

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Equações MHD para plasmas de impacto -  
Dedução e soluções analíticas**

**Laís de Souza Alves**

**Brasília, Dezembro de 2017**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

Instituto de Física

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Física

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Equações MHD para plasmas de impacto -  
Dedução e soluções analíticas**

**Laís de Souza Alves**

*Relatório submetido ao*

*Instituto de Física como requisito parcial*

*para obtenção do grau de Mestre em Física*

Banca Examinadora

Prof. Tarcício Marciano Rocha, IF/UnB

*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. Annibal Dias de Figueiredo Neto,

IF/UnB

*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

Prof. Prof. Bruno Vieira Ribeiro, IFB

*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

Prof. Amílcar Rabelo de Queiroz, IF/UnB

*Suplente*

\_\_\_\_\_

## **Dedicatória**

*À memória de Matheus Ferreira, amigo e colega de classe, um poço de mistérios...  
Deus possui planos inalcançáveis à imaginação humana.*

*Laís de Souza Alves*

## Agradecimentos

*Gostaria de agradecer primeiramente à Deus, por ser essencial em minha vida, meu guia, socorro presente na hora da angústia e por me proporcionar este sofrimento quase infindável, o qual me fez crescer um pouco mais. À minha família, que me deu suporte emocional e apoio financeiro antes de qualquer um. À Marina, minha melhor amiga e companheira, por ter me ajudado com seu apoio emocional, com sua incrível capacidade de análises e com todo o seu amor, me acolhendo durante os tempos de estresse. À CAPES por ter me apoiado financeiramente durante dois anos de mestrado. À Alexandra Elbakyan, criadora do Sci-Hub, facilitadora do acesso ao conhecimento científico, por sua grande contribuição e ato heroico, devolvendo ao povo o que é do povo. Ao Arlon (in memoriam), companheiro de sala, por realmente ouvir meus desabafos e pelas risadas sinceras advindas do sarcasmo gozador desta absurda vida. Ao Elder, por sua “co-orientação”, pelas conversas e pela nova amizade. Ao Pedro Henrique, amigo e o professor mais didático que já conheci, por ter sido um ouvinte e um apoio no momento que eu mais precisava, além de ter me ajudado imensamente com a escrita científica. Aos vários outros professores e amigos que fizeram parte da minha caminhada e do meu aprendizado ao longo deste mestrado, pela companhia, risadas e conhecimento compartilhados. E, por último e não menos importante, ao Marciano, primeiramente amigo antes de orientador, que me salvou do fundo do poço em um momento que eu imaginei não existir mais solução (tanto figuradamente, quanto literalmente), sou eternamente agradecida.*

*Laís de Souza Alves*

---

## RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo descrever o campo magnético produzido num impacto meteorítico. O crateramento por impacto é o mais rápido processo geológico do qual se tem conhecimento. Ele é considerado um dos agentes mais importantes na alteração morfológica planetária. Durante um impacto hiperveloz, as enormes variações de pressão e temperatura são responsáveis pela geração de plasmas e pela criação de um sistema geoquímico único. Dados recentes da *Mars Global Surveyor*, em Marte, sugerem uma forte ligação entre os grandes eventos de impacto ocorridos naquele planeta e a configuração das anomalias magnéticas sobre as crateras de Hellas, Argyre e Isidis. Todavia, as possíveis fontes destas anomalias permanecem motivo de debate. Uma fonte, ainda pouco compreendida, é devida à interação dos plasmas formados durante o impacto hiperveloz com o campo magnético ambiente. Este plasma é capaz de produzir novos campos magnéticos e ainda intensificar o campo magnético ambiente. Este processo pode gerar campos transientes com intensidade da mesma ordem dos campos paleomagnéticos observados em produtos de crateramento. A fim de se elucidar o processo de produção e amplificação de campos magnéticos, esta dissertação descreve o plasma formado durante o impacto hiperveloz através do modelo magnetohidrodinâmico (MHD). Deduz-se as equações constituintes do sistema a partir das equações de Boltzmann, calculando os seus momentos. Faz-se uma estimativa de campo máximo produzido para um impacto de grande escala. Ao final, procura-se encontrar uma solução analítica do sistema, através das simetrias de Lie, que descreva um comportamento similar ao esperado. Utilizando-se o pacote para Maple SADE, foi realizada uma primeira análise das simetrias clássicas do sistema constituinte. As soluções obtidas são soluções particulares do sistema e demonstram a ampla gama de soluções analíticas que podem ser encontradas por meio do método de simetrias. Compreendendo melhor como o campo magnético gerado se comporta, os modelos paleomagnéticos que visam descrever a história geológica de um determinado planeta podem ser melhor desenvolvidos, iluminando, assim, a história por detrás da formação planetária.

---

## ABSTRACT

This dissertation aims to describe the resulting magnetic field produced by a meteoritic impact. Impact cratering is the fastest geological process known. It is one of the most important processes in planetary morphological modification. During a hypervelocity impact, huge variations in pressure and temperature are responsible for plasma generation and the creation of a unique geochemical system. Recent Mars Global Surveyor data suggest a strong link between major impact events on that planet and a configuration of the magnetic anomalies on Hellas, Argyre and Isidis craters. However, the sources of these magnetic anomalies remain a matter of debate. One source, still poorly understood, is due to the interaction of impact plasmas with the ambient magnetic field. This plasma can generate new magnetic fields and further intensifying the surrounding magnetic field. It is possible that this process generate transient fields with the same order of paleomagnetic fields observed in lunar craters. In order to elucidate the process of production and amplification of magnetic fields, this dissertation describes the plasma formed during an hypervelocity impact through the magnetohydrodynamic (MHD) model. The constituent equations of the system are deduced from the moments of Boltzmann equations. A first estimate of the maximum field range is calculated for a large-scale impact. Then, using Lie symmetries, we search for an analytical solution, which describes a behavior similar to that expected. Using the Maple package SADE, a first analysis of the classical symmetries of the constituent system was performed. The solutions obtained are particular solutions of the system and demonstrate a wide range of analytical solutions that can be found through the symmetries method. Understanding how the generated magnetic field behaves, the paleomagnetic models that aim to describe a geological history of a given planet can be better developed, thus illuminating the history behind the planetary formation.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO</b>	<b>7</b>
2.1	PROCESSO DE CRATERAMENTO	10
2.1.1	ESTÁGIO DE CONTATO E COMPRESSÃO	12
2.1.2	ESTÁGIO DE ESCAVAÇÃO: A CRATERA TRANSIENTE	13
2.1.3	ESTÁGIO DE MODIFICAÇÃO	16
2.1.4	DESENVOLVIMENTO POSTERIOR AO PROCESSO DE CRATERAMENTO POR IMPACTO	17
2.2	TRABALHOS ANTERIORES SOBRE PLASMAS GERADOS POR IMPACTO	17
<b>3</b>	<b>FORMAÇÃO DE PLASMAS</b>	<b>20</b>
3.1	DEFINIÇÃO DE PLASMAS	21
3.2	FORMAÇÃO E EXPANSÃO DE PLASMAS GERADOS POR IMPACTOS HIPERVELOZES	24
3.2.1	ESTÁGIO DE ACUMULAÇÃO	25
3.2.2	ESTÁGIO DE EQUILÍBRIO	27
3.2.3	ESTÁGIO DE ATENUAÇÃO	28
3.3	ELEMENTOS REGENTES DAS CARACTERÍSTICAS DO PLASMA GERADO POR IMPACTO	30
<b>4</b>	<b>DESCRIÇÃO MAGNETOHIDRODINÂMICA (MHD) DA EXPANSÃO DO PLASMA</b>	<b>34</b>
4.1	MOMENTOS DA EQUAÇÃO DE BOLTZMANN	35
4.1.1	O MOMENTO DE ORDEM ZERO: EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE	40

4.1.2	O MOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM: EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE MOMENTUM .....	43
4.1.3	O MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM: EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ENERGIA .....	48
4.2	EQUAÇÕES MAGNETOHIDRODINÂMICAS (MHD).....	52
4.2.1	MODELO DA GERAÇÃO DE CAMPOS MAGNÉTICOS MHD .....	59
<b>5</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>65</b>
5.1	PARÂMETROS DE IMPACTO .....	68
5.2	CAMPOS MAGNÉTICOS GERADOS EM UM IMPACTO METEORÍTICO .....	73
5.3	AS SIMETRIAS DE LIE PARA AS EQUAÇÕES MHD .....	77
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>86</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>89</b>



# LISTA DE FIGURAS

1.1	Perfil da expansão da nuvem de plasma produzida por um impacto meteorítico. Créditos: Ivan S. Ferreira.....	3
1.2	Mapa magnético crustal de Marte a uma altitude de 185 <i>km</i> , evidenciando as anomalias magnéticas associadas à estruturas de impacto. Algumas bacias de impacto são mostradas como círculos sólidos, assim como cada anel nas bacias multi-anelares. As abreviações em vermelho referem-se às crateras de Scopolus (Sc), Amenthes (Am), Zephyria (Ze), Southeast Elysium (SE) e Amazonis (Az), associadas à anomalias magnéticas positivas, e as abreviações em azul referem-se às crateras de Utopia (Ut), North Polar (NP), Isidis (Is) e Hellas (He), associadas à anomalias magnéticas negativas. Compilado de Lillis <i>et al.</i> (2010). ....	5
2.1	Ondas de choque e isolinhas de pressão obtidas por meio de simulação computacional de um impacto meteorítico. Os valores são dados em unidades de <i>GPa</i> . Compilado de French (1998). ....	13
2.2	Estágio de escavação e a cratera transiente. Adaptado de French (1998). ....	14
3.1	Diferentes curvas obtidas através de equações de produção de cargas. Cada cor representa equações distintas obtidas pelos respectivos autores, considerando a mesma massa de projétil ( $3,70 \times 10^{-4}$ <i>kg</i> ). QR é a curva obtida por Ratcliff <i>et al.</i> (1997), QL a curva obtida por Li <i>et al.</i> (2014), QMC a curva obtida por McBride e McDonnell (1999) e QD a curva obtida por Dietzel <i>et al.</i> (1972).....	26
3.2	Comparação entre temperaturas eletrônicas obtidas de resultados teóricos e resultados experimentais detectadas por uma sonda fixa para distintas velocidades de impacto, no experimento realizado por Ju <i>et. al</i> (2014).....	29

5.1	Estimativa da carga total gerada num impacto meteorítico para diversas velocidades de impacto, considerando um projétil rochoso do tipo S com 100 m de diâmetro. Cada curva corresponde à diferentes equações obtidas empiricamente. QR é a curva correspondente à equação obtida por Ratcliff <i>et al.</i> (1997), QMC à equação obtida por McBride e McDonnel (1999) e QD à equação obtida por Dietzel <i>et al.</i> (1972). .....	69
5.2	Estimativa da carga total gerada num impacto meteorítico em função da velocidade de impacto, considerando um projétil rochoso do tipo S com 100 m de diâmetro. A curva vermelha (QL) é correspondente à equação obtida por Li <i>et al.</i> (2014) e a curva em azul (QD) é a curva correspondente à equação obtida por Dietzel <i>et al.</i> (1972).....	70
5.3	Densidade eletrônica produzida num impacto meteorítico considerando um projétil de 100 m de diâmetro, considerando a equação obtida por Ju <i>et. al</i> (2014). .....	72
5.4	Campo magnético azimutal em função da altitude a partir do ponto de impacto, considerando um impacto meteorítico em grandes escalas. O diâmetro do projétil considerado foi de 100 m, do tipo rochoso (tipo-S), impactando um alvo rochoso sob pressão nula a uma velocidade de $v_p = 20 \text{ km/s}$ . .....	76
5.5	Campo magnético azimutal em função da distância para um impacto meteorítico em grandes escalas. O diâmetro do projétil considerado foi de 100 m, do tipo rochoso (tipo-S), impactando a uma velocidade de $v_p = 20 \text{ km/s}$ . .....	77
5.6	Perfil, em coordenadas cilíndricas, de uma das soluções particulares do campo magnético obtido através das simetrias de Lie, considerando $\vec{V}_m = V_z(\rho, \phi, z)\hat{\mathbf{z}}$ . Neste caso, $V_z$ é nula.....	85

# LISTA DE TABELAS

- 5.1 Características do projétil rochoso do tipo S escolhido ..... 67
- 5.2 Características do processo de crateramento produzido por um projétil de 100 *m*  
de diâmetro, considerando pressão local nula e gravidade local de 1,668 *m/s*<sup>2</sup>. ..... 67

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

<b>B</b>	Campo Magnético	[T]
$D_p$	Diâmetro do projétil	[m]
<b>E</b>	Campo Elétrico	[N/C]
$e$	Carga elementar	[A.s]
<b>F</b>	Força	[N]
<b>J</b>	Densidade de corrente elétrica	[A/m <sup>2</sup> ]
$k_B$	Constante de Boltzmann	[J/K]
$L$	Comprimento característico do sistema	[m]
$m_p$	Massa do projétil	[kg]
$N$	Densidade	[m <sup>-3</sup> ]
$p$	Pressão escalar	[J/m <sup>3</sup> ]
$q$	Carga elétrica	[C]
<b>q</b>	Densidade de calor transportado	[J/m <sup>2</sup> .s]
$Q$	Carga produzida num impacto meteorítico	[C]
$Q_{ab}$	Calor produzido nas partículas $a$ devido às colisões com as partículas $b$	[J]
$r_0$	Profundidade de penetração do projétil	[m]
$T$	Temperatura	[K]

$\mathbf{u}$	Velocidade relativa de plasma	[m/s]
$\mathbf{V}$	Velocidade média de fluido	[m/s]
$V_m$	Velocidade média do plasma ponderada pela massa	[m/s]
$V_{plas}$	Volume de plasma	[m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{X}$	Gerador de simetria infinitesimal	
$\mathbf{w}$	Velocidade randômica (térmica)	[m/s]

### Símbolos Gregos

$\alpha$	Coefficiente de massa	
$\beta$	Coefficiente de velocidade	
$\Delta$	Varição entre duas grandezas similares	
$\nabla$	Operador de derivadas	
$\lambda$	Parâmetro de Coulomb	
$\Gamma$	Transformação de simetria	
$\lambda_D$	Comprimento de Debye	[m]
$\rho$	Densidade de carga	[A.s/m <sup>3</sup> ]
$\rho_m$	Densidade de massa	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau$	Tempo característico	[s]
$\tau_n$	Tempo médio de colisão entre partículas neutras	[s]
$\tau_D$	Tempo médio de difusão do plasma	[s]
$\tau_E$	Tempo médio de deposição da energia cinética	[s]
$\omega_p$	Frequência de plasma	[s <sup>-1</sup> ]
$\eta$	Resistividade de plasma	[V.m/A]
$\nu_{ei}$	Frequência de colisão	[s <sup>-1</sup> ]
$\sigma$	Condutividade	[J/A.s]
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo	[N/A <sup>2</sup> ]
$\Psi$	Tensor de pressão	[J/m <sup>3</sup> ]
$\epsilon_0$	Permissividade do vácuo	[A <sup>2</sup> s <sup>4</sup> /m <sup>3</sup> kg <sup>1</sup> ]
$\pi_{ij}$	Tensor de estresse de cisalhamento	[J/m <sup>3</sup> ]

## Grupos Adimensionais

$C_{ab}$	Taxa de colisão entre partículas $a$ e $b$
$\mathbf{R}_{ab}$	Termo de colisão entre partículas $a$ e $b$
$k$	constante de impacto do material alvo
$N_D$	Número de elétrons no interior da esfera de Debye
$Re_M$	Número de Reynolds magnético
$Z$	Número iônico (grau de ionização)

## Subscritos

$amb$	ambiente
$dec$	decaimento
$e$	eletrônica
$for$	formação
$i$	iônica
$max$	máximo
$p$	projétil
$plas$	plasma
$vis$	viscosidade

## Sobrescritos

$\leftrightarrow$	Grandeza tensorial
$\sim$	Forma evolutiva

## Siglas

LTE	Equilíbrio termodinâmico Local
MHD	Magnetohidrodinâmica
MGS	<i>Mars Global Surveyor</i>
RF	Radiofrequência
PDF	Feições Planares de Deformação
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrocode</i>
SRM	Magnetização Remanescente por Choque
TRM	Magnetismo termorremanescente

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho trata a respeito de plasmas formados durante um impacto meteorítico. O plasma é um gás eletricamente carregado, comumente referido como o quarto estado da matéria. Suas propriedades diferem profundamente dos outros estados, como o gasoso, o líquido e o sólido. Na passagem do estado líquido para o gasoso, uma certa quantidade mínima de energia é necessária para que se quebrem as ligações das forças de Wan Der Walls. Da mesma forma, a energia cinética das partículas deve exceder o potencial de ionização dos átomos (da ordem de alguns eV) para que um gás passe a se comportar como um plasma. Assim, podemos diferenciar os estados da matéria pela energia cinética média por partícula, a qual é capaz de determinar diferentes graus de organização da matéria.

Quando um gás neutro é aquecido a altas temperaturas, ou caso esteja sujeito a campos elétricos intensos o suficiente, os elétrons podem se dissociar dos átomos e moléculas devido às colisões, como resultado do grande aumento da agitação térmica das partículas. Um gás no estado de plasma é composto por uma grande quantidade de elétrons e átomos ionizados, além de poder conter átomos e moléculas neutras, como aquelas presentes em um gás não-ionizado (*i.e.*, um gás neutro). A distinção mais importante entre um gás neutro e um plasma, é a sua dinâmica, na qual, para descrevê-la, deve-se levar em conta as interações de Coulomb entre as partículas carregadas. Quando um gás é ionizado, mesmo a baixos graus de ionização ( $\sim 1\%$  dos átomos e/ou moléculas ionizados), seu comportamento dinâmico passa a ser dominado pelas forças eletromagnéticas que agem nos íons e elétrons livres. Por conta disto, este gás



passa a conduzir corrente elétrica e a reagir aos campos eletromagnéticos. Em contrapartida, os movimentos organizados dessas partículas carregadas (*e.g.*, correntes elétricas, flutuações na densidade de carga) produzem campos eletromagnéticos [1].

Um dos processos capazes de gerar plasmas é o processo de crateramento por impacto. Grandes quantidades de energia estão associadas ao impacto meteorítico, o qual modifica o estado da matéria impactada devido às grandes variações de pressão e temperatura. As crateras de impacto se formam quando corpos sólidos relativamente pequenos, tais como um meteorito ou um cometa, colidem com a superfície de um planeta rochoso. Este é o processo geológico mais rápido que se tem conhecimento [2] e é considerado como o processo mais importante na formação de planetas e na modificação da biosfera terrestre [3]. A partir das décadas de 60 e 70, as explorações lunares e do sistema solar, assim como estudos acerca do crateramento por impacto, se tornaram mais frequentes. Estes estudos demonstram a importância que os impactos meteoríticos possuem na origem e evolução dos corpos sólidos do sistema solar e o seu aprofundamento vem desvendando aspectos cada vez mais complexos do processo formador de crateras.

Um destes aspectos é a influência dos plasmas na amplificação de campos magnéticos ambientes e a sua interação com as rochas-alvo e tektitos ejetados durante a fase de escavação [2, 4]. Estas interações ocorrem em crateramentos por impactos hipervelozes. Um impacto hiperveloz é aquele em que a velocidade do projétil é maior que a velocidade do som no alvo (tipicamente entre 5 a 8  $km/s$ , para rochas-alvo do sistema solar). Ele é capaz de vaporizar completamente o projétil [5] e parte do alvo conforme gera uma grande quantidade de plasmas devido às altas energias envolvidas [6]. Nestas nuvens de plasmas se formam correntes elétricas e campos magnéticos [7], desde os momentos iniciais da formação da cratera e ionização do projétil até o momento em que o plasma passa a se expandir para fora da cratera recentemente formada, como mostrado na figura 1.1.

Além disto, o impacto é também capaz de gerar temperaturas acima das temperaturas de Curie dos minerais portadores magnéticos. Quando o portador magnético, presente nas rochas-alvo, se encontra acima da temperatura de Curie, ele passa a se comportar como um material paramagnético. Por conta disto, os seus momentos magnéticos tendem a se alinhar ao campo magnético local. Este material, se resfriando novamente a temperaturas abaixo da

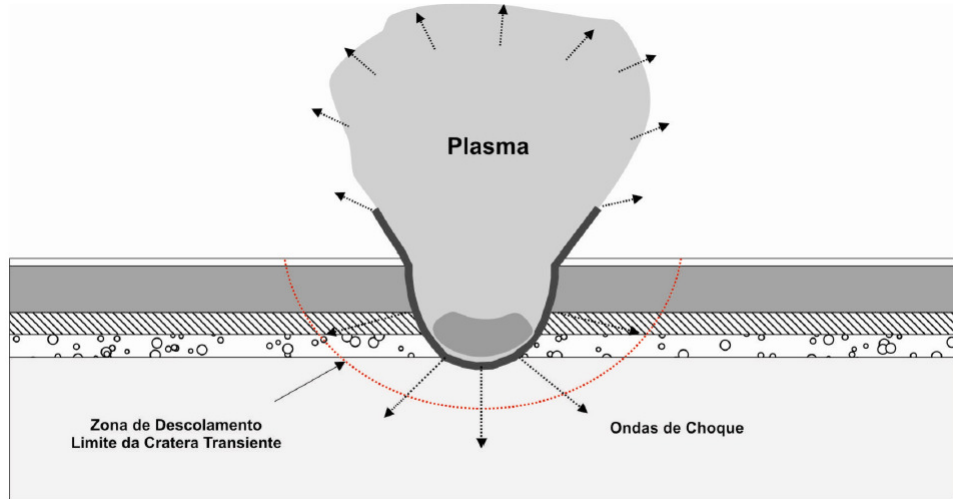


Figura 1.1: Perfil da expansão da nuvem de plasma produzida por um impacto meteorítico. Créditos: Ivan S. Ferreira.

sua temperatura de Curie, “congela” a direção dos seus momentos magnéticos paralelamente aos campos magnéticos locais. Estes campos podem ser originados do próprio planeta ou de campos magnéticos transientes gerados pelos plasmas oriundos do impacto [8]. Este processo de aquisição magnética é chamado de magnetismo termorremanescente (TRM) e pode ocorrer com os materiais ejetados e as rochas processadas neste campo local [7].

Durante impactos com energia suficiente, materiais vão sendo ejetados à medida que ocorre também a formação e expansão do plasma. Por conta disto, uma cortina de poeira atravessa esta nuvem de gás, formando um sistema conhecido como plasma empoeirado (*dust plasma* em inglês). O plasma empoeirado nada mais é que um gás carregado composto por partículas de poeiras capazes de alterar certas características do sistema, como a condutividade ou como os campos máximos produzidos.

Tanto a Lua, quanto planetas como a Terra e Marte, possuem crateras originadas por impacto. A teoria mais aceita para explicar a magnetização remanescente de Marte sugere que a crosta marciana se resfriou abaixo da temperatura de Curie enquanto o dínamo do planeta ainda estava ativo [9, 10]. De forma similar como ocorre na Terra ou na Lua, os materiais ferrosos gravaram a direção destes campos antigos em seus momentos magnéticos. Mas, ao analisar o mapa magnético das superfícies planetárias, é possível verificar a existência de diversas anomalias

magnéticas, isto é, de padrões magnéticos que podem variar de acordo com a presença de crateras geradas por impacto. Muitas dessas anomalias ainda não possuem explicação.

Como mostrado na figura 1.2, grandes crateras como as de Hellas, Agyre e Isidis, em Marte, demonstram uma anomalia magnética negativa, ou seja, o campo magnético proveniente das rochas crateradas é menor que o campo crustal ao seu redor. Isso indica uma forte ligação entre o evento de impacto e a magnetização anômala resultante. Mas anomalias magnéticas negativas associadas à crateras de impacto nem sempre ocorrem, como pode ser observado nas amostras obtidas pela missão Apollo 17 [11, 12]. A produção de campos transientes pode ser uma alternativa plausível frente ao modelo de magnetização devido a um dínamo lunar ancient [7]. A evolução deste sistema (*i.e.*, da criação, da modificação, e da diferenciação da morfologia), pode gerar mudanças paleomagnéticas nas rochas impactadas. Se entendidas, essas mudanças podem auxiliar na interpretação de dados remotos, como por exemplo, os obtidos pela *Mars Global Surveyor* (MGS), em Marte. A formação de plasmas, durante os impactos hipervelozes, faz parte dessa evolução e tem-se mostrado como um processo importante para a modificação paleomagnética de certas crateras. Entender como este plasma produz e modifica o campo magnético local, pode auxiliar na identificação de alguns parâmetros de impacto (*e.g.*, ângulo e velocidade de impacto) [12, 13, 14].

A fim de se compreender os processos envolvidos num impacto hiperveloz, vários experimentos em laboratório já foram realizados, em diversos regimes meteoríticos de velocidade e massa, de forma a se obter diversas características do plasma gerado por impacto. Crawford e Schultz (1993) mediram a condutividade, a densidade e a temperatura de plasmas, assim como os campos magnéticos produzidos após o impacto, utilizando uma *light gas gun* com um projétil de alumínio de 0,64 cm, capaz de atingir velocidades de até 7 km/s, e variando o ângulo de impacto entre 15° até ~ 90° [12, 13, 15]. Lee *et al.* (2013) estudaram os impactos de projéteis em alvos carregados e aterrados, e obtiveram uma “temperatura de plasma”<sup>1</sup>, termo utilizado de

---

<sup>1</sup>No campo de física de plasmas é mais conveniente expressar a temperatura de um gás em equilíbrio termodinâmico em unidades de energia (*eV*). Geralmente a energia correspondente à  $k_B T$  é usada para denotar a temperatura. Por exemplo, considerando  $k_B T = 1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ , o fator de conversão é  $1 \text{ eV} = 11600 \text{ K}$ . Assim, ao dizermos que um plasma possui uma temperatura de 2 *eV*, estamos dizendo que  $k_B T = 2 \text{ eV}$ , ou que a temperatura absoluta é de 23500 *K*, ou que este plasma possui uma energia média (tridimensional) de  $E_{av} = \frac{3}{2} k_B T = 3 \text{ eV}$ .

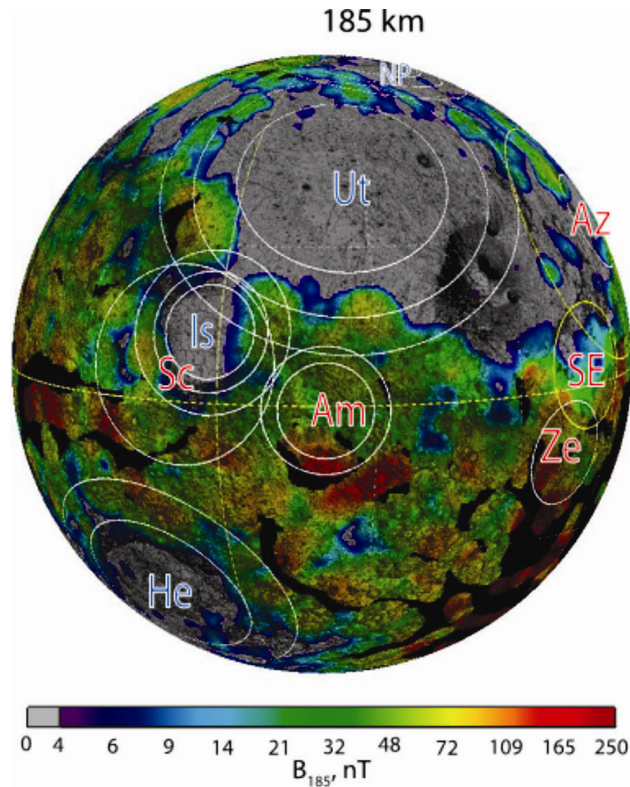


Figura 1.2: Mapa magnético crustal de Marte a uma altitude de 185 *km*, evidenciando as anomalias magnéticas associadas à estruturas de impacto. Algumas bacias de impacto são mostradas como círculos sólidos, assim como cada anel nas bacias multi-anelares. As abreviações em vermelho referem-se às crateras de Scopolus (Sc), Amenthes (Am), Zephyria (Ze), Southeast Elysium (SE) e Amazonis (Az), associadas à anomalias magéticas positivas, e as abreviações em azul referem-se às crateras de Utopia (Ut), North Polar (NP), Isidis (Is) e Hellas (He), associadas à anomalias magnéticas negativas. Compilado de Lillis *et al.* (2010).

forma abrangente ao longo deste trabalho, de 2 *eV* para as velocidades de 10 a 30 *km/s* [16].

Até então, já se realizaram inúmeras simulações balísticas de impacto, a fim de se entender o padrão de distribuição dos detritos ejetados. Por outro lado, foram realizadas apenas algumas simulações recriando o plasma produzido por impacto nesta última década, dentre as quais duas se destacaram. Song *et al.* (2016) simularam impactos entre 5 e 10 *km/s* utilizando tanto um *hydrocode* comercial quanto um código próprio, com o intuito de analisar a carga total gerada e comparar a temperatura, a densidade e a condutividade do plasma, obtidas numericamente.

mente, com seus resultados empíricos [17, 18]. Fletcher *et al.* (2015), realizaram um estudo mais detalhado e avançado. Utilizando o método *Smoothed Particle Hydrocode* (SPH) para simular impactos de 10 a 72 *km/s* com projéteis de  $10^{-15}$  a  $10^{-9}$  gramas, obtiveram a dependência da massa e velocidade do projétil nos parâmetros de plasma (*e.g.*, velocidade de expansão do plasma, porcentual de ionização (em inglês, *charge state*), carga total gerada) [6].

Neste trabalho, procura-se descrever, através da teoria magnetohidrodinâmica (MHD), o campo magnético devido à produção de plasmas originados de impactos meteoríticos. Para tal, obtêm-se a equação de difusão do campo magnético a partir dos momentos de Boltzmann. Para a descrição de parâmetros desse plasma, utiliza-se diversas formas funcionais baseadas em experimentos de laboratório. Com isto realiza-se uma primeira estimativa do campo magnético máximo gerado. Por fim, procura-se soluções analíticas do sistema que contém a equação de difusão do campo magnético através das simetrias de Lie. Desta forma, buscaremos compreender como o campo magnético produzido se comporta no caso de um plasma ideal (*i.e.*, sem considerar a presença de poeira no plasma).

No capítulo 2 é feita uma rápida revisão bibliográfica sobre o processo de crateramento por impacto. Em seguida, o capítulo 3 descreve o plasma e suas características fundamentais, assim como os estágios contidos na expansão do plasma gerado por esses impactos hipervelozes. O capítulo 4 contém o desenvolvimento da descrição MHD do plasma. O capítulo 5 possui uma breve discussão sobre o campo magnético máximo produzido num impacto de grande escala e as soluções obtidas do sistema de equações MHD utilizando-se as simetrias de Lie. Por fim, no capítulo 6 tem-se as conclusões do estudo juntamente com as principais perspectivas para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Contextualização

Os eventos de impactos, principalmente os de maior amplitude, possuíram uma grande importância para a formação planetária no início da história do nosso sistema solar. As teorias mais recentes pressupõem que os planetas foram formados devido à constante acreção de pequenos objetos, chamados planetesimais [2]. Devido à grande energia liberada pelos impactos, a temperatura destes planetas em formação se encontrava a temperaturas muito acima da temperatura de Curie de diversos materiais ferromagnéticos. Naturalmente, nestas temperaturas, as substâncias mais densas, como o ferro, deslocam-se para o centro destes planetas, formando um núcleo central. Caso este núcleo for formado por substâncias metálicas, ele pode ser capaz de produzir um campo magnético próprio (*i.e.*, dínamo central), como ocorre com o planeta Terra [19].

De maneira geral, os planetas tendem a se resfriar devido à menor frequência de grandes colisões. Mas, mesmo após 4,5 bilhões de anos após a formação do sistema solar, o bombardeio cósmico continua sendo um processo frequente. Bilhões de partículas extraterrestres colidem com a Terra, de forma praticamente contínua e lenta, acumulando cerca de 100 toneladas de material extraterrestre diariamente [20, 21]. A maioria deste material se adentra na atmosfera terrestre na forma de pequenas partículas, do tamanho de poeiras microscópicas à alguns centímetros.

Mínerais magnéticos, presentes nas rochas, assim como nos meteoroides, são capazes de reter informações referente aos campos magnéticos primordiais. Devido à diminuição em sua temperatura, os materiais magnéticos, presentes nas crostas planetárias, são capazes de reter

informações do campo magnético ambiente. Mas esta magnetização remanescente pode ser alterada por distintos processos, entre eles os impactos subsequentes à formação planetária. Estes impactos modificam a magnetização remanescente na região craterada, formando o que chamamos de anomalias magnéticas. Estas anomalias podem possuir uma magnetização remanescente maior ou menor que a anterior, podendo inclusive ser nulas [22, 23].

Como as velocidades de impacto dos projéteis do sistema solar são altas, da ordem de dezenas de quilômetros por segundo, as suas energias cinéticas também são relativamente grandes, mesmo para pequenos objetos. Um objeto de apenas alguns metros de diâmetro, é capaz de liberar uma quantidade de energia próxima à de uma bomba atômica [2]. A energia num impacto meteorítico é proporcional a velocidade cinética do projétil de  $\frac{1}{2}m_p v_p^2$ , onde  $m_p$  é a massa do projétil e  $v_p$  a velocidade de impacto do projétil contra o alvo. As velocidades cósmicas típicas são relativamente altas. Considerando a ausência de atmosfera, a velocidade mínima de colisão com a Terra, por exemplo, seria de  $11,2 \text{ km/s}$  (*i.e.*, igual à velocidade de escape). Por conta disto, o impacto de um objeto de alguns quilômetros de diâmetro é capaz de, em apenas algumas segundos, liberar mais energia que toda a Terra libera em centenas ou milhares de anos por meio de terremotos, vulcanismo e processos tectônicos [2].

A energia liberada durante o impacto, e a consequente formação de uma cratera de impacto, é quase instantânea. Como as velocidades de impacto no nosso sistema solar geralmente são maiores que a velocidade do som na rocha, (tipicamente de  $5$  a  $8 \text{ km/s}$ ), a energia cinética do projétil é convertida em ondas de choque supersônicas de alta pressão. As pressões transientes são capazes de exceder  $500 \text{ GPa}$  no ponto de impacto, podendo atingir até  $50 \text{ GPa}$  ao longo de grandes regiões em torno do impacto. Nos locais de maior pressão ( $> 60 \text{ GPa}$ ), as temperaturas produzidas podem ser superiores à  $2000 \text{ }^\circ\text{C}$ . Por conta disto, as ondas de choque produzidas são capazes de estilhaçar, deformar, fundir e até vaporizar as rochas-alvo em apenas alguns segundos [2].

Alguns fatores podem desmagnetizar as rochas impactadas, como a desmagnetização pela passagem de ondas de choque na ausência de um campo magnético ambiente, que é mais comum em grandes impactos (crateras finais com diâmetros maiores que  $100 \text{ km}$ ). A desmagnetização química, devido à presença de óxidos na atmosfera, também é capaz de desmagnetizar a rocha em questão [23]. Apesar disto, existem processos ainda pouco estudados capazes de influ-

enciar a aquisição de remanência magnética, como a produção de plasmas devido a um impacto hiperveloz [13].

As amostras lunares magnetizadas trazidas para Terra, assim como a existência de anomalias magnéticas permanentes na superfície lunar, são fortes indícios de que ao menos a porção mais externa da Lua foi magnetizada recentemente durante sua história de formação. O papel da magnetização remanescente por choque (SRM) e da magnetização termorremanescente (TRM) no magnetismo lunar, seria mais claro se campos magnéticos locais pudessem ser amplificados durante o impacto. Valores de palointensidade observados na superfície lunar se encontram entre  $10^{-6}$  à  $10^{-4}$  T [24]. A origem destes campos eram desconhecidas até a década de 70. Como alternativa à teoria de campos gerados por dínamos centrais, Srnka (1977) propôs um mecanismo de produção de campos magnéticos, utilizando a teoria MHD, devido a gradientes de temperatura e densidade não alinhados no interior do plasma produzido [7].

Um problema acerca da hipótese do dínamo central, como sendo a origem dos campos paleomagnéticos observados na superfície lunar, é o pequeno tamanho do núcleo de ferro da lua. Baseado em modelos disponíveis de geração de campos planetários [25], o seu tamanho atual geraria campos inferiores aos campos magnéticos máximos encontrados em sua superfície. Além disto, em Marte, por exemplo, maiores bacias de impacto, como as de Hellas e Argyre, não possuem grandes anomalias magnéticas associadas a elas. Assim, alguns autores inferem que o geodínamo deste planeta cessou suas atividades antes que estas bacias tenham se formado, em torno de 4 *Ga ap* [9].

Apesar de ser um modelo amplamente discutido, as evidências de magnetização em amostras lunares associadas a processos de crateramento não são fortes. Lin (1998) mostrou, através de dados obtidos por reflexão eletrônica, que os campos remanentes de crateras não são muito diferentes dos da área ao redor das crateras da região de *Mare* [22]. Mas por outro lado, a descoberta de regiões fortemente magnetizadas em outras partes da Lua, por Anderson (1978), perto de duas grandes crateras (não nomeadas na época), conduziu à sugestão de que cortinas de ejecta, provenientes de maiores crateras, depositadas na região craterada, são responsáveis pelas anomalias magnéticas [26]. Mesmo sendo difícil compreender como certos ejectas espalhados de forma randômica são capazes de adquirir uma componente uniforme de magnetização em um campo magnético transiente, tal mecanismo pode continuar sendo uma alternativa válida frente



ao modelo de magnetização devido a um hipotético dínamo lunar anciente.

Com a finalidade de melhor desenvolvermos o modelo MHD de um plasma formado durante um impacto meteorítico, procura-se esclarecer os principais pontos acerca do processo de crateramento por impacto. Nas seções seguintes, serão expostos os principais estágios da formação de crateras, assim como o momento e as condições necessárias para que se formem os plasmas de impacto. Será dada uma breve contextualização acerca das teorias que atualmente explicam as anomalias magnéticas. Ao final do capítulo, será feita uma breve revisão das principais pesquisas realizadas sobre plasmas gerados por impacto.

## 2.1 Processo de crateramento

O termo geral “cratera de impacto”, ou apenas “cratera”, é utilizado neste trabalho para designar uma cratera formada por um impacto hiperveloz. No caso da Terra, esta estrutura é formada devido ao impacto de um projétil cósmico. Este projétil deve ser grande e coerente o suficiente para penetrar a atmosfera terrestre e atingir sua superfície sem grande ou nenhuma desaceleração, ou seja, com aproximadamente sua velocidade inicial cósmica ( $>11,2 \text{ km/s}$ ). Tais projéteis são relativamente grandes, com diâmetros maiores que  $50 \text{ m}$ , para um objeto rochoso, e maiores que  $20 \text{ m}$  para um objeto mais coerente e rico em ferro. No momento que o projétil impacta a superfície alvo com velocidade maior que a velocidade do som neste alvo, uma cratera é produzida. Devido ao impacto, formam-se intensas ondas de choque, que se expandem ao longo do alvo, a partir do ponto de contato, a uma velocidade de alguns quilômetros por segundo. Essas ondas de choque são intensas ondas de *stress*, transientes e de alta pressão, e são singulares por não serem produzidas por outros processos geológicos ordinários. Elas são capazes de produzir pressões máximas da ordem de centenas de *GPa*, de forma a deformar, esticar, fundir e até vaporizar, em apenas alguns segundos ou minutos, grandes volumes das rochas alvo [27].

O tamanho da cratera depende de vários fatores, como as características do projétil (*i.e.*, a massa, a densidade, a velocidade, as propriedades físicas e o ângulo de impacto do projétil), as características do alvo (*i.e.*, a estrutura e suas propriedades físicas), assim como de outros fatores, tais como a aceleração da gravidade local, a presença de atmosfera e até como a energia cinética do projétil se transforma (*e.g.*, em mecânica, em cinética, em térmica) e se transfere

para o alvo [27].

As crateras podem ser divididas em três grupos de acordo com seu diâmetro: crateras simples, crateras complexas e bacias multi-anelares. Um dos fatores determinantes para a morfologia final da cratera é o seu próprio tamanho, o qual vai depender principalmente da dimensão, velocidade e porosidade do projétil, assim como da composição da rocha-alvo e da aceleração da gravidade do objeto-alvo [2]. As menores estruturas de impacto possuem uma forma final escavada em forma de “tigela” (crateras simples) e possuem apenas alguns quilômetros de diâmetro. Durante o estágio de modificação, as crateras simples são preenchidas, quase que imediatamente, até aproximadamente a metade de sua profundidade por material removido, ejetado e novamente depositado [2].

A transição entre crateras simples e complexas depende inversamente da aceleração da gravidade local, a qual é diferente para cada planeta e objeto do sistema solar. Na Lua, essa transição ocorre em torno de 20 *km* de diâmetro. Mas na Terra, ocorre em torno de apenas 2 – 4 *km* de diâmetro. Já a transição entre crateras complexas e multianelares ocorre em torno de 400 a 600 *km* na Lua, enquanto que na Terra ocorre para diâmetros maiores que 100 *km*. Por conta disso, é complicado aplicar dados obtidos de estruturas em outros planetas nas crateras de impacto terrestres.

As grandes estruturas de impacto (crateras complexas) possuem uma forma mais complicada devido à alteração reológica das rochas alvo produzida pelas altas pressões envolvidas no impacto, sendo caracterizadas principalmente pela presença de um núcleo central soerguido [2]. As maiores estruturas de impacto planetárias identificadas até então (bacias multi-anelares), possuem diâmetro de algumas centenas até milhares de quilômetros. Elas são caracterizadas pela presença de vários anéis centrais (dois ou mais) e são formadas pelo impacto de projéteis com dezenas a centenas de quilômetros de diâmetro. Elas são, em sua grande maioria, provenientes de um período inicial do sistema solar ( $> 3,9 \text{ Ga ap}$ ), quando objetos maiores eram mais abundantes e as colisões mais frequentes.

A fim de se entender melhor a evolução de um impacto hiperveloz, diversos experimentos em laboratório e simulações computacionais foram realizados, reasultando assim na criação de um modelo de formação de crateras que divide o processo de crateramento em três estágios

principais: O estágio de contato e compressão, o estágio de escavação e o estágio de modificação [2, 27]. Nas subseções a seguir, estes estágios serão melhores discutidos.

### 2.1.1 Estágio de contato e compressão

Este estágio tem duração de uma fração de segundos e consiste do momento em que o projétil atinge o alvo e penetra em até duas vezes o seu diâmetro, caso o alvo seja uma superfície rochosa [27]. Neste processo, o projétil transfere uma grande quantidade de energia cinética para o alvo através de ondas de choque geradas na superfície de contato. Estas ondas são ondas mecânicas de alta energia capazes de mudar abruptamente a pressão, a densidade, a velocidade e a temperatura das partículas do material [28]. A sua propagação em um sólido ocorre apenas se este for acelerado à velocidades supersônicas, ou seja, se a velocidade de impacto do projétil for maior que a velocidade do som do material da rocha-alvo. Esses impactos são chamados de impactos hipervelozes e, devido à sua energia, são capazes de vaporizar e ionizar parcialmente, ou totalmente, o projétil juntamente de parte do alvo [6].

À medida que as primeiras frentes de onda se expandem para dentro do alvo, outra porção de ondas de choque são refletidas de volta ao longo do projétil [27, 29]. Quando essas ondas de choque atingem o ponto do projétil mais distante do ponto de impacto, elas são novamente refletidas, de forma a se deslocarem na direção do alvo como ondas de rarefação (também chamadas ondas tensoriais). Durante a sua passagem, o projétil é aliviado das altas pressões produzidas podendo causar a sua vaporização. O momento em que as ondas de rarefação atingem o ponto de impacto e passam a penetrar o alvo já comprimido, marca o fim do estágio de contato e compressão. A partir de simulações computacionais, foi mostrado que ondas de choque concêntricas formadas no ponto de contato devido à pressão exercida do impacto, se propagam simultaneamente pelos dois corpos, projétil e alvo, como exposto na figura 2.1. Esta pressão é capaz de promover mudanças significativas no estado físico e químico das rochas impactadas [27].

Na passagem da onda de choque, a compressibilidade da rocha-alvo diminui devido ao aumento de pressão, formando também ondas de rarefação e de tensão como resposta. A transição do estágio de compressão e o estágio de escavação é marcada pela diminuição na densidade de energia das ondas de choque, devido à sua expansão, e ao aquecimento, deformação e aceleração

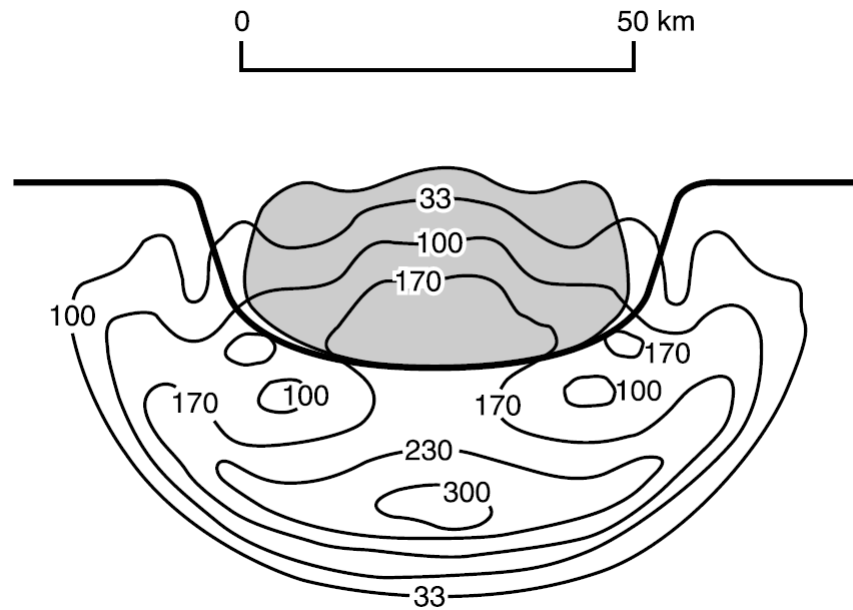


Figura 2.1: Ondas de choque e isolinhas de pressão obtidas por meio de simulação computacional de um impacto meteorítico. Os valores são dados em unidades de  $GPa$ . Compilado de French (1998).

da rocha-alvo. É neste momento de grandes flutuações na pressão e temperatura que uma parte do projétil e do alvo vaporizam-se, podendo ser ionizados totalmente, além de se expandirem na forma de plasma [30]. Devido às variações nas pressões de choque, associadas com as altas temperaturas geradas, o projétil e parte do alvo são derretidos, fundidos e vaporizados. A parte vaporizada deste material é “violentamente” misturada às rochas alvo fundidas e fraturadas, podendo também se expandir em forma de uma nuvem de vapor e plasma [27]. Após isto, o projétil não mais influencia na formação da cratera. A sua consequente excavação ocorre devido à expansão das ondas de choque [2].

### 2.1.2 Estágio de escavação: A cratera transiente

O breve estágio de contato e compressão rapidamente se converte no estágio de escavação, bem mais duradouro, no qual a cratera é escavada devido às complexas interações entre a superfície original e as ondas de choque em processo de expansão [27, 31]. Neste estágio, a cratera passa a se expandir, adquirindo uma geometria similar à de uma “tigela” — a cratera

transiente —, como mostrado na figura 2.2, não sendo maior que cerca da metade do tamanho da cratera final. A cratera transiente é um conceito chave na determinação de certos parâmetros de formação de crateras. Atualmente assume-se que todas as estruturas de impacto, independente de suas complexidades desenvolvidas após o impacto, passam pelo estágio da cratera transiente, de forma que este estágio é de uma grande importância para a comparação de crateras de diferentes tamanhos e/ou em diferentes planetas. Conhecer este estágio é importante também para a determinação de importantes parâmetros de impacto como, por exemplo, a energia envolvida no impacto, a velocidade de impacto e o tamanho do projétil [2].

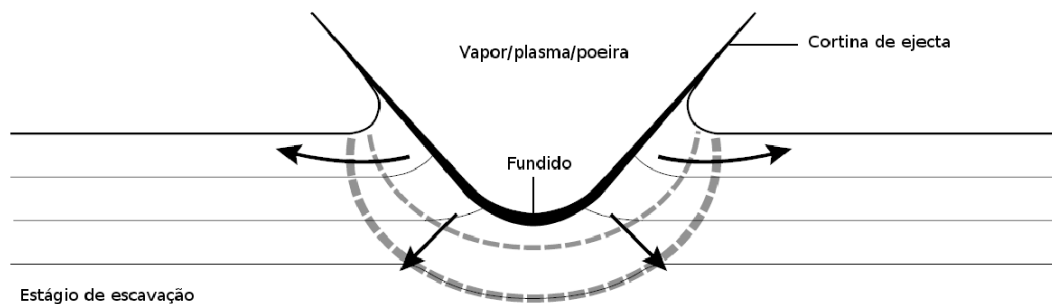


Figura 2.2: Estágio de escavação e a cratera transiente. Adaptado de French (1998).

Quando as ondas de choque atingem a superfície alvo original, ocorre a reflexão destas em forma de ondas de rarefação, que passam a se expandir juntamente das ondas de choque iniciais. Caso o estresse das ondas de rarefação exceda as forças de coesão das rochas-alvo, ocorrem fraturamentos e a fragmentação destas. Também devido à conversão de energia, diversos fragmentos de dentro da cratera (também chamados tectitos) são ejetados com velocidade da ordem de centenas de quilômetros por hora [2], velocidades altas o suficiente para jogar estes fragmentos ejetados para além da borda da cratera final [27, 32, 33, 34]. Mesmo a grandes distâncias do ponto de impacto, as pressões de choque permanecem altas, resultando em velocidades de ejeção maiores que  $100 \text{ m/s}$ . Por conta disto, o diâmetro final da cratera é bem maior que o diâmetro do projétil (tipicamente 20 – 30 vezes maior) [2]. À medida que a cratera se expande, as suas bordas se elevam, servindo como uma rampa para os materiais que continuam sendo ejetados e fazendo com que o ângulo de ejeção seja bem mais agudo neste estágio. Ao mesmo tempo geram-se plasmas no interior desta cratera transiente, que passam a se expandir ao final deste estágio.

Os impactos nas superfícies planetárias ocorrem em sua maioria em ângulos oblíquos, sendo extremamente raro um impacto ocorrer a ângulos retos [35, 36]. Geralmente, com exceção dos ângulos de impacto mais oblíquos, a ejeção produz um fluxo quase simétrico de material em torno do ponto de impacto [37, 38], tornando assim extremamente difícil a determinação do ângulo de impacto a partir da morfologia final da cratera. Além disto, como geralmente a forma final da cratera é circularmente simétrica, com exceção dos ângulos de impacto menores que  $15^\circ$  da horizontal, é comum assumir uma incidência vertical, a fim de se simplificar a dinâmica do impacto. Isso permite a aplicação de leis de escalonamento canônicas [39] para se inferir características do evento, tais como as velocidades de ejeção e a largura da cortina de material ejetado.

Por outro lado, nos impactos hipervelozes, a expansão do plasma depende fortemente do ângulo de impacto, ocorrendo de forma especular à direção de impacto [40]. Isto torna os campos magnéticos gerados pelo plasma totalmente assimétricos para ângulos de impacto altamente oblíquos ( $< 15^\circ$ ) [13]. Por conta disto, a simulação dos plasmas gerados pode ser capaz de explicar campos magnéticos remanentes assimétricos, podendo inclusive servir como um meio de caracterização dos parâmetros iniciais de impacto.

Eventualmente, após o impacto, chega-se a um ponto em que as ondas de choque e rarefação não possuem energia o suficiente para escavar e ejetar fragmentos de rocha. É neste momento que a expansão da cratera transiente se encerra, atingindo seu tamanho máximo e finalizando o estágio da escavação. O estágio de modificação se inicia logo em seguida, com a sua subsequente estabilização gravitacional [2]. Como será melhor explicado a seguir, este estágio não possui um limite temporal bem estabelecido. Ao final do estágio de escavação, formam-se os fundidos de impacto, que podem atingir milhares de  $km^3$  e temperaturas da ordem de milhares de graus celsius, além das brechas de diversos tipos, as quais podem auxiliar na determinação das pressões envolvidas no impacto [23]. Ao mesmo tempo, uma grande parte do material fragmentado, de diversos tamanhos (da ordem de  $10^{-6}$  à  $10^{-2}$  metros), se encontra viajando pelo ar, num processo de resfriamento durante sua ascensão e subsequente queda [8].

Apesar do estágio de escavação ser mais longo que o primeiro estágio de contato e compressão, ele ainda é extremamente rápido quando comparado a outros processos geológicos. Cálculos mais detalhados mostram que uma cratera de 1 quilômetro de diâmetro é escavada

em aproximadamente 6 segundos, enquanto uma com diâmetro de 200 quilômetros chega a ser escavada em aproximadamente 90 segundos [27]. Por conta disto, enquanto uma parte ainda está sendo escavada, as partes mais centrais já podem estar passando pelo processo de expansão de plasmas e assentamento de ejecta [2].

### 2.1.3 Estágio de modificação

O estágio de escavação termina quando a cratera transiente atinge seu tamanho máximo. Neste momento, as ondas que continuam a se expandir passam a ser ondas elásticas de baixa-pressão. Estas ondas não são mais capazes de agir no desenvolvimento da cratera por não possuírem energia suficiente para modificar as características físicas do material. A partir disto, a cratera transiente passa a ser modificada por fatores mais convencionais, como a gravidade e a resposta das rochas às condições atingidas.

Os momentos mais imediatos deste estágio duram um pouco mais que o estágio anterior de escavação. A estrutura remanescente passa a se acomodar em níveis gravitacionalmente estáveis. Mas vale notar que este estágio não possui um fim definido pela literatura, tal que os processos de modificação, de levantamento e colapso de um núcleo central, por exemplo, se misturam gradualmente com os processos normais geológicos (*e.g.*, movimento de massa, erosão, sedimentação) [2].

No caso das crateras simples, ocorre apenas o colapso das paredes da cratera, com o fluxo de material direcionado ao centro da estrutura. Já no caso das crateras complexas, ocorre também o soerguimento central do assoalho devido à reologia <sup>1</sup> das rochas durante o impacto, que é semelhante à de um fluido de Bingham. Este tipo de fluido escoar apenas quando o limite crítico de esforços excede a coesão, de forma a se comportar como um material Newtoniano, com o escoamento diretamente proporcional ao esforço. A formação do núcleo soerguido cessa no momento que o esforço cisalhante diminui e permanece abaixo do limite de coesão [23].

Dependendo das dimensões do impacto e da ausência de atmosfera no ambiente de impacto, o plasma continuará a se expandir para o meio. O plasma formado pode ser capaz de

---

<sup>1</sup>Reologia é o estudo das deformações e escoamentos da matéria, podendo se referir também às propriedades físicas de materiais fluidos, tais como a viscosidade, a plasticidade, o escoamento, etc.

atingir regiões antipodais ao impacto, gerando estruturas como as formações Reiner Gamma, na Lua, podendo também interagir com os ventos solares e campos magnéticos externos [41].

#### **2.1.4 Desenvolvimento posterior ao processo de crateramento por impacto**

Quando o processo de formação de crateras chega ao seu fim, a estrutura final consiste de rochas deformadas e cobertas por uma camada de material que se estende para além da cratera. Este material geralmente é composto por uma mistura de brechas e fragmentos de fundido de impacto. Após o processo de crateramento, esta camada é imediatamente sujeita às ações externas geológicas mais comuns, como a erosão, a deposição de outros sedimentos e as deformações tectônicas [2].

Na Terra, por exemplo, se a cratera foi formada em uma superfície seca (*i.e.*, não coberta por água inicialmente), a erosão rapidamente pode remover a camada de materiais fragmentados, destruindo qualquer resto de meteoritos presentes. Pode ocorrer, também, a deposição de materiais, por diferentes meios, sobre a cratera. Além disso, a ação da atmosfera terrestre, rica em oxigênio, é capaz de alterar quimicamente o material impactado, alterando os cristais ferromagnéticos que possam ter se formado. Vários processos de aquisição magnética podem ocorrer, como as aquisições termorremanentes (TRM) e viscosas, as quais ocorrem devido à possibilidade de um campo magnético local estável imprimir uma magnetização remanescente no material ao longo do tempo. Outros processos também são possíveis de ocorrer, como a formação de um sistema hidrotermal, que pode ser ativado devido ao calor proveniente do material fundido [42].

## **2.2 Trabalhos anteriores sobre plasmas gerados por impacto**

Antes dos estudos acerca do plasma formado durante impacto hipervelozes, já se imaginava que campos magnéticos seriam formados por plasmas gerados em experimentos de laser. Frichtenicht e Slattery (1963) foram os primeiros a reportarem a geração de plasmas produzidos por impactos hipervelozes. Desde então a produção de plasmas e seus efeitos eletromagnéticos, produzidos por estes eventos, tem atraído a atenção de numerosos cientistas. A partir disto, a teoria MHD foi aplicada inicialmente por Pert (1977) e Srnka (1977), de forma a atrair a atenção



para a formação de plasmas e campos eletromagnéticos produzidos por impactos hipervelozes. Esses estudos se estenderam para aplicações espaciais, a fim de se explicar as falhas que ocorriam em vários satélites. Foi constatado que os impactos, que uma sonda espacial ou satélite sofre, são capazes de gerar campos eletromagnéticos danosos aos aparelhos. Pesquisas em plasmas gerados por impactos hipervelozes possuem importantes aplicações em colisões celestes, na exploração do espaço e na proteção de satélites e naves espaciais dos possíveis impactos contra detritos e poeira espacial.

Importantes experimentos foram conduzidos com o objetivo de obter informações acerca de plasmas formados por impactos hipervelozes. Harano *et al.* (2006) conduziram um experimento para avaliar os danos gerados por impactos hipervelozes em células solares e conseguiram detectar a temperatura e densidades eletrônicas através de uma sonda de Langmuir. Crawford e Schultz (1991, 1993, 1999) exploraram as propriedades do plasma e os campos eletromagnéticos gerados por impactos em diferentes ângulos. Ratcliff *et al.* (1997) mediram a produção iônica e suas energias características de impactos de micropartículas de ferro em alvos de rhodium, à velocidades de 1,2 à 87  $km/s$ .

Close *et al.* (2010, 2011, 2012, 2013) realizaram experimentos de impactos hipervelozes utilizando um acelerador de Van de Graff, o qual disparou projéteis de ferro de até  $10^{11}$  gramas à velocidades de 1 à 70  $km/s$ . Utilizando diversos tipos de materiais-alvo, conseguiram detectar sinais de plasma e pulsos eletromagnéticos resultantes do impacto. Fletcher *et al.* (2015), dando continuidade aos estudos realizados por Close *et al.*, simulou o plasma formado por impactos de projéteis da escala de micrômetros. Desenvolveu três modelos semi-analíticos a fim de determinar parâmetros básicos do plasma produzido, como a densidade e temperatura eletrônicas, grau de ionização e a velocidade de expansão do plasma. Simulou diversos impactos para diferentes velocidades de impacto entre 10 a 72  $km/s$  e duas massas de projétil distintas. Com isto, foi capaz de encontrar um *platô* na temperatura eletrônica, de 2,5  $eV$  para altas velocidades de impacto (30 – 72  $km/s$ ). Também descobriu um limiar na velocidade de impacto, entre 14  $km/s$  e 20  $km/s$ , o qual é capaz de gerar uma transição de fase na nuvem de plasma de fracamente ionizado para altamente ionizado, independentemente da massa do projétil, sugerindo que a emissão RF é correlacionada com a formação de plasmas totalmente ionizados.

E de forma a solidificar ainda mais o conhecimento acerca da dinâmica do plasma e

sua evolução, Ju *et al.* (2014) conduziram experimentos utilizando uma arma de gás de dois estágios para disparar projéteis a velocidades próximas de  $6 \text{ km/s}$ , definindo três estágios que o plasma passa durante sua expansão: o estágio de acumulação, o estágio de equilíbrio e o estágio de atenuação. Além disto conseguiram mostrar que a temperatura e a densidade do plasma são proporcionais à  $v_p^3$  e que diminuem à medida que o plasma se expande para o meio.

Este trabalho busca elucidar a evolução do campo magnético formado em um plasma ideal, além de possibilitar futuramente que uma componente de poeira seja acrescida à teoria. Os resultados obtidos aqui podem oferecer alguma luz acerca da magnetização anômala das crateras, além de sugerir um novo caminho para a análise de plasmas através das simetrias de Lie das equações magnetohidrodinâmicas. A teoria exposta aqui pode também ser estendida a outras aplicações (*e.g.*, tratamento de materiais magnéticos por plasmas, fusão termonuclear controlada).

## Capítulo 3

# Formação de Plasmas

Aqui estaremos interessados em modelar um plasma gerado por impactos meteoríticos. Uma grande vantagem nesse caso é a de o plasma possuir a propriedade de ser escalável, isto é, o mesmo fenômeno qualitativo frequentemente ocorre em plasmas que se diferem em várias ordens de magnitude [1]. Por isto, modelar os plasmas gerados em um impacto feito em laboratório se torna uma boa primeira estimativa, para então se extrapolar os resultados para os casos de um impacto meteorítico em grandes escalas.

O plasma é composto por muitas partículas e por conta disto a simulação computacional da dinâmica de cada partícula se torna extremamente difícil. Isto porque as forças eletromagnéticas se alteram devido ao acoplamento das cargas entre si, juntamente dos campos eletromagnéticos resultantes desta dinâmica. Em contrapartida, esses novos campos afetam o movimento dessas partículas. Além disso, os parâmetros modelados através da teoria de partículas (em inglês *single-particles theory*), tais como a posição da partícula e sua velocidade, geralmente não são mensuráveis, impossibilitando a relação entre a teoria e o experimento.

Quantidades mensuráveis, como a velocidade de fluido do plasma e a densidade de partículas, não são facilmente obtidas a partir dos parâmetros da teoria de partículas. Dessa forma, se torna necessária a descrição do comportamento de grandes quantidades de partículas a partir de estatísticas e médias sobre um grande número de partículas. Uma das descrições mais simples de tal comportamento é a teoria de fluidos, em que o plasma é descrito a partir de equações de fluido modificadas de forma a se incluir as forças eletromagnéticas. Essa descrição

passa a focar em propriedades coletivas do plasma (*e.g.*, densidade, velocidade média) em pontos fixos no espaço, ao invés do movimento individual das partículas.

A teoria de fluidos é derivada diretamente dos momentos das equações de Boltzmann. Essa teoria é composta por equações que descrevem o movimento coletivo de cada espécie presente no plasma. Sua abordagem mais simples é aquela em que se considera a presença apenas de elétrons e de um único tipo de íons, chamada teoria de dois fluidos. Apesar de suas simplificações, essa abordagem é notavelmente bem sucedida na descrição do comportamento do plasma e, talvez, a mais utilizada para se tratar os fenômenos de plasmas [1]. Apesar disso, sobre certas condições, é mais apropriado se considerar a população do plasma como um único fluido, ao assumir quantidades que unificam as diferentes espécies. Essa abordagem é conhecida como teoria magnetohidrodinâmica (MHD).

A abordagem MHD é utilizada geralmente para descrever fluidos altamente condutores (tal que as partículas neutras são desprezadas), em condições que variam lentamente e onde os elétrons e íons são forçados a agir em união. Este último comportamento pode ocorrer tanto devido às colisões frequentes, quanto pela ação de fortes campos eletromagnéticos externos (*e.g.*, como ocorre em processos de fusão termonuclear controlada). Mas esta abordagem também pode ser utilizada para descrever plasmas onde as temperaturas das diferentes espécies podem ser consideradas iguais, *i.e.*,  $T_e = T_i = T$ . A descrição MHD de plasmas é extremamente útil, tanto pela simplicidade, quanto pela facilidade na descrição de uma ampla gama de comportamentos de plasma. Esta abordagem simplificada do plasma é capaz de ilustrar resultados importantes, que são extremamente complicados de se obter caso seja utilizada a abordagem de múltiplos-fluidos.

### 3.1 Definição de plasmas

A palavra *plasma* tem sua origem no grego e significa algo moldável. Ela foi aplicada pela primeira vez por Tonks e Langmuir, em 1929, para descrever a região interna, longe das bordas, de um gás luminoso ionizado produzido por descargas elétricas em um tubo de baixa pressão. O gás, como um todo, se encontrava neutro.

Como dito na introdução, um plasma é constituído de partículas ionizadas. Mas é importante notar que não é qualquer gás ionizado que pode ser chamado de plasma. Em qualquer

gás, poderá sempre existir ao menos uma pequena parte ionizada. Por conta disso, não é possível definir o estado de plasma apenas a partir da energia cinética média das partículas. São necessárias afirmações extras para a correta definição do estado de plasma, as quais serão discutidas mais abaixo.

A palavra *plasma* é utilizada para descrever uma ampla gama de substâncias macroscopicamente neutras e que possuem um número elevado de elétrons livres e átomos ou moléculas ionizadas. Essas substâncias exibem um comportamento coletivo, distinto de outros estados da matéria comumente conhecidos, devido às interações de longo alcance das forças coulombianas.

Um plasma é definido a partir de três requisitos, chamados “critérios de plasma” [1, 43]:

1 O comprimento de Debye<sup>1</sup>  $\lambda_D$  deve ser muito menor que  $L$ , o comprimento característico do sistema:

$$L \gg \lambda_D.$$

Para ser considerado um plasma, um gás ionizado deve possuir um grande número de partículas carregadas para se blindar eletrostaticamente dentro de uma certa distância, que é menor que outros comprimentos de interesse. A medida quantitativa dessa distância de blindagem é o que chamamos de comprimento de Debye. Mas para que isto seja válido,

2 O plasma deve ser denso o bastante, ou seja:

$$N_D \gg 1,$$

onde  $N_D$  é o número de elétrons no interior de uma esfera de Debye, sendo dado por:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 N_e. \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>O comprimento de Debye é aquele no qual, para uma determinada distância, o campo elétrico de uma determinada partícula no interior do plasma é neutralizado por outras partículas de carga oposta. Ele é dado por:

$$\lambda_D = \frac{\epsilon_0 k_B T_e}{N_e e^2},$$

em que  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo,  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $T_e$  a temperatura média eletrônica,  $N_e$  a densidade eletrônica, e  $e$  a carga elementar.

Isto significa que o plasma possui a tendência de permanecer quasineutro, de tal forma que  $N_e \sim N_i$ , em que  $N_i$  é a densidade de íons. Note porém que este critério não é suficiente para que todas as forças eletromagnéticas se anulem. Um pequeno desequilíbrio local na densidade de carga faz com que surjam forças eletromagnéticas que tendem a restaurar a neutralidade local. Essa tendência à quasineutralidade ocorre pois um plasma geralmente não possui energia interna o suficiente para se tornar não-neutro a distâncias maiores que o comprimento de Debye. Por conta disto, pode-se dizer que o plasma é quasineutro para distâncias maiores que este comprimento.

Por fim,

3 Sendo  $\omega_p$  a frequência típica do plasma e  $\tau_n$  o tempo médio entre colisões com partículas neutras,

$$\omega_p \gg \tau_n,$$

para que o gás se comporte como um plasma. Caso contrário, as partículas carregadas irão colidir tão frequentemente com as partículas neutras, que a dinâmica do gás passaria a ser dominada por forças hidrodinâmicas ordinárias, ao invés de ser dominado pelas forças eletromagnéticas.

Como foi mencionado acima, a propriedade mais fundamental do plasma é a sua tendência de permanecer eletricamente neutro para distâncias maiores que o comprimento de Debye. Qualquer mudança na neutralidade local, devido à separação de cargas, faz com que surjam campos elétricos que “puxam” os elétrons de volta a sua posição original. Mas por conta da inércia dessa nuvem de elétrons, os elétrons que foram “puxados” passam a oscilar em torno de sua posição original, dando origem à frequência de plasma. Essa frequência de oscilação é tipicamente alta, mas ao se analisar um intervalo de tempo em que se toma a média temporal, a quasineutralidade é preservada.

Sabendo disto, como descrever e avaliar a produção e evolução dos plasmas? Existem três parâmetros macroscópicos fundamentais que caracterizam o plasma, e que podem ser medidos e estudados em experimentos laboratoriais. Eles são (utilizando-se unidades SI):

1. A densidade de partículas (medida em partículas por metro cúbico);

2. A temperatura  $T$  de cada espécie (geralmente medida em unidades de energia, em  $eV$ , tal que  $1 eV \simeq 11605 K$ );
3. E o campo magnetostático  $\mathbf{B}$  (medido em Tesla).

Várias outros parâmetros secundários (microscópicos) podem ser derivados a partir destes três parâmetros fundamentais (*e.g.*, Comprimento de Debye, raio de Larmor, frequência de plasma, frequência eletrociclôtrônica, velocidade térmica). No caso de plasmas parcialmente-ionizados, outros parâmetros, como a fração ionizada e a seção transversal, também são importantes [44].

### 3.2 Formação e expansão de plasmas gerados por impactos hipervelozes

Ao final do estágio de contato e compressão, quando a cratera passa a ser escavada devido à propagação da onda de choque, o material impactado pode ser vaporizado e ionizado. Esse processo produz inicialmente um plasma com densidade similar ao do material sólido ( $\sim 10^{28} m^{-3}$ ). Devido à alta densidade e temperaturas relativamente baixas (menores que  $1 eV$ ) nestes estágios iniciais, o plasma produzido se encontra num regime chamado *warm dense matter*, sendo chamado de plasma fortemente acoplado ou de plasma não-ideal (em inglês, *strongly coupled plasma*) [40].

Esta não-idealidade altera a equação de estado, reduz a transferência de energia entre íons e elétrons e, mais importante, aumenta a taxa de matéria ionizada ao diminuir os potenciais de ionização. À medida que a cratera se forma, em seu interior encontram-se materiais no estado de plasma, gás e líquido. Durante este processo de crateramento, um enorme gradiente de pressão age no plasma, forçando sua rápida expansão em direção ao vácuo (ou atmosfera local). Enquanto se expande, o plasma rapidamente passa de não-ideal para ideal, de Maxwelliano para não-Maxwelliano e de altamente colisional para não-colisional. Isto faz com que o estado de ionização (*i.e.*, *charge state*) do plasma se “congele” durante a fase de equilíbrio, que ocorre à medida que o plasma se expande para o meio [40, 45].

Focados no estágio de expansão do plasma, Ju *et al.* (2014), dividiram esse estágio em três, definidos como: O estágio de acumulação, o estágio de equilíbrio e o estágio de atenuação.

Em seus estudos, eles observaram a transição de fase do plasma, momento em que ocorre a ionização de uma certa quantidade de elétrons, sob as condições do experimento. Além disso, criaram um modelo teórico de expansão do plasma, que se mostrou consistente com os dados experimentais obtidos. Durante o processo de expansão, um campo eletromagnético é induzido, consequentemente diminuindo a velocidade de expansão do plasma com a distância a partir do ponto de impacto. Em uma dada distância, após um determinado tempo, o plasma atinge o equilíbrio transiente. Neste momento, a densidade eletrônica e a temperatura flutuam em torno de um certo valor. Simultaneamente, as ondas de choque perdem energia devido à sua expansão, não sendo mais capazes de vaporizar e ionizar o material impactado. O plasma então continua se expandindo para o meio e, assim, a temperatura e densidade eletrônicas diminuem gradualmente.

### 3.2.1 Estágio de acumulação

A carga total gerada pelo impacto escala de acordo com [46]:

$$Q \propto m_p^\alpha v_p^\beta, \quad (3.2)$$

Onde os coeficientes de massa  $\alpha$  e de velocidade  $\beta$  são constantes dependentes das condições experimentais (*e.g.*, material do projétil, material do alvo, *setup* experimental). Ela pode ser estimada via uma equação generalizada dada por

$$Q = 0,1m_p \left( \frac{m_p}{10^{-11}} \right)^{0,02} \left( \frac{v_p}{5} \right)^{3,48}, \quad (3.3)$$

em que  $Q$  é a carga total em Coulombs,  $m_p$  é a massa do projétil em gramas e  $v_p$  é a velocidade de impacto em  $km/s$  [47]. Existem muitas variações da equação (3.3) publicadas na literatura [46, 48, 49] com expoentes  $\beta$  que variam de 2,8 à 4,7, como mostrado nas diferentes curvas da figura 3.1. O plasma produzido num impacto hiperveloz pode estar multiplamente ionizado. Por conta disto, estes coeficientes  $\beta$  podem variar dependendo dos diferentes graus de ionização e também devido aos diferentes materiais impactados.

A cratera final, formada pelo impacto, possui um diâmetro que é sempre maior que o diâmetro do plasma que atingiu o estado de equilíbrio termodinâmico local (LTE - *Local Thermodynamic Equilibrium*). A despeito disso, como uma primeira aproximação, podemos assumir que todo o plasma gerado se encontra aglomerado em uma esfera de mesmo raio que o raio



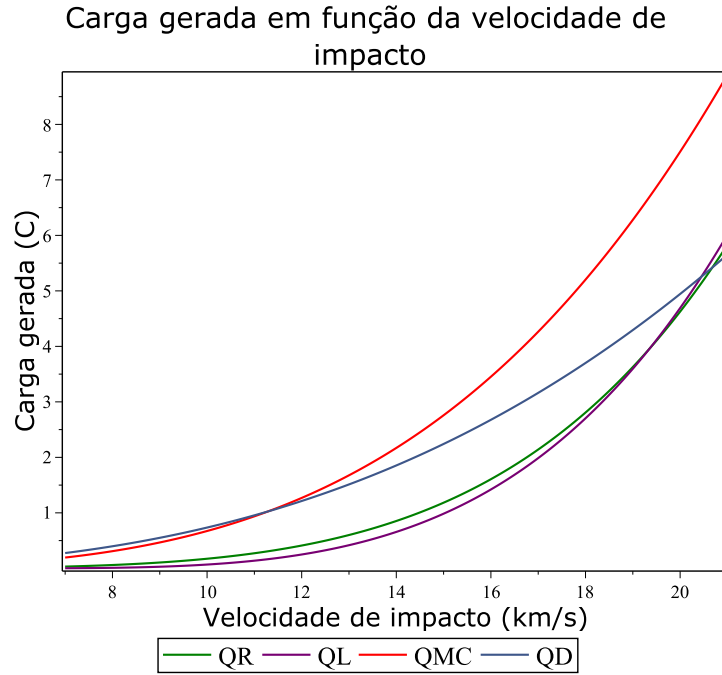


Figura 3.1: Diferentes curvas obtidas através de equações de produção de cargas. Cada cor representa equações distintas obtidas pelos respectivos autores, considerando a mesma massa de projétil ( $3,70 \times 10^{-4} \text{ kg}$ ). QR é a curva obtida por Ratcliff *et al.* (1997), QL a curva obtida por Li *et al.* (2014), QMC a curva obtida por McBride e McDonnell (1999) e QD a curva obtida por Dietzel *et al.* (1972).

da cratera transiente [50, 51]. O tamanho final da cratera pode ser empiricamente determinado a partir da relação

$$r_0 = k (m_p^{0,352}) (\rho_p^{0,167}) (v_p \cos \theta)^{0,667}, \quad (3.4)$$

em que  $r_0$  é a profundidade de penetração do projétil em  $cm$ ,  $k$  é uma constante do material determinada por meio de experimentos e  $\rho_p$  é a densidade do projétil em  $g/cm^3$ . No caso de um alvo de alumínio,  $k = 0,42$  [51, 52].

Desta forma, a densidade eletrônica, em um ponto de observação, no momento em que o plasma é totalmente formado pode ser dada por

$$N_{e,0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \frac{Q}{eV_{plas}} \frac{1}{(1 + V_m t_{for}/r_0)^3}, \quad (3.5)$$

em que  $e$  é a carga elementar,  $V$  é o volume inicial do plasma aproximado pela esfera de raio  $r_0$ ,

$r$  é a distância entre o ponto de impacto e o ponto de observação,  $V_m$  é a velocidade média de expansão do plasma,  $t_{for}$  é o tempo que leva para o plasma se formar totalmente, podendo ser estimado por  $t_{for} = D_p/v_p$ , em que  $D_p$  é o diâmetro do projétil [45]. Vale notar também que o comprimento de Debye é sempre menor que  $r_0$  para as velocidades de interesse, indicando que o plasma formado inicialmente obedece a quasineutralidade.

Já no caso de maiores impactos, a aproximação mais razoável para o volume de plasma, e também o raio de plasma, pode ser obtida a partir da calculadora desenvolvida por Keith A. H. (2017) [53]. Como em impactos meteoríticos de grande escala a cratera formada possui um raio maior que sua profundidade, a aproximação do volume de plasmas e do volume da cratera por uma esfera é comprometida. Mas a partir dos resultados calculados em [53], podemos considerar que o raio inicial do volume de plasma é igual ao raio da cratera transiente, no caso de formação de uma cratera complexa, ou do raio final da cratera no caso de uma cratera simples. Já como uma primeira aproximação do volume de plasma, pode-se considerar como sendo igual ao volume escavado.

A partir do momento que o plasma passa a se expandir, ele também induz um campo eletromagnético que faz com que a velocidade de expansão diminua com o decorrer do tempo. Em um certo momento, o plasma atinge o equilíbrio transiente em que a velocidade de expansão pode ser considerada como constante. No estudo de Ju *et al.* (2014), eles assumiram um perfil de velocidades de forma a garantir a consistência entre a densidade eletrônica dos seus dados experimentais e os resultados teóricos. A velocidade de expansão, assumida em seu trabalho, diminui proporcionalmente com a distância a partir do ponto de impacto.

### 3.2.2 Estágio de equilíbrio

Durante o estágio inicial de formação de plasmas, o plasma formado se encontra em um estado altamente denso, tal que a taxa de colisão é relativamente alta. Por conta dos gradientes de temperatura e de densidade eletrônica, o plasma é forçado a se expandir para o meio. Esta expansão induz ondas eletromagnéticas com uma ampla gama de frequências e, conseqüentemente, faz com que o perfil de velocidade de expansão do plasma diminua com a distância a partir o ponto de impacto. Em um dado momento e distância, o plasma atinge o

equilíbrio transiente devido à uma contínua formação e expansão do plasma durante o impacto meteorítico – isso se torna mais evidente em crateramentos de grandes amplitudes, em que as energias envolvidas são muito altas e o processo de escavação é mais duradouro.

No momento que o plasma atinge o equilíbrio transiente, a densidade e temperatura eletrônicas flutuam em torno de um determinado valor [45]. Isto facilita a análise do grau de ionização do plasma formado. A partir da relação entre a densidade de partículas do plasma e sua temperatura, é possível obtermos a energia da *n-ésima* ordem de ionização do material que compõe o plasma em questão [54, 55]. Com esta relação entre o grau de ionização e os parâmetros característicos do plasma, e sabendo também que a fração ionizada é fortemente dependente da velocidade de impacto, é possível encontrar os valores da temperatura eletrônica em função da velocidade de impacto para diferentes graus de ionização.

Desta forma, é possível analisar em qual grau de ionização o plasma se encontra, bastando para isto, comparar os valores de temperatura eletrônica obtidos do experimento com os valores teóricos de temperatura eletrônica calculados para a velocidade de impacto em questão e os diferentes graus de ionização (*e.g.*, ionização simples, ionização dupla, ionização tripla), como mostrado na figura 3.2.

Após este estágio, devido à contínua expansão do plasma para o meio, a densidade eletrônica e a temperatura passam a diminuir fazendo com que o plasma se adentre no estágio de atenuação.

### 3.2.3 Estágio de atenuação

Os parâmetros característicos do plasma diminuem com a distância a partir do ponto de impacto. A forma que os perfis de temperatura e densidade eletrônicas se alteram é basicamente a mesma. Após o estágio de equilíbrio, o plasma continua se expandindo por conta de sua inércia e dos gradientes de pressão, enquanto a densidade eletrônica diminui. Da mesma forma, a taxa de colisão, a qual é relacionada com a temperatura, também diminui à medida que o plasma se expande para o meio. Nesse processo, ondas eletromagnéticas de variadas frequências são também induzidas, resultando no decaimento da energia do plasma e conseqüentemente no decaimento da temperatura do plasma [45].

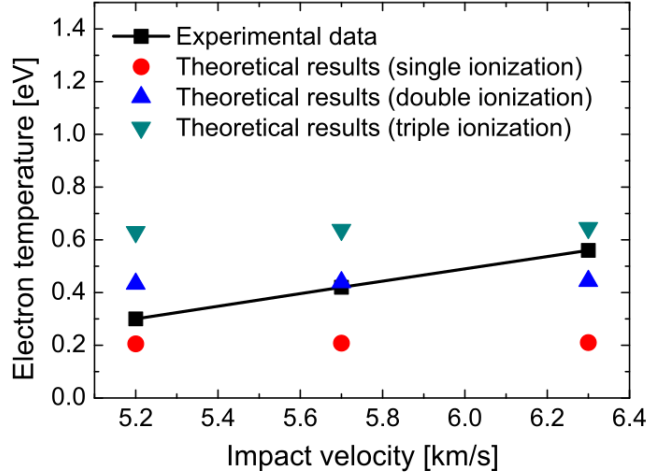


Figura 3.2: Comparação entre temperaturas eletrônicas obtidas de resultados teóricos e resultados experimentais detectadas por uma sonda fixa para distintas velocidades de impacto, no experimento realizado por Ju *et al.* (2014)

Baseados em dados experimentais, Ju *et al.* (2014) formularam um modelo teórico para descrever o estágio de atenuação. Assumindo que a densidade eletrônica em um determinado ponto decaía exponencialmente com o tempo durante este estágio, a densidade eletrônica pôde ser expressa, em seus estudos, por:

$$N_{e,dec} = N_{e,0} \exp \left[ - \left( \frac{t - t_{dec}}{\tau_{plas}} \right)^2 \right], \quad (3.6)$$

em que  $t_{dec}$  é o momento inicial de decaimento do plasma e  $\tau_{plas}$  é a duração do estado de plasma durante o estágio de decaimento, ambos dados em milissegundos.

Este estágio possui um fim nos estudos de Ju *et al.* (2014) por conta da interação do plasma com o meio, que no caso foi a câmara de vácuo. Uma estimativa para a duração do plasma no caso de Ju *et al.* (2014) pode ser dada pela diferença de tempo durante a qual o plasma decai até atingir o valor de  $N_e \exp(-1)$ . Porém, em certas ocasiões, o plasma pode nunca chegar ao estágio de decaimento, devido à expansão não-colisional. O plasma formado durante um impacto hiperveloz pode ser capaz de atingir regiões antipodais ao impacto, dependendo das características do meio (*e.g.*, presença de atmosfera, campo magnético, tempestades solares) [41].

### 3.3 Elementos regentes das características do plasma gerado por impacto

Conhecer acerca dos processos envolvidos na produção de plasmas e como os parâmetros se relacionam entre si, se torna importante para a correta formulação e também compreensão dos modelos propostos. Os detalhes dos processos de formação de plasmas se tornam importantes para a evolução da formulação teórica do problema, pois estes parâmetros regem e são a origem dos campos magnéticos gerados por impactos meteoríticos.

Os elementos que regem a expansão e os parâmetros de plasma durante o início do impacto, são a velocidade, a massa e o ângulo de incidência do projétil [6]. A velocidade e a massa do projétil podem ser inferidas por meio de métodos petrofísicos (*e.g.*, análise de feições planares de deformação (PDF), raio final da cratera). Por outro lado, é difícil inferir o ângulo de incidência do projétil apenas por meio de assinaturas petrofísicas. Como a poeira e os detritos, ejetados durante o processo de crateramento, são fracamente dependentes do ângulo de impacto do projétil [37], é complicado inferir este ângulo de incidência a partir da morfologia final da cratera. Mas a expansão do plasma gerado durante o impacto é fortemente dependente deste ângulo, gerando campos magnéticos totalmente assimétricos para baixos graus de inclinação [13]. Além disso, a expansão do plasma é especular ao sentido do impacto e depende da velocidade de impacto (sendo independente da massa do projétil) [40].

Por conta disso, a análise do campo magnético gerado durante um impacto pode oferecer meios para a identificação de crateras e de como ela foi formada. Para a determinação dos campos magnéticos gerados por plasmas, é importante saber como a densidade e temperatura eletrônicas se comportam, por estes serem os principais parâmetros que regem as equações MHD, como será mostrado mais adiante. A fim de se compreender inicialmente a dinâmica do sistema, é necessário realizar aproximações iniciais (*e.g.*, condutividade infinita, simetria cilíndrica na densidade, simetria esférica na velocidade de expansão).

A densidade inicial do plasma possui um papel importante na configuração final do sistema [40]. No modelo proposto por Close *et al.* (2010), a densidade nos estágios iniciais de formação do plasma, em que este se encontra num estado altamente colisional, é assumida possuindo uma distribuição esfericamente simétrica, de forma que ela diminui com a distância

e com o tempo. Evidências empíricas sugerem que a densidade máxima é dependente apenas da velocidade de impacto  $v_p$ . Para uma dada velocidade, a densidade produzida é maior para menores valores da massa do projétil  $m_p$  (a quantidade de material removido é proporcional à energia, que é proporcional à  $v_p^2$ ). Close *et al.* (2010) mostra, assim, que para uma dada  $v_p$ , a densidade inicial do plasma aumenta para menores massas e raios do projétil, pois isto produz menores profundidades escavadas e, conseqüentemente, menores volumes e então plasmas mais densos [51]. Uma forma funcional utilizada para descrever a densidade de plasma inicial é a dada pela equação (3.5), na qual se considera  $r$  como sendo pertencente ao eixo  $z$ , nas coordenadas cilíndricas, ou seja:

$$N_e = \left(\frac{r_0}{z}\right)^3 \frac{Q}{eV_{plas}} \frac{1}{(1 + V_m t_{for}/r_0)^3}, \quad (3.7)$$

A temperatura, assim como a densidade eletrônica, também depende da velocidade de impacto. Por conta disto, diz-se que a velocidade de impacto dita a dinâmica do plasma. A temperatura é quase independente da massa do projétil e satura para altas velocidades de impacto. No início da formação de plasmas, o plasma é altamente colisional de forma que  $T_e \sim T_i$ . Neste momento, o plasma se encontra em equilíbrio termodinâmico local. À medida que a ionização ocorre, a temperatura do plasma diminui [56]. No momento em que o plasma passa a se expandir, o plasma se torna não-colisional, “congelando” o perfil de distribuição das partículas durante sua posterior expansão [40].

Fletcher (2015) mostra que para  $v_p > 30 \text{ km/s}$ , a temperatura inicial (no momento em que o plasma se torna não-colisional) atinge um platô em torno de  $2,5 \text{ eV}$ , se mostrando como uma invariante com relação à velocidade de impacto [6]. Devido ao equilíbrio termodinâmico nos momentos iniciais de formação do plasma, pode-se considerar a temperatura como sendo inicialmente homogênea e igual a  $2 \text{ eV}$  [16, 40].

Durante um impacto meteorítico, a composição química do projétil e do alvo, entre outros fatores que serão discutidos mais abaixo, afetam o processo de produção de plasma. Dependendo destas composições, o plasma formado pode se encontrar multiplamente ionizado, modificando a relação entre a temperatura e densidade eletrônicas com a velocidade de impacto (*i.e.*, o plasma produzido pode estar multiplamente ionizado de forma que o coeficiente de velocidade varia de acordo com a presença de ionizações simples, duplas, etc.).

Para maiores velocidades de impacto, o projétil e o alvo são danificados mais seriamente. As partículas ejetadas, provenientes do projétil e do alvo, tornam-se menores ao mesmo tempo que a área total das partículas ejetadas aumenta. Conseqüentemente, haverá mais elétrons em um estado de energia maior, tal que estes serão ionizados mais facilmente. Conseqüentemente, a densidade eletrônica, assim como o grau de ionização, aumenta para maiores velocidades de impacto [45]. Dessa forma, a velocidade do projétil rege também o percentual de ionização do plasma (*i.e.*, *charge state*). Nos estudos realizados por Fletcher (2015), em que ele simula impactos de meteoritos de microgramas, ele mostra que, para  $v_p < 18 \text{ km/s}$ , a recombinação domina e o projétil não é totalmente vaporizado. Mas para  $v_p \geq 18 \text{ km/s}$ , o projétil vaporiza-se totalmente e o *charge state* se “congela” antes do plasma se recombinar. Isto ocorre devido à rápida expansão do plasma, fazendo-o atingir o estado não-colisional mais cedo, antes mesmo de sua total ionização [6].

Vale notar também que a velocidade de gatilho, *i.e.*, a velocidade em que o plasma se torna totalmente ionizado, se modifica para diferentes  $m_p$ . A transição de fracamente para totalmente ionizado, em suas simulações, ocorre num intervalo de  $v_p$  entre 14 a 20  $\text{km/s}$ , onde ele assume inicialmente um plasma não-ideal, *i.e.*, altamente denso e colisional e de baixas temperaturas. Com exceção dos impactos mais lentos, *i.e.*, abaixo de 18  $\text{km/s}$  no caso dos estudos realizados por Fletcher (2015), o projétil é totalmente ionizado, mas sua contribuição para o plasma é diminuída por conta dos íons e impurezas do alvo. Durante a escavação (nos estágios iniciais da formação de plasmas), o plasma é altamente denso (da ordem da densidade do material impactado, tal que as forças elásticas e hidrostáticas dominam frente às forças eletromagnéticas) e de baixa temperatura, alterando a equação de estado do sistema, a taxa de transferência de energia entre elétrons e íons, e principalmente a distribuição de cargas [6].

A carga gerada também é proporcional à velocidade de impacto, *i.e.*,  $Q \propto v_p^\beta$ , além de dependente da massa do projétil, que conseqüentemente influencia no tamanho final da cratera. Infelizmente não é possível reproduzir um impacto meteorítico típico, mas apesar disto, em estudos realizados até então, com diferentes condições de impacto, o valor de  $\beta$  encontrado varia entre 2,5 à 4,74, sendo comum assumí-lo igual à 3,48 devido à fórmula generalizada de produção de cargas (3.3) [45, 46, 47, 48].

Por fim, a condutividade do plasma depende da densidade e temperatura eletrônicas,

do raio atômico do alvo (o qual depende da sua massa molar e densidade), e do grau de ionização (o qual também depende da temperatura e da degenerescência dos átomos dos materiais impactados). Como estamos interessados nos impactos mais rápidos,  $v_p > 15 \text{ km/s}$ , resultados experimentais e computacionais [25, 40] indicam que o plasma formado possui taxas de ionização maiores que 10 %, sendo mais adequado considerar uma expressão da condutividade para um gás totalmente ionizado [57]:

$$\sigma = 2 \frac{(2k_B T)^{3/2}}{\pi^{3/2} Z e^2 \ln \lambda}, \quad (3.8)$$

em que  $Z$  é o grau de ionização do plasma,  $\ln \lambda$  é um fator da ordem de unidade para as temperaturas e densidades relevantes do problema tratado aqui e  $\lambda$  é a razão entre o comprimento de Debye e o parâmetro de impacto que produz uma deflexão de  $90^\circ$  em um encontro simples entre partículas (ver tabela 5.1 de [57]).



## Capítulo 4

# Descrição Magnetohidrodinâmica (MHD) da expansão do plasma

O objetivo deste trabalho de dissertação é entender qual a influência da dinâmica do plasma gerado por um impacto meteorítico nos campos transientes locais. Esse problema possui geometrias complexas, devido às interações macroscópicas de longa distância de grandes populações de partículas. Por conta disso, é mais simples utilizarmos a teoria MHD para a sua descrição. Essa teoria se torna apropriada por descrever o plasma de um ponto de vista macroscópico, diferentemente das descrições mais precisas, como as equações de Vlasov e a teoria de dois fluidos. Após a compreensão geral e aproximada obtida pela descrição MHD, o tratamento de questões mais sutis do problema por meio de abordagens microscópicas pode vir a ser melhor compreendido.

Como uma primeira abordagem, ao utilizar a teoria MHD para descrever a expansão do plasma em questão, estamos extrapolando os resultados ao lidarmos com um plasma totalmente ionizado, livre de partículas neutras e aproximado por uma espécie. Assim, estamos tratando do caso em que a condutividade é máxima, de forma que os campos eletromagnéticos gerados são também máximos. Após analisar esse caso, futuramente pode-se pensar em se considerar os efeitos que tendem a diminuir a condutividade do plasma (*e.g.*, presença de grãos de poeira) e, conseqüentemente, o campo magnético gerado.

## 4.1 Momentos da equação de Boltzmann

Como dito anteriormente, é extremamente complicado, até para supercomputadores, descrever a evolução temporal da dinâmica das partículas de uma grande população. Descrever o plasma através de uma teoria macroscópica contínua se torna, assim, uma alternativa simples frente à essa dificuldade.

Para descrevermos o plasma a partir de quantidades médias de interesse, é necessário primeiramente descrevermos a população das partículas. Uma forma de se fazer isto, é descrever as posições e velocidades através das funções de distribuição de probabilidades. Essa abordagem é também conhecida por teoria cinética de plasmas e foi desenvolvida a partir da descrição de gases neutros. Ela contém conceitos como a função distribuição de velocidades  $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , a qual descreve como as partículas de uma determinada espécie se distribuem dentro de um intervalo de velocidades e uma dada região qualquer no espaço. A equação governante é a equação de Boltzmann, dada por:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_r) f_a + \left[ \left( \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} \right) \cdot \nabla_v \right] f_a = C_a, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{F}_a$  é uma força externa qualquer que age sobre as partículas  $a$ , e  $C_a$  é chamado termo de colisão, e onde usamos a notação:

$$\nabla_r \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.2)$$

$$\nabla_v \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial v_z}, \quad (4.3)$$

para denotar operadores derivativos com relação às coordenadas independentes espaciais e de velocidade, respectivamente. As quantidades vetoriais  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  representam a posição e velocidade, respectivamente, de uma certa partícula, dados por:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}v_x + \hat{\mathbf{y}}v_y + \hat{\mathbf{z}}v_z. \quad (4.5)$$

Na equação de Boltzmann, os átomos excitados, assim como os átomos neutros, são considerados como diferentes espécies entre si, a depender do seu grau de ionização  $Z$ , o qual assume valores inteiros e positivos. No caso mais simples, conhecido como teoria cinética de

dois fluidos, considera-se a presença apenas de elétrons ( $a = e$ ) e de uma espécie de íons ( $b = i$ ) unicamente ionizados. Já nos casos mais elaborados, conhecidos como teoria de múltiplos fluidos, considera-se também a presença de íons com diferentes graus de ionização, assim como a presença de partículas neutras, tais como os átomos e moléculas.

Além disto, no caso a ser tratado aqui, a força  $\mathbf{F}_a$  é a força de Lorentz. Essa força, assim como a função distribuição  $f_a$ , é uma variável macroscópica, no sentido de ser uma quantidade média que não descreve flutuações extremamente rápidas dos microcampos e microforças, os quais surgem quando partículas se aproximam demasiadamente umas às outras. Estes efeitos (simplesmente chamados aqui de colisões) são considerados através do termo de colisão  $C_a$  [58], no lado direito da equação (4.1).

Partículas de mesma espécie podem colidir umas com as outras, além de colidirem também com outras espécies de partículas. Com isto, podemos escrever o termo de colisão como:

$$C_a = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b), \quad (4.6)$$

onde  $C_{ab}$  descreve a variação por unidade de tempo na função distribuição das partículas da espécie  $a$  com as partículas da espécie  $b$ . Este termo, que será melhor descrito mais à frente, pode descrever tanto colisões elásticas quanto as inelásticas, sendo que neste trabalho de dissertação iremos considerar apenas as colisões elásticas.

Algumas propriedades do termo colisional podem ser deduzidas mesmo sem conhecermos a sua forma explícita. Desprezando processos que convertem partículas de uma espécie em outra (*e.g.*, ionização, dissociação), o termo de colisão irá satisfazer as seguintes condições:

$$\int C_{ab} d\mathbf{v} = 0, \quad (4.7)$$

$$\int m_a \mathbf{v} C_{aa} d\mathbf{v} = 0, \quad (4.8)$$

$$\int \frac{m_a v^2}{2} C_{aa} d\mathbf{v} = 0. \quad (4.9)$$

Ao multiplicarmos (4.7) por  $d\mathbf{r}$ , a integral resultante representa a variação no número total de partículas da espécie  $a$  em um elemento de volume  $d\mathbf{r}$  devido às colisões entre partículas da espécie  $b$ . Mas como estamos considerando apenas as colisões elásticas, não ocorre nenhuma variação, de forma que a integral é nula. Seguindo a mesma lógica, as integrais em (4.8) e

(4.9) representam a variação no momentum e na energia, respectivamente, das partículas do tipo  $a$  entre elas próprias. Como o momentum e a energia destas partículas (como um todo) são conservadas nestas colisões, estas integrais devem ser também nulas [58]. De forma similar, as relações abaixo, para colisões entre diferentes partículas de espécies  $a$  e  $b$ , também são válidas ao considerarmos apenas as colisões elásticas:

$$\int m_a \mathbf{v} C_{ab} d\mathbf{v} + \int m_b \mathbf{v} C_{ba} d\mathbf{v} = 0, \quad (4.10)$$

$$\int (m_a v^2 / 2) C_{ab} d\mathbf{v} + \int (m_b v^2 / 2) C_{ba} d\mathbf{v} = 0. \quad (4.11)$$

A equação de Boltzmann descreve, assim, a evolução temporal da função distribuição  $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Essa função, por sua vez, descreve uma densidade de pontos que representam a velocidade e posição das partículas de interesse no espaço de fases hexa-dimensional (3 componentes de velocidades e 3 componentes no espaço). Em outras palavras, a equação de Boltzmann é capaz de fornecer informação acerca de como o sistema, sob a ação de forças externas, irá evoluir [1, 43, 58]. Vale notar também que, desprezando a influência das colisões, a equação de Boltzmann reduz à equação de Vlasov.

Em um plasma, a função distribuição de velocidades retêm toda a informação estatística acerca de todas as partículas. Por conta disso, ela pode ser considerada uma descrição microscópica do sistema, sendo também considerada como a descrição mais fundamental do estado de plasma. Mas como a descrição de um plasma por meio da função distribuição é relativamente detalhada, ela nem sempre é necessária. Geralmente, é suficiente descrevermos o plasma de forma mais simples, por meio de certas quantidades médias.

Para a maioria das aplicações envolvendo plasmas sob condições de quase equilíbrio, pode-se utilizar a equação de Boltzmann a fim de se obter equações simplificadas, chamadas equações de fluido. Por meio destas equações se torna possível a obtenção de quantidades mensuráveis (*e.g.*, densidade numérica de partículas, temperatura, velocidade de expansão do plasma) a partir de médias realizadas sobre a função distribuição  $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  [43]. Apesar disso, é possível retirar valores macroscópicos (*i.e.*, média de um grupo) de vários parâmetros de plasma (*e.g.*, densidade, fluxo, corrente) a partir de  $f$ .

Em geral, o valor médio de qualquer quantidade  $\mathbf{Q}_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  é dado por:

$$\mathbf{Q}_a(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{Q}_a \rangle = \frac{1}{N_a(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{Q}_a f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (4.12)$$

em que a integral é calculada sobre todo o espaço de velocidades e  $N_a(\mathbf{r}, t)$  é a densidade numérica de partículas do tipo  $a$ , podendo ser obtida através da relação:

$$N_a(\mathbf{r}, t) = \int f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv, \quad (4.13)$$

também calculada sobre todo o espaço de velocidades. Uma outra quantidade média de interesse é a velocidade média das partículas, dada por:

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{N_a} \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle_a. \quad (4.14)$$

Além disto, define-se que a função distribuição  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  deve se anular para valores extramente altos de  $|\mathbf{v}|$ , ou seja:

$$f \rightarrow 0 \text{ quando } |\mathbf{v}| \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Esta assunção decorre da ideia intuitiva de que é gradualmente menos provável existir uma partícula que possua velocidades cada vez mais altas.

Para um gás homogêneo, livre da ação de forças externas e em equilíbrio térmico, ao longo prazo, quando as condições de equilíbrio são satisfeitas, a função distribuição  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  se torna a função distribuição de Maxwell-Boltzmann. Neste estado de equilíbrio térmico, é possível relacionar a energia cinética média por partícula ( $m \langle v^2 \rangle / 2$ ) com a temperatura de uma forma simples [1, 58]:

$$m \frac{\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} T. \quad (4.16)$$

Caso o gás não se encontre em equilíbrio térmico e considerando o sistema de coordenadas no qual a velocidade média é nula, é possível definir a temperatura ao considerarmos a quantidade  $m \langle v^2 \rangle / 3$ . A temperatura definida desta forma é uma função de  $\mathbf{r}$  e  $t$ , sendo dependente de outras características macroscópicas locais do gás. Esta temperatura pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} T_a(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{N_a} \int \frac{m_a}{3} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_a)^2 f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ &= \frac{m_a}{3} \langle (\mathbf{v} - \mathbf{V}_a)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Geralmente os parâmetros macroscópicos  $N_a$ ,  $\mathbf{V}_a$  e  $T_a$ , no estado de não-equilíbrio, são diferentes para diferentes espécies. E em alguns casos, estes parâmetros, por possuírem significados físicos simples, são complementados por outros mais complicados [58].

A equação de Boltzmann não possui uma simples solução, por outro lado, como estamos interessados em quantidades macroscópicas, é possível tomar-se integrais apropriadas sobre as equações de Boltzmann (as chamadas momentos de Boltzmann). Dessa forma, procura-se obter equações diferenciais que governam as variações espaciais e temporais dessas quantidades macroscópicas, a fim de resolvê-las para a quantidade de interesse. Esta abordagem é conhecida como “tomar os momentos da equação de Boltzmann”. As equações resultantes são conhecidas como as equações macroscópicas de transporte, as quais formam a base da teoria de fluidos do plasma.

Veja que, sendo  $\chi(\mathbf{v})$  uma propriedade física das partículas no plasma (*e.g.*, massa, momentum, energia cinética), podemos obter seu valor médio ao multiplicá-lo pela função distribuição, integrando o produto sobre todo o espaço das velocidades e dividindo o resultado pela densidade numérica de partículas, como mostrado em (4.12). De forma similar, podemos encontrar a equação que governa as variações espaço-temporais do valor médio de  $\chi(\mathbf{v})$ , ao multiplicar a equação de Boltzmann por  $\chi(\mathbf{v})$  e integrar sobre todo o espaço de velocidades, obtendo assim as equações macroscópicas de transporte [43].

Desta forma, os três primeiros momentos da equação de Boltzmann são obtidos ao multiplicar a equação de Boltzmann (4.1) por  $m_a(v^0)$ ,  $m_a\mathbf{v}$ , e  $m_a\mathbf{v}^2/2$ , respectivamente, integrando sobre todo o espaço das velocidades. Isto nos dá a equação da conservação de massa, a equação de transporte de momentum, e a equação de conservação de energia para a espécie de partículas  $a$ . Em princípio, é possível continuar tomando os momentos da equação de Boltzmann para ordens cada vez maiores da velocidade. Mas esses momentos envolvendo ordens maiores de  $\mathbf{v}$  não possuem significado físico óbvio e são úteis apenas em casos excepcionais [1].

As equações de conservação de massa, momentum e energia, não formam um sistema fechado de equações governantes do plasma, pois a cada momento calculado, uma nova variável macroscópica surge. No momento de ordem zero, a variação na densidade de partículas é expressa em função da velocidade média  $\mathbf{V}$  do fluido. No momento de primeira ordem, a variação de  $\mathbf{V}$  é

uma função do tensor de pressão. Consequente, o momento de segunda ordem expressa a variação do tensor de pressão em termos do fluxo de calor. Por conta disto, é necessário truncar o sistema de equações em alguma ordem da hierarquia dos momentos, assumindo simplificações acerca do maior momento (“acima do último momento calculado”). Apenas com tal aproximação, é possível obtermos um sistema completo de equações de transporte, suficientes para a determinação das variáveis macroscópicas do sistema [43]. Neste trabalho estaremos interessados em obter os momentos de ordem zero, de primeira ordem e de segunda ordem, os quais serão apurados a seguir.

#### 4.1.1 O momento de ordem zero: Equação de continuidade

A primeira das equações de transporte a ser considerada é a equação da continuidade, a qual é uma declaração da conservação de carga e massa. Note que no contexto de plasmas, a força externa que age sobre as partículas quase sempre é a força de Lorentz (em outros casos pode se considerar outras forças, como, por exemplo, a força gravitacional de algum planeta), dada por:

$$\mathbf{F}_a = q_a (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.18)$$

em que o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e o campo magnético  $\mathbf{B}$  são campos macroscópicos contínuos, obtidos a partir de uma média sobre um elemento de volume contendo várias partículas e sobre longos períodos de tempo comparados com o tempo médio de colisões.

Assim, substituindo (4.18) na equação de Boltzmann (4.1), multiplicando-a por  $v^0$ , e integrando sobre todo o espaço das velocidades, temos:

$$\underbrace{\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}}_1 + \underbrace{\int (\mathbf{v} \cdot \nabla_r) f d\mathbf{v}}_2 + \underbrace{\frac{q}{m} \int [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v}}_3 = \underbrace{\int C d\mathbf{v}}_4, \quad (4.19)$$

onde  $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ . Aqui vamos omitir os subscritos referentes ao tipo de partícula por fins de simplificação. Sabemos então que as equações obtidas aqui, são válidas para cada tipo de espécie de partículas.

Vamos então analisar cada termo separadamente. No caso do termo 1, do lado esquerdo da equação (4.19), podemos utilizar a equação (4.13), para reescrever na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (4.20)$$

Agora, abrindo o termo 2, obtemos:

$$\begin{aligned}\int (\mathbf{v} \cdot \nabla_r) f d\mathbf{v} &= \int v_x \frac{\partial f}{\partial x} d\mathbf{v} + \int v_y \frac{\partial f}{\partial y} d\mathbf{v} + \int v_z \frac{\partial f}{\partial z} d\mathbf{v} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int v_x f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial y} \int v_y f d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial z} \int v_z f d\mathbf{v};\end{aligned}\quad (4.21)$$

e utilizando a definição (4.12), obtemos de (4.21):

$$\begin{aligned}\int (\mathbf{v} \cdot \nabla_r) f d\mathbf{v} &= \nabla_r \cdot [N(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{v} \rangle] \\ &= \nabla_r \cdot [N(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)],\end{aligned}\quad (4.22)$$

onde usamos a definição

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{N_a(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle_a, \quad (4.23)$$

e também onde aproveitamos do fato de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{r}$  serem variáveis independentes, tal que o operador  $\nabla_r$  pode ser posto para fora da integração sobre as variáveis  $d\mathbf{v}$ . Na equação acima, temos que  $\mathbf{V}_a(\mathbf{r}, t)$  é a velocidade média das partículas da espécie  $a$ , chamada também de velocidade de “fluido” do plasma. Note que iremos omitir os subscritos com a finalidade de simplificação.

Agora no termo 3 de (4.19), vamos considerar os termos de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  separadamente. Assim, temos que o termo de  $\mathbf{E}$  :

$$\int (\mathbf{E} \cdot \nabla_v) f d\mathbf{v} = \int \nabla_v \cdot (f \mathbf{E}) d\mathbf{v}. \quad (4.24)$$

Utilizando o teorema da divergência sobre o espaço das velocidades no termo da direita na equação (4.24) acima:

$$\int (\mathbf{E} \cdot \nabla_v) f d\mathbf{v} = \oint_{S_v} f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_v = 0, \quad (4.25)$$

onde  $S_v$  é a área que cobre todo o volume do espaço de velocidades. A integral de superfície acima se anula pois, ao tomar uma superfície  $S_v$  tendendo ao infinito (*i.e.*, no caso em que o raio da esfera do volume em questão é levada ao infinito, de forma a superfície fechar todo o espaço) sua área aumenta proporcionalmente à  $v^2$ , enquanto que qualquer distribuição física  $f$  se aproxima de zero muito mais rapidamente (*e.g.*, a distribuição Maxwelliana diminui proporcionalmente à  $e^{-v^2}$ ).

Agora, usando a relação:

$$\nabla \cdot (a \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla a + a \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (4.26)$$



em que  $a$  é uma função escalar qualquer e  $\mathbf{A}$  um vetor qualquer, temos para o termo com  $\mathbf{B}$ :

$$\int [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} = \int \nabla_v \cdot [f(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] d\mathbf{v} - \int \nabla_v \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v}. \quad (4.27)$$

Novamente, utilizando-se o teorema da divergência, obtemos:

$$\int [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} = \oint_{S_v} f(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}_v - \int f \nabla_v \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v}. \quad (4.28)$$

O primeiro termo de (4.28), se anula pelo mesmo motivo da equação (4.25). Já no caso do segundo termo, como  $\nabla_v$  é sempre perpendicular ao vetor gerado pelo produto  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , este termo também se anula, tal que:

$$\int [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} = 0. \quad (4.29)$$

Finalmente, se considerarmos que o número total de partículas de cada espécie permanece constante durante as colisões, ou seja, que não se criem novas partículas devido à recombinação ou ionização, temos que o termo 4 de (4.19) é nulo, como mostrado em (4.7):

$$\int C_{ab} d\mathbf{v} = 0. \quad (4.30)$$

No nosso caso, estaremos desprezando eventos de recombinação e ionização, os quais seriam os causadores da criação ou remoção de partículas na função distribuição. Esta é uma aproximação válida já que estaremos preocupados em analisar a geração de campos magnéticos durante a fase de equilíbrio que ocorre durante o processo de expansão do plasma. Vale também lembrar que a fase de equilíbrio é subsequente à fase de acumulação, na qual o plasma é criado durante a fase de escavação da cratera impactada.

Agora juntando todos os termos (4.20) e (4.22), obtemos a equação:

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla_r \cdot [N(\mathbf{r}, t)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (4.31)$$

chamada de equação da continuidade de partículas, ou também como equação de transporte, a qual é uma afirmação de conservação de partículas. O primeiro termo representa a taxa de mudança da densidade de partículas (ou a taxa de mudança da concentração de partículas no interior de um volume em questão), enquanto que o segundo termo representa o fluxo de partículas para fora de um elemento de volume em questão [1]. A equação da continuidade, simplesmente

exprime que esses dois processos devem se balancear na condição considerada acima, de que nenhuma partícula é criada ou destruída. Ao multiplicarmos essa equação por  $m$  ou por  $q$ , as equações que descrevem a conservação da massa e de carga são obtidas, respectivamente.

#### 4.1.2 O momento de primeira ordem: Equação de transporte de momentum

Novamente, vamos tomar a equação (4.1). Multiplicando ambos os lados por  $m\mathbf{v}$  e integrando sobre o espaço das velocidades, temos:

$$\underbrace{m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}}_1 + \underbrace{m \int \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla_r) f d\mathbf{v}}_2 + \underbrace{q \int \mathbf{v}[(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v}}_3 = \underbrace{\int m\mathbf{v}C d\mathbf{v}}_4. \quad (4.32)$$

Vamos então analisar novamente cada termo separadamente, começando pelo primeiro termo do lado esquerdo de (4.32). Utilizando a definição de quantidades médias e a equação que define a velocidade de “fluido” do plasma (4.23), temos que:

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = m \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

pode ser reescrita como:

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = m \frac{\partial}{\partial t} [N(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)]. \quad (4.33)$$

Agora, antes de analisarmos o termo 2, vamos primeiramente analisar o termo 3. Chamando a quantidade  $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  de  $\mathbf{G}$ , temos que:

$$q \int \mathbf{v}[(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} = q \int \mathbf{v}[\mathbf{G} \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v},$$

que pode ser reescrito como:

$$q \int \mathbf{v}[\mathbf{G} \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} = q \int \left[ \mathbf{v} G_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{v} G_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{v} G_z \frac{\partial f}{\partial z} \right] d\mathbf{v}. \quad (4.34)$$

Vamos então, analisar cada termo do lado direito da equação acima separadamente.

Temos:

$$q \int \mathbf{v} G_x \frac{\partial f}{\partial x} d\mathbf{v} = q \int G_x dv_y dv_z \underbrace{\int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial x} dv_x}_5;$$

Utilizando o método de integração por partes no termo 5, obtemos que:

$$q \int \mathbf{v} G_x \frac{\partial f}{\partial x} d\mathbf{v} = q \int G_x dv_y dv_z \left[ \mathbf{v} f \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v_x} dv_x \right],$$

onde o primeiro termo do lado direito se anula devido à característica da função  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , como definido em (4.15). Assim, o termo 5 pode ser escrito como:

$$q \int \mathbf{v} G_x \frac{\partial f}{\partial x} d\mathbf{v} = -q \int G_x f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v_x} dv_x dv_y dv_z. \quad (4.35)$$

Note que a equação acima pode ser reescrita em termos de quantidades médias. Utilizando a definição de quantidade média (4.12), a equação (4.35) se torna:

$$q \int \mathbf{v} G_x \frac{\partial f}{\partial x} d\mathbf{v} = -qN(\mathbf{r}, t) \left\langle G_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v_x} \right\rangle. \quad (4.36)$$

Sabendo que a componente  $G_x$  de  $\mathbf{G}$  possui apenas as outras componentes da velocidade,  $v_y$  e  $v_z$ , devido ao produto vetorial entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ , podemos reescrever (4.36) como:

$$q \int \mathbf{v} G_x \frac{\partial f}{\partial x} d\mathbf{v} = -qN(\mathbf{r}, t) \left\langle \frac{\partial}{\partial v_x} [G_x \mathbf{v}] \right\rangle. \quad (4.37)$$

Os outros termos de 3 são similares à (4.37), nos permitindo reescrever o termo como:

$$q \int \mathbf{v} [\mathbf{G} \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} = -qN(\mathbf{r}, t) \langle \nabla_v \cdot (\mathbf{G}\mathbf{v}) \rangle, \quad (4.38)$$

onde o termo  $(\mathbf{G}\mathbf{v})$  é um produto tensorial entre dois vetores, chamado de díada. Por simplicidade, utiliza-se a notação de uma simples justaposição de dois vetores  $\mathbf{AB}$  para representar o seu produto tensorial  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ . Outra notação, que será utilizada mais à frente, é a de uma seta dupla em cima de uma letra:

$$\overleftrightarrow{T} \equiv \mathbf{AB}. \quad (4.39)$$

Utilizando a propriedade:

$$\nabla \cdot (\mathbf{AB}) = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \quad (4.40)$$

temos que:

$$\begin{aligned} \nabla_v \cdot (\mathbf{G}\mathbf{v}) &= \mathbf{v}(\nabla_v \cdot \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla_v)\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \left[ \underbrace{\frac{\partial G_x}{\partial v_x} + \frac{\partial G_y}{\partial v_y} + \frac{\partial G_z}{\partial v_z}}_{= 0, \text{ pois } G_i \text{ independe de } v_i} \right] + \left[ G_x \frac{\partial}{\partial v_x} + G_y \frac{\partial}{\partial v_y} + G_z \frac{\partial}{\partial v_z} \right] \mathbf{v} \\ &= \mathbf{i} \left[ G_x \frac{\partial v_x}{\partial v_x} + \underbrace{G_x \frac{\partial v_y}{\partial v_x} + G_x \frac{\partial v_z}{\partial v_x}}_{= 0, \text{ pois } v_i \text{ independe de } v_j} \right] + \mathbf{j} \left[ G_x \frac{\partial v_y}{\partial v_x} + \dots \right] + \mathbf{k} \left[ G_x \frac{\partial v_z}{\partial v_x} + \dots \right] \\ &= \mathbf{i} G_x \frac{\partial v_x}{\partial v_x} + \mathbf{j} G_y \frac{\partial v_y}{\partial v_y} + \mathbf{k} G_z \frac{\partial v_z}{\partial v_z} \\ &= \mathbf{G}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde as derivadas das componentes de  $\mathbf{G}$  são nulas pois  $G_i$  é independente de  $v_i$ , e também todas as derivadas cruzadas das componentes da velocidade são nulas pois as variáveis  $v_i$  são independentes de  $v_j$ , para  $i = j$ .

Com isto, podemos reescrever (4.38) como:

$$\begin{aligned} q \int \mathbf{v}[\mathbf{G} \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} &= -qN(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{G} \rangle; \\ &= -qN(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle; \\ &= -qN(\mathbf{r}, t) (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por fim, notando que o termo 2 de (4.32) possui a mesma forma que o termo 3 da mesma equação, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} m \int \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla_r) f d\mathbf{v} &= m \int \nabla_r \cdot (f \mathbf{v} \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \\ &= m \nabla_r \cdot \int f \mathbf{v} \mathbf{v} d\mathbf{v}; \\ &= m \nabla_r \cdot [N(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle], \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde aproveitamos o fato de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  serem independentes, e onde  $\mathbf{v} \mathbf{v}$  é novamente uma díada.

É útil separarmos a velocidade  $\mathbf{v}$  em uma velocidade média (de fluido)  $\mathbf{V}$  e uma velocidade radômica (térmica)  $\mathbf{w}$ , ou seja:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{w}. \quad (4.44)$$

Neste caso é evidente que  $\langle w \rangle = 0$ . Com isto, podemos reescrever o termo 2 de (4.32) como:

$$m \nabla_r \cdot (N(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle) = m \nabla_r \cdot [N \mathbf{V} \mathbf{V}] + m \nabla_r \cdot [N \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle]; \quad (4.45)$$

Utilizando a relação (4.40), o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima pode ser reescrito como:

$$m \nabla_r \cdot (N \mathbf{V} \mathbf{V}) = m \mathbf{V} \nabla_r \cdot [N \mathbf{V}] + m N [\mathbf{V} \cdot \nabla_r] \mathbf{V}; \quad (4.46)$$

Já o segundo termo do lado direito de (4.45), pode ser reescrito como:

$$\Psi \equiv m N \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Este termo  $\Psi$  possui dimensão de força por unidade de área ( $J/m^3$ ), ou densidade de energia, que nada mais é do que a pressão, sendo chamado de tensor de pressão.

A pressão, em um plasma, é definida em termos de um elemento de uma superfície imaginária  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}dS$ , no interior da nuvem de gás, que se move juntamente com o centro de massa do fluido, ou seja, que possui a mesma velocidade de fluido do plasma. A pressão em  $dS$  é então definida como a taxa de transporte do momentum das partículas por unidade de área, ou seja, é definida como o fluxo de momento através de  $dS$  devido ao movimento randômico das partículas [1]. Note que, como  $\Psi \propto \langle \mathbf{w}\mathbf{w} \rangle$ ,  $\Psi$  é de fato uma medida do movimento térmico das partículas do sistema. Caso todas as partículas possuíssem uma mesma velocidade  $\mathbf{v}$  constante, então  $\mathbf{w} = 0$ , logo  $\Psi = 0$  (*i.e.*, um plasma “frio”).

Notando que  $p_{xy} = mNw_xw_y$  e que  $p_{yx} = mNw_yw_x$ , se torna claro que  $\Psi$  é um tensor (de segunda ordem) simétrico, com apenas seis componentes independentes. Veja também que as componentes diagonais deste tensor compõem a pressão normal, em que  $p_{ii}$  é a força por unidade de área na direção  $i$ , que é exercida sobre uma superfície plana (dentro do gás) com vetor direção normal ao eixo  $i$ . Já os termos fora da diagonal são elementos associados à viscosidade do plasma (devido ao movimento giratório das partículas transversal ao movimento de “fluido” do plasma), ou seja, são relacionados ao estresse de cisalhamento.

Em termos de componentes, podemos escrever (4.47) como:

$$\begin{aligned}\Psi_{ij} &= mN\langle w_iw_j \rangle \\ &= p_{ii}\delta_{ij} + \pi_{ij},\end{aligned}\tag{4.48}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o chamado delta de Kronecker,  $p_{ii}$  a pressão escalar das partículas de uma dada espécie na direção  $i$  e  $\pi_{ij}$  o chamado tensor de estresse, o qual é simétrico  $\pi_{ij} = \pi_{ji}$  e dado por:

$$\pi_{ij} = mN\left\langle w_iw_j - \left(\frac{w^2}{3}\right)\delta_{ij} \right\rangle.\tag{4.49}$$

Se a função distribuição de velocidades (para a velocidade randômica) for isotrópica, então

$$\langle w_x^2 \rangle = \langle w_y^2 \rangle = \langle w_z^2 \rangle = (1/3)\langle w^2 \rangle,\tag{4.50}$$

além de

$$\langle w_xw_y \rangle = \langle w_xw_z \rangle = \langle w_yw_z \rangle = 0,\tag{4.51}$$

tal que  $\Psi_{ij} = p\delta_{ij}$ , em que  $p$ :

$$p = mN \frac{\langle w^2 \rangle}{3} = NT. \quad (4.52)$$

Assim, juntando todos os termos obtidos, temos que:

$$m \frac{\partial}{\partial t} (N\mathbf{V}) + m\mathbf{V}\nabla_r \cdot (N\mathbf{V}) + mN(\mathbf{V} \cdot \nabla_r)\mathbf{V} + \nabla \cdot \Psi - qN(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \underbrace{\int m\mathbf{w}Cdv}_{\equiv \mathbf{R}_{ab}}. \quad (4.53)$$

Notando que aqui também separamos a velocidade em duas componentes como em (4.44), tal que

$$\int m\mathbf{v}Cdv = \int m\mathbf{w}Cdv + \underbrace{m\mathbf{V} \int Cdv}_{=0}, \quad (4.54)$$

onde  $\mathbf{V}$  pôde ser retirado de dentro da integral por ser uma quantidade média, ou seja, um vetor constante com relação às variáveis independentes  $\mathbf{v}$ .

Denota-se o termo de colisão por  $\mathbf{R}_{ab}$ . Ele representa a taxa de mudança de densidade de momentum devido às colisões entre diferentes espécies de partículas  $a$  e  $b$  em um plasma. Agora, vamos manipular os termos da equação (4.53) afim de se colocar todos os termos derivativos à esquerda:

$$m\mathbf{V} \frac{\partial N}{\partial t} + mN \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + m\mathbf{V}\nabla_r \cdot (N\mathbf{V}) + mN(\mathbf{V} \cdot \nabla_r)\mathbf{V} = -\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Psi} + qN(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}, \quad (4.55)$$

onde omitiu-se os subscritos no termo colisional para fins de simplificação. Reorganizando a equação acima:

$$\underbrace{mN \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + mN(\mathbf{V} \cdot \nabla_r)\mathbf{V} + m\mathbf{V} \left[ \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N\mathbf{V}) \right]}_{= mN \frac{d\mathbf{V}}{dt}} = -\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Psi} + qN(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}; \quad (4.56)$$

Onde se utilizou a equação (4.31), de tal forma que:

$$mN \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Psi} + qN(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}. \quad (4.57)$$

Assim como a equação de movimento, que estabelece as condições necessárias para garantir a conservação de números de partículas, a equação acima estabelece a condição necessária para garantir a conservação de momentum. Esta equação é a chamada equação de Transporte de

Momentum (em inglês, *force balance equation*). Ela mostra que a variação temporal do momento médio, em cada elemento de fluido, é devido à ação de forças externas aplicadas ao fluido, às forças internas associadas a processos colisionais e às forças de viscosidade e de pressão no próprio fluido.

Ela é mais útil no caso em que a distribuição das velocidades randômicas são bem comportadas, tal que o tensor de pressão  $\overleftrightarrow{\Psi}$  possa ser representado de forma relativamente simples. No nosso caso, em que estamos interessados em encontrar o maior valor do campo magnético produzido por um plasma descrito pela teoria MHD, vamos considerar que a distribuição de  $\mathbf{w}$  é isotrópica. Nesse caso,  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} \equiv p$  e todos os termos cruzados  $p_{xy} = \dots = p_{zx} = 0$ , reduzindo o tensor de pressão a um escalar, tal que:

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Psi} = \nabla p. \quad (4.58)$$

### 4.1.3 O momento de segunda ordem: Equação de transporte de energia

Por fim, para obtermos o momento de segunda ordem da equação de Boltzmann, vamos multiplicar a equação (4.1) pela quantidade  $\frac{1}{2}mv^2$  e integrar sobre todo o espaço de velocidades:

$$\frac{m}{2} \int v^2 \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \frac{m}{2} \int v^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla_r) f d\mathbf{v} + \frac{q}{2} \int v^2 [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v] f d\mathbf{v} = \int \frac{mv^2}{2} C d\mathbf{v}. \quad (4.59)$$

Vamos então analisar cada termo separadamente. O primeiro termo do lado esquerdo é dado por:

$$\frac{m}{2} \int v^2 \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{m}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int v^2 f d\mathbf{v} - \int f \frac{\partial(v^2)}{\partial t} d\mathbf{v} \right] \quad (4.60)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[ N \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \right], \quad (4.61)$$

onde temos que o último termo do lado direito da equação (4.60) é nulo, pois  $v^2$  é independente de  $t$ .

Continuando, o segundo termo pode ser reescrito como:

$$\frac{m}{2} \left( \int v^2 \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} \right) = \frac{m}{2} \left[ \nabla \cdot \left( \int \mathbf{v} v^2 f d\mathbf{v} \right) - \int f \mathbf{v} \cdot \nabla v^2 d\mathbf{v} - \int f v^2 \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v} \right] \quad (4.62)$$

$$= \nabla \cdot \left( N \frac{m}{2} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle \right), \quad (4.63)$$

onde usamos o fato que os termos contendo  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  e  $\nabla v^2$  são nulos, pois as variáveis espaciais e de velocidade são variáveis independentes.

O terceiro termo de (4.59), por sua vez, se torna:

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2} \int v^2 [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}] f d\mathbf{v} \\ = & \frac{q}{2} \left[ \int \nabla_{\mathbf{v}} \cdot [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) v^2 f] d\mathbf{v} - \int f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} v^2 d\mathbf{v} - \int f v^2 \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} \right], \end{aligned} \quad (4.64)$$

tal que:

$$\frac{q}{2} \int v^2 [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}] f d\mathbf{v} = -\frac{q}{2} \int f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} v^2 d\mathbf{v}, \quad (4.65)$$

em que a primeira integral em (4.64) é nula devido à assertiva (4.15) acerca da função distribuição, a qual deve se anular quando a velocidade tende ao infinito e, também, onde a última integral de (4.64) é nula já que a componente  $F_i$  da força de Lorentz é independente da componente correspondente de velocidade  $v_i$ . Utilizando a definição de quantidades médias (4.12), podemos escrever o terceiro termo como:

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} \int v^2 [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}] f d\mathbf{v} &= -\frac{q}{2} N \langle (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} v^2 \rangle \\ &= -\frac{q}{2} N \langle (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Sabendo que  $\nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$ , podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} \int v^2 [(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}] f d\mathbf{v} &= -qN \langle (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &= -qN \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &= -qN \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Por fim, combinando todos os termos, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( N \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \right) + \nabla \cdot \left( N \frac{m}{2} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle \right) - qN \mathbf{E} \cdot \mathbf{V} = \int \frac{mv^2}{2} C dv. \quad (4.68)$$

Vamos então analisar os termos contendo as quantidades médias de  $v^2$  e  $\frac{v^2}{2}\mathbf{v}$ . Eles podem ser reescritos como:

$$\langle v^2 \rangle = \langle (\mathbf{V} + \mathbf{w})^2 \rangle = V^2 + \langle w^2 \rangle; \quad (4.69)$$



E também,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right\rangle &= \left\langle \frac{(\mathbf{V} + \mathbf{w})^2}{2} (\mathbf{V} + \mathbf{w}) \right\rangle \\ &= \frac{V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{V^2}{2} \underbrace{\langle \mathbf{w} \rangle}_{=0} + \left\langle \frac{w^2}{2} \mathbf{V} \right\rangle + \left\langle \frac{w^2}{2} \mathbf{w} \right\rangle + \underbrace{\langle (\mathbf{w} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} \rangle}_{= \langle (\overleftrightarrow{V}V) \cdot \mathbf{w} \rangle} + \langle (\mathbf{V} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \rangle \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde temos que  $\langle \mathbf{w} \rangle$  é nulo, como visto anteriormente. Reescrevendo os dois últimos termos<sup>1</sup>, temos então que:

$$\left\langle \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right\rangle = \frac{V^2}{2} \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}}{2} \langle w^2 \rangle + \left\langle \frac{w^2}{2} \mathbf{w} \right\rangle + \mathbf{V} \cdot \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle. \quad (4.76)$$

Sabendo também que o termo cruzado  $\langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle$  pode ser reescrito em termos do tensor de pressão (4.99) e utilizando a relação (4.52), podemos reescrever (4.76) como:

$$\left\langle \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right\rangle = \left( \frac{V^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{p}{mN} \right) \mathbf{V} + \frac{\mathbf{q}}{mN} + \frac{1}{mN} \mathbf{V} \cdot \overleftrightarrow{\Psi}, \quad (4.77)$$

onde introduzimos a notação

$$\mathbf{q} = \int \frac{m}{2} w^2 \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = mN \left\langle \frac{1}{2} w^2 \mathbf{w} \right\rangle. \quad (4.78)$$

Veja que o vetor  $\mathbf{q}$  é a densidade de calor transportado pelas partículas de uma dada espécie e representa o transporte de energia associado com o movimento randômico das partículas com

<sup>1</sup>A díada de dois vetores tridimensionais pode ser representada por meio de matrizes como:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} \equiv \begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Desta forma, o produto escalar entre um vetor e uma díada pode ser representado por:

$$\mathbf{C} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} \equiv \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Com isto é possível mostrar as relações:

$$\mathbf{C} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}; \quad (4.73)$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A}; \quad (4.74)$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (4.75)$$

relação ao sistema de coordenadas em que o gás como um todo se encontra em repouso em relação um dado ponto no espaço.

Desta forma, a equação (4.68) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{mN}{2} V^2 + \frac{3}{2} NT \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{mN}{2} V^2 + \frac{3}{2} p \right) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \overleftrightarrow{\Psi} + \mathbf{q} \right] = qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} + \int \frac{mv^2}{2} C d\mathbf{v}, \quad (4.79)$$

O termo colisional, por sua vez, pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \int \frac{mv^2}{2} C d\mathbf{v} &= \frac{m}{2} \int (V^2 + w^2 + \mathbf{V}\mathbf{w} + \mathbf{w}\mathbf{V}) C d\mathbf{v} \\ &= \frac{m}{2} \int w^2 C d\mathbf{v} + m\mathbf{V} \int \mathbf{w} C d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\equiv Q + \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}, \quad (4.81)$$

em que definimos:

$$Q = \int \frac{mw^2}{2} C d\mathbf{v}. \quad (4.82)$$

Esta quantidade  $Q$  é o calor gerado em um gás de partículas de uma dada espécie como consequência das colisões com partículas de outras espécies. Assim, a equação (4.79) se torna:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{mN}{2} V^2 + \frac{3}{2} NT \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{mN}{2} V^2 + \frac{3}{2} NT \right) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \overleftrightarrow{\Psi} + \mathbf{q} \right] = qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} + Q. \quad (4.83)$$

Esta equação é chamada de equação de transporte de energia (ou *energy transport equation*, em inglês). O primeiro termo desta equação representa a variação na energia total das partículas de uma dada espécie. Esta energia consiste da energia cinética  $mNV^2/2$  e da energia interna  $(3/2)NT$  (por unidade de volume) de uma dada espécie de partículas. Já o segundo termo entre colchetes representa o fluxo total de energia e compreende o transporte macroscópico total da energia com velocidade  $\mathbf{V}$ , o trabalho realizado pela força total de pressão e pelo fluxo de energia microscópica (*i.e.*, o fluxo de calor  $\mathbf{q}$ ). Já os termos do lado direito são relacionados ao trabalho realizado por quaisquer outras forças e pela geração de calor.

No nosso caso, é mais conveniente eliminarmos a energia cinética da expressão (4.83) por meio da equação de continuidade e da equação de transporte de momentum, de forma que obtemos:

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial(NT)}{\partial t} + \nabla \cdot (NT\mathbf{V}) \right) + \left[ \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \overleftrightarrow{\Psi}) - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Psi}) \cdot \mathbf{V} \right] + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q. \quad (4.84)$$

Como vamos considerar o caso isotrópico, temos então que:

$$\left[ \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \overleftrightarrow{\Psi}) - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Psi}) \cdot \mathbf{V} \right] = p \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (4.85)$$

tal que a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial(NT)}{\partial t} + \nabla \cdot (NT\mathbf{V}) \right) + NT \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q. \quad (4.86)$$

Por fim, antes de prosseguirmos com o desenvolvimento da teoria MHD, vamos relacionar os termos colisionais. Seja  $\mathbf{R}_{ab}$  a variação no momentum e  $Q_{ab}$  o calor gerado no gás de partículas de espécie  $a$  devido às colisões com a espécie  $b$ . Então,  $\mathbf{R}_a = \sum_b \mathbf{R}_{ab}$ , e também  $Q_a = \sum_b Q_{ab}$ . Além disto, considerando que o número de partículas, o momentum e a energia são conservadas durante as colisões, então:

$$R_{ba} = -R_{ab}, \quad (4.87)$$

$$Q_{ab} + Q_{ba} = -\mathbf{R}_{ab} \cdot \mathbf{V}_a - \mathbf{R}_{ba} \cdot \mathbf{V}_b = -\mathbf{R}_{ab} \cdot (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b). \quad (4.88)$$

## 4.2 Equações Magnetohidrodinâmicas (MHD)

A teoria magnetohidrodinâmica trata o plasma de múltiplas espécies como se fosse composto apenas por um fluido, sem se diferenciar entre os elétrons e os diferentes tipos de íons. A teoria MHD descreve com grande precisão os casos em que os elétrons e os íons são forçados a agir em união, tanto por colisões frequentes quanto pela ação de um campo magnético intenso o suficiente. Nesse modelo, considera-se que as condições variam lentamente com o tempo e que o plasma se encontra altamente ionizado (*i.e.*, alto grau de ionização). Nestas condições, o plasma é um fluido altamente condutor.

A fim de obtermos as equações de um fluido para um plasma totalmente ionizado, vamos partir da descrição de dois-fluidos, onde assume-se por simplicidade apenas dois tipos de espécies, os elétrons e um único tipo de íons unicamente ionizados. As equações correspondentes são:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot [N_e \mathbf{V}_e] = 0; \quad (4.89)$$

$$m_e N_e \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e \right] = -\nabla(N_e T_e) + q_e N_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}; \quad (4.90)$$

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial(N_e T_e)}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e T_e \mathbf{V}_e) \right) + N_e T_e \nabla \cdot \mathbf{V}_e = -\nabla \cdot \mathbf{q}_e + Q_e, \quad (4.91)$$

e também:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot [N_i \mathbf{V}_i] = 0; \quad (4.92)$$

$$m_i N_i \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \right] = -\nabla(N_i T_i) + q_i N_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R}; \quad (4.93)$$

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial(N_i T_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (N_i T_i \mathbf{V}_i) \right) + N_i T_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i = -\nabla \cdot \mathbf{q}_i + Q_i, \quad (4.94)$$

em que os subscritos  $e$  e  $i$  indicam, respectivamente, as quantidades associadas aos elétrons e aos íons.

É possível obtermos as equações governantes combinando as equações de continuidade, transporte de momentum e de energia, a partir da definição das seguintes quantidades macroscópicas:

$$\text{Densidade de Massa} \quad \rho_m \equiv N_e m_e + N_i m_i; \quad (4.95)$$

$$\text{Densidade de Carga} \quad \rho \equiv N_e q_e + N_i q_i; \quad (4.96)$$

$$\text{Densidade de Corrente Elétrica} \quad \mathbf{J} \equiv N_e q_e \mathbf{V}_e + N_i q_i \mathbf{V}_i; \quad (4.97)$$

$$\text{Velocidade média} \quad \mathbf{V}_m \equiv \frac{1}{\rho_m} (N_e m_e \mathbf{V}_e + N_i m_i \mathbf{V}_i); \quad (4.98)$$

$$\text{Pressão total} \quad p \equiv p_e + p_i. \quad (4.99)$$

Note que caso considerássemos um plasma parcialmente ionizado e composto por íons multiplamente ionizados, as quantidades  $\rho$ ,  $\mathbf{V}_m$  e  $p$  deveriam conter termos correspondentes à estas partículas também. Desprezando a massa eletrônica frente à massa iônica, as aproximações abaixo se tornam válidas:

$$\rho_m = m_i N_i; \quad (4.100)$$

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_i. \quad (4.101)$$

Podemos, também, reescrever a densidade de carga e a densidade de corrente elétrica como:

$$\rho = e(ZN_i - N_e), \quad (4.102)$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}_i - eN_e \mathbf{u}, \quad (4.103)$$

onde introduzimos a notação  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$ .

Para encontrarmos as equações governamentais MHD, basta fazermos combinações lineares das equações de conservação e de transporte de momentum e energia. Assim, a fim de encontrarmos primeiramente a equação de continuidade de carga (e também de corrente e de massa), vamos multiplicar a equação (4.89) por  $q_e$  e a equação (4.92) por  $q_i$ , tal que:

$$q_e \frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot [q_e N_e \mathbf{V}_e] = 0; \quad (4.104)$$

$$q_i \frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot [q_i N_i \mathbf{V}_i] = 0. \quad (4.105)$$

Adicionando-as, temos que:

$$q_e \frac{\partial N_e}{\partial t} + q_i \frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot [q_e N_e \mathbf{V}_e + q_i N_i \mathbf{V}_i] = 0; \quad (4.106)$$

Reorganizando os termos:

$$\frac{\partial}{\partial t} [q_e N_e + q_i N_i] + \nabla \cdot [q_e N_e \mathbf{V}_e + q_i N_i \mathbf{V}_i] = 0; \quad (4.107)$$

A partir das definições de Densidade de Carga e de Corrente Elétrica, podemos reescrever a equação acima como:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0}. \quad (4.108)$$

Podemos também encontrar a equação de conservação da massa (também chamada simplesmente por equação da continuidade), multiplicando (4.89) por  $m_i$  e (4.92) por  $m_e$ :

$$m_e \frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot [m_e N_e \mathbf{V}_e] = 0; \quad (4.109)$$

$$m_i \frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot [m_i N_i \mathbf{V}_i] = 0, \quad (4.110)$$

e somando-as:

$$\frac{\partial}{\partial t} [m_e N_e + m_i N_i] + \nabla \cdot \left[ \underbrace{(m_e N_e + m_i N_i)}_{\rho_m} \underbrace{\left( \frac{N_e m_e \mathbf{V}_e + N_i m_i \mathbf{V}_i}{m_e N_e + m_i N_i} \right)}_{\mathbf{V}_m} \right] = 0, \quad (4.111)$$

onde  $\rho_m$  é chamada densidade de massa do fluido, e  $\mathbf{V}_m$  a velocidade média de fluido linearizada pela massa. Logo, obtemos que:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}_m) = 0}. \quad (4.112)$$

Daqui pra frente, vamos assumir que o plasma é quasi-neutro. Isto significa que a densidade de carga é pequena comparada com a quantidade  $eN_e$ , tal que a diferença  $ZN_i - N_e$  possa ser desprezada em relação à  $N_e$ . Podemos então expressar a densidade de corrente como:

$$\mathbf{J} = -eN_e \mathbf{u}. \quad (4.113)$$

Vamos, então, encontrar a equação de movimento que descreve a dinâmica do volume de plasma. Somando as equações (4.90) e (4.90):

$$m_e N_e \frac{D\mathbf{V}_e}{Dt} = -\nabla p_e - eN_e(\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}, \quad (4.114)$$

$$m_i N_i \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} = -\nabla p_i + ZeN_i(\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R}, \quad (4.115)$$

e realizando algumas manipulações básicas, além de lembrar que a região de plasma é macroscopicamente neutra, obtemos:

$$\boxed{\rho_m \frac{D\mathbf{V}_m}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}}, \quad (4.116)$$

onde  $\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_i$ ,  $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$ . No caso mais geral, o lado direito desta equação conta com a soma de outras forças atuantes no plasma (*e.g.*, força gravitacional, força elétrica, a força viscosa). A força elétrica geralmente é muito pequena, devido à neutralidade macroscópica do plasma, podendo ser desprezada nesta equação com relação aos outros termos [58].

Vamos agora obter a equação que descreve a variação da densidade de corrente  $\mathbf{J}$ . Já considerando  $Z = 1$ , por simplicidade, e multiplicando as equações (4.90) por  $q_e/m_e$  e a equação (4.93) por  $q_i/m_i$ , temos:

$$\frac{q_e}{m_e} m_e N_e \frac{D\mathbf{V}_e}{Dt} = -\frac{q_e}{m_e} \nabla p_e + \frac{q_e^2}{m_e} N_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \frac{q_e}{m_e} \mathbf{R}, \quad (4.117)$$

e também

$$\frac{q_i}{m_i} m_i N_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} = -\frac{q_i}{m_i} \nabla p_i + \frac{q_i^2}{m_i} N_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \frac{q_i}{m_i} \mathbf{R}. \quad (4.118)$$

Somando as duas equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} q_e N_e \frac{D\mathbf{V}_e}{Dt} + q_i N_i \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} = & -\frac{q_e}{m_e} \nabla p_e - \frac{q_i}{m_i} \nabla p_i + \underbrace{\left( \frac{q_e^2}{m_e} N_e + \frac{q_i^2}{m_i} N_i \right)}_1 \mathbf{E} + \\ & - \frac{q_i}{m_i} \mathbf{R} + \underbrace{\left( \frac{q_e^2}{m_e} N_e \mathbf{V}_e + \frac{q_i^2}{m_i} N_i \mathbf{V}_i \right)}_2 \times \mathbf{B} + \frac{q_e}{m_e} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Vamos analisar o termo 1 separadamente. Para um plasma eletricamente neutro, tem-se que  $|q_e N_e| \simeq |q_i N_i|$ . Utilizando as definições de densidade de massa do fluido  $\rho_m \equiv N_e m_e + N_i m_i$  e de densidade de carga do fluido  $\rho \equiv N_e q_e + N_i q_i \simeq 0$ , para isolar  $N_e$  e  $N_i$  e em seguida substituir no termo 1 na equação (4.119) acima, obtemos que:

$$\frac{N_e q_e^2}{m_e} + \frac{N_i q_i^2}{m_i} \simeq -\frac{q_e q_i}{m_e m_i} \rho_m. \quad (4.120)$$

Além disto, utilizando as definições de densidade de corrente (4.103) e de velocidade média (4.98), a fim de se obter  $\mathbf{V}_e$  e  $\mathbf{V}_i$  e substituí-los no termo 2 de (4.119), temos que esse termo pode ser reescrito como:

$$\frac{N_e q_e^2}{m_e} \mathbf{V}_e + \frac{N_i q_i^2}{m_i} \mathbf{V}_i = \left( \frac{q_e}{m_e} \right) \mathbf{J} - \left( \frac{q_e q_i}{m_e m_i} \right) \rho_m \mathbf{V}_m. \quad (4.121)$$

Substituindo essas relações (4.120) e (4.121) obtidas acima, na equação (4.119), e após algumas manipulações algébricas básicas, obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = & -\frac{q_e}{m_e} \nabla p_e - \frac{q_i}{m_i} \nabla p_i + \left( \frac{N_e q_e^2}{m_e} + \frac{N_i q_i^2}{m_i} \right) (\mathbf{E} + \mathbf{V}_m \times \mathbf{B}) + \\ & \left( \frac{q_e}{m_e} + \frac{q_i}{m_i} \right) \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \left( \frac{q_e}{m_e} - \frac{q_i}{m_i} \right) \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Sabendo que  $m_i \gg m_e$ , ou seja:

$$\frac{q_e}{m_e} \gg \frac{q_i}{m_i},$$

e também

$$\frac{N_e q_e^2}{m_e} \gg \frac{N_i q_i^2}{m_i},$$

além de assumir o plasma como estando aproximadamente em equilíbrio térmico, de tal forma que

$$p_e \simeq p_i \Rightarrow \frac{q_e}{m_e} p_e \gg \frac{q_i}{m_i} p_i,$$

a equação (4.91) pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\frac{q_e}{m_e} \nabla p_e + \left( \frac{N_e q_e^2}{m_e} \right) (\mathbf{E} + \mathbf{V}_m \times \mathbf{B}) + \left( \frac{q_e}{m_e} \right) \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{q_e}{m_e} \mathbf{R}. \quad (4.123)$$

Agora, somos forçados a lidar com o termo de colisão  $\mathbf{R}$ . É razoável pensar que o momento total transferido aos elétrons (por  $m^3s$ ) como resultado de colisões com íons é proporcional à  $\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e$ . Também por considerarmos um plasma totalmente ionizado, as colisões se dão por meio de interações coulombianas. Logo é de se esperar que  $\mathbf{R}$  seja proporcional à força Coulombiana  $q_e q_i = -e^2$ , assim como a densidade de elétrons  $N_e$  e a densidade dos centros de espalhamento das partículas a serem desviadas. Como no nosso caso assumimos  $ZN_i = N_e$ , podemos escrever:

$$|\mathbf{R}| = \eta e^2 N_e^2, \quad (4.124)$$

onde  $\eta$  é uma constante de proporcionalidade chamada resistividade específica do plasma, a qual possui dimensão de resistividade (*i.e.*,  $\Omega m$  ou  $VmA^{-1}$ ). Podemos expressar  $\eta$  em termos da frequência de colisão  $\nu_{ei}$  através da expressão [1]:

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{N_e e^2}. \quad [\Omega m \text{ ou } VmA^{-1}] \quad (4.125)$$

É importante notar que  $\nu_{ei}$  não é necessariamente apenas uma taxa de colisão entre partículas. Este é um termo que também inclui aspectos do processo colisional que não são explicitamente incluídos, tais como a sessão transversal de choque, a efetividade da transferência de momentum, etc.

Agora, substituindo (4.103) em (4.124), obtemos:

$$\mathbf{R} = e N_e \eta \mathbf{J}. \quad (4.126)$$

Como um plasma magnetizado é anisotrópico, no caso mais geral a resistividade é um tensor  $\overleftrightarrow{\eta}$ , assim como o termo de pressão. Com isto, a lei de Ohm Generalizada é dada por [1]

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\frac{q_e}{m_e} \nabla \cdot \overleftrightarrow{\Psi}_e + \frac{N_e q_e^2}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_m \times \mathbf{B}) + \frac{q_e}{m_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{N_e q_e^2}{m_e} \overleftrightarrow{\eta} \cdot \mathbf{J}. \quad (4.127)$$



No nosso caso, a lei de Ohm se reduz à:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \nabla(N_e T_e) + \frac{e^2 N_e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_m \times \mathbf{B}) - \frac{e}{m_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{e^2 N_e}{m_e} \eta \mathbf{J}}. \quad (4.128)$$

Por fim, nos resta obter a equação de transporte de calor. Quando as temperaturas dos elétrons e dos íons são muito diferentes, é mais conveniente utilizarmos as equações obtidas na seção anterior (4.91) e (4.94). Contudo, se o acoplamento entre estas temperaturas for forte e a diferença relativa  $|T_e - T_i|$  for pequena, podemos utilizar a equação geral de equilíbrio de energia (em inglês, *energy balance equation*). Vamos obter esta equação a seguir através da soma das equações de transporte de energia, assumindo  $T_e = T_i$ .

Somando as equações (4.91) e (4.94), considerando a relação (4.88), sabendo que  $\nabla \cdot (N_e \mathbf{u}) = 0$ , e desprezando a inércia eletrônica, obtemos a equação:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{3}{2} p \mathbf{V} \right) + p \nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \mathbf{q}' + \mathbf{u} \cdot \nabla p_e + \sum Q, \quad (4.129)$$

chamada de equação de equilíbrio de calor (em inglês, *heat balance equation*), onde  $p = p_e + p_i$  e também  $\mathbf{q}' = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i + \frac{5}{2} p_e \mathbf{u}$ . O lado direito desta equação contém todas as fontes de calor, incluindo o aquecimento devido à viscosidade do fluido  $\sum Q = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{u} + Q_{vis}$ , que surge devido ao tensor de pressão  $\overset{\leftrightarrow}{\Psi}$  [58].

A energia é transferida por meio de processos macroscópicos (*e.g.*, transporte com velocidade  $\mathbf{V}$ , trabalho resultante da pressão). Os efeitos microscópicos, e seus termos correspondentes nas equações de energia e de calor, são chamados de dissipativos. Estes mecanismos aumentam a entropia do plasma, resultando na conversão de energia mecânica em calor. Como a entropia do plasma por partícula (assim como para qualquer gás monoatômico) é igual à  $\ln(T^{3/2}/N)$ , é evidente que a entropia é conservada, na equação (4.129), na ausência de processos dissipativos [58].

No nosso caso, como estamos interessados em lidar com o caso isotrópico, consideraremos este termo  $Q_{vis} = 0$ . Também podemos aproximar  $p \simeq 2N_e T_e$ , além de desprezar efeitos dissipativos, tal que a equação se torna:

$$\boxed{\frac{\partial(N_e T_e)}{\partial t} = -\nabla \cdot (N_e T_e \mathbf{V}) - \frac{2}{3} N_e T_e \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mathbf{u} \cdot \nabla(N_e T_e)}. \quad (4.130)$$

As equações (4.112), (4.116) e (4.130), juntamente das equações de Maxwell, lei de Ohm e da equação de estado, são as equações fundamentais para a descrição de um plasma magnetohidrodinâmico, ou seja, que se comporta como um único fluido condutor. Elas formam a base da teoria MHD, utilizada neste trabalho de dissertação.

#### 4.2.1 Modelo da geração de campos magnéticos MHD

Juntando as equações que obtemos na subseção anterior, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0; \quad (4.131)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}_m) = 0; \quad (4.132)$$

$$\rho_m \frac{D\mathbf{V}_m}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}; \quad (4.133)$$

$$\frac{\partial(N_e T_e)}{\partial t} = -\nabla \cdot (N_e T_e \mathbf{V}_m) - \frac{2}{3} N_e T_e \nabla \cdot \mathbf{V}_m + \frac{1}{3} \mathbf{u} \cdot \nabla(N_e T_e) \quad (4.134)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \nabla p_e + \frac{e^2 N_e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_m \times \mathbf{B}) - \frac{e}{m_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{e^2 N_e}{m_e} \eta \mathbf{J}. \quad (4.135)$$

Na prática, as equações MHD generalizadas raramente são utilizadas em sua forma mais geral, devido à dificuldade em solucionar tal sistema computacionalmente. Por conta disto, se fazem diversas simplificações baseados em argumentos físicos, de forma a eliminar alguns termos das equações, como visto ao longo da obtenção das equações acima. Note que até aqui, estamos considerando um fluido isotrópico, tal que  $\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Psi} = \nabla p$  e que  $\overleftrightarrow{\eta} = \eta$ . Além das simplificações feitas até então, vamos também considerar aproximações com relação às grandezas eletromagnéticas especificamente com relação à densidade de corrente elétrica.

Vamos desprezar o termo  $\partial \mathbf{J} / \partial t$ , por estarmos interessados em um fenômeno de baixa frequência. Assim, a lei de Ohm se reduz à:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V}_m \times \mathbf{B}) + \frac{\sigma}{e N_e} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e), \quad (4.136)$$

onde  $\sigma = \eta^{-1}$  é chamado de condutividade do plasma.

Para obtermos um sistema completo de equações, além das equações obtidas tomando os momentos da equação de Boltzmann, são também necessárias outras equações que incluem as variáveis eletrodinâmicas de campo elétrico  $\mathbf{E}$ , indução magnética  $\mathbf{B}$ , densidade de corrente  $\mathbf{J}$  e a densidade de carga  $\rho$ . Assim, além das equações hidrodinâmicas obtidas anteriormente, são necessárias outras dez equações que relacionam as variações de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$  e  $\rho$ . As equações (4.132), (4.133), (4.134) e a (4.136), são então complementadas com as equações de Maxwell, as quais governam os campos eletromagnéticos [43].

Como estamos considerando o plasma totalmente ionizado, ou seja, com máxima condutividade, nós desprezamos as correntes de deslocamento (frente às de condução). Esta aproximação deixa de ser válida apenas para situações em que o tempo característico do problema é extremamente pequeno, (geralmente da ordem de  $10^{-11}s$ ) [43]. Também assumimos que não ocorre o acúmulo de carga no interior do plasma, tal que a neutralidade elétrica macroscópica é mantida ( $\rho = 0$ ). Assim, as equações de Maxwell se reduzem à:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}; \quad (4.137)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (4.138)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (4.139)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.140)$$

onde as duas primeiras equações (4.137) e (4.138), fornecem seis equações em forma de componentes, as quais podem ser consideradas como as equações que governam as variações dos campos eletromagnéticos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Vale notar que a equação de continuidade de corrente pode ser obtida a partir das equações (4.138) e (4.140), tal que a equação (4.140) não é uma equação independente. Veja também que a equação (4.137) implica em  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , a qual é a equação de conservação de carga na ausência de variações na densidade de carga  $\rho$ . É também por conta disto que a equação de conservação de carga elétrica não é explicitamente considerada no conjunto de equações MHD.

Outro ponto importante das equações de Maxwell pode ser visto ao tomarmos a diver-

gência de (4.138), obtendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (4.141)$$

tal que

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \text{constante}. \quad (4.142)$$

Com isto, a equação de Maxwell (4.139) pode ser considerada como uma condição inicial para a equação (4.138), já que se tomarmos inicialmente  $(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$ , iremos satisfazer esta condição para todo tempo  $t$ .

Assim, as equações (4.137), (4.138), (4.131) e (4.136) (na forma de componentes), constituem as dez equações que complementam as equações, obtidas tomando-se os três primeiros momentos da equação de Boltzmann.

#### 4.2.1.1 Equação da evolução temporal de $V_m$

Como visto acima, as equações (4.131) à (4.134), juntamente das equações de Maxwell e (4.136), formam um sistema fechado o qual pode ser resolvido para qualquer uma das variáveis de fluido ou eletrodinâmicas. Considerando as condições iniciais, é possível ainda obtermos a solução final de determinado problema. No nosso caso, iremos eliminar o campo elétrico e a densidade de corrente do sistema, reduzindo o número de variáveis para quatro:  $\rho_m$ ,  $\mathbf{V}_m$ ,  $p$  e  $\mathbf{B}$ .

Primeiramente, vamos a equação de evolução temporal de  $\mathbf{V}_m$ . Combinando as equações (4.137) e (4.133), temos:

$$\rho_m \frac{D\mathbf{V}_m}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (4.143)$$

O segundo termo é conhecido como a força magnética. A força magnética ( $\mathbf{F}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ) é uma força fundamental a qual põe o fluido condutor em movimento ao acelerá-lo na presença de um campo magnético, como visto nesta equação. Esta força, atuante em (4.143) e na equação de difusão de  $\mathbf{B}$  (a qual iremos obter a seguir e que descreve como o movimento do fluido faz com que o campo magnético evolua no tempo), descreve a maneira que a maioria das dinâmicas de larga escala do plasma ocorrem.

#### 4.2.1.2 Equação da evolução temporal de $p$

Utilizando a definição de densidade de corrente elétrica (4.103) e a equação (4.137), a equação de equilíbrio de calor pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial(N_e T_e)}{\partial t} = -\nabla \cdot (N_e T_e \mathbf{V}_m) - \frac{2}{3} N_e T_e \nabla \cdot \mathbf{V}_m - \frac{1}{3\mu_0} \frac{1}{eN_e} \nabla(N_e T_e) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (4.144)$$

#### 4.2.1.3 Equação da evolução temporal de $\mathbf{B}$

Como nosso objetivo é analisar o campo magnético gerado em um impacto meteorítico, é necessário compreender como o campo magnético  $\mathbf{B}$  se relaciona com o plasma em si. Dessa forma, partindo da equação de Ohm (4.136), e das equações de Maxwell (4.137) e (4.138), podemos obter uma equação que relaciona o campo  $\mathbf{B}$  com a velocidade de fluido do plasma  $\mathbf{V}_m$ , sua densidade  $N_e$  e sua temperatura  $T_e$ .

Tomando o rotacional da equação de Ohm (4.136) e sabendo que  $q_e = -e$ , em que  $e$  é a carga elementar, temos:

$$\nabla \times \mathbf{J} = \sigma [\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{V}_m \times \mathbf{B})] + \frac{\sigma}{N_e e} \nabla \times \nabla p_e - \frac{\sigma}{N_e e \mu_0} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]; \quad (4.145)$$

Substituindo as equações (4.138) e (4.137), e realizando algumas manipulações básicas a fim de se ter apenas variações temporais na esquerda da equação, obtemos a equação de difusão do campo magnético:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[ \underbrace{\mathbf{V}_m \times \mathbf{B}}_{\text{mov. de fluido}} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \mathbf{B}}_{\text{difusão de } \mathbf{B}} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0 e N_e} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}_{\text{efeito Hall}} + \underbrace{\frac{1}{N_e e} \nabla p_e}_{\text{correntes de deriva } \equiv \mathbf{S}} \right]. \quad (4.146)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima (4.146) descreve as mudanças convectivas em  $\mathbf{B}$  devido ao movimento de fluido do plasma como um todo, como por exemplo quando ocorre a compressão do campo magnético ambiente durante a expansão do plasma gerado pelo impacto. O segundo termo, descreve a difusão de  $\mathbf{B}$  ao longo da condutividade da nuvem de plasma. O terceiro termo é devido ao efeito Hall, e o quarto, que constitui o termo fonte, descreve o crescimento das correntes elétricas devido a gradientes de pressão chamadas correntes de deriva [7].

É possível também analisarmos quando o sistema é regido por difusão ou pelo fluxo de partículas. Nos primeiros momentos da escavação, é comum desprezar o termo da difusão, o que é justificável, pois por conta das altas velocidades de expansão do plasma no estágio de escavação (da ordem de centenas de quilômetros por segundo), temos que:

$$\left| \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right| \ll | \mathbf{V}_m \times \mathbf{B} | .$$

Ao desprezar as correntes de deslocamento, a relação  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  é válida, tal que podemos dizer que:

$$|\mathbf{B}| \simeq \mu_0 L |\mathbf{J}|, \quad (4.147)$$

em que  $L$  é uma dimensão característica do sistema (região de plasma). Assim, a inequação acima é equivalente à:

$$R_M \equiv \sigma |\mathbf{V}_m| \mu_0 L \gg 1, \quad (4.148)$$

onde  $R_M$  é chamado de número de Reynolds magnético, em analogia ao número de Reynolds hidrodinâmico. Este número é útil para determinar se um sistema é dominado pela difusão ou pelo fluxo de partículas. Quando  $R_M \gg 1$ , o fluxo de partículas domina e o campo magnético se move junto ao fluxo [1].

O termo fonte ( $\mathbf{S}$ ), na equação (4.146), considerando  $p_e = N_e T_e$  com  $N_e$  variando apenas em uma direção espacial, pode ser reescrito como:

$$\mathbf{S} \simeq \frac{1}{e N_e} (\nabla T_e) \times (\nabla N_e), \quad (4.149)$$

em que o termo de temperatura é dado em unidades de energia ( $eV$ ).

O termo acima possui uma interpretação física bem clara. Srnka (1977) foi o primeiro a explicá-lo no caso de um impacto meteorítico. Considere que o campo ambiente inicial seja tão pequeno a ponto do raio eletrociclôtrônico ser grande o suficiente, tal que se possa assumir que a trajetória dos elétrons seja aproximadamente retilínea. Se os gradientes  $\nabla T_e$  e  $\nabla N_e$  não estiverem alinhados, devido por exemplo, à fortes gradientes químicos no alvo e no projétil, irá ocorrer um acúmulo de elétrons ao longo de isoterms, as quais intersectam regiões com menor acúmulo de cargas. Essa distribuição (anisotrópica) é instável termicamente, tal que os elétrons acumulados são levados a preencher as áreas de menor densidade eletrônica. Por conta disto, e também devido à menor mobilidade iônica, esse movimento resulta em uma corrente na direção de

$-\nabla N_e$ . Caso os gradientes  $\nabla T_e$  e  $\nabla N_e$  se mantenham separadamente (*i.e.*, continuem existindo devido a algum processo externo), essa corrente continuará crescendo até o momento em que o campo magnético (associado à esta corrente) passe a limitar o movimento eletrônico, devido aos efeitos que comprimem o plasma (*i.e.*, efeitos que limitam o movimento eletrociclôtrônico). Por fim, quando  $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ , o gradiente de pressão (quasi-estático) se equilibra com o gradiente do campo magnético, tal que o sistema se encontra em equilíbrio MHD.

## Capítulo 5

# Resultados

O foco desta dissertação está nos campos magnéticos produzidos pelo plasma formado durante um impacto meteorítico. Primeiramente, iremos analisar o campo magnético máximo gerado neste caso específico. Note que, em (4.146), a evolução do campo magnético é dependente de diversos parâmetros. Entre eles, a densidade e a temperatura eletrônicas e a velocidade média de plasma. Assim, para realizarmos uma simples previsão de campos magnéticos máximos produzidos, é necessário obtermos algumas informações acerca destes parâmetros. Em seguida, busca-se soluções através das simetrias de Lie (clássicas) para as equações constituintes do nosso problema. Isso com o intuito inicial de encontrar soluções particulares que possam vir a satisfazer as condições iniciais geradas pelo processo de crateramento, ou até soluções que possam vir a “iluminar” um pouco mais o comportamento geral do plasma descrito pela teoria MHD.

Antes de prosseguirmos, é importante definirmos qual o regime de interesse. Primeiramente, procura-se a máxima simplificação do problema exposto aqui. Como o objetivo desta dissertação é realizar uma análise acerca do campo magnético máximo produzido, é intuitivo procurarmos estabelecer condições mais idealizadas e coerentes possíveis (*e.g.*, plasma totalmente ionizado, viscosidade nula). Para tal, vamos restringir três dos principais parâmetros de impacto: a velocidade e ângulo de impacto e a massa do projétil. Procuramos um impacto gerador de uma cratera simples, mas que, ao mesmo tempo, produza um plasma totalmente ionizado.

A massa do projétil altera o tamanho final da cratera e a carga total gerada [29, 30]. Mas, em simulações realizadas por Fletcher (2015), a velocidade de impacto se torna o parâme-



tro crítico na definição do regime de plasma, já que muitas das propriedades do plasma (*e.g.*, temperatura, grau de ionização) variam fracamente ou são independentes da massa do projétil.

Devemos então conhecer qual a velocidade de impacto que produz um regime de plasma próximo ao esperado. Essa quantidade é intimamente ligada à energia cinética depositada no alvo e, conseqüentemente, ao “grau de idealização” do sistema. Quanto maior a energia depositada no alvo, maior é a energia transferida para as partículas do plasma [18]. Por conta disto, quanto maior a velocidade de impacto, maior é a probabilidade do plasma se encontrar totalmente ionizado. Em contrapartida, os aspectos que geram a não-idealidade (*e.g.*, partículas neutras, grãos de poeira) no sistema tendem a diminuir sua contribuição nas equações constituintes.

A maior velocidade de impacto possível contra a Terra é a soma de duas componentes distintas de velocidade: A velocidade do projétil na sua órbita em relação ao Sol (velocidade heliocêntrica), e a velocidade orbital máxima da própria Terra (ou Lua) com relação ao Sol. A primeira pode ser pensada como a velocidade de escape do sistema solar e é da ordem de  $42 \text{ km/s}$  a partir da órbita terrestre. A segunda é aproximadamente  $30 \text{ km/s}$ . Desta forma, a velocidade máxima que um projétil é capaz de atingir de encontro a Terra (ou a Lua) é uma simples soma destas duas velocidades, ou  $72 \text{ km/s}$  ( $\sim 73 \text{ km/s}$  no caso da Lua). Mas como as órbitas terrestre e do projétil geralmente se encontram inclinadas com relação uma à outra, as duas velocidades vão se somar geometricamente (soma vetorial), produzindo velocidades de encontro terrestres entre esses dois limites [6]. As velocidades típicas de impacto de asteroides contra a Terra (ou Lua) se encontram entre  $15$  a  $25 \text{ km/s}$  [59].

O plasma é raramente detectado para velocidades de impacto menores que  $8 \text{ km/s}$ , sendo esta a mesma velocidade para a qual um projétil (dos tipos S, C ou M)<sup>1</sup> não é totalmente vaporizado [6]. Apesar da possibilidade de produção de cargas elétricas nestas baixas velocidades [13, 15], relativamente pouca energia se encontra disponível para a ionização do plasma, de forma que sua dinâmica é alterada quando o projétil não é totalmente destruído [6]. A transição de um plasma fracamente ionizado para um totalmente ionizado aparenta ser independente da massa do projétil, mas dependente da velocidade de impacto, ocorrendo para velocidades próximas à

---

<sup>1</sup>Existem três tipos principais de asteroides, classificados de acordo com sua composição: os carbonáceos (tipo-C) compostos por materiais argilosos e água, os rochosos (tipo-S) compostos por silicatos, e os metálicos (tipo-M) feitos em sua maioria de níquel e ferro e contendo metais preciosos como a platina, magnésio e até ouro [60].

18  $km/s$  [6]. No processo de produção de plasmas, ocorre um embate entre a recombinação e a expansão. Abaixo de 18  $km/s$ , a recombinação ocorre antes que o grau de ionização se “congele”, enquanto que acima desta velocidade, o plasma expande mais rapidamente para o estado não-colisional, impedindo grande parte da recombinação das partículas.

Considera-se então um impacto vertical de um projétil rochoso (do tipo S) com 100  $m$  de diâmetro e  $v_p = 20 km/s$ , em que  $v_p$  é a velocidade de impacto do projétil contra o alvo. Vamos também considerar um ambiente de pressão atmosférica nula, tal que o plasma possa se expandir livremente e uma gravidade local próxima à da superfície lunar. Este impacto gera uma cratera simples e os principais parâmetros de crateramento se encontram nas tabelas 5.2 e 5.1. Este valores foram obtidos a partir da calculadora de parâmetros de crateramento, desenvolvida pelo pesquisador Keith A. Holsapple, da Universidade de Washington [53]. Nesta calculadora *online* é possível inserir diversas variáveis de impacto, incluindo o tipo geológico e a gravidade específica do alvo, o ângulo de impacto e o material, o diâmetro e a velocidade do projétil. Esta calculadora automaticamente retorna resultados acerca do processo de crateramento e informações adicionais (*e.g.*, cratera simples, cratera complexa, velocidade de ejeção dos ejectas), assim como a imagem do perfil da cratera formada. Os parâmetros inseridos do projétil são detalhados na tabela 5.1 e os valores retornados de interesse sobre a cratera formada são listados na tabela 5.2.

Tabela 5.1: Características do projétil rochoso do tipo S escolhido

Densidade ( $kg/m^3$ )	Massa ( $kg$ )	Diâmetro ( $m$ )	Velocidade de impacto ( $km/s$ )	Energia Cinética ( $J$ )
3000	$1,57 \times 10^9$	100	20	$3,14 \times 10^{17}$

Tabela 5.2: Características do processo de crateramento produzido por um projétil de 100  $m$  de diâmetro, considerando pressão local nula e gravidade local de  $1,668 m/s^2$ .

Diâmetro da cratera ( $m$ )	Profundidade da cratera ( $m$ )	Volume escavado ( $m^3$ )	Tempo de formação ( $s$ )	Massa Vaporizada ( $kg$ )
1920	524	$6,67 \times 10^8$	18,3	$6,61 \times 10^9$

## 5.1 Parâmetros de impacto

Devemos realizar, ainda, outras considerações para obtermos uma estimativa razoável de um campo máximo produzido num impacto meteorítico. A primeira é com relação ao grau de ionização do plasma e à carga total gerada. Diferentes expoentes  $\alpha$  e  $\beta$ , provenientes da equação (3.2), são encontrados na literatura, com expoentes de velocidade que variam entre 2,8 e 4,8. O fato do plasma poder se encontrar multiplamente ionizado pode alterar estes valores, assim como os diferentes materiais impactados.

Podemos considerar por simplicidade  $Z = 1$ , sem maiores alterações nas equações constituintes, por estarmos descrevendo um plasma como um único fluido. O grau de ionização do plasma formado influencia o coeficiente de velocidade, *i.e.*, o plasma pode estar multiplamente ionizado tal que  $\beta$  pode ser maior ou menor a depender do material do projétil e alvo. Mas como iremos aproximar a carga gerada por expressões obtidas na literatura, podemos assumir um plasma unicamente ionizado sem alterar o resultado. Vale notar, porém, que caso estivéssemos tratando o plasma por meio da teoria de múltiplos fluidos, a escolha de  $Z$  alteraria a número de equações constituintes do sistema e, conseqüentemente, a dinâmica do plasma.

Quanto à carga total gerada, vamos analisar algumas equações, empíricas e obtidas numericamente, de produção de cargas presentes na literatura, a fim de decidirmos qual a melhor descrição existente para o nosso problema.

Começando pelas equações empíricas, no artigo do McBride e McDonnell (1999), realizando impactos de partículas de alumínio contra alvos de ferro sob a ação de um campo elétrico de  $5 \text{ V/cm}$ , eles obtiveram a equação (3.3). Esta equação foi também utilizada por Ju *et al.* (2014), para obterem e descreverem a dinâmica e estágios do plasma formado por impactos hipervelozes. Outra equação empírica foi a obtida por Ratcliff *et al.* (1997), onde eles realizaram impactos de micropartículas de ferro contra alvos de ródio, com massas entre  $10^{-14}$  à  $10^{-19} \text{ kg}$ . Consideraram  $\alpha = 1$ , e obtiveram um beta correspondente de  $\beta = 4,74$ . Este alto valor foi devido à montagem experimental que continha uma grade divertora eletricamente carregada. Eles consideraram apenas o primeiro sinal obtido, desconsiderando a segunda componente que eles disseram ser devida aos impactos subsequentes dos ejectas (carregados) contra esta grade. Neste mesmo artigo, eles também notaram que se considerassem  $\alpha = 0,8$ , o valor de  $\beta$  era menor,

sendo  $\beta = 4,1$ . Mas eles também comentaram que os outros artigos, presentes na literatura até então, não consideravam essa segunda componente separadamente, e assim, ao analisarem a carga gerada total, obtiveram os valores mais próximos que o da literatura da época até então. O terceiro e último artigo que obteve resultados empíricos consistentes foi o do Dietzel *et al.* (1972), em que realizaram impactos utilizando diversos materiais, com massas variando de  $1 \times 10^{-18}$  à  $5 \times 10^{-13}$  kg.

Considerando os três casos acima, extrapola-se os resultados de experimentos realizados em laboratório para o caso de um impacto de grandes escalas. Isto é, considera-se um projétil de 100 m de diâmetro. As curvas obtidas se encontram na figura 5.1.

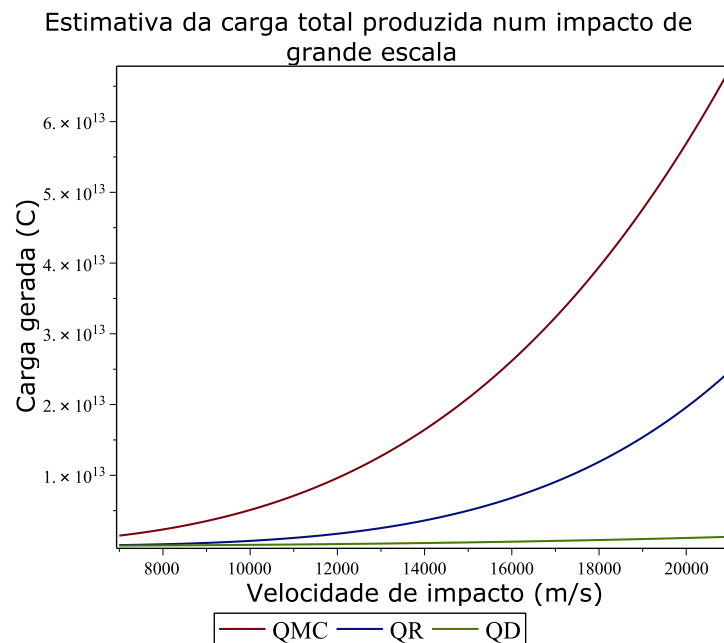


Figura 5.1: Estimativa da carga total gerada num impacto meteorítico para diversas velocidades de impacto, considerando um projétil rochoso do tipo S com 100 m de diâmetro. Cada curva corresponde à diferentes equações obtidas empiricamente. QR é a curva correspondente à equação obtida por Ratcliff *et al.* (1997), QMC à equação obtida por McBride e McDonnel (1999) e QD à equação obtida por Dietzel *et al.* (1972).

Comparando este resultado com a figura 3.1, a qual também descreve a carga total gerada em função da velocidade de impacto, vemos que no caso de projéteis com menor massa, o resultado obtido por Dietzel *et al.* é a curva menos acentuada em ambos os casos. Isto faz

com que, no caso de projéteis com maior massa, a curva seja a que produz menos carga. Para velocidades de impacto de  $20 \text{ km/s}$ , a quantidade de carga gerada pela equação obtida por Dietzel *et al.* é uma ordem de grandeza menor que as previsões dos outros autores, no caso do projétil com diâmetro de  $100 \text{ m}$ . Por outro lado, esta curva obtida por Dietzel *et al.*, é a que mais se assemelha à curva obtida por Li *et al.* (2014), como visto na figura 5.2.

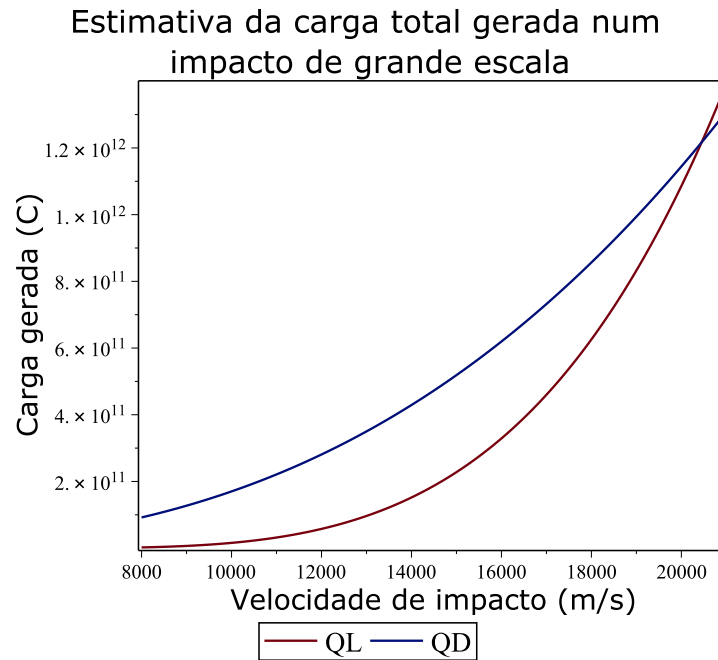


Figura 5.2: Estimativa da carga total gerada num impacto meteorítico em função da velocidade de impacto, considerando um projétil rochoso do tipo S com  $100 \text{ m}$  de diâmetro. A curva vermelha (QL) é correspondente à equação obtida por Li *et al.* (2014) e a curva em azul (QD) é a curva correspondente à equação obtida por Dietzel *et al.* (1972).

Vemos que, para a velocidade de impacto de  $20 \text{ km/s}$ , a carga gerada em ambos os casos (QL, QD) é da mesma ordem de grandeza. Comparando os resultados para uma menor massa (figura 3.1) com este último gráfico, vemos que a equação obtida por Li *et al.*, fica abaixo das outras curvas para menores velocidades, mas se aproxima às outras curvas para maiores velocidades. Esta equação considera uma velocidade de gatilho, ou seja, a velocidade para qual o plasma fracamente ionizado é formado. Assim como o autor, consideramos um valor aproximado de  $5000 \text{ m/s}$  para a velocidade de gatilho.

Em QMC e QR, suas expressões não escalam linearmente com a massa, de forma que as maiores variações na carga produzida ocorrem nestes dois casos. Como o objetivo é obtermos um sistema mais ideal possível sem perder a razoabilidade, é de se esperar que a carga total gerada seja linearmente dependente da massa e que varie com  $Q \propto v_p^3$  (dois  $v$ 's da energia cinética e um  $v$  do momentum). Desta forma as curvas que mais se assemelham à este comportamento são as curvas QD e QL. Assim, a estimativa mais razoável para a carga total gerada é a obtida por Li *et al.*, por esta incluir a velocidade de gatilho, sendo coerente tanto com impactos lentos ( $\sim 7 \text{ km/s}$ ) quanto para impactos hipervelozes, além de se aproximar ao resultado de QD, o qual foi obtido a partir de uma maior variação nas massas.

A fim de obtermos uma primeira estimativa do campo máximo formado, devemos também considerar uma forma funcional para a densidade eletrônica. A escolha da distribuição inicial da densidade eletrônica do plasma pode gerar efeitos significativos na sua expansão. Como o plasma rapidamente se expande e atinge o estado não-colisional, a distribuição da densidade pode se “congelar” (*i.e.*, não se alterar para tempos subsequentes) durante a expansão deste plasma [6]. É neste mesmo momento que o grau de ionização, a temperatura e a velocidade de expansão são também efetivamente “congelados” no plasma.

Considerando o perfil de densidades obtido por Ju *et al.* (2014), equação (3.7), devemos fazer suposições acerca da velocidade média de expansão do plasma, do seu tempo de formação e do seu raio inicial. Considera-se, a partir dos resultados da tabela 5.2,  $r_0$  igual a metade do diâmetro da cratera formada, o volume de plasma  $V$  igual ao volume escavado e  $t_{for}$  igual ao tempo de formação da cratera.

Para uma ampla gama de velocidades, em que as propriedades do projétil não alteram consideravelmente o problema, é de se esperar que a temperatura e a densidade sejam invariantes e que a velocidade de expansão do plasma varie com relação à velocidade de impacto [6]. Como vamos considerar um ambiente sem a presença atmosférica (vácuo), podemos assumir, como uma primeira estimativa, a velocidade  $V_m$  como sendo constante e igual à velocidade de impacto  $v_p$ . Assim, a equação (3.7) toma a forma mostrada na figura 5.3.

A temperatura, por sua vez, atinge um *platêau* de aproximadamente  $2,5 \text{ eV}$  para uma ampla faixa de velocidades ( $> 25 \text{ km/s}$ ). Isto ocorre, pois, para impactos de grande escala, o

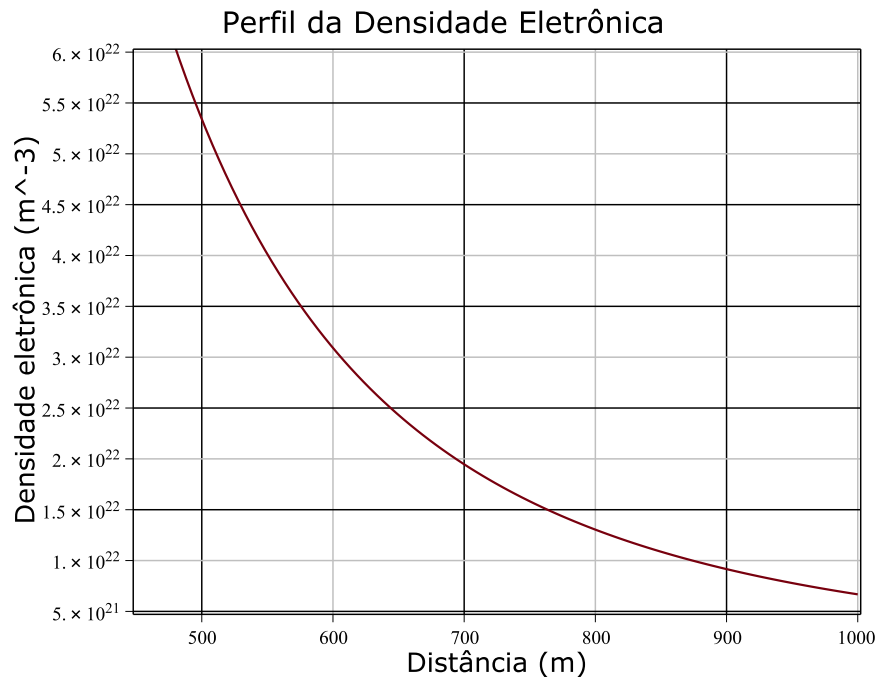


Figura 5.3: Densidade eletrônica produzida num impacto meteorítico considerando um projétil de 100 m de diâmetro, considerando a equação obtida por Ju *et. al* (2014).

projétil é rapidamente vaporizado, sendo a maioria do plasma composto por íons provenientes do alvo. Em altas velocidades, após a vaporização do projétil, uma forte onda de choque ainda se encontra na sua expansão ao longo do interior do alvo, ao passo que um volume de plasma, gás e poeira se forma atrás do choque, livre para se expandir para o meio [6].

Alguns experimentos de impactos hipervelozes estimaram uma temperatura de plasma, durante a expansão inicial, da ordem de 20 à 40 eV [48, 61]. Apesar disto, alguns experimentos e simulações mais recentes mostraram que é mais provável que a temperatura do plasma se encontre mais próxima de 2 eV, além de ser composta por íons multiplamente ionizados [16]. A temperatura de 2,5 eV, obtida por Fletcher (2015), é próxima aos resultados obtidos por Lee *et al.* (2012) e Lee *et al.* (2013). Estes últimos dois também argumentam que a temperatura de plasma é independente da massa do projétil nos casos de microimpactos. Apesar de estarmos lidando com um impacto em grandes escalas, podemos assumir que a temperatura, no ponto em que o plasma se torna não-colisional, inicialmente é homogênea e igual à 2,5 eV.

## 5.2 Campos magnéticos gerados em um impacto meteorítico

Como obtido no capítulo anterior, as equações constituintes do nosso problema são:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}_m) = 0; \quad (5.1)$$

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{V}_m}{\partial t} = -\nabla(2N_e T_e) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[ \mathbf{V}_m \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0 e N_e} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{N_e e} \nabla(N_e T_e) \right]; \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial(N_e T_e)}{\partial t} = -\nabla \cdot (N_e T_e \mathbf{V}) - \frac{2}{3} N_e T_e \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{3\mu_0} \frac{1}{e N_e} \nabla(N_e T_e) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (5.4)$$

em que desprezamos o termo  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$  (inércia eletrônica) como uma primeira aproximação. Este sistema consiste de oito equações e nove variáveis, sendo oito incógnitas, isto porque já assumimos uma forma funcional para a densidade eletrônica, como exposto anteriormente. Ao desprezarmos o termo da inércia eletrônica, estamos simplificando o problema ao desprezarmos os efeitos de viscosidade que tendem a produzir instabilidades no fluido.

Em um impacto hiperveloz, à medida que a energia cinética é depositada em um alvo quimicamente não-homogêneo, uma nuvem de plasma contendo estas não-homogeneidades vão sendo formados simultaneamente ao campo magnético correspondente. O tempo característico de ionização é da ordem de  $10^{-9}$  s para uma temperatura de até 10000 K e densidades próximas ao estado sólido (podendo ser menor para maiores temperaturas) [62]. O tempo que leva para a energia cinética ser depositada no alvo,  $\tau_E$ , é da ordem de  $\sim 1$  ms para um projétil de 1 m de diâmetro, impactando a uma velocidade de  $v_p = 10$  km/s [63]. No nosso caso, como o diâmetro do projétil aumenta duas ordens de grandeza com relação à velocidade considerada por Pirri (1977), é bem provável que  $\tau_E$  seja maior. Assim, durante a desaceleração do projétil e sua consequente vaporização, plasmas já são formados.

Na tentativa de se obter o campo magnético máximo produzido em um impacto hiperveloz, vamos analisar as escalas de tempo que governam o decaimento de  $\mathbf{B}$ . A primeira escala de tempo é a do transporte convectivo (devido ao termo de transporte de fluido na equação (4.146)) dado por  $L/V_m$ , em que  $L$  é o tamanho característico da nuvem de plasmas formada e  $V_m$  a velocidade de expansão desta nuvem. A segunda é o tempo de difusão  $\tau_D$  do plasma (devido ao termo de difusão em (4.146)), dado por  $\mu\sigma L^2/\pi^2$  para uma nuvem esférica. Assim, os



campos magnéticos podem ser gerados mais rapidamente, antes que se atenuem devido à difusão, se  $\tau_D \gg \tau_E$ . Sendo  $\tau_E$  dado aproximadamente por:

$$\tau_E \approx \frac{r_p}{v_p} \left[ 1 + \left( \frac{\rho_p}{\rho_0} \right)^{1/2} \right], \quad (5.5)$$

em que  $\rho_p$  e  $\rho_0$  são as densidades iniciais do projétil e do alvo, respectivamente, e  $r_p$  o raio do projétil. Densidades razoáveis resultam em  $\tau_E \lesssim 5r_p/v_p$ . Dessa forma, como  $r_p \ll L$  e  $V_m \gg v_p$ , então os campos são gerados mais rapidamente do que perdidos pela difusão quando:

$$\mu\sigma v_p L \gg 5\pi^2. \quad (5.6)$$

Mesmo à uma temperatura relativamente baixa, como as obtidas em laboratório (menores que  $4500\text{ K}$ , ou  $\sim 0,4\text{ eV}$  [15]) e às altas densidades ( $10^{15}\text{ m}^{-3}$  ou mais), as condutividades encontradas excedem o valor da ordem de  $10^2\ (\Omega\text{m}^{-1})$ , de tal forma que se considerarmos  $v_p = 20\text{ km/s}$  e  $\mu = \mu_0$ , então  $L \gtrsim 100\text{ m}$ , que deve ser característico de nuvens geradas em impactos produzidos por projéteis com diâmetros da ordem de metros. Em impactos maiores, que formam crateras kilométricas com  $L > 100\text{ km}$ , o tempo de difusão  $\tau_D \approx 10^5\text{ s}$ , enquanto  $L/V_m \lesssim 10\text{ s}$ , de forma que a difusão é menos importante que o movimento de expansão do plasma.

Assim, um modelo simples do campo magnético máximo gerado, pode ser obtido desprezando o termo de difusão em (4.146) e assumindo  $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$ . Vamos considerar uma densidade que varia ao longo do espaço, além de considerar  $\mathbf{V}_m$  e  $T_e$  como esfericamente simétricos. Essa é uma aproximação razoável para a distribuição do plasma produzido em um impacto realizado em laboratório. Temos que  $\mathbf{V}_m$  e  $T_e$  são dominados por componentes neutras na nuvem de vapor produzida, a qual foi observada se expandindo de forma quase esférica em um experimento de impacto vertical realizado por Schultz em 1988. Assim, a aproximação (com uma ordem de grandeza de acurácia) do campo magnético máximo gerado é dada por:

$$|\mathbf{B}_{max}| \sim \frac{1}{eV_m} \left( \frac{\Delta T_e}{L} \frac{\Delta N_e}{N_e} \right), \quad (5.7)$$

onde  $10^{-2} \lesssim \Delta N_e/N_e \lesssim 10^2$ , a depender da não-homogeneidade química em larga escala do material-alvo. Por exemplo, considerando um alvo verticalmente estratificado com um aumento de aproximadamente 10 % no número atômico médio entre camadas sucessivas, e considerando que o impacto escave mais que duas camadas sucessivas, então pode-se esperar  $\Delta N_e/N_e \approx 0,1$  [7].

Outra forma de se encontrar valores máximos do campo magnético é analisando as componentes separadamente. Em forma de componentes, tomando as aproximações acima ( $T_e = T(r)$ ,  $N_e = N(r, \theta, \phi)$ ,  $\mathbf{V}_m = V_m(r)\mathbf{r}$ ), desprezando o termo de deriva Hall e utilizando coordenadas cilíndricas, temos que a equação (4.146) é dada em forma de componentes por:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = \frac{V_m}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + V_m \frac{\partial B_z}{\partial z}; \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = -r \frac{\partial}{\partial r} (V_m B_\theta) - \frac{1}{e N_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \frac{\partial N_e}{\partial z}; \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} (r V_m B_z) + \frac{1}{r} \frac{1}{e N_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \frac{\partial N_e}{\partial \theta}. \quad (5.10)$$

Podemos considerar uma simetria azimutal no campo magnético (como observado em um impacto vertical realizado por Crawford e Schultz em 1993), de forma que podemos desprezar os gradientes azimutais. Consideramos também uma densidade que varia apenas como função de  $z$ , tal que  $n = n(z)$  (o qual pode ocorrer na interface entre o projétil e os materiais do alvo). Nestas condições, sendo o campo magnético inicial ( $\mathbf{B}$ ) homogêneo, ele irá variar radialmente apenas após um certo tempo, tal que as equações acima se tornam:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = 0; \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} (V_m B_\theta) - \frac{1}{e N_e} \frac{\partial T_e}{\partial r} \frac{\partial N_e}{\partial z}; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_m B_z). \quad (5.13)$$

Veja que a componente radial do campo magnético é constante ao longo do tempo. Também, se considerarmos um dado campo de velocidades  $V_m$ , a componente vertical do campo magnético, descrito pela equação (5.13), irá depender apenas de condições iniciais, podendo ser tratada independentemente, assim como a componente azimutal descrita pela equação (5.12).

Focando apenas no campo azimutal (5.12), seu valor máximo será dado por:

$$B_{\theta_{max}} = -\left(\frac{\partial V_m}{\partial r}\right)^{-1} \frac{1}{e N_e} \frac{\partial N_e}{\partial z} \frac{\partial T_e}{\partial r}. \quad (5.14)$$

O termo da variação da velocidade pode ser aproximado então por  $\Delta V_m/z$  e o termo da variação da temperatura por  $\Delta T_e/L$ . Através das simulações de Fletcher (2015), podemos tomar como uma primeira aproximação  $\Delta V_m = V_m$ . Considerando também uma temperatura máxima de

$2 \text{ eV}$ , temos que  $\Delta T_e \sim 20000 \text{ K}$  e  $L \sim 100 \text{ m}$  (baseado na discussão anterior). O campo magnético azimutal correspondente pode ser descrito então como em função da altura (altitude) em relação ao ponto de impacto, como mostrado na figura 5.4.

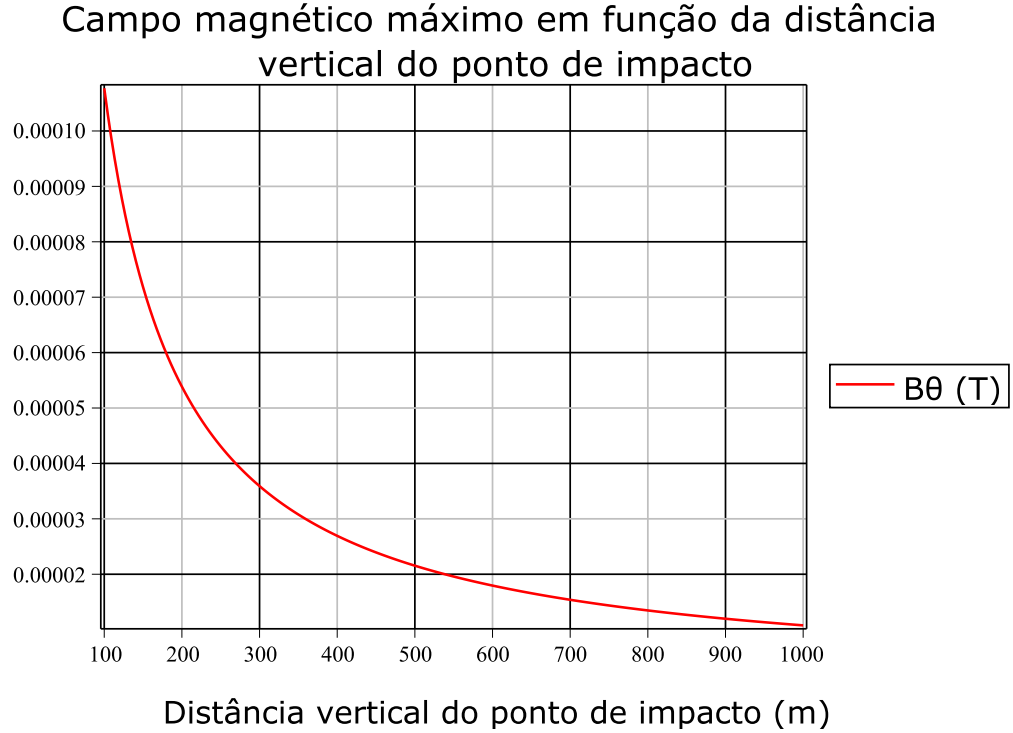


Figura 5.4: Campo magnético azimutal em função da altitude a partir do ponto de impacto, considerando um impacto meteorítico em grandes escalas. O diâmetro do projétil considerado foi de  $100 \text{ m}$ , do tipo rochoso (tipo-S), impactando um alvo rochoso sob pressão nula a uma velocidade de  $v_p = 20 \text{ km/s}$ .

Considerando também uma altura de  $500 \text{ m}$ , a estimativa dos campos magnéticos azimutais máximos se encontra plotada na figura 5.2. Apesar de o campo máximo extrapolar para o ponto de impacto, em ambos os gráficos, deve-se notar que a estimativa realizada aqui é válida apenas para a região em que o plasma se torna não-colisional, após o momento em que este já se expandiu para fora da cratera recentemente formada. Os valores encontrados, de aproximadamente  $5 \times 10^{-5} \text{ T}$  para uma altura de  $200 \text{ m}$ , são compatíveis com os valores encontrados na literatura [13, 25, 64].

Analisando o modelo de geração de campos magnéticos apresentado por Crawford e

### Campo magnético azimutal máximo em função da distância do ponto de impacto

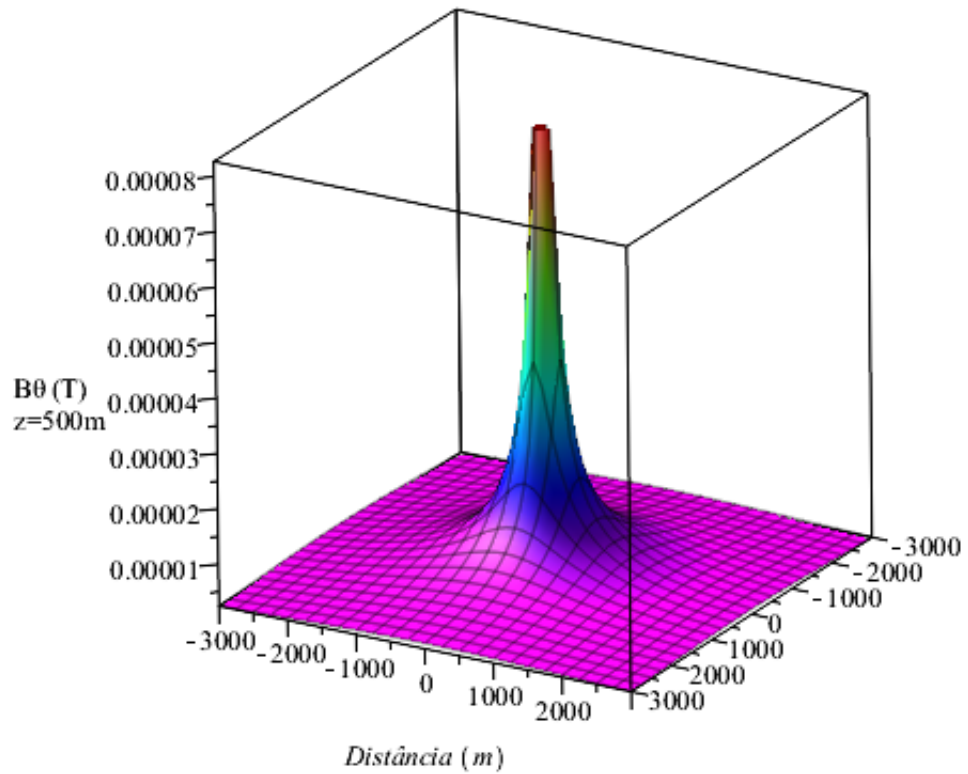


Figura 5.5: Campo magnético azimutal em função da distância para um impacto meteorítico em grandes escalas. O diâmetro do projétil considerado foi de 100 m, do tipo rochoso (tipo-S), impactando a uma velocidade de  $v_p = 20 \text{ km/s}$ .

Schultz (1993), passa a ser interessante a análise de um novo modelo mais acurado contendo os termos de difusão ôhmica e de efeito Hall, como visto na equação (5.3). Este termos podem vir a contribuir com a amplificação dos campos magnéticos mesmo durante a expansão da nuvem de plasmas, nos casos de impactos de grandes amplitudes e considerando um plasma composto por partículas neutras e poeira.

### 5.3 As simetrias de Lie para as equações MHD

A fim de avançarmos um pouco mais na teoria MHD, iremos realizar uma análise das equações obtidas até então por meio das simetrias de Lie. As simetrias de Lie são uma poderosa ferramenta capaz de encontrar soluções particulares de equações (ou sistema de equações) diferenciais. O objetivo é buscar soluções particulares das equações (5.1) à (5.4). Estas soluções podem vir a ser consistentes com o nosso problema, a depender de suas formas funcionais e suas correspondentes condições iniciais.

A análise de equações diferenciais por meio de simetrias foi desenvolvida inicialmente por Lie, no final do século XIX [65]. Ela surge da ideia de que qualquer objeto possui ao menos uma simetria, *i.e.*, ao final da ação de uma transformação (*e.g.*, rotação, translação), o objeto se mantém o mesmo (inalterado). Quase todas as soluções analíticas, pertencentes ao campo da física, são soluções invariantes sob uma ou mais transformações de simetrias. As soluções que se mostram invariantes sob a ação de transformações de simetrias são chamadas de soluções invariantes. Aqui será feita uma breve revisão baseada na teoria descrita por Hydon (2000) [66].

Diversos métodos para se obter as soluções invariantes por simetrias são descritos na literatura. Olver e Rosenau (1987) [67] mostraram que soluções invariantes podem ser obtidas através de simetrias infinitesimais. Bluman e Cole (1969) [68] desenvolveram as chamadas simetrias não-clássicas, as quais são definidas pela invariância da solução analítica sob as transformações de simetrias. Isto preserva tanto a forma da equação diferencial e quanto a forma da condição de invariância. Mesmo sendo contraintuitivo, esta abordagem é menos restritiva, pois existem mais soluções não-clássicas do que simetrias de Lie (também chamadas de simetrias clássicas, em contrapartida às simetrias não-clássicas). As simetrias de Lie são um subgrupo das simetrias não-clássicas e por serem a abordagem mais simples frente à outros tipos de simetrias, serão as tratadas nesta seção.

A transformação que mapeia cada ponto de um conjunto em si mesmo é chamado de simetria trivial (*e.g.*, uma rotação de  $360^\circ$  de um triângulo). Cada simetria possui uma única transformação inversa, a qual é também uma simetria. Ao combinar a ação de ambos, a simetria e sua inversa, sobre um objeto e em qualquer ordem, não altera o mesmo. Aqui, vamos nos restringir às simetrias suaves e contínuas (diferentes das simetrias discretas, como as de rotação

por um determinado ângulo).

Se  $x$  denota a posição de um ponto qualquer de um objeto, e se:

$$\Gamma : x \mapsto \hat{x}(x) \quad (5.15)$$

é uma simetria, então podemos assumir que  $\hat{x}$  é infinitamente diferenciável com respeito à  $x$ . Além disto, como  $\Gamma^{-1}$  é também uma simetria,  $x$  é infinitamente diferenciável com relação à  $\hat{x}$ . Por conta disto,  $\Gamma$  é dito um difeomorfismo ( $C^\infty$ ). Um difeomorfismo é um mapeamento reversível suave, o qual a sua inversa é também suave.

Além disto, as simetrias também necessitam preservar a estrutura de um objeto (*e.g.*, um objeto planar pertencente a um plano  $(x, y)$  e sua imagem no plano  $(\hat{x}, \hat{y})$  são indistinguíveis). Em geral, se uma transformação é uma simetria, então as condições abaixo são satisfeitas:

- 1 A transformação preserva a estrutura;
- 2 A transformação é um difeomorfismo;
- 3 A transformação mapeia o objeto em si mesmo.

A condição de simetria, citada anteriormente, é obtida a partir do terceiro item.

Um conjunto de simetrias extremamente útil é o conjunto infinito de simetrias rotacionais  $\Gamma_\varepsilon$ . Essa classe de simetrias é muito utilizada para a construção de soluções exatas de várias equações diferenciais e será a utilizada aqui. O conjunto  $\Gamma_\varepsilon$  é um exemplo de um grupo de Lie de um parâmetro.

Suponha que um objeto contido num subconjunto de  $\mathbb{R}^N$  possua um conjunto infinito de simetrias:

$$\Gamma_\varepsilon : x^s \mapsto \hat{x}(x^1, \dots, x^N), \quad s = 1, \dots, N, \quad (5.16)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro real e que as seguintes condições são satisfeitas:

- 1  $\Gamma_0$  é a simetria trivial, tal que  $\hat{x}^s = x^s$  quando  $\varepsilon = 0$ ;
- 2  $\Gamma_\varepsilon$  é uma simetria para todo  $\varepsilon$  muito pequeno, *i.e.*, próximo de zero;
- 3  $\Gamma_\delta \Gamma_\varepsilon = \Gamma_{\delta+\varepsilon}$  para todo  $\delta$  e  $\varepsilon$  próximos de zero;

4 Cada  $\hat{x}^s$  pode ser representado por meio de uma série de Taylor em  $\varepsilon$  (para alguma vizinhança de  $\varepsilon = 0$ ), tal que:

$$\hat{x}^s(x^1, \dots, x^N; \varepsilon) = x^s + \varepsilon x^s(x^1, \dots, x^N) + O(\varepsilon^2), \quad s = 1, \dots, N. \quad (5.17)$$

Então o conjunto de simetrias  $\Gamma_\varepsilon$  pode ser chamado de um grupo de Lie local de um parâmetro. O termo “local” surge devido à necessidade de satisfação das condições na vizinhança de  $\varepsilon = 0$ . O tamanho máximo da vizinhança, por sua vez, depende apenas de  $x^s$ ,  $s = 1, \dots, N$ . O termo “grupo” é usado, pois as simetrias  $\Gamma_\varepsilon$  satisfazem os axiomas de um grupo (*e.g.*, associatividade, elemento inverso, elemento identidade) para  $\varepsilon$  suficientemente próximo à zero. Em particular, a condição 3 implica em  $\Gamma_\varepsilon^{-1} = \Gamma_{-\varepsilon}$ . É conveniente simplificarmos a notação ao abreviar

$$\Gamma_\varepsilon : (x^1, \dots, x^N) \mapsto (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^N) = \dots \quad (5.18)$$

por

$$(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^N) = \dots. \quad (5.19)$$

Vamos então desenvolver uma breve revisão acerca das simetrias de Lie para equações diferenciais de forma geral, como exposto em [69]. Seja o conjunto de funções (variáveis dependentes)  $u_1, \dots, u_n \equiv u_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , das variáveis independentes  $x_1, \dots, x_m \equiv x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Um sistema com  $p$  equações diferenciais satisfeitas pelas  $n$  funções  $u_j(x_1, \dots, x_m)$  pode ser escrito como:

$$F_\mu(u_j, x_i, u_{jI}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, p \quad (5.20)$$

com

$$u_{jI} \equiv u_{j,i_1, \dots, i_k} = \frac{\partial^k u_j}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \quad I \equiv i_1, \dots, i_k. \quad (5.21)$$

A transformação de variáveis

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \hat{x}_i(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n); \\ \hat{u}_j &= \hat{u}_j(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_n), \end{aligned} \quad (5.22)$$

é uma transformação de simetria da equação (5.20) se:

$$F_\mu(\hat{u}_j, \hat{x}_i, \hat{u}_{jI}) = 0, \quad (5.23)$$

onde  $\hat{u}_{jI} \equiv \partial^k \hat{u}_j / \partial \hat{x}_{i_1} \cdots \partial \hat{x}_{i_k}$ , sempre que (5.20) for válida. Essas transformações são difeomórficas. Se essas transformações forem simetrias que mapeiam a solução em outra solução de (5.20), então elas são chamadas de simetrias pontuais.

Como dito anteriormente, o conjunto de simetrias de Lie de um sistema de equações diferenciais é um grupo, chamado de grupo de Lie. Um subgrupo do grupo de Lie pode ser obtido através das transformações infinitesimais. As simetrias infinitesimais podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= x_i + \varepsilon \xi_i(x_1 \cdots, x_m, u_1, \cdots, u_n) \\ \hat{u}_j &= u_j + \varepsilon \eta_j(x_1 \cdots, x_m, u_1, \cdots, u_n),\end{aligned}\tag{5.24}$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro infinitesimal e  $\xi_i$  e  $\eta_j$  são funções das variáveis dependentes e independentes.

O gerador das simetrias infinitesimais da transformação (5.24) é dado por:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.\tag{5.25}$$

A fim de se obter a condição de invariância de (5.20) sob a transformação infinitesimal (5.24), primeiro devemos notar que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon \left( \frac{\eta_j}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^m \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon \eta_{ji}^{(1)}.\end{aligned}\tag{5.26}$$

É também possível obtermos regras de transformação para ordens maiores de derivadas de forma similar. No caso geral, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_{i_1} \cdots \partial \hat{x}_{i_k}} &= \frac{\partial^k u_j}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} + \varepsilon \eta_{j, i_1 \cdots i_k}^{(k)} \\ &= u_{j, i_1 \cdots i_k} + \varepsilon \eta_{j, i_1 \cdots i_k}^{(k)},\end{aligned}\tag{5.27}$$

onde as funções  $\eta_{j, i_1 \cdots i_k}^{(k)}$  são funções das variáveis independentes, das variáveis dependentes e de suas derivadas. Supondo que a maior derivada em (5.20) é da ordem  $k$ , podemos então expressar a sua invariância sobre uma transformação infinitesimal como:

$$\mathbf{X}^{(k)} F_\mu = 0,\tag{5.28}$$



em que  $\mathbf{X}^{(k)}$  é a  $k$ -ésima prolongação do gerador infinitesimal  $\mathbf{X}$  na equação (5.25). A  $k$ -ésima prolongação de  $\mathbf{X}$  pode ser obtida a partir da equação (5.27), sendo escrita como:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{l=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_l} \eta_{j, i_1, \dots, i_l}^l \frac{\partial}{\partial u_{j, i_1 \dots i_l}}. \quad (5.29)$$

As simetrias de um sistema diferencial também podem ser utilizadas para construir soluções analíticas ou, ainda, usadas para simplificar o sistema ao reduzir o número de variáveis independentes. Por exemplo, o gerador dado em (5.25) pode ser transformado ao assumirmos novas coordenadas. Considerando as novas coordenadas dependentes na forma  $r_i = r_i(u, x)$  e independentes na forma  $s_j = s_j(u, x)$ , (5.25) se transforma em:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s_1}. \quad (5.30)$$

Essas coordenadas são chamadas coordenadas canônicas. Muitas características das simetrias de Lie surgem quando essas coordenadas são usadas. O seu uso mais comum é para se obter soluções de EDOs, mas também podem ser usadas para reconstruir simetrias de Lie [66]. Note que, com a escolha dessas coordenadas, reduzimos o sistema para  $n - 1$  variáveis independentes.

No caso geral, podemos utilizar  $p < m$  geradores de simetria a fim de reduzirmos o sistema para um novo com  $m - p$  variáveis independentes, com a condição de que ambas as variáveis canônicas existam para o conjunto de  $p$  geradores. Se  $p = m - 1$ , é possível reduzir as equações a um sistema de EDOs. Se este sistema for solucionável, então é possível encontrar soluções analíticas particulares (ou até gerais) do sistema original. Na prática, considerando  $p$  geradores  $\mathbf{X}^i$ , com  $i = 1, \dots, p$ , procura-se por soluções  $u_j(x)$  que satisfaçam:

$$\tilde{\mathbf{X}}^i u_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.31)$$

onde  $\tilde{\mathbf{X}}^i$  é o gerador (5.29) em sua forma evolucionária (em tradução livre do inglês, *evolutionary form*). Por exemplo, o gerador (5.25) em sua forma evolucionária é dada por:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^n \left( \eta_j - \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \xi_i \right) \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (5.32)$$

A equação (5.31) é um sistema linear reduzido, geralmente mais simples de ser resolvido que o sistema original, podendo ser resolvido pelo método característico. Substituindo sua solução

no sistema original, obtemos um sistema reduzido com  $n - p$  variáveis independentes. O pacote SADE realiza automaticamente todos estes cálculos de simetrias.

Nesse pacote, utiliza-se a forma ortonômica da equação (5.20) para a eliminação das derivadas de maior ordem da equação (5.28). Ao igualar todos os coeficientes das derivadas restantes, *i.e.*, igualando a zero os coeficientes das funções linearmente independentes de (5.28), obtêm-se então o sistema determinante das transformações de simetria da equação (5.20). Esse pacote utiliza métodos padrão para a redução de (5.20) para a sua forma ortonômica.

Considera-se então, em uma primeira análise, a densidade  $N_e$  como:

$$N_e = \frac{K}{z^3}, \quad (5.33)$$

onde

$$K \equiv \frac{Q}{eV} \frac{r_0^3}{\left(1 + V_{m,max} \frac{t_{for}}{r_0}\right)^3}. \quad (5.34)$$

Além disso, deixamos as componentes de  $\mathbf{V}_m$  e de  $\mathbf{B}$ , assim como as funções de temperatura e densidade de massa livres, *i.e.*, não realizamos nenhuma suposição acerca destas. Utilizando o pacote SADE [69], formulado por Rocha e Figueiredo (2011), para a análise de simetrias do sistema de equações (5.1) à (5.4) utilizando o programa Maple 17, foi possível a obtenção de diversas soluções específicas desse sistema.

Utilizando o comando “**liesymmetries**(sys,unks,determining)”, onde “sys” se refere ao sistema de 8 equações consideradas no nosso problema, com a opção “determining”, o programa retorna apenas o sistema determinante correspondente. Foram obtidas 912 equações para 12 incógnitas. Essas são as equações a serem resolvidas a fim de obtermos os geradores de simetrias de Lie do nosso problema. Resolvendo estas equações, obtemos os seguintes geradores:

$$\begin{aligned} & D_\phi; \quad D_t; \\ & -\frac{B_\rho \sin \phi}{\rho} D_{B_\phi} + \frac{B_\phi \sin \phi}{\rho} D_{B_\rho} + \frac{V_\phi \sin \phi}{\rho} D_{V_\rho} + \frac{\sin \phi}{\rho} D_\phi - \cos \phi D_\rho; \\ & \frac{V_\phi \cos \phi}{\rho} D_{V_\rho} - \frac{V_\rho \cos \phi}{\rho} D_{V_\phi} + \frac{B_\phi \cos \phi}{\rho} D_{B_\rho} - \frac{B_\rho \cos \phi}{\rho} D_{B_\phi} + \frac{\cos \phi}{\rho} D_\phi + \sin \phi D_\rho; \\ & -2B_\phi D_{B_\phi} - 2B_\rho D_{B_\rho} - 2B_z D_{B_z} - 4R D_R - T D_T + \rho D_\rho + t D_t + z D_z; \\ & B_\phi D_{B_\phi} + B_\rho D_{B_\rho} + B_z D_{B_z} + 2T D_T + V_\phi D_{V_\phi} + V_\rho D_{V_\rho} + V_z D_{V_z} - t D_t, \end{aligned} \quad (5.35)$$

em que usamos a notação  $R(\rho, \phi, z) \equiv \rho_m$  para denotar a densidade de massa e evitar equívocos, e onde a notação “ $D_\alpha$ ” é utilizada para denotar a derivada parcial com relação à variável  $\alpha$ , que pode ser tanto as variáveis dependentes do sistema, quanto as independentes.

Podemos então escolher um subgrupo de geradores, contendo até três geradores que computem entre si, a fim de reduzirmos o nosso sistema original de EDPs. Por exemplo, escolhendo os geradores

$$D_\phi; D_t; \frac{V_\phi \cos \phi}{\rho} D_{V_\rho} - \frac{V_\rho \cos \phi}{\rho} D_{V_\phi} + \frac{B_\phi \cos \phi}{\rho} D_{B_\rho} - \frac{B_\rho \cos \phi}{\rho} D_{B_\phi} + \frac{\cos \phi}{\rho} D_\phi + \sin \phi D_\rho, \quad (5.36)$$

podemos reduzir o sistema original em um sistema de EDOs contendo apenas uma variável, chamada variável de similaridade. É possível a escolha de diversos subgrupos de geradores, os quais resultam em diferentes sistemas reduzidos. Mas ocorre que nem sempre esse sistema reduzido é simples de se resolver, pois podem existir sistemas reduzidos os quais o programa é incapaz de solucionar.

Os geradores escolhidos acima, por sua vez, geram um sistema de EDOs contendo seis equações da variável de similaridade  $\xi = z/\rho$ . Este sistema, possui 18 soluções distintas. Mantendo apenas as soluções com a temperatura e a densidade de massa não-nulas, restam 4 diferentes equações. Além disso, por ser um método matemático, as soluções obtidas por meio das simetrias de Lie nem sempre são equações de interesse, por serem triviais, ou não-reais.

As equações obtidas por meio do Maple podem não ser soluções do sistema original. Por conta disto, é importante testá-las no sistema a fim de certificarmos se são soluções. Considerando o subgrupo de geradores acima, as únicas soluções não-triviais e com aparente significado físico encontradas por meio das simetrias de Lie clássicas são dadas por:

$$B_\phi(\rho, \phi, z, t) = \frac{C_4}{\rho^2}, \quad (5.37)$$

$$B_\rho(\rho, \phi, z, t) = 0, \quad (5.38)$$

$$B_z(\rho, \phi, z, t) = -\frac{\sqrt{2}}{2z^2\rho^2} (4C_6z^4 - C_5)^{1/2} \quad (5.39)$$

$$R(\rho, \phi, z, t) = \frac{C_3}{\rho^4}, \quad (5.40)$$

$$T(\rho, \phi, z, t) = -\frac{C_4^2 + 4C_6 z^3}{8K\mu_0 \rho^4}, \quad (5.41)$$

$$V_\rho(\rho, \phi, z, t) = 0, \quad (5.42)$$

$$V_\phi(\rho, \phi, z, t) = 2C_1 \frac{z^2}{(-2C_5\rho^4 + 8C_6z^4)^{1/2}} + \frac{C_4^2 + 4C_6}{\rho^3 e\mu_0 K} \frac{z^5}{(-2C_5\rho^4 + 8C_6z^4)^{1/2}}, \quad (5.43)$$

$$V_z(\rho, \phi, z, t) = C_2, \quad (5.44)$$

onde  $C_1$  à  $C_6$  são constantes arbitrárias. Note que estas soluções são estacionárias, pois o subgrupo de geradores contém o gerador de simetria em  $t$ . Neste caso, devemos escolher constantes que satisfazem uma temperatura não-nula e positiva, além de um campo magnético real (não-complexo). Se a temperatura, a densidade eletrônica e as componentes da velocidade satisfizerem (5.40) à (5.44), e considerando o respectivo intervalo para o qual  $B_z$  é real, o campo gerado é similar ao de uma corrente estacionária em um fio condutor, acrescido de uma componente anômala em  $z$  (*i.e.*, que não existe no caso ideal de um fio condutor infinito).

Podemos também, simplificar nosso sistema realizando outras aproximações ou escolhendo outras formas funcionais para os parâmetros. Assim, assumindo a velocidade média de plasma:

$$\mathbf{V}_m = V_z(\rho, \phi, z)\hat{\mathbf{z}}, \quad (5.45)$$

e utilizando o seguinte subgrupo de geradores obtidos para este sistema:

$$\begin{aligned} & D_\phi; \quad D_t; \\ & -4RD_R + 3TD_T + 2V_zDV_z + \rho D_\rho - tD_t + zD_z, \end{aligned} \quad (5.46)$$

foi possível encontrar as soluções:

$$B_\rho(\rho, \phi, z, t) = \frac{C_1\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}; \quad (5.47)$$

$$B_\phi(\rho, \phi, z, t) = 0; \quad (5.48)$$

$$B_z(\rho, \phi, z, t) = \frac{C_1z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}; \quad (5.49)$$

$$R(\rho, \phi, z, t) = F\left(\frac{z}{\rho}\right) \frac{1}{\rho^4}; \quad (5.50)$$

$$T(\rho, \phi, z, t) = C_2z^2; \quad (5.51)$$

$$V_z(\rho, \phi, z, t) = 0. \quad (5.52)$$

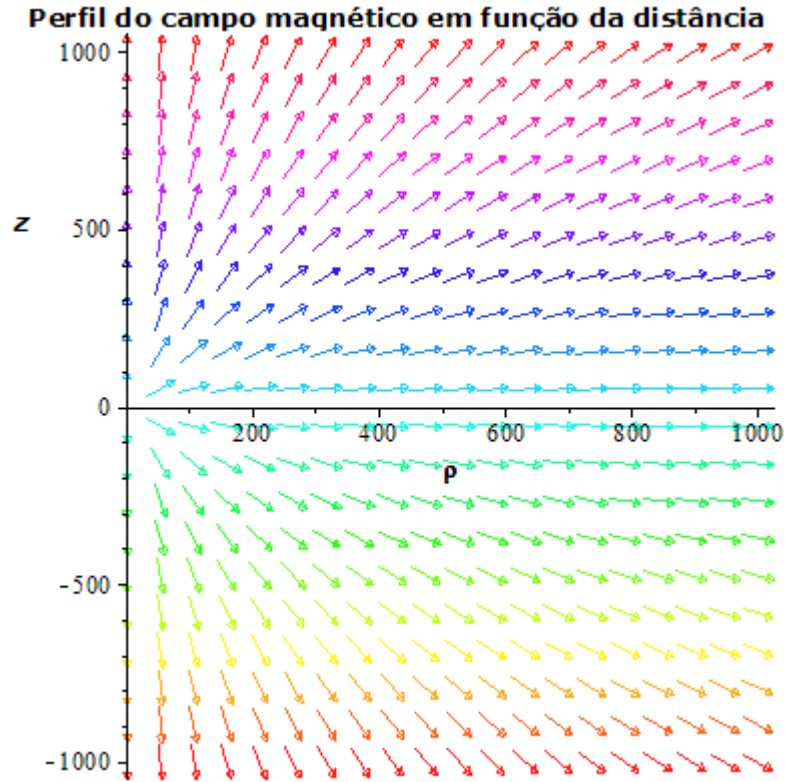


Figura 5.6: Perfil, em coordenadas cilíndricas, de uma das soluções particulares do campo magnético obtido através das simetrias de Lie, considerando  $V_m = V_z(\rho, \phi, z)\hat{\mathbf{z}}$ . Neste caso,  $V_z$  é nula.

Note que esta é uma função estacionária de um plasma com velocidade de deriva nula. O perfil do campo, com suas componentes  $z$  e  $\rho$ , é plotado na figura 5.6. Note que o campo magnético é simétrico em  $\phi$

As simetrias de Lie, chamadas de simetrias clássicas, não são as únicas simetrias capazes de gerar soluções analíticas. Elas são apenas uma parte da ampla gama de simetrias de um conjunto maior, chamado de simetrias não-clássicas. A análise feita aqui, deve ser vista então apenas como uma introdução às soluções analíticas das equações MHD.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho de dissertação, as equações da magnetohidrodinâmica para um plasma geral foram obtidas e posteriormente aplicadas ao caso de um impacto meteorítico. A partir da equação de Boltzmann, uma descrição microscópica, tomamos médias de quantidades  $\chi(v)$ , correspondentes à  $mv^0$ ,  $m\mathbf{v}^1$  e  $m\frac{v^2}{2}$ . A média dessas funções, são chamadas momentos de Boltzmann, as quais retornam equações de conservação dessas quantidades  $\chi(v)$  para cada espécie de partículas presentes no plasma (*e.g.*, elétrons, íons multiplamente ionizados, partículas neutras). As equações obtidas, respectivamente, são a equação de continuidade de massa, a equação de movimento, e a equação de conservação de energia.

Com o intuito de simplificarmos o problema, é possível descrever o plasma como sendo composto apenas por um tipo de partículas. Partindo das definições de quantidades macroscópicas das características do plasma (*e.g.*, densidade de corrente, velocidade média do plasma), juntamente das equações de conservação e das equações de Maxwell, foi possível obtermos as equações da magnetohidrodinâmica (MHD). Essa teoria é uma teoria macroscópica e abrangente. Ela é utilizada como uma primeira abordagem em diversos casos e foi escolhida aqui por simplificar e idealizar o problema.

O objetivo primário foi a análise do campo magnético máximo gerado em um impacto meteorítico. Um projétil ao impactar um alvo numa velocidade de impacto maior que a velocidade do som neste alvo, pode produzir plasmas, que rapidamente se expandem para o meio. Esses impactos podem ocorrer tanto na superfície de um satélite (na forma de microimpactos,

capazes de gerar pulsos eletromagnéticos danosos ao equipamento elétrico) quanto nas superfícies planetárias. Com o intuito de explicar as anomalias magnéticas encontradas nas superfícies de crateras de impacto, foi realizada uma estimativa, a partir da teoria MHD, dos valores máximos produzidos em um impacto de grandes proporções.

Considerando uma superfície-alvo com gravidade similar à encontrada na superfície lunar, na ausência de um meio atmosférico, e um projétil com proporção capaz de produzir uma cratera com mais de 1 *km* de diâmetro (nestas condições) além de uma velocidade de impacto que gere plasmas totalmente ionizados, vimos que o campo magnético máximo é da ordem de 0,00004 T, valor dentro dos valores encontrados em amostras lunares retiradas de crateras com dimensões similares [13].

Além disto, com o intuito de encontrarmos soluções analíticas das respectivas equações, aplicáveis ao impacto meteorítico, utilizamos o método das simetrias de Lie. Mesmo sendo uma abordagem inicial, esse método se mostrou como uma incrível ferramenta para a obtenção de soluções específicas de equações diferenciais. Mesmo o nosso caso sendo um complicado sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, foram encontradas duas soluções estacionárias distintas utilizando-se do pacote para Maple SADE, desenvolvido por Rocha Filho e Figueiredo [69]. Apesar das soluções obtidas não se aplicarem exatamente ao caso de um impacto meteorítico, são soluções que demonstram o poder desta teoria. O pacote utilizado é capaz de gerar diversas soluções, sendo apenas duas as soluções descritas neste trabalho.

As realizações deste trabalho se resumem a três pontos principais:

- As equações deduzidas podem ser utilizadas em outras aplicações similares;
- A estimativa do campo magnético máximo é condizente com valores paleomagnéticos encontrados em amostras lunares;
- As soluções analíticas, encontradas por meio das simetrias de Lie, possuem significado físico e abrem caminho na busca de novas soluções através desse método.

Este trabalho de dissertação pode ser visto como um passo inicial em duas principais áreas. Futuramente, pode-se pensar em realizar simulações computacionais, utilizando-se de programas como o FlexPDE, a fim de obter perfis de campos magnéticos mais acurados. É

possível ainda, estender o estudo da magnetização anômala das crateras, analisando como ocorre a difusão do campo magnético no interior dos ejectas com seu posterior resfriamento. Pode-se também pensar em realizar a descrição da expansão do plasma em um meio de pressão não-nula (ou atmosférico) acrescentando a equação de Saha. Por outro lado, na busca de soluções para as equações MHD, ainda podem-se utilizar diversos outros métodos de simetrias. O próximo passo poderia ser uma análise mais abrangente das simetrias de Lie clássicas para então a posterior análise das simetrias não-clássicas deste sistema. Apesar de várias, as principais perspectivas deste trabalho podem então ser resumidas nos seguintes pontos:

- É possível aprimorarmos a estimativa do campo magnético gerado por meio de simulações computacionais. Programas, como o FlexPDE, podem ser utilizados para obter resultados gráficos.
- A descrição pode ser aprimorada se considerarmos outras espécies (*e.g.*, íons duplamente/triplamente ionizados, átomos neutros, poeira)
- A escolha de outros *ansatz* (*e.g.*, formas funcionais explícitas das variáveis dependentes), pode produzir novas soluções.
- Outros métodos de simetrias, como as simetrias não-clássicas, podem ser utilizadas na busca de novas soluções das equações MHD.



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] INAN, U. S.; GOLKOWSKI, M. *Principles of plasma physics for engineers and scientists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- [2] FRENCH, B. M. *Traces of catastrophe: A handbook of shock-metamorphic effects in terrestrial meteorite impact structures*. [S.l.]: Lunar and Planetary Institute, 1998.
- [3] Shoemaker, E. M. Why study impact craters? In: Roddy, D. J.; Pepin, R. O.; Merrill, R. B. (Ed.). *Impact and Explosion Cratering: Planetary and Terrestrial Implications*. [S.l.: s.n.], 1977. p. 1–10.
- [4] TAYLOR, S. R. *Planetary science: a lunar perspective*. [S.l.]: Lunar and Planetary Institute Houston, 1982.
- [5] ZEL'DOVICH, Y. B.; RAIZER, Y. P. Physics of shock waves. *High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, v. 1, 1966.
- [6] FLETCHER, A. *Plasma Production and Radiation from Meteoroid Impacts on Spacecraft*. Tese (Doutorado) — Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, 2015.
- [7] Srnka, L. J. Spontaneous magnetic field generation in hypervelocity impacts. In: Merrill, R. B. (Ed.). *Lunar and Planetary Science Conference Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1977. (Lunar and Planetary Science Conference Proceedings, v. 8), p. 785–792.
- [8] WEISS, B. P. et al. Paleomagnetism of impact spherules from lunar crater, India and a test for impact-generated fields. *Earth and Planetary Science Letters*, v. 298, n. 12, p. 66–76, 2010. ISSN 0012-821X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012821X10004668>>.

- [9] ACUÑA, M. H. et al. Global distribution of crustal magnetization discovered by the Mars Global Surveyor Mag/ER experiment. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 284, n. 5415, p. 790–793, 1999.
- [10] LILLIS, R. J. et al. Time history of the Martian dynamo from crater magnetic field analysis. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Wiley Online Library, v. 118, n. 7, p. 1488–1511, 2013.
- [11] FULLER, M. Lunar magnetism. *Reviews of Geophysics*, Wiley Online Library, v. 12, n. 1, p. 23–70, 1974.
- [12] CRAWFORD, D. A.; SCHULTZ, P. H. Electromagnetic properties of impact-generated plasma, vapor and debris. *International Journal of Impact Engineering*, v. 23, n. 1, p. 169–180, 1999. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X99000706>>.
- [13] CRAWFORD, D. A.; SCHULTZ, P. H. The production and evolution of impact-generated magnetic fields. *International Journal of Impact Engineering*, v. 14, n. 1, p. 205–216, 1993. ISSN 0734-743X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X9390021X>>.
- [14] CARPORZEN, L.; GILDER, S. A.; HART, R. J. Palaeomagnetism of the Vredefort meteorite crater and implications for craters on Mars. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 435, n. 7039, p. 198, 2005.
- [15] CRAWFORD, D. A.; SCHULTZ, P. H. Laboratory investigations of impact-generated plasma. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Wiley Online Library, v. 96, n. E3, p. 18807–18817, 1991.
- [16] LEE, N. et al. Theory and experiments characterizing hypervelocity impact plasmas on biased spacecraft materials. *Physics of Plasmas*, AIP, v. 20, n. 3, p. 032901, 2013.
- [17] SONG, W.; LI, J.; NING, J. Characteristics of plasma generated by hypervelocity impact. *Physics of Plasmas*, AIP, v. 20, n. 9, p. 093501, 2013.
- [18] SONG, W. et al. Influence of impact conditions on plasma generation during hypervelocity impact by aluminum projectile. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 23, n. 7, p. 073506, 2016.

- [19] STEVENSON, D. J. Core formation dynamics and primordial planetary dynamos. In: *Lunar and Planetary Science Conference*. [S.l.: s.n.], 1980. v. 11, p. 1088–1090.
- [20] TAYLOR, S. R. *Solar System Evolution: A New Perspective*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- [21] LOVE, S. G.; BROWNLEE, D. E. A direct measurement of the terrestrial mass accretion rate of cosmic dust. *Science*, JSTOR, v. 262, p. 550–550, 1993.
- [22] LIN, R. P. A search for impact crater-associated surface magnetic fields in mare regions. In: *Lunar and Planetary Science Conference*. [S.l.: s.n.], 1978. v. 9, p. 651–653.
- [23] YOKOYAMA, E. *Petrologia e Magnetismo de Estruturas de Impacto da Bacia do Paraná: Reflexões sobre o Processo de Crateramento*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Departamento de Geociências, 2013.
- [24] HIDE, R. Comments on the moon's magnetism. *The Moon*, Springer, v. 4, n. 1-2, p. 39–39, 1972.
- [25] HOOD, L. L.; VICKERY, A. Magnetic field amplification and generation in hypervelocity meteoroid impacts with application to lunar paleomagnetism. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Wiley Online Library, v. 89, n. S01, 1984.
- [26] ANDERSON, K. A. Distribution of lunar surface magnetic fields. In: *Lunar and Planetary Science Conference*. [S.l.: s.n.], 1978. v. 9, p. 17–19.
- [27] MELOSH, H. J. *Impact cratering: A geologic process*. [S.l.]: Oxford University Press, 1989.
- [28] KREHL, P. O. K. *History of shock waves, explosions and impact: a chronological and biographical reference*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- [29] O'KEEFE, J. D.; AHRENS, T. J. Planetary cratering mechanics. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Wiley Online Library, v. 98, n. E9, p. 17011–17028, 1993.
- [30] CHEN, G.; AHRENS, T. J.; HIDE, R. Hypervelocity impacts and magnetization of small bodies in the solar system. *Icarus*, Elsevier, v. 115, n. 1, p. 86–96, 1995.

- [31] GRIEVE, R. A. F.; STOEFFLER, D.; DEUTSCH, A. The sudbury structure: Controversial or misunderstood? *Journal of Geophysical Research: Planets*, Wiley Online Library, v. 96, n. E5, p. 22753–22764, 1991.
- [32] GRIEVE, R. A. F.; DENCE, M. R.; ROBERTSON, P. B. Cratering processes - as interpreted from the occurrence of impact melts. In: *Impact and explosion cratering: Planetary and terrestrial implications*. [S.l.: s.n.], 1977. p. 791–814.
- [33] DENCE, M. R.; GRIEVE, R. A. F.; ROBERTSON, P. B. Terrestrial impact structures-principal characteristics and energy considerations. In: *Impact and explosion cratering: Planetary and terrestrial implications*. [S.l.: s.n.], 1977. p. 247–275.
- [34] KIEFFER, S. W.; SIMONDS, C. H. The role of volatiles and lithology in the impact cratering process. *Reviews of Geophysics*, Wiley Online Library, v. 18, n. 1, p. 143–181, 1980.
- [35] GILBERT, G. K. *The Moon's face: a study of the origin of its features*. [S.l.]: Philosophical Society of Washington, 1893.
- [36] SHOEMAKER, E. M. Interpretation of lunar craters. *Physics and Astronomy of the Moon*, Academic Press New York, p. 283–359, 1962.
- [37] HERMALYN, B.; SCHULTZ, P. H.; HEINECK, J. T. Experimental studies of the ejecta velocity distribution from oblique impacts: Towards an analytical model. In: *Lunar and Planetary Science Conference*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 43.
- [38] ANDERSON, J. L. B.; SCHULTZ, P. H.; HEINECK, J. T. Asymmetry of ejecta flow during oblique impacts using three-dimensional particle image velocimetry. *Journal of Geophysical Research: Planets*, Wiley Online Library, v. 108, n. E8, 2003.
- [39] HOUSEN, K. R.; SCHMIDT, R. M.; HOLSAPPLE, K. A. Crater ejecta scaling laws: Fundamental forms based on dimensional analysis. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Wiley Online Library, v. 88, n. B3, p. 2485–2499, 1983.
- [40] FLETCHER, A.; CLOSE, S.; MATHIAS, D. Simulating plasma production from hypervelocity impacts. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 22, n. 9, p. 093504, 2015.

- [41] HOOD, L. L.; HUANG, Z. Formation of magnetic anomalies antipodal to lunar impact basins: Two-dimensional model calculations. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Wiley Online Library, v. 96, n. B6, p. 9837–9846, 1991.
- [42] SCHMIEDER, M.; JOURDAN, F. The lappajärvi impact structure (finland): Age, duration of crater cooling, and implications for early life. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, Elsevier, v. 112, p. 321–339, 2013.
- [43] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [44] BELLAN, P. M. *Fundamentals of plasma physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008.
- [45] JU, Y. et al. Theoretical model for plasma expansion generated by hypervelocity impact. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing, v. 21, n. 9, p. 092112, 2014.
- [46] DIETZEL, H.; NEUKUM, G.; RAUSER, P. Micrometeoroid simulation studies on metal targets. *Journal of Geophysical Research*, Wiley Online Library, v. 77, n. 8, p. 1375–1395, 1972.
- [47] MCBRIDE, N.; MCDONNELL, J. Meteoroid impacts on spacecraft: sporadics, streams, and the 1999 leonids. *Planetary and Space Science*, Elsevier, v. 47, n. 8, p. 1005–1013, 1999.
- [48] RATCLIFF, P. R. et al. Experimental measurements of hypervelocity impact plasma yield and energetics. *International journal of impact engineering*, Elsevier, v. 20, n. 6-10, p. 663–674, 1997.
- [49] LI, J. et al. Characteristics of impact-generated plasma with different electron temperature and gas temperature. *Modern Physics Letters B*, World Scientific, v. 28, n. 18, p. 1450152, 2014.
- [50] FOSCHINI, L. Electromagnetic interference from plasmas generated in meteoroids impacts. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 43, n. 2, p. 226, 1998.
- [51] CLOSE, S. et al. Electromagnetic pulses generated by meteoroid impacts on spacecraft. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, Wiley Online Library, v. 115, n. A12, 2010.

- [52] FROST, V. C. Meteoroid damage assessment. *NASA SP-8042*, 1970.
- [53] HOLSAPPLE, K. A. *Craters from Explosions or Impacts*. 2017. Disponível em: <<http://keith.aa.washington.edu/craterdata/scaling/index.htm>>.
- [54] MERMET, J. M. Spectroscopic diagnostics: basic concepts. *Inductively coupled plasma emission spectroscopy, part*, v. 1, p. 353, 1987.
- [55] BOUMANS, P. W. J. M. Inductively coupled plasma emission spectroscopy. part ii: applications and fundamentals. volume 2. John Wiley and Sons, New York, NY, 1987.
- [56] FLETCHER, A.; CLOSE, S. Model of plasma dynamics and electromagnetic pulses associated with hypervelocity particle impacts on satellites. In: IEEE. *General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI*. [S.l.], 2011. p. 1–4.
- [57] JR, L. S. Physics of fully ionized gases. *Interscience Tracts on Physics and Astronomy*, v. 3, 1962.
- [58] BRAGINSKII, S. I. Transport processes in a plasma. *Reviews of plasma physics*, v. 1, p. 205, 1965.
- [59] CHYBA, C. F.; OWEN, T. C.; IP, W. H. Impact delivery of volatiles and organic molecules to earth. *Hazards due to comets and asteroids*, University of Arizona Press, p. 9–58, 1994.
- [60] Bowell, E.; Gehrels, T.; Zellner, B. Magnitudes, colors, types and adopted diameters of the asteroids. In: \_\_\_\_\_. *Asteroids*. [S.l.: s.n.], 1979. p. 1108–1129.
- [61] STARKS, M. J. et al. Seeking radio emissions from hypervelocity micrometeoroid impacts: Early experimental results from the ground. *International journal of impact engineering*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 781–787, 2006.
- [62] DRAPATZ, S.; MICHEL, K. W. Theory of shock-wave ionization upon high-velocity impact of micrometeorites. *Zeitschrift für Naturforschung A*, v. 29, n. 6, p. 870–879, 1974.
- [63] PIRRI, A. N. Theory for laser simulation of hypervelocity impact. *The Physics of Fluids*, AIP, v. 20, n. 2, p. 221–228, 1977.

- [64] SRNKA, L. J. et al. Magnetic field and shock effects and remanent magnetization in a hypervelocity impact experiment. *Earth and Planetary Science Letters*, Elsevier, v. 42, n. 1, p. 127–137, 1979.
- [65] IBRAGIMOV, N. H. *Lie Group Analysis: Classical Heritage*. [S.l.]: ALGA publications, 2004.
- [66] HYDON, P. E. *Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.
- [67] OLVER, P. J.; ROSENAU, P. Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 47, n. 2, p. 263–278, 1987.
- [68] BLUMAN, G. W.; COLE, J. D. The general similarity solution of the heat equation. *Journal of Mathematics and Mechanics*, JSTOR, v. 18, n. 11, p. 1025–1042, 1969.
- [69] FILHO, T. M. R.; FIGUEIREDO, A. [sade] a maple package for the symmetry analysis of differential equations. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 182, n. 2, p. 467–476, 2011.