Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Apresentações Profinitas

por

Vagner Rodrigues de Bessa

Brasília
2007

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo de apresentações de grupos na classe de grupos profinitos. Em particular, três problemas básicos formulados por Gruenberg em [2], sobre apresentações de grupos finitos, serão reformulados e resolvidos na categoria de grupos profinitos. Este estudo é baseado no artigo [4] de A. Lubotzky.

Palavras-Chave: Grupos Profinitos; apresentações profinitas; deficiência de grupos profinitos.

Abstract

The objective of this work is the study of group presentations in the class of pro-finite groups. Three basic problems on presentations of finite groups posed by Gruenberg in [2] are reformulated and resolved in the category of pro-finite groups. This study is based in the paper [4], due to A. Lubotzky.

Keywords: Pro-finite groups; pro-finite presentations; deficiency of pro-finite groups.

Introdução

Seja G um grupo. Considere (P) uma apresentação de G, isto é,

$$(P) \qquad\qquad 1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

uma seqüência exata onde F é um grupo livre. Escrevemos $d(F)$ para representar o número mínimo de geradores de F e $d_F(R)$ o número mínimo de geradores de R como subgrupo normal de F. Em [2] Gruenberg apresenta um estudo sistemático da teoria de apresentações de um grupo discreto G (principalmente sobre grupos finitos) e apresenta três problemas básicos:

Problema 1. Para $i = 1, 2$, considere as seqüências exatas

$$1 \longrightarrow R_i \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

onde F é um grupo livre, então $d_F(R_1) = d_F(R_2)$?

Problema 2. Seja $r(G)$ o número mínimo de relações necessárias para definir G, isto é, $r(G) := min\{d_F(R) | F/R = G$, onde F é um grupo livre finitamente gerado $\}$. Será que $r(G)$ realiza uma apresentação mínima (isto é, uma tal que $d(F) = d(G)$)?

Problema 3. Será que $d_F(R) - d(F)$ independe da apresentação $G = F/R$ e portanto é invariante sobre G?

Claro que uma resposta afirmativa para a terceira questão implicaria também uma resposta afirmativa para as duas primeiras. No entanto as respostas para as três questões quando consideramos G um grupo finito, ainda é um problema em aberto. Em [4] Lubotzky responde estas questões para a classe dos grupos profinitos. Nosso trabalho é baseado neste artigo, e foi dividido em três Capítulos.

No primeiro Capítulo tratamos de grupos pro-$\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é a classe dos p-grupos finitos, grupos solúveis finitos e grupos finitos. Aqui são apresentados conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer de nossa dissertação. No Capítulo 2 fazemos uma abordagem de apresentações profinitas e grupos pro-$\mathcal{C}$ projetivos, além de demonstrarmos o importante Lema de Gaschütz, o qual será utilizado para responder aos dois primeiros problemas reformulados para a classe profinita. No Capítulo 3 introduzimos o conceito de módulos profinitos e anel de grupo completo. Então provamos importantes resultados que permitirão responder ao terceiro problema, após a devida reformulação.

Referências Bibliográficas

[1] John A. Beachy , *Introductory Lectures on Rings and Modules*, London Mathematical Society student texts;47, Cambridge, 1999.

[2] K.W.Gruenberg, *Relation Modules of Finite Groups* , CBMS Lecture Notes, Vol.25, American Mathematic Society, Providence, RI, 1976.

[3] D.L. Johnson, *Topics in the Theory of Group Presentations*, Cambridge University Press, 1980.

[4] A. Lubotzky, *Pro-finite Presentations*, J. Algebra 242, 672-690, 2001.

[5] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[6] J.S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2th edn., Springer, 1995.

[7] J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th edn., Speinger-Verlag, New York, 1995.

[8] J.S. Wilson, *Profinite Groups*, Clarendon Press, New York, 1998.