Universidade de Brasília
Instituto de Psicologia
Departamento de Processos Psicológicos Básicos
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

# Comportamento precorrente auxiliar na resolução de problemas de aritmética no contexto da sala de aula e de ensino personalizado

Carla Fernanda Neves de Sá

Orientador: Dr. Jorge Mendes de Oliveira Castro Neto

BRASÍLIA, Dezembro de 2017

Universidade de Brasília
Instituto de Psicologia
Departamento de Processos Psicológicos Básicos
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

# Comportamento precorrente auxiliar na resolução de problemas de aritmética no contexto da sala de aula e de ensino personalizado

Carla Fernanda Neves de Sá

Orientador: Dr. Jorge Mendes de Oliveira Castro Neto

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento, Instituto de Psicologia, Área de Concentração Análise do Comportamento, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Psicologia.

BRASÍLIA, Dezembro de 2017

**Banca Examinadora**

A Banca Examinadora foi composta por:

Prof. Dr. Jorge Mendes de Oliveira Castro Neto (Presidente)
Universidade de Brasília (Unb)

Profa. Dra. Deisy das Graças de Souza (Membro)
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

Profa. Dra. Eileen Pfeiffer Flores (Membro)
Universidade de Brasília (Unb)

Prof. Dr. Lauro Eugênio Guimarães Nalini, (membro)
Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC/GO)

Prof. Dr. Domingos Sávio Coelho (Membro suplente)
Universidade de Brasília (Unb)

## Agradecimentos

Minha mãe sempre conta que eu amava ir à escola. Ficava ansiosa pelas aulas, acordava cedo, mesmo quando estudava à tarde e que eu fazia todas as tarefas sem pestanejar. Nunca fui a melhor aluna e isso não me preocupava, eu só queria poder continuar aprendendo. Minha admiração pelos professores começou cedo, veio principalmente da minha professora da alfabetização (Tia Docarmo) que sempre nos tratou com carinho e amor, esses momentos nunca saíram da minha memória. Na escola conheci o pensamento científico, passei a amar os livros que abriram horizontes e sonhos inimagináveis para uma menina franzina e comum do interior. Tais momentos e outros tantos mais construíram o que sou hoje: uma apaixonada pelo conhecimento. Acredito que é ele e o amor que nos levarão ao tão sonhado futuro melhor, com justiça, igualdade e paz. Por isso esse modesto trabalho começa na escola e reúne o que mais amo trabalhar: a educação, a ciência comportamental e as crianças.

Em toda essa construção nunca estive só. Deus me presenteou com uma família maravilhosa, amigos queridos e grandes mestres. Minhas palavras de agradecimento para vocês não serão suficientes para descrever tudo que fizeram por mim.

Agradeço meu orientador Jorge, que não gostava que o tratasse por ‘senhor’. Desculpe, professor, mas foi assim que aprendi a tratar essa profissão pela qual tenho tanto respeito, e o senhor só aumentou minha estima e me mostrou quão nobre ela é, por isso não consigo tratá-lo diferente. É uma honra ser sua orientanda, agradeço imensamente por essa oportunidade, por sua compreensão, por tratar seus alunos com cordialidade e respeito, nos instigar, motivar, guiar sem limitar nossas escolhas e por passar seu conhecimento com maestria.

Agradeço as professoras Deisy de Souza e Eillen Flores, e aos professores Lauro Nalini e Domingos Coelho por aceitarem nosso convite, nos dando a oportunidade de contar com suas valiosíssimas contribuições. Sentimo-nos muito honrados.

Aos professores e colaboradores do PPG CdC da Universidade de Brasília, por todos esses anos de aprendizagem única e experiências marcantes, por suas contribuições em meu crescimento profissional e pessoal. Aos professores, em especial a professora Martha Hübner, e amigos que fiz em minha estadia na Universidade de São Paulo, obrigada por me acolherem e pela maravilhosa experiência de aprendizagem.

À minha família, começo pelos meus amados pais Silvana e Severo. Mãe, hoje entendo muito mais seus sacrifícios e abdicação de si por nós. Nossa vida nunca foi fácil, mas você nunca abriu mão de nos oferecer a melhor educação para termos um futuro melhor. Deu certo, mãe! Você conseguiu levar todos os seus filhos à universidade. Sei que sua luta por nós continua, pois sem seus cuidados com minha filha eu não teria conseguido concluir esse trabalho. Você é a pessoa mais forte que conheço. Pai, mesmo sendo de poucas palavras, o senhor sempre nos ensinou, com seu exemplo, que a dedicação, amor ao trabalho e honestidade sempre valem a pena. O senhor sempre confiou em nós, nos ensinou a sermos generosos, a irmos longe, mas sempre pensando no próximo.

Meus manos, Brício e Carol, o meu papel de irmã mais velha durou pouco tempo, pois foram vocês que sempre me ajudaram e me ensinaram. Brício, no seu primeiro emprego você logo me ofereceu seu "ticket alimentação" para me ajudar em Brasília. Nunca esquecerei desse gesto, pois simboliza o que você sempre foi pra nós, nosso protetor. Minha Carol, ah maninha! O meu amor por você é além dessa vida! A sua leveza, generosidade e bondade sempre me guiaram. Obrigada por cuidarem da minha filha como se fosse de vocês.

Meu marido Daniel, o que seria de mim sem você? Não consigo escrever sobre você sem chorar, ao lembrar de todos os momentos que você enxugou minha lágrimas e me pegou no colo. Todos esses anos me apoiando, acreditando em mim, mais que eu mesma, me dando força, fazendo da nossa felicidade seu objetivo de vida, seu cuidado com a nossa casa e com nossa filha foi o que possibilitou a busca por esse sonho. Todas as minhas conquistas são suas, é o que você sempre me diz, e são mesmo. E essa dedicação e amor só geraram coisas boas em mim e a melhor delas é nossa Beatrice. Minha filha, não podíamos mais esperar para tê-la. Você veio no meio do doutorado, e por mais que tenha sido difícil me dividir, foi sua vinda que deu significado a tudo! Cada pausa que precisei fazer, cada retomada, cada dia fora de casa, cada palavra escrita foi para você. Esse amor de mãe fortaleceu meu objetivo de lutar ainda mais por um mundo melhor para todas as crianças. Obrigada, filha, simplesmente por existir. Sem vocês esse trabalho não existiria.

Minha querida sogra Dulce e meu sogro Evaldo (*in memoriam*), Ana, Júnior e Danilo, obrigada de todo coração por me fazerem sentir parte dessa família. Obrigada especialmente pelos cuidados com minha pequena, pois cuidando dela vocês estavam cuidando de mim e disso nunca vou esquecer.

Minhas queridas amigas de infância e de outras muitas vidas! Kol, Kel e Day, vocês são parte mim, sabem disso, aprendo com vocês todos os dias. Com a força da Kol, alegria de viver da Kel e a perseverança da Day, e tanto mais. Obrigada a Debrinha e Kol por me receberem sempre e com tanto carinho em sua casa, acolherem minhas aflições, pelos momentos deliciosos e conversas que terminavam em Física Quântica.  E em meio a tantos momentos deliciosos, com a doçura dos brigadeiros e dores que vida nos trouxe, sempre ficamos unidas e torcendo pela felicidade uma da outra, porque juntas sempre fomos mais fortes!

Minhas amadas boinhas Lu e Estelinha, vocês me fizeram rir quando queria chorar, me ajudaram nas madrugadas e sempre se fizeram presentes, mesmo longe. Estelinha você foi incrível, mesmo em meio a correria de seu doc você se dedicou a ler meu trabalho e me ajudar com as correções. Vocês são eternas no meu coração. Querida Bia, obrigada pela solicitude em me ajudar na tradução do resumo.

A minha grande família "*Red Dragon*", Nandinha, Brunin, Lalazuxa, Darlanzim, Lele, Mali, Caio, Aninha e Fedoquinha, vocês tornaram essa caminhada mais leve e deram o melhor que uma amizade pode ter, confiança, apoio, muita alegria e sonhos compartilhados. O que o amor uniu a distância não separa.

Minhas pacotes Paulinha e Dafne, foi a força de nossa irmandade em todos os momentos difíceis em Brasília que me fizeram continuar essa jornada. Vocês ficarão para sempre em meu coração. Assim como minhas pacotes Ari, que me socorreu 123735 vezes e Liginha, que foram minhas parceiras nessa luta. Obrigada pela amizade inigualável de vocês.

Aos amigos do grupo de pesquisa, que entre idas e vindas, sempre foram muito amigos, generosos e solícitos, especialmente a querida Bárbara que em meio aos cuidados com seus dois filhos e uma dissertação, encontrava tempo para me socorrer. Você não é só super mãe é super amiga!

Agradeço imensamente as minhas amadas crianças da Escola Municipal, com as quais tive a honra de aprender. Vocês e todas as crianças merecem o melhor de nós, precisamos continuar lutando sem descansar ou esmorecer por um mundo melhor para vocês. Essa é e sempre será minha missão, como forma de agradecer por tudo que fizeram por mim. Entrei como uma humilde pesquisadora e saí com um coração cheio de amor. Esse 'doutorido', como dizia um dos meus pequenos, é dedicado a vocês. Obrigada a querida professora que me acolheu nesse período, eu sei que não foi fácil ter alguém observando suas aulas, mas isso só demonstra o quanto você é generosa e profissional. Agradeço a direção, coordenação pedagógica e todos os colaboradores que me receberam com tanto carinho. Sem a presteza e a ajuda de vocês, eu não teria conseguido. Vocês são os verdadeiros heróis desse país!

A Prefeitura Municipal de Teresina, agradeço pela oportunidade do afastamento para que eu pudesse me dedicar exclusivamente a esse trabalho, esse apoio foi fundamental.  Em especial aos meus queridos amigos do CRAS Norte II e V, que sempre torceram por mim.

Termino esse texto com coração acelerado e lágrimas nos olhos, ao perceber o quanto fui abençoada por ter tantas pessoas queridas ao meu lado que me ajudaram a concretizar esse trabalho. Tantas pessoas que não couberam nominar aqui, mas que sempre me mandaram boas energias, força, orações e me apoiaram. Espero poder retribuir todo esse apoio e carinho recebido ao longo da construção desse trabalho. A todos meu muito, muito obrigada!

*“Valeu a pena? Tudo vale a pena, se a alma não é pequena.”*

(Fernando Pessoa)

## Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

**Resumo**

Respostas precorrentes auxiliares aumentam a probabilidade de reforço para a resposta final de uma cadeia, porém não são requeridas pelas contingências programadas, podendo diminuir com aumento do treino e/ou parar de ocorrer, sem comprometer a produção da consequência final. No Estudo 1, foi investigada a função precorrente auxiliar dos procedimentos e materiais para o ensino de operações aritméticas, de adição e subtração, utilizados em sala de aula. Nesse estudo, 26 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal foram observados em contexto de sala de aula, nas quais foram registrados os tipos de tarefas, as respostas dos alunos (oral e escrita), os auxílios utilizados e as consequências apresentadas pelo professor, em situações de ensino e de avaliação. Os resultados mostram que os procedimentos utilizados em sala para a resolução de operações aritméticas incluem comportamentos que parecem ter a função de precorrente, considerando-se a hierarquia de apresentação, o treinamento e o tipo de tarefa. Algumas variáveis do contexto familiar foram coletadas por meio de entrevistas com os responsáveis dos alunos, com objetivo de complementar os dados sobre o desempenho destes. Uma comparação entre alunos com maior e menor porcentagens de respostas corretas nas tarefas de classe indicou que os primeiros apresentaram maiores índices de grau de escolaridade dos responsáveis, maior renda *per capita* e menor média de pessoas por família. Esse alunos realizaram com mais frequência as tarefas de casa, mas têm pouco auxílio dos familiares. Tais dados indicam que o contexto socioeconômico e o treino em tarefas extraclasse podem ser aspectos importantes a serem considerados em estudos sobre o desempenho dos alunos. Com objetivo de ampliar a análise do comportamento precorrente auxiliar, no Estudo 2, quatro crianças (participantes do primeiro estudo) com níveis de desempenhos diferentes em sala de aula, foram expostas a uma plataforma digital de ensino individualizado de Matemática, denominada *Khan Academy*. Foram utilizadas tarefas semelhantes às observadas em situação de sala de aula. O comportamento precorrente auxiliar (*duração/correta*) diminuiu com aumento do treino para a maior parte dos participantes, e mesmo com diferenças individuais os dados foram bem descritos pela mesma função utilizada em estudos experimentais. Nesse contexto, comparando-se a área derivada da função (medida de desempenho) com relação ao tipo tarefa, observou-se que um aumento na quantidade de casas decimais e o tipo de operação (de adição para subtração) exigiu maior duração de precorrentes auxiliares durante os treinos. Em resumo, os estudos sugerem que a contingência de sala de aula e de treinamento individualizado apresentam diferenças importantes, tais como o controle da apresentação de estímulos auxiliares pelo professor ou pelos próprios alunos e ocorrência de reforço contingente à resposta final da cadeia, que podem ter influenciado a função precorrente dos procedimentos utilizados para resolução de operações aritméticas. De forma geral, os resultados sugerem que análises de comportamentos precorrentes auxiliares nas tarefas de ensino de Matemática são fundamentais para aprimorar os procedimentos e fornecem uma alternativa metodológica às abordagens internalistas, predominantes nos estudos da área que acabam por explicar baixo desempenho com base em características dos alunos, em vez de incentivar melhorias nas condições de ensino.
Palavra-chave: Comportamento precorrente auxiliar, operações aritméticas, ensino individualizado.

**Abstract**

Auxiliary precurrent responses increase the probability of reinforcement for the final response of a chain, but are not required by scheduled contingencies, and may decrease with increased training and/or stop occurring, without compromising the production of the final consequence. In Study 1, the auxiliary precurrent function of procedures and materials for teaching arithmetic operations - addition and subtraction - used in the classroom, was investigated. In this study, 26 second grade students of a municipal school were observed in a classroom context, in which the types of tasks, the students' answers (oral and written), the aids used and the consequences presented by the teacher were recorded, in teaching and assessment situations. Results show that the procedures used in classroom for the resolution of arithmetic operations include behaviors that seem to have the precurrent function, considering the presentation hierarchy, the training and the task type. Some variables of the family context were collected through interviews with those responsible for the students, in order to complement data on their performance. A comparison between students with higher and lower percentages of correct answers in class tasks indicated that the former had higher levels of schooling, higher per capita income and lower average of people per household. These students have done homework more frequently, but receive little help from family members. Such data indicate that socioeconomic context and extra-class task training may be important aspects to be considered in studies about students' performance. Aiming to expand the analysis of auxiliary precurrent behavior, in Study 2, four children (participants of the first study) with different classroom performance levels were exposed to a digital individualized teaching platform of Mathematics, called *Khan Academy*. Tasks similar to those observed in the classroom situation were used. The auxiliary precurrent behavior (duration/correct) decreased with increasing training for most participants, and even with individual differences the data were well described by the same function used in experimental studies. In this context, comparing the function-derived area (performance measure) with respect to the task type, it was observed that an increase on the number of decimal places and the type of operation (from addition to subtraction) required longer duration of auxiliary precurrent behaviors during training. In summary, the studies suggest that classroom and individualized training contingencies present important differences, such as the control of auxiliary stimuli presentation by the teacher or by the students themselves and the occurrence of contingent reinforcement to the final response of the chain, which may have influenced the precurrent function of the procedures used to solve arithmetic operations. In general, results suggest that analyses of auxiliary precurrent behaviors in Mathematics teaching tasks are fundamental to improve procedures and provide a methodological alternative to the internalist approaches, predominant in the area studies that end up explaining low performance based on students' characteristics, instead of encouraging improvements in teaching conditions.

Palavra-chave: Auxiliary precurrent behavior, arithmetic operations, individualized teaching.

As preocupações com a educação matemática da juventude começaram a tornar-se mais evidentes nas grandes revoluções da modernidade – a Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789), segundo Miguel, Garnica, Igliori e D'Ambrósio (2004). Tais preocupações com a educação matemática advêm de sua fundamental importância para lidar com situações e problemas enfrentados tanto nas experiências cotidianas quanto em contextos especializados, como nas ciências. Logo, é importante compreender as condições e métodos de ensino que contribuam para uma aprendizagem mais eficaz, pois a matemática tem sido apontada como a disciplina que apresenta o maior índice de reprovação ao final do período letivo (Padro & Carmo, 2004). Segundo dados do índice de rendimento do Censo Escolar no Brasil coletados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), órgão vinculado ao Ministério da Educação, em 2015 a taxa de reprovação no Ensino Médio em matemática estava em 11,6%.

Os trabalhos que começaram a ser desenvolvidos no campo da educação matemática, voltaram-se aos estudos de métodos e materiais com objetivo de melhorar o aprendizado. Por exemplo, uso de material concreto para auxiliar o ensino da geometria abstrata (Young & Young, 1970). Os estudos da didática da matemática, iniciados na França na década de 60, em parte voltaram-se para a produção desses materiais de apoio a serem utilizados pelos professores em sala de aula (jogos, brinquedos, sequencias de lições, etc.). Em outra vertente, o objeto de estudo se volta para a situações de ensino, que são apresentadas em ambiente de sala de aula, e deveriam ser estudadas de acordo com suas características (de sucesso ou fracasso) e o quão seriam determinantes para a evolução do comportamento dos alunos (Gálvez, 1996).

Para isso a área da didática da matemática tem desenvolvido metodologias para analisar essas situações, ao passo que critica algumas posições consideradas ideológicas e não científicas, pois essas não tratam as salas como uma situação experimental, no qual é preciso estudar constantemente a influência das situações de ensino sobre o comportamento do aluno, e seu saber produzido, de forma mais controlada possível (Gálvez, 1996).

A psicologia com abordagens cognitiva/construtivista e sócio-interacionista passaram a ter uma contribuição importante para as pesquisas em educação matemática, por meio de autores como Jean Piaget, Robert M. Gagné, Jerome Bruner, que desenvolveram a base teórica de aprendizagem para diversas pesquisas na área. Tais autores destacaram a importância das relações presentes nas investigações em educação matemática, que de maneira mais ampla envolvem a forma de ensinar do professor, as ideias e dificuldades dos alunos, a influência do meio social, cultural e afetivo no processo de ensino-aprendizagem (Miguel et al., 2004). Por outro lado, Carmo e Prado (2004) criticam a pouca referência que se tem feito, em pesquisas de educação matemática, aos estudos na perspectiva behaviorista radical. Skinner (1969) em seu trabalho sobre as contingências de reforço, trouxe contribuições importantes para práticas de ensino. Outra contribuição são os estudos de aquisição de conceitos e do comportamento simbólico, com a aplicação do paradigma de equivalência de estímulos, proposto por Sidman e Tailby (1982).

Segundo Carmo e Prado (2004), a forma como vêm sendo ensinados os "primeiros passos" desses conceitos abstratos é um dos determinantes para a matemática ter o maior índice de reprovação ao final do ano letivo. Os mesmos autores afirmam que o conhecimento do repertório de cada aluno é imprescindível para qualquer proposta de atuação pedagógica em sala de aula. No início do seu livro "*Tecnologia do Ensino*", Skinner (1972) também aborda questões sobre fatores envolvidos na aprendizagem:

> Consideremos, por exemplo, o ensino da aritmética nos primeiros anos. A primeira tarefa é modelar estas respostas - fazer com que a criança pronuncie e escreva as respostas corretamente, mas a tarefa principal é colocar este repertório sob o controle de vários tipos de estímulos (p.14).

Ao abordar o tema da educação, Skinner levanta o questionamento sobre a pouca orientação que se tem sobre técnicas de ensino e habilidades a serem empregadas nesse processo e destaca diversos problemas na educação formal, dentre eles: (1) uso de controle aversivo no ensino; (2) lapso temporal entre as respostas e o reforço (estímulos que podem aumentar a probabilidade da resposta ocorrer novamente), mediado pelo professor; (3) falta de programação no ensino para obtenção da resposta final desejada e por fim (4) a pouca frequência de reforço. Para Skinner (1972), o resultado dessas dificuldades é o fracasso escolar, ou seja, "poucos alunos chegam a alcançar o estágio no qual os reforços advêm automaticamente das consequências naturais do comportamento matemático" (p. 17).

O Ministério da Educação elaborou uma série de instrumentais chamados de *Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental* (PCN), publicados em 1997 e o *Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil*, publicados em 1998, com objetivo de contribuir com a identificação dos objetivos de ensino, conteúdos e orientações didáticas para os profissionais que atuam diretamente com tais etapas de escolarização. No bloco sobre orientações didáticas que envolve os conteúdos de contagem, notação e escrita numéricas e as operações matemáticas, o *Referencial Curricular*, cita em seu texto a "utilização de noções simples de cálculo mental como ferramenta para resolver problemas" (p.219). No conteúdo que versa sobre operações, o *Referencial Curricular* sugere que além do cálculo escrito e por estimativa, faça-se uso da ferramenta denominada de "cálculo mental", que seria uma estratégia sem uso de materiais de apoio, quando descreve que "em geral as crianças calculam com apoio dos dedos, de lápis e papel ou de materiais diversos, como contas, conchinhas etc. É importante, também que elas possam fazê-lo sem esse tipo de apoio, realizando cálculos mentais ou estimativas" (p.225). Tal conteúdo não explicita como acorre o processo de passagem do uso de materiais de apoio para o cálculo mental ou estimado, e ainda qual é o papel dessas estratégias para a formação de um repertório matemático mais complexo.

Segundo Oliveira-Castro (1992) o conceito "fazer mentalmente" ou "fazer na cabeça", frequentemente utilizado na linguagem cotidiana, talvez seja um dos conceitos mais intrigantes para as teorias psicológicas. Ao analisar o uso dessas expressões na linguagem cotidiana, Ryle (1949) ressaltou, dentre outras, sua função negativa, indicando que alguma coisa parou de ocorrer, como por exemplo, a criança inicialmente faz uso dos dedos para realizar uma soma simples, mas tendo passado por algum treino, a criança poderá responder corretamente, sem necessitar recorrer a contagem com os dedos. Nesse caso pode-se expressar na linguagem cotidiana a conclusão de que a criança passou a fazer a conta "de cabeça". Tal interpretação negativa discute que a expressão "fazer ou guardar algo 'na cabeça' descreve a não ocorrência de partes de uma sequência de comportamento que ocorriam previamente" (Oliveira-Castro, 1992, p. 270).

No processo de ensino de matemática, vários repertórios iniciais dependem de estímulos e respostas auxiliares, como, por exemplo, os apoios citados de contagem para resolver tarefas de adição. Comportamentos mais complexos geralmente se formam a partir da eliminação dessas respostas auxiliares, de tal forma que a criança passa a ser capaz, por exemplo, de efetuar adição sem contar os dedos. Por exemplo, a sentença “Gabriela resolveu o problema de adição de cabeça ou mentalmente” poderá se referir ao fato de Gabriela ter solucionado o problema sem consultar materiais auxiliares, tais como exemplo: usar lápis e papel, olhar a tabuada, fazer os cálculos na calculadora ou computador. Essas respostas são chamadas de auxiliares, pois apesar de serem necessárias em algum momento (a consulta) para resolver problemas aritméticos mentalmente, a contingência normalmente não exige que se escreva todos os passos; “Na escola em alguns momentos isso é exigido e, em outros, proibido” (Oliveira-Castro,1993, p.196), ou seja, em uma situação de ensino pode ser exigido que a criança, no início da aprendizagem de operações matemáticas, utilize os materiais auxiliares, e depois de algum treino em uma situação de avaliação, o professor poderá solicitar que a criança responda as operações, sem consultar a tabuada, por exemplo.

As teorias psicológicas, ao invés de interpretar o conceito como negativo, indicando que alguma coisa não ocorre ou deixa de ocorrer (como exemplificado acima), interpretam o conceito de forma positiva, indicando que alguma coisa ocorre, só que em outro lugar ou de outra forma. Ou seja, a pessoa continuaria “vendo” o número só que em uma escala pequena ou mentalmente. Oliveira-Castro (1993) levanta alguns questionamentos sobre essa interpretação positiva com relação a: (1) observação destes conteúdos internalizados, já que são particulares ao sujeito, e nesse caso (2) como deveriam ser tratados? Como comportamento, processos cognitivos, redes neurais, estímulos, imagens ou outro? Tais discussões permeiam as teorias psicológicas, dentre outras, e, na maioria dos casos, suas explicações são discordantes, inconclusivas e permanecem dessa forma até os tempos atuais.

Oliveira-Castro (1993) sugeriu que se mantivesse a função negativa do conceito nas teorias psicológicas, o que acarretaria mudanças nas perguntas de pesquisa, "pois as 'coisas' que ocorrem 'mentalmente' deixariam de ser pertinentes, pois se deixam de ocorrer, não iriam a lugar algum" (p.269). Ainda segundo Oliveira-Castro (1993), com tal interpretação "quais então seriam as perguntas relevantes? Como é possível a alguém responder problemas aritméticos sem escrever os passos das operações? Em outras palavras, quais são as condições necessárias e suficientes para que alguém resolva o problema sem escrever?" (p. 176).

Muitos procedimentos e materiais de apoio, utilizados nas situações de ensino, têm a função de auxiliar na resolução de problemas matemáticos. O presente projeto tem como objetivo geral, contribuir para a compreensão das relações entre as estratégias de ensino da matemática por meio do uso de procedimentos e materiais auxiliares, com base em observação do uso dos materiais em ambiente natural de sala de aula, onde o professor controla a apresentação dos estímulos auxiliares, e no contexto de uma plataforma de ensino individualizado em matemática, onde o aluno controla a apresentação dos estímulos auxiliares. A resposta de consulta a esses materiais será analisada com enfoque no comportamento precorrente auxiliar.

Antes de adentrar nas propostas de pesquisa dos Estudos 1 e 2, apresentar-se-ão na Introdução os aspectos do ensino da matemática no Brasil, principalmente nas escolas públicas (local de coleta do trabalho) com base em parâmetros coletados em avaliações padronizadas. Será realizada uma breve abordagem de autores da Psicologia Cognitiva, pioneiros no estudo da educação matemática, que tratam de conceitos como esquemas, teoria em ação e teoria dos campos conceituais, mais presentes nessa literatura. No contexto desses conceitos, especificar-se-ão os estudos dos suportes de representação, considerados estratégias de ensino, bem como o termo “cálculo mental”, como estratégia de aprendizagem, amplamente citados em estudos da educação matemática e que se aproximam do foco deste trabalho. Será analisada a lógica da expressão “fazer na cabeça” e como esta influencia a forma de questionar, estudar e compreender as etapas de ensino dos fenômenos estudados. Serão abordados os conceitos e pesquisas relacionadas ao comportamento precorrente auxiliar. Concluir-se-á com alguns estudos em Análise do Comportamento com foco em resolução de operações aritméticos, principalmente os que tratam de comportamento precorrente.

## Avaliação do Ensino da Matemática no Brasil

No Brasil, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), sob responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP/ MEC), tem o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional, a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos. Nos testes, os estudantes respondem a itens (questões) de Língua Portuguesa, com foco em leitura, e Matemática, com foco na resolução de problemas. No questionário socioeconômico, os estudantes fornecem informações sobre fatores de contexto que podem estar associados ao desempenho (INEP, *http://portal.inep.gov.br/web/saeb/historico)*

Em 2005, o INEP criou o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), o principal indicador utilizado para monitorar a qualidade da educação básica, que reuniria os dados do fluxo escolar (taxa de aprovação) e dos testes padronizados (SAEB), por meio do qual se estabeleceria metas bienais de qualidade a serem atingidas por todas as unidades da Federação. Em termos numéricos, o valor do IDEB varia de 0 a 10, e a meta estabelecida para o Brasil seria passar da média nacional 3,8, registrada em 2005, na primeira fase do Ensino Fundamental, para um IDEB igual a 6,0 em 2022, "nível de qualidade desejável à educação brasileira" (Fernandes, 2005, p.5). Essa seria a média dos países desenvolvidos da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que é uma organização de cooperação internacional composta por 34 países, que também coordena o PISA (*Programme for International Student Assessment*), que faz parte de um conjunto de avaliações e exames nacionais e internacionais aplicadas pelo INEP, com periodicidade trienal, realizada desde o ano 2000 (OCDE, 2013). Em 2015, participaram 70 países, com provas aplicadas em dois dias, as quais testaram conhecimentos de alunos de 15 anos e 3 meses a 16 anos e 2 meses de idade, que estivessem cursando, no mínimo, o 7º ano.

A Figura 1 representa a evolução do IDEB observado, nos anos de 2005 a 2015, em comparação com as metas a serem atingidas, nos anos de 2007 a 2022. De 2009 a 2015 pode-se observar um aumento das médias acima da meta anual. Mesmo apresentando este aumento, considerando que anos iniciais são fundamentais para a formação dos conceitos matemáticos, é possível que (com as médias do IDEB abaixo de 6,0) alguns conceitos básicos não tenham sido aprendidos, apesar da importância que têm para a formação de conceitos mais complexos nos anos seguintes.

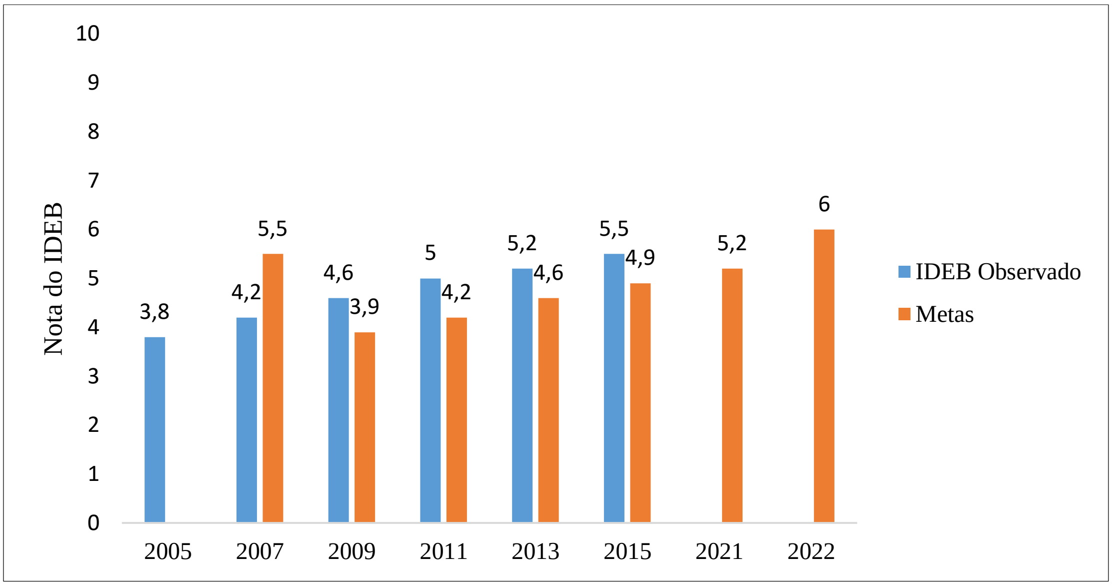



*Figura 1. Evolução dos resultados e metas do IDEB no Brasil (2005-2022). Anos iniciais do Ensino Fundamental, 5º ano. (DAEB/INEP)*

Como esses dados envolvem outras avaliações, para melhor compreendermos a evolução do ensino da matemática, com base em avaliações externas, especificaremos os parâmetros avaliados nos exames de proficiência, dessa matéria, na Provinha Brasil e Prova Brasil/ SAEB. No início do ano do Ensino Fundamental (EF) é realizada uma avaliação diagnóstica do nível de alfabetização das crianças matriculadas no 2º ano de escolarização (aplicada no início e ao término do ano letivo) das escolas públicas brasileiras, conhecida como Provinha Brasil, e que desde 2011 avalia o nível de alfabetização das crianças quanto às habilidades matemáticas (PDE, 2011). Os resultados não são divulgados no site do INEP. Segundo resposta ao contato por e-mail com o próprio instituto, a "Provinha Brasil é enviada para as redes de ensino e aplicada pela própria rede. Sendo assim, a própria escola aplica a avaliação e realiza a análise dos dados".

Nos anos seguintes do EF, tal avaliação é realizada pelas provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), conhecido como Prova Brasil, que revelam o desempenho dos estudantes em níveis de 0 e 13, sendo que em cada nível é apresentado um conjunto de capacidades testadas, com enfoque na Resolução de Problemas, em matemática. Para cada unidade escolar participante da Prova Brasil, é calculada uma média da proficiência dos estudantes que participaram da avaliação. No quinto ano, essa média é expressa em uma escala de 0 a 375, sendo que tais valores representam um aumento da complexidade das capacidades matemáticas de cada estudante (PDE, 2011).

A Figura 2 apresenta os resultados na Prova Brasil no período de 1995 a 2015, para os alunos do 5º ano do EF, revelando um crescimento na média de 191, em 1995, para 219, em 2015.

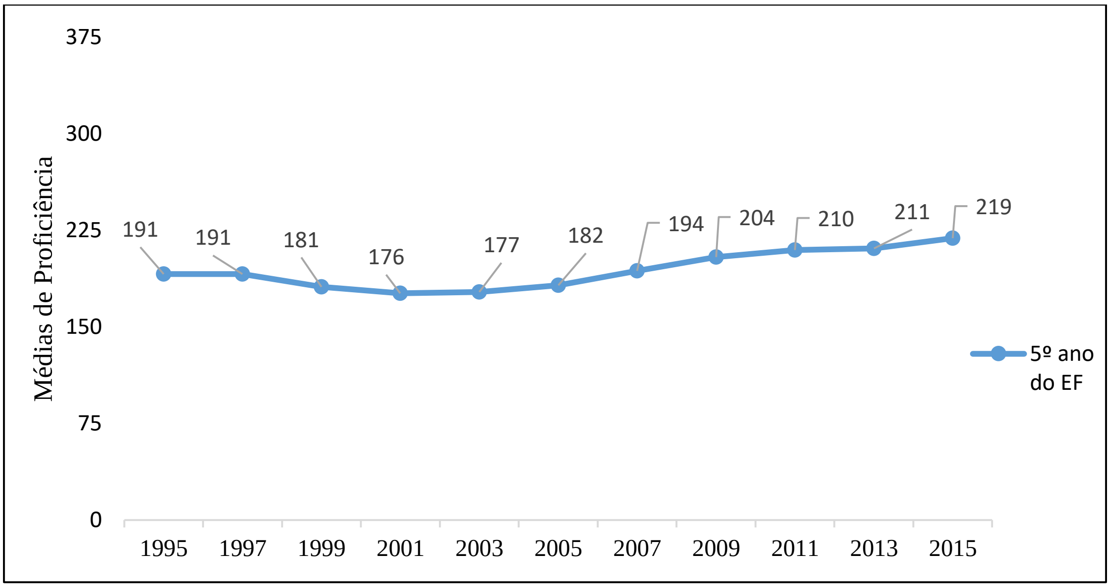



*Figura 2. Evolução dos dados do SAEB no Brasil (1995-2015). Proficiências médias em matemática. Anos iniciais do Ensino Fundamental (DAEB/INEP).*

Mesmo havendo esse crescimento, as médias ainda são consideradas baixas de acordo com a Escala de Proficiência em Matemática do SAEB. Esses dados indicam que, em termos de resolução de problemas aritméticos, os alunos avaliados do 5º ano do Ensino Fundamental têm a capacidade de calcular subtrações mais complexas com números naturais de até quatro algarismos, mas com reserva. Tais estudantes não possuem proficiência esperada de resolver operações mais complexas, tais como: resolver problemas com mais de uma operação e resolver operações simples de divisão e multiplicação, que são consideradas etapas posteriores às operações de soma e subtração.

Pode-se observar, de acordo com Figura 3, que os alunos de 5º ano do EF, mesmo havendo um crescimento ano após ano, encontram-se em sua maioria entre os Níveis 1 a 3, considerados muito crítico ou crítico: 59%, em 1995, 55,9%, em 1997; 62,6%, em 1999; 58,2%, em 2001; 58,1%, em 2003 e 54,6%, em 2005.

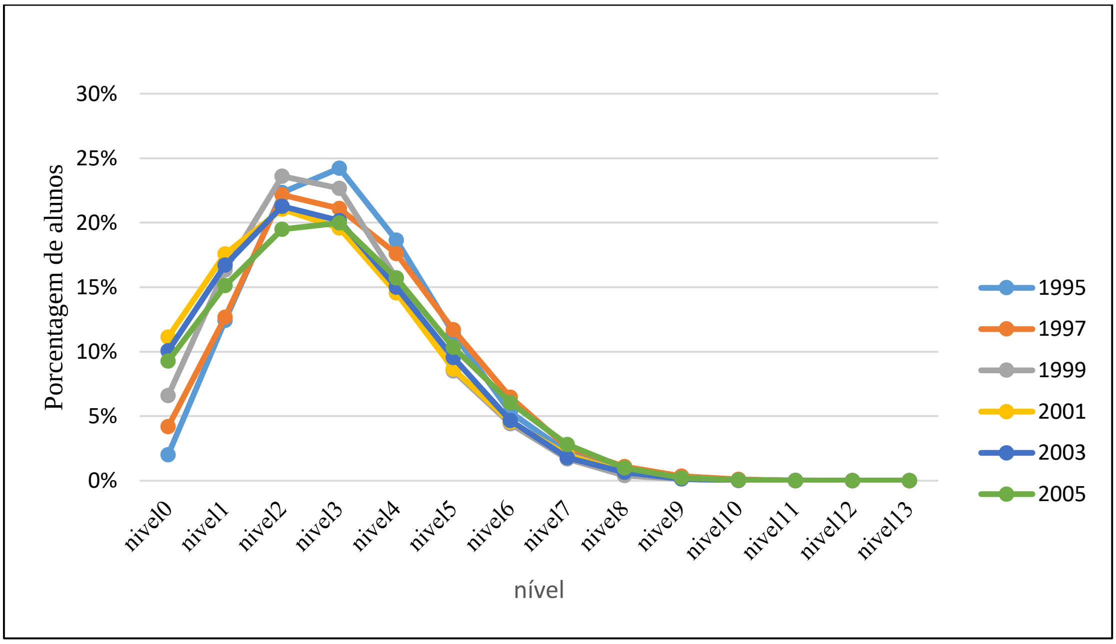



*Figura 3. Distribuição de alunos por níveis de acordo com a proficiência em matemática (4ª série do EF) – urbanas sem federais 1995 – 2005 (INEP/MEC).*

Nessa avaliação, os estudantes que estão no Nível 2 apresentam proficiência (no que tange a números, operações, álgebra e funções) em calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais. Como por exemplo, resolver problemas do cotidiano envolvendo adição de pequenas quantias de dinheiro (PDE, 2011). Avaliam-se os dados como preocupantes, frente ao desempenho desses estudantes, no que se refere a operações de soma e subtração. Segundo Araújo e Luzio (2005):

> As crianças e os jovens que, ao final de quatro anos de escolarização, se encontram nos dois mais baixos estágios de medição do desempenho (nível 1 e 2) estão em situação de risco educacional. São

fortes candidatos a constantes abandonos, à reprovação ou à evasão definitiva dos bancos escolares. (p.75)

Os resultados do Pisa 2015, no qual participaram 23.141 estudantes brasileiros de 841 escolas (públicas e particulares), também mostraram resultado preocupante em matemática, como confirmam os resultados do IDEB apresentados. A Figura 4 apresenta a descrição dos seis níveis de proficiência da escala de matemática do PISA 2015, notas variam de 0 a 1000, bem como o percentual médio de estudantes da OCDE e do Brasil em cada nível, em 2015.

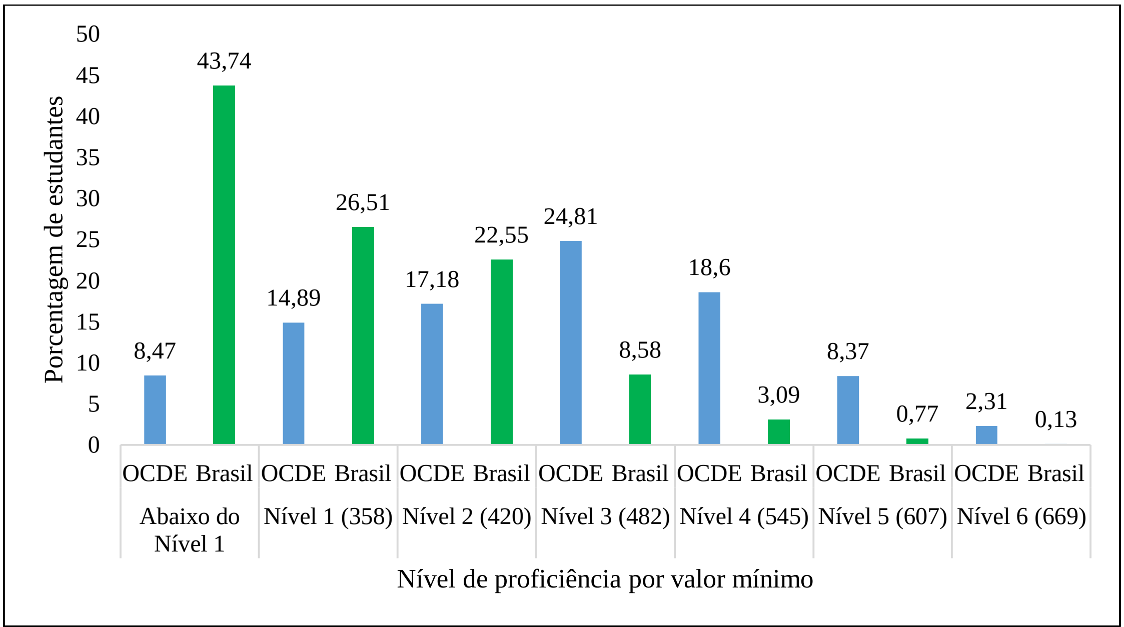



*Figura 4. Comparação de porcentagem de estudantes, brasileiros e pertencentes aos países da OCDE, de acordo com nível de proficiência nas provas de matemática do PISA de 2015.*

Os estudantes brasileiros apresentaram desempenho médio de 377 pontos em matemática, bem abaixo média dos países da OCDE de 490 pontos (OCDE,2016). Além disso o desempenho piorou com relação ao ano de 2009 (386 pontos) e 2012 (391 pontos), numa escala de 1.000 pontos. A maioria dos estudantes brasileiros (70,25%) estão no nível 1 de proficiência, muito aquém dos estudantes dos países da OCDE.

A análise das variáveis socioeconômicas consideradas significativas no desempenho dos alunos em matemática, são abordadas principalmente por meio de modelos econômicos, como os modelos hierárquicos, que buscam explicar a proficiência em matemática do aluno por um conjunto de fatores, a ele relacionados, em associação a um conjunto de características (*e.g.*, Gonçalves & França, 2008; Machado, Moro, Martins, & Rios, 2008). No Brasil, conjuntamente com a prova Brasil, são aplicados questionários contextuais, com o objetivo de levantar dados sobre esses indicadores socioeconômicos, que de acordo com Alves e Soares (2009), "ainda não há consenso pleno sobre quais dimensões da realidade social devem integrar esse indicador". Os autores indicam que, na maioria dos países, são feitas agregando medidas de três dimensões tais como: a ocupação, a educação e a renda dos indivíduos, e para isso são construídos índices que englobam algumas dessas variáveis (e.g., Alves, Soares, & Xavier, 2013; Gazeboom, De Graaf, Treiman, 1992). Alguns estudos trazem também o efeito da participação da família nas tarefas de casa, principalmente nos primeiros anos escolares, no desempenho escolar dos alunos (e.g., Barros, Mendonça, Santos, & Quintaes, 2001; Harris & Sherman, 1974).

Dentre tantos aspectos econômicos e sociais a serem estudados, é importante também considerar as contribuições que a psicologia trouxe aos estudos de educação matemática. Para tentar-se compreender os fenômenos relacionados à eficácia do ensino das operações matemáticas, por exemplo, segundo Miguel et al. (2004), a psicologia "explicita aspectos do desenvolvimento do indivíduo e dos modelos teóricos para análise do conhecimento a ensinar, da aprendizagem e dos processos de ensino e aprendizagem em que o professor atua como mediador" (p. 77). Para tal, far-se-á uma breve análise dos principais estudos de psicologia cognitiva, na educação matemática.

## Psicologia Cognitiva e a Educação Matemática

A psicologia cognitiva se ocupa do estudo do pensamento humano, da resolução de problemas e de como se processam as informações, fenômenos frequentemente citados em estudos relacionados à educação matemática, segundo Souza e Guimarães (2015). A psicologia cognitiva trabalha questões relacionadas ao raciocínio, habilidades, organização, esquemas, representações, dentre outros, na resolução de problemas matemáticos. Do ponto de vista teórico, segundo Spinillo e Lautert (2006), o diálogo entre a psicologia cognitiva e a educação matemática perpassa por uma teoria de domínio específico, a teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, que se apoia dos estudos do desenvolvimento humano de Jean Piaget.

Piaget (1999), em seu livro *Seis Estudos de Psicologia*, apresenta uma vertente construtivista que relaciona situações de aprendizagem e desenvolvimento. Nesta vertente o autor descreve que há um processo de assimilação da realidade às estruturas existentes do pensamento, e de acomodação dessas estruturas aos objetos que resistem a elas. Em cada estágio de desenvolvimento, dividido por faixa etária, ocorre uma equilibração, ou seja, uma passagem contínua de um estado de menor equilíbrio para um estado de equilíbrio superior.

Outro conceito abordado pelo autor em seu livro são os esquemas, que seriam "estruturas cognitivas através das quais os indivíduos se organizam e se adaptam ao meio" (p. 69). O conceito de esquema envolve essa progressão de situações de dinâmica funcional e de organização da conduta que comporta objetivos, regras de ação, tomada de informação que são estruturadas por invariantes operatórios. Essa gradação ocorre no campo da inteligência, do afeto e das relações sociais, da infância até a idade adulta, na qual ocorre maior equilíbrio. Nessa linha, as operações lógicos/matemáticas são ações interiorizadas, estruturadas, reversíveis (como a subtração em relação à adição) e coordenadas em estruturas de conjuntos; tais operações "derivam das próprias ações, pois são produtos de uma abstração precedente da coordenação das ações, e não dos objetos" (p. 72).

A noção de esquema, segundo Spinillo e Lautert (2006), proposta por Piaget (1969), no âmbito de uma teoria de caráter universal, foi retomada por Vergnaud (1981), no âmbito de uma teoria de domínio específico. O caráter psicológico desta se expressa a partir de noção de esquema, de teorias-em-ação e da noção de desenvolvimento que caracteriza o domínio dos campos conceituais. Tal teoria origina reflexões sobre o ensino e aprendizagem da matemática, principalmente em situações de resolução de problemas.

O sujeito ao longo da experiência, desenvolve um repertório de competências e de concepções, formulando conceitos, não de forma isolada, mas em conjunto, que ganham sentido em situações diversas. Tais concepções foram base para a teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud, que define um campo conceitual como "um conjunto de situações, das quais o domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão" (Vergnaud, 1990, p. 62).

No caso específico da matemática, a compreensão das operações aritméticas encontra-se nos esquemas de ação. Os conceitos de adição e subtração, por exemplo, têm origem nos esquemas de ação de juntar, separar e na correspondência um-pra-um, ou seja, Vergnaud (1990) explica que:

> O campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto das situações, cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, ou uma combinação destas operações, e também como um conjunto de conceitos, teoremas e representações simbólicas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas. (p.9)

Para Vergnaud "quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência pode conduzi-la a mudar de esquema ou a alterar o esquema que está usando" (Vergnaud, 1996a, p.159). Este autor afirma que o conhecimento matemático emerge de problemas a serem solucionados. Ainda, denomina o contexto de situação didática, no qual o professor tem papel fundamental para a promoção do desenvolvimento conceitual, por meio da proposta de "oportunidades que possibilitem o desenvolvimento de esquemas amplos e flexíveis, que se apliquem a diversos conceitos" (Spinillo & Lautert, 2006, p. 66). E é justamente essa acumulação e entrelaçamento de conceitos que formam uma base conceitual.

Segundo Spinillo e Lautert (2006), a área de estudo da psicologia da educação matemática (firmada a partir de estudos do desenvolvimento cognitivo) discute o resultado dos estudos das situações de aprendizagem e o conhecimento da matemática. Esses autores descrevem que "as crianças parecem dispor de esquemas que guiam suas ações na tentativa de resolver a situação-problema com o qual se deparam" (p.67). Esses esquemas de ação são descritos em termos de esquema simples e de amplo alcance, para problemas mais complexos, na formação de conceitos matemáticos, que seria o resultado da aprendizagem.

Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) discutem o conceito de esquema de ação apresentando o exemplo da criança que conta com os dedos, uma certa quantidade de objetos que é apresentada em um problema. O uso dos dedos para contagem é uma representação do objeto. Este esquema de ação é expresso por um conhecimento implícito, que a criança não verbaliza, de que o todo é constituído pela soma das partes. A forma como a criança concretiza seu pensamento em ações sem ter condição de dar uma explicação oral, representa uma forma de conhecimento denominada teorema-em-ação. Segundo Nunes et al. (2005), “os teoremas-em-ação constituem o conhecimento matemático que as crianças desenvolvem em sua vida diária, e tal conhecimento (forjado durante a experiência cotidiana) é a base sobre a qual o ensino de matemática deve ser construído” (p. 47). O campo de estudo da educação matemática, com base na teoria cognitiva da formação de conceitos matemáticos, requer considerar os esquemas de ação, as situações de uso e os suportes de representação (Vergnaud, 1982). Os estudos dos suportes de representação, que auxiliam na resolução de problemas, serão destacados por se aproximarem dos estudos dos materiais auxiliares de ensino que são foco do presente trabalho. Esses, por sua vez, envolvem as situações de uso e como estes formam os esquemas de ação.

**Suportes de Representação**

Os esquemas de ação utilizados pelas crianças na resolução de problemas, em algumas linhas de pesquisa de psicologia cognitiva, são estudados por meio dos suportes de representação. Esses podem ser entendidos, segundo Anghileri (1997), como signos, ferramentas e materiais usados durante a resolução de uma situação-problema, como materiais concretos (dedos, fichas, palitos, pedrinhas, jarros, flores, etc.) ou recursos gráficos diversos (desenhos, marcas icônicas, diagramas, gráficos, tabelas, etc.). Os suportes de representação são elementos que, inseridos em uma dada situação, conferem sentido ao conceito e influenciam as formas de resolução (Beishuizen & Anghileri, 1998). O uso desses materiais faz parte do próprio raciocínio, a passagem da sequência do concreto para o abstrato, e as ações mentais são mediadas por esses sistemas e suportes de representação.

Para compreender o papel dessas manipulações, alguns estudos em psicologia cognitiva buscaram averiguar a influência que os diferentes tipos de suportes de representação podem exercer na resolução de problemas, com foco em como as crianças raciocinam. Um exemplo de estudo, na resolução de operação de adição, é o de Kamii, Lewis e Kirkland (2001), que buscaram estudar a influência dos diferentes suportes de representação, chamados nesse estudo de objetos de manipulação, no conhecimento lógico-numérico nas operações de adição. Para tal, os autores realizaram uma análise de objetos de manipulação, utilizados por professores no ensino da matemática, na resolução de diferentes problemas lógico-numéricos, tais como: (1) os *Tangrams* foram utilizados para análise da noção espacial, por meio da composição de figuras geométricas, o (2) uso de "contadores" (dedos, figuras, peças, traços) foram analisados na relação número-quantidade, o (3) jogo com cartas numeradas (1 a 9), foi analisado na composição diversas formas de operações de adição até o resultado, como por exemplo ao rolar um dado com valor 4 e depois 2, para chegar ao resultado 6, a criança teria que apresentar resultados equivalentes, ou com cartas com número 5 e 1, ou uma carta 6, ou cartas 4 e 2.  (4) Por fim, analisou-se o material didático chamado "balança" (consistia em uma balança com uma régua em cada lado, com escala de 1 a 10) e cubos (equivalente ao material dourado), que seriam utilizados para representar o valor posicional do número (dezena e unidade por exemplo) em uma operação de adição. Os autores concluíram, por meio de observações e relatos de práticas didáticas em sala, que cada criança construiu seu pensamento lógico-matemático de forma diferente, e o que é importante para a construção infantil do conhecimento lógico-matemático é como elas pensam ao utilizar esses materiais (o que os autores citam que Piaget denomina de abstração construtiva).

Os autores concluem que nesse caso o papel dos objetos de manipulação podem ser úteis ou inúteis, dependendo do nível hierárquico do pensamento que estimulam, ou seja, quanto mais complexo é o raciocínio, menos necessário é o uso desses objetos. Em sua conclusões os autores recomendam os *Tangrams* para fazer relacionamentos espaciais, os jogos de cartas, para o pensamento numérico e a balança e cubos para os alunos do primeiro e segundo grau, na resolução de operações, mas de forma limitada, pois estes tendem a se tornar "fáceis" e de pouco valor para os alunos.

Batista e Spinillo (2008) analisaram o papel dos diferentes tipos de material concreto na resolução de problemas de divisão e de multiplicação, com relação ao desempenho e procedimento de resolução. Participaram do estudo quarenta crianças, com idade média de 8 anos, divididas em Grupo 1 e 2. O primeiro grupo utilizou fichas plásticas, denominados de material concreto indefinido e o segundo grupo utilizou objetos que tinham relação com o enunciado dos problemas, como jarros e flores, carrinhos e caixas, chamados de concreto definido. Os resultados mostraram que as crianças que utilizaram material concreto definido apresentaram melhor desempenho (média de acerto estatisticamente significativa) do que as crianças que usaram material indefinido. Nos resultados da entrevista, quando a criança era solicitada a explicar como solucionou o problema, os autores concluíram que o material concreto definido favoreceu a compreensão das relações lógico-matemáticas e uso de procedimentos apropriados. O mesmo não ocorreu com o grupo que utilizou material concreto indefinido. Esse estudo se baseou em pesquisas anteriores que também investigam o efeito de diferentes estratégias sobre a resolução de problemas de multiplicação e divisão, que compararam uso de material concreto (fichas), lápis e papel e cálculo oral e concluíram que o desempenho das crianças (do 1º ao 3º ano) foi melhor com lápis e papel e com material concreto, do que por meio do cálculo oral (Lautert & Spinillo, 1999; Selva, 1998).

Nesses estudos, ao avaliar a função dos suportes de representação sobre o desempenho dos alunos (medido pela porcentagem de respostas corretas) a discussão recai sobre o quanto um material manipulável e passível de observação influencia na formação do conhecimento matemático, considerada uma atividade de raciocínio e abstrata. Em algumas ocasiões, o suporte de representação é tratado como parte do raciocínio, em outras, como um facilitador para a formação lógico-matemática, que precisa ser limitado para dar "espaço" a um pensamento mais complexo. O que não fica claro, ao se tratar dessa passagem do concreto para o abstrato, é sob que condições acontece e como acontece, ou seja, quando a criança para de fazer uso dos materiais auxiliares e passa a resolver o problema de forma correta?

A ênfase dada a variáveis situacionais e respostas observáveis por meio do estudo empírico do comportamento auxiliar, na resolução de problemas aritméticos, é importante, pois ao passo que este é parte do processo de ensino, podendo aumentar a probabilidade de respostas corretas, é desejável que o comportamento auxiliar pare de ocorrer em algum momento do processo. A necessidade de conhecer melhor tais processos de ensino e programá-los é dada pela quantidade de avaliações educacionais (como provas, vestibulares e concursos) que geralmente requerem diversas respostas de resolução de problemas, muitas vezes sem uso de materiais auxiliares para sua realização. Dessa forma, tende-se a concluir que o aluno aprendeu a lição e, por conseguinte, poderá receber a consequência relacionada à resolução correta da tarefa, que poderá ser elogio, menção ou aprovação escolar, dentre outros.

O *Referencial Curricular Nacional* apresenta em suas orientações didáticas, como descrito anteriormente, que também é desejável que a criança utilize estratégias para resolver problemas sem uso de material concreto, como no cálculo estimado. Uma dessas ferramentas citadas seria o “cálculo mental”, que será descrito a seguir.

**Cálculo Mental**

Outro esquema proposto para resolução de problemas, sem utilização de suportes de representação concretos, é o conceito de “cálculo mental”. Gómez (1994) designa o conceito de cálculo mental como “cálculo de cabeça” ou “de cor” (sem ajuda externa) com dados exatos. Gonçalves (2008) discorre que usar o termo “mental” para se referir ao cálculo sem apoio escrito não é muito adequado, pois todo cálculo faz uso da mente.  Segundo este autor, quando se fala de métodos de “cálculo mental”, na prática deve ser entendido, como tratado na literatura, de resoluções que não utilizam de outros dispositivos concretos e procedimentos (escrita por exemplo), além da própria elaboração simbólica. O autor comenta sobre as dificuldades do uso de cálculo mental, enquanto método de aprendizagem (devido à dificuldade de ensino e “acesso”) por ser pessoal e devido ao currículo, na maioria das escolas, ser voltado para testes escritos, que requerem o uso do lápis e papel como prova da aprendizagem.

Outros estudos envolvendo o conceito de cálculo mental não necessariamente excluem a utilização de materiais concretos, como papel e lápis, no processo de aprendizagem. Parra (2001) esclarece que a concepção de cálculo mental envolve o registro escrito de cálculos intermediários, em um processo que considera essencialmente mental. A autora considera dois tipos de cálculo ao longo do processo: o primeiro, denominado cálculo automático ou mecânico, conta com a utilização de algoritmo ou de um material (ábaco, régua de cálculo, calculadora, tabela de logaritmos, etc.), o segundo é chamado cálculo pensado ou refletido que Parra (2001) considera cálculo mental:

> Entenderemos por cálculo mental o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido para obter resultados exatos ou aproximados (...) é uma ferramenta em situações didáticas nas quais, por exemplo, permita aos alunos distinguir os cálculos que dispõem os resultados na memória dos que não dispõem. (p. 189)

O cálculo mecânico no qual a criança faz uso de materiais concretos, bem como o uso de suportes de representação é considerado como ferramenta que auxilia a aprendizagem de forma mediacional. Na visão desses autores, por mais que o uso seja observável, a forma de manipulá-los é uma escolha pessoal, interna e faz parte de processos cognitivos que ocorrem “dentro da cabeça”, que são interpretados como fatores “causais” da aprendizagem.

De acordo com essa interpretação, a forma de resolução de problemas é interna e própria de cada sujeito e o contexto da aprendizagem é estudado apenas por meio de suas situações-problema e desafios. Segundo Oliveira-Castro (1992), o maior problema relacionado a essa interpretação teórica é a própria pergunta que tentam responder: "qual é a estrutura e como funciona esse lugar (metafórico) para onde as coisas memorizadas e interiorizadas vão?"(p. 269). A forma de interpretar positivamente (pela afirmação do que ocorre e não pelo que deixa de ser feito) gera problemas de “acesso” a essas informações, já que são vistos como processos acrescentados, internalizados e memorizados na mente. Por outro lado, uma interpretação negativa direciona a investigação para identificar as condições que possibilitariam a não ocorrência ou o desaparecimento de determinados comportamentos, como o uso de suportes de representação (por exemplo, consultar a tabuada ou contar nos dedos). Dito de outra forma, com a mudança da pergunta, a ênfase é dada às variáveis históricas e situacionais que são necessárias e suficientes para que tais respostas deixem de ocorrer, em vez de discutir para onde vão.

Os dados apresentados anteriormente, das avaliações em matemática no Brasil, trazem resultados preocupantes sobre o desempenho dos alunos na proficiência dessa matéria, principalmente relacionados à resolução de problemas básicos de aritmética (adição e subtração), importante para a formação de repertórios mais complexos, o que poderia levar a prejuízos futuros para os mesmos. Devido à importância que esses materiais auxiliares têm, principalmente no processo de ensino básico de matemática, seria importante entendermos: qual seria o papel do comportamento auxiliar na formação do repertório do aluno, ou seja, qual sua devida importância nas tarefas consideradas mais complexas, denominadas de "raciocínio" ou "mentais"? Que variáveis situacionais poderiam influenciar na diminuição desses comportamentos até seu desaparecimento, para se chegar à resposta final correta no processo de aprendizagem? Para tal, antes alguns pontos teóricos precisam ser elucidados, por meio da análise do conceito de "fazer na cabeça" (mentalmente) apresentados a seguir.

## Análise do Conceito "fazer na cabeça"

Quando uma criança resolve problemas aritméticos mentalmente, segundo Oliveira Castro (1992/1993), é comum interpretar-se que os números trabalhados estavam gravados "na cabeça" (sem uso de material de apoio) e que o cálculo foi feito "de cabeça". Em uma situação de teste, é "na cabeça" que o aluno precisa guardar fórmulas, regras de cálculo (algoritmos) e estratégias para resolver os problemas apresentados.

Ryle (1949) apresenta em seu livro *The Concept of Mind* duas características do uso da expressão "fazer na cabeça". Primeiramente, o conceito é usado na linguagem cotidiana de forma metafórica, por exemplo, quando alguém afirma resolver um problema aritmético mentalmente ou "na cabeça". É como se "falasse" os números para si mesmo em voz alta, ou instruções sobre o que fazer, em que sequência, etc., de forma a expressar a imaginação do “som” audível “em sua cabeça”, mas inaudível para outras pessoas. A expressão “na minha cabeça” é colocada entre aspas, pois segundo o autor, se realmente estivéssemos fazendo o que nos imaginamos fazendo (ouvindo-nos dizer coisas) esses ruídos estariam em nossas cabeças no uso literal da frase. No entanto, uma vez que não estamos produzindo ou ouvindo ruídos, mas apenas imaginando-nos fazê-lo, quando dizemos que os números e as músicas que imaginamos estão "em nossas cabeças", expressamos coisas que não devem ser tomadas literalmente e sim metaforicamente. Logo, não se espera que os números que são multiplicados possam ser radiografados ou que um médico cirurgião os encontre dentro da cabeça. Não porque não haja nada dentro do corpo humano, sabe-se que há processos fisiológicos (sinapses, neurônios, hormônios), mas os usos de termos da linguagem cotidiana não se referem a nada dentro do corpo (cf. Oliveira-Castro 1992/1993; Ryle, 1949).

A segunda característica do uso da expressão “na minha cabeça” é a função negativa. Quando afirmamos, na linguagem cotidiana, que um aluno resolveu um problema de adição “mentalmente”, ou realizou “cálculo mental” para tal, estamos afirmando que eventos intermediários, tais como consultar o computador ou livro, utilizar material concreto (fichas, dedos, material dourado, papel e lápis) param de ocorrer ou são subtraídos, e a solução do problema é realizada corretamente. Por exemplo, diante de um problema de adição (a) “Joana consulta a tabuada e escreve a resposta correta”; e após algum treino, quando é questionada pelo mesmo problema, (b) “Joana escreve a resposta correta, sem consultar a tabuada”, logo passa-se a afirmar que Joana memorizou a resposta ou resolveu o problema “de cabeça”. Ryle (1949) discorre que uma das funções principais da expressão “na cabeça”, neste contexto, é indicar que algumas coisas não ocorreram, de forma que, alguns comportamentos anteriormente típicos para este tipo de resposta, não foram emitidos, como consultar a tabuada (cf. Oliveira-Castro, 1992/1993).

De forma oposta, a maioria dos estudos em educação matemática apresentados anteriormente, principalmente quando trata dos procedimentos relacionados à formação do conhecimento matemático, leva a compreender o *fazer mentalmente* como se as coisas acontecessem dentro da cabeça, em vez de fora. Não como uma função mental, e sim como uma atividade, que antes era externa (como contar, consultar a tabuada ou ouvir uma música) passa a ser "executada" internamente, sendo que o resultado final para ambos é o mesmo. Segundo Oliveira-Castro (1992/1993), o efeito é visto de forma positiva na psicologia, algo que antes era acessado, como consultar a tabuada, passa a ser feito (acrescentado) dentro da mente.

As teorias behavioristas também levam a interpretações de forma positiva. Watson (1930) propôs o pensamento como fala internalizada e Skinner (1953/1998) defende uma posição bastante semelhante: "respostas verbais adquiridas com respeito a eventos públicos podem ser transferidas a eventos privados" (p. 283). O pensamento, o raciocínio, o lembrar, o memorizar, que são considerados eventos privados, são interpretados como comportamentos que ocorrem em escala tão pequena, que não podem ser acessados por outros, mas sujeitos às mesmas leis do comportamento observável.

Segundo Oliveira-Castro (1993), apesar de diferentes, no exemplo supracitado há uma concordância entre as interpretações teóricas negativa e positiva de "fazer na cabeça": a ocorrência em *a*, ou algo parecido, sempre precede a ocorrência em *b*. Independentemente do tipo de teoria adotada, com ou sem eventos mediadores, todas concordam que antes de Joana ser capaz de resolver o problema sem consultar a tabuada, foi necessário que ela tenha acessado a tabuada, ou alguma forma de auxílio para resolvê-lo, pelo menos uma vez, pois nenhuma teoria defende que Joana nasceu sabendo fazer contas.

As perguntas sobre as (1) condições necessárias e suficientes para que a resposta intermediária (contar nos dedos, por exemplo) deixe de ocorrer e (2) em qual momento a resposta intermediária deixa de ser necessária, são importantes para as duas interpretações teóricas. Então, segundo Oliveira-Castro (1993), “não faz diferença alguma se o conceito é interpretado positiva ou negativamente?” (p. 186). O autor afirma que a diferença parece se basear na ênfase das condições suficientes ou necessárias para a memorização. As interpretações positivas iniciam suas investigações a partir de *b*, no exemplo dado, isto é, a consulta ao material de auxílio já foi suficiente para que a memorização ocorresse, e o interesse recai no efeito diferencial de diferentes tipos de materiais sobre as medidas de recordação, como objetivo de conhecer como são ‘processados’. Uma interpretação negativa do conceito, por sua vez, “levaria a uma investigação mais detalhada do que ocorre durante o próprio período de estudo do material, ou seja, maior ênfase seria dada à mudança de *a* para *b*” (p.186), no exemplo dado. Dito de outra forma, a ênfase dada em como funciona o material estudado “dentro da cabeça” da pessoa e o estudo das condições necessárias e suficientes para que a memorização ocorra, sem a consulta ao material, são bastante diferentes (Oliveira-Castro, 1993), inclusive em termos de procedimentos empíricos.

Nessa passagem de *a* para *b*, a consulta ao material de auxílio seria uma resposta intermediária, que apesar de necessária no início do treino, não é requerida pela contingência em vigor (i.e., o reforço pode ocorrer mesmo que não ocorra a resposta intermediária) (Oliveira-Castro, 1993). Isto é, apesar de ser necessário consultar a tabuada, no exemplo dado, antes de ser capaz de resolver o problema de adição, não há nada que obrigue a consultar a tabuada para escrever a resposta. Tais respostas intermediárias auxiliariam e aumentariam a probabilidade de chegar-se à resposta correta. Ryle (1949) cita o exemplo de uma criança aprendendo a jogar xadrez: antes de aprender as regras do jogo, nada a impede de acidentalmente realizar uma jogada correta. O fato de fazer um movimento correto com uma peça não implica que ela conheça a regra sobre esta jogada. No início, a aprendizagem do jogo geralmente envolve a instrução sobre as regras do jogo, seja por meio da leitura destas, seja dizendo-as a si mesmo em voz alta, seja perguntando a um instrutor. Mas com treino, a criança passa tanto a fazer jogadas corretas e evitar as incorretas, quanto a perceber o erro do outro, sem necessitar consultar as regras. Logo, qual a importância desses comportamentos intermediários? Qual sua função e como estudá-los empiricamente? Na abordagem analítico comportamental, estes comportamentos serão melhor detalhados por meio do conceito e pesquisas sobre comportamento precorrente e precorrente auxiliar.

**Resposta Intermediária: Estudo do Comportamento Precorrente Auxiliar**

Skinner (1953/1998), em seu livro *Ciência do Comportamento Humano*, afirma que a interação do organismo com o ambiente constitui uma contingência de reforço, ou operante, com três termos: (1) um evento discriminativo antecedente ocasião para (2) uma resposta que leva a (3) um evento consequente e reforçador. O autor faz uma distinção entre operantes que envolvem diretamente reforço e operantes que indiretamente afetam o ambiente, com a presença de respostas intermediárias, isto é, outra resposta que pode facilitar os efeitos dessa contingência alterando um ou mais dos componentes (Parsons, Taylor, & Joyce, 1981).

Nos processos de aprendizagem pouco se enfatiza as funções de resposta intermediária, como consultar a tabuada ao multiplicar um número, olhar o dicionário para ver a tradução de uma palavra. Como toda tarefa demanda uma sequência de comportamentos para que seja reforçado, é importante atentarmos para as funções dessas respostas intermediárias, o que foi denominado por Skinner (1969) e Baum (1999) de comportamento precorrente. Segundo esses autores, os comportamentos precorrentes são operantes que geram estímulos discriminativos que aumentam a probabilidade das respostas seguintes serem reforçadas

Segundo Skinner (1953/1998), os precorrentes ocorrem tipicamente em situações de resolução de problemas, nas quais uma resposta posterior pode ser ou não a resposta que soluciona o problema. Quando a solução acontece, "os estímulos gerados por esse comportamento precorrente tornaram-se então reforçadores" (p. 84). Dessa forma, o comportamento precorrente pode ser apenas um ou vários comportamentos dentro de uma cadeia comportamental que é composta de várias respostas. Vale lembrar que, quando um comportamento emitido altera o ambiente, pode gerar novos estímulos discriminativos para novas respostas, dando caráter sistemático à ocorrência da resposta reforçada. Baum (1999) afirma que nas situações de resolução de problemas "o comportamento precorrente envolvido é frequentemente chamado de raciocínio, imaginação, formulação de hipóteses, e assim por diante. Todos esses comportamentos têm em comum a propriedade de gerar estímulos discriminativos que alteram a probabilidade de atividades subsequentes" (p.182) e podem ser estudados cientificamente.

Uma das primeiras investigações experimentais sobre análise do comportamento precorrente em matemática, cujos os resultados concordam com a análise de Skinner (1953; 1969) de operantes precorrentes, foi o de Parsons (1976), envolvendo situação de resolução de problemas aritméticos. Nesse estudo o processo de resolução de problemas é descrito funcionalmente por meio de uma interação complexa de variáveis que afetam a probabilidade da resposta correta. Parsons (1976) examinou os efeitos do comportamento precorrente (consultar uma amostra com conjuntos) sobre a solução de problemas de quantidade (circular os estímulos de comparação com a mesma quantidade dos estímulos da amostra), em tarefas como mostra a Figura 5, realizadas por cinco crianças (com desenvolvimento típico) em idade pré-escolar.

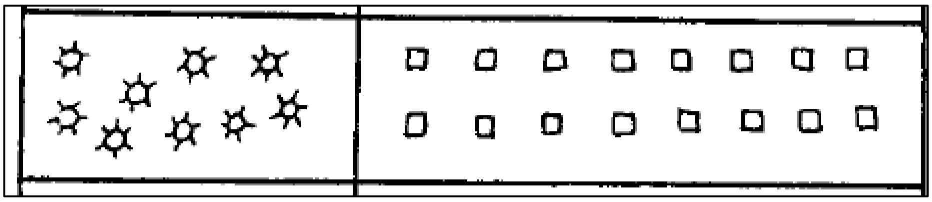


*Figura 5. Modelo da tarefa de Parsons (1976) que envolve correspondência em quantidade. Os símbolos a esquerda são amostra e a resposta correta envolve circular os símbolos em igual quantidade à direita.*

A tarefa consistia em circular símbolos (lado direito) em igual quantidade com o modelo dado (lado esquerdo), e cada resposta correta era reforçada em sistema de *Tokens* (para cada resposta certa um dispositivo acendia uma luz; a cada dez luzes a criança poderia escolher um brinquedo pequeno e a cada vinte, um brinquedo grande). As crianças foram solicitadas a responder 15 páginas, com 6 problemas de acordo com o modelo da Figura 5, totalizando 90 problemas, no qual a amostra variava na forma e na quantidade (de 5 até 10). O comportamento precorrente consistia em contar vocalmente e marcar os símbolos conforme eram enumerados vocalmente. As crianças passaram por quatro condições: a primeira foi a linha de base (LB), uma situação de teste de resolução dos problemas sem tentar direcionar a uma condição de comportamento precorrente, no qual a criança era reforçada com elogios ("muito bem") e *Tokens* por resolver o problema e as respostas incorretas não recebiam reforço e não eram corrigidas; a segunda foi uma situação de treino, no qual a criança era reforçada ao apresentar resposta verbal de contagem (comportamento precorrente), e quando a contagem estava estabelecida, apenas a solução correta da questão era reforçada, sendo que nessa condição a contagem era imediatamente corrigida; a terceira condição foi de extinção, na qual nem a solução do problema ou as respostas precorrentes eram reforçadas com elogios ou *Tokens*; por último a quarta sessão, chamada de "proibição", consistia em impedir a apresentação de comportamento precorrente, ou seja, quando a criança iniciava a contagem em voz alta o pesquisador imediatamente vocalizava "pare", e a instruía a iniciar a resolução sem contar. Mesmo assim, duas crianças continuaram contando e o pesquisador permitiu que contassem "silenciosamente". As respostas corretas eram reforçadas como na LB.

Os resultados mostraram que antes dos comportamentos precorrentes serem ensinados (LB) e quando eram proibidos, as crianças não conseguiram produzir uma solução precisa do problema. Por sua vez, quando os comportamentos precorrentes foram estabelecidos e quando permitidos, resultou em um comportamento corrente exato (solução do problema), e ambos os comportamentos, precorrente e corrente, foram mantidos quando o reforço era contingente apenas sobre o último.

No estudo de Polson e Parsons (1994) as contingências precorrentes - a relação entre respostas, em que uma resposta (precorrente) altera uma condição ou condições que controlam outra resposta (corrente) - diferiram com relação a diversas características. Os autores exploraram os efeitos de uma contingência precorrente em que a resposta aumentaria a probabilidade de reforço para outra resposta (corrente). Participaram do estudo quatro estudantes universitários que tinham como tarefa pressionar teclas do *mouse* do computador, nas seguintes condições: (A) durante a primeira fase, para cada resposta de pressionar o botão direito do *mouse*, o sujeito tinha uma probabilidade de reforço de 0,02 de ganhar pontos que eram trocados por dinheiro). Na outra fase (B) cada resposta de pressão a chave esquerda produziu um período, de 15 s, durante o qual a probabilidade de reforço para respostas de pressão a chave direita foi aumentada para 0,08. Nesse caso, a contingência de reforço ao comportamento precorrente (pressionar a chave esquerda) não estava presente na fase A e estava presente na B. Dois participantes iniciaram a sessão pela fase A e dois pela fase B, com pelo menos uma reversão para cada grupo. Os resultados mostraram que a exposição à contingência precorrente resultou na aquisição de resposta de pressão à tecla esquerda para 3 sujeitos, mas para um deles foi necessária uma contingência especial, na qual o reforço a pressão à tecla direita foi de zero, quando a tecla esquerda não era pressionada, para induzir a resposta de pressão à tecla esquerda. A resposta pressão da chave direita ocorreu a uma taxa estável e elevada durante todas as condições. As respostas de pressão à tecla esquerda caíram para perto de zero quando a contingência precorrente estava ausente e foram mantidas em níveis altos quando a contingência precorrente estava presente. Os contatos com a tecla esquerda consistiram em execuções de resposta curtas.

Segundo os autores as respostas precorrentes podem ser descrita como sinalizadas, pois produzem mudanças no estímulo correlacionadas com mudanças nos parâmetros de reforço para a resposta corrente (condição B, no qual a pressão à tecla esquerda sinaliza aumento da probabilidade da resposta de pressionar a tecla direita ser reforçada) e não são exigidas pelas contingências programadas (por exemplo, mesmo sem pressionar a tecla esquerda, a resposta de pressão à tecla direita ainda pode ser reforçada). Este tipo de comportamento pode então ser caracterizado como respostas precorrentes sinalizadas e não requeridas, que podem diminuir ou parar de ocorrer, quando não interrompem a resposta corrente (Oliveira-Castro, Coelho, & Oliveira-Castro, 1999). Transpondo essa análise para a contingência, no exemplo dado de Joana, em que diante de um problema de adição simples, (a) “Joana consulta a tabuada e escreve a resposta correta”; e após algum treino, quando é questionada pelo mesmo problema, (b) “Joana escreve a resposta correta, sem consultar a tabuada”, ou seja, em b a resposta de “consultar a tabuada” passa a não ser mais induzida pela contingência.

Oliveira-Castro (1993) investigou em dois experimentos os efeitos de treino sobre a diminuição de resposta precorrente (acesso a uma tela de auxílio) em uma tarefa de memorização de pares associados. A tarefa consistia em associar formas arbitrárias (símbolos) a um código com uma sequência de cinco caracteres (números). Durante a tarefa, era apresentado um símbolo na tela e o sujeito era solicitado a digitar o código correspondente (número), ao qual poderia ter acesso por meio de uma “tela de auxílio”. Após fechar a tela de auxílio, era solicitado a digitar a resposta e um som indicava se a resposta digitada estava correta ou incorreta. Os sujeitos poderiam consultar o auxílio o quanto achassem necessário, contudo a instrução da tarefa indicava que o sujeito deveria aprender o código correspondente a cada símbolo, sem consultar a tela de auxílio. Esses procedimentos foram aplicados em dois experimentos. No primeiro foram utilizados seis pares associados e os sujeitos (42 alunos universitários) não recebiam consequência diferencial por responder sem ajuda do auxílio. No segundo experimento foram utilizados oito pares associados e 23 pessoas receberam remuneração de acordo com seu desempenho, ao responder sem ajuda do auxílio. Um terceiro experimento foi utilizado para testar a generalidade dos resultados obtidos no Experimento 1 e 2. Para tal, todos os teclados do computador foram cobertos, e o sujeito foi solicitado a pressionar a tecla correspondente ao caractere apresentado na tela. Ao consultar o auxílio (pressionando a tecla *enter*) o sujeito tinha aceso ao desenho do teclado com todos os caracteres, pelo tempo que desejasse, e após teclar, recebia um som informado se a resposta estava correta ou incorreta.

A medida da resposta de consulta à tela de auxílio foi da duração (em segundos) do acesso à tela de auxílio, dividida pelo número de respostas corretas (dígitos corretos). Foi usada essa medida (*duração/corretas*), visto que a resposta auxiliar poderia parar de ocorrer e o sujeito continuar errando. Os seguintes resultados gerais foram apresentados: (1) os comportamentos precorrentes diminuíram gradualmente com o aumento das tentativas; (2) as diminuições foram negativamente aceleradas; (3) mesmo observando-se diferenças individuais, a diminuição parece ter seguido um padrão ordenado (curva com a mesma função); (4) o padrão de diminuição parece ser replicável e generalizável para tarefas diferentes; e, (5) o padrão de diminuição parece ser sensível a variáveis que, se sabe, afetam o processo de memorização (número de pares).

Oliveira-Castro et al. (1999) analisaram o resultado de três experimentos, com parte dos dados dos Experimento 1 e 2 apresentados anteriormente, no trabalho realizado em Oliveira-Castro (1993). A duração da resposta precorrente, ou seja, o tempo que os participantes gastaram consultando a tela de auxílio, foi medida para cada par em cada tentativa. Os resultados indicaram que a duração do comportamento precorrente diminuiu em função do aumento das tentativas, como uma função negativamente acelerada e foi descrita pela Equação:

$$Duração/correta = b - a\log(bloco\ de\ tentativas) \qquad \textbf{(1)}$$

A função linear representada pela duração da resposta precorrente por resposta correta é dada pelo logaritmo do número de tentativas, sendo que $b$ e $a$ foram parâmetros derivados empiricamente.

Os exemplos deste tipo do comportamento podem ser identificados em quase toda tarefa, tal como consultar um livro para compreender um conceito, consultar notas musicais ao aprender a tocar um instrumento ou ainda olhar uma tabela de multiplicação ao resolver problemas aritméticos (Oliveira-Castro et al.,1999). Em todos estes casos, o objetivo de memorizar os pares associados foi alcançado, ou seja, a resposta correta pôde ocorrer, após algum treinamento, sem a emissão de tais respostas precorrentes. (Oliveira-Castro, 1992; 1993). O que demonstra que é possível estudar empiricamente as condições relacionadas à memorização, proposta nessa tarefa, voltando-se para a análise da diminuição dessas respostas e suas variáveis situacionais. E como afirmou Catania (1999) "o lembrar é uma classe de ordem superior, e muitos de seus aspectos são presumivelmente modelados por contingências naturais (p. 341).

A resposta de "consultar a tabuada" assemelha-se àquelas respostas que foram chamadas de "comportamento de observação" (e.g., Holland, 1957; Skinner, 1953/1998). Esta expressão foi usada extensamente para se referir (a) às respostas que geram estímulo discriminativo, que de outra maneira não estariam presentes na situação, tal como uma resposta que produzisse os estímulos associados com cada componente de esquemas múltiplos de reforço e (b) respostas ao estímulo modelo em um procedimento típico de *matching-to-sample* (Catania, 1999). Em ambos os casos, tais respostas poderiam ser interpretadas como precorrentes, por serem funcionalmente similares, considerando que aumentam a probabilidade de testes mais eficientes da resposta padrão (no exemplo de "a") ou são requeridos para o reforço de respostas encadeadas (no exemplo de "b"), como em uma cadeia de respostas típicas (cf. Polson & Parsons, 1994). Segundo Oliveira- Castro et al. (1999), apesar desta similaridade geral, as pesquisas sobre comportamento de observação testam variáveis que mantêm a resposta de observar e não as variáveis responsáveis por sua diminuição. Nas poucas experiências em que a frequência da resposta de observação diminuiu, com treinamento crescente, os resultados foram considerados como inesperados e difíceis de explicar (e.g., Ohta, 1987).

Experimentos citados (Oliveira-Castro, 1993; Oliveira-Castro et al., 1999), ao analisarem a diminuição dessas respostas precorrentes (consulta a uma tela de auxílio), demonstraram que esses comportamentos ocorrem no início do treino porque geraram estímulos discriminativos necessários para a apresentação da resposta correta, mas após algum treinamento, essa probabilidade não é mais elevada na presença, em comparação com a ausência de estímulos auxiliares, ou seja, não são mais exigidos pela contingência em vigor. Oliveira-Castro (1993) tece algumas discussões, com base na literatura analítico comportamental, sobre essa diminuição, que poderia ser explicada em termos de: (1) 'redução no atraso de reforço', visto que "na medida que a resposta intermediária diminui, mais rapidamente a consequência reforçadora é apresentada" (p.197), mas não explicaria porque mesmo ocorrendo essa diminuição o desempenho continua mantido; (2) a explicação pode estar na 'transferência de estímulos', ou seja ao emparelhar-se dois estímulos, na mesma contingência, o primeiro estímulo adquiriria certas funções do segundo. Segundo Oliveira-Castro e Campos (2004), esse tipo de comportamento precorrente, nomeado de 'auxiliar' "é não requerido pelas contingências programadas, sinalizado, e ocorre em situações que possibilitam a transferência de função de estímulo" (p. 192).

O conceito de comportamento precorrente auxiliar, como o próprio nome diz, contribui para o acesso a um reforço final, mas isso não elimina algumas perguntas feitas por diversos autores sobre tal comportamento. Por exemplo, Oliveira-Castro, Faria, Dias e Coelho (2002), ao analisarem diversos experimentos envolvendo precorrente auxiliar como variável, questionaram por que, nesta experiência, tais respostas diminuíram e pararam de ocorrer sem interromper a resposta atual (corrente).

Outra questão é por que respostas atuais (correntes) foram interrompidas quando respostas precorrentes eram impedidas? A resposta poderia estar na possibilidade de transferência de função dos estímulos da resposta precorrente para a resposta final. A expressão auxiliar é proposta para se referir a um comportamento precorrente não requerido na contingência, que ocorre em situações em que a transferência de controle de estímulo não é impedida. Oliveira-Castro (1993) analisa que tais resultados demonstraram ser possível uma investigação sistemática dessas respostas precorrentes. Mas precisa-se de uma "maior elucidação das variáveis que influenciam a diminuição deste tipo de resposta" p.194).

A resposta precorrente foi estudada principalmente em função da complexidade da tarefa. Esta poderia estar ligada a características da tarefa e não a habilidades do indivíduo, pois a complexidade da tarefa, independentemente de quem a executa, não se altera após o indivíduo adquirir a habilidade de executá-la (cf. Oliveira-Castro et al., 1999). Por meio de experimentos, Oliveira-Castro et al. (1999) observaram que a complexidade da tarefa, interpretada nesses estudos como um conjunto de contingências programadas de reforço, está entre as variáveis que podem influenciar a diminuição deste tipo de comportamento precorrente. O que se espera é que ocorram mudanças na duração, ou mesmo na função do precorrente, quando a complexidade da tarefa muda. De acordo com Coelho e Oliveira-Castro (2005):

> A determinação das dimensões componentes da complexidade de tarefas e a especificação das condições necessárias para a combinação entre as dimensões da tarefa na fixação de diferentes níveis de complexidade de tarefas poderia aplicar-se, em tese, a tarefas que variam em sua complexidade discriminativa e poderia contribuir para a especificação das condições ótimas de treino no ensino de tarefas com diferentes probabilidades programadas de reforço. (p. 63)

Em Oliveira-Castro et al. (1999) para analisar a função da dimensão discriminativa da tarefa, por meio de procedimento de pares associados (Experimento 3), os participantes passaram por cinco condições que variaram em diferentes números de pares associados, bem como os tipos de códigos apresentados (forma e posição). A partir da Equação 1, a Figura 6 exemplifica graficamente a medida da área calculada (*b²/2a*), podendo ser interpretada como a duração total estimada da resposta precorrente auxiliar (consulta à tela auxiliar) necessária para aprender (memorizar) cada par associado.

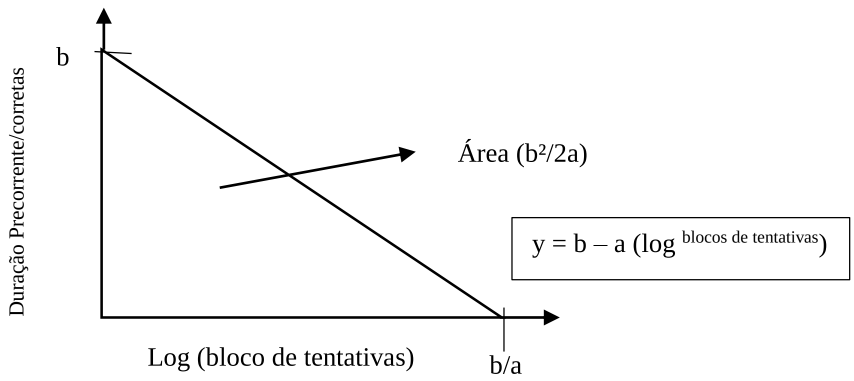



*Figura 6. Representação gráfica da medida da Área derivada da Equação 1.*

Os resultados do experimento indicaram que com aumentos no número de respostas diferentes em cada par (número de caracteres diferentes que formavam cada conjunto de cinco dígitos), em cada posição (número de caracteres diferentes ocorrendo em cada uma das cinco posições entre pares) e no conjunto total a ser memorizado (número de caracteres diferentes que formavam todos os pares e posições), maior era a Área. Esses resultados encontrados, nas três variáveis manipuladas (tamanho, forma e posição), sugerem efeitos sistemáticos das variáveis relacionadas à complexidade da tarefa, corroborando a proposta de analisar a complexidade da tarefa com base na dimensão discriminativa da tarefa, por meio da quantificação de contingências programadas de reforço. A Área da função foi interpretada como medida de desempenho, ou seja, quanto maior a Área pior o desempenho na tarefa, ou o inverso.

A influência de diversas manipulações das dimensões discriminativas da tarefa (ex. figuras arbitrárias e cor) foram estudadas sobre a diminuição do comportamento precorrente auxiliar (consultar um auxílio na tela), por meio da quantificação programada de reforço (cf. Oliveira-Castro et al., 1999), manipulando variáveis como mudanças no número de formas e número de posição, nível de complexidade de instrução da tarefa (e.g., Coelho & Oliveira-Castro 2005, Flores, 1997/2003, Oliveira-Castro & Campos, 2004, Oliveira-Castro et al., 2002,).

Oliveira-Castro (1993) ao apresentar dados empíricos para uma interpretação negativa de "fazer mentalmente", ressaltando a diminuição do comportamento precorrente auxiliar, aponta a importância de serem identificadas as situações em que é possível a transferência de função do estímulo, que dependem da tarefa e do comportamento corrente investigado. Tal análise possibilitaria estudar o processo de aprendizagem, identificando as situações suficientes e ou necessárias para formação de um repertório mais complexo, como por exemplo, a resolução de operações de adição seriam precedidos por treinos que envolveriam emissões de comportamentos precorrentes, como contar nos dedos. Dispensaria assim uma análise de questões internas (ex. cálculo mental) e daria lugar a eventos observáveis que ocorrem durante o treino, que segundo Oliveira-Castro (2003), permitiria um planejamento menos intuitivo da sequência de etapas de ensino.

**Pesquisas Comportamentais Sobre Operações Aritméticas**

Prado e Carmo (2004) apresentaram uma visão crítica sobre a escassez dos estudos em análise do comportamento na área da educação matemática, ao passo que refletem sobre sua solidez e importância, principalmente para divulgação em outras áreas. Nos estudos em análise do comportamento envolvendo operações aritméticas (adição e subtração), dentre as diversas condições e variáveis relevantes estudadas para solucioná-las, destaca-se: o formato com que os problemas aritméticos são apresentados, com relação à posição da incógnita ($a + b = c$), como por exemplo, quando a incógnita encontrava-se na posição *a* houve mais erros do que quando a mesma encontrava-se na posição *c*; tipos de estratégias para a resolução (e.g., Hiebert, 1982; Resnick e Rosenthal, 1974); e como os termos usados para descrever ou representar o problema (ex. por meio de uma balança) podem influenciar na resolutividade da tarefa (e.g., Capovilla, César, Capovilla, & Haydu, 1997).

Outros estudos focaram na hierarquização de habilidades necessárias, ou seja, pré-requisitos para o ensino de comportamentos matemáticos para resolução de operações de adição e subtração (e.g., Iñesta, 1980; Resnick, Wang & Kaplan, 1973; Silva, 1999; e Teixeira, 2002); e o efeito do ensino de relações de equivalência no desenvolvimento do comportamento conceitual numérico (e.g., Haydu, Costa, & Pullin, 2006; Henklain & Carmo, 2013). Os estudos sobre a hierarquização no ensino de operações fundamentais (ex. adição até 10) envolveram etapas anteriores relacionadas à noção de número, principalmente por meio de tarefas treinadas com uso do paradigma da equivalência de estímulos. Tal paradigma, proposto por Sidman & Tailby (1982), consiste em um modelo experimental que permite demonstrar a emergência de classes de equivalência, quando se ensinam relações condicionais arbitrárias entre estímulos. Para que uma classe de equivalência seja demonstrada, deve-se estabelecer pelo menos duas relações condicionais com um elemento em comum e demonstrar a emergência de relações condicionais. Essas relações apresentam propriedades de reflexividade (A relaciona-se com A), simetria (se A relaciona-se com B, então B relaciona-se com A) e transitividade (A relaciona-se com

B e A relaciona-se com C, então B relaciona-se com C). Usando a Figura 7, retirada do estudo de Carmo e Prado (2004), como exemplo dessas redes de relações compostas por pré-requisitos para o aprendizado da matemática, podemos descrever que: treinar (1) AB diante da apresentação de um número ditado “três” (A) escolher o numeral impresso “3” (B), seguida por uma consequência reforçadora; treinar (2) AC Diante da palavra ditada “três” (A), escolher o conjunto com número correspondentes de objetos, seguido por uma consequência reforçadora. Como resultado, pode-se observar com alta probabilidade a emergência de respostas que não foram diretamente ensinadas que são: (3) BC e CB Diante do numeral impresso “3” a criança escolhe o conjunto com número correspondente de objetos e vice –versa; (4) BD e CD diante do conjunto de objetos ou numeral impresso, a criança passa dizer o número correspondente.

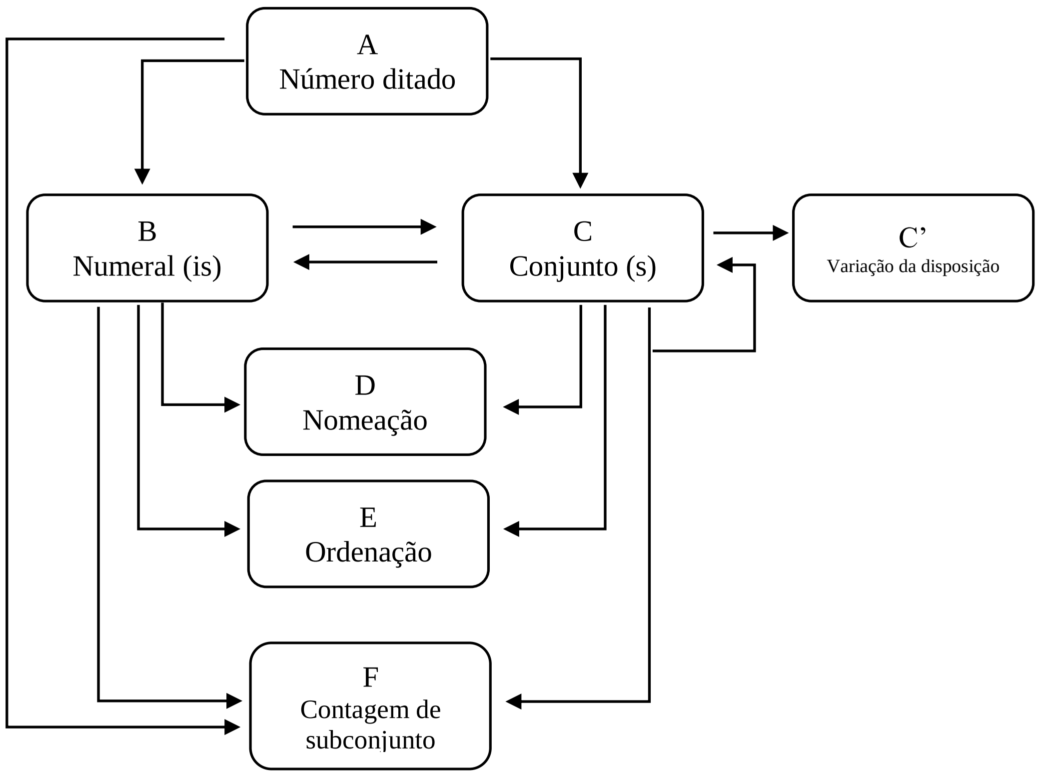



*Figura 7. Rede de relações dos comportamentos por pré-requisitos para o aprendizado da matemática (Carmo & Prado, 2004).*

Essa rede de relações, segundo Prado e Carmo (2004) envolveria ainda treinar as relações: (5) CC de equiparação de conjuntos iguais e CC’ de equiparação com conjuntos iguais com disposição diferentes; (6) BE de ordenação, que seria por meio de um esquema contendo conjuntos com diferentes números de itens e deve-se ordená-los do menor para o mais numeroso; e por fim a (6) AF que seria a cardinalidade, testada pela contagem de subconjuntos

Uma semelhança importante encontrada nos resultados desses trabalhos, é que as tarefas de adição e de subtração envolvendo conjuntos, seja com objetos ou figuras, precederam as tarefas de adição e de subtração com numerais, o que parece relacionar-se à possibilidade de contagem. Prado e Carmo (2004) destacam que o treino de tarefas envolvendo conjuntos, como BE e AF, envolveria a contagem, que segundo os autores é uma habilidade bastante complexa e que abarca uma série de correspondências, como descritas abaixo:

> Diante de um número de elementos cujo valor se quer determinar, é necessário tocar (ou apontar, separar, olhar etc.) cada um de seus elementos sem omissões nem repetições. Simultaneamente, a cada elemento tocado faz-se corresponder o nome de um número (pronunciado em voz alta ou não), obedecendo-se a uma sequência predeterminada. Portanto, há uma correspondência biunívoca entre cada elemento tocado e cada nome de número falado. Finalmente, e muito importante, há o que alguns autores chamam de aplicação da regra de cardinalidade: o último nome de um número expresso na contagem determina o valor do conjunto. Ao contar os dedos de uma de suas mãos, por exemplo, você levanta (ou olha, ou toca, etc.) o polegar e diz: “um”. Em seguida, estende o indicador e diz: “dois”. E assim sucessivamente até chegar ao último dedo e dizer: “cinco”. Este é o número de elementos que o conjunto tem. (p. 151)

O ensino de operações aritméticas enfatiza habilidades de contar objetos, usando números escritos e após calculando (ex. adicionando ou subtraindo). O papel do treino de contagem, na cadeia de aprendizagem de operações aritméticas, é bastante discutido, principalmente nos estudos sobre efeito do ensino de relações de equivalência no desenvolvimento do comportamento conceitual numérico.

As discussões nesses estudos consideram o contar em alguns estudos como pré-requisito (e.g., Monteiro & Medeiros, 2002, Magalhães & Galvão, 2010, Teixeira 2010), ou seja, é necessário e imprescindível para o comportamento conceitual numérico. Em outros é tratado como facilitador, por diminuir o número de sessões de treino (e.g., Drachenberg, 1973; Carmo, 2002; Prado, Bonalumi, Bonfim, Ramirez, & Carvalho, 2006), mas não necessário no estabelecimento da relação de número e quantidade. Esse nível de análise pretende entender as condições suficientes e/ou necessárias para a aprendizagem. Nesse caso os estudos com base no comportamento precorrente e comportamento precorrente auxiliar poderiam contribuir com tais questões, relacionadas a análise do processo de ensino relacionados ao treinamento e aos tipos de tarefas.

Segundo Haydu, Pullin, Iégas e Costa (2010), resolver um problema aritmético, no contexto da análise do comportamento, envolve "comportamentos preliminares (precorrentes), que produzem mudanças na situação, as quais, por sua vez, possibilitam a resposta-solução, ausente de imediato" (p.203). As investigações experimentais sobre análise do comportamento precorrente em resolução de problemas aritméticos envolvem principalmente os processos que atuam na solução de problemas, sem uso de variáveis hipotéticas, como por exemplo atividade mental (Parsons, 1976). Isto é, o processo de resolução de problemas é descrito funcionalmente por meio de uma interação complexa de variáveis que afetam a probabilidade da resposta correta.

Nessa linha Neef, Nelles, Iwata e Page (2003) realizaram uma análise do ensino de comportamentos precorrentes (identificar valor inicial, valor de transformação, operação e valor resultante) para a solução de problemas de aritmética (adição ou subtração) em dois adultos jovens com atraso de desenvolvimento. Os problemas apresentados continham variáveis nas três posições (ex. $a + b = c$), como: " se Sam começou com 7 canetas e acabou com 5 canetas, quantas canetas ele deu?” Neste caso, os comportamentos precorrentes foram identificar: o valor inicial – *“Sam começou com 7 canetas”*; valor de transformação -*“Quantos ele deu?”;* a operação -*“deu”* (subtração) e valor resultante -“*Terminou com 5 canetas”.* O objetivo era formular uma equação (*7 - ? = 5*) para chegar à resposta correta”. Os resultados deste estudo mostraram que ensinar alunos com atraso de desenvolvimento um conjunto de comportamentos precorrentes (partes componentes de um problema) resultou no aumento de soluções corretas para ambos os estudantes. Na discussão, os autores ainda destacam que os comportamentos precorrentes, uma vez aprendidos, podem se tornar encobertos (Skinner, 1976), ainda que esta possibilidade não tenha sido investigada (devido à necessidade da resposta precorrente para a resolução de problemas). Os autores sugerem que pesquisas futuras podem tornar mais proeminentes as potenciais contribuições da análise do comportamento para a aquisição de habilidades complexas de resolução de problemas de todos os tipos.

Levingston, Neef e Cihon (2009) replicaram os procedimentos do estudo de Neef et al., (2003) e examinaram os efeitos do ensino de comportamentos precorrentes (identificar o rótulo/solução, operação, números maiores e números menores) sobre a resposta corrente (solução correta dos problemas de multiplicação e divisão) para dois alunos do ensino básico, um com atraso no desenvolvimento (autismo) e outro sem. Os resultados replicaram os achados de Neef et al., (2003) demonstrando que instrução sistemática sobre comportamentos precorrentes foi um método eficaz para estabelecer habilidades na solução de problemas aritméticos. Os autores discutem que a instrução, por meio de comportamentos precorrentes, foi limitada à identificação dos elementos básicos e operações envolvidas em um problema sem a necessidade do uso de estratégias cognitivas que estimulam a “auto-reflexão”, como por exemplo, "*O que você notou sobre como você fez seu trabalho?"* (Naglieri & Gottling, 1995, citado por Levingston et al., 2009).

Todos os resultados dos estudos experimentais anteriores ilustram a utilidade do conceito de comportamento precorrente de Skinner (1953/1998/1969). Este define que a situação de resolução de problemas envolve uma relação entre respostas, na qual a ocorrência de comportamentos precorrentes torna a solução (resposta corrente) mais provável. Todos os estudos basearam suas análises na eficácia dos comportamentos precorrentes sobre a solução de problemas, tal como uma estratégia de ensino, isto é, quando o participante passa a responder corretamente os problemas e a generalizar as respostas para outros problemas não treinados previamente. Apenas o estudo de Parsons (1976), descrito anteriormente, pôde demonstrar experimentalmente que o comportamento precorrente (contar em voz alta) era mantido quando o reforço (elogios e *tonkens)* era contingente a um comportamento corrente (responder corretamente). Ao passo que comportamento corrente diminuía quando os comportamentos precorrentes eram impedidos. Nesse caso, há diferenças importantes entre as contingências precorrentes e aquelas em que respostas similares ocorrem, mas podem parar de ocorrer sem interromper a resposta corrente (e.g., Polson & Parsons, 1994), denominados por Oliveira-Castro et al. (1999) de comportamento precorrente auxiliar, tratados anteriormente. O estudo dessas contingências pode ser uma forma de analisar os processos de ensino-aprendizagem de forma sistemática, em sala de aula.

## Objetivos

Os estudos supracitados, bem como o Parâmetro Curricular Nacional [PCN] (1998) transcorrem sobre a importância de se compreender os procedimentos de ensino envolvidos na educação matemática. Esses procedimento e materiais de apoio utilizados em situações de ensino, em sala de aula, muitas vezes são utilizados com a função de precorrente, ou seja, aumentar a probabilidade de se chegar à resposta correta (solução do problema) e assim ser reforçado (elogios, notas, aprovações). Por vezes, esses comportamentos apresentam uma função de estímulos *auxiliares,* por serem não requeridos pelas contingências programadas, sinalizados, e ocorrerem em situações que possibilitam a transferência de função de estímulo (Oliveira-Castro et al., 1999).

No presente trabalho investigam-se esses materiais e procedimentos de apoio utilizados em sala de aula, que são usados como técnicas de ensino de resolução de problemas aritméticos, buscando se estes tem função precorrente (auxiliar), por meio da observação e mensuração de respostas e variáveis situacionais. Objetivou-se identificar as relações entre procedimentos de ensino da matemática (i.e. materiais utilizados) e o comportamento precorrente auxiliar, em sala de aula e em situação de ensino individualizado, a fim de contribuir com dados sistemáticos sobre as variáveis ambientais relacionadas ao desempenho dos alunos, nesses dois contextos de ensino.

Na tentativa de atingir o objetivo geral proposto, o trabalho foi dividido em dois estudos. No primeiro estudo, 26 crianças foram observadas em sala de aula, no primeiro semestre de 2017, durante as aulas regulares de matemática. Procurou-se investigar os principais materiais de apoio (auxílios) utilizados em sala de aula no processo de ensino aprendizagem, analisando sua ocorrência durante apresentação dos conteúdos pelo professor, respostas dos alunos (oral), bem como nas tarefas individuais realizadas em sala (escrita). Também foi realizada entrevista com os responsáveis, a fim de levantar dados socioeconômicos sobre as famílias dos alunos.

No Estudo 2, quatro crianças foram expostas a uma plataforma digital de ensino individualizado de matemática, denominada *Khan Academy*. Procurou-se investigar a duração do comportamento precorrente, dividido pelo número de respostas corretas, para cada aluno, e estudar a influência do treino e tipos de tarefa sobre a resposta precorrente (*duração/correta*). Todos os participantes dos dois estudos frequentavam a mesma sala do segundo ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública municipal. Os dois estudos serão detalhados a seguir.

## Estudo 1

De forma geral o presente estudo procurou analisar o processo de ensino de operações matemáticas, de adição e subtração, em sala de aula, com foco nos procedimentos de auxílio utilizados na resolução destas operações. O intuito foi compreender o papel destes procedimentos no aprendizado dos alunos. Para tal, buscou-se analisar os auxílios programados pelo professor no processo de ensino, bem como os auxílios utilizados pelos alunos em situação de resolução de operações. Ainda, se estes teriam função de comportamento precorrente/ comportamento precorrente auxiliar. O objetivo especifico consistiu em: (1) Analisar a relação dos auxílios empregados pelo professor, em situação de ensino, com as respostas apresentadas pelos alunos (i.e.,resposta escrita e resposta oral); (2) Analisar a relação dos auxílios utilizados pelos alunos durante a resolução de tarefas, de forma independente, com os resultados apresentados na resolução de tarefas (ex. respostas corretas e incorretas); (3) Analisar a função precorrente desses auxílios; (4) descrever as consequências apresentadas pelo professor com relação às respostas apresentadas pelos alunos; e (5) verificar se há influência de variáveis socioeconômicas sobre o desempenho dos alunos em tarefas de classe.

**Local e Participantes**

A escolha da instituição de ensino, dentre as que compõem a rede pública municipal da cidade escolhida, se deu a partir da maior nota do IDEB acima de seis, no ano de 2015. O uso desse indicador permitiu selecionar uma escola que por obter nota no IDEB acima da média, estivesse em consonância com os critérios do Parâmetro Curricular Nacional e que tendesse a manter seus currículos no ensino da matemática sem grandes modificações, ao longo dos anos. A direção da escola, bem como a coordenação pedagógica, concordaram com a realização da pesquisa e formalmente assinou o aceite de participação institucional (ver Anexo A). Concedido o termo de participação, convocou-se uma reunião com o professor responsável pela turma, a fim de solicitar o acesso direto às suas aulas, durante todo o semestre. Após o aceite do professor, a pesquisadora realizou uma reunião com a turma, convidando-os a participar da pesquisa. Acordou-se nesta reunião, que a pesquisadora permaneceria sentada ao fundo da sala, observando a aula. Ainda, que poderia caminhar pela sala e ter acesso às tarefas dos alunos, além de fotografá-las, quando autorizado por eles. Frisou-se que a qualquer momento que se sentissem incomodados pela presença da pesquisadora, poderiam se dirigir à mesma, ou à professora para dizê-lo. Na ocasião foi lido e entregue o TCLE para consentimento do estudante (Ver Anexo B).

Participaram desta pesquisa empírica um total de 26 estudantes do 2º ano do (EF) de uma instituição de ensino pública municipal, sendo 9 meninos (36%) e 16 meninas (64%), com idades variando entre 7 anos e 3 meses e 9 anos e 2 meses (M = 7.3 anos, DP = 0.9). Foi escolhido para análise os alunos do segundo ano do EF, por ser o ano indicado pelo Parâmetro Curricular Nacional (Secretaria de Educação Fundamental, 1997) para aprendizagem de operações matemáticas, com uso de sinais de adição e subtração. Ressalta-se que os pré-requisitos para o ensino de operações matemáticas são trabalhados desde a pré-escola.

Foram coletados dados demográficos junto aos responsáveis dos alunos participantes (ver Anexo E), por meio de entrevistas individuais (presenciais e por telefone) e por meio de consulta a prontuários escolares, totalizando uma amostra de 26 famílias, sendo 2 famílias com dados incompletos. Dentre as famílias, 54% apresentaram como responsável familiar a mãe, 38% o pai e a mãe e 8% os avós. No que diz respeito ao grau de escolaridade, 46% dos responsáveis declararam possuir o Ensino Fundamental incompleto (EFi), 25% o Ensino Médio completo (EMc), 17% o Ensino Médio incompleto (EMi) e 13% o Ensino Fundamental completo (EFc). Com relação à renda familiar, 71% declararam uma renda inferior a um salário mínimo (R$937,00), 21% declararam receber um salário e 8% afirmaram ganhar entre 1,5 a 2,5 salários mínimos. No que concerne ao vínculo trabalhista e profissão, a maioria declarou não ter vínculo empregatício ou profissão definida: 54% afirmam-se como autônomos, 25% "do lar" e 21% empregados, com carteira assinada. Com relação ao número de pessoas por família (M = 4,5 pessoas), 54% são famílias com 2 a 4 componentes e 46% são famílias com 5 a 8 componentes. A renda per capita das famílias é inferior a 1/4 do salário mínimo. Com relação ao número de filhos por família: 63% possuem entre 1 a 3 filhos e 37% possuem de 4 a 6 filhos. Todas as famílias residem próximas à escola.

### Variáveis e Comportamentos de Interesse

De forma específica, as variáveis de interesse foram: *(1) resposta auxiliar* por meio do registro do (s) tipo (s) auxílio (s) utilizado (s) pelo professor durante o ensino de uma determinada tarefa e registro do auxílio que os alunos utilizavam durante a resolução das tarefas, sem a interferência do professor; *(2) resposta corrente final* por meio do registro de respostas orais dos alunos, respostas escritas por meio da contabilização de todas as respostas corretas, respostas incorretas e respostas em branco nas tarefas escritas respondidas em sala*; (3) Contexto antecedente* foi registrado também o contexto durante o ensino das tarefas em sala, tal como os tipos de instruções do professor (oral, escrita no quadro, etc.), quantos exercícios modelos eram apresentados, tipos de tarefas ensinadas (problemas escritos, operações de soma, subtração e etc), bem como outras interferências (ex. comportamento dos alunos); e *(4) consequências apresentadas* pelo professor durante o ensino das tarefas (ex. advertência, elogios) com relação ao comportamento dos alunos, bem como após a resolução das tarefas de classe (ex. conferência, carimbo, etc.).

Algumas variáveis socioeconômicas também foram registradas, a fim de investigar possíveis relações com o desempenho geral dos alunos. Estas variáveis incluíram: (a) renda familiar do estudante (ex. renda familiar declarada e número de pessoas na família) (b) nível de escolaridade dos pais; (c) frequência na realização de tarefas extraclasse e acesso a ajuda nas mesmas. Tais variáveis poderiam relacionar-se ao acesso a recursos, como local e tempo adequado para dedicar-se às tarefas, acesso a recursos didáticos (livros, itens escolares, jogos, computadores etc) e ampliação do repertório de procedimentos pelo acesso a ensino extraclasse.

**Instrumentos**

Para o registro contínuo dos comportamentos apresentados em sala, foi utilizado uma prancheta com formulários de registro (ver anexo D). O registro das respostas escritas, bem como algumas respostas auxiliares (ex. contar com uso de bolas escritas) fora por meio de fotografia das tarefas, com uso do dispositivo móvel (*tablet*, sistema IOS)

**Procedimento**

A técnica adotada para a coleta dos dados foi a de observação direta, não participante, visando analisar o comportamento tal como acontece em ambiente natural. A observação em sala ocorreu nas aulas de matemática, com frequência semanal, no turno da manhã. A aula iniciava-se às 7h da manhã, com intervalo entre 9:30 e 10h, e finalizava às 11:20h, totalizando aproximadamente 3h e 50 minutos. Cada aula foi tratada como uma sessão. A coleta transcorreu em um período de oito semanas, contemplando o cronograma de ensino de operação de adição e subtração, totalizando aproximadamente 30h e 40 minutos de coleta.

Para a coleta das respostas auxiliares, empregadas no procedimento de ensino pelo professor, foi realizado um registro contínuo, durante todas as aulas de ensino de operações matemáticas, por possibilitar o registro de várias classes de comportamento e a identificação das condições nas quais eles ocorrem (Johnston & Pannypacker, 2009). Dito de outra forma, foram registrados tanto eventos comportamentais quanto os eventos ambientais - físicos e sociais - antecedentes e consequentes ao comportamento (Dana & Matos, 1982), que nesse estudo teve ênfase na interação entre professor e aluno. Eventualmente fez-se uso de registro por intervalo, no qual foram medidas a presença ou ausência de respostas (auxiliares) de cada aluno em breves e iguais intervalos de tempo, nas tarefas de resolução de operações matemáticas (por não ser possível observar continuamente todos os alunos simultaneamente).

A pesquisadora sentou-se ao fundo da sala de aula, e acompanhou toda a aula de matemática registrando as respostas do professor e dos alunos durante a resolução de problemas. Todas as tarefas escritas, copiadas pelos alunos ou fotocopiadas, foram coletadas pela pesquisadora. Esta realizou o registro por meio de fotografia, para análise de respostas. As variáveis socioeconômicas foram coletadas diretamente com os responsáveis, por meio de entrevista pessoal ou por telefone.

## Resultados

Para atingir o objetivo proposto, as aulas foram observadas com foco no registro das respostas auxiliares empregadas na resolução de operações aritméticas de adição e subtração (resposta final) e nas variáveis ambientais relacionadas a estas (que incluem antecedentes e consequentes das mesmas). O ensino das operações aritméticas foi realizado por meio de exercícios escritos no quadro ou por tarefas fotocopiadas. O professor apresentava a tarefa e respondia as mesmas utilizando procedimentos que auxiliavam a chegar à resposta final. Em duas aulas pode-se avaliar os procedimentos que os alunos utilizavam para resolver os exercícios, pois foram aplicadas tarefas, nas quais foram solicitados a responder de forma independente, um exercício de classe e um teste avaliativo (prova Bimestral).

Para tentar relacionar os auxílios programados pelo professor e os auxílios utilizados pelos alunos, separou-se os dados das tarefas nas quais o professor explicava os procedimentos utilizados para responder as questões e os dados das tarefas nas quais os alunos foram solicitados a responder de forma independente, com o mínimo de auxílio do professor, da seguinte forma: (1) análise do procedimento de ensino, no qual serão apresentadas os tipos de tarefas respondidas em classe, as respostas auxiliares utilizadas pelo professor para respondê-las, a resposta solicitada aos alunos (cópia ou resposta oral) e as consequências dadas pelo professor; (2) avaliação da aprendizagem por meio das tarefas realizadas pelos alunos de forma independente (com auxílio mínimo do professor), por meio da apresentação dos tipos de tarefa, respostas auxiliares utilizadas pelos alunos para respondê-las, o resultado da resolução das tarefas (ex. porcentagem de respostas corretas) e as consequências dada pelo professor. Os dados socioeconômicos e de desempenho dos alunos (ex. porcentagem de acertos) serão apresentados ao final, compondo uma análise complementar.

**Análise do Processo de Ensino**

O processo de ensino analisado ocorreu em todas as sete aulas, programadas para trabalhar envolvidas na resolução de operações aritméticas de adição e subtração. Estas foram trabalhadas por meio de exercícios, escritos no quadro, no qual os alunos eram solicitados a participarem com respostas orais ou respostas escritas (copiar no caderno). O professor realizou um total de 79 questões com os alunos, durante as 7 aulas, resultando em uma média de 11,2 exercícios por aula (DP = 9,4/ MÁX = 23 e MÍN = 1), totalizando 625 minutos de aula (M = 69,4/ DP = 48,5) aproximadamente.

**Exercícios.** A Figura 8 representa a frequência de apresentação dos exercícios, por aula, realizados em sala pelo professor. Para descrever os tipos de exercícios trabalhados em cada aula, foi utilizada a classificação apresentada na plataforma *Khan Academy*, aplicada no Estudo 2, com o objetivo de uniformizar as análises dos estudos. As nomenclaturas dos exercícios, nessa figura, estão em consonância com as nomenclaturas do Plano de aula da turma, bem como o Parâmetro curricular Nacional.

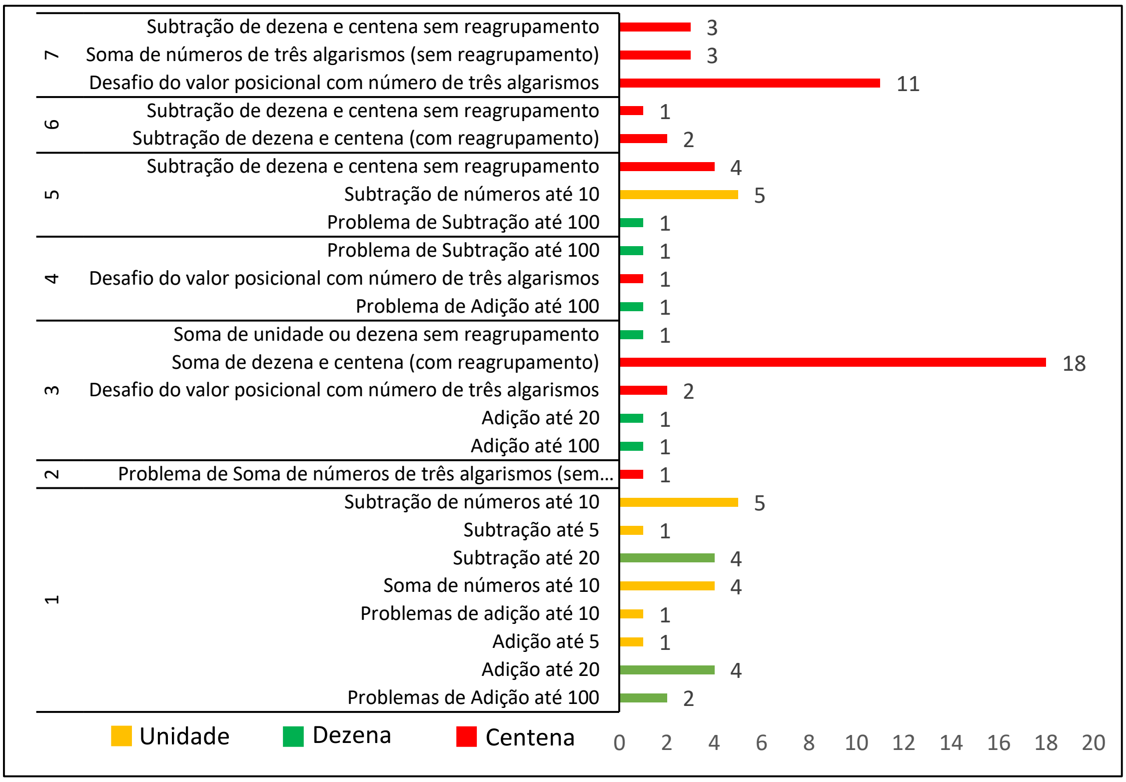



*Figura 8.Quadro de frequência dos tipos de exercícios, apresentados por aula (1 a 7), classificados de acordo com número de casas decimais apresentadas.*

Dos 79 exercícios trabalhados em sala, ao serem classificados quanto às casas decimais trabalhadas, observou-se 17 (21,5%) com unidades, 16 (20,2%) com dezenas e 46 (58, 3%) com centenas. Com relação à operação, 38 envolveram adição (P = 48,1%) e 27 envolveram subtração (P = 34,2%). Desses exercícios, 58 (P = 73,4%) foram apresentadas em forma de operação numérica (ex. some, subtraia...) e outras 7 foram apresentadas em forma de problemas (ex. 3 gatinhos estavam brincando e 2 foram passear, quantos ficaram?), com no máximo três algarismos. Os outros 14 (17,7%) exercícios envolveram apenas identificação do valor posicional do número.

O exercício mais trabalhado em sala pelo professor foi o de "*Soma de dezena e centena (com reagrupamento)*" com frequência total de 18 questões (P = 22,5%) trabalhados na aula 3, em forma de operação montada em Quadro de Valor e Lugar. Em seguida foi trabalhado o exercício "*desafio do valor posicional com número de* *três algarismos*” com frequência de 14 questões (P = 17,5%), trabalhados na Aula 3 (f = 2) na forma de composição do número, na aula 4 (f = 1) durante a avaliação, na composição de um número envolvendo milhar e na aula 7 (f = 11) com 3 questões envolvendo lugar posicional de um número, 3 questões de decomposição, 3 questões de composição e 2 questões para escrever o número por extenso. O Exercício “subtraia números até 10” apareceu em 10 questões (P = 12,5%) durante a aula 5 (ex. *10 – 7 =* ?). Os demais exercícios apresentaram porcentagem abaixo de 10%.

**Procedimentos.** Os procedimentos (auxílios) mais utilizados pelo professor em sala de aula, na resolução de operação matemática de adição e subtração, foram: (1º) a montagem da operação em Quadro de Valor e Lugar (QVL), que consiste em alocar e ordenar os números, de acordo com seu valor posicional, em um quadro contendo centena, dezena e unidade, como ilustra a Figura 10; (2º) contagem com bolas, traços desenhados, dedos das mãos e com material dourado. O material dourado é composto por blocos (borracha, madeira ou em papel) em forma de cubos pequenos (representando unidades do sistema decimal), barras compridas (representando dezenas), blocos quadrados (representando centenas) e cubo grande (representando milhar), como ilustra a Tabela 1; e (3º) estratégias denominadas de “*elevador*” e “*tomar emprestado*”, utilizadas para resolver respectivamente operação de adição e subtração com reagrupamento, como ilustram as Figuras 10 e 11.

A Figura 9 representa a distribuição de frequência dos auxílios utilizados pelo professor por aula. A contagem e a montagem do QVL foram utilizados em praticamente todas as aulas, enquanto os procedimentos do “*elevador”* e “*tomar emprestado*” foram utilizados em apenas uma aula e separadamente.

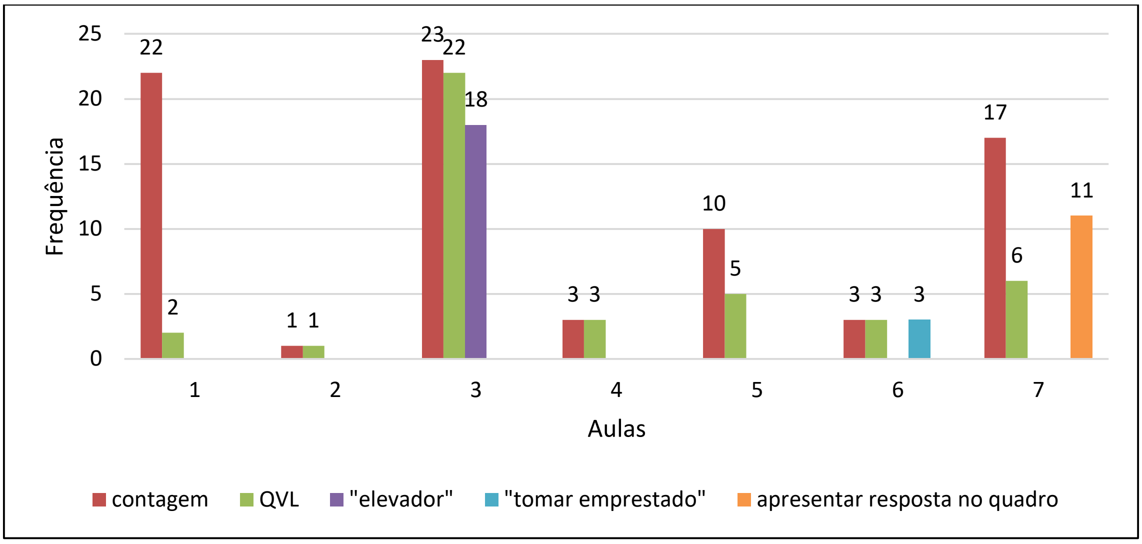



*Figura 9. Quadro de distribuição de frequência dos tipos de auxílio, utilizados pelo professor, por aula.*

O uso do QVL como auxílio consistia em montar as operação de acordo com seu valor posicional, como mostra a Figura 10 e 11, que possibilitava trabalhar as operações com 2 e 3 algarismos como operações simples. Por exemplo, uma operação do tipo “*328 + 54 = ?*”, com o QVL, era trabalhada separadamente, da Unidade até a Centena, até chegar a resposta final. Além do QVL e da contagem, outros procedimentos foram utilizados para auxiliar principalmente as operações que envolviam reagrupamento, ou seja, quando a soma de cada unidade, dezena ou centena era maior ou igual a 10. Com relação à adição com reagrupamento, o procedimento utilizado era denominado de “*elevador*”, ou seja, quando o valor da soma de cada unidade fosse maior/igual a 10, o valor da dezena era adicionado à conta seguinte. Por exemplo, durante a aula 3, no exercício de “*soma de dezena e centena (com reagrupamento)*”, foi apresentada uma operação de adição do tipo “*328 + 54 = ?*”. A operação era montada em QVL e a regra era utilizada, como mostra a Figura 10. A soma das unidades (*8+4*) formava uma dezena (<u>1</u>2), que era elevada e somada às dezenas seguintes (*<u>1</u>+2+5*).

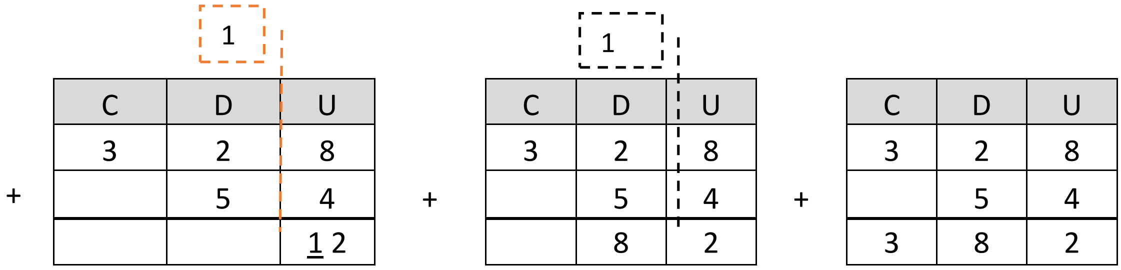


*Figura 10. Demonstração do uso da regra do "elevador", com operação montada em Quadro de Valor e Lugar (QVL)*

As operações de subtração geralmente são denominadas com reagrupamento, quando o valor do número que está na casa superior do QVL é menor que o número inferior. Nesse caso o procedimento utilizado foi chamado de "*tomar emprestado*". Como exemplo, a Figura 11 apresenta um exercício realizado durante a aula 6, de "*subtração de dezena e centena (com reagrupamento)*", com uma operação de subtração do tipo "*705 - 61= ?*". Como a operação da Dezena "*0 – 6 = ?*" não pôde ser executada (valor de zero menor que seis), foi retirada ("*tomado emprestado*") uma centena e acrescentada a dezena (0) que passa a ter valor de "*10*",. Assim, a operação "*10 – 6*" foi finalizada e o novo valor da centena "*6*" foi baixado.

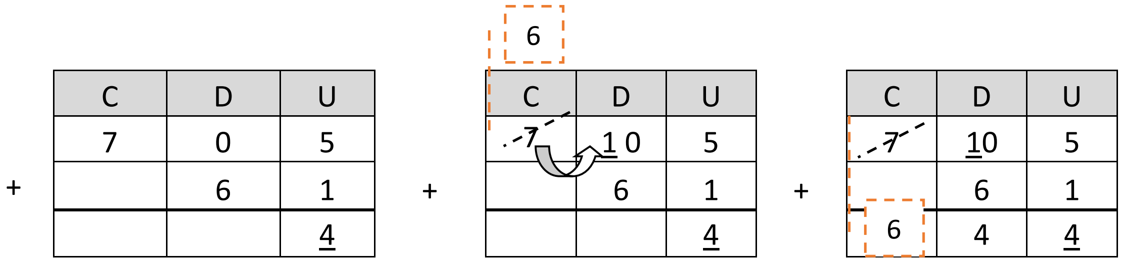
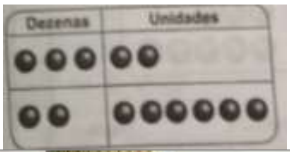
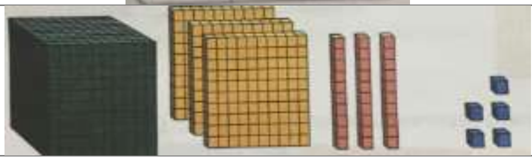
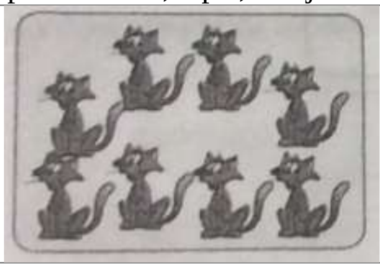


*Figura 11. Demonstração da utilização da regra do "tomar emprestado"*

Dos 79 exercícios trabalhados, em 60 destes, o professor utilizou como procedimento de ensino, sete tipos de auxílios para contagem, como mostra a Tabela 1.

*Tabela 1. Frequência e porcentagem dos tipos de auxílio utilizados em 60 questões.*

| **Auxílios** | **Exemplo** | **Frequência** | **Porcentagem** |
|---|---|---|---|
| Bolas |   | 23 | 38,3 |
| Material dourado |  | 15 | 25,0 |
| Traços | /////// + /// = | 11 | 18,3 |
| Dedos | Contagem com os dedos das mãos | 4 | 6,7 |
| Vocal | Contagem em voz alta dos números | 4 | 6,7 |
| Objetos | Contagem utilizando materiais dos próprios alunos, lápis, estojos e etc. | 2 | 3,3 |
| Figura |  | 1 | 1,7 |
| | Total | 60 | 100,0 |

O auxílio para contagem utilizado com maior frequência foi a contagem com bolas (f=23/ P= 38,3%), exceto na aula 2, na qual apenas o material dourado fora utilizado. As bolas eram desenhadas no quadro ou dadas na própria sentença da questão. O uso das bolas também foi o que predominou tanto nas operações de adição (P = 23,6%) como nas questões de subtração (P = 48,1%). Os exercícios em que este auxílio foi mais utilizado (f =4) foram "adição até 20", "subtração até 20" e "subtraia dezenas e centenas sem reagrupamento".

O segundo auxílio de contagem mais utilizado foi com material dourado (f = 15 /P = 25%). Este foi entregue para cada criança manipular (bloco com dezena e unidades) ou colado no quadro, ou utilizado por meio de ilustração. Com exceção da aula 7, o material dourado foi utilizado em todas as aulas. Importante frisar que quando os alunos manipulavam diretamente o material dourado, a maioria tendia a brincar com os blocos (ex. formando desenhos, empilhando, jogando).

Os traços também foram utilizados, nas aulas 1 e 3, primordialmente para resolução de exercícios de adição (f = 10 e P = 26,3%) e apenas 1 vez para resolução de exercício de subtração. A contagem com os dedos foi utilizada 2 vezes em exercício de adição (P = 6,7%) e 2 vezes em exercício de subtração, nas aulas 1, 3 e 5. A contagem com objetos foi por meio dos materiais dos próprios alunos (f=2/ P = 3,3%) e apareceu apenas na primeira aula, em 2 problemas, um de "*subtração até 5*" e outro de "*subtração até 10*". Ainda, apenas 1 questão contou com contagem com figuras, na primeira aula, apresentadas no enunciado do próprio exercício (ex. gato) em um "*problema de adição até 10*".

Por fim, nos 11 exercícios de "*desafio do valor posicional com número de três algarismos*", apresentados na aula 7 (como "*quantas Centenas têm o número 436?*"), o professor não utilizou nenhum procedimento específico, escreveu a resposta no quadro descrevendo oralmente a posição de cada um. Os alunos copiavam as respostas por meio da consulta ao quadro.

**Respostas dos alunos**. A análise da resposta dos alunos foi descrita de duas formas: (a) resposta escrita (cópia no caderno) que era solicitada após a resolução da questão pelo professor, utilizando procedimentos de auxílio; e (b) resposta oral que consistia em dar uma resposta em voz alta a uma pergunta feita pelo professor, geralmente antes da apresentação dos procedimentos que auxiliassem na resolução. Por exemplo, o professor escreveu no quadro *"2 + 4 = ___"*, se direcionou aos alunos e perguntou em voz alta "*Quanto é dois mais quatro?*", ao passo em que alguns alunos responderam em voz alta "*seis*". A primeira foi por meio do registro de todas as respostas de cópia apresentada pelos alunos, igual ao modelo dado pelo professor na lousa, com relação aos 79 exercícios trabalhados em sala de aula. A segunda foi por meio da observação direta dos alunos, quando eram solicitados pelo professor, a responderem suas perguntas sobre os exercícios. Desses exercícios trabalhados, em 52 os alunos foram solicitados a apresentarem resposta escrita (copiar no caderno ou tarefa fotocopiada), e em 59 foram solicitados a responder oralmente (falar em voz alta a resposta), logo após a apresentação da tarefa e antes da explicação do procedimento dados pelo professor.

Com relação às respostas escritas, em média 48,4% dos alunos (DP = 31,7) escreveram igual ao modelo dado pelo professor, e com relação às respostas orais, uma média de 5,6% dos alunos (DP = 7,2) responderam oralmente. Observa-se na Figura 12, a média da porcentagem de alunos que apresentaram resposta escrita e resposta oral, por aula (dado o número de questões).

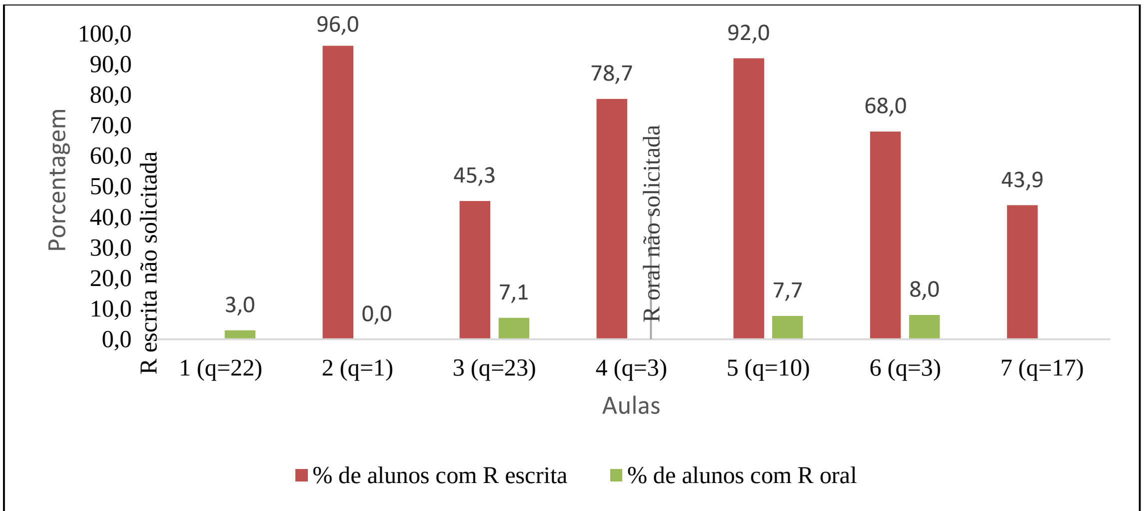



*Figura 12. Média da porcentagem de alunos que apresentaram resposta escrita e oral, por aula e número de questões (q) totais trabalhadas em sala.*

Durante a aula 1, na qual foi trabalhada com maior frequência questões com operações contendo unidades, o professor não solicitou que os alunos copiassem os exercícios do quadro, apenas atentassem para a explicação da mesma e respondessem oralmente quando solicitados.  Durante a aula 4 foi realizada a avaliação bimestral, na qual o professor explicou no quadro a solução de três questões e solicitou apenas que os alunos atentassem para a explicação e copiassem a resposta. Durante a aula 5, apenas em quatro questões foi solicitado que os alunos copiassem as respostas. Durante a aula 7 os alunos também foram solicitados a escreverem suas respostas apenas no caderno.

As aulas 3 e 7, nas quais foram trabalhadas um maior número de questões (23 e 17 respectivamente), foram as que apresentaram uma porcentagem menor de alunos que copiaram a tarefa. As aulas 2, 4 e 6, nas quais foram trabalhadas entre 1 e 3 questões, foram as que apresentaram o maior percentual de alunos, entre 68% a 96% que copiaram as respostas do quadro.

Relacionando as respostas com os assuntos, de acordo com a Tabela 2, do total de 38 questões de adição aplicadas, em 26 foram solicitadas respostas escritas e em 35 respostas orais. A média da porcentagem de alunos que escreveram as respostas, nas operações de adição, foi de 53,5% (DP= 37.5) e a média de respostas orais foi de 5,51% dos alunos (DP= 7.4). Do total de 27 questões de subtração aplicadas, em 10 delas foi solicitado resposta escrita dos alunos e em 23 respostas orais. A média da porcentagem de alunos que escreveram as respostas, em exercícios de subtração, foi de 68% (DP= 17.5) e a média de respostas orais foi de 5,3% dos alunos (DP= 7.1). No restante dos exercícios, total de 14, relacionados ao "*desafio do valor posicional com número de três algarismos*", foram solicitadas respostas escritas dos alunos, o que apresentou uma média de 38,2% (DP= 14.1) dos alunos que escreveram. As respostas orais foram solicitadas em 2 desses exercícios, apresentando uma média de 6,8% de alunos (DP= 3,25) respondendo.

*Tabela 2. Média da porcentagem dos alunos que apresentaram resposta escrita e resposta oral por tipos de exercícios e os auxílios apresentados.*

| Assuntos | Tipos de Auxílios | Resposta escrita | | Resposta oral | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Média da % de alunos | Nº de questões (79) | Média da % de alunos | Nº de questões (79) |
| Adição até 20 | Contagem (bolas e Traços) | 90,9 | 1 | 1,8 | 5 |
| Adição até 100 | Contagem (bolas, material dourado e traços), QVL, “elevador” | 83,2 | 2 | 1,1 | 4 |
| Soma de unidade ou dezena (sem reagrupamento) | QVL | 81,8 | 1 | 4,5 | 1 |
| Subtração de dezena e centena (sem reagrupamento) | Contagem (bolas e material dourado), QVL | 70,5 | 4 | 1,6 | 5 |
| Problema e operação de Subtração até 100 | QVL | 68,0 | 1 | 4,5 | 1 |
| Subtração de dezena e centena (com reagrupamento) | Contagem (bolas), QVL, “Tomar emprestado” | 68,0 | 2 | 8,0 | 2 |
| Problema de soma de números de três algarismos (sem reagrupamento) | Contagem (bolas e material dourado), QVL | 67,7 | 4 | 0,0 | 1 |
| Soma de dezena e centena (com reagrupamento) | Contagem (bolas, dedos, não usa, traços e vocal), QVL, “elevador” | 43,4 | 18 | 7,3 | 18 |
| Desafio do valor posicional com número de três algarismos | Contagem (material dourado), QVL | 38,2 | 14 | 6,8 | 2 |
| Adição até 5 | Contagem (bolas) | Não solicitada | Não solicitada | 8,7 | 1 |
| Problemas de adição até 10 | Contagem (Figura) | Não solicitada | Não solicitada | 17,4 | 1 |
| Soma números até 10 | Contagem (dedos e traços) | Não solicitada | Não solicitada | 4,3 | 4 |
| Subtração até 20 | Contagem(Bolas) | Não solicitada | Não solicitada | 0,0 | 4 |
| Subtração até 5 | Contagem (Objetos) | Não solicitada | Não solicitada | 13,0 | 1 |
| Subtração de números até 10 | Contagem (bolas, dedos, material dourado, objetos e traços) | Não solicitada | Não solicitada | 8,2 | 10 |

Com relação aos tipos de auxílio, dos sete tipos de exercícios nos quais foram utilizados apenas a contagem como auxílio, com exceção do exercício *"adição até 20",* os alunos não foram solicitados a escrever as questões. Em contrapartida, foram solicitados a responder oralmente, totalizando uma média de 7,2% de alunos respondendo tais questões. Por ser uma amostra de poucos alunos, pôde-se observar que alguns contavam em voz alta e em seguida apresentavam a resposta final, enquanto outros apenas falavam a resposta final. Nos quatro exercícios em que eram utilizados QVL, com exceção do exercício *"Some unidade ou dezena (sem reagrupamento)"* (nos quais também era utilizada a contagem para se chegar à resposta final), uma média de 61% dos alunos apresentaram resposta escrita e uma média de 4,1% dos alunos responderam oralmente. Nos três tipos de exercício, em que além desses auxílios, eram apresentados os procedimentos de "*tomar emprestado*" ou do "*elevador*", a média de alunos que apresentaram resposta escrita foi de 64,8% e de resposta oral de 5,5% dos alunos.

Com relação à consequência apresentada pelo professor, estas foram registradas logo após a resposta escrita dos alunos e/ou a resposta oral, durante a resolução das tarefas. Das 59 questões, nas quais a resposta oral foi solicitada, as consequências apresentadas foram a conferência da questão (ex., "*vamos conferir para ver se está certa!*"), geralmente utilizando um auxílio para respondê-la. Foram apresentadas também algumas consequências sociais com relação ao desempenho dos alunos: em aproximadamente dez questões observou-se elogios do tipo "*certo*", "*muito bem*" e "*certo, fale para os seus colegas como você chegou nessa resposta*" e em treze questões correções do tipo "*vocês conferiram?*", "*vocês estão certos da sua resposta*?", "*não vale só tentar adivinhar a resposta, tem que conferir*". Com relação à resposta escrita, na aula 2 o professor carimbou o caderno de 24 dos 25 alunos presentes (carimbo da cor vermelha, escrito "*VISTO*", com a data e nome do professor), e na aula 5 apenas um caderno foi carimbado. Nas aulas 3, 6 e 7, o professor informou que a pesquisadora passaria tirando fotos das tarefas, para o professor conferir quem fez.

Foram registradas também, de forma não sistemática (sem registro de frequência ou tempo), algumas consequências relacionadas principalmente ao comportamento disruptivo (conversas paralelas, brigas) dos alunos em sala. Em todas as aulas muitos alunos apresentavam algum comportamento disruptivo. As consequências variavam, como mostra a Tabela 3, de acordo com o comportamento, mas não eram consequenciados de forma consistente.

*Tabela 3. Relação entre comportamentos apresentados pelos alunos e algumas consequências dadas pelo professor*

| **Comportamento dos alunos** | **Consequência dada pelo professor** |
|---|---|
| Conversas paralelas | Trocar aluno de lugar<br>Cantar música "*fecha a boquinha e guarde a chavinha*"<br>Pedir para que os alunos prestem atenção |
| Implicar com colega | Conversar com os alunos sobre seu comportamento |
| Discussões com ofensas (verbais e físicas) | Chamar o aluno para um conversa fora da sala |
| Levantar da carteira repetidas vezes | Pedir para sentar em tom firme |
| Brincar com jogos, desenhos, brinquedos | Explicar que dará tempo ao final da aula para brincadeiras<br>Pedir para parar e guardar os objetos<br>Recolher o objeto |

Em resumo as situações de ensino observadas, envolviam principalmente o cálculo de operações numéricas, com baixa frequência de situações de problemas escritos. O foco foi na resolutividade do cálculo, por meio de estratégias que envolviam cálculo com unidade, dezena e centena. Os procedimentos foram ensinados de forma expositiva, por meio da apresentação e resolução de questões escritas no quadro. Tais questões não apresentaram uma ordem ao longo das aulas, por exemplo, em termos de número e tipos de questões. Geralmente todos os procedimentos de cálculo envolviam prática para a contagem com unidades, o que favoreceu o uso de materiais de apoio (material dourado, contagem com dedos). As respostas requeridas aos alunos era por meio de cópia do exercício, após resolução em sala, ou de respostas vocais de contagem.

## Análise das Tarefas de Verificação de Aprendizagem

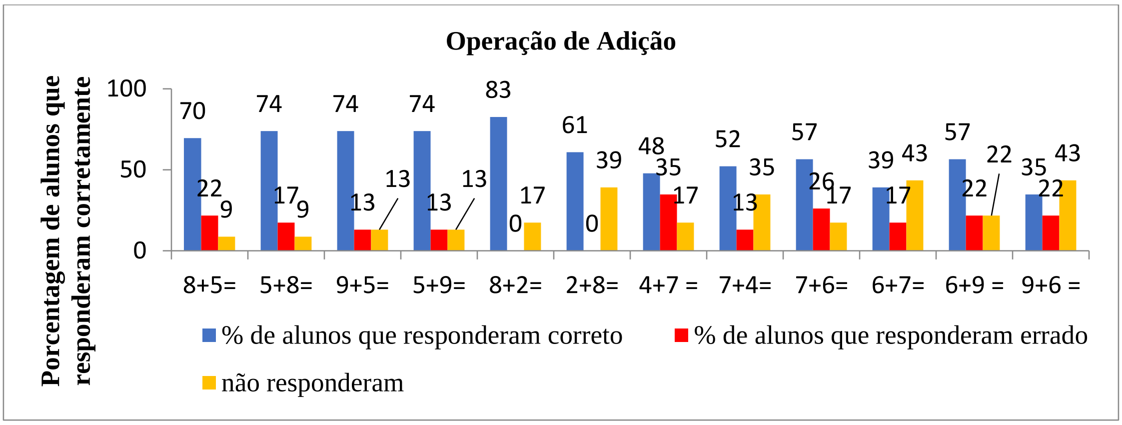
Foi realizada uma análise das tarefas de classe respondidas pelos alunos, de forma independente, ou com mínima interferência do professor, com o objetivo de avaliar o repertório dos alunos. Estas avaliações ocorreram nas aulas 1 e 4, em 12 questões de classe e 7 questões da prova bimestral respectivamente, nas quais os alunos eram solicitados a responder as questões, após a explicação do procedimento de ensino fornecido pelo professor, que serviriam de modelo para responderem de forma independente.

**Resultados da Aula 1.** O professor iniciou a aula com exercício escrito na lousa, intitulado "*Noções de adição e subtração*", contento 12 questões modelo, com operações de adição e subtração simples (resultados apresentados na Tabela 1). Para a resolução destes o professor utilizou o auxílio de contagem (Tabela 5). Após a resolução de todas as questões, os alunos foram solicitados a resolver uma tarefa de classe de 12 questões, totalizando 30 itens. O tempo disponibilizado para a resolução das questões foi de 55 minutos. Os itens do exercício englobavam 12 operações de adição simples, 12 operações de subtração simples (apenas com unidades), e 6 problemas (2 de adição e 4 de subtração) em Quadro de Valor e Lugar (QVL) como mostra a Tabela 4 (ver Anexo F).

*Tabela 4. Descrição das questões do exercício de classe realizados na aula 1.*

| **Operação de adição até 20** | **Operação de subtração até 20** | **Problemas de adição e subtração até 100, em QVL** |
|---|---|---|
| 8 + 5= | 13 - 5= | 32<br>+26 |
| 5 + 8= | 13 - 8= | |
| 9 + 5= | 14 - 5= | 24<br>+5 |
| 5 + 9= | 14 - 9= | |
| 8 + 2= | 10 -2 = | 68<br>-30 |
| 2 + 8= | 10 - 8 = | |
| 4 + 7= | 11 - 4 = | 37<br>-23 |
| 7 + 4= | 11 - 7 = | |
| 7 + 6= | 13 - 6= | 45<br>-33 |
| 6 + 7= | 13 - 7= | |
| 6 + 9= | 15 - 6= | 55<br>-34 |
| 9 + 6 | 15 - 9= | |

No que diz respeito ao desempenho dos alunos, na resolução dos primeiros 24 itens com operações de adição e subtração até 20, em média 46,3% (DP = 24.1) dos alunos responderam corretamente às operações, 10,8% (DP = 6.7) dos alunos erraram e 34,5% dos alunos (DP = 25,3) deixaram a resposta em branco (não responderam). Pode-se observar pela Figura 13 que das 24 questões de operações simples, a porcentagem de alunos que responderam corretamente, foi maior nas operações de adição.



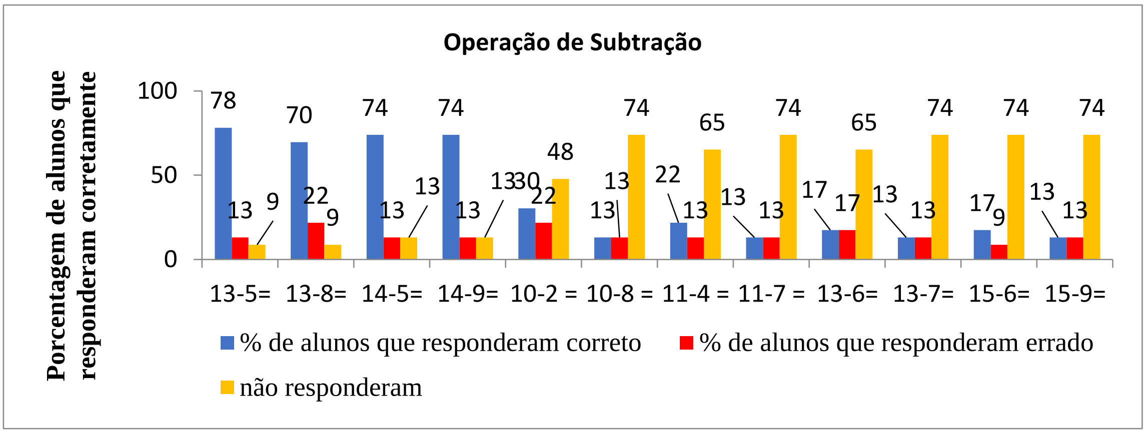




*Figura 13. Porcentagem de alunos que responderam corretamente e erradamente, ou deixaram em branco as operações de adição e subtração.*

Com relação ao desempenho dos alunos, observou-se que nas operações de adição 51,1% dos alunos (DP = 23.9) acertaram as questões, 16,5% dos alunos (DP = 6.8) erraram e 32,4% (DP = 25.5) deixaram em branco. Nas operações de subtração uma média de 46,6% dos alunos (DP = 25.2) acertaram as questões, 15,5% dos alunos (DP = 6.6) erraram e 38,4% (DP = 26,6%) deixaram em branco. Como mostra a Figura 14, dos 6 problemas (últimas questões) com operações de adição e subtração até 100 em QVL, em média 5,8% (DP = 4.5) dos alunos responderam corretamente os problemas, 9,4% (DP = 13.3) dos alunos erraram e 84,8% dos alunos (DP = 15.2) deixaram a resposta em branco.

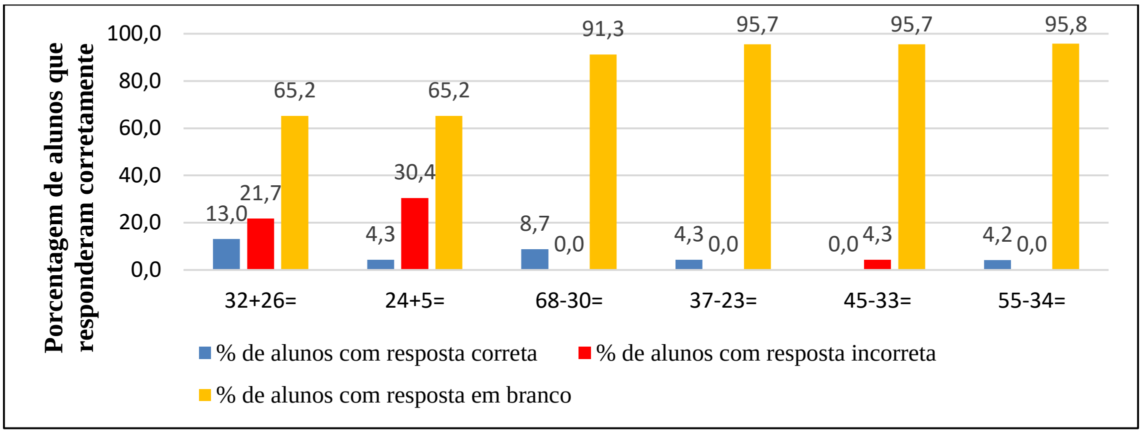



*Figura 14. Porcentagem de alunos que apresentaram resposta correta e incorreta ou em branco, por problema de adição e subtração.*

Em relação ao número de alunos e suas respectivas porcentagens de respostas corretas, apresentadas na Figura 15, nas operações de adição e subtração até 20, do total de 23 crianças, um grupo de 10 crianças acertou acima de 60% das questões, outro grupo de 6 crianças acertou entre 30% e 60% e 7 crianças acertaram menos de 30% das operações. Com relação aos problemas de adição e subtração até 100, apenas 8 dos 23 alunos começaram a respondê-lo e a porcentagem de acerto foi menor que 30%.

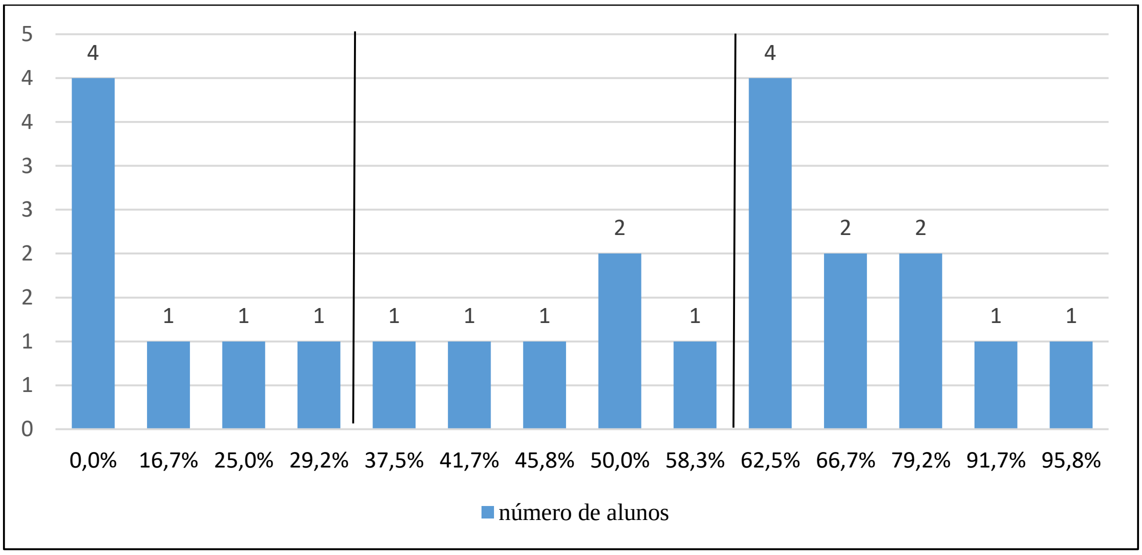



*Figura 15. Número de alunos por porcentagem de respostas corretas nas tarefas da aula 1.*

Os auxílios utilizados pelos alunos, para a resolução das operações de soma e subtração, foi principalmente o de contagem com dedos e contagem por meio de bolas e traços escritos, como mostra a Tabela 5.

*Tabela 5. Número de alunos que utilizaram o auxílio de contagem nas tarefas da aula 1.*

| Tipo de contagem | Número de alunos (n = 23) | Porcentagem |
|---|---|---|
| **Dedos** | 7 | 30,4 |
| **Traços e dedos** | 4 | 17,4 |
| **Bolas e dedos** | 4 | 17,4 |
| **Não identificado** | 4 | 17,4 |
| **Bolas** | 2 | 8,7 |
| **Traços** | 2 | 8,7 |

Para a análise da contagem com os dedos, a pesquisadora observou cada criança pelo menos duas vezes, em um período aproximado de 30 segundos, registrando se nesse tempo a criança utilizou os dedos para contar.  Observou-se que das 23 crianças que realizaram a tarefa, 15 fizeram contagem com dedos pelo menos uma vez.

A contagem com traços e bolas escritos foram levantados após a realização da tarefa, na qual a pesquisadora observou quais tarefas continham tais registros (o professor deu a instrução inicial para que os alunos não apagassem seus rascunhos). Em 6 tarefas foram encontrados pelo menos um desenho de bolas e em outros 6 foram encontrados traços escritos. Após, observou-se que 4 crianças fizeram uso de contagem com traços e dedos, enquanto 4 fizeram uso de contagem com bolas e dedos. Em 4 crianças não foi identificado o uso de contagem. Importante destacar que em alguns momentos a visibilidade das crianças não foi adequada para a observação, por exemplo, por se curvarem ou ao levantarem.

Não foi possível registrar a relação da contagem com dedos com os tipos de questões, pois a pesquisadora manteve-se em um ponto fixo da sala para não atrapalhar os alunos. Da mesma forma, na avaliação dos registros escritos, o registro encontrado das bolas e traços eram visualizados em locais onde havia espaço em branco, e não próximos às operações, por esse motivo não foi descrita nenhuma relação.

A Figura 16 apresenta uma relação entre os tipos de contagem (porcentagem de alunos que utilizaram) e a porcentagem de respostas corretas dos alunos, divididos por intervalos.

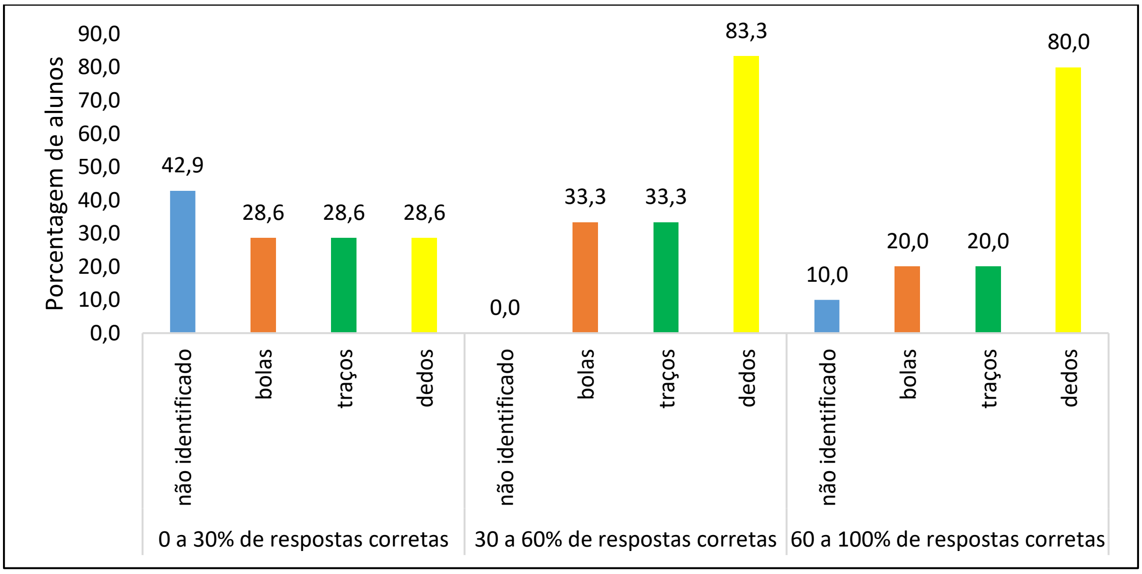


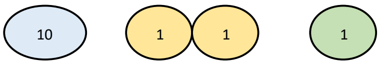

*Figura 16. Porcentagem de alunos que utilizaram auxílio de contagem por intervalo de porcentagem de respostas corretas.*

Alguns alunos foram observados utilizando mais de um auxílio, sendo que no primeiro grupo, consistindo de 7 alunos com menos de 30% de respostas corretas, na maior parte das crianças (42%) não foi identificado uso de auxílio e os demais auxílios tiveram uso igual (28,6%). No segundo grupo, consistindo de 6 alunos com respostas corretas entre 30 e 60%, o auxílio mais observado foi a contagem com dedos (83%). E no terceiro grupo, com 10 crianças que obtiveram mais de 60% de respostas corretas, a maioria também realizou contagem com dedos (80%). A consequência dada pelo professor, após a realização da tarefa pelos alunos, foi a correção das questões no quadro, para que os alunos fizessem uma auto conferência das respostas.

**Resultados da Aula 4.** Durante a aula, foi aplicada a avaliação bimestral da escola (ver Anexo G). Importante salientar que essa foi a primeira avaliação escrita realizada pelos alunos do 2º ano (EF), pois a resolução do Ministério da Educação normatiza que apenas a partir deste ano os alunos passem a realizar avaliações de verificação valendo nota. O número de alunos presentes foi no total de 25 (15 meninas e 10 meninos). A prova iniciou às 9 horas e 6 minutos, após uma revisão do professor no qual explicou e respondeu no quadro as questões 1, 4 e 7, envolvendo "*desafio do valor posicional com número de três algarismos*" e "*adição e subtração até 100*", para que os alunos usassem como modelo. Os alunos levaram aproximadamente 79 minutos para responderem o restante da prova, com um intervalo de 30 minutos para o lanche. O último aluno entregou a prova às 10 horas e 55 minutos.

A avaliação continha sete questões no total, com 3 questões envolvendo o assunto "*desafio do valor posicional com número de três algarismos*" (DVP dezena/centena/unidade) e 4 questões envolvendo "*adição e subtração até 100*". Como mostra a Tabela 6, as questões foram divididas em: (1ª) 1 item relacionados à correspondência entre quantidade de cubos (figura do material dourado) e valor posicional em Milhar, Centena, Dezena e Unidade (MCDU); (2ª) 3 itens relacionados à correspondência entre quantidade de cubos (figura do material dourado) e valor posicional em CDU; (3ª) 6 itens relacionados à quantidade e ao valor posicional em CDU; e (4ª a 7ª ) 4 problemas de adição e subtração, com dezenas, em QVL.

*Tabela 6. Quadro ilustrativo das questões apresentadas na prova bimestral.*

| Questão | Exemplo |
|---|---|
| **1ª** |  Milhar___Centena___ Dezena____ Unidade___ |
| **2ª** |  Centena___ Dezena____ Unidade___ |
| **3ª** |  Centena___ Dezena____ Unidade___ |
| **4ª** | "*Lucas tem 32 lápis de cor e Júlia tem 26. Quantos lápis Lucas e Júlia tem ao todo?"* *32*<br>*+26* |
| **5ª** | *Vilma tinha 37 bolinhas e deu 23 para Bia. Quantas bolinhas restaram?*<br>*37*<br>*-23* |
| **6ª** | *Laura comprou 15 laranjas e 27 maçãs. Quantas maçãs a mais do que laranjas ela comprou?* |
| **7ª** | *Uma costureira comprou 78 botões. Ela usou 36. Quantos botões ainda restam?* |

Dos resultados apresentados pelos alunos na Figura 17, nos sete itens que responderam sem ajuda do professor, em média 58,2% dos alunos responderam corretamente (DP = 25.7) e 41,8% responderam incorretamente as questões. Nenhuma questão foi deixada sem resposta.

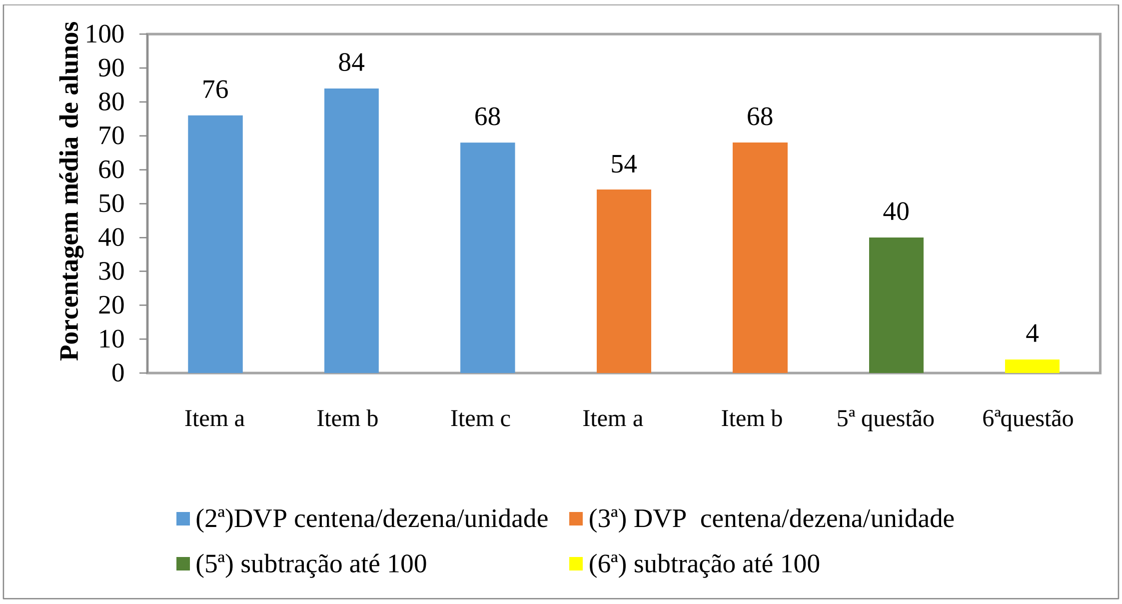



*Figura 17. Porcentagem média de alunos que responderam corretamente os itens a, b e c da 2ª questão, itens a e b da 3ª questão, referentes ao valor posicional com número de três algarismos (centena/dezena e Unidade); e 5ª e 6ª questões referentes a subtração até 100, na avaliação bimestral.*

Em média 76% dos alunos acertaram os itens das questão 2 relacionadas ao assunto "*desafio do valor posicional com número de três algarismos*", 61% em média acertaram os itens da questão 3, ao qual não havia modelo feito pelo professor em sala. Em média, 40% das crianças acertaram a questão 5 e 4% dos alunos a acertaram a questão 6, que trabalharam o assunto de "*subtração até 100*" por meio de problemas. A questão 6 apresentava um problema escrito no qual não havia sido previamente montado em QVL, como a questão 5.

Como podemos ver na Figura 18, um total de 13 alunos acertaram mais de 60% das questões, 9 alunos acertaram entre 30 e 60% das questões e 3 alunos acertaram menos de 30.

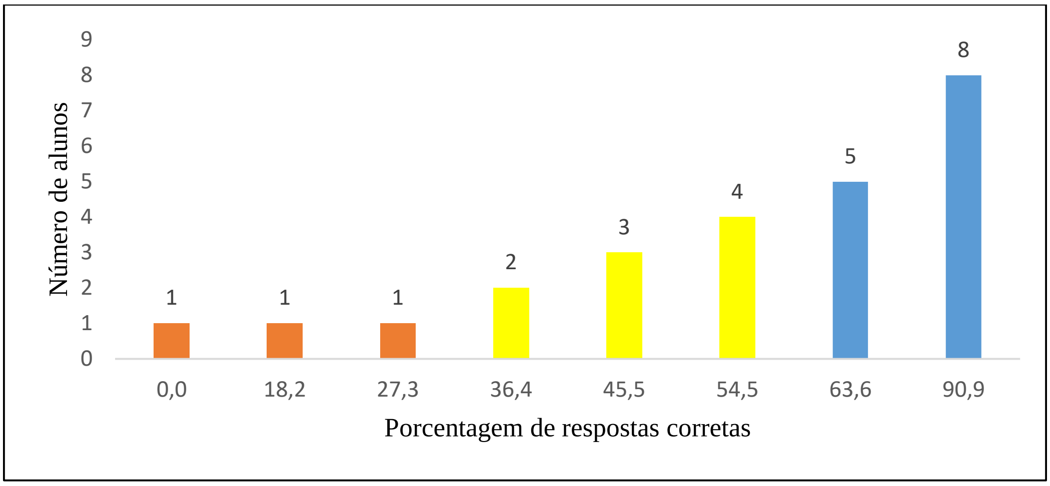



*Figura 18. Número de alunos por porcentagem de resposta correta nos itens da prova bimestral.*

Como dito anteriormente, o professor resolveu no quadro 3 questões da prova que serviram de modelo para a resolução das questões seguintes. Para as questões sobre "*desafio do valor posicional com número de três algarismos*", além do modelo das questões, foi disponibilizado um quadro (colado na parede) com valores referentes á Centena Dezena e Unidade do material dourado. Não foi possível coletar quais alunos consultaram a lousa.

Para as questões envolvendo "*adição e subtração até 100", *o enunciado da própria questão continha figuras impressas (bolas) para contagem. O professor entregou uma folha em branco, para que os alunos utilizassem como rascunho. A Figura 19 mostra a porcentagem de alunos que usaram, pelo menos uma vez, algum tipo de auxílio para resolver as questões, de acordo com o percentual de respostas corretas. Apenas 5 alunos utilizaram a folha como rascunho (desenho de bolas) e 5 deles também escreveram na prova para realizar contagem com bolas. Observou-se cada criança por pelo menos 20 segundos na segunda parte da aula, momento em que passaram a responder as operações. 7 crianças fizeram contagem com dedos.

Registrou-se também que 9 crianças levantaram da carteira para consultar o professor e outras 4 crianças levantaram para consultar outros colegas.

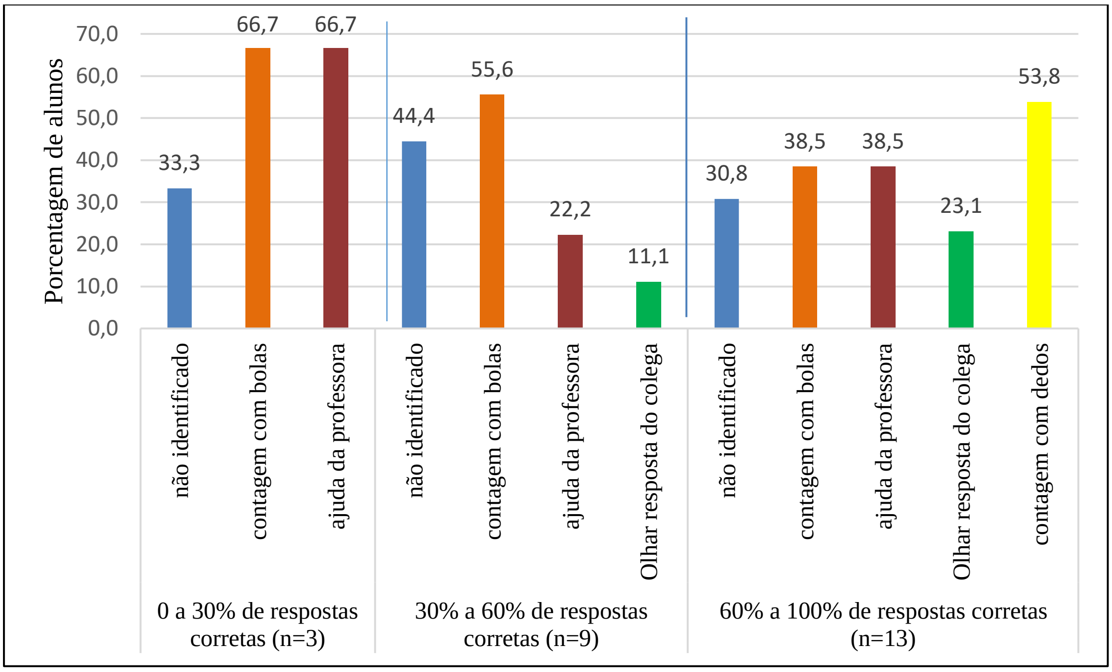



*Figura 19. Porcentagem de alunos por tipo de auxílio utilizado, dividido por porcentagens de resposta correta.*

O auxílio do professor, segundo relato, consistia em ler as questões e indicar o que teria que ser feito, além de destacar as questões que já havia feito em sala, instruindo as crianças a utilizarem esses modelos. A consulta a outros colegas consistia em olhar para o exercício deste e escrever em seguida. Após a conclusão da avaliação, o professor recebeu todas as provas e falou tanto sobre a importância de prestarem mais atenção às aulas, como de responderem as tarefas de casa, para obterem sucesso na prova.

Em termos de critério de apresentação e quantidade de tarefas, estas também não seguem uma ordem quando se trata dos tipos de exercício aplicados em sala. São trabalhados com mais frequência exercícios que envolvem operações de dezenas e centenas com adição e poucos exercícios envolvendo unidades. Os problemas apresentados nas avaliações, não foram trabalhados nas situações de ensino, principalmente em termos de interpretação.

**Relação entre Dados Socioeconômicos e Desempenho dos Alunos nas Verificações de Aprendizagem**

Algumas informações socioeconômicas, relacionadas à família foram coletadas com o objetivo de complementar os dados sobre o desempenho dos alunos, visto que questionários contextuais fazem parte das avalições externas, como a Prova Brasil. A análise dos dados coletados, junto aos responsáveis dos alunos e consulta a prontuários escolares, buscou relacionar os mesmos com o desempenho dos alunos. As medidas de desempenho consideradas foram a média de porcentagem de acertos nas aulas 1 e 4, na qual os estudantes realizaram tarefas de forma independente ou com ajuda mínima do professor. Logo, foram considerados para esse cálculo o número de respostas corretas na realização das 12 operações de adição simples, 12 operações de subtração simples (apenas com unidades) e 6 problemas (2 de adição e 4 de subtração), em Quadro de Valor e Lugar (QVL), totalizando 30 questões, durante a aula 1. E na avalição da aula 4 foram levados em consideração os 5 itens envolvendo o assunto "*desafio do valor posicional com número de três algarismos*" e 2 problemas envolvendo "*subtração até 100*".

No total 26 alunos foram avaliados durante essas duas aulas, sendo 23 da aula 1 e 25 da aula 4. Para estes, calculou-se a média de acertos, de cada aluno. Em seguida, separou-se tais alunos em: Grupo 1 com alunos que obtiveram uma média de acerto menor que 30%; Grupo 2 com alunos que obtiveram uma média de acerto entre 30 e 60%; e Grupo 3 com alunos com média de acerto maior que 60%. Os resultados foram agrupados na Figura 20.

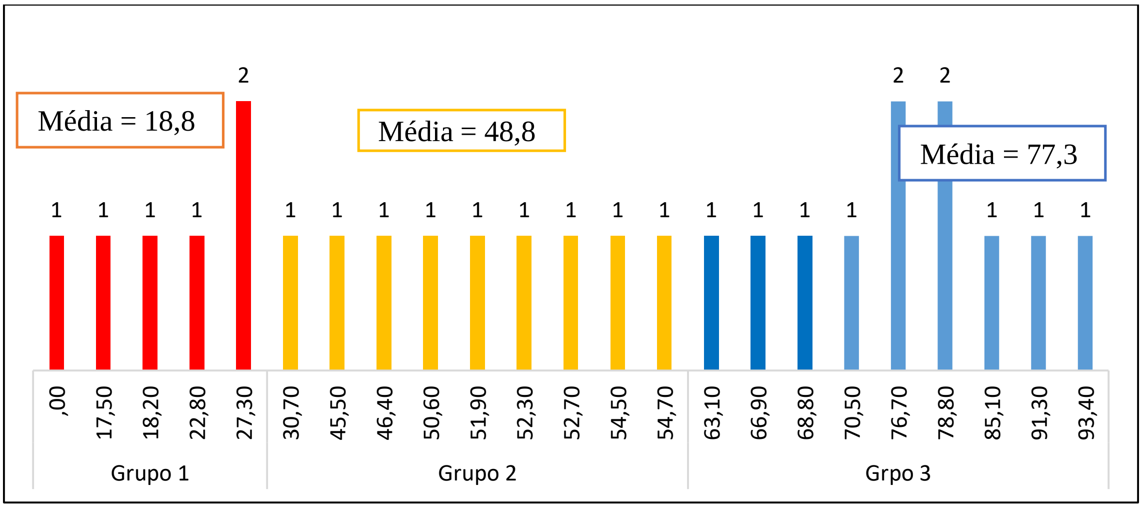



*Figura 20. Frequência de alunos por grupos divididos por média de respostas corretas apresentadas nas Aulas 1 e 4.*

A partir dos dados da Tabela 7 de estatística descritiva, é possível observar algumas diferenças entre os grupos.

*Tabela 7. Porcentagens relativas a varáveis socioeconômicas dividias por grupo.*

| **Variáveis socioeconômicas** | | **Grupo 1 (n=6)** | **Grupo 2 (n=7)** | **Grupo 3 (n=11)** |
|---|---|---|---|---|
| **Responsável familiar** | Mãe | 50% | 22,2% | 72% |
| | Mãe e pai | 33,3% | 44,4% | 27% |
| | Avós | 16,7% | 11,1% | - |
| **Escolaridade dos responsáveis** | Ensino Fundamental incompleto | 66,7 | 44,4 | 27,3 |
| | Ensino Fundamental completo | 16,7 | - | 18,2 |
| | Ensino Médio incompleto | - | 11,1 | 27,3 |
| | Ensino Médio Completo | 16,7 | 22,2 | 27,3 |
| **Renda *per capita* (R$)** | Média | 99,2 | 98,7 | 147,2 |
| **Ocupação** | Do lar | 16,7% | 22,2% | 27,3% |
| | Autônomo | 50% | 44,4% | 54,5% |
| | Empregado | 33,3% | 11,1% | 18,2% |
| **Número de componentes na família** | Média | 5,8 | 4,1 | 4 |
| **Frequência de realização das tarefas extraclasse** | Ás vezes | 83,3% | 33,3% | 36,4% |
| | Sempre | 16,7% | 44,4% | 63,6% |
| **Ajuda em tarefas extraclasse** | Ás vezes | 83,3% | 55,6% | 63,6% |
| | Sempre | 16,7% | 22,2% | 36,4% |

Os Grupos 1 e 3 tem como maioria a mãe como responsável familiar, sendo essa porcentagem maior no grupo 3 (72%). Com relação ao número de componentes na família, o Grupo 1 possui o maior número (5,8). Já o Grupo 2 e 3 possuem praticamente a mesma média. Quanto à escolaridade, os responsáveis do Grupo 1 (83,4%) e do Grupo 2 (44,4%) em sua maioria possuem até o Ensino Fundamental enquanto o Grupo 3 em sua maioria possui até o Ensino Médio (54,6%). Com relação à ocupação, a maior porcentagem dos responsáveis, dos três grupos, declaram-se autônomos.

Algumas informações sobre a rotina escolar extraclasse também foram coletadas após a finalização do Estudo1. Os responsáveis do Grupo 1 em sua maioria (83%) declararam que o filho "*às vezes*" fazia a tarefa e o mesmo percentual afirmou que "*às vezes*" o filho utilizava auxílio para respondê-la. No Grupo 2, os responsáveis responderam em sua maioria que os filhos "*sempre*" respondiam a tarefa (44,4%), mas a maioria dos cuidadores (55,6%) declarou que "*às vezes*" ajudava na tarefa. Os responsáveis do Grupo 3 em sua maioria (63,6%) declararam que o filho "*sempre*" fazia a tarefa; por outro lado, a maioria respondeu que "*às vezes*" o filho possuía auxílio. Dentre as respostas complementares sobre o motivo das crianças "às vezes" não realizarem a tarefa extraclasse, os responsáveis relataram, em sua maioria, que quando não era realizada era por "*preguiça*" da criança. Com relação ao motivo da criança "*às vezes*" ter apoio, a maioria dos responsáveis afirmou que a criança ou não necessitava de sua ajuda, pois saberia responder sozinho, ou o responsável não disponibilizava tempo para ajudá-lo.

De forma resumida, por meio de uma inspeção visual, o Grupo 3 pertence a famílias com maior escolaridade, maior renda *per capita*, menor número de pessoas na família, maior número de autônomos e de crianças que realizam com maior frequência as tarefas extraclasse, ao comparar-se aos Grupos 1 e 2.

## Discussão Estudo 1

A partir da análise contingencial dos dados extraídos da observação direta em aulas de matemática, de uma turma do segundo ano do Ensino Fundamental, o presente estudo buscou avaliar o processo de ensino de operações matemáticas, de adição e subtração, com foco nos procedimentos de auxílio utilizados na resolução destas operações, à luz dos conceitos do comportamento precorrente (Skinner, 1969/1982 & Baum, 1999) e comportamento precorrente auxiliar (Oliveira-Castro et al., 1999).

### Comportamentos com Função Precorrente nos Procedimentos de Ensino

Os principais procedimentos utilizados em sala para a resolução de operações e problemas matemáticos em situação de ensino incluem comportamentos que parecem ter a função de precorrente, pois produzem estímulos auxiliares, que têm função discriminativa para respostas intermediárias que não são exigidas pelas contingências. Nas tarefas de adição e subtração com unidades, apresentadas em forma de operação com conotação numérica (e.g., $a + b = c$), a ocorrência de contagem (e.g., dedos, bolas, figuras) gerou estímulos discriminativos (e.g., quantidades de objetos) para adição e subtração que parecem ter facilitado a ocorrência da resposta final correta. O uso desse tipo de contagem (e.g., dedos) nas operações com dezenas e centenas apresenta uma limitação, pelo alto valor numérico. No caso dessas operações as respostas de escrever os números no Quadro de Valor e Lugar e de contar com Material Dourado foram as mais utilizadas. No primeiro, a montagem do QVL, gerou estímulos discriminativos (e.g., operações com unidades) possibilitando o uso da contagem, que parecem ter facilitado a ocorrência da resposta final correta. Quando essa operação com unidade foi maior ou igual a dez (contas com reagrupamento), unido a montagem do QVL, as regras do "elevador" e tomar "emprestado", parecem ter facilitado também chegar à resposta final correta com sucesso. O uso do Material Dourado, para as contas com valores decimais, gerou estímulos discriminativos (e.g., unidades, dezenas e centenas) para adição e subtração que parecem ter facilitado a ocorrência da resposta final correta, sem necessitar do uso de outros auxílios. Nesse contexto, tais comportamentos parecem formar uma ordem hierárquica de apresentação, com aumento do número de casas decimais das operações aritméticas, que aumentam a probabilidade da resposta final correta.

**Comportamentos com Função Precorrente nas Situações de Avaliação**

A análise de comportamentos precorrentes nas situações de avaliação pôde ser ampliada, visto que foi possível relacionar a emissão de respostas de auxílio pelos alunos, nas tarefas, com porcentagem de respostas corretas. A relação entre os efeitos de uma contingência precorrente, em que a resposta (precorrente) aumentaria a probabilidade de reforço para outra resposta (corrente), foi explorada por Polson e Parsons (1994).

Na aula 1, após terem sido expostos a uma revisão sobre os procedimentos de contagem e valor posicional dos números, ao responderem as operações de adição e subtração até 20, o procedimento de contagem foi utilizado pela maior parte dos alunos (90%) que obtiveram porcentagem de acerto maior que 60%, ao passo que os alunos com menos de 30% de acerto apresentaram uma média de 57,1% de emissão de contagem. Esses dados sugerem, que para esse tipo de operações a resposta de contagem aumenta as chances de responder corretamente. O mesmo pareceu não ocorrer para a resolução de problemas de sentenças escritas, com operações de adição e subtração até 100. Os problemas eram apresentados com a operação montada em QVL, com suas respectivas quantidades representadas por bolas impressas (Tabela 1), e mesmo com a possibilidade do uso da contagem; Apenas 5,8% dos alunos responderam de forma correta, o que sugere que apenas o repertório de contagem não foi suficiente para aumentar as chances de responder de forma correta esses problemas.

Durante a aplicação da prova Bimestral, na aula 4, após os alunos terem sido expostos ao ensino de procedimentos de contagem, montagem de operação em QVL e regra do “elevador”, pôde-se avaliar as respostas de duas questões com problemas envolvendo operações de subtração até 100. Na primeira questão, na qual a operação do problema já estava montada em QVL, com suas respectivas quantidades representadas por bolas, em média 40% dos alunos responderam corretamente. Na segunda questão, na qual só havia o problema escrito, sem QVL da operação ou quantidades, apenas 4% dos alunos responderam corretamente. Tal resultado pode sugerir que o QVL aumentou a probabilidade de responder corretamente esta operação, ao passo que quando o QVL não foi apresentado, a probabilidade de respostas corretas diminuiu. Essas observações seguem algumas conclusões trazidas pelos experimentos de Parsons (1976) que afirma que antes dos comportamentos precorrentes serem ensinados e quando eram proibidos, as crianças não conseguiram produzir uma solução precisa do problema. Por outro lado, quando os comportamentos precorrentes foram estabelecidos e quando permitidos, resultou na solução do problema (comportamento corrente).

## A formação do Repertório Precorrente em Sala de Aula

Ao comparar-se o repertório dos alunos nas contingências da situação de ensino e nas contingência de avaliação, na resolução de operações e problemas aritméticos, algumas questões foram levantadas com relação às condições para a formação desse repertório em cada tipo de tarefa.

*Operações com unidades*. Ao apresentar no quadro essas operações, nas primeiras aulas, em algumas ocasiões o professor solicitava uma resposta oral dos alunos. Um pequeno número de alunos respondeu, uns acertaram sem uso da contagem (quando se tratava de valores pequenos), enquanto outros recorriam à contagem e por vezes acertavam ou erravam. Após essas respostas o professor apresentava a conferência da questão, com uso da contagem com bolas desenhadas no quadro, solicitando que os alunos contassem em voz alta enquanto apontava para as bolas.  Nas situações de avaliação, os alunos fizeram uso da contagem, mas estas diferiram da situação de ensino dada pelo professor, com relação aos tipos e suas proporções de uso. A contagem com dedos foi a mais utilizada pelos alunos, principalmente aqueles com porcentagem de acerto acima de 60 %, nas aulas 1 e 4. Na situação de ensino a contagem com bolas e com material dourado foi a mais utilizada pelo professor. Nesse caso os aprendizes pareciam estar sob influência de estímulos precorrentes diferentes, antes e depois, da contingência programada apresentada pelo professor.  Tais resultados sugerem a importância de programar sequência de tarefas de forma a otimizar o desempenho com arranjos de ocorrência de precorrentes, ao utilizar um determinado procedimento de ensino.  Outro ponto importante também a se considerar, seria a função precorrente que recurso utilizado tem no repertório de resolução apresentado pelo aluno, tendo em vista as conclusões dos estudos de Batista e Spinillo (2008), de que o tipo de recurso (material) utilizado na resolução pode influenciar o desempenho do aluno.

*Operações com dezenas e centenas.* Por mais que a montagem da operação em QVL tenha sido apresentada pelo professor, em todas as aulas envolvendo essas operações, a resposta requerida, aos alunos, nessa contingência (observar a resolução no quadro, e após, copiar a tarefa e sua resposta no caderno) parece não ter sido suficiente para instalar esse repertório. Nesse caso, a resposta requerida garantiu que alguns poucos alunos resolvessem questões previamente montadas em QVL, mas não montá-las.

Outro recurso trabalhado em sala foi o uso do material dourado, por meio da representação de figuras e manipulação direta. As figuras representativas do material dourado foram utilizados para formação do conceito de número decimal, nas tarefas de valor posicional. Ao expor questões fazendo essa correspondência, houve aumento do número de respostas corretas dos alunos acima de 60% (Figura, letra). A manipulação do material, para resolução de contas, envolvia principalmente a contagem com unidades. Nesse caso os alunos reconheciam as números decimais, por meio desses materiais, mas não realizaram contas com dezenas e centenas com esse material de apoio.

*Resolução de Problemas*. Algumas operações de dezena e centena foram apresentadas por meio de um problema escrito, em situação de ensino. O procedimento utilizado pelo professor, foi a leitura da sentença, a montagem da operação em QVL e a contagem. A resposta requerida aos alunos também foi a cópia no caderno, por mais que a maioria dos alunos tenha apresentado essa resposta (60%), em situação de avalição a grande maioria não conseguiu transformar a sentença escrita em operação. Ao que parece, para resolver os problemas, outros precorrentes também seriam necessários, como por exemplo, a interpretação e identificação de fatores da operação na sentença (e.g., Neef et al., 2003). Devido à importância que se dá aos problemas no ensino das operações matemáticas, como preconiza o PCN, parece importante compreender os precorrentes envolvidos e análise desses na formação dos repertórios de cada aluno, desde a resolução de uma operação simples à interpretação desta em uma sentença escrita. Isto é especialmente importante quando se considera que os resultados apresentados pelas avaliações oficiais (e.g., Prova Brasil) apontam como uma das maiores dificuldades dos alunos, a resolução de problemas aritméticos.

Dito isso, parece não ser trivial a passagem de um repertório de resolução operação com unidades, por exemplo, para a resolução destas por meio de problemas escritos. Inclusive, há uma certa discussão nos estudos de educação matemática (e.g., Kamii, Lewis, & Kirkland, 2001), quanto ao uso de procedimentos com materiais concretos (suportes de representação), sobre quais auxiliariam ou atrapalhariam a formação de um repertório de nível mais complexo. Talvez a discussão seja mais ampla, nesses casos. Nas condições estabelecidas para o ensino desses procedimentos com função precorrente, seria importante considerar a possibilidade de transferência de função dos estímulos da resposta precorrente para a resposta final (cf. Oliveira-Castro et al.,1999). A apresentação de tarefas variadas, expostas de forma não sistemática e com estímulos diversos, pode impossibilitar essa transferência. Por mais que as operações com unidades tenham sido apresentadas, em grande parte, nas primeiras aulas, posteriormente a de dezena e por último a de centena, a passagem de uma tarefa para outra não foi gradativa e nem sistemática (Figura 1 dos resultados). E com o aumento de respostas precorrentes necessárias para cada tipo de operação, os alunos podem ter passado de uma tarefa para outra, sem ter em seu repertório os precorrentes necessários para a resolução da tarefa.

Diversos estudos experimentais observaram que as dimensões discriminativa das tarefas teriam influência sobre o desempenho dos sujeitos, com relação ao tempo necessário de estudo para aprender a tarefa (e.g., Coelho & Oliveira-Castro, 2005; Flores, 2003; Oliveira-Castro et al., 1999). Nesse caso, seria importante programar o tempo disponibilizado para o treinamento de cada tarefa de acordo com suas características, como por exemplo, o tipo de operação, número de casas decimais, sentenças escritas, etc.

Outro ponto relevante está relacionado ao treinamento dessas respostas requeridas. No ensino de operações com unidades, as alunos realizavam a contagem em conjunto com o professor, e a resposta requerida nas avaliações foi a mesma. Nas operações e problemas, com dezenas e centenas, as respostas requeridas de atentar para o quadro e copiar, não foram as mesmas requeridas na situação de avaliação. Ao tratar sobre as variáveis envolvidas nesse processo, além da falta de programação no ensino para obtenção da resposta final desejada, Skinner (1972) também trata de outros problemas relacionados à educação formal, que foram observados em sala. Um deles foi o lapso temporal entre as respostas dos alunos e as contingências de reforço mediadas pelo professor, que inclusive podem afetar a resposta precorrente. As consequências apresentadas para as respostas na situação de ensino e em situações de avalição, além de atrasadas, muitas vezes não contingenciavam de forma adequada uma cadeia de respostas. Diversos exemplos desse tipo aconteceram em sala, como: alunos que copiaram a tarefa de outro colega e recebiam um carimbo de “VISTO”; alunos que respondiam corretamente (resposta oral) eram solicitados a conferirem as respostas novamente e só após algum tempo a resposta correta era apresentada; da mesma forma, alunos que respondiam a uma grande quantidade de tarefas, de classe ou extraclasse, diversas vezes não recebiam as respostas destas ou as consequências só eram apresentadas após algum tempo.

Dessa forma, houve pouca frequência de reforço com relação ao desempenho dos alunos. A maioria das respostas corretas dos alunos não foi consequenciada pelo professor, provavelmente por requerer um tempo maior, muitas vezes impedido pela grande quantidade de alunos, além das exigências de aplicação de conteúdos em tempos pré-estabelecidos. A baixa frequência de reforço pode gerar alguns efeitos colaterais, como perda de “interesse” na tarefa, que foi observada pela: baixa adesão dos alunos às tarefas de classe e extraclasse, apresentação de comportamentos dispersivos com alta frequência durante as aulas (levantar-se, engajar-se em conversas paralela, brincadeiras, etc.) e comportamentos opositores (brigar com colegas, desacatar ordens do professor). Skinner (1953/1998) cita que é altamente desejável que o professor reforce respostas corretas dos alunos, seja por meio de elogio, de observações que as ampliem ou complementem etc., assim como não há mal em corrigir eventuais falhas de raciocínio expresso verbalmente, desde que não se lance mão da punição.

A forma usual de avaliação da efetividade dos procedimentos de ensino em ambiente escolar, geralmente é focada nas respostas finais dos alunos, como notas. Skinner (1953), ao apresentar o comportamento precorrente como parte importante do processo de resolução de problemas, indica que esta pode ser uma forma de analisar os processos de ensino-aprendizagem em sala de aula. Esse nível de análise pretende focar não só nas respostas finais dos alunos, mas nas condições suficientes e/ou necessárias para a aprendizagem. E que estes podem ser observados empiricamente (e.g., Oliveira-Castro, 1999; Parsons, 1976; Polson & Parsons 1994).

## Regulamentação dos Procedimentos de Ensino em Contexto Escolar

Em vias oficiais os Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN] (1997), que tem por objetivo orientar as práticas pedagógicas do Ensino Fundamental, ao tratar dos procedimentos de ensino de operações com números naturais, de adição e subtração, trazem em seu texto:

> "A construção dos diferentes significados leva tempo e ocorre pela descoberta de diferentes procedimentos de solução. Assim, o estudo da adição e da subtração deve ser proposto ao longo dos dois ciclos, juntamente com o estudo dos números e com o desenvolvimento dos procedimentos de cálculo, em função das dificuldades lógicas, específicas a cada tipo de problema, e dos procedimentos de solução de que os alunos dispõem. (p.69)"

Os PCNs destacam que os procedimentos precisariam ser "descobertos" ao longo do processo de ensino, não só pelo professor, mas pelo aluno, o que pareceu transpor-se para a realidade em sala de aula, no sentido de que gera-se uma expectativa que esses procedimentos sejam internalizados e elaborados pelos alunos, sem atentar para o contexto do ensino.

Os PCNs sugerem ainda que as situações de ensino de adição e subtração, sejam tratadas sem qualquer hierarquização ao longo de todo o Ensino Fundamental, e que precisam ser aplicadas por meio de problemas com diversas configurações, e que levem em consideração a realidade do aluno. O que observou-se em sala foi que para que esses repertórios sejam ampliados, em termos de repertórios variados de resolução (configurações), há de se levar em consideração os precorrentes necessários para cada tipo de tarefa, e que muitas vezes existe uma certa hierarquia para se chegar à resposta correta.

Diversos estudos em análise do comportamento contribuíram para compreender a formação desses repertórios matemáticos considerados de nível superior; alguns deles são os relacionados a cadeias hierárquicas de ensino (e.g., Iñesta, 1980; Resnick, Wang & Kaplan, 1973; Silva, 1999; Teixeira, 2002). Nesses estudos o currículo foi formado por unidades, que foram treinadas em ordem hierárquica, considerando que a primeira unidade sugerida facilitaria o aprendizado da unidade seguinte, e assim sucessivamente, até chegar-se aos objetivos finais propostos. Analisar as tarefas em relação a cadeias de ensino é importante para o estudo da matemática, visto que os assuntos são encadeados e interdependentes, mas há dificuldade de encontrar um modelo hierárquico único, talvez pela quantidade de procedimentos empregados e habilidades a serem aprendidas em matemática. Nessa linha, estudar a função dos procedimentos, que teriam função precorrente, em uma determinada tarefa por exemplo, poderia contribuir para a formação de um currículo mais eficaz e menos intuitivo.

**Análise de Variáveis do Contexto Familiar**

Algumas variáveis ambientais relacionadas ao contexto familiar foram coletadas com objetivo de complementar os dados sobre o desempenho dos alunos. Há no Brasil e em outros países diversos estudos sobre os indicadores socioeconômicos (e.g., Soares & Collares, 2006; Alves et al., 2015) e práticas de tarefas extraclasse (e.g., Foran & Weber, 1939; Trautwein, Köller, Schmitz & Baumert, 2002) relacionando-os ao desempenho acadêmico dos alunos.

Com relação aos indicadores socioeconômicos, por não haver na literatura uma definição nem um consenso absoluto, segundo Alves e Soares (2009), sobre quais as dimensões devam ser consideradas nas pesquisas, o presente estudo coletou algumas variáveis, em entrevistas com os responsáveis, com objetivo de ter informações mais precisas e atuais dessas famílias. Ao comparar essas respostas, em termos de porcentagem, entre os grupos, observou-se que para o Grupo 3, que obteve melhor desempenho nos exercícios, os responsáveis possuem maiores índices de grau de escolaridade e renda per capita e menor média de pessoas por família. Em contrapartida, nos Grupos 1 e 2, com desempenhos menores, os responsáveis possuem menor grau de escolaridade e renda per capita e maior média de pessoas por família. Esses dados podem indicar que algumas variáveis do contexto familiar, principalmente renda e nível de escolaridade dos responsáveis, talvez sejam relevantes em estudos de educação matemática.

Com relação à frequência da tarefa de casa, segundo Harris e Sharman (1974) embora vários autores tenham estudado, na literatura experimental, sobre as contribuições das tarefas de casa, parece haver pouco consenso sobre a relação entre fazer a tarefa de casa e o aumento do desempenho na matéria. Os autores citam como motivos: uma grande variedade de medidas de desempenho (ex. testes de Inteligência, notas, etc.), pouca análise dos tipos de tarefa empregadas e falta de precisão quanto à conclusão. A resposta dos responsáveis tanto sobre a frequência, como sobre a ajuda em tarefas também possui esses problemas de análise, mas pode fornecer um indício de que as crianças que apresentam melhor desempenho em tarefas escolares, segundo seus familiares, fazem com mais frequência as tarefas de casa, mas têm pouco auxílio dos familiares. Talvez seja importante, em pesquisas futuras, levar em consideração o aspecto relacionado ao treino em tarefas extraclasse, com relação aos auxílios utilizados para se chegar as respostas finais. Os tipos de auxílio também podem estar ligados ao nível de escolaridade de quem ensina a tarefa, o acesso a recursos de acordo com a renda, que podem influenciar na formação desse repertório de procedimentos.

## Limitações do Presente Estudo

Pesquisa futuras podem levar em consideração as limitações apresentadas por esse estudo, no que tange ao aparato metodológico utilizado para a análise do processo de ensino de matemática. Com relação à amostra utilizada, alunos de uma única instituição pública de ensino municipal, com famílias com características semelhantes (ex. renda e escolaridade), de uma mesma região pode restringir a generalização dos dados coletados. Ao que tange à instituição, pública ou particular, os dados das avalições externas (SAEB) apresentam rendimentos diferentes em matemática a depender da instituição, o que pode sugerir procedimentos de ensino diferentes enquanto sua efetividade na aplicação. No que concerne às séries, pesquisas longitudinais também podem ser conduzidas, a fim de se investigar os procedimentos que continuam sendo utilizados para a resolução de operações, bem como novos, e sua relação com um repertório de ensino mais avançado.

No que se refere aos dados extraídos, com relação ao instrumento para registro do uso dos materiais de auxílio utilizados pelos alunos, seria interessante observar uma amostra menor de alunos, a fim de contabilizar com mais precisão o uso de tais materiais, além da utilização de um instrumento mais específico de registro, seja por meio de uma folha em branco para escrever as etapas, como a disponibilidade de outros materiais (e.g., Material Dourado, Ábaco) em separado, que fosse possível observar o uso. A observação por intervalo pode ter ocasionado perda de dados consideráveis.

Quanto aos aspectos metodológicos, de caráter observacional e exploratório, seria importante avaliar se a descrição proposta da contingência de ensino seria clara e adequada, para serem usadas como ponto de partida de estudos de contingência precorrente. Apenas a nomenclatura da tarefa pode não dar pistas para estudos futuros de dimensão discriminativa das tarefas; essas poderiam ser analisadas também pelo sequenciamento e instrução (e.g. Flores, 2003), dentre outras características que não foram analisadas. Também não foi possível relacionar os tipos de auxílio com o tipo de tarefa apresentada e suas respostas; para tal seria interessante uma análise individualizada em cada tarefa em sala de aula.

Por fim merecem destaque as limitações e desvantagens inerentes a um estudo observacional. Uma delas é a dificuldade de neutralidade do pesquisador (Danna & Matos, 2006), apresentadas em diversas ocasiões nas quais os alunos buscaram a pesquisadora para ajudá-los na resolução e conferência das questões. Talvez o registro fotográfico e observação das tarefas possa ter se configurado como uma consequência reforçadora, e por mais que a pesquisadora responsável buscasse direcioná-los para o professor por diversas vezes, os alunos continuavam a buscar ajuda da mesma. Outra limitação é se os dados coletados atendem aos objetivos, que por ser em ambiente natural são difíceis de serem controlados. Como por exemplo, por mais que se tenha critérios para a escolha do local, a frequência das observações e como serão registrados os dados, estas podem não atender aos objetivos. No presente estudo observou-se que os assuntos da turma do segundo ano englobavam assuntos de outros anos para o ensino de operações, houve algumas mudanças de materiais e tarefas não programadas e substituição de professor, que por diversas vezes impossibilitavam o registros dos procedimentos de forma regular.

## Considerações Finais

A sistematicidade que tentou-se aplicar aos dados observados, como por exemplo, com categorização de tarefas, quantificação das respostas requeridas e seus consequentes foi uma tentativa de levantar as possíveis contingências programadas no ensino em sala de aula. Buscou-se com tal análise trazer alguns dados sobre as variáveis situacionais e os procedimentos de ensino adotados, como um possível ponto de partida para o estudo do comportamento precorrente (auxiliar) em situação escolar.

Ao comparar-se esta forma de análise e o construtivismo, essa última por ser a abordagem tradicionalmente mais utilizada em estudos de educação matemática, inclusive nos planos pedagógicos das escolas e em âmbito oficial (e.g., PCN, 1997), Prado, Beffa, Gonsales (2012) descreveram que estas podem ter muitas semelhanças: "ambas as perspectivas teóricas, analítico comportamental e construtivista, preocupam-se com as ações do aluno e do professor e as condições contextuais envolvidas no processo ensino-aprendizagem (p. 91)". Uma das diferenças está na ênfase dada ao objeto de pesquisa, nesse caso o Construtivismo daria mais ênfase aos processos internos, inferidos a partir de comportamentos observáveis, já a análise do comportamento daria ênfase ao último. A interpretação analítico-comportamental adota uma perspectiva selecionista (Skinner, 1981), isto quer dizer que a nível ontogenético, o comportamento dos indivíduos é selecionado pelas suas consequências. Estas retroagem sobre o organismo no sentido de alterar a probabilidade de ocorrências futuras dos comportamentos que as produziram.

Portanto analisar os processos de ensino-aprendizagem em sala de aula, segundo Kubo e Botomé (2001), "referem-se, respectivamente, ao que faz um professor e ao que acontece com o aluno como decorrência desse fazer do professor (p. 5)". E por se referirem a uma categoria de comportamentos, "ensinar" e "aprender" são passíveis de análise comportamental.

Com relação a essa possível investigação empírica do processo de ensino-aprendizagem, conduzida em uma turma do 2º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública, algumas contribuições podem ser mencionadas. Esta pesquisa é uma das primeiras a tentar relacionar os procedimentos de ensino ao comportamento precorrente em contexto educacional natural. A motivação em iniciar a pesquisa por meio de observação em sala de aula, foi de conhecer os fenômenos, tal como se apresentam em ambiente natural para uma análise mais proxima do processo, visto que não encontrou-se dados na literatura sobre os tipos de tarefas e procedimentos utilizados no ensino das operações matemáticas. Tal urgência é ocasionada pelos resultados alarmantes do desempenho dos alunos em matemática, trazidos pelas avaliações externas (IDEB, PISA), principalmente das escolas públicas.

Para que essa análise amplie-se parece ser importante conhecer as situações de ensino tal como se apresentam e por mais que estudos em análise do comportamento tragam ênfase em variáveis situacionais, estes tem se focado em estudos de laboratório com alta validade interna, mas pouca validade externa. Altman (1974) afirma ser útil distinguir entre validade interna, que trata de declarações sobre a amostra e validade externa, que trata de interpretações e generalizações da amostra para outras situações ou populações. E a menos que desenvolvamos métodos de pesquisa de campo comparáveis em sensibilidade aos laboratórios, as ciências comportamentais tornar-se-ão progressivamente mais isoladas do próprio comportamento que suas teorias devem explicar, o que pode levar à delimitação do conhecimento produzido em análise do comportamento, ou seja, sendo pouco conhecida em outras áreas, como é a realidade atual.

Observar o processo de ensino em sala de aula (estudos de observação em ambiente natural) e analisar os dados de forma sistemática também podem servir como ponto de partida para a formulação de perguntas de pesquisa e possibilitar a ampliação do leque de procedimentos para a coleta de dados, dos fenômenos que se pretende estudar. Tal ponto poderia contribuir para o aumento da validade externa em procedimentos empíricos. Com isso tal estudo fomentou mais perguntas do que respostas, tais como: Os procedimentos apresentados em sala pareceram não ter a mesma função para todos os alunos; a que se deve tal diferença? Pode-se analisar uma contingência precorrente de ensino apresentada em sala de forma sistemática? Quais seriam os precorrentes, em uma dada tarefa, envolvidos em um repertório de nível superior, no ensino de operações matemáticas?

Como não foi possível avaliar a função precorrente auxiliar dos procedimentos apresentados por tarefa, formulou-se o Estudo 2, com objetivo de observar a ocorrência desses comportamentos em uma situação de ensino individualizada, por meio de uma plataforma de ensino digital. Essa plataforma possibilitou o registros de acertos e de duração da resposta, bem como a análise por tipo de tarefa e consequências, utilizando os resultados dos dados extraídos do presente estudo.

## Estudo 2

Skinner (1972) ao elaborar o programa de instrução programada apresentou que as condições para um ensino efetivo perpassavam por uma apresentação gradual do conteúdo acadêmico, reforçando positivamente as respostas corretas de forma imediata, e que permitissem que o aluno avançasse em seu próprio ritmo. Para que o aluno chegasse a formar um repertório mais complexo, era importante que isso fosse feito ao longo de uma sequência de pequenos passos.

O presente estudo foi elaborado com objetivo de ampliar os dados extraídos das observações do Estudo 1, com relação à análise da contingência precorrente. O objetivo geral foi investigar, de forma individualizada, uma contingência precorrente auxiliar, por meio da aplicação de exercícios com operações de adição e subtração. No presente estudo quatro crianças foram expostas a uma plataforma de ensino individualizado de matemática, denominada *Khan Academy*, que possibilitou algumas condições de instrução programada. Os objetivos específicos almejados foram: (a) Investigar a função precorrente dos procedimentos coletados no Estudo 1, específico para cada tarefa; (b) mensurar a ocorrência desse precorrente auxiliar por meio da duração do comportamento precorrente, dividido pelo número de respostas corretas, para cada aluno, e observar a influência do treino e tipos de tarefa sobre a resposta precorrente (duração/correta); (c) Averiguar se essa ocorrência se assemelha aos achados nos estudos experimentais (e.g., Oliveira-Castro et al., 1999), com relação ao padrão de diminuição na duração das respostas precorrentes (i.e., ajuste à equação da reta e medidas derivadas).

## Método

### Participantes

A missão nomeada de *Fundamentos da matemática* foi aplicada a quatro criança (três meninos e uma menina) com idade média de 8 anos e 4 meses, que estavam regularmente matriculadas na mesma turma do 2º ano do Ensino Fundamental, turno manhã, de uma escola pública municipal. Os alunos pertenciam a mesma turma de alunos participantes do Estudo 1. Todos eles tiveram autorização prévia e formalizada de um responsável via Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) lido e entregue em reunião (ver anexo C). Esse termo tinha conteúdo semelhante aos TCLEs referentes à participação do estudante no Estudo 1 (ver Anexo B), incluindo adaptações relacionadas às particularidades da participação nesse estudo. Do ponto de vista socioeconômico, as famílias dos participantes pertencem a uma população considerada de baixa renda, com renda familiar em média menor que um salário mínimo (R$ 937,00). O nível de escolaridade dos responsáveis mantinha-se entre Ensino Fundamental incompleto e Ensino Médio completo. Entre os responsáveis estão pai, mãe e avós, com média de 3,5 pessoas integrantes da família.

As crianças foram selecionadas de acordo com desempenho nos resultados das avaliações apresentadas no Estudo 1. O Grupo 1 (porcentagem de acertos menor que 30%) possuía seis alunos, o Grupo 2 (Porcentagem de acertos entre 30 e 60%) possuía 9 alunos e o Grupo 3 (Porcentagem de acerto maior que 60%) possuía 11 alunos. A partir dessa divisão pela porcentagem de acertos, foi realizado um sorteio para a escolha de um aluno, dentro de cada grupo, com o objetivo de ter participantes que apresentaram desempenhos diferentes nas aulas. Foi incluído no estudo uma criança diagnosticada com Transtorno do Espectro Autista (TEA), que mesmo apresentando média de respostas corretas acima de 60%, era considerada uma criança que necessitava de apoio especial para realização das tarefas. O objetivo era obter um dado comparativo de desempenho individual com crianças com desenvolvimento típico e atípico, em uma situação de ensino programada. Além do critério comparativo, a escolha de quatro crianças deu-se por ser o número passível de observação individual no dois turnos semanais disponibilizado para o estudo, e que não trouxessem prejuízo aos alunos por estarem fora de sala. Os dados individuais dos alunos são apresentados na Tabela 8, por meio de nome fictício.

*Tabela 8. Dados demográficos e de desempenho dos alunos sorteados do Grupo 1, 2 e 3 e da criança com diagnóstico de Transtorno do Espectro Autista (TEA).*

| **Grupo** | **Identificação** | **Idade** | **Média da porcentagem de respostas corretas** | **Responsável** | **Instrução dos responsáveis** | **Renda familiar (salário)** | **Ocupação responsáveis** | **Nº de pessoas na família** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Grupo 3** | Jony(M) | 9a 2m | 85,10% | Mãe | EMi | <1 | Autônomo | 3 |
| **Grupo 2** | Luka(M) | 7a 9m | 32,70% | Avós | EFi | <1 | Do lar | 3 |
| **Grupo 1** | June(F) | 8a 0m | 18,20% | Pai e mãe | EFi | 1 | Empregado | 6 |
| **TEA Grupo 3** | Lir(M) | 7a 7m | 70,50% | Mãe | EMc | 1 | Do lar | 2 |

As crianças eram liberadas no horário da aula de matemática e ciências, turno matutino, ministradas pela mesmo professor participante do Estudo 1. As crianças Luka e Lir participaram de todas as 9 sessões de treino, com tempo total de 212,9 e 149,5 minutos de participação nas atividades. Os participantes Jony e June participaram de 8 sessões, June faltou à sessão 6 e Jony à sessão 8, com tempo total de 195,1 e 150,4 minutos respectivamente. As divisões de exercícios e tempo por sessão serão apresentadas nos resultados.

## Local

A coleta de dados foi realizada na biblioteca da escola, que foi oferecida pela coordenadora pedagógica para realização da pesquisa. A biblioteca possuía climatização por meio de aparelho de ar condicionado. A iluminação mostrou-se adequada para os treinos. Como a coleta era conduzida durante o período de aula, não ocorreu circulação de alunos que apresentasse interferência significativa. A acústica na maior parte do tempo mostrou-se adequada, por se manter em local isolado das salas, que localizavam-se no térreo, e a biblioteca no 1º andar da escola.

**Instrumento e Material**

A plataforma utilizada neste trabalho, para a prática de exercícios de matemática, denomina-se *Khan Academy* (www.khanacademy.org). A escolha da plataforma deu-se por esta conter os conteúdos de ensino, apresentados por meio de exercícios, próximos aos trabalhados em sala de aula, a possibilidade de consulta a um auxílio (dicas), o registro do tempo de resolução e das respostas apresentadas (certo, errado e uso de dicas), além de apresentar consequências diferentes para as respostas corretas, respostas com uso de *dicas* e erradas. Estas características possibilitaram uma análise próxima da contingência precorrente auxiliar sugerida pelos estudos experimentais da área (e.g., Oliveira-Castro, 1999).

De forma geral, a plataforma oferece exercícios, vídeos de instrução e um painel de aprendizado personalizado (em português) que possibilita aos estudantes aprenderem de forma personalizada (ver Anexo H). Ao aluno é oferecida uma gama de assuntos que englobam todos os anos escolares, denominados de *missões*, que podem ser escolhidas de acordo com o interesse do aluno, ou as missões podem ser apresentadas por um tutor.

O curso é auto instrucional, ou seja, a aprendizagem acontece na interação com o conteúdo, com outros participantes e por meio da realização de exercícios. Ao selecionar a *missão*, a plataforma apresenta o exercício relacionado à habilidade que o aluno escolheu, ou fora escolhido pelo tutor. O aluno pode digitar a resposta diretamente, ou tem opção de usar um auxílio por meio de uma vídeo aula, sobre o assunto tratado, ou por meio de uma "*dica*", que mostra as etapas da solução do problema.

O aluno pode praticar um determinado exercício quantas vezes desejar, mas para subir de nível precisa acertar seis questões em sequência, sem auxílio, dos "*desafios*" propostos pela plataforma. Os desafios misturam exercícios que estão nas missões, para testar o aluno; estes podem ter sido treinados ou não. Os assuntos de matemática englobam do Ensino Infantil ao Ensino Médio e são divididos em: Fundamentos de matemática, Aritmética, Álgebra I, Geometria, Trigonometria, Probabilidade e estatística, Cálculo, Equações diferenciais, Álgebra linear. Os assuntos relacionados a aritmética e seus pré-requisitos, tratados geralmente no primeiro e segundo ano do Ensino Fundamental, estão dentro da missão "Fundamentos da Matemática" que é dividida em habilidades e assuntos tratados, de acordo com a Tabela.

*Tabela 9. Habilidades e assuntos trabalhados na plataforma Khan Academy para a missão "Fundamentos da matemática".*

| | Habilidade | Assuntos |
|---|---|---|
| 1 | **Contando**<br>Aprenda a contar. Diga quantos objetos você vê. | Contando<br>Números de 0 a 120<br>Contagem de objetos<br>Como comparar números pequenos |
| 2 | **Introdução a soma e subtração**<br>Aprenda os conceitos básicos da adição e subtração. | O que é adição? O que é subtração?<br>Como obter números pequenos<br>Como obter 10<br>Reúna, separe<br>Relacione adição e subtração<br>Problemas de adição e subtração |
| 3 | **Valor posicional (dezenas e centenas)**<br>Aprenda sobre dezenas e centenas. Compare números com dois e três algarismos. | Números de 10 a 19<br>Dezenas<br>Comparação de números de dois algarismos<br>Centenas<br>Como comparar números de três algarismos |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | **Adição e subtração dentro de 20**<br>Aprenda a somar e subtrair números iguais a 20 ou menos. | 1 de 20 concluído(s)<br>Adição até 20<br>Subtração até 20<br>Sinal de igual<br>Encontre o número que falta, até 20<br>Problemas até 20<br>Problemas com "a mais" e "a menos"<br>Adição repetida |
| 5 | **Soma e subtração de números até 100.**<br>Aprenda a somar e subtrair números de dois algarismos até 100. | Soma de unidades e dezenas<br>Subtração de unidades e dezenas<br>Introdução à soma com números de dois algarismos<br>Introdução à subtração com números de dois algarismos<br>Estratégias para soma e subtração até 100<br>Soma até 100<br>Subtração até 100<br>Problemas com números até 100<br>Problemas com "a mais" e "a menos" (com números até 100)<br>Contagem por intervalos<br>Problemas de soma e subtração com valores faltantes |
| 6 | **Soma e subtração de números até 1.000**<br>Aprenda a somar e subtrair números com dois e três algarismos até 1.000. | Soma de unidades, dezenas e centenas<br>Subtração de unidades, dezenas e centenas<br>Estratégias para a soma de números de dois e três algarismos |
| 7 | **Medição e dados**<br>Aprenda a medir comprimentos, ler as horas, contar dinheiro e fazer gráficos. | Comprimento e tamanho<br>Como medir comprimentos<br>Como comparar e estimar comprimentos<br>Problemas contextualizados de comprimento<br>Gráficos de imagens<br>Gráficos de barra<br>Gráficos de pontos<br>Tempo<br>Dinheiro |

Os assuntos escolhidos pela pesquisadora, foram trabalhados por meio de um dispositivo móvel (*tablet*), com sistema operacional IOS. O exercício era apresentado na tela do *tablet*, como mostra a Figura 21 e os alunos respondiam por meio de toque e digitação na própria tela, sensível ao toque (*touch screen*), que dispensam o uso de dispositivos periféricos, como mouses e teclados.

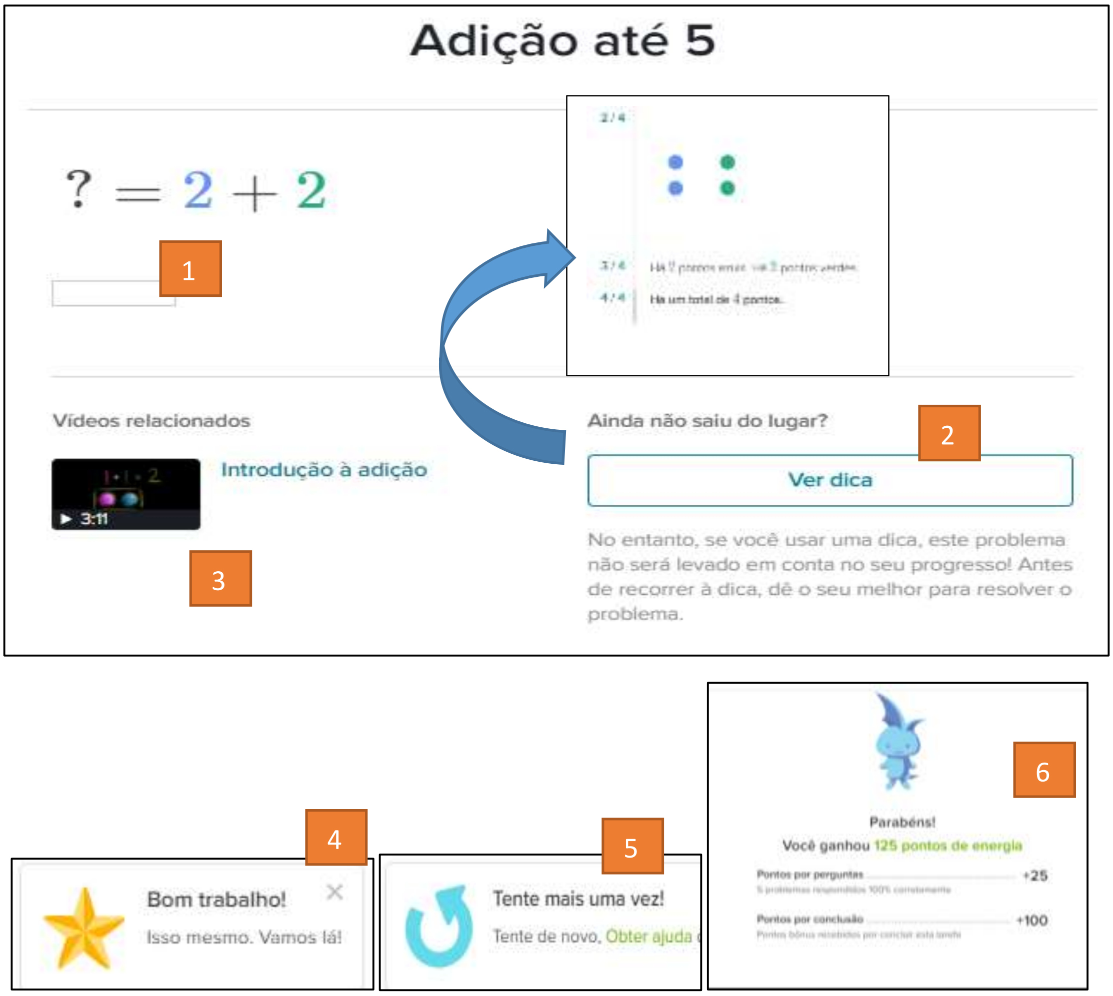



*Figura 21. Tela com exemplo de apresentação da tarefa "Adição até 5" e com estímulos e consequências apresentadas.*

O exercício era apresentado na tela e o aluno era solicitado a digitar a resposta em "1", poderia acessar a dica em "2" ou a vídeo aula em "3". Os alunos poderiam acessar os auxílios quantas vezes quisessem e pelo tempo que necessitassem. Ao acertar cada questão, era emitida uma frase afirmativa do desempenho (ex."*Bom trabalho!*" ou "*correto!*") em "4", com som "comemorativo" e uma figura com "carinha feliz" ou uma estrela. Ao responder de forma incorreta era emitida uma frase indicando para refazer a questão com ajuda (ex. "*Tente mais uma vez*" e "*Obter ajuda*") como em "5". Ao se manter engajado nas tarefas o aluno recebe como consequência aumento dos "pontos de Energia", que leva à evolução de seu personagem denominado "*Avatar*" e conquista de medalhas, como ilustrado em "6".

Para uma habilidade ser considerada “*dominada*”, o aluno precisaria passar pelos níveis “*praticado*”, “*1*” e “*2*”, por meio da prática de exercícios (de um mesmo assunto) ou passar por desafios (que englobam mais de um assunto) e obter 100% de acertos, sem auxílio, cinco vezes seguidas. Ao final das sessões, no mesmo dispositivo, o aluno tinha acesso a diversos jogos oferecidos pela pesquisadora como consequência pela participação.

**Procedimento**

Primeiramente foi realizada uma sessão de introdução para uso da plataforma, por meio de ensaio de manuseio do dispositivo *Tablet* (sistema IOS). Todos os alunos pareciam familiarizados com o dispositivo. A pesquisadora apresentou o funcionamento completo da plataforma, e o aluno ficou livre para manipular e fazer perguntas. Após cada participante familiarizar-se com a plataforma, seguiu-se para a apresentação dos exercícios e objetivos da pesquisa. Foram apresentadas instruções de forma oral, antes do início da sessão:

“Olá *nome do aluno* hoje você tem uma missão a cumprir. Sua tarefa é aprender soma e subtração. Você pode utilizar os seguintes auxílios nesse botão laranja para usar uma dica ou clicar nesse vídeo (pesquisadora aponta na tela). Ah! Também pode utilizar o caderno, perguntar a pesquisadora ou o que precisar para resolvê-los. Você digita a resposta nesse espaço e quando estiver pronto, confirma nessa tecla verde (pesquisadora aponta na tela). Você pode utilizar os auxílios (pesquisadora explica novamente quais são) quantas vezes quiser, mas lembre-se, sua missão é responder certo, e quando se sentir seguro, sem esses auxílios. Se a resposta for correta, o *Tablet* produz um som e uma carinha feliz e é registrado com uma bolinha verde com um ∨. Se estiver incorreta, não terá som e aparecerá uma bolinha cinza com “×” e se usar a dica aparecerá uma bolinha cinza com a figura de uma lâmpada (pesquisadora dá um exemplo para cada um). Cada resposta correta vale pontos de energia, e quanto mais questões fizer, mais pontos se acumulam e você pode ganhar medalhas, mudar o *Avatar* e subir de nível nas habilidades. Alguma dúvida? Então, vamos começar a missão!!".

Essas instruções foram apresentadas adequando ou modificando alguns termos, de acordo com o entendimento da criança. Além de serem relacionadas a exemplos e apresentadas de forma lúdica.

Nas oito sessões, com duração em torno de 30 minutos, ou enquanto o aluno estivesse engajado na tarefa, cada tentativa era composta por eventos (como descritos na Figura 12): (1) Um exercício era apresentado na parte superior da tela, logo abaixo havia um espaço para a produção da resposta; no (2) canto inferior esquerdo da tela aparecia um botão "ver dica", e a cada click na dica correspondia a apresentação de uma etapa de resolução do exercício, até a resposta final; no (3) canto inferior direito havia uma caixa com uma "vídeo aula". Além dos auxílios oferecidos pela plataforma, os alunos poderiam fazer perguntas a pesquisadora, e a explicação desta foi considerado um auxílio. Os alunos poderiam acessar os auxílios na ordem, no tempo e quantas vezes desejassem. A resposta poderia ser produzida com ou sem auxílio. Ao responder de forma correta era apresentado um *feedback*, no canto superior direito, dependendo da resposta: (4) para a resposta correta um som comemorativo, acompanhado de uma frase (ex. Correto!) e uma figura (ex. estrela) e (5) para resposta incorreta uma frase com indicação para tentar novamente com uso de algum auxílio. As frases geralmente eram lidas pela pesquisadora. Após a resposta correta o ciclo reiniciava. A sequência de cinco respostas aparecia no canto superior direito da tela, em formato de bolas, nas quais quando preenchida pela cor verde indicava resposta correta, pela a cor cinza com um "x" indicava a resposta incorreta e pela cor cinza com uma figura de uma lâmpada uma resposta correta com uso de dica. (6) Ao finalizar cinco questões consecutivas de forma correta, um som comemorativo com "confetes" era apresentado em uma nova tela, contendo o "*Avatar*" e os pontos de energia correspondentes aos ganhos.

O objetivo da tarefa, conforme especificado nas instruções iniciais era que, diante do exercício, o participante respondesse sem ajuda de nenhum auxílio, seguindo os passos (1) e (4) e (6) supracitados.

Esses exercícios pré selecionados eram intercalados com alguns "*desafios*", que são tarefas propostas pela plataforma que englobavam outras habilidades, que também seguiam a mesma sequência, mas que possibilitavam aos alunos ganharem mais pontos de energia em pouco tempo, o que possibilitaria aumentar o engajamento nas tarefas.

A escolha dos exercícios que seriam trabalhados objetivou avaliar exercícios próximos aos trabalhados em sala, principalmente envolvendo operações de soma e subtração com Centena, Dezena e Unidade. Dessa forma, a proposta dos exercícios seguiu uma ordem, primeiro exercícios com Unidades, seguidos de dezenas e centenas, nos quais eram apresentados primeiro o de adição e depois de subtração. Não foram delimitados números de exercício por sessão, pois a proposta era que cada aluno seguisse seu ritmo de acordo com os objetivos propostos. Objetivou-se também apresentar exercícios que incluíssem relação com os precorrentes mais observados em sala de aula, como os de contagem (ex. dedos, bolas e traços) e as demais estratégias de ensino utilizado pelo professor (ex. QVL, instrução de "tomar emprestado), podendo utilizá-los por quanto tempo desejassem. A seguir serão apresentados os resultados com a análise de dados com base na contingência precorrente auxiliar, de acordo com o exercícios trabalhados.

## Resultados

### Cálculo do comportamento precorrente auxiliar por tipo de exercício

Foram aplicados cinco tipos de exercícios: "*adição até 5*", "*subtração até 5*", "*valor posicional de dezena e unidade*", "*soma de unidade e dezena*" e "*subtração de unidade e dezena*", buscando uma certa ordem hierárquica sugerida pela plataforma, em termos de casas decimais e operação. Para cada tarefa foi medido o tempo de resolução, desde do início da apresentação desta a digitação da resposta final correta, sendo possível quatro esquemas, como mostra a Figura 22.

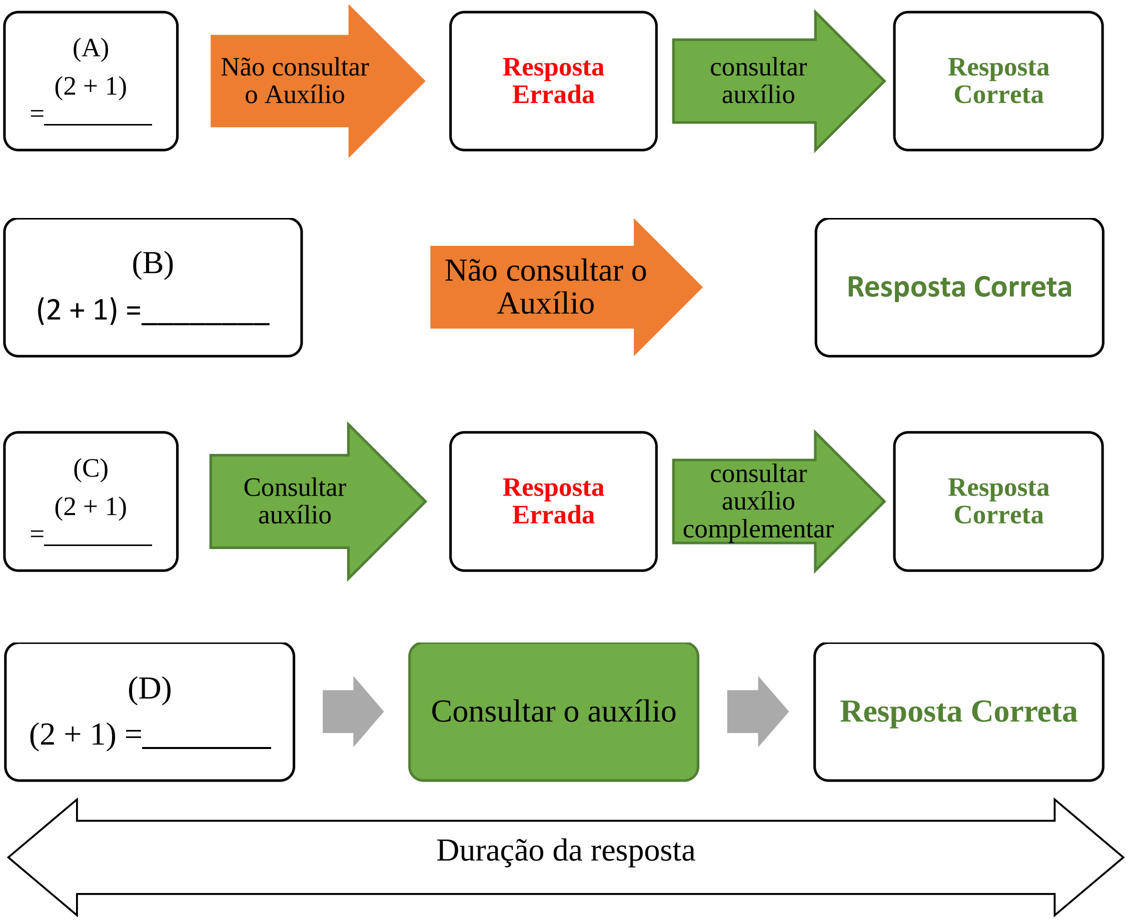



*Figura 22. Esquema das possibilidades de resposta apresentada pelos alunos de acordo com o uso do auxílio.*

A medida da *duração* da resposta precorrente foi contabilizada nas respostas nas quais foram utilizados auxílios (pelo menos uma vez), dividida pelo número de respostas *corretas*, em um bloco de 5 questões. Quando a resposta era registrada como errada, como no esquema A e C, o aluno só poderia passar para a próxima questão quando respondesse corretamente; para isso era indicado uso de auxílio. O critério para encerrar o treino, para todos os tipos de exercícios, era quando o aluno apresentasse cinco respostas corretas consecutivas, sem uso de auxílio e no mínimo cinco blocos de tentativas.

**Exercícios de "Adição até 5".** Essa tarefa foi empregada com o objetivo de observar o uso da contagem, em uma tarefa em que fosse possível a transferência de função. Foram realizadas, no total, dez combinações de exercícios de adição (1+1, 1+2, 1+3, 1+4, 2+1, 2+2, 2+3, 3+1, 3+2 e 4+1) que eram apresentados de forma aleatória, mas na mesma sequência, para todas as crianças. O auxílio utilizado pelos participantes Lir, Luka e Jony foi "contar com dedos". A participante June apresentou algumas diferenças no uso do auxílio, com relação aos outros participantes, por esse motivo seus dados serão tratados separadamente nas figuras. Nas dez questões iniciais, de teste, que não foram consideradas nos cálculos, a aluna apresentava respostas aleatórias e com erro e não atentava para o uso da dica. A pesquisadora sugeriu o uso dos dedos para a contagem, mas a aluna não demonstrou saber fazer contagem por meio desse auxílio. Foi apresentada novamente a dica dada pela plataforma, como mostra a Figura 23, que consistia na correspondência do número em quantidade de bolas (2/4) até a resposta final (4/4), que funcionou como precorrente, aumentando o número de respostas corretas. Ainda assim, nas questões seguintes, a aluna não consultava a dica e apresentava respostas incorretas. A pesquisadora precisou sinalizar o uso da dica para a obtenção da resposta correta.


*Figura 23. Dica oferecida pela plataforma Khan Academy nos exercícios de "adição até 5".*

Além do uso dos auxílio, a aluna apresentou número de sessões, questões e tempo total bem diferentes para a realização da tarefa, como podemos conferir na Tabela 10.

*Tabela 10. Dados quantitativos por aluno relacionados ao número de questões, tipo e frequência de uso do auxílio e número de respostas corretas, nos exercícios de "adição até5".*

| **Aluno** | **Sessões n = 8** | **Número de questões** | **Tipo de auxílio** | **Número de vezes que utilizou auxílio** | **Tempo total (seg e min)** | **Número de respostas corretas** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Jony** | 1, 3, 4 | 25 | Contagem com dedos | 6 (25%) | 311s 5,2m | 24 (96%) |
| **Luka** | 1, 2, 4 | 25 | Contagem com dedos | 15 (60%) | 307s 5,12m | 25 (100%) |
| **Lir** | 1, 3, 4 | 30 | Contagem com dedos | 10 (33%) | 263s 4,38 | 29 (96%) |
| **June** | 2, 3 4, 5, 7 | 100 | Dica da plataforma | 57 (55%) | 2915s 43,6m | 47 (46%) |

O auxílio “contagem com os dedos” foi utilizado em uma mesma quantidade de sessões, para atingir o critério de encerramento, para os alunos Jony, Luka e Lir. Os mesmos apresentaram números aproximados de questões (M = 26,7/ DP = 2,9) e tempo total (M = 4,38/ DP = 0,4). As diferenças entre o tempo médio (em segundos) para responder uma questão de Jony (M = 12,93/DP = 7,39), Luka (M= 10,61/ DP= 6,2) e Lir (M= 8,66/ DP = 3,74) não foram estatisticamente significativas (Jony e Luka, $p$= 0,856/ Jony e Lir, $p$= 0,455/ Luka e Lir, $p$=0,876). Por sua vez, a aluna June necessitou treinar em média de 3 a 4 vezes mais questões e um tempo 8 vezes maior, que os outros alunos. O tempo médio (em segundos) para responder uma questão de June (M = 26,41/ DP= 14,65) comparado aos tempos médios dos outros alunos, foi estatisticamente diferente de todos ($p$< 0,001). Em termos de porcentagem, Luka foi o que mais utilizou os auxílios, em 60% das questões e obteve 100% de respostas corretas, em seguida June que utilizou auxílio em 55% dos exercícios e acertou em torno de 46% das questões. Lir utilizou a contagem em 30% das questões e acertou 96% e Jony que utilizou a contagem 25% das vezes e obteve uma porcentagem de acerto de 96%.

A Figura 18 expõe os valores da duração da resposta precorrente (segundos) dividida pelo número de respostas corretas, por bloco de cinco questões dos participantes Jony, Luka,  Lir e June (escala diferente).

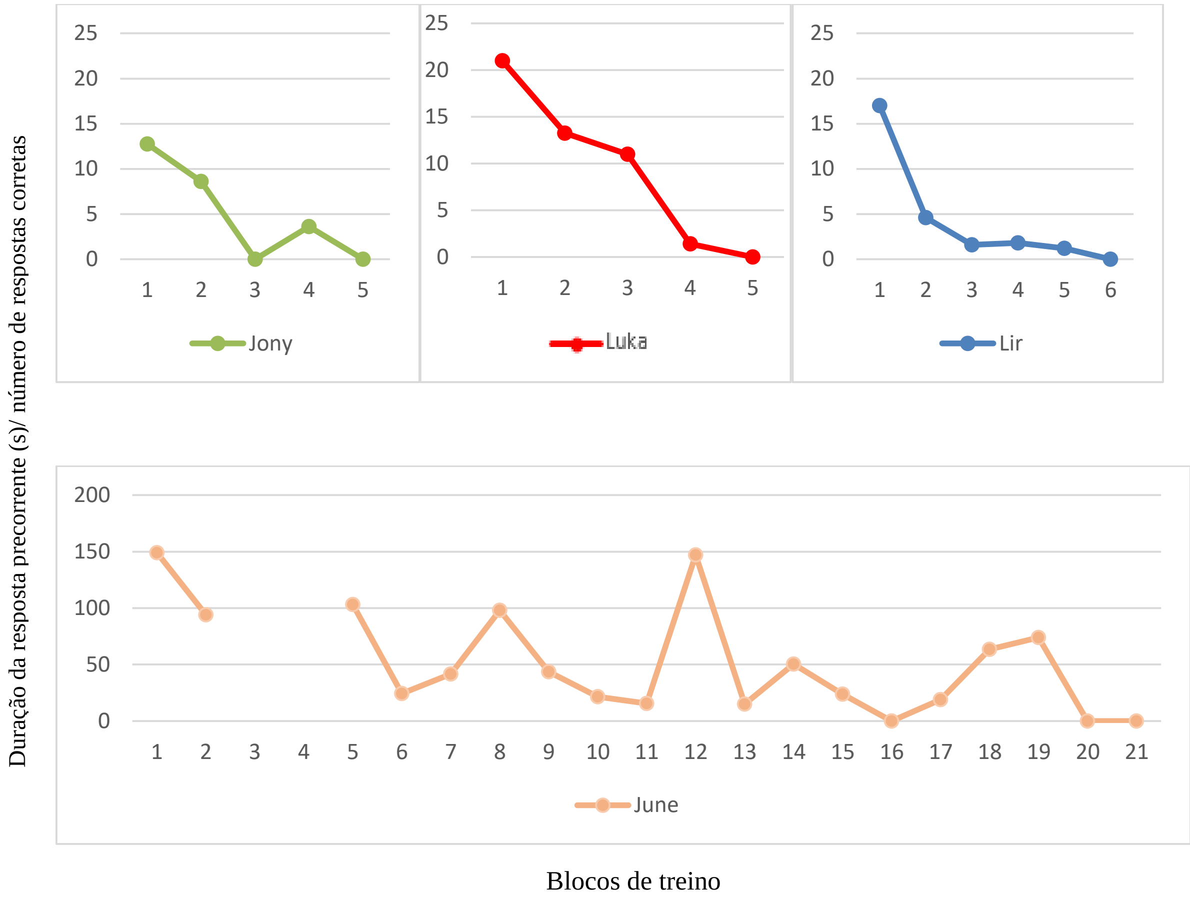



*Figura 24. Duração da resposta com uso de precorrente (s) dividida pelo número de respostas corretas em função dos blocos de treinamento (5 questões), divididos por sessão, para cada participante, em tarefa de "adição até 5".*

Pode-se observar que a duração da resposta precorrente, por resposta correta, diminui com uma curva negativamente acelerada com o aumento dos blocos de treinamento. Luka apresentou o maior valor inicial (21) da duração por respostas corretas chegando ao valor de zero no quinto bloco. O aluno Lir, com segundo maior valor (17) apresenta valor de zero no 6º bloco. Como a condição é de apresentar no mínimo cinco blocos, observou-se que o aluno voltou a apresentar duas respostas precorrentes e só parou no 6º bloco. Jony apresentou o menor valor de duração por resposta correta (12,75), zerou no 3º bloco, mas voltou a apresentar um precorrente e zerou novamente no 5º bloco. Tal mudança ocorreu em sessões diferentes de treino, sessão 3 para sessão 4, mas ainda com valores menores que as anteriores. A aluna June necessitou de pelo menos 20 blocos para responder 5 questões seguidas de forma correta sem uso da dica fornecida pela plataforma. Mesmo havendo um tendência decrescente da duração da resposta por resposta correta, houve acréscimo, por exemplo, entre os 6º e 8º blocos e 16º ao 19º. Os valores da duração da resposta por resposta correta mantiveram-se acima dos outros alunos. Os casos onde apenas erros ocorreram, nas respostas aleatórias citadas acima, entre os blocos de treinamento 2 e 4, foram tratados como pontos faltantes. Todos os alunos realizaram algumas questões (3 a 4) a mais, após o último bloco considerado para o critério de encerramento, e nenhum aluno apresentou consulta ao auxílio nessas questões.

**Exercício de "Subtração até 5".** Foram trabalhadas dez combinações de exercícios de "subtração até 5" (2-1, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 4-3, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4). Os alunos apresentaram diferentes sequências, números de questões e auxílios, como podemos conferir na Tabela 11.

*Tabela 11. Dados quantitativos por aluno relacionados às questões, uso do auxílio e respostas corretas nos exercícios de "subtração até 5".*

<table>
<tr><th>Aluno</th><th>Sessões n=9</th><th>Número de questões</th><th>Tipo de auxílio</th><th>Número de vezes que utilizou auxílio</th><th>Tempo total (minutos)</th><th>Número de respostas corretas</th></tr>
<tr><td>Jony</td><td>3, 4, 7</td><td>30</td><td rowspan="3">Contagem com dedos</td><td>3 (10%)</td><td>282s<br>4,7m</td><td>30<br>(100%)</td></tr>
<tr><td>Luka</td><td>1, 3, 4</td><td>45</td><td>20 (44%)</td><td>654s<br>10,9m</td><td>43 (96%)</td></tr>
<tr><td>Lir</td><td>3, 4, 6, 7</td><td>65</td><td>39 (60%)</td><td>613s<br>10,21m</td><td>63 (96%)</td></tr>
<tr><td>June</td><td>4, 9</td><td>25</td><td>Dica da plataforma</td><td>12 (48%)</td><td>1009s<br>16,81m</td><td>13 (52%)</td></tr>
</table>

O auxílio mais utilizado pelos participantes "Lir", "Luka" e "Jony" foi "contagem com dedos". O tempo (segundos) de resposta por questão de Jony (M = 9,22/ DP= 4,67), Luka (M = 14,33/ DP= 10,48) e Lir (M = 9,43/ DP= 5,37) são iguais estatisticamente (Jony e Luka, *p*= 0,180/ Jony e Lir, *p*= 1,000/ Luka e Lir, *p*=0,096). Por outro lado, o tempo (segundos) de resposta por questão de June (M = 40,36/ DP= 22,43) foi maior e estatisticamente diferente dos outros alunos (p < 0,001).  Lir utilizou o auxílio em 60% das questões e obteve uma porcentagem de 96% de respostas corretas. June respondeu 25 questões e utilizou o auxílio em 48% destas, obteve 58% de acerto. Já Luka utilizou o auxílio em 44% das questões e obteve 96% de acerto. Por fim, Jony utilizou 10% de auxílio e obteve 100% de acerto.

A Figura 25 mostra os dados da duração da resposta precorrente (segundos) dividida pelo número de respostas corretas, por bloco de cinco questões para cada aluno, para a tarefa de "subtração até 5", dos participantes Jony, Luka,  Lir e June (escala diferente).

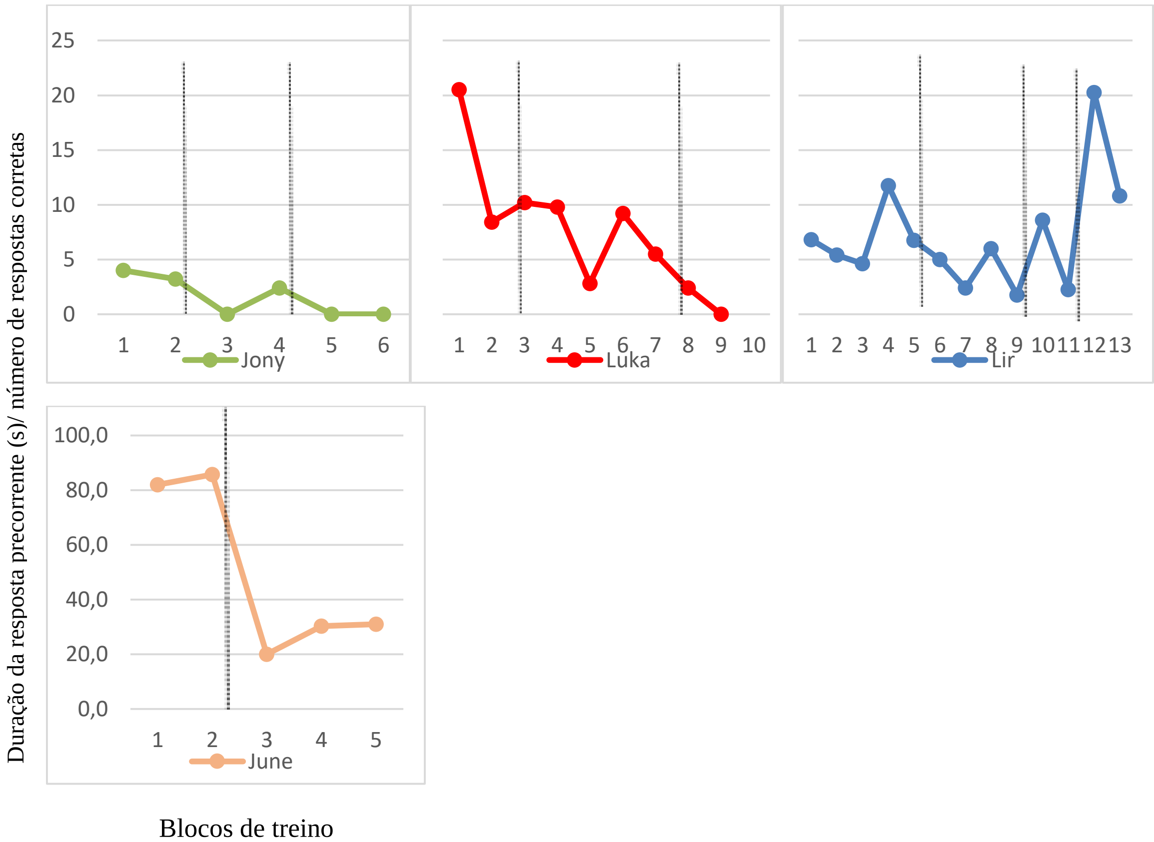



*Figura 25.* *Duração da resposta com uso de precorrente (s) dividida pelo número de respostas corretas em função dos blocos experimentais, por sessão, para cada participante, em tarefa de "subtração até 5".*

Pode-se observar que a duração da resposta precorrente por resposta correta, diminui com uma curva negativamente acelerada com o aumento dos blocos de tentativas, para o aluno Luka, Jony e June.  Mas essa tendência não foi observada para o aluno Lir, que inclusive na última sessão de treinamento, apresentou praticamente o dobro da duração média do precorrente por correta, do que a sessão inicial de treinamento. Na última sessão fora observado que o aluno estava com a coordenação motora mais acelerada (levantando e sentando com frequência), fazia perguntas recorrentes do que se tratava mesmo a questão, se podia utilizar os dedos para contar, escondia as mãos embaixo da mesa para fazer contagem, e repetia diversas vezes a contagem, mesmo já tendo chegado a resposta correta. Apenas os alunos Jony e Luka apresentaram a duração do precorrente por resposta correta igual a zero, 3º e 9º bloco respectivamente, durante o treinamento. Com relação ao auxílio "contar com dedos" o aluno Luka apresentou maior valor inicial (20,5) da duração do precorrente por resposta correta, em seguida Lir (6,8) e, após, Jony (4). A aluna June também apresentou maior valor (80,2) desta resposta em comparação aos outros alunos, e essa tendência se manteve ao longo dos blocos de treinamento.

**Exercício com "Valor posicional de Dezenas e unidades".** Foram realizadas no total de 4 combinações de exercícios envolvendo o valor posicional de "dezenas e unidades" tais como malhas, figuras, valores e blocos (representando material dourado), como representa a Figura 26, que eram apresentados de forma aleatória. Todos continham números em blocos de dezenas e unidades e o aluno teria que fazer a correspondência da quantidade com o valor, como por exemplo, "(1) *Que número é mostrado nas malhas de dezenas abaixo?" (2) Quantas maças são mostradas abaixo? (3) quantos blocos há aqui?*".

(Malhas) (Figuras) (Valores) (Blocos)

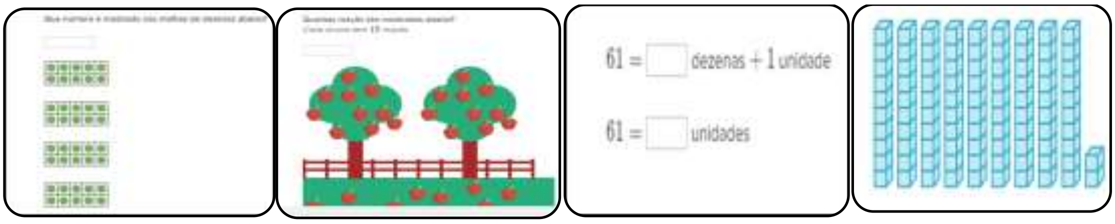



*Figura 26. Esquema das possibilidades de resposta apresentada pelos alunos de acordo com o uso do auxílio.*

Podemos conferir na Tabela 12 o número de sessões, questões, tempo dentre outros dados relacionados à tarefa. A aluna June não conseguiu compreender essa tarefa, possivelmente por ainda não possuir repertório de contagem e reconhecimento de unidades.

*Tabela 12. Dados quantitativos por aluno relacionados as questões, uso do auxílio e respostas corretas nos exercícios de valor posicional de "dezena e unidade"".*

| **Aluno** | **Sessões n=9** | **Número de questões** | **Tipo de auxílio** | **Número de vezes que utilizou auxílio** | **Tempo total (minutos)** | **Número de respostas corretas** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Jony** | 5, 6 | 20 | Dica *Khan Academy* + instrução da pesquisadora | 4 (23%) | 665s<br>11,8 | 13 (76%) |
| **Luka** | 5, 6, 7 | 25 | | 5 (18%) | 616s<br>10,27m | 23 (92%) |
| **Lir** | 5, 6, 8 | 25 | | 12 (43%) | 679s<br>11,32m | 21 (84%) |

O número de questões necessárias para o treinamento dos alunos foi praticamente o mesmo. Com relação ao tempo necessário pra responder as tarefas a média por questão (segundos) foi de 33,25 (DP= 33,8) para Jony, 24,64 (DP=19,2) para Luka e 27,16 (DP= 21) para Lir. Tais diferenças não foram significativas entre nenhum dos participantes (Jony e Luka, $p$= 0,113/ Jony e Lir, $p$= 0,194/ Luka e Lir, $p$=0,946).

A partir desses dados, é possível considerar que os mesmos apresentaram tempos proximais, por questão, para resolução dos problemas. O auxílio apresentado consistia na explicação da pesquisadora da dica dada pela plataforma, que ensinava o aluno a reconhecer dezenas e contar por blocos de 10 em 10, já que apenas a apresentação da dica escrita não foi suficiente para se chegar à resposta correta. O aluno Lir apresentou maior porcentagem de uso do auxílio (43%) para 84% de respostas corretas, em seguida o aluno Jony (23%) para 76% de respostas corretas e após o aluno Luka (18%) para 92% de respostas corretas.

Todos os alunos pararam de utilizar o auxílio antes do 5º bloco de exercícios, como mostra a Figura 27, com curva negativamente acelerada da duração do precorrente por resposta correta.

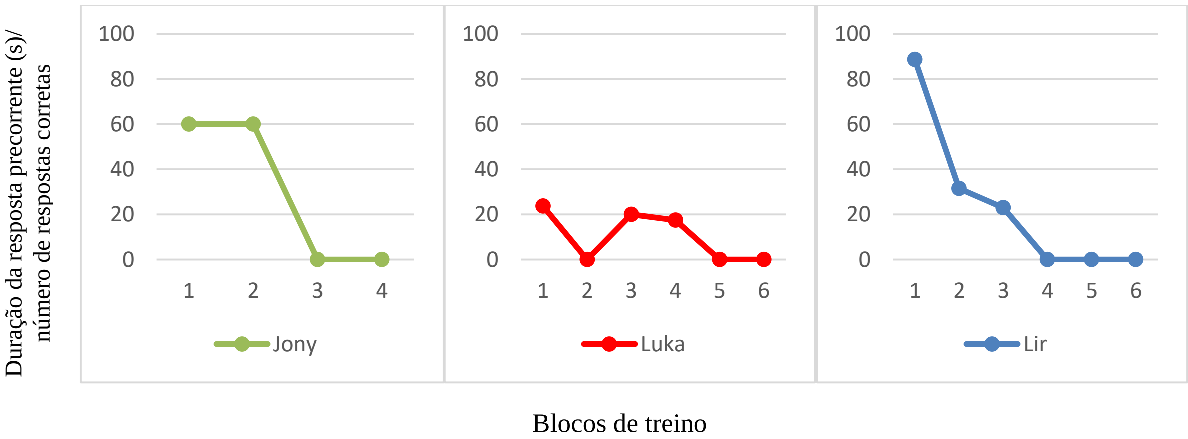



*Figura 27.* *Duração do comportamento precorrente dividido pelo número de respostas corretas, por bloco de treinamento, para o exercício do valor posicional de "dezena e unidade".*

Apesar de apresentarem valores diferentes de duração por resposta correta, as médias não apresentam diferenças significativas entre os participantes.

**Exercício de "Soma de dezena e unidade (sem reagrupamento)".** Foram realizadas diversas combinações de exercícios envolvendo "soma de dezena e unidade", que eram apresentados de forma aleatória, mas na mesma ordem para todos os participantes. Sem reagrupamento significa que todos continham operações de soma, com resultado de no máximo até "9" por unidade, como mostra a Figura 28.

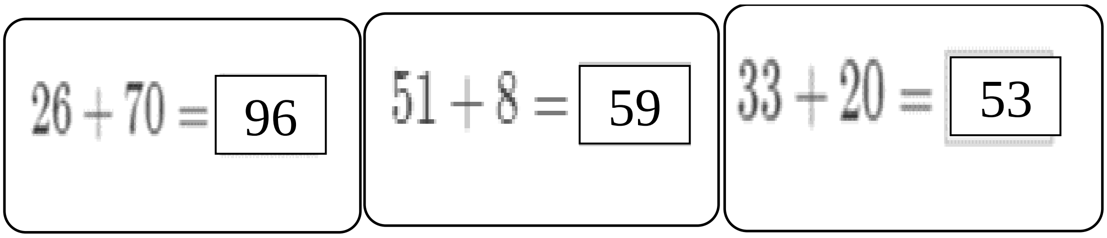



*Figura 28. Esquema ilustrativo das possibilidades de resposta apresentada nos exercícios de soma de "dezena e centena".*

A aluna June também não conseguiu compreender essa tarefa, nem com ajuda do auxílio QVL, que desmembrava a operação. A Tabela 13 apresenta as sequencias, números de exercícios, tempo total, dentre outros, para os alunos Jony, Luka e Lir.

*Tabela 13. Dados quantitativos por aluno relacionados as questões, uso do auxílio e respostas corretas nos exercícios de soma de "dezena e unidade".*

| **Aluno** | **Sessões n=9** | **Número de questões** | **Tipo de auxílio** | **Número de vezes que utilizou auxílio** | **Tempo total (seg e min)** | **Número de respostas corretas** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Jony** | 5, 6 | 30 | | 3 (10%) | 938s 16,4m | 26 (87%) |
| **Luka** | 5, 6, 7 | 25 | QVL | 3 (12%) | 932s 15,5m | 22 (88%) |
| **Lir** | 5, 6, 8 | 25 | | 13 (57%) | 952s 15,9m | 20 (80%) |

A dica oferecida pela plataforma ensinava a decompor os números e somar as dezenas e posteriormente as unidades, sem uso de material de contagem, o que não possibilitou aumentou o número de respostas corretas dos alunos.  A pesquisadora ensinou a montagem do Quadro de Valor e Lugar no caderno, assim como dado em sala de aula, o que aumentou o número de respostas corretas. Com o passar do treino, os alunos pararam de montar as operações em QVL e apenas contavam com dedos as dezenas e unidades dos números apresentados em forma de operação.  O tempo médio necessário para responder cada questão (segundos) foi de 31,02 (DP= 25,3) para Jony, 34,87 (DP= 25,4) para Luka e 41,39 (DP= 38,2) para Lir. Estas diferenças não foram significativas entre nenhum dos participantes (Jony e Luka, *p*= 0,828/ Jony e Lir, *p*= 0,320/ Luka e Lir, *p*=0,690).

Apesar de chegar a zero o valor da duração do auxílio por resposta correta em todos os participantes, apenas o aluno Luka apresentou um decréscimo com aumento do treino, como mostra os gráficos da Figura 29.

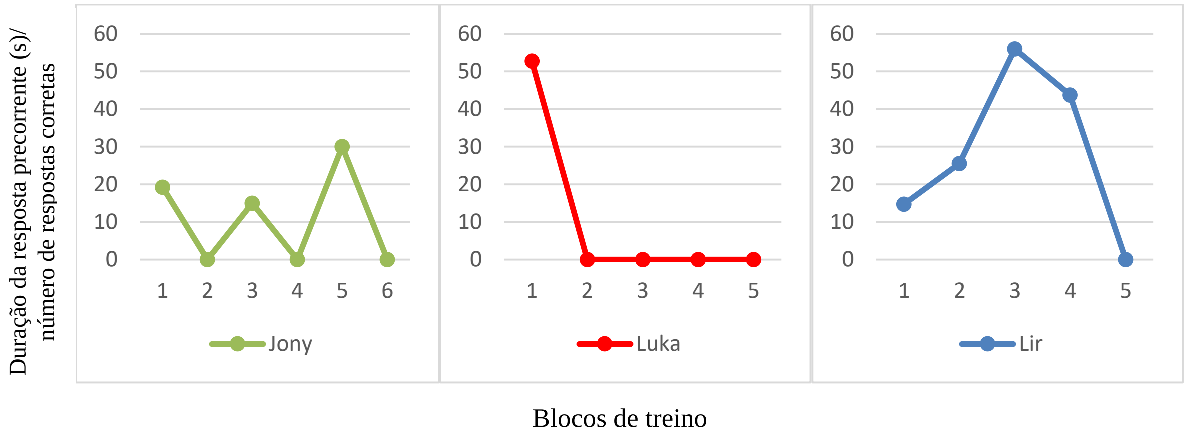



*Figura 29. Duração do comportamento precorrente dividido pelo número de respostas corretas, por bloco de treinamento, para o exercício de soma de "dezena e unidade".*

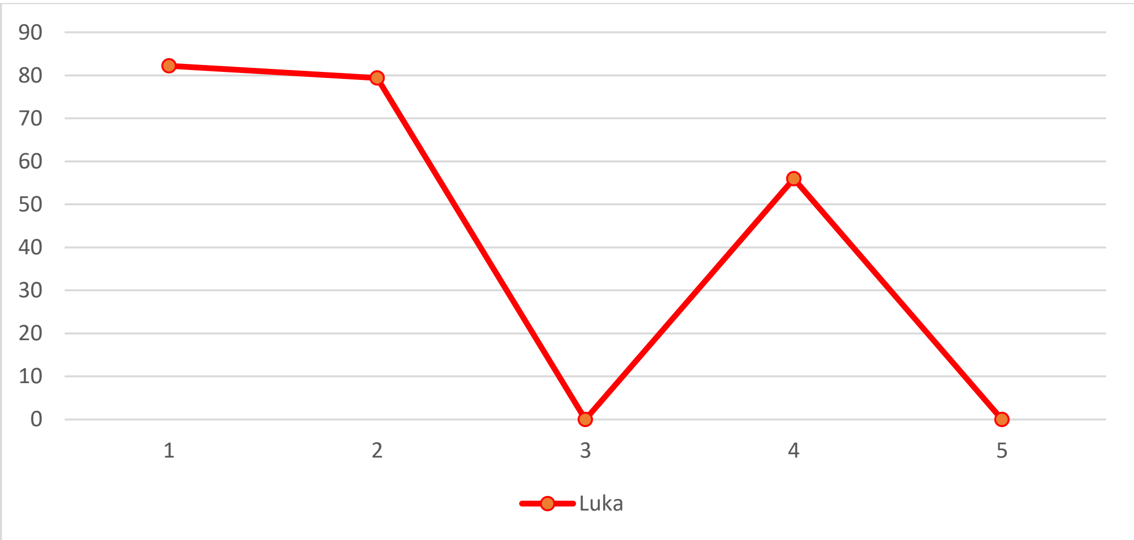
Por sua vez, o aluno Jony apresenta uma tendência constante ao longo do treinamento, com valores oscilando entre diminuição (blocos 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6) e crescimento (Blocos 2 e 3, 4 e 5) e uma tendência positiva na maior parte dos blocos (1 a 3) do participante Lir.

**Exercício de Subtração até 100 (com reagrupamento).** Apenas o aluno Luka conseguiu iniciar o treinamento desse exercício. A Tabela 14 apresenta os resultados.

*Tabela 14. Dados quantitativos por aluno relacionados as questões, uso do auxílio e respostas corretas nos exercícios de "Subtração até 100 (com reagrupamento)".*

| **Aluno** | **Sessões n=9** | **Número de questões** | **Tipo de auxílio** | **Número de vezes que utilizou auxílio** | **Tempo total (seg e min)** | **Número de respostas corretas** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Luka** | 8, 9 | 25 | QVL + Instrução da Regra de "Tomar emprestado" | 13 (54%) | 2063s 34,4m | 25 (100%) |

A duração média, em segundos, por resposta foi de 82,77 (DP= 39,72). O auxílio utilizado nesse caso foi o acesso à explicação da pesquisadora da regra "tomar emprestado" (conferir Figura), apresentada em sala de aula. A curva da duração do comportamento precorrente por resposta correta apresenta uma tendência decrescente.




Blocos de treino

*Figura 30. Duração do comportamento precorrente dividido pelo número de respostas corretas, por bloco de treinamento, para o exercício de "Subtração até 100 (com reagrupamento)".*

**Parâmetros e $r^2$ - Adequação a Equação da Reta**

Para todos os exercícios supracitados foram calculados os parâmetros da equação da duração do comportamento precorrente auxiliar por resposta correta, que seria uma função linear logarítmica do número de blocos de treinamento livres [Equação 1: Duração do precorrente/Resposta correta = *b* - *a* (log $^{\text{Blocos de tentativas}}$)], em que *b* e *a* seriam parâmetros derivados empiricamente. É possível com a equação ter a estimativa do número de blocos de treinamento em que a duração de resposta precorrente por resposta correta seria igual a zero, mesmo que não aconteça durante a sessão, poderia ser obtida dividindo *b* por *a* (*b/a*).

A Tabela 14 traz o valor do parâmetro *a*, que descreve os efeitos do aumento do número de blocos de teste e de *b* que seria o intercepto no eixo y. A partir destes pode-se também estimar o número de blocos em que a duração da resposta precorrente por resposta correta seria igual a zero, mesmo que isso não aconteça durante a sessão, dividindo-se *b* por *a* (log $^{\text{Blocos de tentativas}}$). E por fim os valores de $r^2$ que descrevem a variação entre a duração do comportamento precorrente, por correta, pelos blocos de treinamento.

*Tabela 14. Parâmetros, área e r² da equação.*

| Exercício | Participantes | *a* | *b* | *(b/a)* | *r²* |
|---|---|---|---|---|---|
| **Adição até 5** | **Jony** (n = 25) | -8,009 | 12,658 | 1,58 | 0,83 |
| | **Luka** (n = 25) | -13,28 | 22,048 | 1,66 | 0,94 |
| | **Lir** (n = 30) | -8,82 | 13,769 | 1,56 | 0,80 |
| | **June** (n = 100) | -36,78 | 134,76 | 3,66 | 0,39 |
| **Subtração até 5** | **Jony** (n = 30) | -2,269 | 4,088 | 1,80 | 0,68 |
| | **Luka** (n = 45) | -7,385 | 18,149 | 2,46 | 0,77 |
| | **Lir** (n = 65) | 1,267 | 4,905 | - | 0,03 |
| | **June** (n = 25) | -40,290 | 88,144 | 2,19 | 0,66 |
| **Valor posicional Dez e Unid.** | **Jony** (n = 20) | -49,578 | 69,390 | 1,40 | 0,74 |
| | **Luka** (n = 25) | -7,714 | 19,646 | 2,55 | 0,18 |
| | **Lir** (n = 25) | -55,718 | 81,990 | 1,47 | 0,95 |
| **Some Unid e Dez** | **Jony** (n = 30) | -2,592 | 13,550 | 5,23 | 0,02 |
| | **Luka** (n = 25) | -31,265 | 40,486 | 1,29 | 0,71 |
| | **Lir** (n = 25) | 3,589 | 24,563 | - | 0,01 |
| **Subtração de DU** | **Luka** (n = 25) | -46,849 | 88,377 | 1,89 | 0,53 |

Os valores mínimos e máximo de r² foram 0,01 e 0,95, respectivamente. O valor médio do coeficiente de *r²* foi de 0,55 (DP = 0,34), a mediana, 0,68, indicando que a equação se ajusta aos dados razoavelmente bem para estes exercícios. Dito de outra forma, de acordo com a equação, os parâmetros *a* e *b*, obtidos para cada participante, podem ser usados para descrever o desempenho individual para investigar o efeito do treino sobre a duração do comportamento precorrente, por resposta correta. Apesar dessa tendência geral, houve valores baixos de r², menores que 0,30, na tarefa de “*subtração até 5*” do participante Lir, na tarefa de “*valor posicional de dezena e unidade*” do participante Luka e na tarefa de “*some dezena e unidade*” dos participantes Jony e Lir. Ao inspecionar os gráficos o participante Lir apresentou uma curva com tendência crescente, ou seja, a duração do *precorrente/correta* aumentou com o número de tentativas, por isso a Equação 1 não se adequa para avaliar o desempenho nesse caso. Os demais apresentaram um padrão de aumento e decréscimo em ziguezague, ao longo de alguns blocos de tentativas, principalmente ao passar de uma sessão para outra.

Com objetivo de investigar possíveis relacionamentos entre testes padrões da resposta e parâmetros individuais da Equação 1, foram calculados os coeficientes de correlação de *Pearson* entre $b$, $a$, e $b/a$ para todos os participantes, em todos os exercícios. Frisa-se que o participante Lir apresentou dois parâmetros $a$ positivos, nos exercícios de “*subtração até 5*” e “*soma de unidade e dezena*”, o que sugere aumento no tempo de uso do auxílio com aumento dos blocos de treinamento (ou seja, quanto mais treino pior seria o desempenho), logo foram descartados do cálculo. Tal caso pode ter ocorrido por variáveis descritas anteriormente. O participante, por exemplo, na última sessão do exercício “*subtração até 5*” apresentou agitação motora, repetição de contagem com dedos em uma mesma questão, mesmo com resposta correta, o que aumentou consideravelmente o tempo de uso do auxílio.

O coeficiente de correlação entre $a$ e $b$ foi igual a 0,84 ($p$ < 0,001), indicando que os participantes cuja a duração de resposta precorrente, por resposta correta, era mais elevada nos primeiros blocos de treinamento, também mostrou taxas mais elevadas da diminuição na resposta precorrente com aumento do treinamento. O coeficiente de correlação entre $a$ e $b/a$ foi igual a -0,30 ($p$ = 0,319), indicando que não houve correlação significativa entre uma taxa mais elevada da diminuição na resposta precorrente com um número menor de treinamento até chegar-se a parar de utilizar auxílio *(b/a)*. O coeficiente de correlação entre *b* e *b/a* foi de 0,059 ($p$ = 0,848), indicando que não houve nenhuma relação entre a duração de resposta precorrente, por correta, nas primeiras experimentações e o número das experimentações para parar de utilizar o auxílio (*b/a*).

**Área da Função**

A área da função derivada da Equação 1 (área do triângulo igual a $b^2/2a$), de acordo com a performance de cada participante, será utilizada nesse estudo como medida de desempenho. A área daria o valor estimado da duração da resposta precorrente, por correto, até o bloco de treinamento em que a duração de resposta precorrente seria igual a zero. Dito de outra forma, daria a duração estimada do treinamento necessário para o participante apresentar a solução do exercício sem consultar o auxílio (por exemplo, escrever as respostas das operações de *adição até 5*, sem contar nos dedos).

A Figura 31 traz a área da função por tipo de exercício para cada participante. Com relação aos participantes, a maior média de área apresentada foi a do aluno Lir (M = 35,53/ DP = 35,05) para 2 exercícios (2 outros foram descartados devido a curva positiva), em seguida o aluno Luka (M = 35,09/ DP = 27,11) para 5 exercícios e o menor valor foi a média apresentada pelo aluno Jony (M = 24,4/ DP = 21,14) para 4 exercícios. A aluna June apresentou um valor destoante do retante do grupo, com média da área de 171,68 (DP = 106, 34), sendo aproximadamente 5,4 vezes maior que a média dos outros alunos, ou seja, um desempenho mais baixo nas tarefas que os outros alunos.

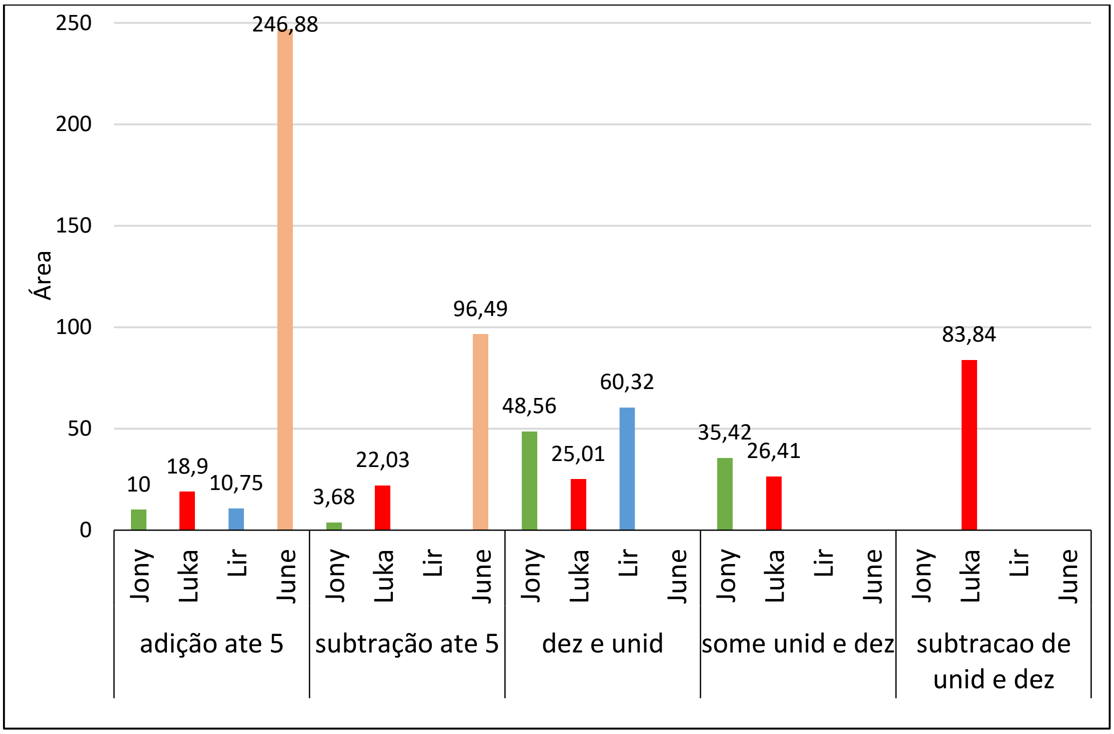



*Figura 31. Área da função por tipo de exercício para cada participante.*

Por meio de uma insperção visual ao analisar os tipos de exercício e suas áreas para os participantes Jony, Luka e Lir, que utilizaram os mesmos auxílios nas tarefas, o exercício que apresentou maior média de área foi o de "*Valor posicional de dezena e unidade*" (M = 44,63/ DP = 17,9). Se considerarmos o efeito no desempenho desses alunos,  com relação ao aumento do número de casas decimais, comparando a média da área das operações com unidade de 13,07 (DP = 7,4/ n=5) com a média da área de operações com dezena de 46,48 (DP = 22,57/ n=6), as diferenças são consideradas significativas ($p$ = 0,012), ou seja, os alunos apresentam maior rapidez para aprender sem auxílio, nas tarefas com operações contendo apenas unidades. Com relação a diferenças no tipo de operação, adição ou subtração, comparando a média da aréa de operações de adição (M = 20,25/ DP=10,8/ n=5) e de subtração (M = 36,35/ DP = 41,7/ n=3), a média da área das operações de subtração foi maior.

## Discussão Estudo 2

O Estudo 2 procurou identificar a ocorrência do comportamento precorrente auxiliar em função do treino de tarefas voltadas para o ensino de operações de adição e subtração. As atividades foram realizadas em uma plataforma de ensino individualizado, na qual o aluno controlava a apresentação dos estímulos auxiliares. Os participantes selecionados apresentaram desempenhos diferentes, em termos de porcentagem de respostas corretas, em tarefas de classe coletadas no Estudo 1, e receberam o mesmo treino individualizado no Estudo 2, com diversos tipos de exercícios.

### Comportamento Precorrente Auxiliar

Oliveira-Castro et al., (1999) investigou empiricamente os efeitos do treino sobre a diminuição da resposta precorrente auxiliar (acesso a uma tela de auxílio) por meio de uma tarefa de memorização de pares associados de símbolo e código, conduzida em laboratório. Os resultados obtidos na presente pesquisa, com tarefas realizadas em sala de aula, foram semelhantes àqueles obtidos no laboratório. De forma geral, a duração do comportamento precorrente auxiliar decresceu, e em alguns casos parou de ocorrer, em função do aumento do treino. Essa regularidade observada alinhou-se a outros estudos voltados para a investigação do comportamento precorrente auxiliar (e.g., Carvalho, 2000; Coelho & Oliveira-Castro 2005; Flores, 1997/2003; Oliveira-Castro e Campos, 2004). A curva encontrada também foi negativamente acelerada para a maior parte dos participantes. Mesmo com diferenças individuais, os dados foram bem descritos pela mesma função utilizada nas pesquisas experimentais, apoiando o uso da área como medida de desempenho.

Nesse sentido, o cálculo Área da função ($b^2/2a$), a partir da reta da Equação 1, fornece o tempo total de resposta precorrente até o bloco de tentativas em que o sujeito deixaria de consultar a tela de auxílio. Essa medida foi adotada (e.g., Oliveira-Castro e Campos, 2004) para comparar o desempenho dos alunos (aumento ou diminuição da área) em função da complexidade da tarefa (aumento das dimensões discriminativas da tarefa), visto que leva em consideração a quantidade de treino e o número de respostas corretas. Observou-se, por exemplo, que o aumento das dimensões discriminativas pode produzir um aumento nos valores de área (e.g., Oliveira-Castro & Campos, 2004). Mesmo não havendo a manipulação sistemática das dimensões discriminativas da tarefa, por meio do cálculo da probabilidade programada de reforço, essas foram aplicadas em uma certa ordem. Foram considerados o tipo de operação, primeiramente adição e depois subtração, e com aumento das dimensões da tarefa, como a quantidade de casas decimais, primeiramente operações com unidades e depois dezena. Nesse contexto, a média das áreas obtidas nas tarefas que envolveram operações com unidade foi menor que a média das áreas nas tarefas com operações com dezena. Dito de outra forma, a quantidade de casas decimais pode ter sido uma variável que influenciou o desempenho dos alunos nessas tarefas, sendo melhor com operações contendo apenas unidades. Esses resultados corroboram com os achados dos experimentos de Oliveira- Castro e Campos (2004), que sugerem que o aumento no número de dimensões discriminativas (e.g, forma e posição *versus* forma, posição e cor) dos primeiros membros dos pares, mantendo outras variáveis constantes, produziu um aumento na duração de comportamento precorrente necessário para aprender a tarefa, aumentando o valor da área. Com relação ao tipo de operação (adição e subtração), a média da área da operação de subtração foi maior que a área nas tarefas de adição, sugerindo influência dessa variável no desempenho apresentado pelos alunos.

Apesar dos participantes terem apresentado desempenhos diferentes em contexto de sala de aula, ao comparar-se seus desempenhos (medidas das áreas) nas tarefas de ensino individualizado, a maioria das crianças, Jony, Lir e Luka apresentaram desempenhos semelhantes. Em comparação a esses alunos, a participante June foi a que apresentou o maior número de tarefas de treino com emissão de precorrentes auxiliares para atingir o objetivo nas tarefas. Essas medidas sugerem, em termos de desempenhos individuais, que há a possibilidade de averiguar-se quantitativamente o tempo necessário de treinamento para os alunos completarem uma tarefa. Mesmo apresentando diferenças nas áreas há uma tendência da *duração/correta* do comportamento precorrente diminuir.

Outra possibilidade, ao observar individualmente os alunos em cada tarefa, foi de analisar a função precorrente dos procedimentos de auxílio utilizados em sala. Alguns estímulos considerados tipicamente precorrentes para a maioria dos alunos, como a contagem com dedos, não apresentou a mesma função para todos os alunos, em situação de ensino individualizado. Tal fato ocorreu com a participante June (Grupo 1) na tarefa de *subtração e adição até 5*, na qual a contagem com os dedos não adquiriu a função precorrente, mesmo com treinamento da contagem (correspondência ponto a ponto entre número e quantidade, desenvolvendo a ordenação e cardinação). Para essa aluna, a contagem com bolas adquiriu a função precorrente passando a responder corretamente as operações após treinamento.

Outro ponto a ser considerado foi a interrupção da resposta corrente, devido a "proibição" da resposta precorrente (e.g. Parsons, 1974). Essa ocorreu com todos os participantes ao serem lembrados do objetivo da tarefa (responder a tarefa sem auxílio). Alguns alunos esconderam as mãos embaixo da mesa para contar, o que ocasionou o aumento do tempo de acesso ao auxílio. Nesses casos a interrupção da resposta corrente, bem como aumento do tempo de acesso de auxílio podem ter ocorrido devido à impossibilidade de transferência da função dos estímulos auxiliares para a resposta corrente final (Oliveira-Castro et al., 1999).

Nos exercícios envolvendo valor posicional e contagem de unidade e dezena com a utilização do material dourado como auxílio, a maior parte dos alunos, Jony, Luka e Lir, apresentaram praticamente o mesmo desempenho. O mesmo não ocorreu com a aluna June, que ainda passava pelo treinamento de contagem por unidade. Tal dado pode sugerir, nesse contexto, um encadeamento hierárquico para a resposta de contagem de unidade para dezena. Nas operações com unidade e dezena, o auxílio utilizado (instrução da pesquisadora para a montagem da operação em QVL no caderno) também apresentou precorrente, apesar do seu uso variar entre participantes. O aluno Jony (Grupo 3) apresentou a maior oscilação entre o uso e não uso da instrução: ao passar a responder corretamente com QVL (sem explicação da pesquisadora), essa resposta também parou de ocorrer, mantendo a resposta final correta; porém, ao errar algumas questões, o aluno necessitou novamente da instrução da pesquisadora e montagem da operação em QVL. Isso sugere que uma resposta que tem uma função auxiliar, mesmo parando de ocorrer, pode ser novamente requerida pela contingência quando acontece um erro (Oliveira-Castro, 1993).

Essas análises apresentam limitações importantes a serem consideradas, desde a coleta de dados. Com relação aos participantes, a escolha de uma amostra pequena, ao mesmo tempo que evidencia questões individuais, impossibilita uma análise estatística mais criteriosa dos dados. No que diz respeito ao treino, a extensão de uma mesma tarefa para sessões diferentes, em algumas ocasiões em dias muito espaçados, pode ter ocasionado mudanças na *duração/correta* da resposta precorrente auxiliar, alterando a análise da influência do treino. Com relação ao instrumento, por não permitir um controle maior das variáveis (e.g., estímulos de auxílio, estímulos de reforço, valores numéricos das operações), restringiu a manipulação de variáveis com relação às características da tarefa. Outro ponto foi a necessidade da presença da instrução verbal da pesquisadora, em conjunto com alguns estímulos auxiliares apresentados pela plataforma, para que adquirissem a função precorrente. Nesse contexto, sugere-se que estudos futuros avaliem a influência do tipo de instrução verbal utilizado no ensino da matemática (e.g., Flores, 2003).

Apesar das limitações, esse estudo introduziu a possibilidade de observação sistemática do comportamento precorrente auxiliar em função do treino, no ensino de operações aritméticas, o mais próximo do ambiente natural de ensino da criança. A análise de uma situação de ensino individualizado evidenciou que as condições de treino – com relação aos tipos de estímulos precorrentes utilizados, o tempo de treino de cada tarefa e a possibilidade de transferência de função dos estímulos – sejam levados em consideração para o aumento da probabilidade de sucesso na tarefa. Com isso é possível observar, por meio da análise da contingência precorrente, as condições necessárias e/ou suficientes para o aprendizado, sem necessariamente recorrer a uma interpretação positiva usualmente utilizada em estudos de Educação Matemática. Uma análise conceitual negativa do termo "fazer na cabeça ou mentalmente" pode ser mais útil, já que enfatiza o contexto em que a criança passa a resolver uma operação aritmética, com ou sem auxílio, indicando que um evento que antes acontecia publicamente, deixou de ocorrer (Oliveira-Castro, 2000).

## Discussão Geral

Os dois estudos apresentaram a possibilidade de análise sistemática do comportamento precorrente auxiliar em problemas de aritmética, como uma alternativa teórica e metodológica aos modelos cognitivistas predominantes nos estudos de Educação Matemática. Os resultados obtidos no Estudo 1 e 2 alinham-se aos resultados encontrados na literatura experimental, permitindo assim uma análise operante do comportamento precorrente auxiliar em contexto escolar.

**O Uso do Conceito de "fazer na cabeça" no Ensino da Matemática**

A proposta apresentada nos estudos buscou analisar o desempenho em tarefas de adição e subtração por meio da análise negativa e metafórica da expressão "fazer de cabeça ou mentalmente". Os resultados ilustraram a potencial utilidade de uma interpretação negativa do conceito de "fazer na cabeça ou mentalmente" no estudo da matemática, pois ela enfatiza a programação de ensino que considere a ocorrência e diminuição de respostas que são necessárias para o desempenho correto, no início do treino, e que podem diminuir com o aumento desse (Oliveira-Castro, 1993). As orientações didáticas, inclusive em vias oficiais, fazem uso de termos como "cálculo mental", "raciocínio lógico" e "contas com estimativa" ao se referir ao ensino da aritmética. Geralmente são tratados como procedimentos de cálculo feitos "de cabeça ou mentalmente", sem uso dos materiais concretos, sendo considerados parte importante do repertório matemático complexo. Essa interpretação positiva encoraja atribuir as causas do fracasso no desempenho a características (mentais) dos alunos, em vez de enfatizar a apresentação ou não de variáveis na situação de treino, tais como estímulos auxiliares, que aumentam a probabilidade da resposta correta.

Nesse sentido, a maior parte das pesquisas envolvendo operações aritméticas trazem discussões sobre a formação do pensamento simbólico da matemática, com relação aos benefícios e prejuízos das estratégias de ensino (com materiais ditos concretos, principalmente a contagem). A discussão em análise do comportamento sobre a função da contagem, na aquisição do conceito de número e de outras habilidades numéricas, giram em torno de analisá-la ora como pré-requisito (e. g., Monteiro & Medeiros, 2002; Prado, Bonalumi, Bonfim, Ramirez & Carvalho, 2006), ora como facilitadora (Prado, et al, 2006) no desenvolvimento conceitual numérico. A revisão bibliográfica feita por Moeller, Martignon, Wessolowski, Engel, e Nuerk (2011) sobre os efeitos da contagem com dedos para a formação de representações numéricas elaboradas, mostra que os estudos Neurocognitivos e da área de Educação Matemática divergem sobre seu uso. Segundo esses autores, os estudos Neurocognitivos concluem que a contagem (com dedos) é um recurso benéfico para a formação das representações numéricas. Por outro lado, os estudos em Educação Matemática recomendam o uso de contagem com dedos no início do ensino, mas que deve ser abandonada e substituída por recursos voltados a representações "mentais" para a realização de operações numéricas ditas complexas. Considera-se inclusive que a permanência da contagem com os dedos estaria relacionada ao desempenho aritmético fraco.

Tais análises sobre os benefícios do uso de materiais para a contagem poderiam ser consideradas sem divergências ao analisar a função precorrente auxiliar desses. Nessa perspectiva, a diferença de uma criança que ao resolver uma operação de adição, por exemplo, faz uso da contagem com os dedos ou escreve os passos no caderno e outra criança que não o faz, mas que apresentam a mesma resposta correta, pode estar apenas em que ponto da curva elas se encontram, no processo de aprendizagem. Assim, a primeira criança (que ainda consulta o auxílio para obter respostas corretas) pode estar no início do treinamento, enquanto a segunda (que não o faz mais) já passou pelo treinamento necessário para aprendizagem da tarefa, porém as duas iniciaram da mesma forma, utilizando um auxílio. Logo, a pergunta se volta para as condições relacionadas a um treinamento necessário para a aprendizagem de cada criança. Nesse sentido, a curva de *duração/correta* do precorrente possibilitaria analisar qual criança passaria mais tempo consultando o auxílio e a quantidade de tempo que necessitaria para não utilizá-lo. A interpretação negativa com relação à formação do repertório de nível superior – no que concerne aos comportamentos que deixam de ocorrer, com foco no contexto, tipos de auxílios que aumentam a probabilidade da resposta correta para cada tarefa, o tempo estimado de treinamento para se chegar à resposta final e a sequência a ser apresentada – pode ser um diferencial para a programação de uma contingência de ensino mais efetiva.

**Aprendizagem no contexto de sala de aula e contexto de ensino personalizado**

Os resultados do Estudo 1 sugerem que o baixo desempenho dos alunos nas avaliações, principalmente nas operações e problemas com dezenas e centenas, pode ter sido ocasionado por esses não utilizarem os auxílios necessários (e.g., contagem e montagem do QVL) para chegar à resposta final. O treinamento do comportamento precorrente requerido na situação de ensino (e.g., observar e copiar a resposta no caderno) parece não ter possibilitado a transferência de função do estímulo auxiliar (solução da tarefa no quadro) apresentado em sala para a resposta final (resolver um problema), quando esses estímulos não estavam mais presentes na situação de avaliação.

Oliveira-Castro et al. (1999) descreve que uma das condições para que a transferência de estímulos ocorra é a alta correlação entre os estímulos apresentados. Em se tratando do ensino de operações aritméticas, a correlação entre os estímulos pode ter sido baixa devido à apresentação não sistemática, sem sinalização de mudança entre os tipos de tarefa (variando operações e casas decimais) e os estímulos auxiliares necessários para respondê-las. Nesse contexto, o aluno precisaria recorrer constantemente às respostas apresentadas no quadro, para chegar à resposta final correta. Esta situação assemelha-se aos procedimentos usados para investigar as respostas de observação, que buscam minimizar ou impedir a transferência da função dos estímulos (Oliveira-Castro et al., 1999). Dito de outra forma, o aluno não consegue chegar à resposta final sem olhar para a solução apresentada no quadro, pelo professor.

Outra condição apresentada no contexto de ensino foi a pouca frequência de reforço (conferência por meio do "visto" ou *feedback* de desempenho) apresentado para a cadeia de respostas *precorrente/corrente*. Esse fator também pode ter impossibilitado a discriminação e o estabelecido de um repertório de resolução adequado para o aluno. O alto índice de respostas incorretas ou não respondidas, nas situações de avaliação, pode ter sido ocasionado por esses alunos terem sido cobrados "antes do tempo" necessário para aprender a tarefa, bem como pelo não estabelecimento de uma relação de contingência entre resposta precorrente e resposta corrente.

Esse contexto parece ser reflexo de diversos problemas que os docentes e alunos precisam enfrentar em sala de aula, como: homogeneização da turma por meio da aplicação de conteúdos pré-determinados para cada série (política de educação), mesmo sem domínio completo de conteúdos de séries anteriores; prazos pré-estabelecidos para aplicação desses conteúdos, sem possibilidade de adequação ao desempenho da turma; escassez ou falta de recursos didáticos adequados; grande número de alunos por professor, que por si só impossibilita o acompanhamento individualizado. Esses problemas, aliados à baixa escolaridade dos pais, renda familiar precária, pouca frequência de resolução de tarefas extraclasse e de acompanhamento destas pelos responsáveis, podem ser indicadores do baixo desempenho dos alunos em matemática.

Adicionalmente, baixo desempenho acadêmico em avalições geralmente é consequenciado de forma aversiva (e.g., notas baixas ou reprovações) no contexto escolar. Os alunos geralmente não discriminam seus erros, perdem o interesse pela matéria ou consideram-na como algo difícil de se aprender. Segundo Carmo e Prado (2004), é fundamental entender como os alunos são ensinados nos anos iniciais de sua formação, pois esses repertórios são fundamentais para a formação do repertório dos anos finais. O ensino da matemática ainda mostra-se um desafio ao analisar-se o desempenho dos alunos brasileiros em matemática, com base nos resultados das avalições externas (SAEB/MEC). Nesse contexto, pouco se tem feito no intuito de melhorar os métodos e condições de ensino, nos quais a eficácia para a aprendizagem dos alunos geralmente é negligenciada. Ainda, a explicação para os problemas de aprendizagem geralmente se voltam para o próprio aluno, muitas vezes não levando em consideração o contexto em que esses alunos estão inseridos.

O ensino individualizado, por meio de uma plataforma digital, poderia ser um recurso didático interessante a ser considerado, pois permitiria que um pesquisador ou professor acompanhasse o desempenho de um grupo de alunos simultaneamente, mantendo as propostas de um ensino personalizado, dentro e fora do contexto escolar. Segundo Skinner (1972), a utilização de uma tecnologia de ensino no qual há um processo de ensino gradual, em que as respostas corretas são reforçadas positivamente de forma imediata e que permita que o aluno avançasse em seu próprio ritmo, possibilitaria uma situação de aprendizagem favorável das tarefas propostas. A eficácia na aprendizagem na aplicação dos métodos de ensino programado pode estar, dentre outros fatores, na possibilidade dos alunos controlarem o uso de estímulos auxiliares, como ocorreu na aplicação da plataforma de ensino do Estudo 2. Ao passo que o uso do auxílio aumentou a probabilidade da resposta correta ser reforçada, o controle pelo aluno evitou a retirada "precoce" do auxílio, que poderia levar à resposta incorreta. Além disso, essas características da contingência de estudo individualizada contribuiram para o engajamento dos alunos nas tarefas aplicadas na plataforma, ao comparar-se as respostas apresentadas em sala de aula. O desempenho da aluna June em sala e em situação individualizada é um exemplo disso: em sala de aula apresentou baixa frequência de respostas em tarefas, comportamentos dispersivos como andar pela sala, pedir para sair com frequência e conversar com colegas; já em situação individualizada, a aluna apresentou uma frequência alta de resolução das tarefas, chegando a pedir em algumas sessões para fazer mais exercícios do que os propostos, nos períodos de recreação. Esses resultados corroboram os estudos de contingências programadas de reforço, com relação à eficácia na aprendizagem dos alunos, que segundo Teixeira (2004) não exclui as diferenças individuais:

> Os alunos mais hábeis, provavelmente continuarão mais hábeis. O mais interessante é que alguns alunos menos hábeis poderão vir a fazer parte do grupo dos mais hábeis. (...) Desde que seja garantido a cada aprendiz o tempo necessário para o cumprimento das contingências de ensino previstas nos programas educativos, ele será capaz de cumpri-las nos padrões de excelência de desempenho propostos nas programações de ensino (p. 93/94).

A plataforma de ensino digital por possibilitar um registro sistemático do desempenho de cada aluno (ex. número de respostas corretas e incorretas), permite ampliar a perspectiva de um pesquisador/educador de programar as contingências necessárias para que ocorra a aprendizagem. O uso da medida da *duração/correta* do comportamento precorrente auxiliar pode ser uma alternativa metodológica para a identificação de contingências que aumentem as chances de responder corretamente.

Essa medida avalia não só a duração de acesso à consulta, mas a relação desta com as respostas corretas, uma forma interessante para se avaliar um procedimento de ensino.

Diversas pesquisas em análise do comportamento que buscaram avaliar métodos, currículos, estratégias e comportamentos envolvidos no ensino matemática em termos de sua eficácia (e.g., Capovilla et al, 1997; Monteiro e Medeiros, 2002; Neef, et al., 2003; Resnick, Wang, & Kaplan, 1973) trouxeram contribuições relevantes para o ensino/aprendizagem da matemática. A revisão bibliográfica realizada por Henklain, Carmo e Haydu (2017), sobre a produção dos analistas do comportamento, de 1970 a 2015, com relação ao ensino-aprendizagem da Matemática, apontou para "a necessidade de mais contribuições específicas sobre o comportamento de ensinar Matemática, bem como a disseminação das pesquisas analítico-comportamentais sobre ensino-aprendizagem da Matemática pelo Brasil" (p. 1464).

O desafio assumido no presente trabalho, de analisar os procedimentos de ensino de operações aritméticas por meio da contingência precorrente auxiliar em contexto escolar, não se resume aos dois estudos propostos. Objetivou-se discutir acerca da possibilidade de se avaliar o ensino de operações aritméticas por meio da contingência precorrente auxiliar, com base nas análises propostas nos estudos de Oliveira-Castro et al. (1999) para a formação de uma contingência programada de ensino da matemática. Ainda há muito a ser desenvolvido e o que foi aqui apresentado é apenas um pequeno recorte de um contexto bem mais amplo, que envolve a educação matemática no Brasil.

## Referências


Altmann, J. (1974). Observational study of behavior: sampling methods. *Behaviour*, 49(3), 227-266.

Alves, M. T. G., & Soares, J. F. (2009). Medidas de nível socioeconômico em pesquisas sociais: uma aplicação aos dados de uma pesquisa educacional. Opinião Pública, 15(1), 1-30.

Alves, M. T. G., Soares, J. F., & Xavier, F. P. (2015). Índice socioeconômico das escolas de educação básica brasileiras. *Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 22(84), 671-704.

Anghileri, J. (1997). Uses of counting in multiplication and division. Em I. Thompson. *Teaching and learning early number* (pp. 41-51). Buckingham: Open

Araújo, C. H., & Luzio, N. (2005). *Avaliação da educação básica: Em busca da qualidade e equidade no Brasil.* Brasília: MEC/INEP.

Barros, R. P., Mendonça, R., Santos, D. D., & Quintaes, G. (2001). Determinantes do desempenho educacional do Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 31(1), 1-42.

Batista, A. M. S. B & Spinillo A. G. (2008). Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. *Estudos de Psicologia*. 13 (1), 13-21.

Baum, W. M. (1999). *Compreender o Behaviorismo: Ciência, Comportamento e Cultura*. Porto Alegre, Rio Grande do Sul: Artmed.

Beishuizen, M., & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, 24(5), 519-538.

Capovilla, F. C., César, O. Capovilla, A. G. S., & Haydu, V. B. (1997). Equação-Equilíbrio: o modelo da balança e a análise da resolução de problemas aritméticos em escolares do ensino fundamental. *Torre de Babel: Reflexões e Pesquisa em Psicologia*, 4,189-215.

Carmo, J.S. (2002). Definições operacionais de habilidades matemáticas elementares. Em H.J. Guilhardi, M.B.B.P. Madi, P.P. Queiroz, & M. C. S. (Eds.). *Sobre comportamento e cognição: contribuições para a construção da teoria do comportamento* (Vol. 9, pp.181-191). São Paulo, SP: ESETec.

Carmo, J. S., & Prado, P. S. T. (2004). Análise do comportamento e psicologia da educação matemática: Algumas aproximações. Em M. M. C. Hübner & M. Marinotti (Orgs), *Análise do comportamento para a educação: Contribuições recentes* (pp. 115-136). Santo André, SP: ESETec.

Carvalho, G. P. D. (2009). *Aquisição de leitura sob o paradigma da equivalência de estímulos e o comportamento precorrente auxiliar: efeitos do treino de habilidades fonológicas*. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília, Brasília, DF.

Catania, A. C. (1999). *Aprendizagem: comportamento, linguagem e cognição*. Porto Alegre: Artmed.

Coelho, D. S. & Oliveira-Castro, J. M. (2005). Efeitos de Complexidade de Tarefas Sobre o Comportamento Precorrente Auxiliar no Treino e Recombinação. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento.*1(1), 61-69.

Danna, M. F., & Matos, M. A. (2006). Aprendendo a observar. Edicon.

Drachenberg, H. B. (1973). Programação das etapas que levam à modificação gradual no controle de certos aspectos de um estímulo para outro (fading) na situação de" escolha de acordo com o modelo. *Ciência e Cultura*, 25(1), 44-53.

Fernandes, R. (2005). *Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB): Metas Intermediárias para s Sua Trajetória no Brasil, Estados, Municípios e Escolas*. Brasília: (INEP/ MEC)

Flores, E. P (1997). *Comportamento auxiliar em tarefas sucessivas: Efeitos de mudanças no estímulo e/ou na resposta exigida*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade de Brasília, Brasília, DF.

Flores, E. P (2003). *"Saber como" e "saber sobre" em uma tarefa de pares-associados: Efeitos da complexidade da tarefa e das instruções*. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília, Brasília, DF.

Foran, T. G., & Weber, M. M. (1939). An experimental study of the relation of homework to achievement in arithmetic. *The Mathematics Teacher*, 32(5), 212-214.

Gálvez, G. (1996). A didática da matemática. Em C. Parra &I. Seiz. *Didática da Matemática* (pp 26-35), Porto Alegre: Ed. Artes Médicas.

Gazeboom, H. B. G., De Graaf, P., & Treiman, D. A. (1992). Standard International Socio-Economic Index of Occupational Status. *Social Science Research*, , 21, 1-56

Gómez, A. B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores.* Granada: Editorial Comares, p. 278

Gonçalves, F. O., & França, M. T. A (2008). Transmissão intergeracional de desigualdade e qualidade educacional: avaliando o sistema educacional brasileiro a partir do SAEB 2003. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 16(61), 639-662.

Gonçalves, H. A. (2008). *Educação matemática e cálculo mental: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard*

*Vergnaud*. Tese de Doutorado não publicada, Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal Fluminense, Niterói.

Harris, V. W., & Sherman, J. A. (1974). Homework assignments, consequences, and classroom performance in social studies and mathematics. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 7(4), 505-519.

Haydu, V.B., Costa, L.P., & Pullin, E.M.M.P. (2006). Resolução de Problemas Aritméticos: Efeito de Relações de Equivalência entre Três Diferentes Formas de Apresentação dos Problemas. *Psicologia: Reflexão & Crítica*, 19, 44-52.

Haydu, V. B., Pullin, E. M. M. P., Iégas, A. L. F., & Costa, L. P. (2010). Solucionar problemas aritméticos: Contribuições da análise do comportamento. *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*, 197-220.

Henklain, M. H. O. & Carmo, J. S. (2013). Equivalência de Estímulos e Redução de Dificuldades na Solução de Problemas de Adição e Subtração. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 29(3), 341-350.

Henklain, M. H. O., Carmo, J. D. S., & Haydu, V. B. (2017). Produção analítico-comportamental brasileira sobre comportamento matemático e de ensinar matemática: dados de 1970 a 2015. *Temas em Psicologia*, 25(3), 1453-1466

Hiebert, J. (1982). The position of the unknown set and children's solutions of verbal arithmetic problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3, 341-349.

Holland, J. G. (1957). Technique for behavioral analysis of human observing. *Science*, 125, 348-350.

Iñesta, E. R. (1980). *Técnicas de modificação do comportamento aplicado ao atraso no desenvolvimento* (D. P. Soares, Trad). São Paulo, Brasil: EPU.

Kamii, C., Lewis, B., & Kirkland, L. (2001). Manipulatives. When are they useful?

*Journal of Mathematical Behavior*, 20, 21-30.

Kubo, O. M., & Botomé, S. P. (2001). Ensino-aprendizagem: uma interação entre dois processos comportamentais. *Interação em Psicologia*, 5(1), 1-19.

Levingston, H. B., Neef, N. A., & Cihon, T. M., (2009). The effects of teaching precurrent behaviors on children's solution of multiplication and division word problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*. 42, 361-367.

Machado, A. F., Moro, S., Martins, L., & Rios, J. (2008). Qualidade do ensino em matemática: determinantes do desempenho de alunos em escolas públicas estaduais mineiras. *Revista da EconomiA*, 9(1), 23-45.

Magalhães, C. M. C., & Galvão, O. F. (2010). Pré-requisitos do comportamento matemático: análise experimental do comportamento de contar. *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*, 95-158.

Miguel A., Garnica A. V. M., Igliori S. B. C., & D'Ambrósio U. (2004). A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. *Revista Brasileira de Educação.* 27, 70-93.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL [MEC/SEF], (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasil: Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL [MEC/SEF], (1998). *Referencial curricular nacional para educação infantil*. Brasil: Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA [InPe]. O que é o Saeb. Brasil: Disponível em http://nportal.inep.gov.br/saeb.

Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S., Engel, J., & Nuerk, H. C. (2011). Effects of finger counting on numerical development–the opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in psychology*, 2.

Monteiro, G., & Medeiros, J. G. (2002). A contagem oral como pré-requisito para a aquisição do conceito de número com crianças pré-escolares. *Estudos de Psicologia*, 7(1), 73-90.

Neef, N. A., Nelles, D. E., Iwata, B. A., & Page, T. J. (2003). Analysis of precurrent skills in solving mathematics story problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 36(1), 21-33.

Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S., & Bryant, P (2005). As estruturas aditivas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de adição e subtração em sala de aula. Em ___. *Educação Matemática: números e operações numéricas* (pp. 45-81.). São Paulo: Cortez.

OCDE (2013). *PISA 2015: Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics and Financial Literacy*. Paris: OECD.

OCDE (2016). *Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros*. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

Ohta, A. (1987). Observed responses maintained by conditional discriminative stimuli. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 48, 355-366.

Oliveira-Castro, J. M., Coelho, D. S., & Oliveira-Castro, G. A. (1999). Decrease of precurrent behavior as training increase: Effects of task complexity. *Psychological Record*, 49, 299-325.

Oliveira-Castro, J. M., Faria, J. B., Dias, M. B., Coelho, D. S. (2002). Effects of Task Complexity on Learning to Skip Steps: An Operant Analysis. *Behavioural Processes*, 59, 101-120.

Oliveira-Castro J. M. & Campos, A. P. M (2004). Comportamento Precorrente Auxiliar: Efeitos do Número de Dimensões Discriminativas da Tarefa. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 20(2), 191-199.

Oliveira-Castro, J.M. (1992). "Fazer na cabeça": Uso metafórico e negativo. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8, 267-272.

Oliveira-Castro, J. M. (1993). "Fazer na cabeça": Análise conceitual, demonstrações empíricas e considerações teóricas. *Psicologia USP*, 4, 171-202.

Oliveira-Castro, J. M. (2000). Contingências programas de reforço e complexidade discriminativa de tarefa: ampliações a situações de ensino de leitura. In R. C. Wielenska (Org.). *Sobre comportamento e cognição: Questionando e ampliando a teoria e as intervenções clínicas em outros contextos.* 6. Santo André: Esetec.

Parra, C. (2001). Cálculo mental na escola primária. Em C. Parra, I Saiz. *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas* (pp. 186- 235). Porto Alegre: Artmed

Parsons, J. A. (1976). Conditioning Precurrent (Problem Solving) Behavior of Children. *Revista Mexicana de Analisis de la Conducta*, 2, 190-206

Parsons, J. A., Taylor, D. C., & Joyce, T. M. (1981). Precurrent self-prompting operants in children: "Remembering". *Journal of the Experimental Analysis of*

PDE (2011). *Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil.* Ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. *Brasília*: MEC, SEB; INEP.

Piaget, J. (1999). *Seis estudos de Psicologia.* (M. A. M. D'Amorim & P. S. L. Silva Trad.), 24ª. ed. - Rio de Janeiro: Forense Universitária

Polson, D. A., & Parsons, J. A. (1994). Precurrent contingencies: Behavior reiforced by altering reinforcement probability for other behavior. *Journal of the Experimental Analysis of behavior*, 61, 427- 439.

Prado, P. S. T., Beffa, M. J., & Gonsales, T. P (2012). Análise de contingências em situação pedagógica. Em P.S.T Prado & M. J. F. X. Ribeiro (Orgs). *Contribuições da Análise do Comportamento à Prática Educacional*. Santo André: ESETec.

Prado, P. S., Bonalumi, G. C., Bonfim, J. C., Ramirez, A. P., & Carvalho, E. C. P. (2006). Contagem e equiparação de conjuntos: um estudo correlacional. Em S. Z. pinho. J. R. C. Saglietti. (Orgs.). Núcleos de ensino. (pp. 348-372) São Paulo: editora UNESP.

Resnick, L. B., & Rosenthal, D. J. A. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 66, 817-825.

Resnick, L. B., Wang, M. C., & Kaplan, J. (1973). Task analysis in curriculum design: A hierarchically sequenced introductory mathematics curriculum. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 6(4), 679-709.

Ryle, G. (1949). *The Concept of Mind.* London: Hutchinson & Co.

Selva, A. C. V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa*, 95-119.

Skinner, B. F. (1969). *Contingencies of reinforcement: a theoretical analysis*. Nova York: Appleton-Century-Crofts.

Skinner, B.F. (1972). *Tecnologia de Ensino*. São Paulo: EPU.

Skinner, B.F. (1982). *Sobre o Behavorismo*. São Paulo. Cultrix

Skinner, B.F. (1998). *Ciência e Comportamento Humano*. 10 ed. (J.C.Todorov Trad). São Paulo: Martins Fontes. (Trabalho original publicado em 1953).

Sidman, M., & Tailby, W. (1982). Conditional discrimination vs. matching to sample: An expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of behavior*, 37(1), 5-22.

Silva, L. C. C. (1999). Análise de uma bateria de teste para o levantamento dos pré-requisitos do comportamento de contar. Em J. S. Carmo, L. C. C. Silva, & R. M. E. Figueiredo (Eds.), *Dificuldades de aprendizagem no ensino de leitura, escrita e conceitos matemáticos: Exercícios de Análise do Comportamento* (pp. 99-116). Belém, PA: Editora da Universidade da Amazônia.

Soares, J. F.; Collares, A. C. M. (2006). Recursos Familiares e o Desempenho Cognitivo dos Alunos do Ensino Básico Brasileiro. *Dados - Revista de Ciências Sociais*, 49(3), 615-650.

Souza, M. A. V. F. D., & Guimarães, H. M. (2015). A Resolução de Problemas na Educação em Matemática: uma Conversa sobre Ensino, Formação De Professores e Currículo desde Pólya. *Revista Ifes Ciência. 1*(1)., 109-136.

Spinillo, A. G, & Lautert, S. L. (2006). O diálogo entre Psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. Em L. L Meira, A. G. Spinillo. [compilação e organização] *Psicologia Cognitiva: Cultura, Desenvolvimento e Aprendizagem.*(pp. 46 – 80). Recife: Ed Universitária da UFPE.

Teixeira, A. M. S. (2002). Componentes verbais do repertório matemático elementar. Em H. J. Guilhardi, M. B. B. P. Madi, P. P. Queiroz, & M. C. Scoz (Eds.), *Sobre comportamento e cognição: Vol. 9. Contribuições para a construção da teoria do comportamento* (pp. 1-12). Santo André, SP: Esetec.

Teixeira, A. M. S. (2004). Ensino individualizado: Educação efetiva para todos. Em M. M. C. Hubner & M. Marinotti (Orgs). *Análise do Comportamento para a educação: contribuições recentes*. São Paulo: Esetec.

Teixeira, A. M. S. (2010). Componentes verbais do repertório matemático elementar. Em: J. S. Carmo, & P.S.T Prado (Orgs.). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática,* 159-172, Santo André, SP: ESETec.

Trautwein, U., Köller, O., Schmitz, B., & Baumert, J. (2002). Do homework assignments enhance achievement? A multilevel analysis in 7th-grade mathematics. *Contemporary Educational Psychology*, 27(1), 26-50.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (orgs). *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. HillDPale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59.

Vergnaud, G. (1990). Psychologie du developpement cognitif et didactique des mathematiques. *Petit X*, Paris, 22, 51-69.

Vergnaud, G. (1996a) A teoria dos campos conceituais. Em J. Brun. *Didáctica da matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget

Watson, J. B. (1930). *Behaviorism*. Chicago, University of Chicago.

Young, G. C., & Young, W. H. (1970*). Beginner's book of geometry*. Chelsea Publishing Company, Incorporated.

## Anexo A

### Termo de Aceite Institucional

Universidade de Brasília
Instituto de Psicologia
Departamento de Processos Psicológicos Básicos
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

**ACEITE INSTITUCIONAL**

A Sr(a).________________________, diretor(a) pedagógico(a) da Escola Municipal ______________________, está de acordo com a realização da pesquisa intitulada "Comportamento precorrente auxiliar na resolução de problemas de aritmética no contexto de sala de aula e de ensino personalizado", de responsabilidade da pesquisadora Carla Fernanda Neves de Sá, aluna de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento do departamento de Processos Psicológicos básicos da Universidade de Brasília, realizado sob orientação de Jorge Mendes de Oliveira Castro Neto, após submissão pelo Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto de Ciências Humanas da Universidade de Brasília – CEP/IH.

O estudo envolve a realização de entrevista e análise de materiais didáticos com objetivo de identificar os possíveis comportamentos auxiliares acessados durante o ensino de problemas aritméticos, bem como analisar funcionalmente as estratégias programadas de ensino usadas em sala de aula pelos professores. Pretende-se também observar e mensurar uma amostra de tarefas coletadas, com problemas de subtração e adição simples, para averiguar a influência de variáveis situacionais sobre a velocidade/ duração do comportamento precorrente auxiliar mais utilizado no processo de ensino, pelos alunos do segundo ano do Ensino Fundamental. A pesquisa terá a duração de três meses, com previsão de início em Fevereiro/2017 e término em junho/2017.

Eu, __________________________________________________, diretora pedagógica da__________________________________________________________, declaro conhecer e cumprir as Resoluções Éticas Brasileiras, em especial a Resolução CNS 196/96. Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa, e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Brasília, _________ de ____________ de 20_______.

_____________________________ __________________________________

Nome do(a) responsável pela instituição Assinatura e carimbo do(a) responsável pela instituição

**Anexo B**

**Termo de Consentimento Livre e Esclarecido referente à participação dos estudantes**

Universidade de Brasília
Instituto de Psicologia
Departamento de Processos Psicológicos Básicos
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

**PARTICIPAÇÃO DO(A) ESTUDANTE**

Prezado(a) aluno(a), você está sendo convidada para participar, como voluntária, da pesquisa intitulada “Comportamento precorrente auxiliar na resolução de problemas de aritmética no contexto de sala de aula e de ensino personalizado”, de responsabilidade Carla Fernanda Neves de Sá, aluna de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento do departamento de Processos Psicológicos Básicos da Universidade de Brasília.

A coleta de dados será realizada por meio de observação nem sala, não participativa. Você(s) serão observados em sala de aula pela pesquisadora, durante suas aulas regulares de matemática. Será acordado com a orientadora educacional o melhor dia e horário para que realizemos as coletas da pesquisa a fim de minimizar as interferências nas aulas ou outras atividades rotineiras da escola. É para estes procedimentos que você está sendo convidado a participar.

A participação na pesquisa não apresenta risco conhecido à sua saúde física ou psicológica dos participantes, mas pode surgir certa curiosidade e alvoroço pela presença da pesquisadora em sala. Vale ressaltar que esta pesquisa não consiste em um tratamento com objetivos psicoterápicos específicos ou benefícios diretos intencionalmente planejados ou esperados para cada um dos participantes, mas sim em uma investigação acadêmica com fins de produção de conhecimento. Espera-se com esta pesquisa que possamos compreender melhor as etapas envolvidas na resolução de problemas aritméticos, por meio do estudo do comportamento precorrente auxiliar.

A sua participação é voluntária e livre de qualquer remuneração ou benefício. Você pode se recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, mesmo com o consentimento de seus responsáveis. A recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade ou perda de benefícios. Seu nome, assim como de suas colegas que também participarem do estudo, não será identificado em nenhum momento, sendo garantido o sigilo. O material coletado (áudio da entrevista) ficará disponível para sua consulta e de seus pais ou responsáveis em qualquer momento, sendo guardado sob a responsabilidade dos pesquisadores.

Se você tiver qualquer dúvida em relação à pesquisa, você ou seus responsáveis podem entrar em contato com: (1) a pesquisadora responsável, Carla Fernanda N. Sá, pelo pelo endereço de e-mail carllafefe@gmail.com, ou no Laboratório de Aprendizagem Humana do Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília; (2) o professor orientador, Jorge Mendes, pelo telefone (61) 3307-2625 (Ramal 508) ou pelo endereço de e-mail jorge.oliveiracastro@gmail.com.

Este projeto está em trâmite pelo Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto de Ciências Humanas da Universidade de Brasília - CEP/IH. As informações com relação à assinatura do TCLE ou os direitos do sujeito da pesquisa podem ser obtidas através do e-mail do CEP/IH cep_ih@unb.br.

Diante do que foi exposto, solicito que você participe desta pesquisa assinando este termo.

Nome completo do(a) aluno(a):____________________________________________

Assinatura do(a) aluno:__________________________________________________

Assinatura do pesquisador responsável:_____________________________________

Local e data: ___________, _______ de ____________________________ de 20___.

## Anexo C

**Termo de Consentimento Livre e Esclarecido referente à participação e autorização dos responsáveis para a participação do estudante**

Universidade de Brasília
Instituto de Psicologia
Departamento de Processos Psicológicos Básicos
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**
**CONSENTIMENTO DO(A) RESPONSÁVEL**

O(a) estudante sob sua responsabilidade, ____________________________ , está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa intitulada "Comportamento precorrente auxiliar na resolução de problemas de aritmética no contexto de sala de aula e de ensino personalizado", de responsabilidade Carla Fernanda Neves de Sá, aluna de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento do departamento de Processos Psicológicos Básicos da Universidade de Brasília.

O objetivo desta pesquisa é entender melhor os comportamentos que envolvem resolução de problemas aritméticos, dos estudantes de 06 a 07 anos de idade, do 1º e 2º ano do Ensino Fundamental, por meio da investigação do uso de materiais e procedimentos que servem de apoio para o ensino da resolução de problemas de aritmética (soma e subtração). O(a) estudante participará respondendo a conjuntos de questões apresentados na forma de exercícios de aritmética, compatível ao seu ano de estudo. O(a) estudante se encontrará com a pesquisadora em oito dias distintos para responder individualmente os exercícios. Cada um desses encontros, que acontecerão em uma sala específica da escola, serão semanais e devem durar aproximadamente 50 minutos, cada. Será acordado com a orientadora educacional o melhor dia e horário para que o(a) estudante saia de sala de aula para participar da pesquisa a fim de evitarmos interferir na participação dele em aulas ou outras atividades rotineiras da escola. O(a) estudante será orientado a nunca sair da sala de aula sozinho, pois a orientadora educacional ou um dos pesquisadores sempre irá buscá-lo para que se dirija até a sala onde a pesquisa será realizada, e depois o(a) acompanhará de volta à sala de aula.

Garantimos que todos os pesquisadores preservarão a identidade do(a) estudante, ou seja, não revelaremos o nome dele ao apresentar a pesquisa em eventos científicos ou em publicações. Usaremos sempre um nome fictício para nos referirmos a ele. Da mesma forma, não permitiremos que qualquer pessoa leia as respostas dadas pelo(a) responsável nos questionários ou dadas em entrevistas, nem mesmo as profissionais da escola, o que significa que resguardaremos o sigilo acerca de informações dadas, pois todos os questionários serão guardados pela pesquisadora responsável e somente poderão ser lidos pelos outros pesquisadores.

A participação do(a) estudante na pesquisa não apresenta risco conhecido à sua saúde física ou psicológica dos participantes. Vale ressaltar que esta pesquisa não consiste em um tratamento com objetivos psicoterápicos específicos ou benefícios diretos intencionalmente planejados ou esperados para cada um dos participantes, mas sim em uma investigação acadêmica com fins de produção de conhecimento. Espera-se com esta pesquisa que possamos compreender melhor as etapas envolvidas na resolução de problemas aritméticos, por meio do estudo do comportamento precorrente auxiliar.

O(a) estudante pode se recusar a participar da pesquisa a qualquer momento ou o(a) Sr(a) pode solicitar a interrupção da participação dele, sem que isto cause qualquer constrangimento ou penalidade por parte da equipe de pesquisa ou dos(as) profissionais da instituição de ensino.

Se você tiver qualquer dúvida em relação à pesquisa, O Sr(a) pode entrar em contato com: (1) a pesquisadora responsável, Carla Fernanda N. Sá pelo endereço de e-mail carllafefe@gmail.com, ou no Laboratório de Aprendizagem Humana do Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília; (2) o professor orientador, Jorge Mendes, pelo telefone (61) 3307-2625 (Ramal 508) ou pelo endereço de e-mail jorge.oliveiracastro@gmail.com.

A equipe de pesquisa garante que os resultados do estudo serão devolvidos aos participantes por meio de uma palestra na própria escola, ocasião que pretendemos desenvolver algumas discussões sobre o aprendizado da matemática, particularmente junto aos alunos participantes, seus responsáveis e seus professores. Além disso, os resultados da pesquisa poderão ser encontrados na tese de doutorado a ser disponibilizada na Biblioteca Central da Universidade de Brasília e na internet - no site do Instituto de Psicologia (http://www.ppg-cdc.unb.br/) e no repositório institucional da universidade, podendo ser publicados posteriormente na comunidade científica.

Este projeto está em trâmite pelo Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto de Ciências Humanas da Universidade de Brasília - CEP/IH. As informações com relação à assinatura do TCLE ou os direitos do sujeito da pesquisa podem ser obtidas através do e-mail do CEP/IH cep_ih@unb.br.

Ao assinar este documento, o(a) Sr(a) confirma que conhece todas as informações que foram apresentadas no mesmo e concorda com a participação do(a) estudante na pesquisa. Portanto, antes de assinar, e no transcorrer da pesquisa, é importante que o(a) Sr(a) faça perguntas caso tenha quaisquer dúvidas.

Eu, _______________________________________________________ ,
responsável por ____________________________________________________________,
afirmo que fui informado(a) de todas as condições descritas neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e autorizo a participação do(a) estudante na pesquisa intitulada "Comportamento precorrente auxiliar na resolução de problemas de aritmética no contexto de sala de aula e de ensino personalizado", coordenada pela psicóloga/doutoranda Carla Fernanda Neves de Sá. Afirmo também que recebi uma cópia desse documento e que tive a oportunidade de fazer perguntas sobre quaisquer dúvidas junto à pesquisadora responsável.

Local e data: _________, ___________ de _____________________ de 20__.

Assinatura do(a) responsável pelo(a) estudante: ________________________

Assinatura/Rubrica do(a) estudante: ___________________________________

Assinatura da pesquisadora responsável:_______________________________

# Anexo D

## Modelos de formulários para observação em sala de aula

DATA______/_______/_______
Pesquisadora: Carla Fernanda N Sá
Horário: início ______ Final_______

| n | Alunos | Respostas corretas com auxilio | Respostas erradas com auxilio | Resposta aleatória | Não respondeu | Tipo de auxilio |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |
| 12 | | | | | | |
| 13 | | | | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | | | | | | |
| 16 | | | | | | |
| 17 | | | | | | |
| 18 | | | | | | |
| 19 | | | | | | |
| 20 | | | | | | |
| 21 | | | | | | |
| 22 | | | | | | |
| 23 | | | | | | |
| 24 | | | | | | |
| 25 | | | | | | |

Formulário de observação
Universidade de Brasília - UNB
Instituto de Psicologia - IP
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

DATA______/_______/_______
Pesquisadora: Carla Fernanda N Sá
Horário: início ______ Final_______

| Tipo | Operação | Nº de alunos que responderam correto com auxilio | Nº de alunos que responderam errado com auxilio | Não responderam |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Formulário de observação
Universidade de Brasília - UNB
Instituto de Psicologia - IP
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

DATA______/_______/______
Pesquisadora: Carla Fernanda N Sá
Horário: início _____ Final______

| SD | R | $SR^+$ | $SR^-$ | $SP^+$ | $SP^-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Formulário de observação
Universidade de Brasília - UNB
Instituto de Psicologia - IP
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

**Anexo E**

**Questionário para levantamento de dados socioeconômicos**

Universidade de Brasília
Instituto de Psicologia
Departamento de Processos Psicológicos Básicos
Programa de Pós-Graduação em Ciências do Comportamento

## QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO PARA RESPONSÁVEIS

Gostaria de conhecer melhor sua família. Responda às perguntas a seguir da forma mais sincera possível. Evite deixar questões em branco. Lembre-se que as informações dadas são de caráter sigiloso. Não há respostas certas ou erradas.

1. Dados familiares:

| Nome | Parentesco | DN | Escolaridade |
|---|---|---|---|
| 1. | Aluno | | |
| 2. | | | |
| 3. | | | |
| 4. | | | |
| 5. | | | |
| 6. | | | |
| 7. | | | |

2. Renda mensal da família:

( ) 1 salário ( ) 2 salários ( ) acima de 3 salários

3. Profissão do(s) responsável (eis): ____________________________________________

Estado civil do(s) responsável (eis): ____________________________________________

4. O aluno costuma fazer as tarefas de casa?

( ) sim ( ) não

5. O aluno possui ajuda nas tarefas escolares?

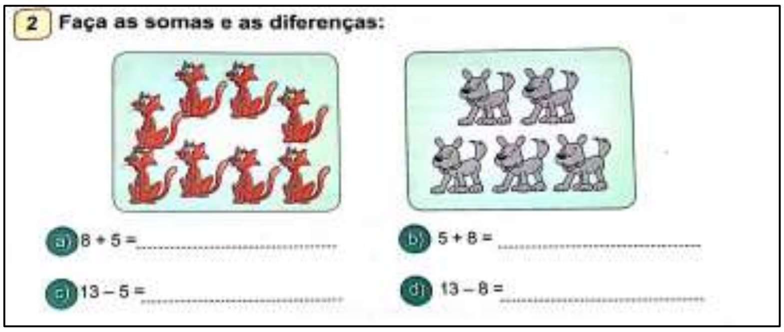
( ) sim ( ) não

Quem o auxilia? ____________________________

## Anexo F

## Modelo de tarefa aplicada na aula 1

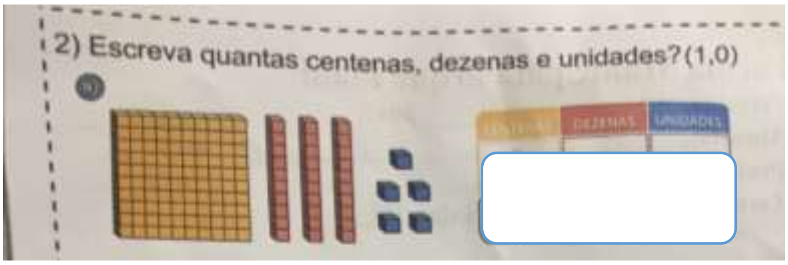
- *Operação de adição e subtração até 20*



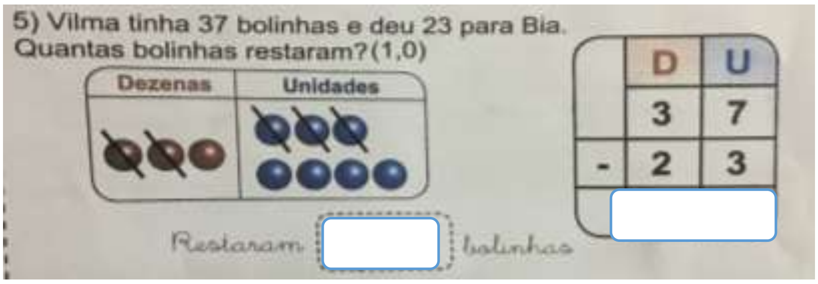

- *Problemas de adição e subtração até 100, em QVL*

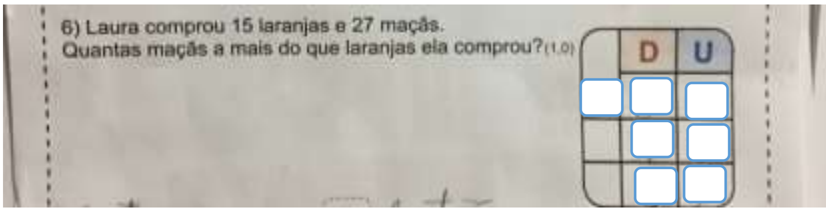

## Anexo G

### Modelo de tarefa aplicada na aula 4







## Anexo H

**Modelo de sequência de telas apresentadas da Plataforma digital *Khan Academy* ([https://pt.khanacademy.org/](https://pt.khanacademy.org/)) durante a aplicação das tarefas de matemática**

Apresentação da tarefa


Resposta sem uso da “dica”


Resposta com uso da “dica *Khan Academy*”


Resposta com uso do vídeo “*Khan Academy*”


Consequência da resposta correta


Consequência ao final do bloco de questões