

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional

# A Matemática da fila de caixa em uma agência bancária do Distrito Federal

Mario Humberto Leal Porto

Brasília

2017

Mario Humberto Leal Porto

**A Matemática da fila de caixa em uma agência  
bancária do Distrito Federal**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz

Brasília

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LM341m Leal Porto, Mario Humberto  
A Matemática da fila de caixa em uma agência bancária do  
Distrito Federal / Mario Humberto Leal Porto; orientador  
Rui Seimetz. -- Brasília, 2017.  
55 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2017.

1. Teoria de Filas. 2. Probabilidade. 3. Estatística. I.  
Seimetz, Rui, orient. II. Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# A MATEMÁTICA DA FILA DE CAIXA EM UMA AGÊNCIA BANCÁRIA DO DISTRITO FEDERAL

por

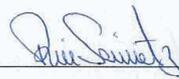
Mario Humberto Leal Porto

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de*

**MESTRE**

Brasília, 24 de julho de 2017.

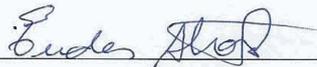
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. – Vinícius de Carvalho Rispoli – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. – Eudes Antônio da Costa – UFT (Membro)

# Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Erika, às minhas filhas Talita e Zelia e ao meu pai, fontes de inspiração e amor em minha vida.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente aos meus pais, Mario e Zelia (*in memoriam*), pela vida, pela educação, pela formação moral e por todo amor recebido.

Agradeço à minha esposa, grande incentivadora desse mestrado, apoiadora de todas as horas, companheira incondicional e pessoa que deu continuidade à obra de meus pais formando o ser humano que hoje sou.

Agradeço às minhas filhas, Talita e Zelia, por me forçarem a ser alguém melhor todos os dias, pela fonte de força, amor e paz que são em minha vida.

A meu irmão Dylcio e minhas irmãs Penha e Lili, meus amigos desde os primeiros dias de vida, pelo carinho e palavras de incentivo.

Ao amigo e ex-chefe Sandro Colombo pelo apoio e liberação do trabalho nas tardes de sexta-feira, fundamentais para seguir nesse sonho.

Agradeço também ao meu orientador, professor doutor Rui Seimetz, pela paciência, pelas palavras de serenidade e incentivo nos momentos conturbados e pelas valiosas orientações na construção deste trabalho.

Agradeço ainda à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela viabilização do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Por fim, agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília e aos professores Antônio de Melo, Ary Medino, Helder Matos, Igor Lima, Lineu Araújo Neto,

Mauro Rabelo, Nilton Barroso, Raimundo Bastos e Vinícius Rispoli pelos ensinamentos  
nessa caminhada.

---

## Resumo

---

A presença ordinária de filas no cotidiano, sua natureza aleatória e sua frequente associação a “perda de tempo”, por sua natureza organizadora e frequente aplicação em estruturas de fornecimento dos mais diversificados serviços, conferem ao tema particular interesse, seja pela mera compreensão seja pelo desejo de contribuir com seu aprimoramento. Essa dissertação explorou elementos matemáticos relacionados à fila de caixa bancário de agência do Distrito Federal como alternativa à ilustração da aplicabilidade do estudo da Probabilidade à compreensão de eventos aleatórios habituais. Teve este trabalho também o propósito de contribuir para o aprimoramento do gerenciamento dos serviços de atendimento bancário com o oferecimento de arcabouço matemático para este fim. Para tanto foi selecionada agência de grande movimentação, situada em shopping da região central de Brasília, e coletados os dados referentes aos atendimentos de caixa realizados no mês de novembro de 2016. Procedeu-se, então, à análise desses dados sob a ótica das Teorias de Filas, avaliando-se modelos de distribuição probabilística para o fluxo de chegada de clientes, prazo de espera e tempo de serviço, além de testes associados ao desempenho do sistema. Os resultados possibilitaram a indicação de necessidade de ajustes pontuais na estrutura dedicada à prestação do serviço. Contudo, para uma compreensão mais abrangente da aplicabilidade do estudo da probabilidade a eventos aleatórios cotidianos e para a avaliação da estrutura da instituição financeira para o atendimento de caixa na unidade federativa, sugerimos a realização de estudos complementares e mais abrangentes, que poderão ter neste um referencial inicial.

**Palavras-chave:** Teoria de Filas, Probabilidade, Estatística.

---

## Abstract

---

The ordinary presence of queues in the daily life, their random nature and their frequent association with "waste of time", by their organizing nature and frequent application in structures of supply of the most diversified services, turns the subject into a matter of particular interest, either by mere understanding or by the desire to contribute to its improvement. This dissertation explored mathematical elements related to the Federal District bank banking queue as an alternative to illustrating the applicability of the Probability study to the understanding of habitual random events. The purpose of this work was also to contribute to the improvement of the management of banking services with the provision of a mathematical framework for this purpose. For this purpose, a large-scale branch office was selected, located in a shopping mall in the central region of Brasília, and the data referring to the cash services performed in November 2016 were collected. The data were then analyzed from the perspective of Queueing Theory, evaluating models of probabilistic distribution for the flow of clients arrival, waiting period and time of service, in addition to tests associated to the performance of the system. The results made it possible to indicate the need for specific adjustments in the structure dedicated to the provision of the service. However, for a more comprehensive understanding of the applicability of the probability study to everyday random events and for the evaluation of the structure of the financial institution for the cash service in the federative unit, we suggest carrying out complementary and more comprehensive studies, which may find here an initial reference.

**Keywords:** Queueing Theory, Probability, Statistics.

---

## Lista de Figuras

---

2.1	Densidade de Probabilidade da Distribuição Normal . . . . .	22
2.2	Densidade de Probabilidade da Distribuição Poisson . . . . .	23
2.3	Densidade de Probabilidade da Distribuição Exponencial . . . . .	25
3.1	Gráfico 1 - Representação das distribuições de probabilidade empírica, Normal e Exponencial dos tempos (s) entre chegadas sucessivas de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016. . . . .	35
3.2	Gráfico 2 - Representação do total diário de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016. . . . .	37
3.3	Gráfico 3 - Representação da média de chegadas por intervalo de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016. . . . .	37
3.4	Gráfico 4 - Representação das distribuições de probabilidade empírica, Normal e Exponencial dos tempos de serviço aos usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016. . . . .	42
3.5	Gráfico 5 - Representação das distribuições de probabilidade empírica, Normal e Gama dos tempos de espera dos usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016. . . . .	44
3.6	Gráfico 6 - Representação das taxas de ocupação da força de trabalho em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016. . . . .	47

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1 METODOLOGIA</b>	<b>14</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>16</b>
2.1 Teoria de filas . . . . .	16
2.1.1 Características de uma fila . . . . .	17
2.1.2 Estruturas de Filas . . . . .	18
2.1.3 Notação . . . . .	18
2.2 Conceitos essenciais . . . . .	19
2.3 Distribuições de Probabilidade . . . . .	20
2.3.1 Distribuição Normal . . . . .	21
2.3.2 Distribuição de Poisson . . . . .	22
2.3.3 Distribuição Gama . . . . .	23
2.4 Testes de Hipótese . . . . .	25
2.5 Avaliação de Desempenho do Sistema . . . . .	29
<b>3 RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>32</b>
3.1 Processo de chegada à fila . . . . .	33
3.1.1 Tempo entre chegadas sucessivas à fila . . . . .	33

---

3.1.2	Entradas por intervalo . . . . .	35
3.2	Tempo de serviço/atendimento . . . . .	38
3.3	Tempo de espera . . . . .	42
3.4	Desempenho do Sistema . . . . .	45
3.4.1	Taxa de ocupação . . . . .	45
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>		<b>49</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>51</b>

---

## INTRODUÇÃO

---

A palavra fila é derivada do Latim, *fila*, plural de *filum*, e pode ser definida como sendo uma série de pessoas, animais ou objetos dispostos em linha reta, uns atrás dos outros ou como um alinhamento de uma série de indivíduos ou objetos em sequência, de modo que um esteja imediatamente atrás do outro (HOUAISS, 2001).

É a fila, entretanto, um elemento cotidiano, habitual e corriqueiro, presente em bancos, aeroportos, órgãos públicos, consultórios, teatros, supermercados, restaurantes, museus. Muitas vezes arrumada pela disposição ordenada de pessoas, outras por listas ou ainda por *softwares*, figurando como uma maneira organizada e democrática de acesso a benefícios, bens e serviços, como ressaltou Oliveira (2012) falar em fila contemporânea é falar em igualdade entre partes.

Não obstante seu caráter organizador, a fila é frequentemente associada a aspectos negativos como “perda detempo”, incompetência e ineficiência, tendo por elemento central dessa avaliação o tempo de espera, muitas vezes elevado (OLIVEIRA, 2012).

No contexto bancário, o tempo de permanência em filas é normatizado por leis regionais e, mais especificamente, no Distrito Federal o tema encontra-se regulamentado pela Lei Distrital nº 2.547, de 12 de maio de 2000, que estabelece em 20 minutos, para dias normais, e 30 minutos, para dias de pagamento de pessoal, de vencimento de contas e em vésperas ou após feriados prolongados, o prazo máximo de espera (DISTRITO FEDERAL, 2000).

No âmbito da Matemática, o estudo das filas de espera iniciou-se com o matemático dinamarquês Agner Krarup Erlang (1878 – 1929), no início do século XX, com a aplicação

de teorias de probabilidade ao problema do tráfego da rede de telefonia. Em 1909, Erland publicou “The Theory of Probabilities and Telephone Conversations”, onde mostrou que a distribuição das ligações telefônicas seguia a lei de distribuição de Poisson (BROCKMEYER; HALSTROM; JENSEN, 1948).

A aplicação da Teoria de Filas a outros contextos teve seu início apenas a partir da Segunda Guerra Mundial, como estratégia de tratamento de problemas de congestionamento de sistemas, onde clientes solicitam serviços, com restrições intrínsecas do sistema, que podem causar filas (PRADO, 2009).

A fila de espera para o atendimento em caixas de bancos, no que tange à aplicação das teorias matemáticas de filas é, embora presente no cotidiano de significativa parte dos brasileiros, um tema pouco explorado, como destacado por Oliveira (2015), um problema comum e bastante corriqueiro na vida de todos é a fila presente nas agências bancárias.

Amidani (1974) enfatizou que o problema das filas diante dos caixas é um assunto bastante oportuno, já que a literatura bancária não diz a respeito. Conclusão similar de Oliveira (2015), anos depois, indica que tal carência se mantém, ao afirmar que apesar de toda essa complexidade não existe uma grande quantidade de textos abordando apenas a fila do banco.

Neste estudo busca-se avaliar dados do atendimento de agência bancária do Distrito Federal de representativa instituição financeira, do ano de 2016, objetivando investigar a eficiência do atendimento e explorar elementos matemáticos por trás desse evento cotidiano que é a fila para atendimento bancário.

Em congruência com Lamarca (2016), além de contribuir para uma melhor compreensão matemática de matéria pouco explorada, como citado acima, o presente trabalho é motivado também pela possibilidade de contribuir para o aprimoramento da formação dos professores do Ensino Médio, agregando conteúdo aplicado que os auxilie na exploração dos temas em conformidade com as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais:

A principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos em espaços equiprováveis (BRASIL, 1997, p 52).

Tem-se ainda como objetivos específicos deste estudo:

- Analisar o processo de formação de filas na agência bancária;
- Avaliar os prazos de espera e atendimento;

- Examinar a suficiência e a eficiência da estrutura dedicada ao atendimento na agência em estudo.

# CAPÍTULO 1

---

## METODOLOGIA

---

Para este trabalho, foram coletados dados do sistema de Gestão do Atendimento (GAT) da instituição financeira. A partir de análise preliminar dos dados sintéticos foi selecionada a agência que realizou a maior quantidade de atendimentos de caixa em Brasília no ano de 2016. Em seguida, procedeu-se a definição do mês de análise, novembro, baseada na inexistência de registros de eventos extraordinários no período, como greve bancária ou de vigilantes, férias escolares e recessos do judiciário e parlamentar, registros de queda no fornecimento de energia e notificações de interrupção de funcionamento do mencionado sistema de gestão.

A agência selecionada está localizada em *shopping center* situado na região central da cidade, possui uma estrutura física considerada adequada pelo banco e tem um intenso fluxo de clientes e usuários do serviço de caixa.

Os dados obtidos foram consolidados e trabalhados no *software* Microsoft Excel<sup>®</sup>, utilizando-se de suas funções e, em algumas poucas situações, de macros desenvolvidas na linguagem *Visual Basic for Windows*.

Os arquivos originais eram compostos por informações relativas à identificação do cliente (número da conta corrente e agência de relacionamento), ao horário de emissão da senha, ao horário de início do atendimento, ao horário de encerramento do atendimento, ao código de identificação do terminal de caixa e do funcionário que procedeu ao atendimento.

O intervalo de atendimento bancário do Distrito Federal, hoje definido como sendo das 11 às 16 horas, para fins de consolidação da quantidade de clientes que chegaram por intervalo de tempo, foi subdividido em subintervalos de 10 minutos cada, resultando em 30 novos intervalos, sucessivos e sem interseção. Para cada um desses novos intervalos foram calculados a quantidade de entradas, o total de atendimentos, o tempo médio de espera, o tempo médio de atendimento e o total de desistências dos clientes.

O presente trabalho restringiu ainda a análise da estrutura e dos dados referentes ao atendimento classificado como “normal”, ou seja, não prioritário, pois a estrutura alocada para este atendimento diferenciado tinha dedicação parcial, atuando em outras atividades administrativas nos períodos de ociosidade e promovia atendimentos excepcionais desvinculados de senhas, impossibilitando sua mensuração de forma adequada.

---

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

---

#### 2.1 Teoria de filas

Segundo Brockmeyer, Halstrom e Jensen(1948), os primeiros registros da abordagem matemática do tema filas estão relacionados ao dinamarquês Agner Krarup Erlang (1878 - 1929) que no início do século XX avaliou o congestionamento das redes de telefones. Erlang iniciou seus trabalhos estudando as ligações que precisavam aguardar para serem realizadas, pois todas as linhas estavam ocupadas.

Foi através da Associação dos Matemáticos Dinamarqueses, da qual era membro, que Erlang chegou à Companhia Telefônica de Copenhague, onde iniciou seus trabalhos em 1908. Já em 1909, aplicando teorias de probabilidade a problemas de tráfego de telefones, ele publicou seu primeiro trabalho sobre o tema: “The Theory of Probabilities and Telephone Conversations”, em que demonstrou a aplicabilidade da distribuição de Poisson ao tráfego aleatório de chamadas telefônicas.

Outro documento relevante a respeito de Teorias de Filas foi publicado por Erlang em 1917, “Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges”, onde apresentou fórmulas para o cálculo do tempo de espera e das

ligações perdidas.

Nas décadas de 1950 e 1960 a Teoria de Filas foi amplamente estudada, resultando em diversas publicações trabalhos relevantes a respeito do tema, dentre os quais se destacam os trabalhos de Kendall, Lindley, Smith, Cox e Loynes. Em 1961 Cox e Smith escreveram um livro notável resumindo o conteúdo existente até então.

De acordo com Flogiatti & Mattos (2007), a Teoria de Filas consiste na modelagem analítica de processos que resultam em espera. Tal modelagem tem como objetivo avaliar o desempenho através do dimensionamento da fila, do tempo de espera e do tempo ocioso do sistema.

### 2.1.1 Características de uma fila

A caracterização de um sistema de filas se dá, conforme Andrade (1998), por seis atributos:

1. Padrão de chegada dos usuários: definido pelo tempo entre as chegadas, sendo considerado determinístico, quando os intervalos de tempo mantêm-se fixos, ou aleatório, quando variam seguindo uma distribuição de probabilidade.
2. Padrão de atendimento aos usuários: especificado pelo tempo de serviço (tempo para concluir o atendimento), que pode ser determinístico (constante) ou uma variável aleatória (quando segue uma distribuição de probabilidade).
3. Número de servidores: corresponde ao número de atendentes disponíveis para a prestação do serviço.
4. Capacidade do sistema: relativa ao número de usuários que o sistema é capaz de atender, podendo ser considerada ilimitada.
5. Tamanho da população: estipulado pelo número potencial de clientes com possibilidade de buscar o serviço, podendo ser finito ou infinito (muito grande).
6. Disciplina da fila: especificada pela relação entre as ordens de chegada e atendimento e comumente classificada em:
  - a) FIFO (*first in - first out*): quando os atendidos seguem a ordem das chegadas. Essa é a regra mais utilizada em filas do cotidiano.

- b) LIFO (*last in - first out*): quando o primeiro a ser atendido é o que chegou por último. Utilizada em carregamento de contêineres em navios.
- c) PRI (*priorityservice*): quando o atendimento segue uma ou mais prioridades pre-estabelecidas. Utilizada em internações hospitalares ou cirurgias.
- d) SIRO (*service in randomorder*): quando o atendimento segue uma ordem aleatória. Utilizada em contemplação de consórcios.

### 2.1.2 Estruturas de Filas

A estrutura de uma fila pode ser categorizada, conforme Moraes, Silva e Rezende (2011), em:

1. Canal único, fase única: onde o atendimento é realizado por um único recurso, os clientes formam uma fila única e o atendimento se dá em uma única etapa.
2. Canal único, fases múltiplas: quando o atendimento é realizado em sequência por mais de um recurso, os clientes formam uma fila única e são atendidos em etapas sequenciadas.
3. Canais múltiplos, fase única: a prestação do serviço de caixas em agências bancárias, frequentemente, utiliza-se dessa estrutura. É caracterizada pela existência de mais de um recurso, atendente, e por atendimento em única etapa.
4. Canais múltiplos, fases múltiplas: descrita pela existência de mais de um recurso e o atendimento ocorre em etapas sequenciadas.

### 2.1.3 Notação

A notação de Kendall é frequentemente utilizada para representar as características um sistema de fila única com um ou mais servidores idênticos em paralelo. Proposta pelo matemático britânico David George Kendall, em 1953, ela é composta pelas seis características descritas a seguir:

1. Processo de chegada à fila (A): probabilístico ou determinístico.
2. Tempo de serviço/atendimento (B): determinístico ou probabilístico.

3. Número de servidores em paralelo por fila (C).
4. Disciplina da fila (D): o caso mais comum é o FIFO, o primeiro a chegar é o primeiro a ser servido.
5. Número máximo de usuários no sistema (E): podendo ser ilimitado,  $k \rightarrow \infty$ , situação em que tal característica pode ser omitida.
6. Tamanho da população (F): também podendo ser omitida essa informação quando for considerada muito grande ( $k \rightarrow \infty$ ).

## 2.2 Conceitos essenciais

O conteúdo a seguir fundamenta-se em Carvalho & Morgado (2013) e Trivola (1999) onde poderá ser aprofundado.

DEFINIÇÃO 2.2.1. *Espaço Amostral ( $S$ ) é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.*

DEFINIÇÃO 2.2.2. *Qualquer subconjunto de um espaço amostral é denominado evento.*

DEFINIÇÃO 2.2.3. *Seja  $E$  um experiência aleatória com um espaço amostral associado  $S$ . Uma função que associe a cada elemento de  $S$  um número  $x = \chi(s)$  é denominada de variável aleatória.*

*Se uma variável aleatória pode assumir um número finito ou uma quantidade enumerável de valores é dita discreta. Caso contrário, ou seja, quando uma variável aleatória pode tomar um número infinito de valores, e esses valores podem ser associados a mensurações em uma escala contínua, é chamada de contínua.*

DEFINIÇÃO 2.2.4. *Função de Probabilidade é uma função que associa a cada evento  $A$ , um número  $P(A)$  e satisfaz às seguintes propriedades:*

- $P(x_i) \geq 0$ , para todo  $x_i$  pertencente a  $\chi(s)$ ;
- $\sum P(x_i) = 1$ .

DEFINIÇÃO 2.2.5. *A coleção dos pares  $(x_i, P(x_i))$  para  $i = 1, 2, 3, \dots$  é denominada de distribuição de probabilidade da variável aleatória  $\chi$ .*

DEFINIÇÃO 2.2.6. *Função Densidade de Probabilidade é uma função que descreve a probabilidade de que uma variável aleatória  $\chi$  esteja em um intervalo pequeno na vizinhança de um evento  $x$ , isto é  $\{x - h \leq \chi \leq x + h\}$ .*

DEFINIÇÃO 2.2.7. *Desvio padrão ( $\sigma$ ) é uma medida de dispersão das observações em torno da média aritmética e pode ser calculada pela equação abaixo:*

$$(2.1) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n - 1}}$$

onde  $x_i$  são todos os elementos da amostra e  $\mu$  é a média aritmética desses valores.

DEFINIÇÃO 2.2.8. *Média aritmética indica o valor em torno do qual há um equilíbrio na distribuição dos dados e pode ser feito conforme fórmula a seguir:*

$$(2.2) \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

DEFINIÇÃO 2.2.9. *Coefficiente de variação é um índice que indica a homogeneidade de uma amostra comparando o desvio padrão com a média. Seu cálculo é simples e ocorre conforme fórmula a seguir:*

$$(2.3) \quad CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

onde  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio padrão.

Embora varie conforme aplicação, frequentemente, diz-se que se  $CV \leq 25\%$  a amostra é considerada razoavelmente homogênea.

## 2.3 Distribuições de Probabilidade

Alguns modelos de distribuição de probabilidade, cujos requisitos de aplicação encontram-se em princípio atendidos nas situações em análise neste trabalho, estão apresentados a seguir.

O conceitos a seguir foram apresentados em consonância com Larson & Farber (2010), Barbosa (2014) e Dantas (1997), material que poderá amparar exploração complementar.

### 2.3.1 Distribuição Normal

De acordo com Bittencourt & Viali (2006), a conceituação inicial da distribuição normal se deu em artigo publicado pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667 – 1754) em 1738. Entretanto, o desenvolvimento da equação dessa distribuição somente ocorreu em 1808 e 1809, respectivamente, pelos matemáticos alemães Robert Adrian (1775-1843) e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

A relevância desse modelo está associada à sua aplicação para a descrição de diversos fenômenos físicos. Outro aspecto que reforça a utilização desse modelo é a sua aplicação ao estudo das médias de amostras extraídas de uma distribuição qualquer, que tendem a seguir o padrão normal à medida que a amostra aumenta, consoante Lamarca (2016).

**DEFINIÇÃO 2.3.1.** *Definição: Seja  $\chi$  uma variável aleatória contínua com média  $\mu$ , com  $-\infty \leq x \leq \infty$ , e desvio padrão  $\sigma > 0$ , então a equação que descreve a Função Densidade de Probabilidade para uma Distribuição Normal é dada por:*

$$(2.4) \quad f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

*Pode-se dizer que  $\chi$  possui uma distribuição normal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  em que  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio-padrão.*

Para calcular a probabilidade da variável aleatória  $\chi$  encontrar-se em um intervalo dado  $(a, b)$ , ou seja,  $a < \chi < b$ , deve-se aplicar a integral à função Densidade de Probabilidade no intervalo. Como essa integral pode não possuir solução analítica, tem-se por alternativa a aplicação de mudança de variável, de forma a possibilitar sua integração, utilizando a variável aleatória  $Z$ , com média zero e desvio padrão um.

Essa variável aleatória pode ser escrita como:

$$(2.5) \quad Z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

onde  $\mu$  é a média e  $\sigma$  o desvio-padrão da variável aleatória  $\chi$ .

Desta forma, a probabilidade de  $a < x < b$  pode ser obtida da seguinte forma:

$$(2.6) \quad P(a < \chi < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{\chi - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Outra característica da Distribuição Normal, ilustrada na Figura 2.1, é a simetria e a concentração da probabilidade em torno do valor médio e sua vinculação com o desvio padrão.

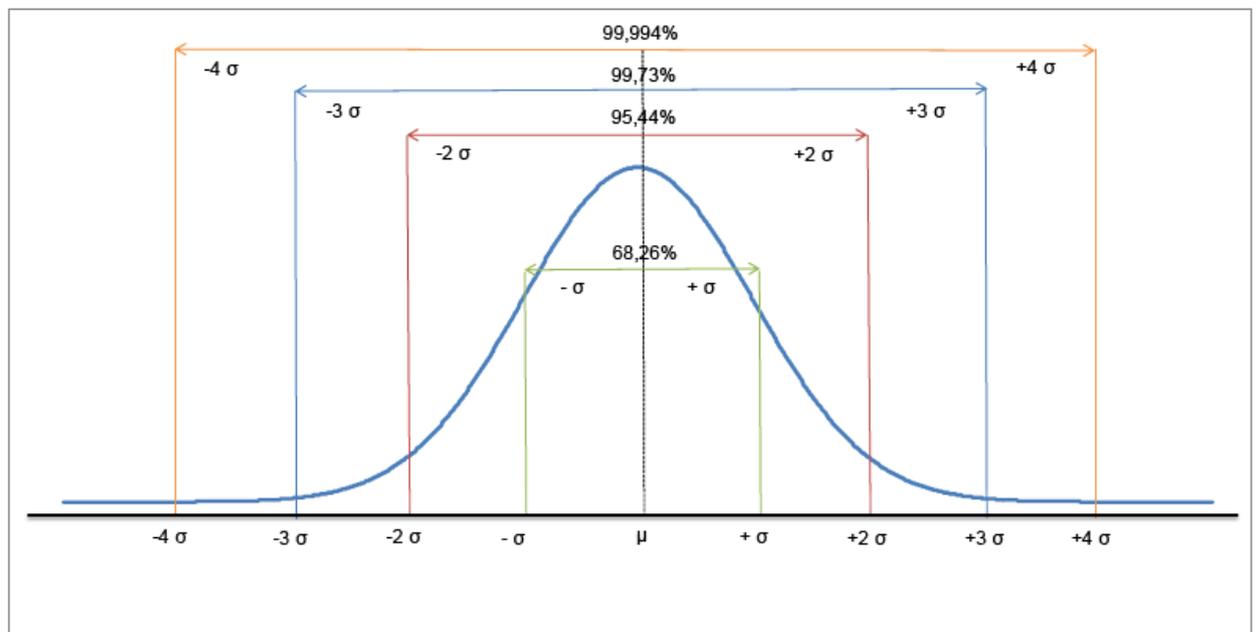


Figura 2.1: Densidade de Probabilidade da Distribuição Normal  
Fonte: o autor

### 2.3.2 Distribuição de Poisson

A distribuição de probabilidade de Poisson foi introduzida, em 1837, pelo matemático e engenheiro francês Siméon Denis Poisson (1781 – 1840) em publicação onde abordou a aplicação da teoria da probabilidade a processos de julgamentos criminais, cujo título é *Recherches seve la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civile*. Poisson ocupou cargos acadêmicos na Ecole Polytechnique e na Sorbonne e desenvolveu também pesquisas sobre mecânica, eletricidade, elasticidade, calor, som e estudos matemáticos com aplicação na medicina e na astronomia.

A distribuição de Poisson tem uso frequente na modelagem do número de ocorrências de um evento por um período de tempo definido. Ela baseia-se em apenas um parâmetro,  $\lambda$ , que é a taxa média de ocorrências do evento por unidade de tempo.

DEFINIÇÃO 2.3.2. Uma variável aleatória  $\chi$  que pode assumir qualquer um dos valores  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , ou seja, inteiros positivos, é chamada variável aleatória de Poisson, com parâmetro  $\lambda > 0$ , se:

$$(2.7) \quad P(\chi = x) = f(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

Os pressupostos básicos para a utilização desse modelo de distribuição são que  $\lambda$  permaneça constante no decorrer do tempo, ou que se adote seu valor médio como parâmetro, e que o número de ocorrências em um período não interfira no total de ocorrências de outro. Sua ilustração gráfica, constante de Figura 2.2 a seguir, possibilita a visualização da variação significativa de forma em função do parâmetro  $\lambda$ .

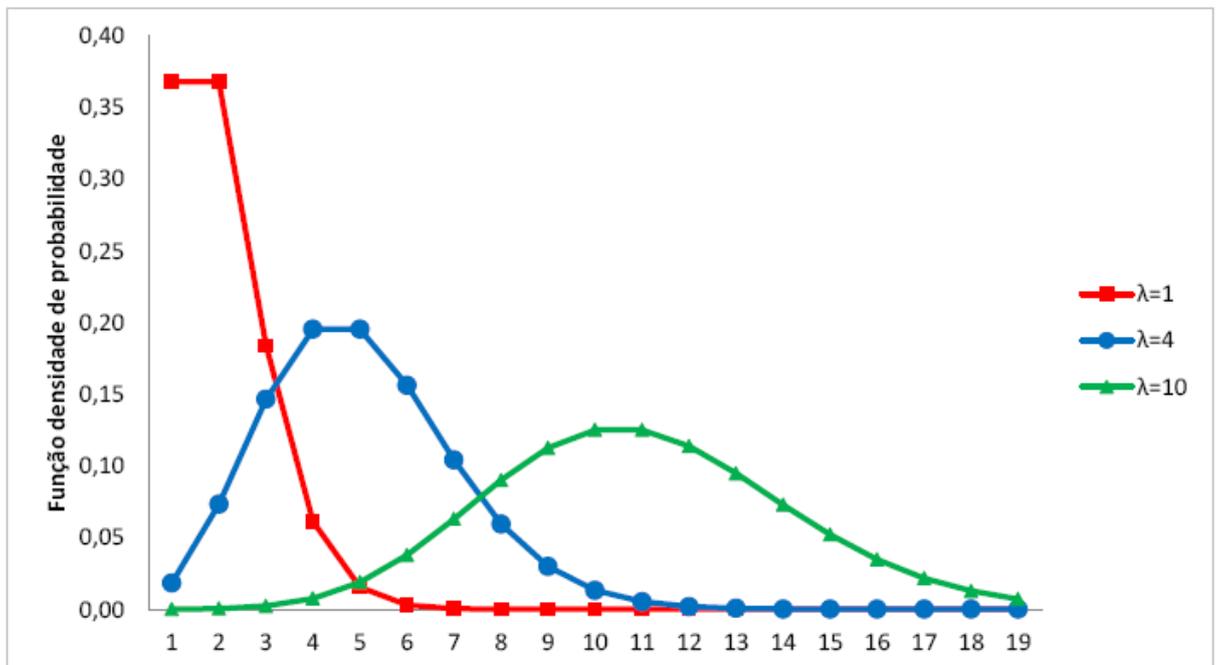


Figura 2.2: Densidade de Probabilidade da Distribuição Poisson

Fonte: o autor

### 2.3.3 Distribuição Gama

A distribuição Gama foi estudada primeiramente em 1836 pelo francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827). Laplace foi um dos mais influentes cientistas franceses, sendo considerado por alguns o “Newton francês”, tendo dado relevantes contribuições nas áreas de

equações diferenciais, estudos sobre a teoria do calor, a velocidade do som e, também na evolução do Cálculo das Probabilidades. No que tange à probabilidade, uma das suas obras mais célebres é o livro “Theorie Analytique des Probabilités” (Teoria Analítica das Probabilidades), publicada em 1812 (ANDREOTTI, 2016).

DEFINIÇÃO 2.3.3. *Uma variável aleatória  $\chi$  tem distribuição Gama, com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , com  $\alpha, \beta > 0$ , se sua função de densidade de probabilidade é dada por:*

$$(2.8) \quad f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$$

Com  $\alpha = \frac{\mu}{\beta} e \beta = \frac{\sigma^2}{\mu}$ , respectivamente denominados parâmetro de forma e parâmetro de escala.

É, onde  $\mu$  é a média,  $\sigma$  é o desvio padrão e  $\Gamma(\alpha)$  é a função Gama calculada no ponto  $\alpha$ , sendo esta função dada por:

$$(2.9) \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Um caso particular da distribuição Gama, com  $\alpha = 1$ , é a Distribuição Exponencial, apresentado a seguir.

### Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é frequentemente utilizada para descrever a distribuição dos tempos entre ocorrências em situações em que a distribuição do número de ocorrências por intervalo de tempo se dá pelo método de Poisson.

DEFINIÇÃO 2.3.4. *Definição: Uma variável aleatória  $\chi$  terá uma Distribuição Exponencial com parâmetro  $\lambda > 0$ , se sua função de densidade de probabilidade é dada por:*

$$(2.10) \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Logo, sua função de Distribuição Acumulada é dada por:

$$(2.11) \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Sua representação gráfica encontra-se ilustrada na Figura 2.3 a seguir:

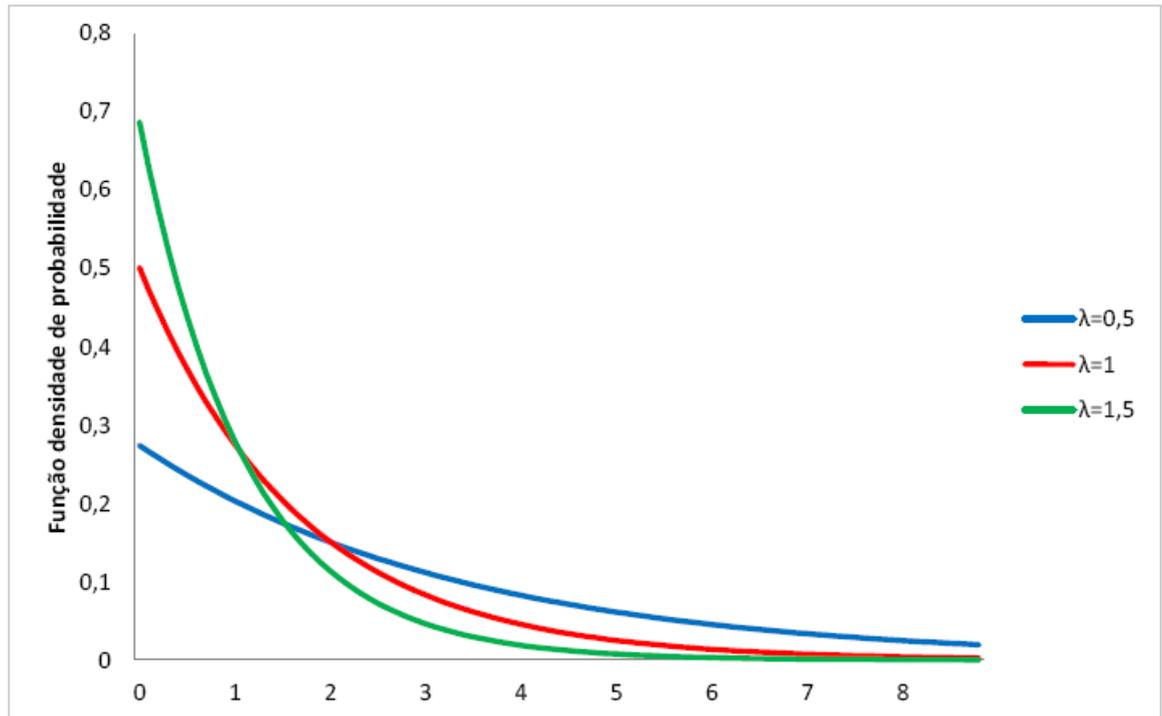


Figura 2.3: Densidade de Probabilidade da Distribuição Exponencial  
Fonte: o autor

## 2.4 Testes de Hipótese

A temática abaixo foi tratada em consonância com Beiguelman (1996) e Siegel (1975), onde poderão ser encontradas informações adicionais.

Os testes de hipótesetêm por finalidade avaliar a hipótese de que uma amostra aleatória tenha sido extraída de uma população com a distribuição especificada, ou seja, de posse de uma amostra aleatória de uma população  $\chi$  com função densidade de probabilidade desconhecida, a aplicação desses testes permite verificar as hipóteses:

- $H_0$ (Hipótese Nula):  $\chi$  tem função densidade de probabilidade  $f_0$
- $H_1$ (Hipótese Alternativa):  $\chi$  não tem função densidade de probabilidade  $f_0$

Há uma diversidade de testes de hipótese disponíveis, dos quais dois serão detalhados a seguir por sua aplicabilidade às situações em análise neste estudo: o teste do Qui-Quadrado e o teste de Kolmogorov-Smirnov.

### Teste Qui-Quadrado

O matemático britânico Karl Pearson (1857 - 1936), membro da Royal Society of London, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Estatística, tendo, inclusive, fundado o primeiro departamento universitário dedicado à Estatística em todo o mundo, na University College London, em 1911. Ele escreveu um conjunto de 18 artigos denominados *Mathematical Contribution to the Theory Evolution*, entre 1893 e 1912, onde contribuiu, dentre outros temas, com o desenvolvimento do teste de hipóteses Qui-Quadrado (MEDEIROS FILHO, 2001a).

O Qui-Quadrado, simbolizado por  $\chi^2$ , é um teste de hipóteses que se destina a encontrar um valor da dispersão para duas variáveis nominais. É um teste não paramétrico, ou seja, não depende dos parâmetros populacionais, como média e variância.

O princípio básico deste método é comparar proporções, isto é, as possíveis divergências entre as frequências observadas e esperadas para um evento. Evidentemente, pode-se dizer que dois grupos se comportam de forma semelhante se as diferenças entre as frequências observadas e as esperadas em cada categoria forem muito pequenas.

São requisitos à aplicação deste teste: a independência dos grupos, a aleatoriedade da seleção dos grupos, a utilização da frequência como dado a ser comparado e o pertencimento de cada observação a apenas um grupo.

Para a aplicação deste teste, deve-se primeiro calcular um valor único que represente a casualidade, ou não, dos desvios encontrados. Para isso, efetua-se o somatório das razões do quadrado da diferença entre as frequências observadas e esperadas pela frequência esperada, conforme fórmula a seguir:

$$(2.12) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

As hipóteses a serem testadas são:

1. Hipótese nula: As frequências observadas não possuem diferença significativa das frequências esperadas.
2. Hipótese alternativa: As frequências observadas são significativamente diferentes das frequências esperadas.

Para avaliar a aceitação da hipótese, compara-se o resultado obtido para  $\chi^2$  aplicando-se a fórmula acima com o chamado  $\chi^2$  crítico, que comumente é apurado com o auxílio da tabela a seguir:

Tabela 1: Tabela Qui-quadrado crítico

Grau de Liberdade	Nível de Significância ( $\alpha$ )											
	0,99	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,000	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,020	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,080
6	0,872	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	10,851	12,443	14,572	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566

Na Tabela 1, o nível de significância, ou seja, a máxima probabilidade de erro aceita se encontra identificado nos cabeçalhos das colunas. Nos cabeçalhos das linhas estão representados os possíveis graus de liberdade, obtido subtraindo-se um da quantidade de classes em que foram agrupados os resultados da amostra. No cruzamento da linha correspondente ao grau de liberdade com a coluna relativa ao nível de significância desejado se localiza o valor crítico para a situação em análise.

A tomada de decisão é feita comparando-se o valor calculado com o crítico identificado, rejeitando-se a hipótese nula sempre que o resultado do cálculo não for inferior ao valor crítico.

### Teste de Kolmogorov-Smirnov

O matemático russo Andrei Nikolayevich Kolmogorov (1903 - 1987), considerado por alguns o mais influente matemático soviético do século XX, membro da Academia de Ciências da União Soviética, criou uma base axiomática para probabilidade fundamentada na Teoria dos Conjuntos. Trabalhou ainda com funções conjugadas em espaço euclidiano multidimensional e com a teoria das funções de uma variável complexa (MEDEIROS FILHO, 2001b).

O teste de hipótese de Kolmogorov-Smirnov consiste na apuração da maior diferença absoluta entre a função de distribuição acumulada assumida e a distribuição empírica dos dados, conforme fórmula abaixo:

$$(2.13) \quad KS = \sup |F_n(x) - F(x)| ,$$

onde  $F_n(x)$  é a função de distribuição acumulada empírica e  $F(x)$  é a distribuição em teste.

- Hipótese nula: As frequências observadas não possuem diferença significativa das frequências esperadas.
- Hipótese alternativa: As frequências observadas são significativamente diferentes das frequências esperadas.

Tabela 2: Tabela KS crítico

Tamanho amostra	Nível de Significância ( $\alpha$ )				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,995
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,929
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,828
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,733
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,669
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,618
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,577
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,543
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,514
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,490
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,468
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,450
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,433
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,418
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,404
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,392
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,381
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,371
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,363
25	0,210	0,220	0,240	0,270	0,356
30	0,190	0,200	0,220	0,240	0,320
35	0,180	0,190	0,210	0,230	0,290
n > 35	$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

As hipóteses a serem testadas são: A comparação do resultado calculado ao valor crítico, identificado conforme Tabela 2, possibilitada a ratificação da hipótese nula ou sua rejeição e a consequente aceitação da hipótese alternativa.

O teste de Kolmogorov-Smirnov, por independender da agregação dos dados em classes, mostra-se mais simples e menos subjetiva a sua aplicação. Ao contrário do teste do Qui-quadrado, não se aplica a dados qualitativos.

Se o valor calculado for inferior ao crítico identificado, a hipótese nula é confirmada e, por conseguinte, a hipótese alternativa é rejeitada.

## 2.5 Avaliação de Desempenho do Sistema

Em alinhamento com Pereira (2009), a avaliação de desempenho do sistema de filas consiste no levantamento de dados que possam subsidiar a análise e a construção de alternativas para a sua otimização. Neste contexto, algumas informações mostram-se de grande relevância:

- a) Os tempos de permanência na fila e no sistema.
- b) As quantidades de clientes na fila e no sistema.
- c) A probabilidade de inexistência de cliente.
- d) A probabilidade do serviço ser prestado dentro de um intervalo de tempo.

Considerando taxas de chegada ( $\lambda$ ) e de serviço ( $\mu$ ) independentes do estado do sistema e adotando o valor médio dessas taxas como características constantes do sistema, as quantidades médias de clientes no sistema e na fila são obtidas, respectivamente, pelas equações a seguir:

$$(2.14) \quad L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

e

$$(2.15) \quad L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n - s)P_n$$

onde:

- $s$  = número de postos de serviço em paralelo;
- $L_s$  = número médio de clientes no sistema (fila + em serviço);
- $P_n$  = probabilidade de ter-se  $n$  clientes na fila;
- $L_q$  = número médio de clientes na fila.

Para um sistema considerado em equilíbrio, ou seja, quando o número médio de entradas de clientes é igual ao número médio de saídas, podem ser aplicadas as fórmulas de Little:

$$(2.16) \quad L_s = \lambda W_s \text{ e } L_q = \lambda W_q$$

Em que  $W_s$  representa o tempo médio de espera no sistema (fila + atendimento) e  $W_q$  o tempo médio na fila.

No contexto da avaliação de desempenho, um dos processos mais estudados na modelagem de sistemas de filas de espera é chamado de processo de nascimento e morte, que associam a ideia de nascimento a uma chegada à fila e de morte à saída de um cliente depois de atendido. Esse modelo tem por premissa o ajustamento da Distribuição Exponencial para os tempos entre chegadas sucessivas e o tempo de espera, além do pressuposto do sistema se encontrar em equilíbrio.

Um modelo bastante estudado e relacionado a processos de nascimento e morte, com as chegadas dos clientes ocorrendo segundo um processo de Poisson e o tempo de serviço com distribuição exponencial, é denotado por  $M/M/k$  ou  $M/M/k/FIFO/\infty/\infty$ , utilizando-se anotação de Kendall, onde:

- a) O primeiro  $M$  (memoryless) é a distribuição dos tempos entre chegadas, exponencial ;
- b) O segundo  $M$  (memoryless) é a distribuição dos tempos de serviço, análogo ao anterior;
- c) O  $k$  representa a quantidade de atendentes em paralelo ( $k > 1$ );
- d) FIFO a disciplina da fila, o primeiro a chegar é o primeiro a ser servido (*FirstIn FirstOut*).
- e) O primeiro  $\infty$  indica a inexistência de número máximo de usuários no sistema.

f) O segundo  $\infty$  indica uma população de potenciais usuários do serviço muito elevada.

As principais relações relativas a esse modelo e que suportam a avaliação de desempenho do sistema são:

a) Taxa de ocupação:  $\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$  onde  $\lambda$  é a taxa de chegada (chegadas por unidade de tempo),  $\mu$  é a taxa de atendimento (atendimentos por servidor por unidade de tempo) e  $k$  o total de servidores.

b) Probabilidade de não haver clientes na fila  $P_0$ , dada por:

$$(2.17) \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{1}{1-\rho}\right)}$$

c) Probabilidade do tempo de espera ( $T_q$ ) exceder  $t$ , dada por:

$$(2.18) \quad P(T_q > t) = \frac{P_k}{(1-\rho)} e^{-(k\mu-\lambda)t}, \text{ onde } P_k = \frac{k^k}{k!} \rho^k P_0$$

---

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

---

A agência bancária em estudo está localizada em *shopping center* com mais de 300 lojas e por onde circulam diariamente cerca de 80 mil pessoas, segundo informação constante no site da instituição.

Para a caracterização do sistema em análise, será omitida a informação referente ao tamanho da população ( $N$ ) por ter sido esta considerada como muito grande ( $N = \infty$ ). Para tanto, avaliou-se que a quantidade de pessoas que circulam diariamente no shopping ( $n = 80.000$ ) e que eventualmente podem buscar atendimento a serviços de caixa na agência bancária é muitas vezes superior à média de atendimentos diários ( $n = 280$ ).

Outro aspecto relevante para a caracterização da fila é a inexistência de número máximo de usuários no sistema, uma vez que a legislação a respeito do atendimento bancário não permite a imposição de tais limites e que a única restrição para o acesso ao serviço está relacionada ao horário de ingresso na agência bancária.

Na seleção dos dados para análise foram excluídas as informações referentes aos atendimentos prioritários, tanto no que tange aos volumes de atendimento quanto no que se refere ao número de servidores envolvidos no atendimento, em função de tais demandas não ocuparem toda a jornada de trabalho do funcionário designado a executar tais atendimentos e que este dedica parte de sua jornada a outras atividades não inerentes ao atendimento.

Desta forma, o sistema em questão manteve três funcionários no atendimento normal (não prioritário) nos 19 dias úteis do mês em análise, caracterizando-se sua classificação pela disciplina de fila FIFO.

## 3.1 Processo de chegada à fila

O ingresso de um cliente na fila de caixa se dá de forma individual, embora mais de um possa ingressar na agência ao mesmo tempo. Isto ocorre em decorrência da necessidade de retirada de senha em equipamento único disponível ao lado da porta de entrada no ambiente de atendimento da agência. Desta forma, o tempo entre as emissões das senhas sucessivas foi considerado como tempo entre as chegadas de clientes.

No período em análise, foram emitidas 5.317 senhas, das quais 68 foram descartadas para os cálculos a seguir, 19 delas por serem as primeiras senhas do dia, não tendo, portanto, como calcular o prazo decorrido desde a emissão da anterior e as demais 49 foram desconsideradas em função de sua geração ter ocorrido fora do expediente bancário, sendo portanto a perda amostral de 1,28%.

### 3.1.1 Tempo entre chegadas sucessivas à fila

Baseando-se nessas 5.249 senhas consideradas válidas, foram calculados a média de 60,27 segundos entre cada chegada e o desvio padrão de 67,52, dados estes utilizados para a busca de modelo de distribuição adequado para a descrição da situação e dos dados em estudo. Da razão entre o desvio padrão e a média, obteve-se também o coeficiente de variação que, neste caso, superou 100%, indicando a baixa homogeneidade da amostra.

Tendo em vista os resultados encontrados em trabalhos similares, como os de Oliveira (2015) e Lamarca (2016), adotou-se como Hipótese Nula o ajustamento da Distribuição Exponencial e como Hipótese Alternativa seu não ajustamento à situação em estudo.

Utilizando o Microsoft Excell<sup>®</sup> foram calculadas as frequências e as probabilidades observadas, acumuladas e não acumuladas, com base nos dados coletados das senhas válidas mencionadas anteriormente. Utilizando-se ainda o mesmo *software*, foram calculadas as frequências e probabilidades esperadas para a Distribuição Exponencial.

Novamente fazendo uso da ferramenta acima, aplicou-se o teste de hipótese Kolmogorov-Smirnov, obtendo-se os resultados constantes da Tabela 3 abaixo:

Tabela 3: Teste Kolmogorov – Smirnov para Distribuição Exponencial do tempo entre entradas de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016

Tempo entre entradas	Frequência observada	Distribuição acumulada		Diferença absoluta
		Empírica	Em hipótese	
Até 20 segundos	1.544	0,294	0,282	0,012
Até 25 segundos	1.857	0,354	0,340	0,014
Até 30 segundos	2.140	0,408	0,392	0,016
Até 40 segundos	2.635	0,502	0,485	<b>0,017</b>
Até 50 segundos	3.025	0,576	0,564	0,013
Até 60 segundos	3.348	0,638	0,630	0,007
Até 70 segundos	3.616	0,689	0,687	0,002
Até 80 segundos	3.829	0,730	0,735	0,005
Até 90 segundos	4.018	0,765	0,775	0,010
Até 100 segundos	4.204	0,801	0,810	0,009
Até 120 segundos	4.460	0,850	0,863	0,014
Até 140 segundos	4.659	0,888	0,902	0,014
Até 160 segundos	4.815	0,917	0,930	0,012
Até 180 segundos	4.915	0,936	0,950	0,013
Até 200 segundos	4.998	0,952	0,964	0,012
Até 220 segundos	5.051	0,962	0,974	0,012
Até 240 segundos	5.100	0,972	0,981	0,010
Até 260 segundos	5.139	0,979	0,987	0,007
Até 280 segundos	5.164	0,984	0,990	0,007
Até 300 segundos	5.184	0,988	0,993	0,006
Até 400 segundos	5.236	0,998	0,999	0,001
Até 500 segundos	5.243	0,999	1,000	0,001
Até 600 segundos	5.247	1,000	1,000	0,000
Até 700 segundos	5.248	1,000	1,000	0,000
Até 800 segundos	5.248	1,000	1,000	0,000
Até 900 segundos	5.248	1,000	1,000	0,000
Até 1000 segundos	5.248	1,000	1,000	0,000
Até 1100 segundos	5.249	1,000	1,000	0,000

Fonte: o autor

A diferença absoluta máxima observada foi de 0,017, valor inferior à diferença crítica, que, para um nível de significância de 0,05, foi calculada pela razão entre 1,36 e a raiz quadrada de 5.249, total de senhas válidas, obtendo-se 0,019 como resultado. Logo, com base neste teste, a hipótese em questão não pode ser rejeitada e, portanto, ratifica-se a aplicabilidade da Distribuição Exponencial à descrição da distribuição de probabilidade do tempo entre chegadas sucessivas de clientes à agência.

Adicionalmente, foram aplicados os testes Qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Normal sendo rejeitada, em ambos os testes, a hipótese de ajustamento do modelo. No teste Kolmogorov-Smirnov, o valor absoluto máximo obtido foi de 0,139, muito

superior ao valor crítico de 0,019. No teste Qui-quadrado, a soma dos índices dos intervalos resultou maior que 500, superando em muito os 31,41 admitidos para o nível de significância de 0,05.

A utilização de representação gráfica dessas distribuições possibilita uma boa visão e o exercício da intuição no entendimento do ajustamento da distribuição teórica ao resultado empírico e pode configurar como ferramenta auxiliar na abordagem do tema com alunos do Ensino Médio. O gráfico das distribuições empírica, Normal e Exponencial para o tempo entre chegadas sucessivas de clientes ilustra bem tal uso e evidencia o não ajustamento da Distribuição Normal e indica um bom ajustamento da Distribuição Exponencial (Gráfico 1).

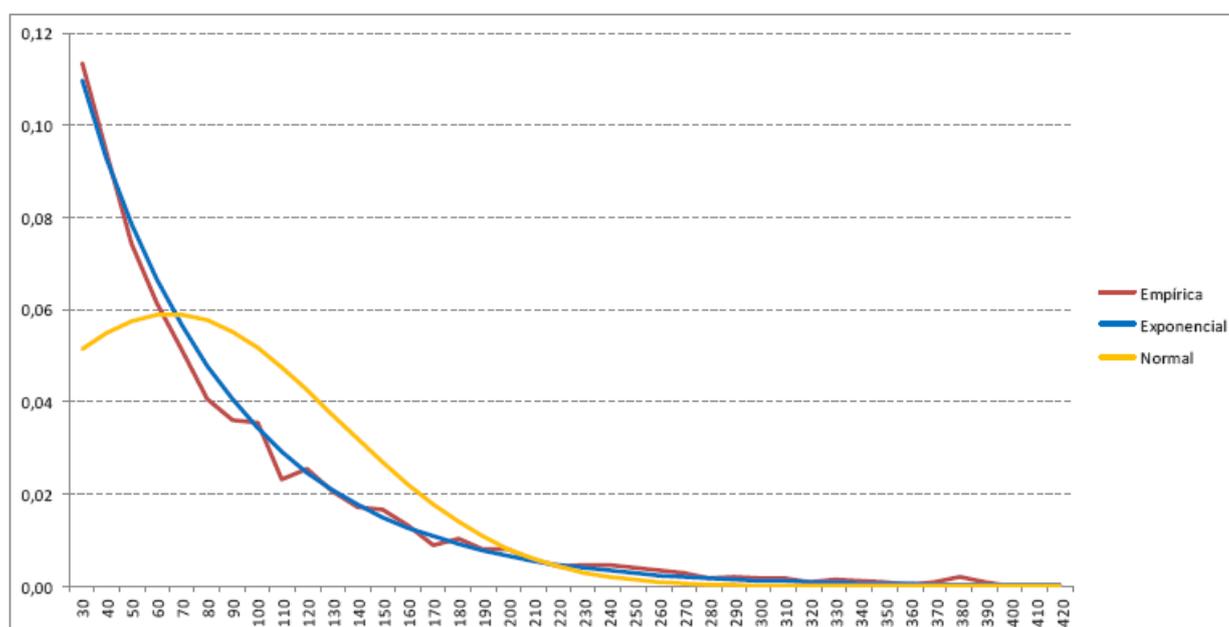


Figura 3.1: Gráfico 1 - Representação das distribuições de probabilidade empírica, Normal e Exponencial dos tempos (s) entre chegadas sucessivas de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Fonte: o autor

### 3.1.2 Entradas por intervalo

O período diário de atendimento bancário, que no Distrito Federal é das 11 às 16 horas, foi fracionado em 30 intervalos sucessivos e sem intercessão, de 10 minutos. Foram calculados o desvio padrão de 3,55 e a média de 9,31 entradas por intervalo. Verificou-se também as quantidades máxima de 20 e mínima de uma entrada por intervalo.

Em seguida, para cada um dos 570 intervalos, do total de 19 dias, utilizando o Microsoft Excell<sup>®</sup> computou-se a quantidade de chegadas de clientes, ou seja, o número de senhas emitidas, obtendo-se os resultados constantes da Tabela 4. Nela pode-se observar que nos dias 22 e 24 tivemos a menor quantidade de clientes e que no intervalo das 12:20h às 12:30h temos a menor média de ingressos por intervalo, 6,42.

Tabela 4: Distribuição das chegadas por faixa horária de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Intervalo	Quantidade de atendimentos por data e intervalo de 10 minutos																			Média intervalo
	1	3	4	7	8	9	10	11	14	16	17	18	21	22	23	24	25	28	29	
[11:00;11:10)	19	12	14	14	9	16	16	8	16	14	14	8	15	13	8	15	16	14	8	13,11
[11:10;11:20)	10	2	11	14	14	8	7	8	6	10	8	9	13	4	9	5	5	12	10	8,68
[11:20;11:30)	11	6	11	10	16	7	6	11	12	8	8	7	11	7	6	12	9	3	9	8,95
[11:30;11:40)	7	10	7	8	11	6	10	11	3	8	5	13	5	10	12	6	11	10	6	8,37
[11:40;11:50)	9	9	6	13	4	13	13	7	13	8	7	7	6	3	8	3	10	7	5	7,95
[11:50;12:00)	10	8	14	8	10	8	9	7	8	7	7	8	11	6	3	8	8	6	10	8,21
[12:00;12:10)	6	5	8	17	11	5	10	5	10	8	7	4	6	10	8	3	4	10	1	7,26
[12:10;12:20)	2	11	4	11	7	11	13	6	6	6	7	10	4	1	11	5	10	8	6	7,32
[12:20;12:30)	6	6	10	5	8	9	13	7	5	4	2	9	6	6	3	8	4	5	6	6,42
[12:30;12:40)	11	9	9	6	8	9	9	6	8	6	6	6	14	3	7	6	6	6	3	7,26
[12:40;12:50)	6	4	7	7	11	9	11	7	12	14	8	13	8	9	4	8	11	10	8	8,79
[12:50;13:00)	9	9	11	8	11	13	10	14	11	9	10	4	11	7	9	8	6	5	7	9,05
[13:00;13:10)	5	9	8	8	4	12	12	10	10	6	6	5	3	5	10	3	5	5	7	7,00
[13:10;13:20)	11	8	7	12	8	8	14	8	11	11	8	9	9	8	4	6	8	6	8	8,63
[13:20;13:30)	11	9	6	13	5	14	8	9	8	6	6	5	7	5	6	11	8	5	7	7,84
[13:30;13:40)	7	13	14	12	16	11	10	11	13	11	5	7	13	5	6	8	7	9	13	10,05
[13:40;13:50)	5	6	6	9	13	5	13	5	9	13	11	5	9	6	5	4	8	6	7	7,63
[13:50;14:00)	9	11	13	8	6	6	6	11	8	5	11	11	9	8	5	4	9	8	10	8,32
[14:00;14:10)	14	6	10	12	15	19	12	4	16	9	11	6	9	7	5	7	9	7	15	10,16
[14:10;14:20)	3	4	11	7	10	19	13	8	12	7	8	10	7	5	3	6	14	11	3	8,47
[14:20;14:30)	8	11	5	11	16	8	12	11	12	10	6	7	11	10	15	4	15	19	4	10,26
[14:30;14:40)	9	9	11	15	20	11	11	12	11	12	11	7	4	7	7	8	12	10	16	10,68
[14:40;14:50)	11	10	12	12	12	8	13	14	7	11	9	9	9	10	5	8	9	5	6	9,47
[14:50;15:00)	7	7	11	14	7	10	14	8	8	11	6	10	11	16	8	10	10	6	7	9,53
[15:00;15:10)	7	7	10	17	14	10	18	12	9	10	12	9	14	10	12	9	6	8	9	10,68
[15:10;15:20)	9	9	12	9	14	13	7	11	8	14	8	9	16	12	14	13	10	14	18	11,58
[15:20;15:30)	9	12	13	15	7	11	12	13	14	11	9	14	13	11	14	5	9	12	13	11,42
[15:30;15:40)	14	18	14	14	18	18	19	14	14	13	7	10	18	7	10	9	14	9	18	13,58
[15:40;15:50)	13	8	9	13	6	17	16	11	12	13	11	16	8	6	11	10	12	12	12	11,37
[15:50;16:00]	11	8	8	12	16	14	11	17	13	9	13	7	11	7	8	12	6	18	10	11,11
Total por data	269	256	292	334	327	328	348	286	305	284	247	254	291	224	236	224	271	266	262	

Fonte: o autor

Nos gráficos a seguir é possível visualizar a concentração dos dias de maior e menor demanda, respectivamente, próximos ao início e ao final do mês, assim como uma concentração do fluxo de usuário nas proximidades do horário de atendimento e uma redução desse fluxo logo após a abertura da agência.

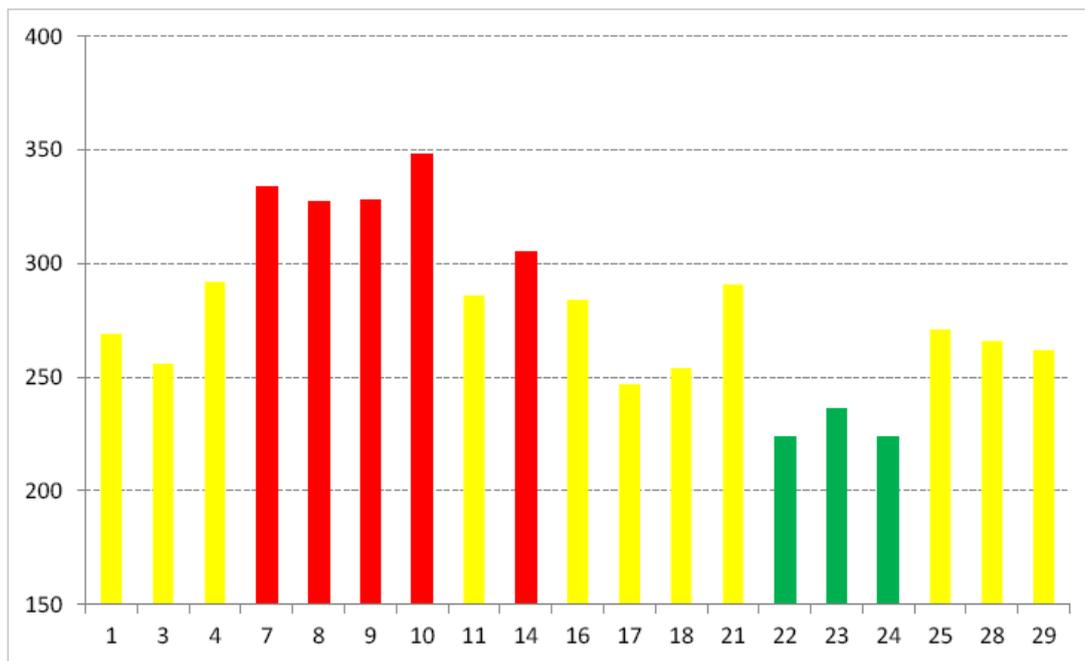


Figura 3.2: Gráfico 2 - Representação do total diário de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Fonte: o autor

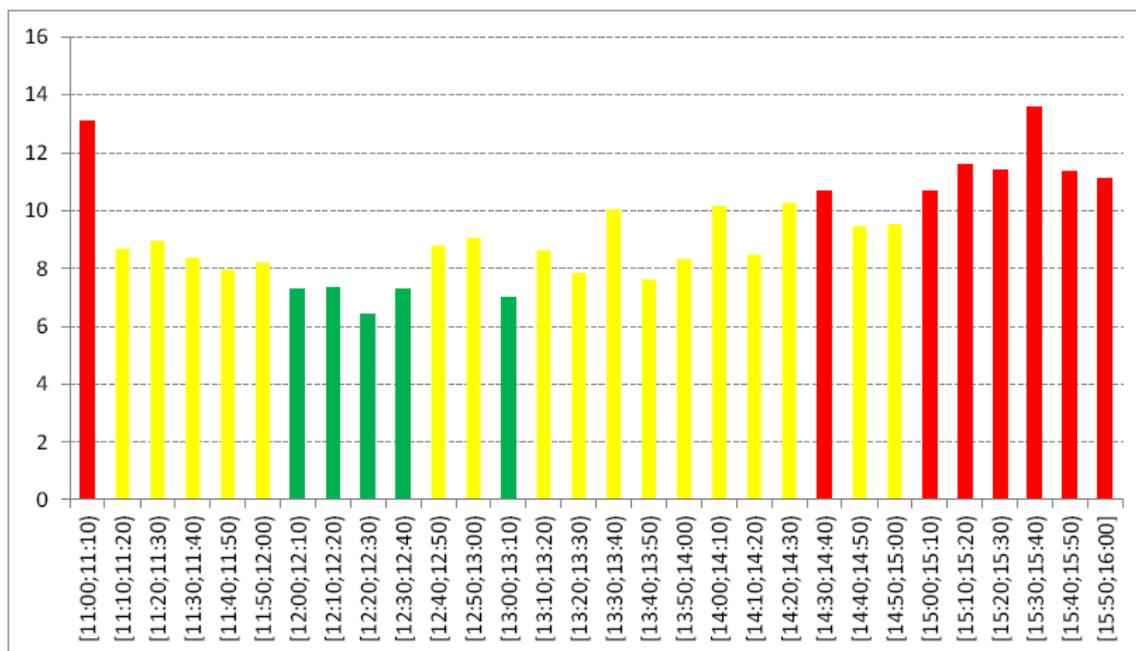


Figura 3.3: Gráfico 3 - Representação da média de chegadas por intervalo de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Fonte: o autor

Em seguida, novamente fazendo uso do o Microsoft Excell<sup>®</sup>, foram calculadas as frequências e as probabilidades observadas, acumuladas e não acumuladas, com base nos dados coletados das senhas válidas mencionadas anteriormente. Tendo em vista que a distribuição dos tempos entre entradas seguiu o modelo Exponencial, buscou-se, por meio do teste Kolmogorov-Smirnov, confirmar a aderência da distribuição de Poisson para a quantidade de entradas por intervalo de tempo. Esta hipótese nula foi ratificada, obtendo-se o desvio absoluto máximo de 0,056, inferior ao valor crítico de 0,057, calculado para um nível de significância de 0,05. Conforme Tabela 5.

Tabela 5: Teste Kolmogorov-Smirnov para Distribuição de Poisson da quantidade de chegadas de usuários em uma agencia bancária por intervalo de tempo, Brasília-DF, 2016.

Intervalos	Frequência observada	Frequência esperada	Diferença absoluta
Até 1 entrada	0,00351	0,00094	0,003
Até 2 entradas	0,00877	0,00487	0,004
Até 3 entradas	0,03333	0,01709	0,016
Até 4 entradas	0,06842	0,04550	0,023
Até 5 entradas	0,13333	0,09837	0,035
Até 6 entradas	0,23684	0,18037	0,056
Até 7 entradas	0,33158	0,28938	0,042
Até 8 entradas	0,45614	0,41617	0,040
Até 9 entradas	0,55439	0,54726	0,007
Até 10 entradas	0,63860	0,66924	0,031
Até 11 entradas	0,74737	0,77243	0,025
Até 12 entradas	0,80877	0,85245	0,044
Até 13 entradas	0,86842	0,90972	0,041
Até 14 entradas	0,92982	0,94779	0,018
Até 15 entradas	0,94386	0,97141	0,028
Até 16 entradas	0,96842	0,98514	0,017
Até 17 entradas	0,97544	0,99266	0,017
Até 18 entradas	0,98947	0,99654	0,007
Até 19 entradas	0,99825	0,99845	0,000
Até 20 entradas	1,00000	0,99933	0,001

Fonte: o aturor

## 3.2 Tempo de serviço/atendimento

O processo de atendimento de caixa apresenta elevada variação no volume de transações realizadas para cada cliente em atendimento, conforme observação qualitativa do pesqui-

sador, ratificada em visita à agência, enquanto para a conclusão do atendimento de alguns clientes fez-se necessário somente a execução de uma transação, como a transferência de valor entre contas, para outros eram necessárias dezenas, como o processamento do pagamento de um lote de títulos.

Além da inconstância no volume de serviços prestados por atendimento, há ainda uma significativa variação no tempo necessário ao atendente para a execução dos diversos serviços prestados. Para ilustrar tal diversidade, apresenta-se tabela com dados do tempo consumido para alguns dos serviços mais frequentes, conforme dados fornecidos pela instituição financeira (Tabela 6).

Tabela 6: Tempo médio consumido por serviço executado por caixas de uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Serviço Prestado no Caixa	Tempo (s)
Saques Conta Corrente e Poupança	41
Convênios Diversos	53
Recebimento de Tributo	65
Recebimento de Valores IPVA/Taxas	65
Recebimento de Tarifas de Exclusão Do CCF	71
Pagamento de Benefício com Cartão	73
Transferências entre Contas	91
Depósito em Dinheiro	92
Saque Cartão Pré-Pago	103
Pagamento de Restituição IR	103
Fundo de Participação do Servidor	117
Pagamento Contra Recibo	120
Saque Contra Recibo - Poupança	120
Pagamentos de Benefícios Contra Recibo	144
Saque de Depósitos Judiciais e Administrativos	159
Pagamento de Cheque	160
Aplicações de Depósitos Judiciais	183
Pagamento e Recebimento (Transferência Eletrônica)	210

Fonte: o autor

Toda essa diversidade foi refletida nos dados coletados, apresentando um tempo mínimo de 10 e um máximo de 1.833 segundos para a conclusão de um atendimento. O tempo médio calculado foi de 151,87 segundos e o desvio padrão para a amostra foi de 139,71. A não homogeneidade dessa amostra pode ser verificada também pelo coeficiente de variação que, para o tempo de atendimento, foi de 92%.

Em seguida, novamente fazendo uso do Microsoft Excel<sup>®</sup>, foram calculadas as frequências e as probabilidades observadas, acumuladas e não acumuladas, com base nos dados coletados.

Em busca da identificação de modelo probabilístico adequado para a descrição da distribuição desses tempos, aplicou-se o teste Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Exponencial, mas a hipótese nula foi rejeitada, pois o valor máximo observado para a diferença absoluta foi de 0,1905, superior ao valor crítico calculado que, para um nível de significância de 0,05, foi de 0,0186 (Tabela 7).

Mesmo assumindo nível de significância mais elevado, como 0,10, com valor crítico calculado de 0,0223, a hipótese de utilização de Distribuição Exponencial para a descrição da distribuição dos tempos de atendimento foi rejeitada, tanto aplicando o teste acima quanto o Qui-quadrado.

Tabela 7: Teste Kolmogorov-Smirnov para Distribuição Exponencial do tempo de atendimento de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Tempo entre entradas	Frequência observada	Distribuição acumulada		Diferença absoluta
		Empírica	Em hipótese	
Até 10 segundos	1	0,000	0,064	0,064
Até 15 segundos	2	0,000	0,094	0,094
Até 20 segundos	4	0,001	0,123	0,123
Até 25 segundos	12	0,002	0,152	0,150
Até 30 segundos	36	0,007	0,179	0,172
Até 40 segundos	218	0,041	0,232	0,191
Até 50 segundos	522	0,098	0,281	0,182
Até 60 segundos	848	0,159	0,326	0,167
Até 70 segundos	1.263	0,238	0,369	0,132
Até 80 segundos	1.618	0,304	0,409	0,105
Até 90 segundos	1.937	0,364	0,447	0,083
Até 100 segundos	2.257	0,424	0,482	0,058
Até 120 segundos	2.812	0,529	0,546	0,017
Até 140 segundos	3.304	0,621	0,602	0,019
Até 160 segundos	3.678	0,692	0,651	0,040
Até 180 segundos	4.007	0,754	0,694	0,059
Até 200 segundos	4.255	0,800	0,732	0,068
Até 220 segundos	4.435	0,834	0,765	0,069
Até 240 segundos	4.589	0,863	0,794	0,069
Até 260 segundos	4.696	0,883	0,820	0,064
Até 280 segundos	4.775	0,898	0,842	0,056
Até 300 segundos	4.856	0,913	0,861	0,052
Até 400 segundos	5.068	0,953	0,928	0,025
Até 500 segundos	5.167	0,972	0,963	0,009
Até 600 segundos	5.228	0,983	0,981	0,002
Até 700 segundos	5.256	0,989	0,990	0,002
Até 800 segundos	5.279	0,993	0,995	0,002
Até 1100 segundos	5.291	0,995	0,997	0,002

Fonte: o aturor

As hipóteses de utilização das distribuições Normal e Gama também foram rejeitadas com a aplicação do teste de hipótese. Sendo aplicadas as mesmas condições utilizadas para a

Distribuição Exponencial, foram obtidas diferenças absolutas máximas de, respectivamente, 0,185 e 0,155, superiores ao valor crítico de 0,0223, calculado para uma significância de 0,10 (Tabela 8).

Tabela 8: Teste Kolmogorov-Smirnov para as distribuições Normal e Gama do tempo de atendimento de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Tempo entre entradas	Frequência observada	Distribuição acumulada			Diferença absoluta	
		Empírica	Normal	Gama	Normal	Gama
Até 10 segundos	1	0,000	0,155	0,043	0,155	0,043
Até 15 segundos	2	0,000	0,164	0,068	0,163	0,068
Até 20 segundos	4	0,001	0,173	0,094	0,172	0,093
Até 25 segundos	12	0,002	0,182	0,119	0,180	0,117
Até 30 segundos	36	0,007	0,192	0,145	0,185	0,138
Até 40 segundos	218	0,041	0,212	0,196	0,171	0,155
Até 50 segundos	522	0,098	0,233	0,245	0,135	0,147
Até 60 segundos	848	0,159	0,255	0,292	0,096	0,132
Até 70 segundos	1.263	0,238	0,279	0,337	0,041	0,099
Até 80 segundos	1.618	0,304	0,303	0,379	0,001	0,075
Até 90 segundos	1.937	0,364	0,329	0,420	0,035	0,055
Até 100 segundos	2.257	0,424	0,355	0,458	0,069	0,033
Até 120 segundos	2.812	0,529	0,410	0,527	0,119	0,001
Até 140 segundos	3.304	0,621	0,466	0,589	0,155	0,032
Até 160 segundos	3.678	0,692	0,523	0,643	0,169	0,049
Até 180 segundos	4.007	0,754	0,580	0,690	0,174	0,063
Até 200 segundos	4.255	0,800	0,635	0,732	0,165	0,069
Até 220 segundos	4.435	0,834	0,687	0,767	0,147	0,067
Até 240 segundos	4.589	0,863	0,736	0,799	0,127	0,064
Até 260 segundos	4.696	0,883	0,781	0,826	0,103	0,057
Até 280 segundos	4.775	0,898	0,820	0,850	0,078	0,048
Até 300 segundos	4.856	0,913	0,855	0,870	0,058	0,043
Até 400 segundos	5.068	0,953	0,962	0,938	0,009	0,015
Até 500 segundos	5.167	0,972	0,994	0,971	0,022	0,001
Até 600 segundos	5.228	0,983	0,999	0,986	0,016	0,003
Até 700 segundos	5.256	0,989	1,000	0,993	0,011	0,005
Até 800 segundos	5.279	0,993	1,000	0,997	0,007	0,004
Até 1100 segundos	5.291	0,995	1,000	0,999	0,005	0,003

Fonte: o aturor

Como abordado no item 3.1.1, a utilização de representação gráfica dessas distribuições pode proporcionar uma melhor compreensão do aluno quanto à aderência da distribuição teórica à empírica e, no caso da distribuição dos tempos de serviço, a inadequação dos modelos testados (Gráfico 4).

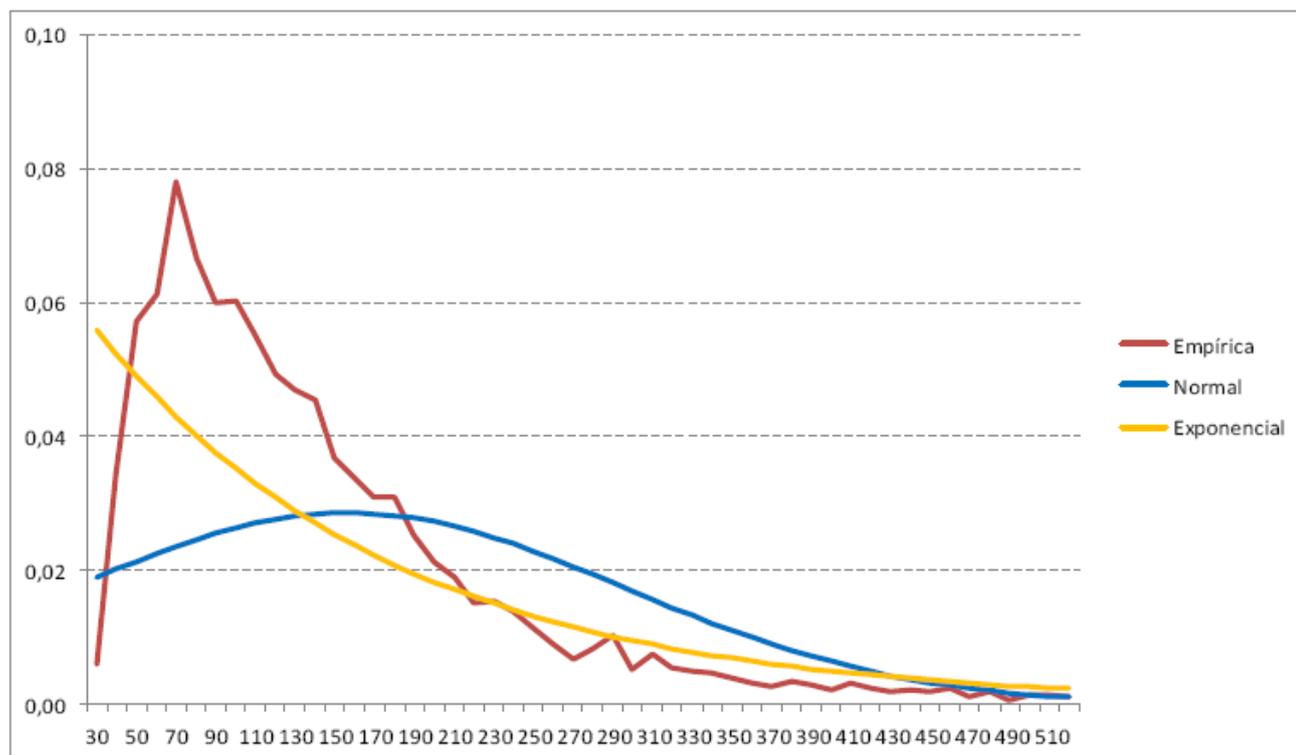


Figura 3.4: Gráfico 4 - Representação das distribuições de probabilidade empírica, Normal e Exponencial dos tempos de serviço aos usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Fonte: o autor

### 3.3 Tempo de espera

O tempo médio de espera para a amostra foi de 305,08 segundos, ou seja, um pouco superior a 5 minutos. Desse total, 98,51% dos atendimentos ocorreram dentro do limite legal que é de 20 minutos no Distrito Federal. Dos 79 restantes, 17 atendimentos aconteceram nos dias 7 e 8 de novembro dentro do prazo de 30 minutos, limite legal para as datas consideradas de pico como aquelas (DISTRITO FEDERAL, 2000). Portanto, o total de atendimentos fora do prazo regulamentado foi de 1,17% (n=62).

Novamente com o auxílio do Microsoft Excell<sup>®</sup>, foram calculadas as frequências e as probabilidades observadas, acumuladas e não acumuladas, com base nos dados coletados. A distribuição desses prazos encontra-se registrada na Tabela 9.

A hipótese nula do teste de hipótese Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Gama foi ratificada para uma significância de 0,10, por ter alcançado valor máximo de 0,0222, inferior ao valor crítico de 0,0224. Este mesmo teste foi aplicado às distribuições Normal e Exponencial, tendo, em ambos os casos, sido rejeitadas as Hipóteses Nulas, por terem alcançado diferenças máximas absolutas de, respectivamente, 0,1379 e 0,0544, superiores ao valor crítico (Tabela 10).

Tabela 9: Teste KS Distribuição Gama para tempo de espera de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Tempo entre entradas	Frequência observada	Distribuição acumulada		Diferença absoluta
		Empírica	Em hipótese	
Até 10 segundos	54	0,010	0,020	0,0099
Até 15 segundos	100	0,019	0,032	0,0131
Até 20 segundos	139	0,026	0,044	0,0180
Até 30 segundos	251	0,047	0,069	0,0222
Até 40 segundos	389	0,073	0,095	0,0220
Até 60 segundos	660	0,124	0,146	0,0222
Até 80 segundos	950	0,179	0,197	0,0187
Até 100 segundos	1.243	0,234	0,246	0,0125
Até 120 segundos	1.522	0,286	0,293	0,0069
Até 140 segundos	1.795	0,338	0,338	0,0002
Até 160 segundos	2.041	0,384	0,380	0,0037
Até 180 segundos	2.276	0,428	0,420	0,0078
Até 200 segundos	2.497	0,470	0,458	0,0116
Até 220 segundos	2.661	0,500	0,494	0,0068
Até 240 segundos	2.828	0,532	0,527	0,0047
Até 260 segundos	3.003	0,565	0,559	0,0062
Até 280 segundos	3.164	0,595	0,588	0,0069
Até 300 segundos	3.345	0,629	0,616	0,0133
Até 400 segundos	3.983	0,749	0,730	0,0193
Até 500 segundos	4.407	0,829	0,811	0,0179
Até 600 segundos	4.652	0,875	0,868	0,0068
Até 700 segundos	4.819	0,906	0,908	0,0020
Até 800 segundos	4.926	0,926	0,936	0,0099
Até 1100 segundos	5.013	0,943	0,956	0,0131

Fonte: o autor

Tabela 10: Teste KS para as distribuições Normal e Exponencial para tempo de espera de usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Tempo entre entradas	Frequência observada	Distribuição acumulada			Diferença absoluta	
		Empírica	Normal	Exponencial	Normal	Exponencial
Até 10 segundos	54	0,010	0,148	0,032	0,138	0,0221
Até 15 segundos	100	0,019	0,152	0,048	0,133	0,0292
Até 20 segundos	139	0,026	0,156	0,063	0,130	0,0373
Até 30 segundos	251	0,047	0,165	0,094	0,118	0,0464
Até 40 segundos	389	0,073	0,174	0,123	0,101	0,0497
Até 60 segundos	660	0,124	0,193	0,179	0,069	0,0544
Até 80 segundos	950	0,179	0,213	0,231	0,034	0,0520
Até 100 segundos	1.243	0,234	0,234	0,279	0,000	0,0457
Até 120 segundos	1.522	0,286	0,256	0,325	0,030	0,0389
Até 140 segundos	1.795	0,338	0,279	0,368	0,058	0,0304
Até 160 segundos	2.041	0,384	0,304	0,408	0,080	0,0243
Até 180 segundos	2.276	0,428	0,329	0,446	0,099	0,0176
Até 200 segundos	2.497	0,470	0,355	0,481	0,115	0,0112
Até 220 segundos	2.661	0,500	0,382	0,514	0,119	0,0133
Até 240 segundos	2.828	0,532	0,409	0,545	0,123	0,0128
Até 260 segundos	3.003	0,565	0,437	0,574	0,128	0,0087
Até 280 segundos	3.164	0,595	0,465	0,601	0,130	0,0055
Até 300 segundos	3.345	0,629	0,493	0,626	0,136	0,0032
Até 400 segundos	3.983	0,749	0,632	0,730	0,117	0,0186
Até 500 segundos	4.407	0,829	0,755	0,806	0,074	0,0230
Até 600 segundos	4.652	0,875	0,852	0,860	0,023	0,0149
Até 700 segundos	4.819	0,906	0,919	0,899	0,013	0,0072
Até 800 segundos	4.926	0,926	0,960	0,927	0,034	0,0009
Até 1100 segundos	5.013	0,943	0,998	0,973	0,027	0,0018

Fonte: o autor

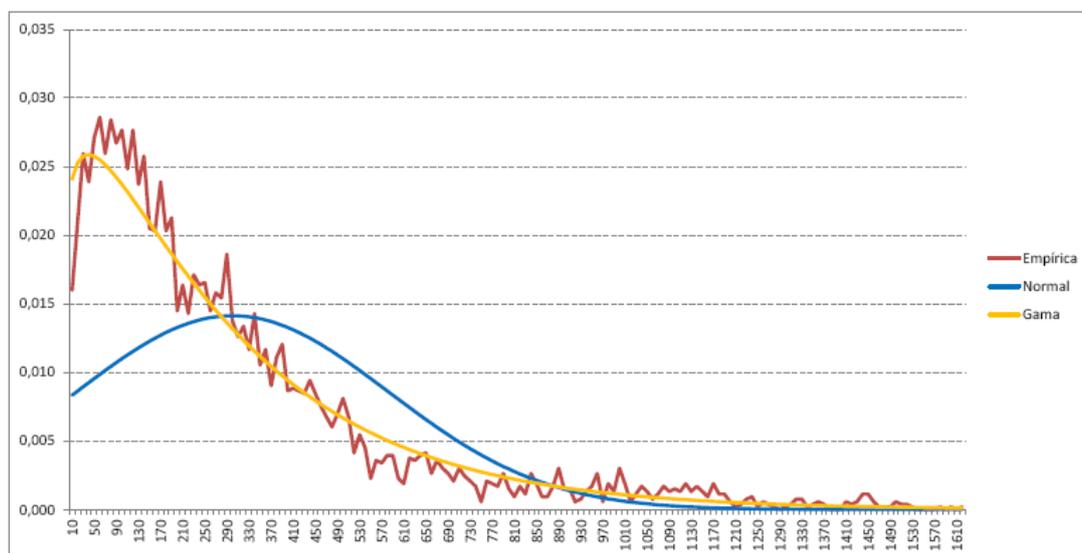


Figura 3.5: Gráfico 5 - Representação das distribuições de probabilidade empírica, Normal e Gama dos tempos de espera dos usuários em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Fonte: o autor

Analogamente ao abordado nos item 3.1.1 e 3.2, a representação gráfica das distribuições pode proporcionar uma melhor compreensão do aluno quanto à aderência da distribuição teórica à empírica.

## 3.4 Desempenho do Sistema

### 3.4.1 Taxa de ocupação

A taxa de ocupação média do sistema para o período foi de 83,99%, indicando estar o sistema em condição de equilíbrio, ou seja, haver capacidade de atendimento em condição de suficiência para o volume de demandas do período. Tal condição encontra-se também refletida nos dados empíricos do tempo de espera, onde 98,87% dos atendimentos ocorreram em prazo igual ou inferior ao limite estabelecido por lei.

Essa condição de suficiência foi avaliada ainda para as datas isoladamente como forma de identificar eventuais necessidades de incremento ou possibilidade de redução da estrutura alocada em dias isolados. Para isso, considerou-se a taxa média de atendimento do período,  $\mu = 0,395$  atendimentos por minuto por operador, e aplicou-a à taxa de chegadas diárias (Tabela 11).

Tabela 11: Taxa de ocupação do sistema de atendimento de uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Data	Taxa de chegada $\lambda$	Taxa Ocupação $\rho$ (%)			
		3 servidores	2 servidores	4 servidores	
1/11/2016	269	1,12083	94,6	141,8	70,9
3/11/2016	257	1,07083	90,3	135,5	67,8
4/11/2016	292	1,21667	102,6	154,0	77,0
7/11/2016	337	1,40417	118,5	177,7	88,9
8/11/2016	330	1,37500	116,0	174,0	87,0
9/11/2016	328	1,36667	115,3	173,0	86,5
10/11/2016	348	1,45000	122,3	183,5	91,8
11/11/2016	287	1,19583	100,9	151,3	75,7
14/11/2016	305	1,27083	107,2	160,8	80,4
16/11/2016	285	1,18750	100,2	150,3	75,1
17/11/2016	248	1,03333	87,2	130,8	65,4
18/11/2016	255	1,06250	89,6	134,5	67,2
21/11/2016	292	1,21667	102,6	154,0	77,0
22/11/2016	224	0,93333	78,7	118,1	59,1
23/11/2016	236	0,98333	83,0	124,4	62,2
24/11/2016	224	0,93333	78,7	118,1	59,1
25/11/2016	271	1,12917	95,3	142,9	71,5
28/11/2016	267	1,11250	93,9	140,8	70,4
29/11/2016	262	1,09167	92,1	138,2	69,1

Fonte: o aturor

Da avaliação diária pôde-se verificar a inaplicabilidade de medidas de redução de estrutura mesmo em dias isolados, pois a simulação de utilização de dois servidores resultou em taxas de ocupação superiores a 100% em todas as datas. Há ainda de se observar que, mesmo com a manutenção dos três funcionários dedicados, em 47,37% das datas ocorreu a extrapolação do patamar de 100% de utilização, indicando insuficiência da estrutura alocada, tendo, inclusive, alcançado o patamar de 122,3% no dia 10. Para essas datas, os dados sugerem a necessidade de incremento na quantidade de atendentes, indicando um quadro de quatro caixas como adequado.

A indicação de insuficiência de estrutura para tantas datas, mesmo com uma taxa de ocupação global de 83,99%, pode estar relacionada à utilização da taxa média de atendimento que pode ter tido seu resultado minorado pela utilização, em seu cálculo, de dados referentes aos dias com taxa de utilização inferior a 90%, onde a performance dos atendentes tenderia a ser reduzida pelo encolhimento da demanda. Essa hipótese foi testada com o recálculo da taxa média de atendimento, obtendo 0,405, considerando apenas os dias com taxa de utilização superior a 100%. Aplicando-se esse novo índice ao cálculo da taxa de ocupação, para as datas anteriormente indicadas como extrapoladas, observa-se uma redução no distanciamento da estrutura alocada à necessária nas diversas datas, ou melhor, a extrapolação aos 100% diminui, contudo, ao menos para cinco das nove datas, manteve-se o indicativo da necessidade de incremento de estrutura alocada, considerando que nos dias 4 e 21.11.2016, para as quais a taxa ficou em 100,1%, as situações encontram-se estáveis. Desta forma, para 26,31% dos dias em análise, mostra-se necessário o incremento no número de atendentes (Tabela 12).

Tabela 12: Taxa de ocupação recalculada para dias “pico” em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Data	Taxa de chegada $\lambda$	Taxa Ocupação $\rho$ (%)			
		3 servidores	2 servidores	4 servidores	
4/11/2016	292	1,21667	100,1	150,1	75,1
7/11/2016	337	1,40417	115,5	173,3	86,6
8/11/2016	330	1,37500	113,1	169,7	84,8
9/11/2016	328	1,36667	112,4	168,6	84,3
10/11/2016	348	1,45000	119,3	178,9	89,5
11/11/2016	287	1,19583	98,4	147,5	73,8
14/11/2016	305	1,27083	104,5	156,8	78,4
16/11/2016	285	1,18750	97,7	146,5	73,3
21/11/2016	292	1,21667	85,0	127,5	63,7

Fonte: o aturor

De forma análoga à abordada no item 3.1.1, a utilização de representação gráfica das taxas

de ocupação também poderia ser adotada na abordagem do tema junto aos alunos do Ensino Médio, proporcionando entendimento mais intuitivo e fácil do conceito e do significado dos resultados. Como ilustração, gráfico referente aos dados constantes na Tabela 11 vem a seguir (Gráfico 6).

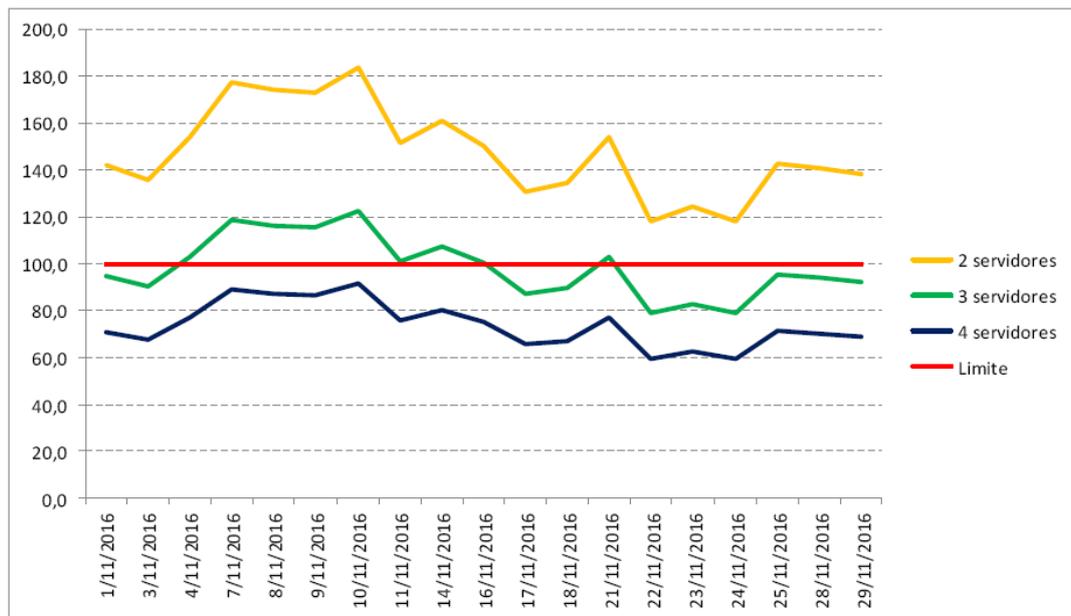


Figura 3.6: Gráfico 6 - Representação das taxas de ocupação da força de trabalho em uma agência bancária, Brasília-DF, 2016.

Fonte: o autor

### Probabilidade de inexistência de clientes na fila

Ainda em busca da identificação de eventual ociosidade no sistema, para a atual situação, ou seja, com 3 servidores, aplicou-se, em complementação à avaliação da taxa de ocupação, o cálculo da probabilidade de inexistência de clientes na fila como índice de baixa ocupação e, portanto, de ociosidade. Utilizando-se da equação (2.17), deste trabalho, e reproduzida abaixo, obteve-se uma probabilidade de 0,018 de existir zero cliente na fila.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{1}{1-\rho}\right)}$$

Para as situações simuladas, com 2 e 4 servidores, foram obtidas as probabilidades nula e de 0,036, respectivamente, para inexistir cliente na fila.

Esse resultado ratifica o indicado na avaliação da taxa de ocupação, que o sistema em análise não possui ociosidade, ou melhor, não apresenta significativa ociosidade.

### Probabilidade de descumprimento da “Lei da fila”

Outro fator relevante a ser considerado na análise dedesempenho do sistema, por estar vinculado à satisfação do cliente e ao cumprimento de legislação municipal, cuja inobservância pode ensejar em aplicações de multas e, conseqüentemente, em perdas financeiras para a instituição gestora do sistema, é a probabilidade de extrapolação do prazo limite de 20 minutos, em dias normais, e 30 minutos, nos dias considerados de “pico”, para a permanência do cliente na fila.

Para essa avaliação, foi aplicada a fórmula (2.18) e reproduzida abaixo, obtendo-se a probabilidade de 0,0066 para a estrapolação do prazo de 20 minutos e de 0,0010 para a superação do limite de 30 minutos.

$$P(Tq > t) = \frac{P_k}{(1 - \rho)} e^{-(k\mu - \lambda)t}$$

Os dados empíricos, como registrado no item 3.3, também apontaram para uma reduzida probabilidade de extrapolação do prazo de 20 minutos, com 1,51% dos clientes permanecendo mais do que 20 minutos na fila. Corroborando com o indicativo de reduzida probabilidade de perda de prazo.

---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Neste trabalho buscou-se a utilização de conceitos relacionados à Teoria de Filas para a avaliação do funcionamento do atendimento de caixa em agência bancária de Brasília, Distrito Federal.

Com a aplicação de conceitos de probabilidade a tema cotidiano, objetivou-se contribuir para o fortalecimento da formação de professores do Ensino Médio com a exploração da natureza aleatória do elemento fila e da aplicabilidade da Matemática à sua compreensão. A utilização de conceitos como média, taxa de variação e taxa de ocupação, que envolvem cálculos básicos, pode contribuir com a utilização desse tema à prática docente no Ensino Médio.

A utilização do software MicrosoftExcel<sup>®</sup> pode, também, ser considerada uma estratégia para a execução de cálculos de distribuição e desvio padrão, cuja realização direta pode não estar ao alcance do aluno, por se tratar de software de boa disponibilidade. O aproveitamento da visão gráfica dos resultados, tanto das distribuições quanto das taxas de ocupação, também pode ser indicado como alternativa para a ilustração e facilitação da compreensão do tema e dos resultados por alunos deste nível de escolaridade.

No tocante à gestão do sistema de fila da agência, trabalhou-se a identificação de modelo probabilístico adequado à descrição dos principais elementos da fila, utilizando-se de teste de hipótese. Foram aplicados conceitos relativos à Teoria de Filas para avaliar a adequação do atendimento quanto ao cumprimento da chamada “lei da fila” e a suficiência da estrutura adequada ao atendimento para os dias avaliados, com indicativo de ajustes pontuais. Os

resultados obtidos demonstraram um uso eficiente dos recursos e sua insuficiência em algumas datas, consideradas de “pico”, indicando o incremento de um atendente nessas datas como solução para a garantia de bom fluxo de atendimento.

Para o aprofundamento do tema, sugere-se a realização de análise similar a outras agências do Distrito Federal para a compreensão do fluxo de atendimento e funcionamento do serviço de caixa da instituição financeira nessa unidade federativa, de forma a possibilitar ação integrada de ajuste e adequação desse atendimento.

Seria, ainda, importante explorar-se a aplicação dessas teorias de probabilidade a outras filas presentes no cotidiano do aluno do Ensino Médio, como filas de supermercado e do “Na Hora” - que reúne em um único local, representações de órgãos públicos federais e distritais, de forma articulada, para a prestação de serviços públicos aos cidadãos- como ampliação da estratégia de proporcionar ao aluno o alcance da utilidade e aplicabilidade do estudo da probabilidade para a compreensão da previsibilidade de eventos aleatórios habituais.

---

## Bibliografia

---

- [1] AMIDANI, L.R. *A Teoria das Filas Aplicada aos Serviços Bancários*. 1974. 138 p. Dissertação (Mestrado em administração), Fundação Getúlio Vargas, Escola de Administração de Empresas, Brasília, Distrito Federal, 1974.
- [2] ANDRADE, Eduardo Leopoldino de. *Introdução a Pesquisa Operacional*. 6<sup>a</sup>ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- [3] ANDREOTTI, Fabio. Laplace, Pierre Simon (1749-1827). *Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade de Campinas*, Campinas, São Paulo. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/laplace.htm>>. Acesso em: 15 maio 2017.
- [4] BARBOSA, J.A. *Distribuição de Poisson*. 2014. 31 p. Trabalho de conclusão do curso (Bacharelado em Estatística), Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia. Campina Grande, Paraíba, 2014.
- [5] BEIGUELMAN, B. *Curso de Bioestatística Básica*. 4.ed. Ribeirão Preto: Sociedade Brasileira de Genética, 1996.
- [6] BITTENCOUT, H.R.; VIALI, L. *Contribuições para o ensino da Distribuição Normal ou Curva de Gauss em cursos de Graduação*. In: III SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Águas de Lindóia, São Paulo.

- Anais Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: SBEM, 2006, p. 1-16.
- [7] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [8] BROCKMEYER, E.; HALSTROM, H.L.; JENSEN, A. *The life and work of A. K. Erlang* (Transactions of the Danish Academy of Technical Sciences, No. 2), p. 1-288, EUA: Akademiet for de Tekniske Videnskaber, 1948.
- [9] CARVALHO, P.C.P.; MORGADO, A. C. *Matemática discreta*. 2ª ed. Coleção PROFMAT, SBM, 2015.
- [10] DANTAS, C.A.B. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*. 3. ed. São Paulo: EDUSP, 2004.
- [11] DISTRITO FEDERAL. Lei 2.547, de 12 de maio de 2000. Estabelece tempo para atendimento de clientes pelas instituições financeiras locais e dá outras providências. Diário Oficial do Distrito Federal, Brasília, 2000, p. 1.
- [12] FOGLIATTI, M.C.; MATTOS, N.M.C. *Teoria de Filas*. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2007.
- [13] HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Elaborado no Instituto Antonio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Portuguesa. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.
- [14] LAMARCA, J.S. *Estudo do sistema de filas de uma casa lotérica*. 2016. 63 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016.
- [15] LARSON, Ron; FARBER, Betsy. *Estatística aplicada*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [16] MEDEIROS FILHO, Carlos Fernandes. Karl Pearson. *Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Campina Grande*, Campina Grande, Paraíba, Fev. 2001a. Disponível em: <<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/KarlPear.html>>. Acesso em 19 maio 2017.

- [17] MEDEIROS FILHO, Carlos Fernandes. Andrei NikolayevichKolmogorov. *Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Campina Grande*, Campina Grande, Paraíba, Fev. 2001b. Disponível em: <<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/KarlPear.html>>. Acesso em 22 maio 2017.
- [18] MORAES, F.G. de; SILVA, F. da; REZENDE, T.A. *Introdução à Teoria das Filas*. Universidade Federal do Mato Grosso. Cuiabá, Mato Grosso, p.33, 2011.
- [19] OLIVEIRA, A.S.J. de. *Essa vez que não chega: fila e drama social no Brasil*. 2012. 91 p. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Ciências Sociais, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.
- [20] OLIVEIRA, M.A. de. *A Matemática da Fila do Banco*. 2015. 46 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática), Universidade Federal de Goiás, Jataí, Goiás, 2015.
- [21] PEREIRA, C.R.V. *Uma Introdução às Filas de Espera*. 2009. 109 p. Dissertação (Mestrado), Universidade da Madeira, Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia, Portugal, 2009.
- [22] PRADO, Darci Santos do. *Teoria das filas e da simulação*. 4<sup>a</sup> ed. Nova Lima: INDG Tecnologia e Serviços Ltda, 2009.
- [23] SIEGEL, Sidney. *Estatística não-paramétrica para as Ciências do Comportamento*. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.
- [24] TRIOLA, M. F. *Introdução à estatística*. 7<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.