

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ONDAS GRAVITACIONAIS, EFEITO MEMÓRIA  
E O TELEPARALELISMO EQUIVALENTE  
À RELATIVIDADE GERAL**

**Fernando Lessa Carneiro**

**Brasília, fevereiro de 2018**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

Instituto de Física



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ONDAS GRAVITACIONAIS, EFEITO MEMÓRIA  
E O TELEPARALELISMO EQUIVALENTE  
À RELATIVIDADE GERAL**

**Fernando Lessa Carneiro**

*Dissertação submetida ao Instituto de Física  
como requisito parcial para obtenção  
do grau de Mestre em Física*

## Agradecimentos

*Gostaria de deixar aqui meus agradecimentos a todos que colaboraram com meu trabalho e com o desenvolvimento do mesmo. Entre tantos, cujas pequenas contribuições se tornaram um todo e infelizmente não tenho como citar a todos, gostaria de agradecer em especial ao professor Francisco pela tarefa de ensinar-me as teorias da gravitação desde o princípio e que mesmo com o jeito mais calado, contribuiu para as faladas do meu tirocínio; e em especial pela paciência em me guiar nesses últimos momentos para a elaboração desse trabalho escrito, pelas incontáveis leituras e disposição para os ajustes e análises.*

*Estendo também tais agradecimentos ao professor Maluf, que desde meus tempos de graduação atuou como um mentor para mim e me fez despertar o interesse na área, além dos diversos conselhos sobre os mais diversos assuntos. Ao professor Sérgio pelas conversas sobre física, mesmo que as sobre política dominassem o cenário.*

*No âmbito pessoal ao meu pai Marcelo pelos conselhos e pela sempre serenidade, à minha mãe Josane por sempre cuidar de mim muito além das obrigações e à minha noiva Bruna que nesses últimos dois anos foi como uma parte de mim. Entre tantos outros agradeço ao meu amigo David, que apesar de áreas tão distintas tornou-se um grande amigo e ajudou-me muito em apoio e conselhos. Por último, mas não menos importante, aos milhões de contribuintes brasileiros pelo apoio financeiro ao longo desse mestrado. Et ad infinitum.*

*A todos esses e aos os demais pelas produtivas conversas e pela experiência transmitida à mim, que como dito pelo filho de Vênus em outrora, é a professora de todas as coisas. Seguimos agora rumo Idos de Março pelos caminhos da natureza...*

*"SED FORTVNA QVAE PLVRIMVM POTEST CVM IN RELIQVIS REBVS TVM  
PRAECIPVE IN BELLO PARVIS MOMENTIS MAGNA RERV  
COMMVTATIONES EFFICIT VT TVM ACCIDIT."CAIVS IVLIVS CAESAR.*

*Fernando Lessa Carneiro*

---

## RESUMO

Neste trabalho analisaremos sobre quais condições as ondas gravitacionais podem alterar o estado cinemático de uma partícula livre de forma permanente ou não. Inicialmente, faremos uma abordagem envolvendo as ondas gravitacionais lineares. Em seguida, consideraremos as ondas gravitacionais não-lineares. Mostraremos que, ao contrário das ondas gravitacionais lineares, as ondas gravitacionais não-lineares transportam energia, momento e momento angular. Dependendo das condições iniciais de uma partícula livre na presença das ondas gravitacionais não-lineares, a energia cinética da partícula poderá ser alterada de forma permanente ou não. Portanto, as ondas gravitacionais não-lineares podem transmitir algum tipo de efeito permanente para a partícula, chamado efeito memória.

---

## ABSTRACT

In this work we will examine on what conditions the gravitational waves can change the kinematic state of a free particle on a permanent way or not. Initially, we will make an approach involving linear gravitational waves. Then, we will consider the non-linear gravitational waves. We will show that, unlike the linear gravitational waves, the non-linear gravitational waves carry energy, momentum and angular momentum. Depending on the initial conditions of a free particle in the presence of non-linear gravitational waves, your kinetic energy can be changed permanently or not. Therefore, non-linear gravitational waves may transmit some sort of permanent effect to the particle, called memory effect.

# SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b> .....   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>ONDAS ELETROMAGNÉTICAS E RELATIVIDADE GERAL</b> .....                | <b>3</b>  |
| 2.1      | ONDAS ELETROMAGNÉTICAS .....  | 3         |
| 2.2      | GEOMETRIA RIEMANNIANA .....   | 7         |
| 2.3      | GRAVIDADE COMO UM EFEITO DA CURVATURA DO ESPAÇO-TEMPO .....             | 11        |
| 2.4      | TEORIA LINEAR E ENERGIA DO CAMPO GRAVITACIONAL .....                    | 14        |
| <b>3</b> | <b>EQUIVALENTE TELEPARALELO DA RELATIVIDADE GERAL</b> .....             | <b>22</b> |
| 3.1      | CAMPO DE TÉTRADAS E SISTEMAS DE REFERÊNCIA .....                        | 22        |
| 3.2      | EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO TEGR .....                                     | 25        |
| 3.3      | ENERGIA-MOMENTO E MOMENTO ANGULAR NO TEGR .....                         | 28        |
| <b>4</b> | <b>ONDAS GRAVITACIONAIS</b> .....                                       | <b>31</b> |
| 4.1      | ONDAS GRAVITACIONAIS NA FORMA LINEAR .....                              | 31        |
| 4.2      | PP-WAVES .....  | 37        |
| 4.3      | ENERGIA CINÉTICA DE PARTÍCULAS NA PRESENÇA DE ONDAS PLANAS EXATAS ..... | 42        |
| 4.4      | REGIÕES DE ACRÉSCIMO E DECRÉSCIMO DA ENERGIA CINÉTICA .....             | 48        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÕES</b> .....   | <b>52</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....                                 | <b>54</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

As equações de Maxwell para o eletromagnetismo quando resolvidas na ausência de fontes (cargas e correntes elétricas) conduzem a soluções ondulatórias para os campos elétrico e magnético, respectivamente. Isso indica que as ondas eletromagnéticas viajam no vácuo com a velocidade da luz, sugerindo que a própria luz seja uma onda eletromagnética [1], cuja confirmação experimental fora feita por Heinrich Hertz em (1886-1888) [2]. As semelhanças entre o eletromagnetismo e a teoria de Einstein para a gravitação na forma linear motivaram há muito a busca de previsões semelhantes entre essas duas teorias. O próprio Einstein considerou a possibilidade da existência de ondas gravitacionais em (1918) [3] e tal consideração teve prosseguimento por outros pesquisadores nos anos seguintes [4]. As ondas gravitacionais são perturbações gravitacionais que viajam no espaço-tempo com a velocidade da luz, e assim como no caso do eletromagnetismo, é de se esperar que tais ondas transportem, energia, momento e momento angular. Nesse sentido, estas ondas são passivas de alterarem a configuração de um sistema de forma temporária e/ou permanente.

A histórias das ondas gravitacionais segue há mais de um século no reino teórico e há décadas no reino experimental. No contexto experimental a discussão começou a se tornar mais intensa após a primeira observação das interações gravitacionais entre um pulsar e outro objeto massivo publicada em um trabalho em 1975 [5], cujas análises posteriores e observações da perda de energia por esse sistema indicaram a existência de ondas gravitacionais. Após várias tentativas de detecções de ondas gravitacionais em 2015 ocorreu uma suposta detecção das mesmas de maneira independente por dois detectores do LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) cujo resultado publicado no ano seguinte [6] indicou uma variação do comprimento de um dos braços de um interferômetro de Michelson modificado devido à passagem de uma onda gravitacional, que comparado com modelos numéricos teóricos, sugere a emissão de ondas gravitacionais devido à colisão de dois buracos negros em um sistema binário dos mesmos. Tal detecção, a princípio, corrobora a previsão das equações de Einstein em sua forma linearizada.

Neste trabalho faremos uma abordagem acerca das ondas gravitacionais e seus efeitos sobre partículas. Tal abordagem será feita tanto no contexto da Relatividade Geral (RG), onde o campo gravitacional é descrito em termos do tensor métrico, quanto no contexto do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR) onde, o campo gravitacional é descrito em termos de tetradas

autoparalelas. Em particular analisaremos em que condições as ondas gravitacionais, soluções exatas ou não das equações de Einstein, podem alterar o estado cinemático de uma partícula. Faremos isso analisando a energia cinética da partícula antes, durante e após a passagem da onda.

Iniciaremos o capítulo 2 apresentando um resumo sobre as ondas eletromagnéticas e em seguida, faremos uma breve abordagem sobre elementos de geometria diferencial, para em seguida, apresentarmos, por meio de um princípio variacional, a teoria da gravitação proposta por Einstein em (1915). Em seguida, deduziremos as equações de Einstein na sua forma linearizada, que prevêem a existência de ondas gravitacionais da mesma forma que a teoria do eletromagnetismo de Maxwell prevê a existência de ondas eletromagnéticas. No final do capítulo 2, faremos uma breve abordagem acerca da energia do campo gravitacional para soluções das equações de Einstein na forma linear.

No capítulo 3 apresentaremos a teoria de Einstein descrita em termos de um formalismo que envolve campos de tetradas. Este formalismo, conhecido como Teleparalelo Equivalente à Relatividade Geral, fornece equações de campo em termos das tetradas equivalentes às equações de Einstein em termos do tensor métrico. Em seguida, ainda no contexto do TEGR, apresentaremos expressões para a energia, o momento e o momento angular do campo gravitacional na presença ou não de matéria.

No capítulo 4, estudaremos as propriedades das ondas gravitacionais. Mostraremos que as ondas gravitacionais não linearizadas com polarização + não transportam energia, momento e nem momento angular. Esta análise nos motivou a estudar outra classe de ondas gravitacionais que são soluções exatas das equações de Einstein. Esta classe de ondas, soluções exatas das equações de Einstein, são chamadas de PP-Waves (*plane-fronted gravitational waves with parallel rays*) e que, no vácuo, sem expansão e sem rotação, são chamadas de ondas gravitacionais de frente plana [7]. No caso destas ondas, estudaremos a questão do chamado efeito memória, i.e., em que condições e como estas ondas podem alterar, de forma permanente ou não, a configuração do estado cinemático de uma partícula [8]. Ainda no capítulo 4, mostraremos que no contexto do TEGR as PP-Waves transportam energia, momento e momento angular e que do ponto de vista de um observador adaptado a um conjunto de tetradas estáticas existe uma quantidade conservada associada à partícula que varia apenas durante a passagem da onda. Mostraremos que a energia cinética associada à partícula pode ser alterada de forma permanente, a depender das condições iniciais. Finalmente, no capítulo 5 apresentaremos nossas conclusões.

Notação: nesta dissertação os índices latinos do meio do alfabeto em diante,  $i, j, k, \dots$  representam índices do tipo espaço e assumem os valores 1, 2, 3. Os índices gregos e latinos do início do alfabeto são índices do espaço-tempo e do grupo  $SO(3, 1)$ , respectivamente, que variam de 0 a 3 ou seja,  $\alpha = \{0, i\}$  e  $a = \{(0), (i)\}$ . A assinatura utilizada será  $(-1, 1, 1, 1)$ . A menos que se diga o contrário, adotaremos a convenção de Einstein para a somatória e unidades onde as constantes  $c = G = 1$ .

## Capítulo 2

# Ondas Eletromagnéticas e Relatividade Geral

Neste capítulo apresentamos um breve resumo acerca das ondas eletromagnéticas e da maneira como a linearidade das equações de Maxwell leva a certas propriedades para as mesmas, e em seguida, utilizamos tais análises para comparar às previsões da teoria da gravitação de Einstein em sua forma linear. Faremos um breve resumo dos aspectos de geometria diferencial, necessários para a compreensão da teoria da gravitação de Einstein. As equações de Einstein serão então deduzidas pelo método utilizado por Hilbert, ou seja, por um princípio variacional. Por fim, deduziremos as expressões da teoria da gravitação na sua forma linear e alguns pseudo-tensores de energia-momento para o campo gravitacional.

### 2.1 Ondas eletromagnéticas

As equações de campo eletromagnéticas (também chamadas de equações de Maxwell) são equações tensoriais definidas sobre o espaço-tempo de Minkowski [9]. Tais equações podem admitir soluções não nulas no vácuo e na ausência de fontes. Um campo eletromagnético no vácuo na ausência de cargas e correntes toma o nome de ondas eletromagnéticas [10]. As equações para o campo eletromagnético no vácuo [11] podem ser escritas em unidades do SI como

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 , \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ,\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  e  $c$  representam os campos elétrico, magnético e a velocidade da luz, respectivamente.

Para mostrarmos que a solução das equações acima, na ausência de fontes, representa uma onda, começamos usando o fato do divergente do campo magnético ser nulo. Isso aliado ao fato

do divergente do rotacional de qualquer vetor ser nulo, nos permite escrever o campo magnético como o rotacional de um vetor  $\vec{A}$  que é chamado de potencial vetor, i.e.,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} .$$

De maneira análoga podemos utilizar a equação do rotacional do campo elétrico e escrevermos o campo elétrico em função do potencial vetor  $\vec{A}$  como

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) .$$

Entretanto, pela equação do divergente do campo elétrico, podemos escrever o campo elétrico como menos o gradiente de um campo escalar  $\phi$ , que por convenção possui o sinal negativo, uma vez que o rotacional do gradiente de um escalar qualquer é nulo. Dessa forma, o campo elétrico fica escrito em função dos potenciais como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} .$$

Agora analisaremos as equações de Maxwell na ausência de fontes (uma aproximação onde consideramos a fonte muito longe do ponto onde estamos analisando o campo), i.e., tomando  $\rho = 0 = \vec{J}$ . Definimos o quadri-potencial como

$$\mathbf{A} \equiv (\phi, \vec{A})$$

e o chamado tensor de Faraday  $\mathbf{F}$  cujas componentes são dadas por

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu .$$

Usando o fato de que  $x_0 = ct$ , as equações de Maxwell (2.1), na ausência de cargas e correntes, se tornam

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

ético. Como as equações de movimento descrevem toda a física dos campos presentes, qualquer mudança no potencial que não altere as equações de campo descreve a mesma situação física. Temos então uma chamada liberdade de calibre na escolha do quadri-potencial. Usando tal liberdade, podemos adicionar um termo ao quadri-potencial de forma que tenhamos um novo potencial  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \psi$ , onde  $\psi$  é um campo escalar, que deixe as equações de campo invariantes

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0,$$

onde os cochetes indicam antissimetrização. Com isso, o quadri-potencial deve satisfazer

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = \partial_\nu \partial^\mu A_\mu .$$

Temos agora uma expressão covariante para o quadri-potencial  $\mathbf{A}$ .

Somente as derivadas do potencial entram nas equações de campo, que nada mais são do que equações de movimento para o campo eletromagnético, onde  $\psi$  é um campo escalar.

Com essa liberdade adicional na escolha do quadri-potencial  $\mathbf{A}$ , podemos tomar  $\partial^\mu A_\mu = 0$  sem perda de generalidade e tal escolha é chamada calibre de Lorentz. Fazendo

$$\partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \psi = 0,$$

podemos escrever as equações de campo como

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0, \quad (2.2)$$

desde que o campo escalar  $\psi$  satisfaça  $\partial^\mu \partial_\mu \psi = 0$ . A equação diferencial parcial acima [12], cuja solução é uma exponencial complexa desceve uma onda que se propaga com velocidade da luz (análise ao final da seção).

A partir desse ponto tomamos a velocidade da luz como sendo a unidade e na notação quadri-vetorial podemos escrever o quadri-potencial  $\mathbf{A}$  que é solução da equação (2.2) como [9]

$$A^\mu = \text{Re} \left( Q^\mu e^{ik_\nu x^\nu} \right), \quad (2.3)$$

onde  $Q^\mu$  são as amplitudes do quadri-potencial, que fornecerrão a polarização da onda eletromagnética e possui, a princípio, quatro componentes independentes, sendo  $k^\mu$  o quadrivetor de onda cujas componentes espaciais indicam a direção de propagação da onda.

Aplicando a equação de onda (2.2) em  $A^\mu$  dado pela equação (2.3) obtemos uma relação para  $k^\mu$  ou seja,

$$\partial_\mu \partial^\mu \text{Re} \left( Q^\nu e^{ik_\rho x^\rho} \right) = 0 \Rightarrow k_\mu k^\mu = 0.$$

Podemos então ver que o vetor de onda  $k^\mu$  é um vetor nulo. Aplicando agora o calibre de Lorentz à equação (2.3), teremos

$$\partial_\mu \text{Re} \left( Q^\mu e^{ik_\rho x^\rho} \right) = 0 \Rightarrow Q^\mu k_\mu = 0. \quad (2.4)$$

Dessa forma, reduzimos o número de componentes independentes de  $Q^\mu$  para três, o que fisicamente se resume ao fato de não termos componentes de polarização na direção de propagação da onda.

Daqui em diante, para efeito de simplicidade, consideraremos a onda como sendo plana, ou seja, que só depende de uma coordenada espacial e do tempo [10]. Escolhendo a coordenada espacial como sendo  $z$ , o que significa que a onda se propaga nessa direção, teremos  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ . Usando a equação (2.4), obtemos

$$Q^0(-k) + Q^3(k) = 0 \Rightarrow Q^0 = Q^3.$$

A direção de propagação de uma onda eletromagnética é definida pela direção do campo elétrico [13] e, sendo as equações do campo eletromagnético lineares, usando o calibre de Lorentz podemos escrever a solução geral como uma combinação linear de dois vetores ortogonais de polarização. A solução para o campo escalar  $\psi$  é tal que

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi = 0 \Rightarrow \psi = \epsilon e^{ik_\rho x^\rho},$$

e  $\epsilon = \text{constante}$  é a amplitude do campo escalar  $\psi$ . Para mantermos a invariância da teoria por calibre, pela equação (2.4)

$$\begin{aligned} \partial_\mu A'^\mu &= \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \left( \epsilon e^{ik_\rho x^\rho} \right) \Rightarrow Q'^\mu k_\mu = Q^\mu k_\mu + i\epsilon k^\mu k_\mu \\ &\Rightarrow Q'^\mu = Q^\mu + i\epsilon k^\mu. \end{aligned}$$

Logo, as componentes para a onda propagando na direção  $z$  serão

$$Q'^0 = Q^0 + i\epsilon k, \quad Q'^1 = Q^1, \quad Q'^2 = Q^2, \quad Q'^3 = Q'^0.$$

Devido a liberdade na escolha da função de calibre, podemos escolher

$$\epsilon = \frac{iQ^0}{k},$$

e assim,  $Q'^0 = Q'^3 = 0$ , logo ficamos com apenas duas polarizações lineares  $e_1^\mu = (0, 0, 1, 0)$  e  $e_2^\mu = (0, 1, 0, 0)$ . Dessa forma, a amplitude do quadri-potencial  $\mathbf{A}$  pode ser escrita como a combinação linear desses dois vetores de polarização. Variando as constantes complexas  $a$  e  $b$  que multiplicam esses vetores, podemos escrever o quadrivetor amplitude de qualquer onda eletromagnética se propagando ao longo do eixo  $z$  como

$$Q^\mu = ae_1^\mu + be_2^\mu.$$

O fato de podermos escrever uma onda eletromagnética como a combinação linear de apenas duas polarizações só é possível devido às equações de campo eletromagnéticas serem lineares [9]. Se as equações de Maxwell não fossem lineares, como é o caso das equações de Einstein, não seria possível reduzir e simplificar tanto a descrição das ondas eletromagnéticas.

Outro fato acerca das equações de campo eletromagnéticas é que, para uma onda plana, podemos escrever as equações de campo para uma componente  $f$  qualquer do campo elétrico (ou do magnético) como

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad (2.5)$$

ou ainda

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) f = 0.$$

Definindo as variáveis

$$u \equiv z - t, \quad (2.6)$$

$$v \equiv z + t, \quad (2.7)$$

podemos reescrever as variáveis antigas como

$$t = \frac{u + v}{2},$$

$$z = \frac{u - v}{2}.$$

Logo, a equação (2.5) descrita em função dessas novas variáveis assume a forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0,$$

cujas soluções são [10]

$$f = f_1(u) + f_2(v).$$

No caso onde  $f_2(v) = 0$ , se focamos nossa análise apenas em um plano  $z = \text{constante}$ , veremos que o campo varia com o tempo neste plano. Ao fixarmos um tempo também, o campo terá o mesmo

valor para todos os tempos e posições ligados pela relação  $z - t = \text{constante} \Rightarrow z = \text{constante} + t$ . Então, para  $t = 0$  o campo tem um valor no ponto  $z(t = 0)$ , e após decorrido um tempo  $t$  e uma distância  $z$ , o campo assumirá o mesmo valor. A partir desses fatos, concluímos que todos os valores do campo eletromagnético se propagam ao longo do eixo  $z$  com a velocidade da luz.

## 2.2 Geometria Riemanniana

O campo gravitacional é fundamentalmente diferente do campo eletromagnético, que é uma teoria tensorial que tem o espaço-tempo de Minkowski como espaço de referência, como veremos na próxima seção. Lidarmos com a gravidade requer que tenhamos que ir além do conceito de espaço que tínhamos na Relatividade Especial, não podemos mais tomar o espaço de Minkowski como sendo absoluto. O espaço-tempo de Minkowski é um espaço quadridimensional com uma métrica plana bem definida mas, na Relatividade Geral, vamos abandonar o conceito de espaço-tempo plano e introduzir o conceito de espaço-tempo curvo de quatro dimensões.

Começaremos definindo uma variedade como um espaço de dimensão  $N$  arbitrária e cuja distância  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  entre dois pontos muito próximos é dada em termos de um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , não tendo a necessidade de ser a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , i.e., a linha que liga dois pontos nesse espaço não necessariamente é uma reta. Os tensores são quantidades independentes de sistemas de coordenadas logo, podemos lidar com a existência de vetores, escalares e outros tensores de ordem mais alta, em qualquer espaço-tempo, da mesma forma que no espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, as leis físicas geralmente são apresentadas por equações diferenciais.

Ao trabalharmos com espaços curvos, devemos generalizar nosso conceito de derivada. Quando queremos derivar um vetor em um espaço-tempo plano, não enfrentamos problemas, uma vez que o espaço tangente é o mesmo para dois pontos próximos. Vejamos o que ocorre em uma variedade qualquer: seja  $P$  um ponto qualquer sobre uma variedade  $M$ , podemos definir um vetor tangente  $\hat{e}_\mu(P)$  à variedade nesse ponto. Queremos calcular uma derivada entre um ponto infinitesimalmente próximo  $Q$ , onde temos um vetor tangente de base  $\hat{e}_\mu(Q)$ , como na figura (2.1).

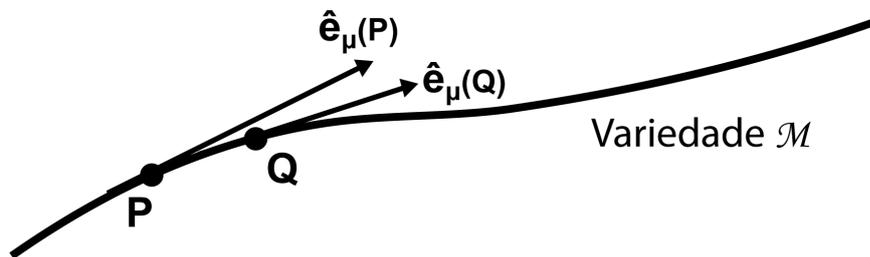


Figura 2.1: Pontos próximos em uma variedade  $M$ .

Em um sistema de coordenadas  $x^\nu$  baseado em  $P$ , teremos as coordenadas de  $Q$  como sendo  $x^\nu + \delta x^\nu$ . A derivada desse vetor de base será

$$\frac{\partial \hat{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{\delta \hat{e}_\mu}{\delta x^\nu}.$$

Há um problema no cálculo dessa derivada, ou seja, o vetor tangente em  $Q$  não está no mesmo espaço tangente que o vetor em  $P$ . Para contornarmos esse problema, consideramos uma projeção de  $\hat{e}_\mu(Q)$  no espaço tangente de  $P$  e temos então, uma combinação linear das bases do espaço tangente em  $P$  [9]

$$\frac{\partial \hat{e}_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu \hat{e}_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \hat{e}_\gamma,$$

onde os coeficientes  $\Gamma_{\mu\nu}^\gamma$  são conexões afim que dependem dos pontos do espaço-tempo em questão. Dessa forma, com o auxílio das conexões podemos calcular a derivada de um quadrivetor  $\mathbf{A} = A^\mu \hat{e}_\mu$  qualquer i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^\nu} &= \partial_\nu (A^\mu \hat{e}_\mu) = (\partial_\nu A^\mu) \hat{e}_\mu + A^\mu (\partial_\nu \hat{e}_\mu) \\ &= (\partial_\nu A^\mu) \hat{e}_\mu + A^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \hat{e}_\gamma \\ &= (\partial_\nu A^\mu) \hat{e}_\mu + A^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \hat{e}_\mu \\ &= (\partial_\nu A^\mu + A^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\mu) \hat{e}_\mu \\ &= (\nabla_\nu A^\mu) \hat{e}_\mu, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde definimos a derivada covariante das componentes contravariantes  $A^\mu$  de um quadrivetor  $\mathbf{A}$  qualquer como

$$(\nabla_\nu A^\mu) \equiv \partial_\nu A^\mu + A^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\mu.$$

Definindo o dual  $\hat{e}^\mu$  do vetor de base  $\hat{e}_\mu$  tal que

$$\hat{e}^\mu \cdot \hat{e}_\mu = \delta_\mu^\nu,$$

segue que

$$\partial_\nu \hat{e}^\mu = -\Gamma_{\gamma\nu}^\mu \hat{e}^\gamma.$$

Com isso, a derivada covariante das componentes covariantes  $A_\mu$  do quadrivetor  $\mathbf{A}$  são dadas por

$$(\nabla_\nu A_\mu) = \partial_\nu A_\mu - A_\gamma \Gamma_{\nu\mu}^\gamma. \tag{2.9}$$

Tanto  $\nabla_\nu A_\mu$  quanto  $\nabla_\nu A^\mu$  transformam-se como tensores [9]. Inclusive, esse fato pode ser utilizado para definirmos a conexão, uma vez que as equações físicas são equações tensoriais, logo, devemos encontrar uma maneira de definir uma derivada que se transforme como um tensor sob mudança de coordenadas. Vejamos:

$$\partial_{\beta'} A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \partial_\beta A^\alpha + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha,$$

com isso, podemos então ver que a derivada comum das componentes de um vetor não se transforma tensorialmente, uma vez que um tensor  $T^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\lambda}$  se transforma como [14]

$$T^{\mu'\dots\nu'}{}_{\rho'\dots\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \dots \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} \dots \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} T^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\lambda}.$$

Devemos então adicionar um campo não tensorial  $\Gamma_{\nu\mu}^\gamma$  chamado de conexão que se transforma como [14]

$$\Gamma_{\mu'\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}. \tag{2.10}$$

As quantidades que satisfazem a regra de transformação (2.10) são chamadas de conexão afim [14].

Retornando aos vetores de base, podemos definir um tensor métrico como  $g_{\mu\nu} \equiv \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \hat{e}_\nu \cdot \hat{e}_\mu = g_{\nu\mu}$ , cuja a derivada covariante é dada por

$$\begin{aligned}\nabla_\beta g_{\mu\nu} &= \nabla_\beta(\hat{e}_\mu \hat{e}_\nu) = (\nabla_\beta \hat{e}_\mu) \hat{e}_\nu + (\nabla_\beta \hat{e}_\nu) \hat{e}_\mu \\ &= \partial_\beta(\hat{e}_\mu \hat{e}_\nu) - \Gamma_{\mu\beta}^\gamma g_{\gamma\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^\gamma g_{\mu\gamma}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Se a derivada covariante do tensor  $g_{\mu\nu}$  for nula, estamos garantindo seu transporte paralelo ao longo da variedade. Neste caso  $g_{\mu\nu}$  será constante com relação à derivada covariante. Quando o tensor  $g_{\mu\nu}$  satisfaz esta condição e é composto pelos vetores de base, chamamos esse tensor de conexão métrica, e ele descreve as propriedades geométricas do espaço em questão, sendo que no caso da Relatividade Geral, descreve o campo gravitacional.

Definimos as componentes contravariantes do tensor métrico a partir da relação

$$g^{\mu\rho} g_{\nu\rho} = \delta_\nu^\mu.$$

que nos leva à

$$g^{\mu\nu} = \hat{e}^\mu \hat{e}^\nu.$$

Usando o fato da derivada covariante de  $g_{\mu\nu}$  ser nula, podemos escrever a derivada parcial de  $g_{\mu\nu}$  usando a equação (2.11) e permutar seus índices ciclicamente

$$\begin{aligned}\partial_\beta g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\beta}^\gamma g_{\gamma\nu} + \Gamma_{\nu\beta}^\gamma g_{\mu\gamma}, \\ \partial_\nu g_{\beta\mu} &= \Gamma_{\nu\mu}^\gamma g_{\beta\gamma} + \Gamma_{\nu\beta}^\gamma g_{\mu\gamma}, \\ \partial_\mu g_{\nu\beta} &= \Gamma_{\mu\beta}^\gamma g_{\nu\gamma} + \Gamma_{\nu\mu}^\gamma g_{\beta\gamma}.\end{aligned}$$

Subtraindo as duas últimas equações da primeira e assumindo que a torção  $T^\gamma{}_{\nu\mu} \equiv \Gamma_{\nu\mu}^\gamma - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma$  da variedade é nula, teremos a chamada conexão de Christoffel

$$\bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}).\tag{2.12}$$

A conexão não é uma grandeza tensorial, logo seu valor depende do sistema de coordenadas que estamos usando. Um espaço plano pode ter conexão não nula a depender do sistema de coordenadas que utilizarmos para descrevê-lo, i.e., a existência de uma conexão não nula não implica de forma alguma que o espaço seja curvo.

Ao descrevermos uma variedade plana com coordenadas Cartesianas, a conexão será nula. Sendo assim, se a variedade for Euclidiana localmente centrada em um ponto  $P$ , ou seja, se ela for plana no ponto  $P$ , podemos expressar as coordenadas de  $P$  em coordenadas Cartesianas, de forma que a derivada covariante fica

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu.$$

A equação acima é uma equação tensorial, logo, se ela é válida em um sistema de coordenadas ela é válida em qualquer sistema de coordenadas. Sendo assim, em uma região da variedade sem curvatura as derivadas covariantes comutam entre si, i.e.,

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu = \partial_\alpha \partial_\beta A_\mu = \partial_\beta \partial_\alpha A_\mu = \nabla_\beta \nabla_\alpha A_\mu$$

O fato da conexão não ser nula não garante que o espaço seja curvo entretanto, para um espaço plano temos que  $\partial_{[\alpha}\partial_{\beta]} \equiv \partial_\alpha\partial_\beta - \partial_\beta\partial_\alpha = 0$ . Se a variedade possuir curvatura não nula teremos

$$\begin{aligned}\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}A_\mu &= \nabla_\alpha(\partial_\beta A_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma A_\gamma) - \nabla_\beta(\partial_\alpha A_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\gamma A_\gamma) \\ &= \partial_\alpha(\partial_\beta A_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma A_\gamma) - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\rho(\partial_\beta A_\rho - \bar{\Gamma}_{\rho\beta}^\gamma A_\gamma) - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho(\partial_\rho A_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\gamma A_\gamma) \\ &\quad - \partial_\beta(\partial_\alpha A_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\gamma A_\gamma) + \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho(\partial_\alpha A_\rho - \bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\gamma A_\gamma) + \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\rho(\partial_\rho A_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\gamma A_\gamma) \\ &= \partial_\beta\bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\gamma A_\gamma - \partial_\alpha\bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma A_\gamma + \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho\beta}^\gamma A_\gamma - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\gamma A_\gamma \\ &= R_{\mu\beta\alpha}^\gamma A_\gamma,\end{aligned}$$

assim definimos o tensor de curvatura como

$$R_{\mu\beta\alpha}^\gamma \equiv \partial_\beta\bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\gamma - \partial_\alpha\bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma + \bar{\Gamma}_{\mu\alpha}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho\beta}^\gamma - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\rho\bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\gamma, \quad (2.13)$$

onde  $[\alpha\beta]$  representa a antissimetriação nos índices  $\alpha$  e  $\beta$ . Desta forma, temos então uma maneira de verificar se a variedade possui curvatura não nula ou se ela está apenas descrita por um sistema de coordenadas estranho. Se o tensor de curvatura for nulo, podemos dizer que a variedade  $M$  é plana.

Vejam agora algumas propriedades de simetria do tensor de curvatura

$$\begin{aligned}R_{\alpha[\beta\mu\nu]} &= 0; \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu}; \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\beta\alpha\mu\nu}.\end{aligned}$$

Usando  $g^{\alpha\nu}$  podemos contrair dois índices em  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  e obteremos o tensor de Ricci

$$R_{\beta\mu} \equiv R_{\beta\mu\alpha}^\alpha, \quad (2.14)$$

e contraindo novamente  $R_{\beta\mu}$ , obtemos o chamado escalar de curvatura  $R$  definido como

$$R_\alpha^\alpha = R_\alpha^\alpha \equiv R.$$

Equações tensoriais são totalmente covariantes, i.e., não dependem de sistemas de coordenadas que estamos utilizando para descrevê-las. Em um ponto  $P$  de uma variedade, sempre podemos escolher um sistema de coordenadas no qual as primeiras derivadas do tensor métrico se anulam, mas não as de ordem mais alta. Tais sistemas de coordenadas são chamados de sistemas de coordenadas locais geodésicas.

Podemos escrever o tensor de curvatura em coordenadas locais geodésicas tomando as conexões como nulas, mas não suas derivadas. Uma vez que a conexão de Christoffel é composta apenas pelas primeiras derivadas do tensor métrico, da definição de  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , em um sistema de coordenadas locais geodésicas, segue que

$$\nabla_\rho R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\rho R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\rho(\partial_\mu\bar{\Gamma}_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu\bar{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha),$$

assim, teremos

$$\nabla_\rho R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\rho\partial_\mu\bar{\Gamma}_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\rho\partial_\nu\bar{\Gamma}_{\beta\mu}^\alpha,$$

e permutando ciclicamente  $\rho, \mu, \nu$  obtemos duas outras equações

$$\begin{aligned}\nabla_\nu R^\alpha_{\beta\rho\mu} &= \partial_\nu \partial_\rho \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} - \partial_\nu \partial_\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho}, \\ \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\rho} &= \partial_\mu \partial_\nu \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\rho} - \partial_\mu \partial_\rho \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\nu}.\end{aligned}$$

Somando as três equações acima, temos as chamadas identidades de Bianchi

$$\nabla_\rho R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\rho\mu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\rho} = 0. \quad (2.15)$$

A equação acima foi construída no ponto  $P$  em um sistema coordenadas locais geodésicas mas, por se tratar de uma equação tensorial, ela será válida em qualquer sistema de coordenadas, mantendo a mesma forma acima no caso geral.

Contraindo índices  $\alpha$  e  $\nu$  na equação (2.15), temos

$$\nabla_\rho R^\alpha_{\beta\mu\alpha} + \nabla_\alpha R^\alpha_{\beta\rho\mu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\alpha\rho} = 0.$$

Lembrando que  $R^\alpha_{\beta\mu\alpha} = R_{\beta\mu}$  e usando o fato de que  $R^\alpha_{\beta\alpha\rho} = -R^\alpha_{\beta\rho\alpha}$ , teremos

$$\nabla_\rho R_{\beta\mu} + \nabla_\alpha R^\alpha_{\beta\rho\mu} - \nabla_\mu R_{\beta\rho} = 0,$$

e contraindo  $\beta$  e  $\rho$  segue que

$$\begin{aligned}\nabla_\beta R^\beta_\mu + \nabla_\beta R^\beta_\mu - \nabla_\mu R &= 0 \Rightarrow 2\nabla_\beta R^\beta_\mu - \nabla_\mu R = 2\nabla_\beta R^\beta_\mu - \delta^\beta_\mu \nabla_\beta R = 0 \\ &\Rightarrow \nabla_\beta \left( 2R^\beta_\mu - \delta^\beta_\mu R \right) = 0.\end{aligned} \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.16) por  $g^{\alpha\mu}$  segue que

$$g^{\alpha\mu} \nabla_\beta \left( 2R^\beta_\mu - \delta^\beta_\mu R \right) = 0 \Rightarrow \nabla_\beta \left( 2R^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} R \right) = 0, \quad (2.17)$$

logo obtemos então o chamado tensor de Einstein definido por

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \quad (2.18)$$

Podemos ainda reescrever a equação (2.17) como

$$\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = 0.$$

O resultado apresentado na equação (2.18) será usado na próxima seção para descrevermos a geometria do espaço-tempo a partir de um tensor energia-momento de matéria e radiação.

## 2.3 Gravidade como um efeito da curvatura do espaço-tempo

Conforme exposto na seção 2.1, o campo eletromagnético é descrito sobre um espaço-tempo de referência, e é uma grandeza física que interage com diferentes cargas de formas distintas. O campo gravitacional goza da propriedade de que todos os corpos se movem da mesma maneira em um mesmo campo gravitacional [10], independente de sua carga e até mesmo de sua massa.

Na mecânica Newtoniana temos uma distinção entre as chamadas massa inercial (que representa a resistência de um corpo a ter sua velocidade alterada) e a gravitacional (que representa a atração gravitacional entre dois corpos), sendo que do ponto de vista da teoria, o fato da razão entre essas massas ser a unidade é uma mera coincidência e um resultado experimental [15].

Na teoria da Relatividade Geral as medidas que um observador inercial em um campo gravitacional realiza são equivalentes às medidas que um observador em um referencial não-inercial faria, sendo assim, temos uma relação natural de identidade entre as massas gravitacional e inercial via postulado. Distintamente do eletromagnetismo, o campo gravitacional não existe sobre um espaço de referência, ele é a própria manifestação da geometria do espaço, não havendo então "força" gravitacional no sentido físico da palavra.

Os motivos que levaram Einstein a propor uma correção da gravitação Newtoniana foram diversos, desde observações experimentais sobre o movimento celeste até tentativas de unificar o eletromagnetismo com a gravitação. Entretanto, comentaremos uma pequena incoerência entre a gravitação Newtoniana e a Teoria da Relatividade Especial, proposta por ele em (1905), como justificativa para a nova formulação do efeito gravitacional.

O primeiro postulado da Relatividade Especial diz que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais, logo consideramos duas cargas elétricas de carga  $q$  e massa  $m$  em equilíbrio em um referencial  $S'$ , i.e., de maneira que a força de repulsão elétrica e a de atração gravitacional se anulem pelo princípio da superposição. Um observador  $S$  que se move com velocidade  $\vec{v}$  em relação a  $S'$  medirá uma força eletromagnética diferente, uma vez que pelas transformações de Lorentz do campo eletromagnético surgirá uma força magnética. Entretanto, a força gravitacional Newtoniana medida pelo observador em  $S$  não estará compensando a força eletromagnética, enquanto que para um observador em  $S'$  estará (ver figura 2.2), violando o primeiro postulado da Relatividade Especial.

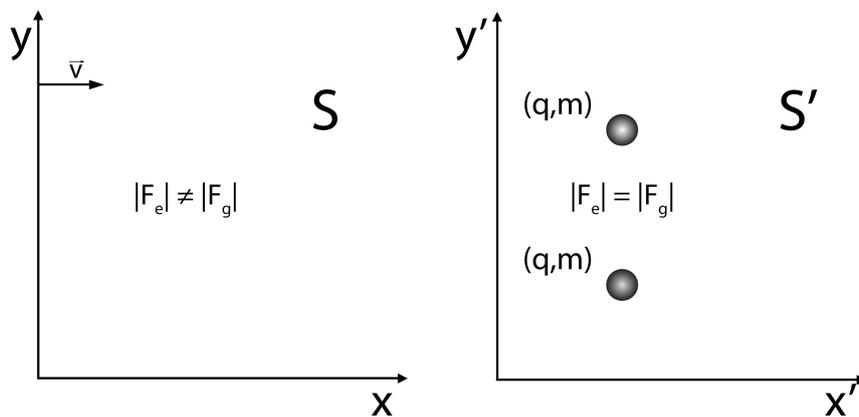


Figura 2.2: Violação do primeiro postulado da R.E.

Independente de argumentações sobre o Princípio da Equivalência e outros fatores, podemos ver com isso que a força gravitacional Newtoniana não está de acordo com a Relatividade Especial. Partindo do suposto da Relatividade Especial estar correta, precisamos encontrar uma nova teoria para explicar a gravitação, ou mesmo complementar a teoria da gravitação Newtoniana além dos

seus limites de validade.

Sendo o efeito gravitacional devido à própria geometria do espaço-tempo, esperamos que propriedades geométricas como a curvatura (no caso da Relatividade Geral), a torção no caso do TEGR ou até mesmo a combinação de ambas (teorias de Einstein-Cartan) descrevam quantitativamente o movimento de partículas em um campo gravitacional. O campo gravitacional pode então ser descrito pelo tensor métrico (Relatividade Geral) ou por tensores de torção no caso do TEGR. Neste capítulo trabalharemos apenas no contexto da Relatividade Geral, i.e., com torção nula.

A ideia de Einstein era que a matéria e radiação presente no espaço, responsável pela deformação do mesmo, seria a causa do desvio da métrica de Minkowski. A dedução de uma expressão que conecte a curvatura do espaço-tempo com a energia da matéria presente no espaço-tempo creditada a Einstein seguiu conceitos mais interessantes e físicos, em especial o fato da derivada covariante do tensor energia momento da matéria e radiação ser nulo [9], o que o torna proporcional ao tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  obtido na seção anterior. Por motivos práticos e por estar mais próximo à dedução das equações do Equivalente Teleparalelo à Relatividade Geral apresentadas no próximo capítulo, adotaremos uma abordagem do princípio variacional, a mesma utilizada por Hilbert .

Escalares são naturalmente invariantes por transformações de Lorentz e para construirmos uma ação que também o seja, termos um escalar como densidade de Lagrangiana é a escolha mais adequada. Nossa densidade de Lagrangiana  $L$  deve estar relacionada à curvatura do espaço-tempo, e o escalar mais simples que podemos construir a partir da curvatura do espaço, é o escalar de curvatura, que é obtido apenas contraindo os índices do tensor de curvatura. A ação deve ser uma invariante da teoria, i.e.,

$$S_g = \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x ,$$

onde definimos  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ .

Ao variarmos a ação em relação à métrica  $g^{\mu\nu}$ , teremos

$$\delta S_g = \int \delta \sqrt{-g} R d^4x + \int \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x + \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x .$$

O tensor de Ricci é um tensor, logo, a variação dele é uma equação tensorial. Então, por questões de simplicidade, podemos obter a variação do tensor de Ricci em coordenadas locais geodésicas e o resultado será válido em qualquer sistema de coordenadas. Desprezando os termos de superfície obtemos, após cálculos breves, que [9]

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^\nu) d^4x = 0 .$$

Já a variação da raiz do determinante da métrica será dada por

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} .$$

Dessa forma, a variação da ação será

$$\delta S_g = \int \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x .$$

Exigindo que a variação da ação seja nula pelo Princípio de Hamilton, teremos no vácuo, equações equivalentes às obtidas por Einstein [16]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

Na presença de matéria (e/ou radiação) teremos presente o termo da ação devido ao tensor energia-momento na forma de variação da ação de matéria (e/ou radiação)  $\delta S_M$ , logo

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_M.$$

As equações completas que descrevem a geometria do espaço-tempo para um dado tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  devido a matéria são então escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  e  $L_M$  é a densidade de Lagrangiana devido a matéria e  $T_{\mu\nu}$  é definido como

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

A partir das equações (2.19) podemos determinar as funções da métrica  $g_{\mu\nu}$  e com isso, a forma do espaço com elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

Escrevendo então a Lagrangiana para uma partícula nesse campo como

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - V(x),$$

utilizamos as equações de Euler-Lagrange para um parâmetro afim  $s$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0$$

para encontrarmos a trajetória de uma partícula de massa  $m$  nesse campo gravitacional sujeita a um potencial  $V(x)$ . Na ausência de forças, i.e., apenas sobre a influência da gravidade, a partícula seguirá pela geodésica do espaço-tempo descrito por  $g_{\mu\nu}$  dada por

$$\ddot{x}^\mu + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0.$$

As equações de Einstein (2.19) são na verdade dez equações, visto que o tensor métrico possui 16 componentes, mas como ele é simétrico na permutação de índices, apenas 10 dessas componentes serão independentes.

## 2.4 Teoria linear e energia do campo gravitacional

Como visto na seção anterior, as equações de campo gravitacionais dão uma descrição quantitativa de como é a geometria do espaço-tempo na presença ou não de matéria. O alto grau de não

linearidade das equações de Einstein torna a solução geral analítica de uma distribuição arbitrária de matéria difícil de ser obtida [9], uma vez que o próprio campo gravitacional pode atuar como fonte dele mesmo. Agora investigaremos um pouco mais as soluções gerais das equações de campo e para tal, faremos a suposição que os campos gravitacionais são fracos, i.e., iremos linearizar as equações de campo.

Toda a teoria linear da gravitação parte da suposição de que podemos assumir um campo gravitacional fraco que corresponde a um espaço-tempo levemente curvo, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Além disso, temos que garantir também que as derivadas de primeira, e as de ordens mais altas, também sejam pequenas.

Podemos utilizar qualquer sistema de coordenadas para descrevermos o limite fraco das equações de Einstein entretanto, um sistema de coordenadas quasi-Minkowski é mais simples, uma vez que poderemos tratar o efeito gravitacional como uma perturbação no espaço-tempo de Minkowski, assim como o eletromagnetismo. Podemos encontrar a solução com qualquer sistema de coordenadas e o relacionarmos com outros sistemas de coordenadas através de transformações gerais de coordenadas.

As transformações globais de Lorentz são da forma

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

onde  $\eta^{\nu\mu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} \eta^{\rho\sigma}$ , e as quantidades  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  são constantes. Sob essas transformações a métrica se transforma como

$$g'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} g_{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) = \eta_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} h_{\rho\sigma}.$$

Comparando com  $g'^{\mu\nu} = \eta'^{\mu\nu} + h'^{\mu\nu}$ , teremos a regra de transformação para  $h'^{\mu\nu}$  dada por

$$h'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} h_{\rho\sigma}.$$

Vemos então que sob uma transformação de Lorentz  $h_{\mu\nu}$  se transforma como as componentes de um tensor no espaço-tempo de Minkowski. Logo, podemos descrever um campo gravitacional fraco considerando  $h_{\mu\nu}$  apenas como um tensor simétrico de rank 2 definido no espaço-tempo de Minkowski, ao invés de ficarmos considerando um espaço-tempo ligeiramente curvo. Podemos então, considerar  $h_{\mu\nu}$  como sendo um campo gravitacional da Relatividade Especial de maneira similar a que  $A_{\mu}$  descreve o campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski, i.e., uma teoria que tem o espaço-tempo de Minkowski como espaço de referência.

Agora, veremos como as transformações infinitesimais afetam  $h^{\mu\nu}$ . Tais transformações tem a forma [9]

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x),$$

onde  $\xi^{\mu}(x)$  são quatro funções arbitrárias com a mesma ordem de grandeza que  $h_{\mu\nu}$ . Essas transformações infinitesimais realizam mudanças desprezíveis nos campos escalares, vetoriais e tensoriais.

Na métrica, contudo, não são desprezíveis, uma vez que pequenas variações em  $\eta_{\mu\nu}$  contem toda a informação sobre a gravidade. Começamos calculando

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} + \partial_{\nu}\xi^{\mu},$$

cuja transformação inversa é dada por

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu}\xi^{\mu}.$$

Calculando a transformação da métrica até a primeira ordem em  $\xi_{\mu}$  e suas derivadas, temos

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma} = (\delta_{\mu}^{\rho} - \partial_{\mu}\xi^{\rho})(\delta_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\xi^{\sigma})(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) = \\ &= (\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\nu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\rho}\partial_{\nu}\xi^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\mu}\xi^{\rho})(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\sigma}\partial_{\nu}\xi^{\sigma} - \eta_{\rho\nu}\partial_{\mu}\xi^{\rho} \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

sendo assim,

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}.$$

A transformação acima é análoga à transformação de calibre do eletromagnetismo, onde aqui temos uma liberdade de calibre no termo  $\partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}$ .

Podemos escrever também as componentes contravariantes da métrica usando a métrica de Minkowski  $\eta^{\mu\nu}$  para levantarmos os índices em  $h_{\mu\nu}$ . Vejamos:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}.$$

Considerando apenas termos lineares em  $h_{\mu\nu}$ , temos

$$h_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu} = (\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma})h_{\sigma\nu} = \eta^{\mu\sigma} h_{\sigma\nu}.$$

Com as ferramentas necessárias em mãos, podemos partir para escrevermos as equações de Einstein no limite de campo fraco. Para isto, teremos que calcular  $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma}$ ,  $R_{\mu\nu}$  e  $R$ . Calculando as conexões até a primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  obtemos

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}\eta_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}\eta_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}\eta_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}h_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}h_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}h^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}\eta_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}\eta_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}\eta_{\mu\nu}).$$

Identificando

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} \equiv \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}\eta_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}\eta_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}\eta_{\mu\nu})$$

como a conexão do espaço de referência e substituindo

$$\partial_{\mu}h_{\lambda\nu} = \nabla'_{\mu}h_{\lambda\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\delta}h_{\delta\nu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\delta}h_{\delta\lambda},$$

onde a linha indica a derivada covariante com relação à métrica do espaço de fundo  $\eta_{\mu\nu}$ , temos a conexão de Christoffel na aproximação linear dada por

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} = \bar{\Gamma}'_{\mu\nu}^{\sigma} + \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda} (\nabla'_{\mu}h_{\lambda\nu} + \nabla'_{\nu}h_{\mu\lambda} - \nabla'_{\lambda}h_{\mu\nu}).$$

O tensor de Ricci obtido contraindo o primeiro com o último índice do tensor de curvatura é dado por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\rho - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\rho = \nabla_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\rho - \nabla_\rho \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho,$$

logo, até primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  ficamos com

$$R_{\mu\nu} = R'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \nabla'_\nu \nabla'_\mu h - \nabla'_\nu \nabla'_\lambda h_\mu^\lambda - \nabla'_\rho \nabla'_\mu h_\nu^\rho + \nabla'_\rho \nabla'^\rho h_{\mu\nu} \right). \quad (2.22)$$

Contraindo os dois índices do tensor de Ricci (2.22) obtemos o escalar de curvatura

$$R = R' + \nabla'_\rho \nabla'^\rho h - \nabla'_\rho \nabla'_\lambda h^{\lambda\rho}. \quad (2.23)$$

Usando agora as equações (2.20), (2.22) e (2.23), podemos finalmente reescrever as equações de campo gravitacional na teoria linear como

$$\frac{1}{2} \left( \nabla'_\nu \nabla'_\rho h + \nabla'_\alpha \nabla'^\alpha h_{\mu\nu} - \nabla'_\mu \nabla'_\rho h_\nu^\rho - \nabla'_\rho \nabla'_\mu h_\nu^\rho \right) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left( \nabla'_\alpha \nabla'^\alpha h - \nabla'_\rho \nabla'^\rho h^{\sigma\rho} \right) = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

e definindo

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h,$$

e contraindo  $\mu$  e  $\nu$  simplificamos a expressão para o traço de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , ou seja,

$$\bar{h} = h - 2h = -h.$$

Com isso segue

$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h = h_{\mu\nu},$$

que permite reescrevermos a equação (2.24) como

$$\nabla'_\alpha \nabla'^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \nabla'_\rho \nabla'^\rho \bar{h}^{\sigma\rho} - \nabla'_\mu \nabla'_\rho \bar{h}_\nu^\rho - \nabla'_\nu \nabla'_\rho \bar{h}_\mu^\rho = -2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

A equação (2.25) será válida sempre que pudermos escrever a métrica na forma  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , com  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . A linha indica derivadas covariantes com relação ao espaço de referência e se esse espaço estiver descrito em coordenadas Cartesianas, as derivadas covariantes se tornam derivadas parciais ordinárias.

Similarmente ao eletromagnetismo, podemos usar a transformação de calibre  $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \nabla'_\mu \xi_\nu - \nabla'_\nu \xi_\mu$  para simplificarmos as equações de campo. Vejamos

$$\bar{h}'^{\mu\rho} = h'^{\mu\rho} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} h' = \bar{h}^{\mu\rho} - \nabla'^\mu \xi^\rho - \nabla'^\rho \xi^\mu + \eta^{\mu\rho} \nabla'_\sigma \xi^\sigma,$$

com isso, teremos a expressão

$$\nabla'_\rho \bar{h}'^{\mu\rho} = \nabla'_\rho \bar{h}^{\mu\rho} - \nabla'_\rho \nabla'^\mu \xi^\rho - \nabla'_\rho \nabla'^\rho \xi^\mu + \nabla'^\mu \nabla'_\sigma \xi^\sigma = \nabla'_\rho \bar{h}^{\mu\rho} - \nabla'_\alpha \nabla'^\alpha \xi^\mu.$$

Como temos uma liberdade na escolha das funções  $\xi^\mu(x)$ , escolhemos estas funções de forma que satisfaçam a  $\nabla'_\alpha \nabla'^\alpha \xi^\mu = \nabla'_\alpha \bar{h}^{\alpha\rho}$ , para termos  $\nabla'_\rho \bar{h}'^{\mu\rho} = 0$ . Com essa escolha de calibre, simplificamos a expressão das equações de campo para

$$\nabla'_\rho \nabla'^\rho \bar{h}^{\mu\nu} = -2\kappa T'^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

desde que  $\bar{h}_{\mu\nu}$  satisfaça a condição de calibre  $\nabla'_\rho \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ . Essa condição de calibre é preservada por qualquer função  $\xi^\mu$  que satisfaça  $\nabla'_\alpha \nabla'^{\alpha} \xi^\mu = 0$ .

Podemos ver certas semelhanças entre o eletromagnetismo e a gravidade linearizada, o que sugere a existência de ondas gravitacionais de maneira análoga às equações de Maxwell prevêem ondas eletromagnéticas. Entretanto, diferentemente das equações de campo eletromagnéticas que por si só, com os devidos calibres prevêem tal existência, no caso das ondas gravitacionais lineares existe em adicional a exigência de que a grandes distâncias da fonte tenhamos a suposição física da métrica poder ser escrita como  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

Partindo das equações na aproximação linear da teoria de Einstein, podemos analisar algumas propriedades do campo gravitacional. Definir energia para o campo gravitacional é algo complexo, dado o alto grau de não linearidade nas equações de campo. Na Relatividade Geral quando estamos lidando com um objeto em queda livre, i.e., apenas sob a influência da gravidade, sempre podemos escolher um referencial em queda livre onde podemos desprezar os efeitos gravitacionais pelo princípio da equivalência [9]. Não há então noção local de energia gravitacional na formulação padrão da R.G., podemos apenas integrar todo o espaço se ele for assintoticamente plano e descobriremos a "energia" gravitacional total do espaço como um todo. O que temos então é um pseudo-tensor de energia-momento para o campo gravitacional, como veremos a.

Ao considerarmos a teoria linear da gravitação com a perturbação  $h_{\mu\nu}$  sendo apenas um tensor simétrico sobre o espaço-tempo de Minkowski, podemos associar um pseudo-tensor energia-momento para o campo gravitacional, assim como fazemos para o eletromagnetismo. O problema que surge é que ao considerarmos termos de apenas primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  no tensor de Einstein, i.e., apenas  $G_{\mu\nu}^{(1)}$  (ver a equação (2.18)), estamos desconsiderando os efeitos do campo gravitacional nele mesmo, dessa forma estamos ignorando o pseudo-tensor energia-momento associado ao campo gravitacional. Para incluirmos a contribuição do efeito do campo nele mesmo, modificamos a expressão das equações de campo para

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}),$$

onde o tensor  $t_{\mu\nu}$  será o tensor energia momento do campo gravitacional. Ficamos então com

$$G_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{8\pi G}{c^4}t_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Fazendo uma expansão em Taylor do tensor de Einstein obtemos

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + G_{\mu\nu}^{(3)} + \dots,$$

e considerando o pseudo-tensor energia-momento devido ao campo gravitacional como a correção de segunda ordem na aproximação do tensor de Einstein, temos

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{8\pi G}{c^4}t_{\mu\nu} \Rightarrow t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}G_{\mu\nu}^{(2)},$$

o pseudo-tensor energia-momento será quadrático no campo  $h_{\mu\nu}$ . Tal situação também ocorre com o campo eletromagnético, entretanto, o campo eletromagnético não carrega carga, logo não pode

agir como sua própria fonte; e é exatamente por esse fato que o eletromagnetismo é uma teoria linear [9].

Poderíamos corrigir o pseudo-tensor energia-momento  $t_{\mu\nu}$  para que ele passasse a conter termos de ordem mais alta, o que corresponderia à energia e ao momento que esse carregaria devido a ele mesmo, mas quando consideramos o campo muito fraco, espera-se que mesmo desprezando esses termos ainda teremos uma boa aproximação. Considerando termos até segunda ordem do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}^{(2)}$  com termos até segunda ordem em  $h_{\mu\nu}$  temos

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(2)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}R^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(1)}. \quad (2.27)$$

As equações (2.27) não são invariantes por transformações de Lorentz, mostrando que no contexto da R.G. não há significado físico em trabalharmos com o campo gravitacional em um ponto do espaço-tempo, o que condiz de podermos considerar um referencial em queda livre e desconsiderarmos os efeitos do campo gravitacional [9]. Para lidarmos com esses problemas que encontramos devido à descrição do campo gravitacional através do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , consideraremos a média de  $G_{\mu\nu}^{(2)}$  ao longo de uma pequena região do espaço-tempo, onde haverá uma pequena curvatura evidente. Definimos então

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle.$$

A partir dessas suposições, simplificamos nosso trabalho a encontrarmos uma expressão para  $\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$ . Como estamos considerando a média em todas as direções em cada ponto, a média das primeiras derivadas de uma função escalar  $ab$  qualquer das posições é nula, isto é,

$$\langle \partial_\mu(ab) \rangle = \langle (\partial_\mu a)b \rangle + \langle (\partial_\mu b)a \rangle = 0, \quad (2.28)$$

logo, podemos trabalhar com valores médios trocando os termos de dentro e fora da derivada.

Por questões de simplicidade matemática, nessa análise consideraremos o espaço de referência descrito em coordenadas Cartesianas, de maneira que as derivadas da métrica desse espaço sejam nulas. Como o resultado são equações tensoriais, ele será válido em qualquer sistema de coordenadas. Começaremos escrevendo até primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  o tensor de Ricci como

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right),$$

escrevendo a correção de primeira ordem do escalar de curvatura em função do traço do pseudo-tensor energia-momento da matéria, obtemos

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(2)} &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(2)} - \frac{1}{2}\kappa \left[ \bar{h}_{\mu\nu}T + \eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma} \left( T_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma}T \right) \right] \\ &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(2)} - \frac{1}{2}\kappa \left( \bar{h}_{\mu\nu}T + \eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma} \right), \end{aligned}$$

onde definimos  $T \equiv T_{\mu}^{\mu}$ .

Para as conexões temos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} &= \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{(1)\rho} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{(2)\rho} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_\nu h_{\mu}^{\rho} + \partial_\mu h_{\nu}^{\rho} - \partial^\rho h_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} \left( \partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu} \right) + \dots, \end{aligned}$$

de forma que a aproximação tensor de Ricci em segunda ordem fica escrito como

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^{(2)} &= \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^{(2)\rho} - \partial_\rho \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{(2)\sigma} + \bar{\Gamma}_{\mu\rho}^{(1)\sigma} \bar{\Gamma}_{\sigma\nu}^{(1)\rho} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{(1)\sigma} \bar{\Gamma}_{\rho\sigma}^{(1)\rho} \\
&= -\frac{1}{4} (\partial_\mu h^{\rho\sigma}) \partial_\nu h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} (\partial_\rho \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\sigma\rho}) \\
&\quad + \frac{1}{4} (\partial^\rho h_\nu^\sigma) (\partial_\sigma h_{\mu\rho} + \partial_\sigma h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\sigma} - \partial_\rho h_{\sigma\mu}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \partial^\rho h) (\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) .
\end{aligned}$$

Usando o fato da média das derivadas serem nulas, i.e., (2.28), podemos reescrever alguns dos produtos das primeiras derivadas por derivadas segundas, por exemplo,  $\partial^\rho h \partial^\rho h_{\mu\nu} = -h \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu}$ . Teremos então

$$\begin{aligned}
\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle &= \frac{1}{4} \left\langle (\partial_\mu h_{\rho\sigma}) \partial_\nu h^{\rho\sigma} - 2 (\partial_\sigma h^{\rho\sigma}) \partial_{(\mu} h_{\nu)\rho} + 2 (\partial_\rho h) \partial_{(\mu} h_{\nu)}^\rho \right. \\
&\quad \left. - (\partial_\mu h) \partial_\nu h + \kappa \left( 2 h_{\mu\nu} T + 2 h T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h T - 4 h_{\rho(\mu} T_{\nu)}^\rho \right) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Contraindo  $\mu$  com  $\nu$ , obtemos

$$\langle R^{(2)} \rangle = -\frac{1}{2} \kappa \langle h^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \rangle .$$

Finalmente, a expressão para o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional será

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa} \left\langle (\partial_\mu \bar{h}_{\rho\sigma}) \partial_\nu \bar{h}^{\rho\sigma} - 2 (\partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma}) \partial_{(\mu} \bar{h}_{\nu)\rho} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{h}) \partial_\nu \bar{h} - \kappa (4 \bar{h}_{\rho(\mu} T_{\nu)}^\rho + \eta_{\mu\nu} h^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma}) \right\rangle \tag{2.30}$$

A equação (2.30) representa um pseudo-tensor de energia-momento do campo gravitacional e da matéria. Vemos que de fato se trata de um pseudo-tensor, pois se analisarmos os três primeiros termos que são referentes ao próprio campo gravitacional, eles contêm apenas derivadas de primeira ordem no tensor  $h_{\mu\nu}$  logo, sempre podemos escolher um sistema de coordenadas no qual essas primeiras derivadas sejam nulas e, conseqüentemente, a contribuição do campo gravitacional para a energia se anula. As equações não refletem então a energia em um ponto localizado do espaço-tempo, como havíamos mencionado no início da seção. Poderíamos pensar que nossa definição de energia não foi adequada, mas na verdade, toda teoria da gravitação descrita pelo tensor métrico leva a esse problema. A solução é mudarmos a maneira como estamos descrevendo o campo gravitacional, e é o que faremos na próxima seção. Antes, vamos analisar outra definição de energia-momento direto das equações de Einstein não lineares para o campo gravitacional dada na referência [10] por

$$\begin{aligned}
t^{\mu\nu} &= \kappa [ 2 (\bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\eta \bar{\Gamma}_{\eta\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\eta \bar{\Gamma}_{\rho\eta}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\lambda\eta}^\rho \bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\alpha) (g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}) \\
&\quad + g^{\mu\lambda} g^{\rho\eta} (\bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\nu \bar{\Gamma}_{\rho\eta}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\rho\eta}^\nu \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\eta\alpha}^\nu \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\nu \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\alpha \bar{\Gamma}_{\eta\alpha}^\alpha) \\
&\quad + g^{\nu\lambda} g^{\rho\eta} (\bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\mu \bar{\Gamma}_{\rho\eta}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\rho\eta}^\mu \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\eta\alpha}^\mu \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\alpha - \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\alpha \bar{\Gamma}_{\eta\alpha}^\alpha) \\
&\quad + g^{\lambda\rho} g^{\eta\alpha} (\bar{\Gamma}_{\lambda\eta}^\mu \bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\nu - \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu \bar{\Gamma}_{\eta\alpha}^\nu) ] .
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Esta equação que juntamente com o tensor energia momento da matéria satisfaz [10]

$$\partial_\nu [(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0 ,$$

implica que temos uma quantidade conservada

$$P^\mu = \int (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})dS_\nu, \quad (2.32)$$

onde  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ .

Entretanto, podemos ver que a equação (2.31) é composta apenas das conexões de Christoffel e seus produtos, que por sua vez são compostas por derivadas primeiras da métrica. Sendo assim, sempre podemos escolher um sistema de coordenadas em que  $t^{\mu\nu}$  é nulo e a integral acima se transforma no quadrimomento da matéria apenas. Vemos então que  $t^{\mu\nu}$  também é um pseudo-tensor de energia-momento. Com base nisso vamos então em busca de outra descrição para o campo gravitacional.

## Capítulo 3

# Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

A seguir, mostraremos que os efeitos do campo gravitacional podem ser observados a partir de uma nova descrição baseada em campos de tetradas adaptadas a observadores. Começamos enfatizando a ideia de como trabalhar com observadores acelerados, que pelo princípio da equivalência equivalem a um campo gravitacional visto por um observador inercial. Dentro desse contexto mostraremos que é possível construir expressões para tensores de energia-momento e de momento angular associados ao campo gravitacional quando descrito em termos de tetradas.

### 3.1 Campo de tetradas e sistemas de referência

Começamos esse capítulo analisando como um observador acelerado lida com as leis da física, uma vez que a descrição que temos na Relatividade Especial é para transformações de coordenadas entre observadores inerciais. Para um observador que está acelerado medir efeitos físicos, supomos que em cada evento ele mede os mesmos efeitos que um observador inercial naquele evento, isso é chamado de hipótese da localidade [17] [18].

Para isso, seja um observador  $O$  que pode estar acelerando com relação a outro referencial inercial. Se a velocidade do observador for  $u^\mu(\tau)$ , onde  $\tau$  é o tempo próprio do observador, sua aceleração será dada por

$$a^\mu(\tau) = \frac{du^\mu}{d\tau},$$

e que é sempre ortogonal à quadri-velocidade  $u^\mu$  pois,

$$a^\mu(\tau)u_\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (-1) = 0.$$

Como não há nenhum referencial inercial no qual o observador está sempre em repouso, definimos um referencial de repouso instantâneo, caracterizado por quatro campos de tetradas linearmente independentes  $(e^{(0)}{}_\mu, e^{(1)}{}_\mu, e^{(2)}{}_\mu, e^{(3)}{}_\mu)$ . Uma vez que o observador está sempre em repouso nesse referencial,  $e^{(0)}{}_\mu$  deve estar paralelo à quadri-velocidade, ou seja,  $e_{(0)}{}^\mu = u^\mu$  [9].

O campo de t etras  $e^a_\mu$  se transforma como um vetor covariante sobre transforma es  $SO(3,1)$  de Lorentz da seguinte forma [19]

$$e'^a_\mu = \Lambda^a_b e^b_\mu. \quad (3.1)$$

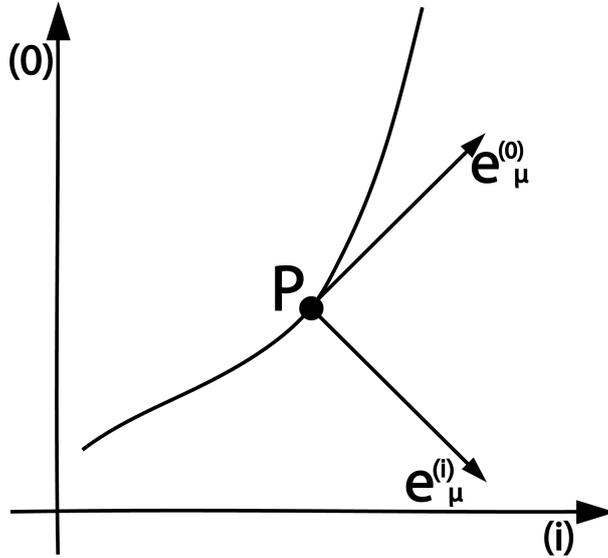


Figura 3.1: Conjunto de t etras para um observador no ponto  $P$ .

Os resultados das medidas feitas pelo observador no ponto  $P$  da figura 3.1 serão uma proje o das quantidades físicas no referencial das t etras adaptadas ao observador [9] [19]. Uma dessas quantidades físicas pode ser a energia de uma partícula. Portanto,

$$E = p_\mu e_{(0)}^\mu = -p_\mu u^\mu,$$

onde  $p_\mu$    o quadrimomento da partícula no ponto  $P$  e  $u^\mu$    a velocidade do observador que realiza a medida. Vemos então que a medida da energia está associada ao observador que a realiza.

No formalismo das t etras podemos escrever a acelera o  $a^\mu$  de um observador ao longo de sua linha mundo como

$$a^\mu = \frac{De_{(0)}^\mu}{ds} = \frac{dx^\nu}{ds} \frac{De_{(0)}^\mu}{dx^\nu} = u^\nu \nabla_\nu e_{(0)}^\mu,$$

onde  $s$    um parâmetro afim. Sendo assim,  $e_a^\mu$  e suas derivadas determinam a velocidade e a acelera o de um observador ao longo da sua linha mundo.

Temos assim uma forma de determinar as componentes  $e_a^\mu$  de um conjunto de t etras adaptadas a um observador qualquer, ou seja, a acelera o de um observador adaptado a um campo de t etras  $e_a^\mu$    dada por [20]

$$\frac{De_a^\mu}{ds} = \Phi_a^b e_b^\mu,$$

onde  $\Phi_{ab}$  representa o tensor de acelera o antissimétrico em seus  ndices. Podemos identificar  $\Phi_{ab} \rightarrow (\mathbf{a}, \Omega)$ , onde  $\mathbf{a}$    o vetor acelera o translacional e  $\Omega$    a velocidade angular do referencial espacial local com rela o a um referencial Fermi-Walker transportado [20] sem rota es espaciais. Com isso, para um conjunto de t etras arbitrário podemos interpretar sua cinemática a partir do

tensor de aceleração que em termos de tensores de torções, a serem definidas na próxima seção, é dado por

$$\Phi_{ab} = e^b{}_{\mu} u^{\nu} \nabla_{\nu} e_a{}^{\mu} = \frac{1}{2} [T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a}] .$$

Usando a equação acima podemos escolher um conjunto de tetradas que entre dois instantes sucessivos relacionam-se por transformações  $SO(3,1)$  do grupo de Lorentz (equação (3.1)), cuja a taxa de mudança é apenas devido à  $u^{\mu}$ , ou seja, sem rotações puramente espaciais (ver coordenadas normais de Fermi na referência [14] para uma discussão mais detalhada).

O uso de tetradas é útil na formulação convencional da Relatividade Geral, como na construção da métrica de Kerr a partir da adição de termos referentes à rotação na métrica de Schwarzschild [19]. Já sua presença na formulação Teleparalela Equivalente da Relatividade Geral é fundamental, como veremos na próxima seção.

Carregamos até aqui uma notação para as tetradas com um índice latino e um índice grego. Como as tetradas estão localmente associadas a observadores e globalmente associadas à trajetórias desses observadores, o seu índice latino está relacionado ao sistema de referência local enquanto o índice grego está relacionado ao espaço-tempo. Abaixo apresentamos algumas propriedades que as tetradas obedecem e que serão úteis ao longo dessa dissertação. Temos que

$$\begin{aligned} e^a{}_{\mu} e^{b\mu} &= \eta^{ab} , \\ e_a{}^{\mu} e_{b\mu} &= \eta_{ab} , \end{aligned}$$

dessa forma, podemos utilizar a métrica de Minkowski para levantar e abaixar os índices locais de Lorentz, i.e.,

$$\begin{aligned} e^{a\mu} &= \eta^{ab} e_b{}^{\nu} , \\ e_{a\mu} &= \eta_{ab} e^b{}_{\nu} , \end{aligned}$$

e utilizamos a métrica do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$  para levantarmos e abaixarmos os índices do espaço-tempo

$$\begin{aligned} e^{a\mu} &= g^{\mu\nu} e_{\nu}^a , \\ e_{a\mu} &= g_{\mu\nu} e_a{}^{\nu} , \end{aligned}$$

e, por fim, definimos também a tetrada inversa como aquela tal que

$$\begin{aligned} e_a{}^{\mu} e_{\mu}^b &= \delta_b^a , \\ e_a{}^{\mu} e_{\nu}^a &= \delta_{\nu}^{\mu} . \end{aligned}$$

Podemos escrever a métrica em função das tetradas como

$$e^a{}_{\mu} = e^{a\nu} g_{\mu\nu} \Rightarrow e_{a\lambda} e^a{}_{\mu} = e_{a\lambda} e^{a\nu} g_{\mu\nu} \Rightarrow e_{a\lambda} e^a{}_{\mu} = \delta_{\lambda}^{\nu} g_{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu} = e_{a\nu} e^a{}_{\mu} = \eta_{ab} e^b{}_{\nu} e^a{}_{\mu} ,$$

e, analogamente obtemos que

$$g^{\mu\nu} = e^{a\mu} e_a{}^{\nu} = \eta^{ab} e_b{}^{\nu} e_a{}^{\mu} .$$

Vimos que um dos grandes problemas da Relatividade Geral, que é descrita a partir do tensor métrico, é o fato de não termos uma localizabilidade para a energia do campo gravitacional

logo, temos um campo sem energia definida e qualitativamente não aceitável. Na próxima seção apresentaremos uma descrição do efeito gravitacional a partir de efeitos cinemáticos de tetradas associadas a observadores.

### 3.2 Equações de movimento do TEGR

Para construirmos um formalismo da gravitação baseado em tetradas devemos estabelecer uma regra para as mesmas. Existem infinitas tetradas adaptadas a um observador em um dado ponto do espaço-tempo, entretanto, como a tetrada deve ser estática em relação ao observador, sua componente temporal deve ser paralela à quadrivelocidade do observador. Outra condição que temos que assegurar é o fato da tetrada não estar girando [17]. Sendo assim, estabelecemos como regra para essa tetrada que ela deve ser transportada paralelamente ao longo do espaço tangente além disso, em todos os pontos do espaço-tempo sua componente temporal deve ser paralela à quadrivelocidade do observador adaptado e, ela não deve estar em rotação puramente espacial. Com base nessas condições, existe o TEGR (*Teleparallel Equivalent of General Relativity*), que é uma formulação alternativa equivalente à teoria de Einstein da gravitação. Este formalismo é desenvolvido no espaço-tempo de Weitzenböck, onde a curvatura é nula, mas a torção não [17].

Para tanto precisamos de uma conexão que leve ao transporte paralelo dessa tetrada logo, a derivada covariante em relação a um observador com linha mundo  $x^\nu(\tau)$  dessa tetrada deve ser nula, portanto

$$\nabla_\nu e_a^\mu = \partial_\nu e_a^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu e_a^\lambda = 0. \quad (3.2)$$

Para encontrarmos a forma dessa conexão começamos multiplicando ambos os lados da equação (3.2) por  $e_\rho^a$  e, isolando a conexão temos

$$\begin{aligned} e_\rho^a \partial_\nu e_a^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu e_\rho^a e_a^\lambda &= 0 \Rightarrow \delta_\rho^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\mu = -\partial_\nu (e_\rho^a e_a^\mu) + e_a^\mu \partial_\nu (e_\rho^a) \\ &\Rightarrow \Gamma_{\lambda\nu}^\mu = -\partial_\nu (\delta_\lambda^\mu) + e_a^\mu \partial_\nu e_\lambda^a \\ &\Rightarrow \Gamma_{\lambda\nu}^\mu = e_a^\mu \partial_\nu e_\lambda^a. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A conexão dada pela equação (3.3) é chamada de conexão de Weitzenböck.

Além disso, dado um vetor  $V^\mu$  no espaço-tempo podemos projetá-lo no espaço tangente utilizando uma combinação linear de tetradas, i.e.,

$$\begin{aligned} V^a &= V^\mu e_\mu^a, \\ V_a &= V_\mu e_a^\mu, \end{aligned}$$

e ao transportarmos esse vetor de um ponto  $x$  para um ponto  $x + dx$  infinitesimalmente próximos, suas componentes se modificam como

$$V^a(x + dx) = V^a(x) + DV^a(x).$$

Caso o vetor seja transportado paralelamente, temos que ter  $V^a(x) = V^a(x + dx)$ . Logo, obtemos

$$DV^a(x) = \nabla_\mu V^a dx^\mu = 0 \Rightarrow \nabla_\mu (e_\nu^a V^\nu) dx^\mu = 0 \Rightarrow e_\nu^a \nabla_\mu V^\nu dx^\mu = 0.$$

Repare que usando o fato de  $\nabla^\mu e^a_\nu = 0$  estamos garantindo o transporte paralelo dos vetores, o que é outra maneira de definirmos a conexão de Weitzenböck e vemos que as tétradas são autoparalelas [17].

A conexão de Christoffel é simétrica na troca dos índices inferiores entretanto, a conexão de Weitzenböck não é. Com isso, temos uma torção não nula, definida por

$$T^\mu_{\lambda\nu} \equiv \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda},$$

e multiplicando ambos os lados da equação acima por  $e^a_\mu$ , teremos as torções escritas explicitamente em função das tétradas como

$$T^a_{\lambda\nu} = \partial_\lambda e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\lambda.$$

Analogamente ao que fizemos na teoria de Einstein usando o princípio variacional, aqui faremos o mesmo só que usando tétradas. Neste caso, conforme veremos, a densidade de Lagrangiana é escrita como

$$L = eR(e).$$

A conexão de Christoffel  $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}$  é dada por

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}),$$

e substituindo nesta a relação  $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{a\nu}$ , teremos

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}[T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\mu\lambda} + T_{\lambda\mu\nu}] + \Gamma_{\lambda\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Denifindo a quantidade

$$\bar{\omega}_{\mu\lambda\nu} \equiv -\frac{1}{2}[T_{\mu\lambda\nu} + T_{\nu\mu\lambda} + T_{\lambda\mu\nu}], \quad (3.5)$$

podemos escrever a conexão de Christoffel como

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = -\bar{\omega}_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu},$$

e projetando a quantidade (3.5) no campo de tétradas, obtemos conexão de Levi-Civita dada por

$$\bar{\omega}_{\mu ab} = e_a^\lambda e_b^\nu \bar{\omega}_{\mu\lambda\nu}.$$

Dessa forma, podemos construir um tensor de curvatura em termos das conexões de Levi-Civita ou seja,

$$R_{ab\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\omega}_{\nu ab} - \partial_\nu \bar{\omega}_{\mu ab} + \bar{\omega}_{\mu ac} \bar{\omega}_\nu^c{}_b - \bar{\omega}_{\nu ac} \bar{\omega}_\mu^c{}_b,$$

de onde segue o escalar de curvatura dado por

$$R(e) = e^{a\mu} e^{b\nu} R_{ab\mu\nu}.$$

Com isso, após alguns cálculos longos, porém simples, obtemos a seguinte expressão para a densidade de Lagrangiana

$$eR(e) = e \left( \frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a \right) - 2\partial_\mu (eT^a), \quad (3.6)$$

onde o traço da torção é dado por  $T^a \equiv T^\mu{}_\mu{}^a$ . Colocando  $T_{abc}$  em evidência no primeiro termo da equação acima, segue que

$$eR(e) = \frac{1}{4}e \left( T^{acb} - T^{cab} + T^{bac} \right) T_{acb} + \frac{1}{2}e \left( \eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c \right) T_{abc} - 2\partial_\mu (eT^a),$$

e definindo

$$\Sigma^{abc} \equiv \frac{1}{4} \left( T^{acb} - T^{cab} + T^{bac} \right) + \frac{1}{2} \left( \eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c \right), \quad (3.7)$$

podemos escrever a densidade de Lagrangiana (3.6) como

$$L = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} + 2k\partial_\mu(eT^\mu). \quad (3.8)$$

A densidade de Lagrangiana (3.8) é invariante por transformações globais e locais de Lorentz.

Tendo em mãos a densidade de Lagrangiana, resta-nos apenas encontrar as equações de movimento. Por cálculos diretos, podemos encontrar a identidade

$$\frac{\delta(\Sigma^{abc}T_{abc})}{\delta e^{a\mu}} = \Sigma^{abc} \frac{\delta(T_{abc})}{\delta e^{a\mu}} + \frac{\delta(\Sigma^{abc})}{\delta e^{a\mu}} T_{abc} = 2\Sigma^{abc} \frac{\delta(T_{abc})}{\delta e^{a\mu}}, \quad (3.9)$$

que facilita a obtenção das equações de movimento dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta e^{a\mu}} &= \frac{\delta(e\Sigma^{abc}T_{abc})}{\delta e^{a\mu}} \\ &= \Sigma^{abc} \left( T_{abc} \frac{\delta e}{\delta e^{a\mu}} + 2e \frac{\delta T_{abc}}{\delta e^{a\mu}} \right) \\ &= e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu (e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e \left( \Sigma^{b\nu}{}_{\ a} T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde eliminamos o termo de superfície  $\partial_\mu(eT^\mu)$  uma vez que temos infinitas densidades de Lagrangianas que descrevem um mesmo sistema físico e diferem umas das outras por um termo de divergência, que sobre integração, desprezaremos. Desconsiderando esse termos de superfície, a teoria tem a invariância local de Lorentz quebrada, mas mantém a invariância por transformações globais  $SO(3,1)$  do grupo de Lorentz. Da equação acima, as equações de movimento para o TEGR no vácuo são

$$e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu (e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e \left( \Sigma^{b\nu}{}_{\ a} T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right) = 0.$$

Na presença de matéria e radiação, definimos o tensor energia-momento para os campos de matéria e radiação  $T_{a\mu}$  como

$$eT_{a\mu} \equiv \frac{\delta L_M}{\delta e^{a\mu}},$$

onde  $L_M$  representa a densidade de Lagrangiana dos campos de radiação e matéria. Com isso, as equações de campo gerais para o TEGR ficam

$$e_{a\lambda} e_{b\mu} \partial_\nu (e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e \left( \Sigma^{b\nu}{}_{\ a} T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4} e_{a\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right) = \frac{1}{\kappa} eT_{a\mu}. \quad (3.11)$$

Pode-se mostrar que as equações acima podem ser rearranjadas para serem escritas em função do tensor de Ricci projetado no campo de tetradas  $R_{a\mu}(e) \equiv e_a{}^\nu R_{\nu\mu}$  e do escalar de curvatura  $R(e)$  [19]. Desta forma, a equação (3.11) pode ser escrita como

$$R_{a\mu} - \frac{1}{2} e_{a\mu} R = -\kappa T_{a\mu}.$$

Como mencionado anteriormente, podemos ver que a formulação teleparalela leva à equações de campo equivalentes às equações de Einstein escritas em termos das tétradas. Agora que temos uma descrição do campo gravitacional em função de tétradas, podemos partir para obtermos definições de tensores energia-momento e momento angular do campo gravitacional,

### 3.3 Energia-momento e momento angular no TEGR

A seguir apresentaremos uma expressão para a energia do campo gravitacional na presença de matéria. Tal expressão é invariante por transformações espaciais de coordenadas e reparametrização temporal. Para isso, a equação (3.11) pode ser reescrita como

$$\partial_\mu \left( e \Sigma^{a\lambda\mu} \right) = \frac{1}{4} e e^a{}_\mu \left( 4 \Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right) + \frac{1}{4\kappa} e e^a{}_\mu T^{\lambda\mu}, \quad (3.12)$$

e definindo

$$t^{\lambda\mu} \equiv \kappa \left( 4 \Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right), \quad (3.13)$$

a equação (3.12) fica

$$\partial_\mu \left( e \Sigma^{a\lambda\mu} \right) = \frac{1}{4\kappa} e e^a{}_\mu \left( t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu} \right). \quad (3.14)$$

Derivando a equação (3.14) em relação à  $\lambda$  e usando o fato de que  $\Sigma^{a\mu\nu}$  é antissimétrico nos dois últimos índices, segue que

$$\frac{1}{4\kappa} \partial_\lambda \left[ e e^a{}_\mu \left( t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu} \right) \right] = \partial_\lambda \partial_\mu \left( e \Sigma^{a\lambda\mu} \right) = 0. \quad (3.15)$$

A partir da expressão (3.15) temos uma equação de continuidade [19]

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x e e^a{}_\mu \left( t^{0\mu} + T^{0\mu} \right) = - \oint_S dS_j \left[ e e^a{}_\mu \left( t^{j\mu} + T^{j\mu} \right) \right], \quad (3.16)$$

onde a integral é calculada sobre um volume tridimensional  $V$  limitado pela superfície  $S$ .

Assim, podemos ver que  $e e^a{}_\mu \left( t^{\lambda\mu} + T^{\lambda\mu} \right)$  é uma quantidade conservada e interpretamos o tensor  $t^{\mu\nu}$  como o tensor energia-momento do campo gravitacional. A partir da equação (3.16), interpretamos a quantidade

$$P^a = \int_V e e^a{}_\mu \left( t^{0\mu} + T^{0\mu} \right) d^3x = 4\kappa \int_V \partial_i \left( e \Sigma^{a0i} \right) d^3x \quad (3.17)$$

como a energia-momento total contida em um volume  $V$  do espaço tridimensional.

A expressão acima fornece o quadrivetor energia-momento do campo gravitacional na presença de matéria. Na ausência de matéria e radiação o tensor energia-momento associado à matéria e radiação será nulo e a expressão (3.17) representará o vetor quadrimomento do campo gravitacional.

A seguir, apresentaremos uma expressão para o momento angular do campo gravitacional no contexto do TEGR. Para isso, começamos apresentando os momentos canonicamente conjugados às tétradas  $e_{ak}$  obtidos da densidade de Lagrangiana (3.8), ou seja, [21]

$$\Pi^{ak} \equiv \frac{\delta L_g}{\delta \dot{e}_{ak}} = -4\kappa \Sigma^{a0k},$$

onde o ponto sobre as tétradas  $e_{ak}$  representa a derivada em rela ao ao tempo  $t$ .

De acordo com o desenvolvimento apresentado na referência [21], a densidade de Lagrangiana em (3.8) pode ser reescrita como

$$L = \Pi^{ak} \dot{e}_{ak} - H_0,$$

onde  $H_0$  é a densidade de Hamiltoniana primária e

$$\begin{aligned} \Pi^{ak} &= \kappa e [g^{00} (-g^{kj} T^a{}_{0j} - e^{aj} T^k{}_{0j} + 2e^{ak} T^j{}_{0j}) \\ &+ g^{0k} (g^{0j} T^a{}_{0j} + e^{aj} T^0{}_{0j}) + e^{a0} (g^{0j} T^k{}_{0j} + g^{kj} T^0{}_{0j}) \\ &- 2(e^{a0} g^{0k} T^j{}_{0j}) - g^{0i} g^{kj} T^a{}_{ij} + e^{ai} (g^{0j} T^k{}_{ij} \\ &- g^{kj} T^0{}_{ij}) - 2(g^{0i} e^{ak} - g^{ik} e^{a0}) T^j{}_{ij}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

é o momento canonicamente conjugado a  $\dot{e}_{ak}$ .

é possível mostrar que a densidade de Lagrangiana  $L$  não depende explicitamente de  $\dot{e}_{a0}$  portanto, o momento  $\Pi^{a0}$  é identicamente nulo. Além disso, apenas a parte simétrica dos momentos, quando projetado nas tétradas, dependem de  $\dot{e}_{ak}$ , i.e,

$$\Pi^{(ij)} = \frac{1}{2} (e_a{}^i \Pi^{aj} + e_a{}^j \Pi^{ai}),$$

enquanto a parte antisimétrica

$$\Pi^{[ij]} = \frac{1}{2} (e_a{}^i \Pi^{aj} - e_a{}^j \Pi^{ai}),$$

constituem rela oes entre os momentos e as tétradas que não dependem de  $\dot{e}_{ak}$ , e que juntamente com  $\Pi^{a0}$  constituem v ıculos primários de primeira classe.

De acordo com a prescri ao de Dirac, a evolu ao temporal de  $\Pi^{a0}$  gera um novo v ıculo  $C^a$  secundário que é dado por

$$\begin{aligned} C^a &= \partial_i \Pi^{ai} + e^{a0} [-\frac{1}{4g^{00}} \kappa e (g_{ik} g_{jl} P^{ij} P^{kl} - \frac{1}{2} P^2) + \\ &+ \kappa e (\frac{1}{4} g^{im} g^{nj} T^b{}_{mn} T_{bij} + \frac{1}{2} g^{nj} T^i{}_{mn} T^m{}_{ij} - g^{ik} T^m{}_{mi} T^n{}_{nk})] - \\ &- \frac{1}{2g^{00}} \kappa e (g_{ik} g_{jl} \gamma^{aij} P^{kl} - \frac{1}{2} g_{ij} \gamma^{aij} P) - \kappa e e^{ai} (g^{0m} g^{nj} T^b{}_{ij} T_{bmn} + \\ &+ g^{nj} T^0{}_{mn} T^m{}_{ij} + g^{0j} T^n{}_{mj} T^m{}_{ni} - 2g^{0k} T^m{}_{mk} T^n{}_{ni} - \\ &- 2g^{ik} T^0{}_{ij} T^n{}_{nk}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\begin{aligned} P^{ki} &= \frac{1}{\kappa e} \Pi^{(ki)} - g^{0m} (g^{kj} T^i{}_{mj} + g^{ij} T^k{}_{mj} - 2g^{ik} T^j{}_{mj}) \\ &- (g^{km} g^{0i} + g^{im} g^{0k}) T^j{}_{mj}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

sendo  $\gamma^{aij}$  dado por

$$\begin{aligned}\gamma^{aij} &= -e^{ak}[g^{00}(g^{jm}T^i{}_{km} + g^{im}T^j{}_{km} + 2g^{ij}T^m{}_{mk}) + \\ &+ g^{0m}(g^{0j}T^i{}_{mk} + g^{0i}T^j{}_{mk}) - 2g^{0i}g^{0j}T^m{}_{mk} + \\ &+ (g^{jm}g^{0i} + g^{im}g^{0j} - 2g^{ij}g^{0m})T^0{}_{mk}].\end{aligned}\tag{3.21}$$

Visto que  $\Pi^{a0}$  é identicamente nulo, os vínculos primários relacionados à parte antisimétrica dos momentos, i.e,  $\Pi^{[ij]}$  podem ser escritos como,

$$\Gamma^{ab} = 2\Pi^{[ab]} - 4\kappa e(\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}) = 0.\tag{3.22}$$

Além disso, pode se mostrar que os vínculos  $C^a$  e  $\Gamma^{ab}$  são tais que  $H_0 = e_{a0}C^a$ ,  $\frac{\delta C^a}{\delta e_{c0}} = e^{a0}C^c - e^{a0}C^c \equiv 0$  e que  $\frac{\delta \Gamma^{ab}}{\delta e_{c0}} \equiv 0$  logo, nenhum novo vínculo aparece devido a evolução temporal de  $C^a$  e  $\Gamma^{ab}$  com isso, a densidade de hamiltoniana total  $H$  pode ser escrita como[21]

$$H = e_{a0}C^a + \alpha_{ab}\Gamma^{ab},\tag{3.23}$$

onde  $\alpha_{ab}$  são multiplicadores de Lagrange e como a variação de  $H$  em relação a  $e_{a0}$  gera o vínculo  $C^a$ ,  $e_{a0}$  em (3.23) surge naturalmente como um multiplicador de Lagrange. No vácuo o vínculo  $C^a$  está associado ao quadrimomento do campo gravitacional, já o vínculo  $\Gamma^{ab}$  está associado ao momento angular do campo gravitacional.

A partir dos vínculos  $\Gamma^{ab}$  é possível definir a densidade de momento angular [22] como

$$M^{ab} = 4\kappa e(\Sigma^{b0a} - \Sigma^{a0b}),$$

que pode ser escrita em função das tétradas conforme abaixo [22]

$$M^{ab} = 2\kappa \partial_i \left[ e \left( e^{ai} e^{b0} - e^{bi} e^{a0} \right) \right].$$

Com a densidade de momento angular, podemos escrever o momento angular  $L^{ab}$  do campo gravitacional como

$$\begin{aligned}L^{ab} &= \int M^{ab} d^3x \\ &= 2\kappa \int \partial_i \left[ e \left( e^{ai} e^{b0} - e^{bi} e^{a0} \right) \right] d^3x.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Os resultados aqui apresentados são consistentes, uma vez que o conjunto dos vínculos  $C^a$  e  $\Gamma^{ab}$  satisfaz uma álgebra do tipo Poincaré [22], ou seja,

$$\begin{aligned}\{C^a, C^b\} &= 0, \\ \{C^a, \Gamma^{bc}\} &= \eta^{ab}C^c - \eta^{ac}C^b, \\ \{\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}\} &= \eta^{ad}\Gamma^{cb} + \eta^{bd}\Gamma^{ac} - \eta^{ac}\Gamma^{db} - \eta^{bc}\Gamma^{ad}.\end{aligned}$$

Podemos então ver que do ponto de vista físico, a interpretação que tivemos das quantidades  $C^a$  e  $\Gamma^{ab}$  são consistentes e podemos finalmente estudar o campo das ondas gravitacionais, calculando a energia e o momento angular dessas ondas. Neste ponto, é importante ressaltar que as grandezas físicas  $P^a$  e  $L^{ab}$  satisfazem à mesma álgebra apresentada acima.

## Capítulo 4

# Ondas gravitacionais

A partir dos resultados apresentados nos capítulos anteriores, podemos finalmente estudar o espaço-tempo das ondas gravitacionais conforme a seguir. Começaremos usando os resultados do capítulo anterior para podermos estudar as ondas da teoria de Einstein em sua forma linear e em seguida estudaremos outro tipo de ondas que são soluções exatas das equações de Einstein chamadas de PP-Waves. Após analisarmos e compararmos as propriedades das ondas da teoria linear com as PP-Waves, mostraremos um resultado muito significativo sobre a influência que tais ondas possuem na energia cinética clássica de partículas.

### 4.1 Ondas gravitacionais na forma linear

Vamos agora analisar a solução das equações de campo lineares (2.26) (com o espaço de referência em coordenadas Cartesianas para efeito de simplicidade matemática) com o espaço de referência descrito em coordenadas Cartesianas, o tensor  $\bar{h}^{\mu\nu}$  deve satisfazer o calibre de Lorentz  $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ . A solução geral no vácuo pode ser escrita como uma superposição de ondas planas da forma

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}.$$

Assim como no eletromagnetismo, na gravitação linearizada o calibre de Lorentz fornece um vínculo adicional

$$A^{\mu\nu} k_\nu = 0.$$

As soluções físicas são obtidas tomando-se a parte real da solução de onda plana

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \text{Re} \left( A^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \right) = \frac{1}{2} A^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} + \frac{1}{2} (A^{\mu\nu})^* e^{-ik_\rho x^\rho},$$

com o quadri vetor de onda dado por

$$\mathbf{k} = (\omega, \vec{k}),$$

onde  $\vec{k}$  é um vetor que aponta na direção de propagação da onda e  $\omega$  é a frequência angular da onda.

O tensor  $A^{\mu\nu}$  é simétrico e possui, a princípio, dez componentes independentes

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix},$$

. Podemos utilizar o calibre de Lorentz

$$A^{\mu\nu}k_\nu = 0$$

para reduzir o número de componentes independentes para seis. Logo, para uma onda que se propaga na direção  $\hat{z}$ , temos

$$k_\nu = (-k, 0, 0, k),$$

onde  $k = \omega$ . Portanto,

$$A^{\mu 0}k_0 + A^{\mu 3}k_3 = 0 \Rightarrow A^{\mu 0}k_0 = -A^{\mu 3}k_3,$$

de onde segue que

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{pmatrix}.$$

Novamente seguindo os passos do caso eletromagnético, vamos realizar outra transformação de calibre

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho.$$

Para satisfazer o calibre de Lorentz, devemos ter

$$\partial_\nu \partial^\nu \xi^\mu = 0 \Rightarrow \xi^\mu = \epsilon^\mu e^{ik_\rho x^\rho},$$

e dessa forma

$$\partial^\mu \xi^\nu = i\epsilon^\nu k^\mu e^{ik_\rho x^\rho}$$

e

$$\partial^\nu \xi^\mu = i\epsilon^\mu k^\nu e^{ik_\rho x^\rho}.$$

Pela transformação de calibre  $\bar{h}_{\mu\nu}$  é levado em

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho \Rightarrow A'^{\mu\nu} = (A^{\mu\nu} - i\epsilon^\mu k^\nu - i\epsilon^\nu k^\mu + i\eta^{\mu\nu} \epsilon^\rho k_\rho),$$

então, para as seis componentes independentes de  $A^{\mu\nu}$ , teremos

$$\begin{aligned} A'^{00} &= A^{00} - ik(\epsilon^0 + \epsilon^3), \\ A'^{01} &= A^{01} - ik\epsilon^1, \\ A'^{02} &= A^{02} - ik\epsilon^2, \\ A'^{11} &= A^{11} - ik(\epsilon^0 - \epsilon^3), \\ A'^{12} &= A^{12}, \\ A'^{22} &= A^{22} - ik(\epsilon^0 - \epsilon^3). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Escolhemos o calibre de forma que  $\epsilon^\mu$  satisfaça

$$\begin{aligned}\epsilon^0 &= \frac{-i(2A^{00} + A^{11} + A^{22})}{4k}, \\ \epsilon^1 &= \frac{-iA^{01}}{k}, \\ \epsilon^2 &= \frac{-iA^{02}}{k}, \\ \epsilon^3 &= \frac{-i(2A^{00} - A^{11} - A^{22})}{4k},\end{aligned}$$

e pelas equações (4.1) ficamos com

$$\begin{aligned}A'^{00} &= A'^{01} = A'^{02} = 0, \\ A'^{11} &= \frac{1}{2}A^{11} - \frac{1}{2}A^{22}, \\ A'^{22} &= -\frac{1}{2}A^{11} + \frac{1}{2}A^{22},\end{aligned}$$

logo

$$A'^{11} = -A'^{22}$$

O tensor  $A^{\mu\nu}$  no calibre de Lorentz (também chamado de calibre transverso ou de traço nulo) é denotado por  $A_{\mu\nu}^{TT}$  e possui apenas dois parâmetros independentes  $a$  e  $b$ , podendo ser escrito como

$$A_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para uma onda viajando na direção  $\hat{z}$  e sendo o traço de  $A_{\mu\nu}^{TT}$  teremos  $\bar{h}^{TT} = 0 = h^{TT}$ , logo  $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}$ . Podemos então introduzir dois tensores de polarização linear

$$\begin{aligned}e_1^{\mu\nu}, & \text{ quando } a = 1 \text{ e } b = 0, \\ e_2^{\mu\nu}, & \text{ quando } a = 0 \text{ e } b = 1.\end{aligned}$$

Assim como no eletromagnetismo, a polarização ocorre no plano perpendicular à propagação da onda. Podemos então escrever a amplitude geral para uma onda qualquer viajando na direção  $\hat{z}$  como

$$A_{TT}^{\mu\nu} = ae_1^{\mu\nu} + be_2^{\mu\nu}.$$

A forma do tensor  $A_{TT}^{\mu\nu}$  define a polarização da onda. Temos duas polarizações possíveis, sendo as outras combinações lineares dessas. Temos a polarização  $+$  com  $A^{12} = A^{21} = 0$  e a polarização  $\times$  com  $A^{11} = A^{22} = 0$ . A existência de apenas duas polarizações é uma propriedade de qualquer campo de spin não nulo que se propaga com velocidade da luz [23].

A partir desse ponto, por questões de simplicidade, consideraremos apenas a polarização  $+$ . Para a polarização  $\times$ , ou a mais geral que é uma combinação linear das duas, os procedimentos são semelhantes e as propriedades físicas de nosso interesse serão as mesmas qualitativamente.

Denotaremos o tensor  $h^{\mu\nu}$  da polarização + como  $h_+^{\mu\nu}$  e a amplitude como  $A_+^{\mu\nu}$ . Dessa forma, temos

$$h_+^{\mu\nu} = A_+^{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho},$$

e assim, como  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  e definindo  $h_+^{11} = -h_+^{22} \equiv h_+$ , teremos o elemento de linha [23] dado por

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+) dx^2 + (1 - h_+) dy^2 + dz^2, \quad (4.2)$$

onde  $h_+ = h_+(z - t)$  para uma onda propagando na direção  $z$  [22] com a condição de linearidade da teoria implicando em

$$|h_+(z - t)| \ll 1. \quad (4.3)$$

Agora podemos analisar o comportamento de uma partícula livre na presença dessa onda que inicialmente tinha quadrivelocidade  $u^\rho$ . A trajetória deve satisfazer a equação da geodésica

$$\frac{du^\rho}{d\tau} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0.$$

Para simplificarmos um pouco mais e podermos ter uma intuição física do que ocorre, consideremos a partícula inicialmente em repouso, i.e., sua quadri-velocidade é  $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . A equação da geodésica será

$$\frac{du^\rho}{d\tau} + \Gamma^\rho_{00} u^0 u^0 = 0 \Rightarrow \frac{du^\rho}{d\tau} = -\Gamma^\rho_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} (\partial_0 h_{\sigma 0} + \partial_0 h_{0\sigma} - \partial_\rho h_{00}).$$

No referencial de uma única partícula ela sempre estará em repouso, dessa forma, a variação da quadri-velocidade será nula em qualquer momento. Precisamos então considerar um conjunto de partículas teste que não interagem entre si para vermos o efeito dessa onda sobre partículas.

Mesmo que as coordenadas de separação entre as partículas dadas pelo vetor  $\eta^\mu = (0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$  sejam constantes o tempo todo [9], isso não implica que a separação física dada por

$$l^2 = -g_{ij} \eta^i \eta^j = (\delta_{ij} - h_{ij}) \eta^i \eta^j, \quad (4.4)$$

também seja. Para lidarmos com a detecção, temos que medir uma diferença entre as partículas devido a passagem da onda. Como o que medimos é a distância no espaço físico e não no quadri-espaço, não teremos problemas, como pode ser visto acima. A detecção das ondas gravitacionais pode ser feita de duas maneiras [9]: pelo desvio da geodésica de duas partículas livres ou através da medida de forças de maré em um objeto após a passagem de uma onda gravitacional. No primeiro caso usamos o fato da separação física entre duas partículas ser dada por (4.4). A fração entre a variação  $\delta l$  após a passagem da onda e a distância  $l_0$  antes da passagem será dada por [9]

$$\frac{\delta l}{l_0} = -12 h_{ij} n^i n^j$$

onde  $n^i$  é um vetor unitário na direção de separação entre as partículas. Já no segundo caso, as forças de restauração dentro do material tendem a compensar os efeitos da força de maré após a passagem da onda, dificultando a detecção de eventuais efeitos memória, uma vez que para

detectá-los, a passagem da onda deve gerar um deslocamento não oscilatório, mas permanente nas partículas teste [24].

Das definições obtidas no TEGR, podemos analisar as propriedades dessas ondas gravitacionais da teoria linear. Do elemento de linha (4.2) que satisfaz a condição (4.3) podemos construir um conjunto de tetradas adaptadas a um observador estático. Para isso, a quadri-velocidade associada ao observador será  $u^\mu = e_{(0)}^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . Um conjunto de tetradas simples e diagonal que satisfaz estas condições é [22]

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{h_+}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{h_+}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

sendo que usamos a relação  $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$  considerando apenas termos até a primeira ordem em  $h_+$  e com determinante  $e = 1$ . A inversa da tetrada acima é dada por

$$e^{a\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{h_+}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{h_+}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Levando o conjunto de tetradas (4.6) na equação (3.24), obtida na seção 3.3, as componentes do momento angular associadas à onda na forma linear são dadas por

$$\begin{aligned} L^{(0)(i)} &= -2k \int_V d^3x \partial_j \left[ e \left( e^{(0)j} e^{(i)0} - e^{(i)j} e^{(0)0} \right) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} L^{(i)(k)} &= -2k \int_V d^3x \partial_j \left[ e \left( e^{(i)j} e^{(k)0} - e^{i0} e^{(k)j} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A partir dos resultados em (4.7) e (4.8) concluímos que no contexto do TEGR as ondas gravitacionais lineares na polarização  $\times$  não transportam momento angular.

Outra propriedade física importante é o quadrimomento do campo gravitacional  $P^a$ . Para calcularmos  $P^a$ , precisamos antes encontrar as torções desse espaço-tempo associadas à tetrada (4.5). As torções não nulas, obtidas a partir de  $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$ , são

$$\begin{aligned} T_{(1)01} &= \partial_0 e_{(1)1} - \partial_1 e_{(1)0} = \frac{1}{2} \partial_0 h_+, \\ T_{(1)13} &= \partial_1 e_{(1)3} - \partial_3 e_{(1)1} = -\frac{1}{2} \partial_3 h_+, \\ T_{(2)02} &= \partial_0 e_{(2)2} - \partial_2 e_{(2)0} = -\frac{1}{2} \partial_0 h_+, \\ T_{(2)23} &= \partial_2 e_{(2)3} - \partial_3 e_{(2)2} = \frac{1}{2} \partial_3 h_+. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Com as torções acima e usando a equação (??), as componentes do vetor quadrimomento são

$$P^a = \int_V \partial_3 (e \Sigma^{a03} d^3x) . \quad (4.10)$$

onde para chegar na equação acima usamos o fato de a função  $h_+$  nas tétradas depender apenas de  $z - t$ .

As quantidades  $\Sigma^{a03}$  definidas em (3.7), até primeira ordem em  $h_+$ , são dadas por

$$\begin{aligned} \Sigma^{(0)03} &= \frac{1}{2} \left( g^{11} g^{33} e^{(1)}_1 T_{(1)13} + g^{22} g^{33} e^{(2)}_2 T_{(2)23} \right) \\ &= \frac{1}{4} \partial_z h_+ \left[ -\frac{1}{1+h_+} \left( 1 + \frac{h_+}{2} \right) + \frac{1}{1-h_+} \left( 1 - \frac{h_+}{2} \right) \right] \\ &\approx \frac{1}{4} \partial_z h_+ \left[ -(1-h_+) \left( 1 + \frac{h_+}{2} \right) + (1-h_+) \left( 1 + \frac{h_+}{2} \right) \right] \\ &\approx 0, \\ \Sigma^{(1)03} &= 0, \\ \Sigma^{(2)03} &= 0, \\ \Sigma^{(3)03} &= \frac{1}{2} \left( g^{11} e^{(1)}_1 T_{(1)01} + g^{22} e^{(2)}_2 T_{(2)02} \right) \\ &= \frac{1}{4} \partial_z h_+ \left[ \frac{1}{1+h_+} \left( 1 + \frac{h_+}{2} \right) - \frac{1}{1-h_+} \left( 1 - \frac{h_+}{2} \right) \right] \\ &\approx \frac{1}{4} \partial_z h_+ \left[ (1-h_+) \left( 1 + \frac{h_+}{2} \right) - (1-h_+) \left( 1 + \frac{h_+}{2} \right) \right] \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

A partir das quatro equações acima, concluímos que com termos até primeira ordem em  $h_+$ , todas as componentes do vetor quadrimomento são nulas, i.e,

$$P^a = 0.$$

Portanto, no contexto das ondas gravitacionais da teoria linear, concluímos que tais ondas não transportam energia, momento e nem momento angular. Embora a energia possa ser não nula ao considerarmos termos de ordem mais alta em  $h_+$ , o momento angular ainda assim terá todas as componentes nulas, não importando a ordem considerada em  $h_+$ .

A seguir estudaremos os efeitos físicos da passagem de uma onda gravitacional na forma linearizada sobre uma partícula de massa  $m$ . Começamos escrevendo a Lagrangiana para uma partícula no espaço-tempo descrito pelo elemento de linha (4.2) como

$$L = \frac{m}{2} \left( -\dot{t}^2 + g_{11} \dot{x}^2 + g_{22} \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right), \quad (4.11)$$

onde o ponto representa a derivada em relação ao tempo próprio  $\tau$  e  $g_{11}$  e  $g_{22}$  são funções apenas de  $z - t$ . Definindo  $u \equiv (z - t)/\sqrt{2}$  e uma vez que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  com  $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(z - t)$ , podemos escrever as equações da geodésica da partícula como

$$2\ddot{t} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \dot{x}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \dot{y}^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(g_{11}\dot{x}) &= 0, \\ \frac{d}{d\tau}(g_{22}\dot{y}) &= 0, \\ 2\ddot{z} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\dot{x}^2 + \frac{\partial g_{22}}{\partial u}\dot{y}^2 &= 0.\end{aligned}$$

Nas equações acima, igualando a primeira equação à última equação segue que

$$\ddot{z} - \ddot{t} = 0 \Rightarrow \dot{z} - \dot{t} \equiv k' = \text{constante}.$$

A quadrivelocidade de um observador adaptado ao conjunto de tetradas dado por (4.5) é  $u^\mu = e_{(0)}^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . Assim, a energia da partícula na presença da onda gravitacional da teoria linear quando medida por um observador adaptado ao conjunto de tetradas (4.5) é dada por

$$E = p_\mu u^\mu = -p_0 = m\dot{t},$$

e como ao longo da geodésica  $\dot{t} = (-g_{00})^{-\frac{1}{2}} = 1$ , a energia da partícula na presença da onda gravitacional linearizada será a energia de repouso, i.e.,

$$E = m.$$

Com isso, concluímos que no contexto do TEGR e do ponto de vista de observadores estáticos, a onda gravitacional linearizada não transporta energia e nem momento angular [22]. Esse fato serve de motivação para estudarmos, na próxima seção, uma classe de ondas planas que são soluções exatas das equações de Einstein, as chamadas ondas polarizadas de frente plana.

## 4.2 PP-Waves

Como visto na seção anterior, as ondas gravitacionais que são solução da teoria linear requerem que seja verdadeira a suposição física de que a grandes distâncias da fonte possamos escrever a métrica como  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , onde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Além disso, algumas de suas propriedades física são de certa forma inesperadas, vide seção 4.1.

Ondas gravitacionais como soluções exatas das equações de Einstein foram consideradas por Einstein logo após o surgimento da Relatividade Geral [25]. Já as ondas gravitacionais polarizadas de frente plana, que possuem polarização no plano perpendicular à direção de propagação, e que são soluções exatas das equações de Einstein foram descobertas por N. Rosen em 1937 [26] entretanto, os resultados obtidos por Rosen continham singularidades, o que o fez descartar tais soluções como sendo não físicas. Bondi comenta na referência [25] que as suposições de simetria que Rosen fez para construir a métrica e a solução foram muito fortes, em particular a exigência de um sistema de coordenadas não singular que cobrisse todo o espaço-tempo [26]. Sabemos atualmente que a exigência de um sistema de coordenadas global não singular não é um condição necessária para termos uma variedade física, e com base nos argumentos de Bondi consideraremos, a seguir, uma métrica que representa uma onda de frente plana se propagando na direção do eixo  $z$  e é solução exata das equações de Einstein.

A classe de ondas planas chamadas de PP-Waves possui as mesmas componentes do campo em todos os pontos da frente de onda, tendo uma "simetria plana" no plano perpendicular à propagação [27]. Para uma onda propagando na direção  $z$  em cada valor constante do tempo, devemos ter um plano  $z = \text{constante}$  em que o campo gravitacional deve ser essencialmente o mesmo. Sendo assim, as componentes da métrica devem ser funções de  $z - t$ ,  $x$  e  $y$ . Assim, analogamente às ondas eletromagnéticas propagando ao longo do eixo  $z$ , aqui as ondas devem também ser funções de  $k_\mu x^\mu = k_0 x^0 + k_3 x^3 = k(z - t)$ , conforme visto na seção 2.1.

A classe geral de soluções que satisfazem as propriedades requeridas é descrita em termos das coordenadas de Brinkmann por [28] [29]

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j - 2dudv + 2a_i(u, x^j) dudx^i + H(u, x^j) du^2,$$

onde  $i = 1, 2$ . Tomando as funções fora da diagonal  $a_i(u, x^j)$  como nulas (desconsiderando a possibilidade do caráter rotacional e de expansão da fonte [29]), obtemos o elemento de linha [30]

$$ds^2 = -2dudv + H(u, x, y) du^2 + dx^2 + dy^2, \quad (4.12)$$

onde definimos as coordenadas nulas

$$u \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(z - t) \quad (4.13)$$

e

$$v \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(z + t). \quad (4.14)$$

Podemos então ver pela equação (4.12) que a dependência da função  $H(u, x, y)$  em  $z - t$  garante que a onda seja plana em toda sua frente e se propaga com a velocidade da luz. Ao tomarmos a função  $H(u, x, y) = 0$  obtemos o espaço-tempo de Minkowski.

O elemento de linha (4.12) pode ser reescrito em função das coordenadas cartesianas  $(t, x, y, z)$  como

$$ds^2 = \left( \frac{H(u, x, y)}{2} - 1 \right) dt^2 + dx^2 + dy^2 + \left( \frac{H(u, x, y)}{2} + 1 \right) dz^2 - H(u, x, y) dt dz. \quad (4.15)$$

A partir do elemento de linha (4.15) podemos encontrar as conexões de Christoffel usando a equação (2.12). As componentes não nulas são

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{4}\partial_0 H, & \Gamma_{01}^0 &= -\frac{1}{4}\partial_1 H, & \Gamma_{02}^0 &= -\frac{1}{4}\partial_2 H, & \Gamma_{03}^0 &= -\frac{1}{4}\partial_3 H, \\ \Gamma_{13}^0 &= \frac{1}{4}\partial_1 H, & \Gamma_{23}^0 &= \frac{1}{4}\partial_2 H, & \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{4}\partial_0 H + \frac{1}{2}\partial_3 H, & \Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{4}\partial_1 H, \\ \Gamma_{03}^1 &= \frac{1}{4}\partial_1 H, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{4}\partial_1 H, & \Gamma_{00}^2 &= -\frac{1}{4}\partial_2 H, & \Gamma_{03}^2 &= \frac{1}{4}\partial_2 H, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{4}\partial_2 H, & \Gamma_{00}^3 &= -\frac{1}{4}\partial_3 H, & -\frac{1}{2}\partial_0 H & & \Gamma_{01}^3 &= -\frac{1}{4}\partial_1 H, & \Gamma_{02}^3 &= -\frac{1}{4}\partial_2 H, \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{4}\partial_0 H, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{4}\partial_1 H, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{4}\partial_2 H, & \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{4}\partial_3 H, \end{aligned}$$

logo, pelas equações (2.13) e (2.14) obtemos as componentes não nulas do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{4} (-\partial_x \partial_x H - \partial_y \partial_y H), \\ R_{03} &= \frac{1}{4} (\partial_x \partial_x H + \partial_y \partial_y H), \\ R_{44} &= \frac{1}{4} (-\partial_x \partial_x H - \partial_y \partial_y H), \end{aligned}$$

e usando as equações de Einstein (2.19) no vácuo, obtemos que [31]

$$\partial_x^2 H + \partial_y^2 H = 0, \quad (4.16)$$

ou seja,  $H$  satisfaz a equação de Poisson nas coordenadas  $x$  e  $y$ . A forma matricial da métrica (4.15) é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(\frac{H}{2} - 1\right) & 0 & 0 & -\frac{H}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{H}{2} & 0 & 0 & \left(\frac{H}{2} + 1\right) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

e sua inversa é dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{H}{2} - 1\right) & 0 & 0 & -\frac{H}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{H}{2} & 0 & 0 & \left(1 - \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Para estudarmos as propriedades desse espaço-tempo no contexto do TEGR, precisamos construir um conjunto de tetradas relacionado à métrica (4.17) e que esteja adaptada a observadores estáticos, i.e.,  $e_{(0)}^i = 0$ . Um conjunto de tetradas relacionada à (4.15) e que satisfaz esses critérios é dado por [22]

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & -B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

cuja inversa é

$$e^{a\mu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A} & 0 & 0 & -\frac{B}{AC} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Da relação  $g_{\mu\nu} = e_{a\mu} e^a_\nu$ , temos que as funções  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dadas por

$$A = \left(1 - \frac{H}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B = \frac{\frac{H}{2}}{\left(1 - \frac{H}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad C = \left(1 - \frac{H}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

e a quadri-velocidade do observador adaptado à tetrada (4.20) é

$$u^\mu = e_{(0)}^\mu = \left( \frac{1}{A}, 0, 0, 0 \right),$$

o que significa que  $e_{(0)}^i = 0$ , ou seja, o conjunto de tétradas está adaptado a um observador estático. Os índices espaciais de Lorentz fixam a orientação espacial do referencial, ou seja,  $e_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0)$  e  $e_{(3)}^\mu = \left(-\frac{H}{2A}, 0, 0, A\right)$  são vetores unitários ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente.

Com o conjunto de tétradas (4.20) cujo o determinante    $e = AC = 1$ , podemos utilizar a equação (3.24) para calcularmos as componentes do momento angular. Como o tensor momento angular   antissimétrico em seus índices, as componentes da diagonal são nulas, restando apenas seis componentes não identicamente nulas

$$\begin{aligned} L^{(0)(1)} &= -2k \int_V d^3x \left[ \partial_x \left( e^{(0)1} e^{(1)0} - e^{(0)0} e^{(1)1} \right) + \partial_y \left( e^{(0)2} e^{(1)0} - e^{(0)0} e^{(1)2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_z \left( e^{(0)3} e^{(1)0} - e^{(0)0} e^{(1)3} \right) + \partial_t \left( e^{(0)0} e^{(1)0} - e^{(0)0} e^{(1)0} \right) \right] \\ &= -2k \int_V d^3x \partial_x \left( \frac{1}{A} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} L^{(0)(2)} &= -2k \int_V d^3x \left[ \partial_x \left( e^{(0)1} e^{(2)0} - e^{(0)0} e^{(2)1} \right) + \partial_y \left( e^{(0)2} e^{(2)0} - e^{(0)0} e^{(2)2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_z \left( e^{(0)3} e^{(2)0} - e^{(0)0} e^{(2)3} \right) + \partial_t \left( e^{(0)0} e^{(2)0} - e^{(0)0} e^{(2)0} \right) \right] \\ &= -2k \int_V d^3x \partial_y \left( \frac{1}{A} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} L^{(0)(3)} &= -2k \int_V d^3x \left[ \partial_x \left( e^{(0)1} e^{(3)0} - e^{(0)0} e^{(3)1} \right) + \partial_y \left( e^{(0)2} e^{(3)0} - e^{(0)0} e^{(3)2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_z \left( e^{(0)3} e^{(3)0} - e^{(0)0} e^{(3)3} \right) + \partial_t \left( e^{(0)0} e^{(3)0} - e^{(0)0} e^{(3)0} \right) \right] \\ &= 2k \int_V d^3x \partial_z \left( \frac{1}{AC} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} L^{(1)(2)} &= -2k \int_V d^3x \left[ \partial_x \left( e^{(1)1} e^{(2)0} - e^{(1)0} e^{(2)1} \right) + \partial_y \left( e^{(1)2} e^{(2)0} - e^{(1)0} e^{(2)2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_z \left( e^{(1)3} e^{(2)0} - e^{(1)0} e^{(2)3} \right) + \partial_t \left( e^{(1)0} e^{(2)0} - e^{(1)0} e^{(2)0} \right) \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} L^{(1)(3)} &= -2k \int_V d^3x \left[ \partial_x \left( e^{(0)1} e^{(3)0} - e^{(1)0} e^{(3)1} \right) + \partial_y \left( e^{(1)2} e^{(3)0} - e^{(1)0} e^{(3)2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_z \left( e^{(1)3} e^{(3)0} - e^{(1)0} e^{(3)3} \right) + \partial_t \left( e^{(1)0} e^{(3)0} - e^{(1)0} e^{(3)0} \right) \right] \\ &= 2k \int_V d^3x \partial_x \left( \frac{H}{2A} \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} L^{(2)(3)} &= -2k \int_V d^3x \left[ \partial_x \left( e^{(2)1} e^{(3)0} - e^{(2)0} e^{(3)1} \right) + \partial_y \left( e^{(2)2} e^{(3)0} - e^{(2)0} e^{(3)2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_z \left( e^{(2)3} e^{(3)0} - e^{(2)0} e^{(3)3} \right) + \partial_t \left( e^{(2)0} e^{(3)0} - e^{(2)0} e^{(3)0} \right) \right] \\ &= 2k \int_V d^3x \partial_y \left( \frac{H}{2A} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Concluimos que as ondas gravitacionais de frente plana, soluções das equações de Einstein, transportam momento angular, ao contrário das ondas gravitacionais da teoria linear. O momento angular carregado pela onda é apenas nas direções ortogonais à propagação, uma vez que  $L_z = L^{(1)(2)} = 0$ . Os boosts  $L^{(0)(i)}$  estão relacionados ao centro de inércia do campo gravitacional [32], logo, esse campo gravitacional possui um centro de inércia que varia apenas nas direções transversais à propagação e é nulo na direção de propagação, o que condiz com o fato das PP-Waves possuírem uma frente plana.

No que se segue apresentaremos o vetor quadrimomento das ondas gravitacionais descritas pelo conjunto de tetradas (4.19). As torções  $T_{\mu\nu\rho}$  não nulas associadas a estas tetradas são [33]

$$\begin{aligned}
T_{001} &= \frac{1}{2}\partial_1 A^2, \\
T_{002} &= \frac{1}{2}\partial_2 A^2, \\
T_{003} &= \frac{1}{2}\partial_3 A^2 - A\partial_0 B, \\
T_{013} &= -A\partial_1 B, \\
T_{023} &= -A\partial_2 B, \\
T_{301} &= B\partial_1 A, \\
T_{302} &= B\partial_2 A, \\
T_{303} &= B\partial_3 A + \frac{1}{2}\partial_0(-B^2 + C^2), \\
T_{313} &= \frac{1}{2}\partial_1(-B^2 + C^2), \\
T_{323} &= \frac{1}{2}\partial_2(-B^2 + C^2).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

As quantidades  $dS_i (e\Sigma^{a0i})$  não nulas são dadas por [33]

$$\begin{aligned}
dS_i (e\Sigma^{(0)0i}) &= -\frac{1}{8(-g_{00})^{\frac{1}{2}}}[dydz\partial_1 H + dzdx\partial_2 H], \\
dS_i (e\Sigma^{(1)0i}) &= \frac{1}{8(-g_{00})}[dydz\partial_0 H + dydx\partial_1 H], \\
dS_i (e\Sigma^{(2)0i}) &= \frac{1}{8(-g_{00})}[dxdz\partial_1 H + dydx\partial_2 H], \\
dS_i (e\Sigma^{(3)0i}) &= -\frac{1}{8(-g_{00})^{\frac{1}{2}}}[dydz\partial_1 H + dzdx\partial_2 H].
\end{aligned} \tag{4.28}$$

A partir dos resultados em (4.28), usando

$$P^a = 4k \oint_S \partial_i (e\Sigma^{a0i}),$$

e o fato de  $dS_i (e\Sigma^{(0)0i}) = dS_i (e\Sigma^{(3)0i})$ , teremos como componentes não nulas do vetor quadrimomento apenas

$$\begin{aligned}
P^{(0)} = P^{(3)} &= 4k \oint_S dS_i (e\Sigma^{(0)0i}) = 4k \int_V d^3x \partial_i (e\Sigma^{(0)0i}) \\
&= -\frac{k}{8} \int_V d^3x \frac{1}{A^3} [(\partial_x H)^2 + (\partial_y H)^2] \leq 0,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde usamos o fato de que  $\partial^i \partial_i H = 0$ , com  $i = 1, 2$ .

Como  $P^{(1)} = P^{(2)} = 0$ , podemos ver que  $P^a P_a = 0$ , o que é consistente com o fato das ondas gravitacionais descreverem partículas não massivas [22]. Podemos ver pela equação (4.29) que a energia dessa onda gravitacional é negativa. O fato dessas ondas gravitacionais possuírem energia negativa é consistente com o fato dela representar um campo gravitacional. O fluxo de energia sempre é positivo, mas o saldo final de energia pode ser negativo, e é o que ocorre em campos gravitacionais, como podemos ver em um simples experimento de pensamento abaixo.

Toda energia de ligação é essencialmente negativa logo, a energia do campo gravitacional, que é sempre de atração, é negativa. Por exemplo, no caso de um buraco negro de Schwarzschild de massa  $M$ , um observador estático a uma distância infinita do mesmo medirá uma energia  $E = M$ . Por outro lado um observador no horizonte de eventos em  $r_+ = 2M$ , medirá uma energia  $E' = 2M$ . Portanto, a energia do campo gravitacional dada pela diferença  $\Delta E = E - E' = -M$  será negativa.

### 4.3 Energia cinética de partículas na presença de ondas planas exatas

Já apresentamos, no contexto do TEGR, uma descrição das propriedades do campo gravitacional dado pelo elemento de linha (4.15) e agora vamos analisar o comportamento de partículas na presença desse campo, em especial a mudança na energia cinética das partículas devido à passagem da onda gravitacional.

A Lagrangiana em coordenadas Cartesianas  $(t, x, y, z)$  para uma partícula de massa  $m$  na presença da onda gravitacional descrita por (4.15) é

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{m}{2} (g_{00} \dot{t}^2 + g_{11} \dot{x}^2 + g_{22} \dot{y}^2 + g_{33} \dot{z}^2 + g_{00} \dot{t}^2 + 2g_{03} \dot{t} \dot{z}),$$

novamente o ponto representa a derivada em relação ao tempo próprio  $\tau$  da partícula. As equações de Euler-Lagrange em função das variáveis  $u, x, y, z$  são

$$2\ddot{t} + \sqrt{2}H\ddot{u} + \sqrt{2}\dot{H}\dot{u} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u}^2 = 0, \quad (4.30)$$

$$2\ddot{x} - \frac{\partial H}{\partial x} \dot{u}^2 = 0, \quad (4.31)$$

$$2\ddot{x} - \frac{\partial H}{\partial y} \dot{u}^2 = 0, \quad (4.32)$$

$$2\ddot{z} + \sqrt{2}H\ddot{u} + \sqrt{2}\dot{H}\dot{u} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u}^2 = 0, \quad (4.33)$$

e subtraindo a equação (4.30) da equação (4.33), obtemos

$$\ddot{z} - \ddot{t} = 0 \Rightarrow \ddot{u} = 0 \Rightarrow \dot{u} \equiv -k = \text{constante}. \quad (4.34)$$

Uma partícula de massa  $m$  nesse campo gravitacional possui quadrimomento  $p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu$ , cuja componente temporal é  $p_0 = g_{0\nu} p^\nu = g_{00} m \dot{t} + g_{03} m \dot{z}$ . Sendo assim, um observador adaptado à

tétrada (4.19) mede o quadrimomento

$$p_a = e_a^\mu p_\mu,$$

logo, a energia da partícula medida por esse observador será

$$\begin{aligned} E &= -p_\mu u^\mu = -e_{(0)}^\mu p_\mu = -e_{(0)}^0 p_0 \\ &= m \left( \sqrt{1 - \frac{H}{2}} \dot{t} + \frac{H}{2\sqrt{1 - \frac{H}{2}}} \right) \\ &= m \left( 1 + \frac{\frac{H}{2}}{1 - \frac{H}{2}} \right) + m\sqrt{2}k \left( \frac{\frac{H}{2}}{\sqrt{1 - \frac{H}{2}}} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde usamos o fato de que ao longo da geodésica seguida pela partícula  $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{H}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ .

Vemos que uma onda gravitacional como solução exata das equações de Einstein dada pelo elemento de linha (4.15) interfere na quantidade conservada da partícula  $E$ , o que já não ocorre em uma onda gravitacional proveniente de uma solução da teoria linear. A partícula terá seu estado cinemático momentaneamente alterado pela transferência de energia do campo gravitacional, podendo essa transferência ser positiva ou negativa. Mesmo no calibre do cone de luz onde  $\dot{z} = \dot{t} \Rightarrow k = 0$ , ainda poderá ocorrer transferência de energia, uma vez que o primeiro termo do lado direito em (4.35) não depende de  $k$  e, como o valor de  $\frac{H}{2}$  é limitado a ser menor do que 1 (ou não seria possível construirmos um conjunto de tétradas para a métrica), se  $H$  for positivo a energia da partícula será maior do que a de repouso e se  $H$  for negativo a energia será menor do que a energia de repouso.

Agora trataremos da trajetória da partícula na presença da onda gravitacional e para tal, as equações (4.31) e (4.32) podem ser reescritas em função da variável  $u$  como

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx}{du} \frac{du}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x} \dot{u}^2 \\ &= \ddot{u} \frac{dx}{du} + \dot{u}^2 \frac{d^2x}{du^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x} \dot{u}^2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{du^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)^2 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dy}{du} \frac{du}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y} \dot{u}^2 \\ &= \ddot{u} \frac{dy}{du} + \dot{u}^2 \frac{d^2y}{du^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y} \dot{u}^2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{du^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde usamos o fato de que  $\ddot{u} = 0$ , tornando possível eliminarmos  $\dot{u}$  das equações, logo, as equações para as coordenadas  $x$  e  $y$  em função de  $u$  não dependem da escolha de  $k$ . Para encontrarmos uma equação de movimento para a coordenada  $z$ , partimos da definição da variável  $u$  e sua derivada em relação ao tempo próprio, i.e.,

$$\dot{u} = -k = \frac{\dot{z} - \dot{t}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dot{z} = \dot{t} - k\sqrt{2},$$

e usando que

$$\dot{t} = \sqrt{-g_{00}} = \left(1 - \frac{H}{2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

obtemos

$$\dot{z} = \left(1 - \frac{H}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}k . \quad (4.38)$$

Para encontrarmos as trajetórias precisamos resolver as equações diferenciais (4.36), (4.37), (4.38) numericamente para condições iniciais especificadas. Para tal, precisamos ter a forma explícita da função  $H(u, x, y)$  que satisfaça às equações de Einstein (4.16). As soluções gerais da equação (4.16) são obtidas introduzindo-se uma variável complexa auxiliar  $\zeta = x + iy$  no plano transversal, de maneira que a solução possa ser expressa como  $H = F(u, \zeta) + F^*(u, \zeta^*)$ . As soluções de interesse físico são tais que [29]

$$F(u, \zeta) = \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m(u) \zeta^m - \mu(u) \log \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(u) \zeta^{-m} . \quad (4.39)$$

Podemos ver pela equação (4.39) que as soluções possuirão singularidades na origem (para  $\alpha_m = 0$  e  $\beta_m \neq 0$ ) ou no infinito (para  $\alpha_m \neq 0$  e  $\beta_m = 0$ ), e que o termo de logarítmico também possui uma singularidade na origem. Nessa dissertação consideraremos três soluções para a função  $H(u, x, y)$ , duas com singularidades no infinito e uma com singularidade na origem.

A primeira escolha da função  $H(u, x, y)$  fornece uma polarização  $\times$  no plano ortogonal à direção de propagação da onda [34]. Uma solução para a função  $H$  pode ser escrita como [35]

$$H = A(u)(xy) . \quad (4.40)$$

Como apenas a parte da função  $H(u, x, y)$  que depende das variáveis  $x$  e  $y$  possuem restrição em sua forma pelas equações de Einstein (4.16), podemos então escolher a função  $A(u)$  de maneira a especificarmos o formato do pulso que estamos considerando. Tal pulso possui constantes  $L$  e  $\lambda$  que corrigem a dimensão da função  $A(u)$ , de maneira que a função  $H$  e o argumento da exponencial fiquem adimensionais.

Um pulso gaussiano considerado na referência [35] é

$$A(u) = \frac{1}{L^2} e^{-\frac{u^2}{\lambda^2}} , \quad (4.41)$$

onde a constante  $\lambda$  está relacionada com o comprimento da gaussiana, ou seja, o intervalo no qual a onda atuará na partícula; enquanto que a constante  $L$  está relacionada com o tamanho da área transversal da onda. Ao longo desse trabalho, por questões de simplicidade, tomaremos ambas constantes como sendo a unidade. A seguir, resolveremos numericamente, usando o programa MATHEMATICA, as equações (4.36), (4.37) e (4.38) para alguma polarizações. Para esse pulso e  $H(u, x, y)$  dado por (4.40) e condições iniciais

$$x_0 = 0.1, \quad y_0 = 0.2, \quad z_0 = 0.1, \quad v_{0x} = 0.1, \quad v_{0y} = 0 , \quad (4.42)$$

as trajetórias e velocidades são apresentadas nas figuras 4.1 e 4.2, respectivamente.

Para outras condições iniciais, por exemplo,

$$x_0 = 0.1, \quad y_0 = -0.2, \quad z_0 = 0.1, \quad v_{0x} = 0.1, \quad v_{0y} = 0 , \quad (4.43)$$

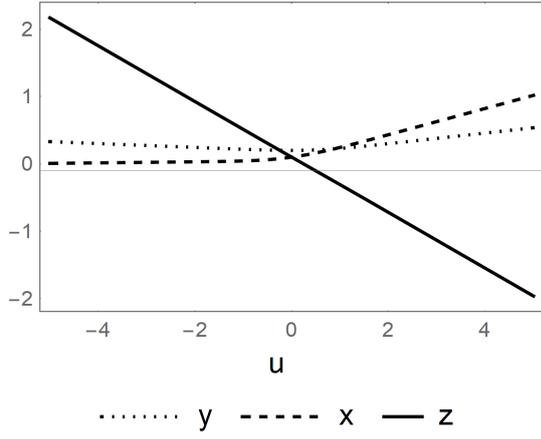


Figura 4.1: Trajetórias na polarização (4.40) para as condições iniciais (4.42)

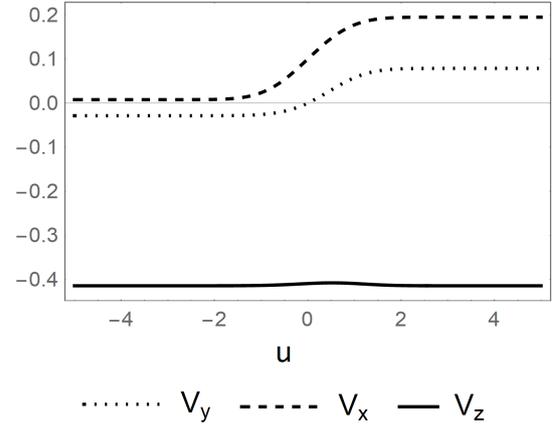


Figura 4.2: Velocidades na polarização (4.40) para as condições iniciais (4.42)

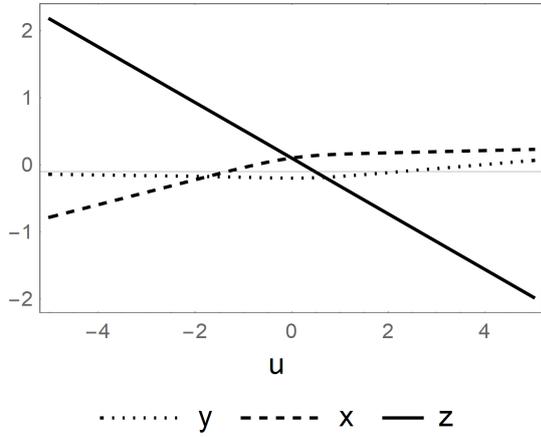


Figura 4.3: Trajetórias na polarização (4.40) para as condições iniciais (4.43)

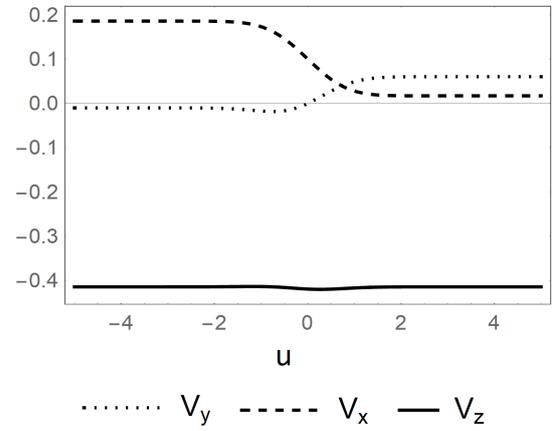


Figura 4.4: Velocidades na polarização (4.40) para as condições iniciais (4.43)

temos as trajetórias apresentadas na figura 4.3 e velocidades apresentadas na figura 4.4.

Vemos pela figuras 4.2 e 4.4 que o espaço é plano após a passagem da onda, uma vez que as trajetórias voltam a possuir velocidade constante longe da frente de onda  $u = 0$ . Em todos os gráficos nesse trabalho plotados em função de  $u$ , o tempo  $t$  corre no sentido negativo de  $u$ , uma vez que  $\sqrt{2}u = z - t$ .

No segundo caso consideramos a polarização + [34] ou seja,

$$H = A(u)(x^2 - y^2) . \quad (4.44)$$

Neste caso as trajetórias e velocidades são apresentadas nas figuras 4.5 e 4.6, respectivamente.

Podemos ver que em ambas as polarizações a velocidade inicial da partícula é alterada permanentemente. Como as velocidades dessas partículas são não relativísticas, sua energia cinética será praticamente a energia cinética clássica [35]. É de se esperar então, que sua energia cinética clássica também seja alterada permanentemente. A energia cinética  $K$  da partícula será dada, em

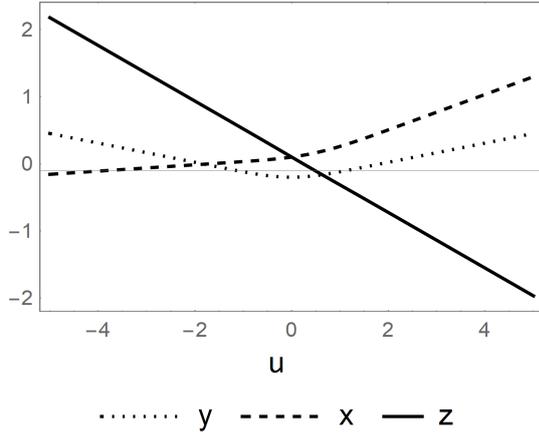


Figura 4.5: Trajetórias na polarização (4.44) para as condições iniciais (4.43)

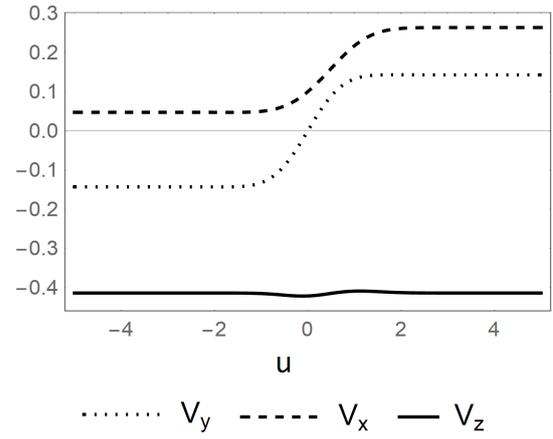


Figura 4.6: Velocidades na polarização (4.44) para as condições iniciais (4.43)

uma boa aproximação nas regiões antes ( $u > 0$ ) e depois ( $u < 0$ ) da passagem da onda, por [35]

$$K = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + \left( \frac{dz}{du} \right)^2 \right]. \quad (4.45)$$

Podemos ver pelas figuras 4.7 e 4.8 que a energia cinética (4.45) das partículas é alterada permanentemente após a passagem da onda. A energia cinética clássica aumenta ou diminui, dependendo das condições iniciais. A polarização (4.44) também leva aos mesmos resultados de variação permanente da energia cinética da partícula, a depender de suas condições iniciais.

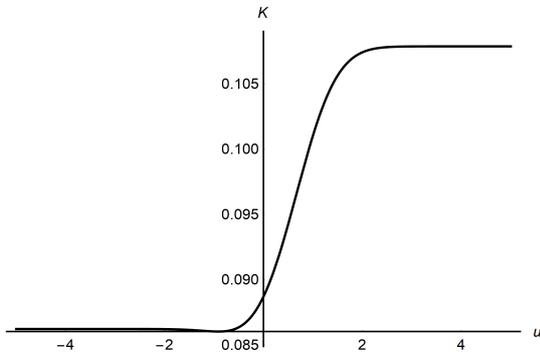


Figura 4.7: Energia cinética clássica na polarização (4.40) para as condições iniciais (4.42)

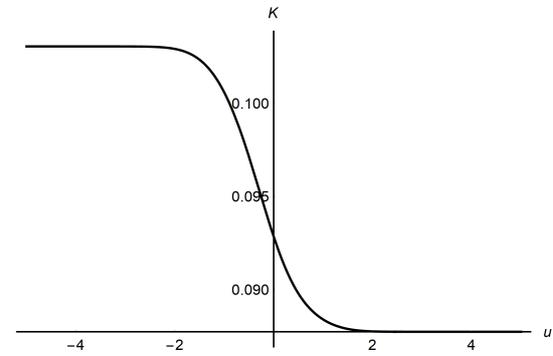


Figura 4.8: Energia cinética clássica na polarização (4.40) para as condições iniciais (4.43)

Uma combinação linear das polarizações levará à resultados semelhantes, podendo em alguns casos o ganho de energia cinética por uma polarização ser compensada pela perda em outra. Entretanto, tais ocorrências dependem extremamente das condições iniciais, sendo que nos vários casos testados nenhum padrão pode ser observado. A variação da energia cinética das partículas pode ser positiva ou negativa logo, as ondas gravitacionais podem ganhar ou perder energia ao interagirem com partículas. Na seção 4.2 vimos que a energia da onda gravitacional descrita pelo elemento de linha (4.15) é negativa logo, para dissipar energia, a onda deve absorver energia das

partículas com as quais interage. Pela aparente aleatoriedade nas condições iniciais que levam a perda ou ganho de energia por parte da onda, espera-se que em um grande percurso esses efeitos se anulem em média, tornando possível que elas viagem por grandes distâncias sem se dissiparem, e também tornando possível a detecção de eventuais efeitos memória. Enquanto a energia cinética clássica das partículas se altera permanentemente, a quantidade conservada dada em (4.35) e medida por observadores estáticos varia próximo à frente de onda  $u = 0$ , mas retorna aos mesmos valores em todas as polarizações após a passagem da onda. Isto pode ser observado na figura 4.9.

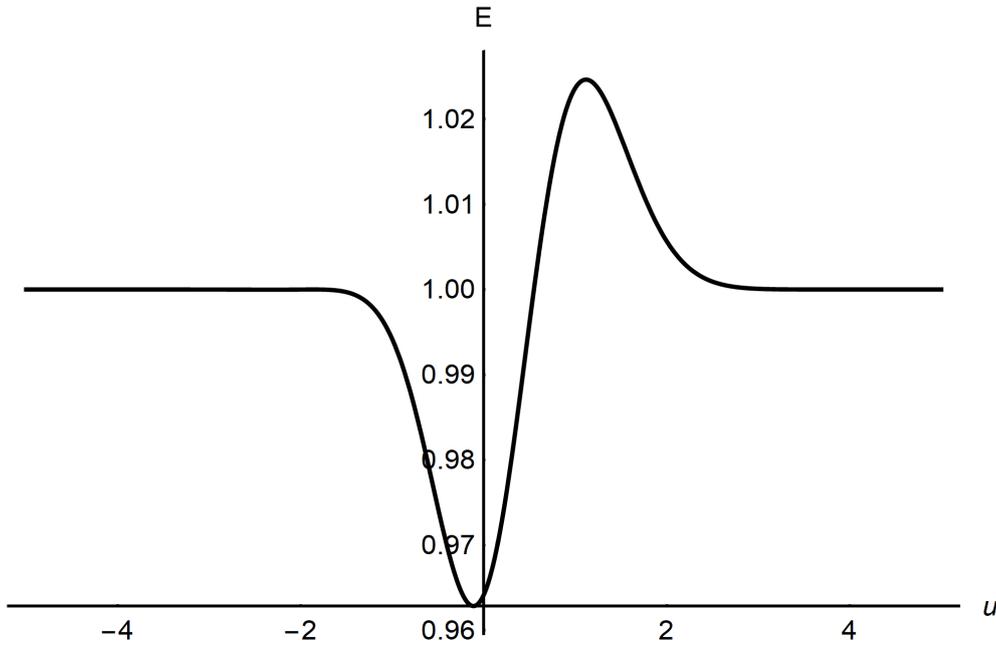


Figura 4.9: Quantidade conservada (4.35) para polarização (4.44) e condições iniciais (4.43)

Até o momento analisamos apenas soluções da equação (4.39) com singularidade no infinito e, vimos que mesmo com um espaço perpendicular não assintoticamente plano, o efeito gravitacional da onda sobre partículas é limitado, uma vez que o pulso gaussiano é limitado tanto no tempo de atuação da onda, quanto no intervalo ao longo do eixo de propagação  $z$  da onda. Uma solução assintoticamente plana na forma de pacotes de ondas e que possui singularidade na origem é dada por [31]

$$H = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} e^{-u^2} . \quad (4.46)$$

Para uma função  $H$  dada por (4.46) os efeitos qualitativos na trajetória, velocidade e energia cinética da partícula são basicamente os mesmos, como pode ser observado nas figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13, com condições iniciais

$$x_0 = 0.8, \quad y_0 = -0.5, \quad z_0 = 0.1, \quad v_{0x} = 0.1, \quad v_{0y} = 0 . \quad (4.47)$$

Todas as polarizações que consideramos levam a variações permanentes na energia cinética da partícula para certas condições iniciais. Uma mesma polarização pode aumentar ou diminuir a energia cinética das partículas, a depender das condições iniciais [35]. Como vimos nas figuras (4.7)

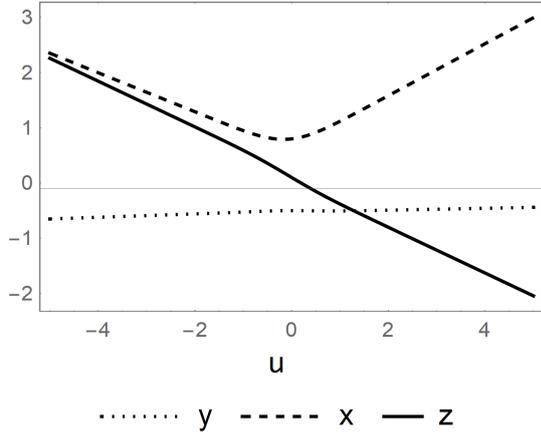


Figura 4.10: Trajetórias para (4.46) e condições iniciais (4.47)

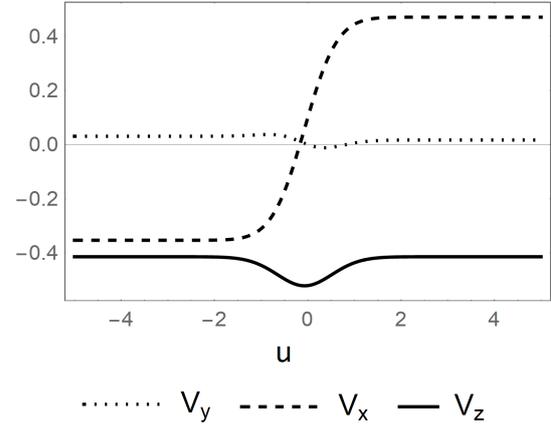


Figura 4.11: Velocidades para (4.46) e condições iniciais (4.47)

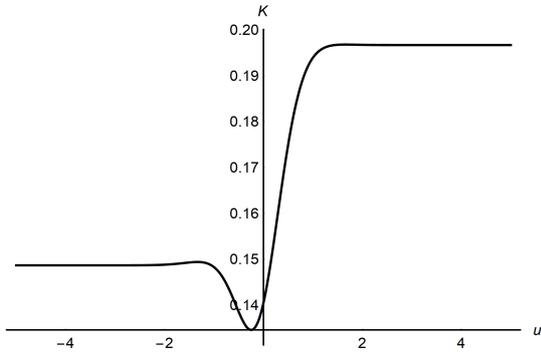


Figura 4.12: Energia cinética clássica para (4.46) e condições iniciais (4.47)

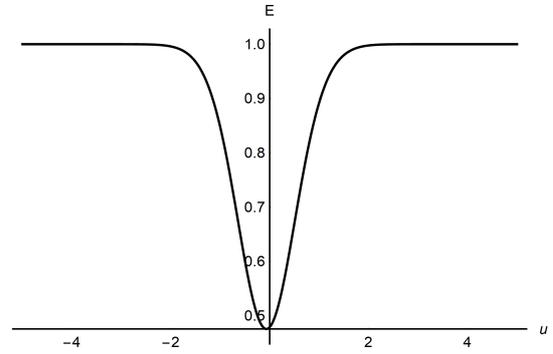


Figura 4.13: Quantidade conservada (4.35) para a (4.46) e condições iniciais (4.47)

e (4.8), ao mudarmos a posição da partícula para outro quadrante do plano perpendicular à direção de propagação da onda, a energia cinética da partícula passou de um estado de decréscimo para acréscimo, mesmo com a distância inicial à origem mantida constante. Tal fato levanta a hipótese de que a posição axial inicial da partícula seja um dos fatores determinante no comportamento da energia cinética da partícula. A análise desse comportamento se torna mais simples ao analisarmos o elemento de linha (4.15) em coordenadas polares, que será feita na próxima seção.

#### 4.4 Regiões de acréscimo e decréscimo da energia cinética

Para entendermos melhor a questão das condições iniciais e o acréscimo ou decréscimo da energia cinética por parte da partícula, convém escrever a métrica (4.15) em coordenadas polares. Definindo  $x = \rho \cos \phi$  e  $y = \rho \sin \phi$ , ficamos com

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 - dudv + H(u, \rho, \phi) du^2, \quad (4.48)$$

nessas coordenadas as equações de movimento para a partícula são

$$\frac{d^2\rho}{du^2} - \rho^2 \left( \frac{d\phi}{du} \right)^2 - \frac{1}{2} \partial_\rho H = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{du} \frac{d\phi}{du} - \frac{1}{2\rho^2} \partial_\phi H = 0, \quad (4.50)$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{H}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}, \quad (4.51)$$

onde usamos o fato de que  $\ddot{u} = 0$ .

Para analisarmos as condições que levam ao acréscimo ou decréscimo da energia cinética, usando o fato de que antes e após a passagem da onda o espaço-tempo é plano, escolhemos um  $u_f$  após a passagem da onda e um  $u_i$  antes da passagem da onda. Sendo assim, a partir da energia cinética final  $K_f = K(u_f)$  e da energia cinética inicial  $K_i = K(u_i)$ , definimos a quantidade

$$\Delta K \equiv \frac{K_f - K_i}{K_f + K_i}, \quad (4.52)$$

que será positiva sempre que a energia cinética aumentar e negativa sempre que a energia cinética diminuir. Quanto maior for  $\Delta K$ , maior será a variação da energia da cinética e, quanto menor for  $\Delta K$ , menor será o ganho de energia cinética da partícula. O denominador  $K_f + K_i$  é adicionado para termos uma relação de proporcionalidade, sendo assim, a expressão  $\Delta K$  contabiliza o quanto a energia da partícula aumentou ou diminuiu proporcionalmente e não em valores absolutos. Note que se  $K_i > K_f$ ,  $\Delta K$  será negativo.

Ao variarmos a condição inicial angular  $\phi_0$  com as velocidades radial e angular nulas, não há variação na energia cinética da partícula tanto na polarização  $+$  quanto na polarização  $\times$ . Para a polarização  $+$  dada por (4.44), ao adicionarmos uma velocidade radial inicial e variarmos  $\phi_0$  de 0 a  $2\pi$  em intervalos de  $\frac{\pi}{100}$  e com as demais condições iniciais dadas por

$$\rho_0 = 0.2, \quad z_0 = 0, \quad \dot{\rho}_0 = \pm 0.1, \quad \dot{\phi}_0 = 0, \quad k = 1, \quad (4.53)$$

o comportamento de  $\Delta K$  é apresentado na figura 4.14 para uma velocidade radial inicial positiva e, na figura 4.15 para uma velocidade radial inicial negativa, ambas em relação a  $u$ .

O comportamento para a polarização  $\times$  (4.40) é apresentado nas figuras 4.16 e 4.17. Observamos que no caso da velocidade radial inicial da partícula ser negativa em relação  $u$ , o que corresponde a uma velocidade inicial radial positiva em relação ao tempo  $t$ , a partícula ganha energia cinética. No caso da velocidade radial inicial da partícula ser positiva em relação a  $u$  (negativa em relação a  $t$ ), a partícula perde energia cinética. Podemos então ver que o campo gravitacional dado pelo elemento de linha (4.15), com condições iniciais  $\dot{\rho}_0 < 0$ , possuem um leque maior de condições iniciais em  $\phi_0$  tais que a energia cinética da partícula aumenta.

Mantendo a mesma variação em  $\phi_0$  e as demais condições iniciais dadas por

$$\rho_0 = 0.2, \quad z_0 = 0, \quad \dot{\rho}_0 = 0, \quad \dot{\phi}_0 = \pm 0.2, \quad k = 1, \quad (4.54)$$

levam ao mesmos comportamentos de simetria entre o número de condições iniciais  $\phi_0$  de acréscimo e de decréscimo na energia cinética da partícula, invertendo apenas as regiões no caso de velocidade

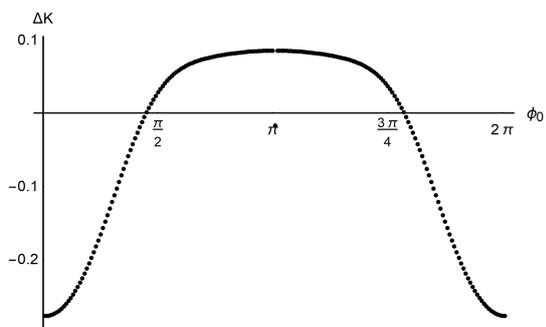


Figura 4.14: Variação da energia cinética na polarização + para as condições iniciais (4.53) com  $\dot{\rho}_0 = 0.1$ .

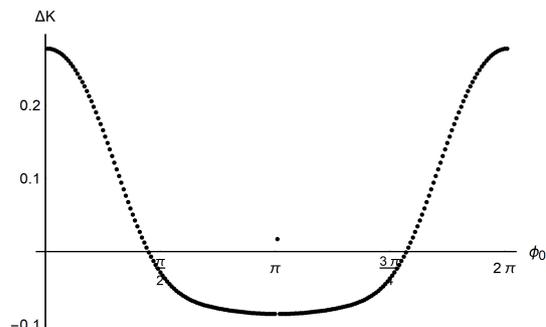


Figura 4.15: Variação da energia cinética na polarização + para as condições iniciais (4.53) com  $\dot{\rho}_0 = -0.1$ .

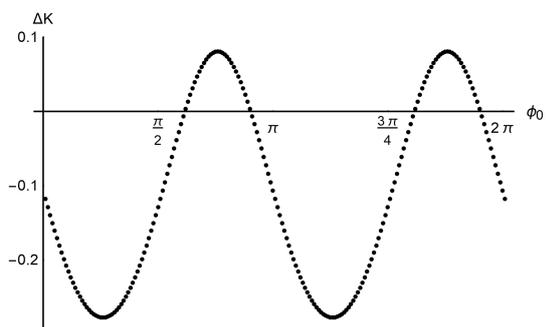


Figura 4.16: Variação da energia cinética na polarização × para as condições iniciais (4.53) com  $\dot{\rho}_0 = 0.1$ .

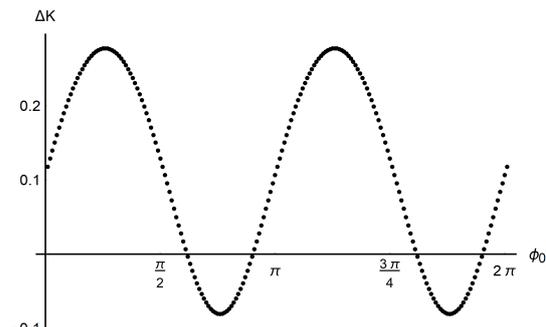


Figura 4.17: Variação da energia cinética na polarização × para as condições iniciais (4.53) com  $\dot{\rho}_0 = -0.1$ .

angular negativa ou positiva. Este comportamento pode ser visto nas figuras 4.18 e 4.19. Se acrescentarmos às condições iniciais (4.54) uma velocidade radial positiva, as figuras 4.18 e 4.19 sofrem um deslocamento para baixo, indicando mais regiões de decréscimo do que de acréscimo na energia cinética da partícula. Já se a velocidade inicial radial acrescentada for negativa, obtemos um comportamento inverso, i.e., todo o gráfico desloca-se para cima.

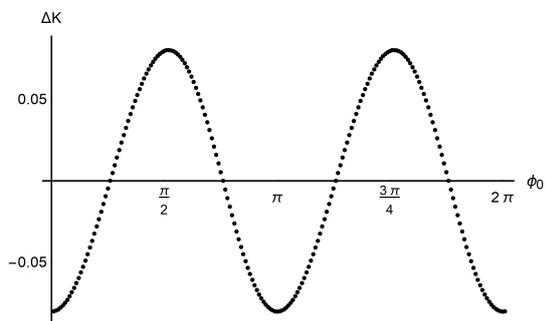


Figura 4.18: Variação da energia cinética na polarização × para condições as iniciais (4.54) com  $\dot{\phi}_0 = 0.1$ .

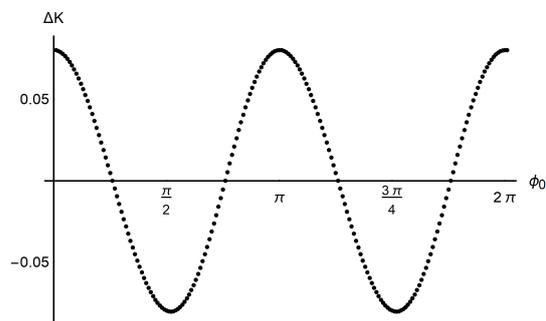


Figura 4.19: Variação da energia cinética na polarização × para as condições iniciais (4.54) com  $\dot{\phi}_0 = -0.1$ .

Analisemos agora como a variação da velocidade radial inicial influencia a quantidade  $\Delta K$ . Variando  $\dot{\rho}_0$  de  $-0.1$  a  $0.1$  em intervalos de  $\frac{1}{100}$  e com as demais condições iniciais dadas por

$$\rho_0 = 0.2, \quad \phi_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{\phi}_0 = 0, \quad k = 1, \quad (4.55)$$

o comportamento para  $\Delta K$  é apresentado na figura 4.20. A variação na velocidade inicial radial apenas altera o comportamento qualitativo de acréscimo ou decréscimo de energia cinética da partícula. Para diferentes posições angulares iniciais o comportamento é o mesmo, apenas invertendo em algumas regiões o fato de  $\dot{\rho}_0$  positivo ou negativo aumentar ou diminuir a energia cinética da partícula, como por exemplo para condições iniciais

$$\rho_0 = 0.2, \quad \phi_0 = \frac{3\pi}{4}, \quad z_0 = 0, \quad \dot{\phi}_0 = 0, \quad k = 1, \quad (4.56)$$

temos o comportamento para  $\Delta K$  apresentado na figura 4.21.

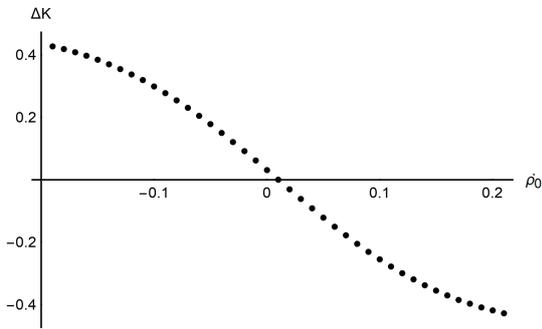


Figura 4.20: Variação da energia cinética na polarização + para as condições iniciais (4.55).

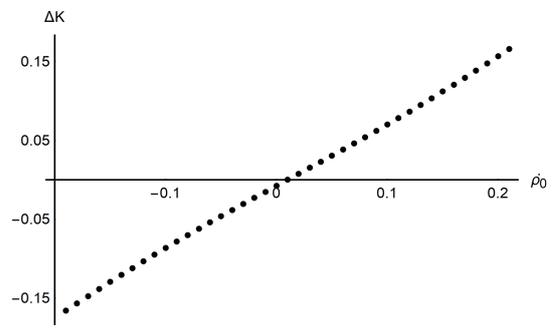


Figura 4.21: Variação da energia cinética na polarização + para as condições iniciais (4.56).

Enquanto as variações nas velocidades iniciais radial e angular da partícula levam a efeitos qualitativos distintos para a variação da energia cinética da partículas dada pela equação (4.52), variações nas posições iniciais  $\rho_0$  e  $z_0$  da partícula, assim como na constante  $k$ , não influenciam no comportamento de transição de acréscimo ou decréscimo na energia cinética. Os comportamentos qualitativos das polarizações sem simetria axial + e  $\times$  são semelhantes, e a dependência das condições iniciais nas regiões angulares para o acréscimo ou decréscimo se mostra evidente, assim como o efeito do sentido da velocidade angular inicial, que inverte tais regiões. No caso de ondas gravitacionais descritas pelo elemento de linha (4.15) só ocorrerá troca de energia cinética permanente entre a onda e a partícula se a velocidade inicial da partícula for não nula.

A interação dessas ondas com partículas altera o estado cinemático das mesmas permanentemente e, tal efeito é marcante tanto para efeitos de detecção, quanto para efeitos cosmológicos [35]. A aparente simetria entre condições iniciais que causam acréscimo ou decréscimo de energia cinética da partícula torna possível que tais ondas viajem pelo universo interagindo com as partículas e na média mantendo sua energia negativa constante. Possivelmente tais ondas causem efeitos cinemáticos permanentes em corpos massivos no universo, uma vez que a velocidade média das partículas desses corpos podem ser alteradas pela passagem dessas ondas gravitacionais.

# Capítulo 5

## Conclusões

A teoria da Relatividade Geral marcou o século XX como sendo um dos maiores avanços científicos. Até hoje, após mais de um século desde sua formulação, ainda há motivação para estudarmos seus conceitos, formalismos e resultados. No capítulo 2 deste trabalho, utilizando elementos de geometria Riemanianna, mostramos como obter o tensor de curvatura do espaço-tempo. Em seguida, apresentamos as equações de Einstein na presença de uma distribuição de matéria e enfatizamos que o alto grau de não linearidade das equações de Einstein torna a obtenção de soluções analíticas muito difícil. Também mostramos que a forma linearizada das equações de Einstein resulta em soluções que levam à previsão de ondas gravitacionais de forma semelhante com o que ocorre no eletromagnetismo.

Além da não linearidade, o formalismo da Relatividade Geral baseado no tensor métrico não nos fornece uma expressões para a energia, momento e momento angular do campo gravitacional apenas em termos de pseudotensores. Com base nisso, apresentamos o formalismo Teleparalelo Equivalente à Relatividade Geral no capítulo 3. Mostramos que este formalismo, baseado na descrição do campo gravitacional por meio de tétradas, fornece equações de campo equivalentes às equações de Einstein. Além disso, neste formalismo, é possível definir expressões para grandezas físicas tais como energia, momemento e momento angular do campo gravitacional na presença ou não de matéria e com isso, estudamos algumas propriedades das ondas gravitacionais na forma linear.

Mostramos na seção 4.2 que as ondas gravitacionais que são soluções exatas das equações de Einstein, distintamente das ondas gravitacionais da teoria linear, transportam energia, momento e momento angular. Além disso, tais ondas interagem com partículas podendo alterar o seu estado cinemático de forma permanentemente ou não. Esta alteração, também chamada de *efeito memória* pode ser um resultado importante para a detecção destas ondas. Vimos também que pelo fato da energia da onda gravitacional dada pelo elemento de linha (4.15) possuir energia negativa, como visto na seção 4.2, implica que para ela se dissipar, ela deve absorver energia das partículas com as quais interage. A simetria nas condições iniciais que levam ao acréscimo ou decréscimo de energia cinética de partículas na presença da onda gravitacional, solução exata das equações de Einstein, sugere que, após a interação da onda com várias partículas com velocidade media nula, ela terá a

mesma energia negativa inicial.

O deslocamento permanente de partículas devido a passagem de ondas gravitacionais é de grande interesse atual [36] [37]. O mapeamento das condições iniciais que levam ao acréscimo ou decréscimo da energia cinética de partículas, pode ser utilizado para detecções futuras que sejam capazes de rastrear efeitos memória de velocidade, como o LISA [38]. Embora o critério de perda ou ganho de energia cinética não seja muito útil para investigar efeitos memória devido a uma mesma onda transferir ou absorver energia a depender das condições iniciais [35], tal mapeamento pode ser útil para identificar possíveis condições iniciais que impliquem na transferência de energia entre a onda e as partículas.

O fato de quando a partícula está inicialmente se aproximando da origem do sistema de coordenadas termos uma tendência a um aumento de energia cinética da mesma, e no caso contrário termos o comportamento inverso, não é um resultado surpreendente. Se imaginarmos uma partícula de massa  $m$  inicialmente se aproximando da fonte de um campo gravitacional fraco, ele irá acelerar a partícula na direção do movimento da mesma e ela irá ganhar energia do campo. Entretanto, quando a partícula está inicialmente se afastando, esse campo gravitacional irá gerar uma aceleração no sentido contrário ao movimento da partícula, dessa forma diminuindo o módulo da velocidade da mesma e conseqüentemente sua energia cinética.

Por outro lado, o fato da partícula teste necessitar ter uma velocidade inicial para que ocorra variação permanente de energia cinética não é um tanto surpreendente, uma vez que para um campo gravitacional comum (força central) uma partícula inicialmente em repouso adquire energia do campo gravitacional.

A métrica que estudamos (4.15) é apenas uma das classes de soluções da classe mais geral de Brinkmann. O termo fora da diagonal  $dud\phi$  carrega efeitos de possíveis rotações da fonte [29] (estudados inicialmente por Frolov em [39]), e podem levar a efeitos adicionais na energia cinética das partículas, o que pode ser estudado em trabalhos futuros. Outra possível classe de soluções de Brinkmann são métricas que incluam um elemento fora da diagonal do tipo  $dud\rho$ , que pode corresponder à ondas gravitacionais emitidas por fontes em expansão ou contração, o que torna interessante o estudo futuro de como tais ondas interagem com as partículas, e também a pressão de radiação desse campo gravitacional.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MAXWELL, J. C. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. [S.l.]: Philosophical Transactions of the Royal Society, 1865.
- [2] FACCIO, M. C. D.; TAMBUCHI, D. Revisiting the 1888 hertz experiment. *DOI: 10.1119/1.2238886*, 2006.
- [3] EINSTEIN, A. Über gravitationswellen. *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte, 154* 167, 1918.
- [4] EDDINGTON, A. S. The propagation of gravitational waves. *Proceedings of the Royal Society of London A* 102, 268-282, 1922.
- [5] HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. *The astrophysical journal*, v. 195, p. L51–L53, 1975.
- [6] ABBOTT, B. P.; et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, v. 116, p. 061102, 2016.
- [7] STEELE, J. On generalised p.p. waves. <http://web.maths.unsw.edu.au/jds/Papers/gppwaves.pdf>, 2005.
- [8] ZHANG, C. D. P.-M.; HORVATHY, P. A. Memory effect for impulsive gravitational waves. *arXiv:1709.02299v2*, 2017.
- [9] HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G.; LASENBY, A. N. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- [10] LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *Teoria do Campo*. [S.l.]: Hemus, 2004.
- [11] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. [S.l.]: Pearson, 2011.
- [12] FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: IMPA, 2012.
- [13] BRAU, C. A. *Modern Problems in Classical Electrodynamics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2004.
- [14] POISSON, E. *A Relativist's Toolkit*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.

- [15] ASSIS, A. K. T. *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. [S.l.]: National Library of Canada Cataloguing in Publication, 2013.
- [16] A.EINSTEIN. Feldgleichungen der gravitation. *Preussische Akademie der Wissenschaften*, 1915.
- [17] FARIA, F. F. *Sistemas de referência locais no espaço-tempo*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Instituto de Física, 2009.
- [18] MASHHOON, B. The hypothesis of locality in relativistic physics. *Physics Letters A*, 1990.
- [19] MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. *arXiv:1303.3897*, 2013.
- [20] MALUF, J. W.; ULHOA, S. C.; NETO, J. F. da R. Gravitational waves and the breaking of parallelograms in space-time. *General Relativity and Gravitation*, 2013.
- [21] ROCHA-NETO J. W. MALUF, S. C. U. J. F. da. Hamiltonian formulation of unimodular gravity in teleparallel geometry. *Physical Review D* 82, 124035, 2010.
- [22] ROCHA-NETO, J. F. da; MALUF, J. W. The angular momentum of plane-fronted gravitational waves in the teleparallel equivalent of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 2014.
- [23] SCHUTZ, B. F. Gravitational waves: Note fos lectures at the azores school on observation cosmology. *Azores School on Observation Cosmology*, 2011.
- [24] FAVATA, M. The gravitational-wave memory effect. *arXiv:1003.3486v1*, 2010.
- [25] BONDI, H.; PIRANI, F. A. E. Gravitational waves in general relativity iii. exact plane waves. *Royal Society Publishing*, 1959.
- [26] BONDI, H. Plane gravitational waves in general relativity. *Nature*, v. 179, p. 1072–1073, 1957.
- [27] GRIFFITHS, J. B. *Collinding Plane Waves in General Relativity*. [S.l.]: Dover Publications, 2016.
- [28] BRINKMANN, H. W. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, 1925.
- [29] PODOLSKY, J.; STEINBAUER, R.; SVARC, R. Gyratonic pp-waves and their impulsive limit. *arXiv:1406.3227v2*, 2014.
- [30] STEPHANI, H. et al. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [31] PERES, A. Pp - waves. *Physical Review Letters*, v. 571, p. 3, 1959.
- [32] ULHOA, S. C. *O momento angular do campo gravitacional e o grupo de Poincaré*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Instituto de Física, 2009.

- [33] MALUF, J. W.; ULHOA, S. C. The energy-momentum of plane-fronted gravitational waves in the teleparallel equivalent of general relativity. *Physical Review D*, D78, 047502, 2008.
- [34] ZHANG C. DUVAL, G. W. G. P.; HORVATHY, P. A. Soft gravitons the memory effect for plane gravitational waves. *arXiv:1705.01378v3*, 2017.
- [35] MALUF J. F. DA ROCHA-NETO, S. C. U. J. W.; CARNEIRO, F. L. Plane gravitational waves, the kinetic energy of free particles and the memory effect. *arXiv:1707.06874 [gr-qc]*, 2017.
- [36] GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Theory of the detection of short bursts of gravitational radiation. *Phys. Rev. D* 4 (1971) 2191. *doi:10.1103/PhysRevD.4.2191*, 1971.
- [37] LASKY, P. D. et al. Detecting gravitational-wave memory with ligo: implications of gw150914. *arXiv:1605.01415*, 2016.
- [38] BIERI, L.; GARFINKLE, D.; YAU, S.-T. Gravitational waves and their memory in general relativity. *arXiv:1505.05213v1*, 2015.
- [39] FROLOV, V. P.; FURSAEV, D. V. Gravitational field of a spinning radiation beam pulse in higher dimensions. *Phys. Rev. D* 71, 104034, 2005.