(P^I(y, \mu), \mu), \mu) = P^{III}(b, \mu) = b \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)}\right).$$

Por fim, defina  $c := P^{III}(b, \mu)$  e, a partir disso, temos

$$P^{II}(P^{III}(P^{VI}(P^I(y, \mu), \mu), \mu), \mu) = P^{II}(c, \mu) = -c \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 P(y, \mu) &= P^{II}(P^{III}(P^{VI}(P^I(y, \mu), \mu), \mu), \mu), \mu) \\
 &= -c \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)}\right) \\
 &= -b \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)}\right) \\
 &= -\left(-a \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{IV}(\mu)}{\beta^{IV}(\mu)}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)}\right)\right) \\
 &= y \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^I(\mu)}{\beta^I(\mu)}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{IV}(\mu)}{\beta^{IV}(\mu)}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)}\right) \\
 &= y \exp\left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha^I(\mu)}{\beta^I(\mu)} + \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{IV}(\mu)}{\beta^{IV}(\mu)} + \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)} + \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)}\right) \\
 &= y \exp\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha^I(\mu)}{\beta^I(\mu)} + \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)} + \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)} + \frac{\alpha^{IV}(\mu)}{\beta^{IV}(\mu)}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Analogamente, para o caso  $y < 0$ , de acordo com a definição da aplicação Retorno (3.12) temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 P(y, \mu) &= P^{IV}(P^I(P^{II}(P^{III}(y, \mu), \mu), \mu), \mu), \mu) \\
 &= y \exp\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha^I(\mu)}{\beta^I(\mu)} + \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)} + \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)} + \frac{\alpha^{IV}(\mu)}{\beta^{IV}(\mu)}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Para simplificarmos a expressão de  $P(y, \mu)$ , vamos considerar a seguinte função

$$B(\mu) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha^I(\mu)}{\beta^I(\mu)} + \frac{\alpha^{II}(\mu)}{\beta^{II}(\mu)} + \frac{\alpha^{III}(\mu)}{\beta^{III}(\mu)} + \frac{\alpha^{IV}(\mu)}{\beta^{IV}(\mu)}\right),$$

chamada *função bifurcação* [37].

Logo, podemos expressar a aplicação Retorno como

$$P(y, \mu) = y \exp(B(\mu)).$$

Note que a *função bifurcação*, na verdade, determina a aplicação de Poincaré para o sistema linear por partes.

**Observação 3.5.** Nossa *função bifurcação* aplica-se a sistemas dinâmicos suaves também. Se a equação (3.1) é suave, a expressão da *função bifurcação* fica

$$B(\mu) = 2\pi \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}.$$

Então,

$$P(y, \mu) = y \exp\left(2\pi \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}\right).$$

Isso leva à afirmação padrão da bifurcação de Hopf [40].

E mais, note que

$$P(0, \mu) = 0 \text{ e } P'(0, \mu) = \exp\left(2\pi \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}\right),$$

como mencionado no Teorema 1.2 no primeiro capítulo.

Por fim, como última hipótese do nosso trabalho, consideraremos

$$\mathbf{H}_4 \quad B(0) = 0 \text{ e } B'(0) \neq 0.$$

**Observação 3.6.** A hipótese  $\mathbf{H}_4$ , no caso de um sistema linear por partes, assume o papel da condição clássica  $\alpha(0) = 0$ ,  $\frac{d\alpha(0)}{d\mu} \neq 0$  e  $\beta(0) > 0$  para a Bifurcação de Hopf no caso suave, ver capítulo anterior.

Agora temos condições de enunciar o principal resultado desta seção. O teorema a seguir garante a existência de uma família de órbitas periódicas circulando em torno da origem do sistema linear por partes (3.7). Resultado similar pode ser encontrado em [37].

**Teorema 3.1.** Assuma as hipóteses  $\mathbf{H}_1$ - $\mathbf{H}_4$ . Então,

1. Existe uma órbita periódica não-trivial para o sistema (3.7) se, e somente se,  $B(\mu) = 0$ .
2. Para  $\mu$  satisfazendo  $B(\mu) = 0$  existe uma família de órbitas periódicas circulando em torno da origem com período  $T(\mu)$  para o sistema (3.7).

**Demonstração:** 1. e 2. Os dois itens seguem imediatamente, segundo [37, 40], da correspondência dos pontos fixos da aplicação Retorno  $P(\cdot, \mu)$  com as órbitas periódicas contínuas do sistema linear por partes (3.7): Seja  $y \neq 0$ , então

$$P(y, \mu) = y \Leftrightarrow \exp(B(\mu)) = 1 \Leftrightarrow B(\mu) = 0.$$

Ou seja, toda vez que  $\mu$  satisfizer  $B(\mu) = 0$ , seja qual for o valor de  $y$  diferente de zero, teremos  $P(y, \mu) = y$ , ou seja, uma órbita periódica não trivial para o sistema linear por partes (3.7). Daí a existência, na verdade, de uma família de órbitas periódicas para (3.7) circulando em torno da solução estacionária, a origem. O período da órbita é o período correspondente à  $P(y, \mu)$ , ou seja,  $T(\mu)$ .

□

Assumindo as hipóteses  $\mathbf{H}_1$ - $\mathbf{H}_4$ , podemos ver que a solução estacionária  $(0, 0)$  do sistema (3.7) é (um foco) assintoticamente estável se  $B(\mu) < 0$  e (um foco) instável se  $B(\mu) > 0$ .

De fato, se  $B(\mu) < 0$  então temos que  $\exp(B(\mu)) < 1$ . Com isso, para  $y_0 \neq 0$ ,

$$\|\Phi(T, y_0)\| = \|P(y_0, \mu)\| = \|y_0 \exp(B(\mu))\| < \|y_0\|,<sup>1</sup>$$

ou seja, quando o tempo aumenta, as órbitas de (3.7), que nesse caso são espirais ( $\mathbf{H}_3$  e  $B(\mu) \neq 0$ ), se aproximam da origem desse sistema que é a solução estacionária ( $\mathbf{H}_2$ ).

---

<sup>1</sup> Utilizamos a norma Euclidiana.



Logo, se  $B(\mu) < 0$  então a solução estacionária de (3.7) é assintoticamente estável (ver definição em [5, 36]).

No entanto, se  $B(\mu) > 0$  então  $\exp(B(\mu)) > 1$  e, com isso, para  $y_0 \neq 0$ , temos

$$\|\Phi(T, y_0)\| = \|P(y_0, \mu)\| = \|y_0 \exp(B(\mu))\| > \|y_0\|,$$

ou seja, quando o tempo aumenta, as órbitas de (3.7) se afastam da origem desse sistema.

Logo, se  $B(\mu) > 0$  então a solução estacionária de (3.7) é instável.

**Observação 3.7.** Segundo [24] a estabilidade do sistema "combinado" pelos quatro subsistemas suaves é determinada pela influência do(s) subsistema(s) instável(eis); a quantidade pode ser dada em termos do tempo gasto pela órbita do sistema em cada subsistema, isto é, por uma comparação da parte imaginária dos autovalores dos subsistemas, ver a **Definição 3.3** de período.

---

### 3.3 Aplicação Retorno para um sistema não linear

---

Definiremos a aplicação Retorno para um sistema não linear, para que, na próxima seção, possamos enunciar o principal resultado do nosso trabalho.

O método usado é similar ao da seção anterior: considerando o intervalo  $M$ , o conjunto de índices  $J$  e os subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ :  $\Omega$ ,  $\Omega^j$  e  $L^j$  ( $j \in J$ ), como na Seção 3.1 (ver Figura 3.1), definiremos uma aplicação de Poincaré para cada um dos subsistemas, inclusive nas linhas de descontinuidade do sistema não linear e, então, construiremos uma aplicação Retorno através da composição das aplicações de Poincaré.

A partir de agora vamos trabalhar com um sistema planar não linear suave por partes da forma

$$(\dot{x}, \dot{y})^T = F(x, y, \mu), \tag{3.14}$$

com  $(x, y) \in \Omega$  e  $\mu \in M$  e onde a função  $F = (F_1, F_2)^T$  é definida como na **Seção 3.1**.

E também assumiremos que as hipóteses  $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_4$  estejam satisfeitas.

Andronov et al. em ([1], Seção 8), fazem um estudo detalhado do comportamento do fluxo de um sistema não linear próximo da origem e segundo [37], essas propriedades podem ser aplicadas em cada subsistema suave de (3.14), para pontos próximos da origem, e permitir que a aplicação de Poincaré seja definida em  $L^j$ , para cada  $j \in J$ .

A aplicação de Poincaré para os subsistemas de (3.14) será definida em função da coordenada- $y$ . Também definiremos a aplicação Período correspondente. Com essas aplicações expressas, enunciaremos algumas de suas características para então definir a aplicação Retorno para (3.14).

Denotaremos por  $\Psi^j(x, y, \mu, t)$ ,  $j \in J$ , a solução fluxo de cada subsistema em  $\Omega^j$ .

Vamos, primeiramente, analisar o comportamento da solução do subsistema de (3.14) em  $\Omega^I$  para então definirmos a aplicação de Poincaré para esse subsistema.

Lembrando que  $\Omega$  é um disco centrado na origem e com raio  $r > 0$ , de acordo com ([1], Seção 8, Lema 3), existe uma constante positiva  $\delta^I$ , com  $0 < \delta^I < r$ , e uma constante também positiva  $\tau^I$  tal que, se

$$0 < y < \delta^I, \mu \in M \text{ e } 0 \leq t \leq \tau^I,$$

então o fluxo  $\Psi^I(0, y, \mu, t)$  pertence à  $\Omega$ .

Correspondente à constante  $\delta^I$  fica definida uma função tempo  $\tilde{T}^I : (0, \delta^I) \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Também por ([1], Seção 8, Lema 3), o fluxo  $\Psi^I(0, y, \mu, t)$  cruzará a linha  $L^{IV}$ , e isso acontece quando  $t = \tilde{T}^I(y, \mu)$ ; além disso, enquanto  $0 < t < \tilde{T}^I(y, \mu)$  esse fluxo permanece no interior de  $\Omega^I$ .

Agora que conhecemos o comportamento do fluxo do subsistema que está definido

em  $\Omega^I$ , podemos definir, nessa região, a aplicação de Poincaré  $\tilde{P}^I(y, \mu) : (0, \delta^I) \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ .  $P^I$  será a coordenada- $x$  do ponto de interseção de  $\Psi^I(0, y, \mu, t)$  com a linha  $L^{IV}$ , ou seja,

$$\tilde{P}^I(y, \mu) = e_1^T \Psi^I(0, y, \mu, \tilde{T}^I(y, \mu)),$$

onde  $e_1 = (1, 0)^T$ .

Da mesma forma que analisamos o comportamento do fluxo do subsistema de (3.14) que está definido em  $\Omega^I$ , podemos fazer o mesmo para os outros subsistemas e também definir a aplicação de Poincaré e Período para cada um deles.

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{II} &: (-\delta^{II}, 0) \times M \rightarrow \mathbb{R}^+, \\ \tilde{P}^{III} &: (-\delta^{III}, 0) \times M \rightarrow \mathbb{R}^- \text{ e} \\ \tilde{P}^{IV} &: (0, \delta^{IV}) \times M \rightarrow \mathbb{R}^-, \end{aligned}$$

onde  $\delta^{II, III, IV} > 0$  existem ([1], Seção 8, Lema 3).

E, respectivamente,

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{II} &: (-\delta^{II}, 0) \times M \rightarrow \mathbb{R}^+, \\ \tilde{T}^{III} &: (-\delta^{III}, 0) \times M \rightarrow \mathbb{R}^- \text{ e} \\ \tilde{T}^{IV} &: (0, \delta^{IV}) \times M \rightarrow \mathbb{R}^-. \end{aligned}$$

Seja, agora,  $0 < \delta < \min\{\delta^I, \delta^{II}, \delta^{III}, \delta^{IV}\}$  e considere  $|y| < \delta$ . Então, podemos definir a aplicação de Poincaré como a seguir.

**Definição 3.8.** A aplicação de Poincaré  $\tilde{P}^j$ ,  $j \in J$ , para  $y \neq 0$  é dada por

$$\tilde{P}^j(y, \mu) = e_1^T \Psi^j(0, \kappa^j y, \mu, \tilde{T}^j(y, \mu)), \quad (3.15)$$

onde  $\kappa^j = 1$  se  $j = I, III$  e  $\kappa^j = -1$  se  $j = II, IV$ .

Assim como na seção anterior, vamos estender as funções  $\tilde{P}^j$  e  $\tilde{T}^j$ ,  $j \in J$ , para  $y \equiv 0$ . Então, faça

$$\tilde{P}^j(0, \mu) \equiv 0, \quad \tilde{T}^j(0, \mu) = T^j(\mu) \equiv \frac{\pi}{\beta^j(\mu)}. \quad (3.16)$$

Essas extensões vão garantir que as aplicações Retorno e Período do sistema (3.14), definidas mais adiante, sejam contínuas em uma vizinhança da origem.

**Observação 3.9.** Se em (3.3) o termo não linear é identicamente nulo, temos o caso da seção anterior e, então,  $\tilde{P}^j(y, \mu) = P^j(y, \mu)$ , bem como,  $\tilde{T}^j(y, \mu) = T^j(y, \mu)$ , para  $j \in J$ .

Lembrando que  $\tilde{P}^j(y, \mu)$  e  $\tilde{T}^j(y, \mu)$  estão definidas para valores positivos de  $y$  se  $j = I, IV$  e para valores negativos de  $y$  se  $j = II, III$  e que para  $y = 0$  são dadas por (3.16), apresentamos o seguinte lema para, mais tarde, caracterizarmos a aplicação Retorno.

**Lema 3.10.** *Suponha que as hipóteses  $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_3$  estejam satisfeitas. Então,*

1. *As funções  $\tilde{P}^{I,IV}(y, \mu)$  e  $\tilde{T}^{I,IV}(y, \mu)$  são contínuas para  $0 \leq y < \delta$  e  $\mu \in M$ . E as funções  $\tilde{P}^{II,III}(y, \mu)$  e  $\tilde{T}^{II,III}(y, \mu)$  são contínuas para  $-\delta < y \leq 0$  e  $\mu \in M$ .*
2. *À medida em que  $y \rightarrow 0^+$ , os limites laterais à direita das derivadas  $\tilde{P}_i^{I,IV}$  e  $\tilde{T}_i^{I,IV}$  para  $i = y, \mu, y\mu, \mu y$  existem, e mais,  $\tilde{P}_{y\mu}^{I,IV} = \tilde{P}_{\mu y}^{I,IV}$  para  $0 \leq y < \delta$ .*
3. *À medida em que  $y \rightarrow 0^-$ , os limites laterais à esquerda das derivadas  $\tilde{P}_i^{II,III}$  e  $\tilde{T}_i^{II,III}$  para  $i = y, \mu, y\mu, \mu y$  existem, e mais,  $\tilde{P}_{y\mu}^{II,III} = \tilde{P}_{\mu y}^{II,III}$  para  $-\delta < y \leq 0$ .*

**Demonstração:** Esse lema segue diretamente do fato do fluxo  $\Psi^j(x, y, \mu, t)$ ,  $j \in J$ , depender suavemente dos dados iniciais  $(x, y, \mu)$  [22, 37, 40].

□

**Observação 3.11.** Os limites laterais à direita citados no item 2. do lema acima denotaremos por:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \tilde{P}_i^{I,IV}(y, \mu) := \tilde{P}_i^{I,IV}(0^+, \mu) \text{ e } \lim_{y \rightarrow 0^+} \tilde{T}_i^{I,IV}(y, \mu) := \tilde{T}_i^{I,IV}(0^+, \mu);$$

e os limites laterais à esquerda citados no item 3. do mesmo lema denotaremos por:

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \tilde{P}_i^{II,III}(y, \mu) := \tilde{P}_i^{II,III}(0^-, \mu) \text{ e } \lim_{y \rightarrow 0^-} \tilde{T}_i^{II,III}(y, \mu) := \tilde{T}_i^{II,III}(0^-, \mu).$$

Todas as considerações sobre as aplicações de Poincaré e Período que precisávamos para esta seção, já foram feitas. A partir daqui, podemos definir então a aplicação Retorno, a qual nos auxiliará a chegar no principal resultado deste capítulo, como mencionado no início da seção.

Definimos a aplicação Retorno do sistema (3.14),  $\tilde{P} : (-\delta, \delta) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , para um valor apropriado de  $\delta$ , como

$$\tilde{P}(y, \mu) := \begin{cases} \tilde{P}^{II}(\tilde{P}^{III}(\tilde{P}^{IV}(\tilde{P}^I(y, \mu), \mu), \mu), \mu), & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ \tilde{P}^{IV}(\tilde{P}^I(\tilde{P}^{II}(\tilde{P}^{III}(y, \mu), \mu), \mu), \mu), & y < 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

E a sua correspondente aplicação Período  $\tilde{T}^j : (-\delta, \delta) \times M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tilde{T}(y, \mu) := \begin{cases} \tilde{T}^I(y, \mu) \\ + \tilde{T}^{IV}(\tilde{T}^I(y, \mu), \mu) \\ + \tilde{T}^{III}(\tilde{T}^{IV}(\tilde{T}^I(y, \mu), \mu), \mu) \\ + \tilde{T}^{II}(\tilde{T}^{III}(\tilde{T}^{IV}(\tilde{T}^I(y, \mu), \mu), \mu), \mu), & y > 0, \\ T(y, \mu), & y = 0, \\ \tilde{T}^{III}(y, \mu) \\ + \tilde{T}^{II}(\tilde{T}^{III}(y, \mu), \mu) \\ + \tilde{T}^I(\tilde{T}^{II}(\tilde{T}^{III}(y, \mu), \mu), \mu) \\ + \tilde{T}^{IV}(\tilde{T}^I(\tilde{T}^{II}(\tilde{T}^{III}(y, \mu), \mu), \mu), \mu), & y < 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Através do Lema 3.10, que caracteriza as aplicações de Poincaré e suas derivadas parciais, podemos enunciar o próximo lema.

**Lema 3.12.** *Suponha que as hipóteses  $\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_3$  estejam satisfeitas. Então,*

1. *A aplicação Período  $\tilde{T}(y, \mu)$  é contínua para  $-\delta < y < \delta$  e  $\mu \in M$ .*
2. *A aplicação Retorno  $\tilde{P}$  junto com suas derivadas  $\tilde{P}_i$ ,  $i = y, \mu, y\mu, \mu y$  é contínua e satisfaz  $\tilde{P}_{y\mu} = \tilde{P}_{\mu y}$  para  $-\delta < y < \delta$  e  $\mu \in M$ .*
3. *Para  $y = 0$  temos,*

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \mu}(0, \mu) \equiv 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(0, \mu) = \exp(B(\mu)). \quad (3.19)$$

**Demonstração:** Uma demonstração similar pode ser encontrada em ([40], Seção 4).

□

**Observação 3.13.** Se calcularmos os limites laterais  $\tilde{T}_i(0^+, \mu)$  e  $\tilde{T}_i(0^-, \mu)$  para  $i = y, \mu$ , esses limites são diferentes de  $\tilde{T}(0, \mu) = T(\mu)$ . Logo, a aplicação Período  $\tilde{T}$ , no caso de um sistema planar não linear, não é diferenciável em  $y = 0$ .

---

## 3.4 Bifurcação de Hopf generalizada para um canto simples

---

A existência de órbitas periódicas bifurcando da solução estacionária em um sistema dinâmico planar suave por partes é o fenômeno interpretado como bifurcação de Hopf generalizada [40].

Queremos estudar, nesta seção, o surgimento da bifurcação de Hopf generalizada no canto simples do sistema (3.14). Então, apresentaremos o teorema que garante a existência de uma família contínua de órbitas periódicas que bifurca da origem desse sistema.

A idéia usada é similar à do Teorema 3.1: a procura por pontos fixos não triviais da aplicação Retorno  $\tilde{P}$  pois, procurando por esses pontos fixos, chegaremos na existência das órbitas periódicas bifurcando do sistema.

Vamos introduzir então, uma nova função a partir de  $\tilde{P}$  que chamaremos de função distância

$$V(y, \mu) := \tilde{P}(y, \mu) - y.$$

Nosso objetivo é estudar os zeros dessa função pois, com isso, estamos estudando os pontos fixos de  $\tilde{P}$ .

O seguinte resultado é proposto em [37], bem como sua demonstração.

**Teorema 3.2.** Assuma as hipóteses  $\mathbf{H}_1$ - $\mathbf{H}_4$ . Para  $\mu = 0$ , bifurca uma família contínua de órbitas periódicas da origem do sistema (3.14), isto é, existe uma constante  $\delta_*$  e um função contínua unicamente determinada  $\mu^*(y) : (-\delta_*, \delta_*) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\mu^*(0) = 0$  tal que para cada  $y \in (-\delta_*, \delta_*)$  existe uma órbita periódica  $\gamma^*(y)$  do sistema (3.14) passando por  $(0, y)$  para o parâmetro  $\mu = \mu^*(y)$  com período  $\tilde{T}(y, \mu^*(y))$ . A função  $\tilde{T}(y, \mu)$  é contínua e satisfaz

$$\tilde{T}(0, 0) := \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^I(0)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{II}(0)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{III}(0)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{IV}(0)}. \quad (3.20)$$

Além disso, não existe nenhuma outra órbita periódica do sistema (3.14) localmente próxima de  $x = y = 0$  e  $\mu = 0$ .

**Demonstração:** 1ª Etapa:

Primeiramente vamos demonstrar a existência de uma família contínua de órbitas paeriodicas bifurcando da origem.

Considere a função  $\tilde{V} : (-\delta, \delta) \times M \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\delta$  como na seção anterior) definida por

$$\tilde{V}(y, \mu) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial y}(sy, \mu) ds.$$

que é equivalente a  $V(y, \mu)$ , com exceção para a solução trivial  $y \equiv 0$  [37, 40].

Pelo Lema 3.12 temos que a função  $\tilde{V}(y, \mu)$  e sua derivada parcial  $\tilde{V}_\mu(y, \mu)$  são contínuas para  $|y| < \delta$  e  $\mu \in M$ . Vamos encontrar  $V(0, \mu)$  e  $V_\mu(0, \mu)$ , pois precisaremos de suas expressões. Temos que

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y, \mu) = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(y, \mu) - 1,$$

e para o ponto  $(sy, \mu)$ ,  $s$  fixo, obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial y}(sy, \mu) = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(sy, \mu) - 1.$$

Então,

$$\tilde{V}(y, \mu) = \int_0^1 \left[ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(sy, \mu) - 1 \right] ds = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(sy, \mu) ds - 1.$$

Logo, para  $y = 0$ , temos

$$\tilde{V}(0, \mu) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(0, \mu) ds - 1.$$

Por fim, usando o item 3. do Lema 3.12, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{V}(0, \mu) &= \int_0^1 \exp(B(\mu)) ds - 1 \\ &= s \cdot \exp(B(\mu)) \Big|_0^1 - 1 \\ &= \exp(B(\mu)) - 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{V}(0, \mu) = \exp(B(\mu)) - 1 \tag{3.21}$$



Daí, temos

$$\tilde{V}_\mu(0, \mu) = B'(\mu) \exp(B(\mu)), \quad (3.22)$$

Note que, de acordo com a hipótese  $\mathbf{H}_4$ , a equação (3.21) nos fornece

$$\tilde{V}(0, 0) = \exp(B(0)) - 1 = 0.$$

E, a partir de (3.22), temos

$$\tilde{V}_\mu(0, 0) \neq 0.$$

Logo, pelo teorema da função implícita [9], existem vizinhanças  $(-\delta_*, \delta_*)$  de  $y = 0$ ,  $0 < \delta_* \leq \delta$ , e  $(-\epsilon, \epsilon) \subset M$  de  $\mu = 0$ , e uma única função  $\mu^* : (-\delta_*, \delta_*) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$ , contínua, tal que  $\mu^*(0) = 0$  e  $\tilde{V}(y, \mu^*(y)) = 0$  para todo  $y \in (-\delta_*, \delta_*)$ . Portanto, para cada  $y \in (-\delta_*, \delta_*)$  existe um único  $\mu^*(y) \in (-\epsilon, \epsilon)$  tal que  $\tilde{P}(y, \mu^*(y)) = y$ , ou seja, o teorema da função implícita garante a existência e unicidade de solução não trivial próxima de  $(y, \mu) = (0, 0)$  para a equação  $\tilde{P}(y, \mu) = y$ .

Portanto, como os pontos fixos não triviais da aplicação Retorno correspondem a órbitas periódicas do sistema (3.14), concluimos que, para cada  $y \in (-\delta_*, \delta_*)$  existe uma órbita periódica dependendo de  $y$ ,  $\gamma^*(y)$ , de (3.14) passando pelo ponto  $(0, y)$  (a primeira coordenada é referente à coordenada  $x$ ) para o parâmetro  $\mu^*(y) = \mu$ .

Sendo  $\tilde{T}$  o período correspondente à  $\tilde{P}$ , temos que o período de cada órbita  $\gamma^*(y)$  é dado por  $\tilde{T}(y, \gamma^*(y))$ . Pelo Lema 3.12, temos que  $\tilde{T}$  é uma função contínua para  $y \in (-\delta_*, \delta_*)$  e  $\mu^*(y) \in M$ ; e, por (3.20), também temos

$$\tilde{T}(0, 0) = T(0) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^I(0)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{II}(0)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{III}(0)} + \frac{\frac{\pi}{2}}{\beta^{IV}(0)}.$$

2ª Etapa:

Agora, vamos demonstrar que não existe nenhuma outra órbita periódica de (3.14) próxima de  $x = y = 0$  e  $\mu = 0$ .

Usando a segunda equação de (3.19),  $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(0, \mu) = \exp(B(\mu))$ , e o fato de  $\tilde{P}_y$  ser contínua para  $-\delta < y < \delta$  e  $\mu \in M$  (Lema 3.12), temos que em uma vizinhança  $U := [-\delta_*, \delta_*]^2 \times (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(y, \mu) > 0$  para  $|y| < \delta_*$  e  $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$ , ou seja, para algum  $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$  dado, a função  $\tilde{P}(y, \mu)$  é estritamente monótona em  $y \in [-\delta_*, \delta_*]$ .

Vamos supor por contradição que exista um parâmetro  $\mu_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$  para o qual o sistema (3.14) possua, além da órbita periódica bifurcando, uma órbita periódica em  $[-\delta_*, \delta_*]^2$ .

De acordo com ([1], Seção 8, Lema 4), essa órbita periódica não pode permanecer inteiramente no interior de algum quadrante já que ela cruza todos os semi-eixos. Então, sem perda de generalidade, vamos assumir que ela cruza primeiro o semi-eixo- $y$  positivo em  $(0, y_0)$ ,  $y_0 > 0$ . Então, os próximos quatro pontos de interseção da órbita periódica com cada semi-eixo serão da forma:  $(x_1, 0)$ , com  $x_1 > 0$ ,  $(0, y_2)$ , com  $y_2 < 0$ ,  $(x_3, 0)$ , com  $x_3 < 0$  e  $(0, \tilde{P}(y_0, \mu_0))$ , com  $\tilde{P}(y_0, \mu_0) > 0$ .

Se  $\tilde{P}(y_0, \mu_0) = y_0$ , pela unicidade local da órbita periódica dada e pela 1ª Etapa da demonstração, temos que  $\mu_0 = \mu_*(y_0)$  e, então, essa órbita periódica coincide com a órbita  $\gamma^*(y_0)$ .

Se  $\tilde{P}(y_0, \mu_0) \neq y_0$ , pelo fato de  $\tilde{P}(\cdot, \mu_0)$  ser monótona, temos que a  $n$ -ésima aplicação de  $\tilde{P}$  em  $(y_0, \mu_0)$  será diferente de  $y_0$ , isto é,  $\tilde{P}^n(y_0, \mu_0) \neq y_0$  para todo  $n \geq 1$ . O que é um absurdo, pois esse fato contraria a periodicidade da órbita dada.

□

A direção em que ocorre a bifurcação no caso de suavidade é determinada pela forma da função  $\mu = \mu^*(y)$ , que é dada em termos de derivadas de ordem superior [31].

Mas, como no caso de não suavidade a função  $\mu^*$  é somente contínua (ver Teorema 3.2), não conseguimos determinar tal direção da mesma maneira. Em alguns casos podemos obter a estabilidade unilateral da órbita periódica bifurcando.

Por exemplo, segundo [37], a propriedade de estabilidade da solução estacionária do sistema (3.14) e a unicidade apresentada no Teorema 3.2 garantem que a órbita periódica bifurcando que passa por  $(0, y, \mu)$  é assintoticamente estável no interior (da região delimitada pela órbita periódica) se  $B(\mu) > 0$  e instável se  $B(\mu) < 0$ .

Quanto à estabilidade da solução estacionária, em [25] existem resultados que nos permitem estender as propriedades sobre estabilidade da solução estacionária do sistema (3.1), citados no final da **Seção 3.2**, para a solução estacionária do sistema (3.14) sob certas condições dos próprios sistemas tais como continuidade e homogeneidade, bem como sob certas condições das soluções dos sistemas.

Entre outros resultados, Lasota e Strauss em ([25], Seção 4) provam que se a origem (solução estacionária) de um sistema linear com determinadas características é um atrator, além dela ser exponencialmente estável para esse sistema, ela será localmente exponencialmente estável (assintoticamente estável) para um certo sistema não linear.

---

## 3.5 Extensão para o canto geral

---

Para esta seção, temos a extensão dos resultados principais da seção anterior, mais especificamente, do Teorema 3.2, para o caso do domínio contendo um canto qualquer. Basearemos essa etapa basicamente nos resultados de [37].

Considere o domínio  $\Omega$  como na Seção 3.1. Seja, agora,  $\hat{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  o conjunto de índices. Vamos supor que  $L^j$ , com  $j \in \hat{J}$ , sejam as  $n$  linhas de descontinuidade no domínio e que possuam um único ponto de interseção, a origem. Ela será o canto (geral) no domínio, ver Figura 3.5.

Note que essas  $n$  linhas de descontinuidade dividem o disco  $\Omega$  em  $n$  setores  $\Omega^j$ ,  $j \in \hat{J}$ , e sejam  $\omega^j > 0$ ,  $j \in \hat{J}$  seus ângulos respectivos, tais que:  $\omega^1 + \dots + \omega^n = 2\pi$ .

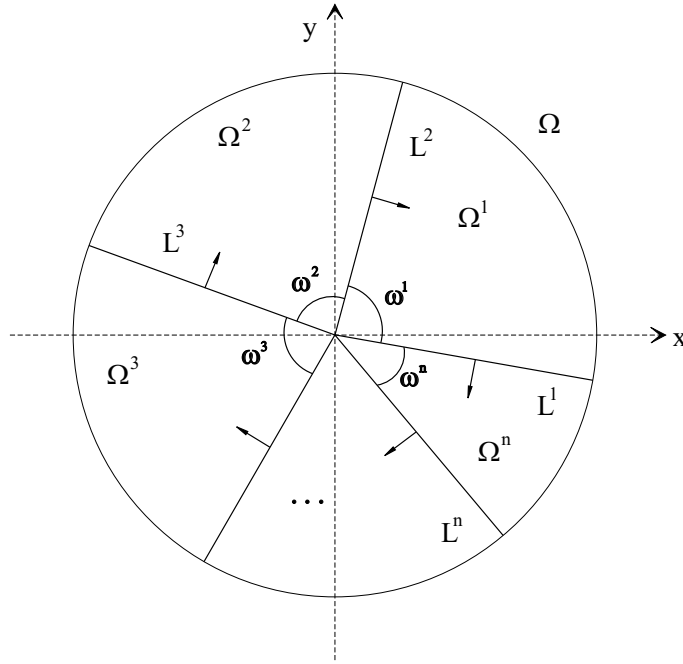


Figura 3.5: Canto geral no domínio  $\Omega$ .

Consideremos o sistema planar suave por partes da forma

$$(\dot{x}, \dot{y})^T = F^j(x, y, \mu) = (F_1^j(x, y, \mu), F_2^j(x, y, \mu)), \quad (3.23)$$

com  $(x, y)^T \in \Omega^j$ ,  $\mu \in M$  e  $j \in \hat{J}$ . As funções  $F^j = (F_1^j, F_2^j)$ ,  $j \in \hat{J}$ , descrevem o campo de vetores de (3.23).

Vamos assumir nesta seção também, hipóteses similares as da **Seção 3.1** e **3.2**.

A primeira hipótese garante que a descontinuidade do sistema (3.1) ocorre em  $L^j$ , para todo  $j \in \hat{J}$ :

**$\hat{H}_1$**  As funções  $F^j(x, y, \mu)$ ,  $j \in \hat{J}$  são  $C^K$ -suaves,  $K \geq 2$ , para  $(x, y, \mu) \in \Omega \times M$ .

Já a segunda hipótese assegura que a origem é a solução estacionária de (3.23):

$\hat{\mathbf{H}}_2$   $F^j(0, 0, \mu) \equiv 0$ ,  $j \in \hat{J}$  para todo valor de  $\mu$  em  $M$ .

Assim como na **Seção 3.1**, a partir de  $\hat{\mathbf{H}}_1$  e  $\hat{\mathbf{H}}_2$  a função  $F^j(x, y, \mu)$ , para algum  $j \in \hat{J}$ , tem a seguinte expansão de Taylor em  $(x, y) = (0, 0)$

$$F^j(x, y, \mu) = A^j(\mu)(x, y)^T + (g_1^j(x, y, \mu), g_2^j(x, y, \mu))^T \quad (3.24)$$

onde  $A^j(\mu)$  é uma matriz  $2 \times 2$  e  $(g_1^j, g_2^j)^T$ , o termo de ordem superior e não linear, é  $C^k$ -suave e satisfaz  $|g_{1,2}^j| = O(x^2 + y^2)$  à medida em que  $(x, y)$  tende uniformemente a  $(0, 0)$ , para  $\mu \in M$ .

Para garantir que a matriz  $A^j(\mu)$  tenha um par de autovalores complexos,  $\alpha^j(\mu) \pm i\beta^j(\mu)$  ( $i^2 = -1$ ), assumiremos:

$\hat{\mathbf{H}}_3$  Para cada  $j \in \hat{J}$ , a matriz  $A^j(\mu)$  está na forma normal:

$$A^j(\mu) = \begin{bmatrix} \alpha^j(\mu) & \beta^j(\mu) \\ -\beta^j(\mu) & \alpha^j(\mu) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

com  $\beta^j(0) > 0$ .

Lembrando que  $\hat{\mathbf{H}}_3$  implica que as soluções de (3.23) cruzam as linhas de descontinuidade no sentido horário à medida em que o tempo aumenta.

De maneira análoga à seção anterior, podemos definir as  $n$  aplicações de Poincaré  $\hat{P}^j$  em  $\Omega^j$  para todo  $j \in \hat{J}$ , bem como as aplicações Período correspondentes  $\hat{T}^j$ ,  $j \in \hat{J}$ . Daí, definimos a aplicação Retorno  $\hat{P} : (-\hat{\delta}, \hat{\delta}) \times (-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$  para o sistema (3.23) através da composição das  $n$  aplicações de Poincaré, e sua correspondente aplicação Período  $\hat{T} : (-\hat{\delta}, \hat{\delta}) \times (-\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}) \rightarrow \mathbb{R}$  através da composição das aplicações Período definidas para cada um dos  $n$  subsistemas de (3.23).

Na definição da aplicação Retorno para (3.23) surge a *função bifurcação*

$$\hat{B}(\mu) = \frac{\alpha^1(\mu)\omega^1}{\beta^1(\mu)} + \frac{\alpha^2(\mu)\omega^2}{\beta^2(\mu)} + \dots + \frac{\alpha^n(\mu)\omega^n}{\beta^n(\mu)},$$

como havíamos visto na **Seção 3.2**.

E, a partir dessa função, assumiremos a quarta e última hipótese:

$$\hat{H}_4 \quad \hat{B}(0) = 0 \text{ e } \hat{B}'(0) \neq 0.$$

Agora, podemos enunciar a extensão do Teorema 3.2, o principal resultado do nosso trabalho.

**Teorema 3.3.** Assuma as hipóteses  $\hat{H}_1$ - $\hat{H}_4$ . Para  $\mu = 0$ , bifurca uma família contínua de órbitas periódicas da origem do sistema (3.23), isto é, existe uma constante  $\hat{\delta}_*$  e um função contínua unicamente determinada  $\hat{\mu}^*(y) : (-\hat{\delta}_*, \hat{\delta}_*) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\hat{\mu}^*(0) = 0$  tal que para cada  $y \in (-\hat{\delta}_*, \hat{\delta}_*)$  existe uma órbita periódica  $\hat{\gamma}^*(y)$  do sistema (3.23) passando por  $(0, y)$  para o parâmetro  $\mu = \hat{\mu}^*(y)$  com período  $\hat{T}(y, \hat{\mu}^*(y))$ . A função  $\hat{T}(y, \mu)$  é contínua e satisfaz

$$\hat{T}(0, 0) := \frac{\omega^1}{\beta^1(0)} + \frac{\omega^2}{\beta^2(0)} + \dots + \frac{\omega^n}{\beta^n(0)}. \quad (3.26)$$

Além disso, não existe nenhuma outra órbita periódica do sistema (3.23) localmente próxima de  $x = y = 0$  e  $\mu = 0$ .

A demonstração desse teorema é análoga à demonstração do Teorema 3.2, os argumentos são os mesmos, por isso a omitiremos.

Por fim, como visto na seção anterior, a órbita periódica bifurcando  $\hat{\gamma}^*(y)$  é assintoticamente estável na região interna se  $\hat{B}(\mu) > 0$  e instável se  $\hat{B}(\mu) < 0$ . E como nosso estudo se limita ao interior de  $\Omega$ , onde está essa órbita, não podemos tirar conclusões sobre a estabilidade da órbita na região externa a ela. Zou e Küpper em [37], por exemplo, usam experimentos numéricos para verificar a estabilidade da órbita na região externa.

Faremos, na próxima seção, a aplicação desse teorema à equação do modelo da fonação para o caso em que o sistema de equações diferenciais correspondente é suave por partes.

---

## 3.6 Modelo suave por partes da oscilação das pregas vocais

---

Esta seção foi baseada em informações de [28, 30].

Vamos trabalhar agora, com o modelo da fonação suave por partes, ou seja, o modelo é um sistema dinâmico suave por partes. Nesse sistema, o retrato de fase é dividido em duas regiões nas quais o campo de vetores do sistema é suave [13]. Já na fronteira entre essas duas regiões o campo de vetores não é suave (é contínuo mas não é diferenciável) [30].

Usamos o mesmo modelo da Seção 2.4. Entretanto, segundo pesquisas recentes sobre a aerodinâmica da fonação [34], a pressão de ar na glote assume expressões diferentes segundo o canal formado pela glote seja convergente ( $a_1 \geq a_2$ ) ou divergente ( $a_1 < a_2$ ).

Quando a glote toma uma forma convergente, isto é,  $a_1 \geq a_2$ , temos

$$2L(x_0 + x + \tau\dot{x}) \geq 2L(x_0 + x - \tau\dot{x}) \Leftrightarrow \tau\dot{x} \geq -\tau\dot{x} \Leftrightarrow \dot{x} \geq 0, \quad (3.27)$$

o que significa que as pregas vocais (opostas) movem-se para longe uma da outra. E, nesse caso, a pressão glotal é dada por

$$\begin{aligned} P_g &= P_L \left( 1 - \frac{a_2}{a_1} \right) \\ &= \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

com  $a_1 = 2L(x_0 + x + \tau\dot{x}) > 0$ .

Como  $P_g > 0$ , ela age impulsionando as pregas vocais para longe uma da outra.

Já no caso em que a glote toma uma forma divergente, isto é,  $a_1 < a_2$ , temos que  $\dot{x} < 0$ . Nesse caso, as pregas vocais opostas movem-se para perto uma da outra, fechando a glote. E nessa situação, devido à expansão da área da glote, o fluxo de ar forma um jato que se separa das paredes da glote. Devido a essa separação, acontecem vórtices e outros fenômenos de turbulência na saída da glote. A pressão de ar na glote, nesse caso, pode ser aproximada por  $P_g = 0$ .

Logo, sendo o movimento das pregas vocais no processo da fonação modelado pela equação

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = P_g,$$

temos o seguinte modelo suave por partes

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = \begin{cases} \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}}, & \text{se } \dot{x} \geq 0 \\ 0, & \text{se } \dot{x} < 0 \end{cases}. \quad (3.29)$$

Para  $\dot{x} \geq 0$ , de acordo com a Seção 2.4, temos o seguinte sistema de equações diferenciais para (3.29)

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\alpha(1 + \beta u^2)v - u + \frac{\gamma v}{(1 + u + \rho v)} \end{cases}, \quad (3.30)$$

com  $1 + u + \rho v > 0$ .

E para  $\dot{x} < 0$ , fazendo o processo análogo ao da Seção 2.3, obtemos

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u - \alpha v - \alpha\beta u^2 v \end{cases} \quad (3.31)$$

Lembremos que  $u = \frac{x}{x_0}$  e que  $v = u'$ . Logo  $u$  está diretamente relacionado a  $x$  e  $v$ , diretamente relacionado a  $\dot{x}$ .



De acordo com os sistemas (3.30) e (3.31), vemos que os dois subsistema de (3.29) são suaves em seus domínios.

Mais que isso, se fizermos o limite lateral à direita do modelo (3.29), quando  $\dot{x}$  tende a zero, obtemos que ele é contínuo em  $\dot{x} = 0$  ou, equivalentemente,  $v = 0$ . Mas não é diferenciável.

Logo, (3.29) satisfaz a hipótese  $\hat{H}_1$  e a sua linha de descontinuidade acontece em  $v = 0$ .

Então, nesse caso, a origem  $(u, v) = (0, 0)$  será considerada o canto do sistema.

Note ainda, por (3.30) e (3.31), que  $(u, v) = (0, 0)$  é a solução estacionária do sistema (3.29). Logo, (3.29) satisfaz a segunda hipótese  $\hat{H}_2$ .

Como o interesse de nossa análise está em uma vizinhança da solução estacionária do sistema, as hipóteses  $\hat{H}_3$  e  $\hat{H}_4$  serão verificadas para essa solução. Lembrando que o estudo do comportamento qualitativo do sistema não linear (3.29) nessa vizinhança pode ser feito através de um sistema linear (Teorema de Grobmann-Hartman, [21]).

Vamos considerar essa vizinhança como sendo  $\Omega$ , o disco aberto de raio  $r$  e centrado na origem de (3.29), e  $M$  um intervalo contendo zero.

Como vimos no final do **Capítulo 2**, a matriz Jacobiana  $J^1(u, v, \gamma)$  do subsistema (3.30) em  $(0, 0, \gamma)$  é dada por

$$J^1(\mathbf{0}, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha + \gamma \end{bmatrix}.$$

Mas, para esse modelo, o parâmetro de controle considerado é  $\mu = \gamma - 2\alpha$  (adequado ao modelo para que o valor de bifurcação seja  $\mu = 0$ ). Com isso, fazendo  $\gamma = \mu + 2\alpha$ , obtemos

$$J^1(\mathbf{0}, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha + \mu \end{bmatrix}.$$

Já a matriz Jacobiana  $J^2(u, v, \gamma)$  do subsistema (3.31) em  $(0, 0, \mu)$  é dada por

$$J^2(\mathbf{0}, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Para verificarmos a hipótese  $\hat{H}_3$ , basta confirmarmos que a matriz Jacobiana de cada subsistema possui um par de autovalores complexos, ao invés de transformá-las para a forma normal.

Para  $J^1(\mathbf{0}, \mu)$ , baseando no que já foi calculado no **Capítulo 2**, temos

$$\lambda^1(\mu) = \frac{(\alpha + \mu) \pm \sqrt{(\alpha + \mu)^2 - 4}}{2}.$$

Já os autovalores de  $J^2(\mathbf{0}, \gamma)$ , são obtidos através de sua equação característica

$$(\lambda^2(\mu))^2 + \alpha\lambda^2(\mu) + 1 = 0,$$

Daí,

$$\lambda^2(\mu) = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}.$$

Para que eles sejam complexos, temos que as condições  $-2 < \alpha < 2$  e  $-2 < \alpha + \mu < 2$  devem ser satisfeitas. Mas o valor de  $\alpha$  deve ser positivo, pois ele está relacionado diretamente com o valor do coeficiente de amortecimento  $B$  do modelo, ver **Capítulo 2**, então a primeira condição fica reduzida a  $0 < \alpha < 2$ .

Uma outra condição de  $\hat{H}_3$  que tem que ser satisfeita é  $\beta^1(0) > 0$  e  $\beta^2(0) > 0$ . Então, vamos considerar

$$\lambda^1(\mu) = \frac{(\alpha + \mu) + \sqrt{(\alpha + \mu)^2 - 4}}{2} = \frac{(\alpha + \mu) + i\sqrt{4 - (\alpha + \mu)^2}}{2}$$

e

$$\lambda^2(\mu) = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} = \frac{-\alpha + i\sqrt{4 - \alpha^2}}{2}.$$

Logo, desde que  $0 < \alpha < 2$  e  $-2 < \alpha + \mu < 2$ , a matriz Jacobiana de cada subsistema aplicada na origem, possui um autovalor complexo tal que a parte imaginária aplicada em  $\mu = 0$  é positiva. O que equivale a satisfazer a hipótese  $\hat{H}_3$ . Lembrando que é esta hipótese que implica que as soluções do sistema cruzam a linha de descontinuidade no sentido horário à medida em que o tempo cresce.

Por fim, verificaremos a quarta hipótese em uma vizinhança de  $(u, v) = (0, 0)$ :

$$\hat{B}(0) = 0, \hat{B}'(0) \neq 0,$$

Lembrando que

$$\lambda^1(\mu) = \alpha^1(\mu) + i \beta^1(\mu) = \frac{(\alpha + \mu) + i \sqrt{4 - (\alpha + \mu)^2}}{2}$$

e

$$\lambda^2(\mu) = \alpha^2(\mu) + i \beta^2(\mu) = \frac{-\alpha + i \sqrt{4 - \alpha^2}}{2}.$$

Como a linha de descontinuidade de (3.29) é  $v = 0$ , ela divide  $\Omega$  em dois setores,  $\Omega^1$  e  $\Omega^2$ , com ângulos  $\omega^1 = \omega^2 = \pi$ . Então, temos que a função bifurcação, para esse caso, é dada por

$$\begin{aligned} \hat{B}(\mu) &= \pi \left( \frac{\alpha^1(\mu)}{\beta^1(\mu)} + \frac{\alpha^2(\mu)}{\beta^2(\mu)} \right) \\ &= \pi \left( \frac{\alpha + \mu}{\sqrt{4 - (\alpha + \mu)^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

A partir daí, obtemos

$$\hat{B}'(\mu) = \pi \left( \frac{1}{(4 - (\alpha + \mu)^2)^{1/2}} + \frac{(\alpha + \mu)^2}{(4 - (\alpha + \mu)^2)^{3/2}} \right) \tag{3.33}$$

Vamos verificar, primeiramente, se  $\hat{B}(0) = 0$ .

Fazendo  $\mu = 0$  em (3.32), temos

$$\begin{aligned}\hat{B}(0) &= \pi \left( \frac{\alpha^1(0)}{\beta^1(0)} + \frac{\alpha^2(0)}{\beta^2(0)} \right) \\ &= \pi \left( \frac{\alpha}{\sqrt{4-\alpha^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{4-\alpha^2}} \right) = 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{B}(0) = 0. \tag{3.34}$$

Por fim, vamos verificar se  $\hat{B}'(0) \neq 0$ .

Fazendo  $\mu = 0$  em (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{B}'(0) &= \pi \left( \frac{1}{(4-\alpha^2)^{1/2}} + \frac{\alpha^2}{(4-\alpha^2)^{3/2}} \right) \\ &= \pi \left( \frac{(4-\alpha^2) + \alpha^2}{(4-\alpha^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{4\pi}{(\alpha^2 - 4)^{3/2}}\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\hat{B}'(0) \neq 0. \tag{3.35}$$

Então, para o parâmetro de controle  $\mu = \gamma - 2\alpha$ , a partir de (3.34) e (3.35), vemos que a quarta e última hipótese  $\hat{H}_4$  também é satisfeita para o modelo suave por partes (3.29).

Logo, desde que  $0 < \alpha < 2$  e  $-2 < \alpha + \mu < 2$  as hipóteses  $\hat{H}_1 - \hat{H}_4$  são satisfeitas pelo sistema (3.29) com parâmetro de controle  $\mu = \gamma - 2\alpha$ .

Então, de acordo com o Teorema 3.3, para o valor de parâmetro  $\mu = 0$  bifurca uma família contínua de órbitas periódicas da solução estacionária  $(u, v) = (0, 0)$ , ou equivalentemente,  $(\dot{x}, x) = (0, 0)$ , para o sistema (3.29); isto é, existe uma constante positiva  $\hat{\delta}$  e uma função contínua  $\hat{\mu}^* : (-\delta^*, \delta^*) \rightarrow \mathbb{R}$  unicamente determinada, tal que  $\mu(0) = 0$  e mais, para cada  $u \in (-\delta^*, \delta^*)$  existe uma órbita periódica  $\hat{\gamma}^*(u)$  do sistema (3.29) para  $\mu = \hat{\mu}^*(u)$  passando pelo ponto  $(u, 0)$  e com um período  $\hat{T}(u, \hat{\mu}^*(u))$ . A função  $\hat{T}(u, \hat{\mu}^*(u))$  é contínua e satisfaz

$$\begin{aligned} \hat{T}(0, 0) &= \frac{\omega^1}{\beta^1(0)} + \frac{\omega^2}{\beta^2(0)} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{4 - \alpha^2}/2} + \frac{\pi}{\sqrt{4 - \alpha^2}/2} \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{4 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Além disso, também pelo Teorema 3.3, temos que não existe nenhuma outra órbita periódica do sistema (3.29) localmente próxima de  $(u, v) = (0, 0)$  (ou  $(\dot{x}, x) = (0, 0)$ ) e  $\mu = 0$ .

Ainda podemos fazer outra conclusão, a órbita periódica bifurcando  $\hat{\gamma}^*(u)$  é assintoticamente estável na região interna se  $\hat{B}(\mu) > 0$  e instável se  $\hat{B}(\mu) < 0$ . Observemos novamente a expressão da *função bifurcação*

$$\hat{B}(\mu) = \pi \left( \frac{\alpha + \mu}{\sqrt{4 - (-\alpha - \mu)^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \right).$$

Para que  $\hat{B}(\mu) > 0$  seja satisfeita, precisamos que a seguinte desigualdade aconteça

$$\frac{\alpha + \mu}{\sqrt{4 - (-\alpha - \mu)^2}} > \frac{\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}},$$

ou seja,

$$\mu(2\alpha + \mu) > 0. \tag{3.36}$$

Então, para que a órbita periódica bifurcando  $\hat{\gamma}^*(u)$  seja assintoticamente estável na região interna, a desigualdade (3.36) tem que ser satisfeita. Caso contrário,  $-2\alpha \leq \mu \leq 0$ ,  $\hat{\gamma}^*(u)$  é instável nessa região.

Portanto, para o modelo suave por partes do movimento das pregas vocais no processo da fonação (3.29), existe uma bifurcação de Hopf generalizada emanada do canto do sistema suave por partes correspondente em  $\gamma = 2\alpha$  ( $\mu = 0$ ). Note que esse valor é o dobro do obtido para o sistema suave apresentado no **Capítulo 2**. Tal resultado é natural, considerando que a pressão da glote (ver (3.28)) só atua na metade de cada ciclo da vibração, no modelo suave por partes (3.29). Na outra metade, a pressão é zero. E isso fornece uma validação dos resultados teóricos calculados, pois fazem sentido do ponto de vista fisiológico.

---

# Conclusão

Estudamos analiticamente a bifurcação de Hopf para um sistema suave e, mais detalhadamente, a bifurcação de Hopf generalizada para um canto de um sistema suave por partes específico.

Para o sistema planar suave dependente de um parâmetro  $\mu$  da forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y + p(x, y) \\ \dot{y} &= x + \mu y + q(x, y) \end{cases},$$

com  $p(x, y)$  e  $q(x, y)$  funções analíticas, enunciamos o número de Liapunov e, se ele for diferente de zero, vimos que existe uma bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio do sistema para o valor de bifurcação do parâmetro  $\mu = 0$ . Além disso, vimos que para determinado valor de  $\mu$ , o sistema apresenta um ciclo limite e que sua estabilidade também pode ser determinada.

Então, aplicamos esses resultados na equação que modela a oscilação das pregas vocais na produção da voz apresentada por [28].

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}},$$

onde  $x_0 + x + \tau\dot{x} > 0$ , para ilustrar tal fenômeno de bifurcação, usando sempre valores de parâmetro característicos de um adulto.

Para um sistema planar não linear suave por partes da forma

$$(\dot{x}, \dot{y})^T = F^j(x, y, \mu) = (F_1^j(x, y, \mu), F_2^j(x, y, \mu)),$$

com  $(x, y)^T \in \Omega^j$ ,  $\mu \in M$  e  $j \in \hat{J}$ , onde as funções  $F^j = (F_1^j, F_2^j)$ ,  $j \in \hat{J}$ , descrevem o campo de vetores do sistema, fizemos um estudo na vizinhança da origem e, submetendo-o a quatro hipóteses básicas  $\hat{H}_1 - \hat{H}_4$ , concluímos que ele possui uma bifurcação de Hopf generalizada no canto do domínio considerado para o valor de bifurcação do parâmetro  $\mu = 0$ .

Como o nosso estudo foi feito em uma vizinhança da origem, só conseguimos tirar conclusões sobre a estabilidade das órbitas periódicas na parte interna da região delimitada por elas através da função bifurcação  $\hat{B}(\mu)$ , ficando a análise da estabilidade na região externa sujeita a métodos geométricos.

Por fim, estudando a equação que modela a oscilação das pregas vocais no processo da fonação

$$M\ddot{x} + B(1 + \eta x^2)\dot{x} + Kx = \begin{cases} \frac{2P_L\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}}, & \text{se } \dot{x} \geq 0 \\ 0, & \text{se } \dot{x} < 0 \end{cases},$$

que corresponde a um sistema suave por partes, verificamos que, sob certas condições, ela satisfaz as quatro hipóteses básicas  $\hat{H}_1 - \hat{H}_4$  e então, concluímos que possui uma bifurcação de Hopf generalizada no canto do domínio para o valor de bifurcação  $\mu = \gamma - 2\alpha = 0$ .

Além disso, se a condição  $\mu(2\alpha + \mu) > 0$  for satisfeita, a função bifurcação é positiva,  $\hat{B}(\mu) > 0$ , o que implica que a órbita periódica bifucando é assintoticamente estável na região interna. Caso contrário ( $-2\alpha \leq \mu \leq 0$ ), temos  $\hat{B}(\mu) < 0$  e, então, a órbita periódica bifucando é instável nessa região.

Alertamos que o último sistema trabalhado submetido às hipóteses  $\hat{H}_1 - \hat{H}_4$  representa, na verdade, uma classe específica de sistemas suaves por partes que incluem



fenômenos especiais de bifurcação e que apresentam resultados interessantes de serem estudados. Mas não podemos utilizá-lo como um sistema geral a ser analisado.

---

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I., Maier, A.G., *Qualitative Theory of Second-order Dynamical Systems*, Halsted Press (A division of John Wiley & Sons), New York, Toronto, Ont., 1973, 1-17.
- [2] Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I., Maier, A.G., *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.
- [3] Andronov, A.A., Vitt A.A., Khaikin, S.E., *Theory of Oscillators*, Dover Publications, New York (1987).
- [4] Berry, D.A., Herzel, H., Titze, I.R., Story, B.H., *Bifurcations in excised larynx experiments*, J. Voice, **10** (1996), 129-138.
- [5] Boyce, W.E., DiPrima, R.C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Tradução: Horacio Macedo, Sexta edição, LTC, Rio de Janeiro, 1998.

- [6] Budd, C.J., *Non-smooth dynamical systems and the grazing bifurcation*, in: *Nonlinear Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, p. 219-235, (Guildford, 1995).
- [7] Chen, M.S., *Hopf Bifurcation in Beck's Problem*, Second edition, University micro-films International, Michigan, 1986.
- [8] Chow, S.N., Hale, J.K., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer, New York, 1982.
- [9] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.
- [10] Deimling, K., *Multivalued Differential Equation*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.
- [11] Di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R., *Corner collision implies border-collision bifurcation*, *Physica D*, **154** (3-4) (2001), 171-194.
- [12] Di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R., *Grazing, skipping and sliding: analysis of the non-smooth dynamics of the dc/dc buck converter*, *Nonlinearity*, **11** (4) (1998), 859-890.
- [13] Di Bernardo, M., Feigin, M.I., Hogan, S.J., Homer, M.E., *Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems*, *Chaos Soliton Frac.*, **10** (11) (1999), 1881-1906.
- [14] Di Bernardo, M., Garofalo, F., Iannelli, L., Vasca, F., *Bifurcations in piecewise-smooth feedback systems (Switched, piecewise and polytopic linear systems)*, *Int. J. Control*, **75** (16-17) (2002), 1243-1259.
- [15] Di Bernardo, M., Kowalczyk, P., Nordmark, A., Vasca, F., *Sliding bifurcations: a novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry friction oscillators*, *Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.*, **13** (10) (2003), 2935-2948.
- [16] Diamond, P., Kuznetsov, N., Rachinskii, D., *On the Hopf bifurcation in control systems with a bounded nonlinearity asymptotically homogeneous at infinity*, *J. Differential Equations*, **175** (1) (2001), 1-26.

- [17] Diamond, P., Rachinskii, D., Yumagulov, M. *Stability of large cycles in a nonsmooth problem with Hopf bifurcation at infinity*, Nonlinear Analysis, Ser.A **42** (6) (2000), 1017-1031.
- [18] Ferreira, L.N., *Bifurcação de Andronov-Hopf em um modelo do tipo Liénard para as pregas vocais*, Dissertação de Mestrado, UnB, Brasília, 2006.
- [19] Figueiredo, D.G., *Análise I*, Segunda edição, LTC, Rio de Janeiro, 1996.
- [20] Filippov, A.F., *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side*, Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988 (translated from the Russian. Mathematics and its Applications (Soviet Series) vol.18).
- [21] Guckenheimer, J., Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [22] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.
- [23] Kunze, M., *Non-smooth Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1744, Springer, Berlin, 2000.
- [24] Küpper, T., Moritz, S., *Generalized Hopf bifurcation for non-smooth planar systems*, Philos. Trans. Royal Society Lond., Ser.A **359** (1789) (2001), 2483-2496.
- [25] Lasota, A., Strauss, A., *Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized*, J. Differential Equations, **10** (1971), 152-172.
- [26] Leine, R.I., Van Campen, D.H., Van de Vrande, B.L., *Bifurcations in nonlinear discontinuous systems*, Nonlinear Dynam., **23** (2) (2000), 105-164.
- [27] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Volume 2, Sexta edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [28] Lucero, J.C., *Bifurcations and limit cycles in a model for a vocal fold oscillator*, Comm. Math. Sci., **3** (4) (2005), 517-529.
- [29] Lucero, J.C., *Dynamics of the Vocal Fold Oscillation*, Tend. Mat. Apl. Comput., **6** (1) (2005), 11-20.

- [30] Lucero, J.C., Gajo, C.A., *Oscillation region of a piecewise-smooth model of the vocal folds differential*, Comm. Math. Sci, **4** (2) (2006), 453-469.
- [31] Negrini, P., Salvadori, L., *Attractivity and Hopf bifurcation*, Nonlinear Analysis, **3** (1) (1978), 87-99.
- [32] Nusse, H.E., Ott, E., Yorke, J.A., *Border-collision bifurcation: an explanation for observed bifurcation phenomena*, Phys. Rev. E(3) **49** (2) (1994), 1073-1076, (Guildford, 1995).
- [33] Nusse, H.E., Yorke, J.A., *Border-collision bifurcations including "period two to period three" for piecewise smooth systems*, Physica D, **57** (1-2) (1992), 39-57.
- [34] Pelorson, X., Hirschberg, A., van Hassel, R. R., Wijnands, A. P. J., *Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified two-mass model*, J. Acoust. Soc. Am., **96** (6) (1994), 3416-3431.
- [35] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [36] Seydel, R., *Practical Bifurcation and Stability Analysis, From Equilibrium to Chaos*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [37] Zou, Y., Küpper, T. *Generalized Hopf bifurcation emanated from a corner for piecewise smooth planar systems*, Nonlinear Analysis, **62** (1) (2005), 1-17.
- [38] Zou, Y., Küpper, T., *Generalized Hopf bifurcation for non-smooth planar dynamical systems: the corner case*, Northeast. Math. J., **17** (4) (2001), 383-386.
- [39] Zou, Y., Küpper, T. *Hopf bifurcation for non-smooth planar dynamical systems*, Northeast. Math. J., **17** (3) (2001), 261-264.
- [40] Zou, Y., Küpper, T., Beyn, W.-J., *Generalized Hopf bifurcation for non-smooth planar dynamical systems*, Technical Report, University Cologne, 2003.