



Universidade de Brasília
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Autoforça e a Técnica de Redução de Ordem

Waleska Priscylla Florencio de Medeiros

**Brasília-DF
2017**

Waleska Priscylla Florencio de Medeiros

Autoforça e a Técnica de Redução de Ordem

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UNB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física Teórica.

Universidade de Brasília – UNB

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Dr. Daniel Müller

Brasília-DF

2017

Waleska Priscylla Florencio de Medeiros
Autoforça e a Técnica de Redução de Ordem/ Waleska Priscylla Florencio de
Medeiros. – Brasília-DF, 2017-
52 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr. Daniel Müller

Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília – UNB
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física, 2017.

1. autoforça eletromagnética 2. Derivadas superiores. 3. Técnica da redução de
ordem. I. Dr. Daniel Müller. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física.
IV. A Autoforça Eletromagnética

“Autoforça e a técnica de redução de ordem.”

Por

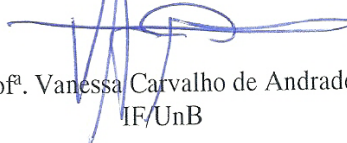
Waleska Priscylla Florencio de Medeiros.

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

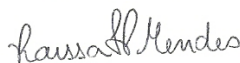
Aprovada por:



Prof. Daniel Müller
IF/UnB



Prof^a. Vanessa Carvalho de Andrade
IF/UnB



Prof^a. Raissa Fernandes Pessoa Mendes
IF/UFF

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à minha família e amigos por terem tido paciência comigo nos momentos finais do desenvolvimento deste trabalho. E, em especial, ao Prof. Dr Daniel Müller que sempre esteve disposto a me orientar e esclarecer as dúvidas. Por último, agradeço a FAP-DF que me contemplou com uma bolsa de estudo.

*“A vida é igual andar de bicicleta.
Para manter o equilíbrio é preciso
se manter em movimento.”
(Albert Einstein)*

Resumo

Correções radiativas geralmente resultam em teorias com derivadas superiores (ordem superior a segunda). Abraham e Lorentz foram os primeiros a investigar correções radiativas nas alterações da equação de movimento de uma partícula carregada. A isso se denomina autoforça e é a primeira vez em que foram encontradas equações de ordem superior. Um pouco depois esse problema voltou a ser estudado por Dirac, que encontrou soluções não físicas que são descritas nesse texto. Essas soluções ocorrem porque a teoria é de ordem superior. Por isso, surge ainda apenas no contexto de uma partícula, a técnica da redução de ordem. Alguns anos atrás essa técnica foi sugerida pelo Parker para ser aplicada em teorias de ordem superior de um modo geral. Nesse presente trabalho, nos propomos a verificar mais detalhadamente a validade dessa técnica perturbativa. Aplicando o método em um sistema muito mais simples, obtemos que ele tem boa convergência na presença de fontes. Na ausência de fontes o método converge apenas quando o sistema se aproxima sem oscilar, infinitamente lento para o equilíbrio.

Palavras-chaves: autoforça eletromagnética. derivadas superiores. técnica da redução de ordem.

Abstract

Radiative corrections usually result in theories with higher derivatives (order higher than second). Abraham and Lorentz were the first to investigate radiative corrections in the changes in the equation of motion of a charged particle. This is called self-force and is the first time that higher order equations have been found. After that this problem was studied again by Dirac, who found nonphysical solutions that are described in this text. These solutions occur because the theory is of a higher order. Therefore, the technique of order reduction arises for the first time in the context of particle motion. Recently, this idea of order reduction was suggested by Parker to be applied in higher order theories in general. In this present work, we propose to verify in more detail the validity of this perturbative technique. Applying the method in a much simpler system, we obtain that it has good convergence in the presence of sources. In the absence of sources the method converges only when the system approaches equilibrium infinitely slowly without oscillating.

Keywords: self-force. higher order derivatives. technique of order reduction.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Coordenadas normais de Fermi para um ponto x sobre a linha de mundo γ . A componente temporal, t , seleciona um ponto particular em γ , e o disco representa um conjunto de geodésicas tipo-espaço que intersecta ortogonalmente o ponto selecionado $z(t)$. O vetor unitário, $\omega^a \equiv \hat{x}^a/s$, seleciona uma geodésica específica nesse conjunto.	12
Figura 2	– Coordenada retardada para um ponto x em relação a linha de mundo γ . A componente temporal, u , seleciona um cone de luz sobre γ , o vetor unitário Ω^a seleciona um gerador particular desse cone e r um ponto particular desse gerador.	14
Figura 3	– No espaço-tempo plano, a função de Green retardada no ponto x depende apenas do estado de movimento ponto retardado $z(u)$ e a função de Green avançada depende do estado de movimento do ponto avançado $z(v)$	22
Figura 4	– No espaço-tempo curvo, a função de Green retardada depende de todos os pontos dentro do cone de luz que interceptam γ , assim depende de toda a historia passada do ponto retardado $z(u)$ em relação a x . A função de Green avançada depende de todo o futuro histórico do ponto avançado $z(v)$	22
Figura 5	– A função de Green singular depende da historia da partícula durante o intervalo de tempo $u \leq \tau \leq v$; já a função de Green regular depende da historia da partícula durante $-\infty < \tau \leq v$, incluindo o passado cronológico de x	27
Figura 6	– A região delimitada pela linha tracejada representa a vizinhança convexa e normal do ponto x . A linha de mundo entra na vizinhança no tempo-próprio $\tau_<$ e a deixa no tempo-próprio $\tau_>$. Enquanto u e v representam o tempo-próprio dos pontos retardado e avançado em relação ao ponto x , respectivamente.	28

Lista de abreviaturas e siglas

ALD	Se refere a equação de Abraham, Lorentz e Dirac.
FW	Fermi-Walker, se refere ao transporte de Fermi-Walker.
CNF	Coordenada Normais de Fermi.
CR	Coordenada Retardada.
OHA	Oscilador Harmônico Amortecido.
OHAF	Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado.

Sumário

	Introdução	1
1	CONCEITOS MATEMÁTICOS	4
1.1	Geodésica	4
1.2	Função Mundo	5
1.3	Base Tetrada	8
1.4	Propagador Paralelo	8
1.5	Determinante de Van Vleck	10
1.6	Sistema de Coordenadas	10
1.6.1	Coordenadas Normais de Fermi	10
1.6.2	Coordenada Retardada	12
1.6.3	Transformação entre as Coordenadas Normais de Fermi para a Coordenada Retardada	15
1.6.4	Coordenada Avançada e sua Transformação para a Coordenada Retardada	16
2	EQUAÇÃO DE ALD	18
2.1	Espaço-tempo Plano	18
2.2	Espaço-tempo Curvo	19
2.2.1	Eletrodinâmica	19
2.2.2	Função de Green Eletromagnética	20
2.2.3	Construção de Hadamard para a Função de Green	20
2.2.4	Representação de Kirchhoff para o Quadripotencial	25
2.2.5	Reciprocidade da Função de Green	25
2.2.6	Função de Green Singular e Regular	26
2.2.7	Quadripotencial Retardado Próximo a Linha de Mundo	28
2.2.8	Campo Eletromagnético Projetado nas Coordenadas Retardada e Normais de Fermi	29
2.2.9	Campo Singular e Regular	31
2.2.10	Equação de Movimento	33
3	CORREÇÕES DE VÁCUO EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	34
3.1	Ação Efetiva	34
4	PREVISÕES FÍSICAS DA EQUAÇÃO DE ALD	39
4.1	Solução de Dirac	39
4.2	Método de Landau e Lifshitz	40

4.3	Verificação do Método Perturbativo	41
4.3.1	Osciladores	41
4.3.2	Oscilador Harmônico Amortecido	42
4.3.3	Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado	44
4.4	Equação de ALD	45
4.4.1	Força Externa Constante	45
	Conclusão	47
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICES	50
	APÊNDICE A – CÁLCULO DO TERMO $Tr[a_2(x, x)]$	51

Introdução

A teoria clássica de uma partícula carregada e acelerada foi concebida por H. A. Lorentz no início do século passado. Advindo do trabalho de Sir J. Larmor, que igualou a perda de energia irradiada por um oscilador harmônico a uma força de amortecimento, Lorentz pôde considerar um modelo bastante simples no qual os elétrons, esferas rígidas, pudessem ser ligados elasticamente e o sistema ser tratado como um oscilador harmônico carregado. O movimento do elétron precisa se modificar de modo a garantir que a soma da energia mecânica e a energia irradiada para o infinito permaneça constante. Esse balanço de energia manifesta-se como uma força agindo de volta na partícula, denominada autoforça eletromagnética, (GRIFFITHS, 1999), (JACKSON, 1999), (ROHRLICH, 2007). O termo da autoforça aparece na equação de movimento de Lorentz e é proporcional à terceira derivada da posição da partícula em relação ao tempo,

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}.$$

Esse tipo de termo é atualmente conhecido como *jerk*.

Uma generalização relativística foi obtida, alguns anos depois, por (ABRAHAM, 1905). No entanto, tal modelo não se sustenta no caso particular em que o raio do elétron se torna zero, o que resulta em uma autoenergia divergente. Incomodado com essa situação, (DIRAC, 1938), generalizou o modelo de Lorentz-Abraham para um modelo puntual do elétron. Ao perceber que o campo responsável pela radiação pode ser escrito como uma combinação das soluções retardadas e avançadas do campo eletromagnético, Dirac considerou um tubo fino circundando a linha de mundo do elétron no espaço-tempo, com o propósito do cálculo do fluxo de energia e momento. Ao assumir a existência de uma massa infinita e negativa no centro do tubo tal que, quando subtraída da massa infinita e positiva produzida pelo campo de Coulomb, que circunda o lado externo deste, resulta em uma massa finita e mensurável para a partícula. Dessa maneira, o problema da massa sendo infinita e conseqüentemente a autoenergia divergente, encontrada pelo modelo de Lorentz-Abraham, foi aparentemente resolvido.

Assim a equação resultante para o movimento de uma partícula carregada e acelerada ficou conhecida como equação de Abraham-Lorentz-Dirac (ALD);

$$a^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3} (g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) \dot{a}^\nu,$$

em que q e m são a carga e a massa da partícula, respectivamente, c a velocidade da luz, $F^\mu{}_\nu$ o tensor de força do campo eletromagnético, $u^\mu = dz/d\tau$ a quadrivelocidade, $a^\mu = du^\mu/d\tau$ a quadriaceleração e $\dot{a}^\mu = da^\mu/d\tau$ a derivada primeira da quadriaceleração

da partícula ao longo da linha de mundo γ que é descrita pela relação $z(\tau)$, em que τ representa o tempo-próprio,

Contudo, como foi encontrado por Dirac, seu modelo resulta numa equação de movimento que permite soluções não físicas. Por exemplo, uma partícula que não esteja submetida a uma força externa pode adquirir uma aceleração que cresce exponencialmente com o tempo. Essa solução é chamada de solução fugitiva e não é observada na natureza. E, se uma força externa começar a agir em um determinado tempo, ela provoca alterações no movimento da partícula anteriores ao início da ação dessa própria força. Isso não é esperado, pois sabemos que a equação de movimento certamente necessita ser causal: o desenvolvimento futuro do sistema é completamente determinado a partir da especificação das condições iniciais.

Tanto o problema das soluções fugitivas como o problema da pré-aceleração podem ser resolvidos considerando uma partícula extensa ou usando primeira quantização (MONIZ; SHARP, 1977).

Na verdade, a presença de derivadas superiores não se trata de uma peculiaridade que ocorre na autoforça. Sempre que temos teorias com correções radiativas, as equações envolvidas apresentam derivadas superiores. Por exemplo em (RYDER, 1996) e (MAMAYEV; MOSTEPANENKO; EIDES, 1981), temos as contribuições de ordem mais baixa na ação efetiva para o caso unicamente do campo eletromagnético devido à polarização do vácuo. Nessa abordagem o campo gravitacional não é levado em conta. Já em (DRUMMOND; HATHRELL, 1980), a ação efetiva apresenta apenas termos que se anulam na ausência do campo eletromagnético, onde são considerados também os acoplamentos entre os tensores de Maxwell e Riemann. Como era de se esperar quando o tensor de Riemann é zero a ação efetiva obtida em (DRUMMOND; HATHRELL, 1980), coincide com a ação efetiva em (RYDER, 1996), (MAMAYEV; MOSTEPANENKO; EIDES, 1981). O caso estritamente gravitacional pode ser verificado por exemplo em (DEWITT, 1965) e (GRIB; MAMAYEV; MOSTEPANENKO, 1994).

Por outro lado, já se sabe que sistemas com derivadas superiores apresentam a instabilidade de (OSTROGRADSKY, 1850). O hamiltoniano dessas teorias apresenta termos com sinais contrários, o que através dos acoplamentos pode resultar na transferência infinita de energia entre os graus de liberdade, enquanto que a energia total do sistema é conservada.

A técnica perturbativa da redução de ordem foi proposta para resolver esse problema (PARKER; SIMON, 1993). Na verdade os próprios autores reconhecem que a origem dessa ideia é mais antiga (LANDAU; LIFSHITZ, 1951). Esse método foi muito bem aceito no meio acadêmico servindo como referência para diversos trabalhos; (GRALLA; HARTE; WALD, 2009), (POISSON; POUND; VEGA, 2011), envolvendo não apenas o problema da autoforça eletromagnética, bem como nas teorias de ordens superiores (PARKER;

SIMON, 1993).

O objetivo desse nosso trabalho é verificar de um modo mais cuidadoso quais as condições para a validade da técnica perturbativa da redução de ordem. Já é bem sabido que em regiões caóticas, as técnicas perturbativas não funcionam. Sistemas caóticos podem ser descritos através de um número menor de graus de liberdade com ordem superior (EICHHORN; LINZ; HÄNGGI, 1998). Por isso resolvemos investigar um pouco mais essa técnica perturbativa.

No capítulo 1 iremos introduzir alguns conceitos matemáticos que serão utilizados nos capítulos 2 e 3. Os principais conceitos giram em torno das definições do biescalar função mundo, do bivector propagador paralelo e do biescalar determinante de Van Vleck. Em específico para o capítulo 2, desenvolvemos a proximidade simultânea, retardada e avançada de um ponto representativo.

A generalização da equação de ALD para o espaço-tempo curvo é obtida primeiramente por (DEWITT, 1965) e sumarizada no artigo de revisão (POISSON; POUND; VEGA, 2011). O mesmo raciocínio de Dirac em considerar o campo responsável pela radiação da partícula como um combinação das partes retardada e avançada permanece. São considerados como combinações; o campo singular que apenas influencia a inércia da partícula e o campo regular definido como sendo o responsável pela radiação emitida. Com essa base, iremos mostrar no capítulo 2 a equação de movimento de uma partícula eletricamente carregada no espaço-tempo curvo.

No capítulo 3 iremos mostrar uma outra situação em que a inclusão das correções radiativas resulta em equações de campo com derivadas superiores, nesse caso, advindas da polarização do vácuo.

Por último, no capítulo 4 descreveremos a solução exata para a aceleração própria constante encontrada por Dirac e a técnica da redução de ordem aplicadas a equação de ALD. Logo depois, iremos testar um método perturbativo semelhante ao proposto por (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) para os casos muito particulares do oscilador harmônico amortecido e do oscilador harmônico amortecido e forçado. Por fim, testaremos o método para o caso particular da equação de ALD, sem a presença de campos gravitacionais, com força externa constante.

1 Conceitos Matemáticos

Nesse primeiro capítulo iremos introduzir alguns conceitos matemáticos que serão utilizados para se obter, capítulo 2, a equação de movimento de uma partícula com carga elétrica no espaço-tempo curvo e a ação efetiva advinda de correções radiativas sobre a teoria, capítulo 3.

Os primeiros conceitos surgem a fim de manter a teoria covariante através do uso dos bitensores, generalizações não locais de tensores ordinários. Dentre esses serão de grande utilidade o biescalar função mundo, o bivector propagador paralelo e o biescalar determinante de Van Vleck, a serem definidos.

No capítulo 2 iremos obter a equação de movimento de uma partícula eletricamente carregada no espaço-tempo curvo, com esse propósito, será necessário considerar as coordenadas normais de Fermi, retardada e avançada de um ponto arbitrário, x , pertencente a vizinhança convexa da linha de mundo da partícula. As coordenadas normais de Fermi para o ponto x são aquelas que acompanham o movimento da partícula, possuem o mesmo tempo-próprio desta, sendo também chamada de coordenada simultânea. Enquanto que a coordenada retardada e avançada se referem ao passado e futuro causal do estado de movimento da partícula, sobre a linha de mundo γ , em relação ao ponto x , respectivamente. Por outro lado, a teoria eletromagnética deve permanecer como uma teoria causal, o que tornará de grande importância a obtenção das transformações dessas para a coordenada retardada, a qual será apresentada nas seções finais desse capítulo.

1.1 Geodésica

Uma curva geodésica, β , é o extremo do intervalo que une dois pontos e possui a propriedade de manter seu comprimento invariante sob pequenas variações. Destarte, a equação da geodésica pode ser obtida por meio do princípio variacional de Euler que define o extremo intervalo entre dois pontos,

$$\delta \int ds = 0, \quad (1.1)$$

em que $ds = (g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ é o elemento de linha da geodésica com $g_{\mu\nu}$ sendo a métrica com assinatura $(-+++)$.

O cálculo se torna mais simples se primeiro calcularmos a variação de ds^2 , como segue,

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \\ 2ds\delta ds &= dx^\mu dx^\nu \delta g_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}dx^\mu \delta dx^\nu \end{aligned} \quad (1.2)$$

para reescrever o lado esquerdo da equação (1.1), como

$$\delta \int ds = \int \left[\frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu,\sigma} \delta x^\sigma + g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{d(\delta x^\nu)}{ds} \right] ds, \quad (1.3)$$

em que usamos $\delta(g_{\mu\nu}) = (\partial g_{\mu\nu} / \partial x^\sigma) \delta x^\sigma = g_{\mu\nu,\sigma} \delta x^\sigma$, $\delta dx^\mu = d(\delta x^\mu)$ e $dx^\mu / ds = \dot{x}^\mu$.

Integrando por partes o segundo termo da equação (1.3) e usando o fato de que a variação δx^μ é nula nos pontos extremos, o princípio variacional de Euler (1.1) resulta em

$$\int \left[\frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu,\sigma} - \frac{d}{ds} (g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu) \right] \delta x^\sigma ds = 0. \quad (1.4)$$

Como consequência da variação δx^σ ser independente de s em cada ponto ao longo do caminho de integração, o termo dentro do colchete na equação anterior deve ser nulo, e, portanto,

$$\frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu,\sigma} - \frac{d}{ds} (g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu) = \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \quad (1.5)$$

Rearranjando os termos e usando $g_{\mu\sigma,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu}] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, obtemos a equação da geodésica

$$\frac{Dx^\mu}{d\tau} \equiv \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (1.6)$$

em que $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma})$ é a conexão. O símbolo de $D/d\tau$ é reservado para a derivada covariante projetada na direção do vetor velocidade $\dot{x}^\mu \nabla_\mu$.

Desse modo, sempre que um quadrivetor se deslocar ao longo de uma curva geodésica, β , ele deve satisfizer a equação (1.6).

1.2 Função Mundo

De extrema importância no estudo de propriedades não locais no espaço-tempo, o biescalar função mundo relacionado com o intervalo geodésico entre dois pontos, por $\sigma(x, x') = \pm s^2/2$, a ser definido, será usado como elemento de estrutura em técnicas de expansões covariantes que possui um papel fundamental nas próximas seções.

Considera-se aqui uma fonte pontual em x' e um ponto x no campo gerado por essa fonte, com x pertencendo à vizinhança convexa de x' , $N(x')$, consistindo nos conjuntos de pontos que são ligados a x' por uma única geodésica. Descrevemos a geodésica, β , pela relação $z^\mu(\lambda)$, onde λ varia entre os pontos extremos correspondentes a $z^\mu(\lambda_0) = x'$ e $z^\mu(\lambda_1) = x$. Definimos um vetor tangente a β como $t^\mu = dz^\mu/d\lambda$, esse vetor satisfaz a equação da geodésica (1.6). Partindo dessas definições básicas, podemos enunciar a função mundo, também conhecida como função escalar de Synge,

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_0) \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} g_{\mu\nu}[z(\lambda)] t^\mu t^\nu d\lambda. \quad (1.7)$$

Como consequência de t^μ satisfazer a equação geodésica, o integrando $g_{\mu\nu}(z)t^\mu t^\nu$ é constante ao longo da curva λ e três casos podem ser considerados: *i*) Se β for tipo-tempo, λ se torna o tempo próprio τ e $\sigma = -\frac{1}{2}(\Delta\tau)^2$; *ii*) se β for tipo-espaço, λ se torna a distância própria s e $\sigma = \frac{1}{2}(\Delta s)^2$; *iii*) por último, se β for nulo, $\sigma = 0$. De modo geral, a função mundo é a metade do quadrado do intervalo geodésico entre dois pontos.

No espaço-tempo plano, a geodésica é uma linha reta, a função mundo se torna

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(x - x')^\alpha(x - x')^\beta, \quad (1.8)$$

em que $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski.

A notação utilizada para a derivada parcial da função mundo em relação aos pontos x e x' é $\sigma_\alpha = \partial\sigma/\partial x^\alpha$ e $\sigma_{\alpha'} = \partial\sigma/\partial x'^{\alpha'}$, respectivamente. A derivada covariante de σ_α em relação à x é $\sigma_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\beta\sigma_\alpha$, sendo simétrica nos seus dois índices $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$. Similarmente temos $\sigma_{\alpha\beta'} = \sigma_{\beta'\alpha}$ e $\sigma_{\alpha'\beta'} = \sigma_{\beta'\alpha'}$. A notação se estende para qualquer número de derivadas. Contudo, apenas o ordenamento de índices diferentes, com e sem linha, é arbitrário. O ordenamento de índices iguais é simétrico apenas nos dois primeiros índices.

A derivada parcial σ_α é obtida por meio do cálculo de como σ varia quando uma pequena variação é realizada no ponto x mantendo o ponto x' fixo, ou seja, $\delta\sigma = \sigma(x + \delta x, x') - \sigma(x, x')$. A única geodésica que conecta $x + \delta x$ a x' é $\beta + \delta\beta$ descrita pela relação $z^\mu(\lambda) + \delta z^\mu(\lambda)$, com λ variando entre λ_0 e λ_1 , logo $\delta z(\lambda_0) = \delta x' = 0$ e $\delta z(\lambda_1) = \delta x$. A variação de (1.7) resulta em

$$\delta\sigma = (\lambda_1 - \lambda_0) \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \delta \dot{z}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \lambda} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \delta z^\lambda \right) d\lambda. \quad (1.9)$$

Integrando o primeiro termo por partes obtemos

$$\delta\sigma = (\lambda_1 - \lambda_0) [g_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \delta z^\nu]_{\lambda_0}^{\lambda_1} - (\lambda_1 - \lambda_0) \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(g_{\mu\nu} \ddot{z}^\nu + \Gamma_{\mu\nu\lambda} \dot{z}^\nu \dot{z}^\lambda \right) \delta z^\mu d\lambda, \quad (1.10)$$

como $z(\lambda)$ satisfaz a equação da geodésica, a integral no segundo termo se anula, restando-nos $\delta\sigma = (\lambda_1 - \lambda_0)g_{\mu\nu}t^\mu \delta x^\nu$ avaliada no ponto x . Portanto,

$$\sigma_\alpha(x, x') = (\lambda_1 - \lambda_0)g_{\alpha\beta}t^\beta, \quad (1.11)$$

com exceção do fator $(\lambda_1 - \lambda_0)$, $\sigma_\alpha(x, x')$ é igual ao vetor tangente a geodésica em x .

De modo semelhante a derivada parcial, $\sigma_{\alpha'}$, pode ser obtida. Sendo agora a variação da geodésica tal que $\delta z(\lambda_0) = \delta x'$ e $\delta z(\lambda_1) = \delta x = 0$, obtemos $\delta\sigma = -(\lambda_1 - \lambda_0)g_{\mu\nu}t^\mu \delta x'^\nu$ avaliada no ponto x' , e, conseqüentemente,

$$\sigma_{\alpha'}(x, x') = -(\lambda_1 - \lambda_0)g_{\alpha'\beta'}t^{\beta'}, \quad (1.12)$$

com exceção do fator $(\lambda_1 - \lambda_0)$, $-\sigma_{\alpha'}(x, x')$ é igual ao vetor tangente a geodésica em x' .

Duas importantes relações são obtidas dessas; pela equação (1.11), temos $g_{\alpha\beta}\sigma^\alpha\sigma^\beta = \Delta\lambda^2 g_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta$ que é igual a 2σ , como mostra a equação (1.7), assim,

$$g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = 2\sigma, \quad (1.13)$$

$$g^{\alpha'\beta'}\sigma_{\alpha'}\sigma_{\beta'} = 2\sigma. \quad (1.14)$$

Através da expressão para a função de mundo (1.7), de suas derivadas covariantes (1.11)-(1.12) e das sucessivas derivadas das identidades (1.13)-(1.14), segue

$$[\sigma] = 0, \quad (1.15)$$

$$[\sigma_\alpha] = [\sigma_{\alpha'}] = 0, \quad (1.16)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [\sigma_{\alpha'\beta'}] = g_{\alpha'\beta'}, \quad (1.17)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta'}] = [\sigma_{\alpha'\beta}] = -g_{\alpha'\beta'}, \quad (1.18)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta\gamma}] = [\sigma_{\alpha\beta\gamma'}] = [\sigma_{\alpha\beta'\gamma'}] = [\sigma_{\alpha'\beta'\gamma'}] = 0, \quad (1.19)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}] = [\sigma_{\alpha\beta\gamma'\delta'}] = [\sigma_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}] = -\frac{1}{3}(R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} + R_{\alpha'\delta'\beta'\gamma'}) \quad (1.20)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta'\gamma'\delta'}] = -\frac{1}{3}(R_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} + R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'}) \quad (1.21)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta'}] = \frac{1}{3}(R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} + R_{\alpha'\delta'\beta'\gamma'}), \quad (1.22)$$

onde $\lim_{x \rightarrow x'} \sigma(x, x') \equiv [\sigma(x, x)]$ é o limite de coincidência entre os pontos x e x' . Para obter as expressões acima é preciso fazer o uso do comutador das derivadas covariantes $R^\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\epsilon = \sigma_{\alpha\beta\gamma} - \sigma_{\alpha\gamma\beta}$, também conhecido como identidade de Ricci, e das regras de simetria do tensor de Riemann.

Esses valores se tornam relevantes em técnicas de expansões covariantes, e.g., um bitensor $T_{\alpha'\beta'}(x, x')$, se suficientemente diferenciável pode ser expandido de modo covariante em torno do ponto x como $T_{\alpha'\beta'}(x, x') = A_{\alpha'\beta'} + A_{\alpha'\beta'\gamma'}\sigma^{\gamma'} + \frac{1}{2}A_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\epsilon^3)$, em que ϵ mede a grandeza típica de um componente de $\sigma^\alpha(x, x')$ e os coeficientes $A_{\alpha'\beta'}$, etc, são tensores ordinários e locais em x determinados através de sucessivas derivadas covariantes do bitensor $T_{\alpha'\beta'}$, que por sua vez, necessita das informações obtidas nas equações (1.15)-(1.22).

Além disso, a função mundo se tornará muito útil nos dois próximos capítulos; na representação de Hadamard para as funções de Green retardada e avançada utilizadas para a obtenção dos quadripotenciais retardado e avançado, essenciais para se obter a equação de movimento de uma partícula com carga elétrica, e no ansatz sobre a amplitude de transição entre dois estados, capítulo 3, necessário para se obter a correção radiativa sobre a ação efetiva da teoria.

1.3 Base Tetrada

Definimos a base tetrada $e_a^\mu(z)$ ortonormal sendo transportada paralelamente ao longo da geodésica β , que conecta dois pontos no espaço-tempo x e x' , satisfazendo;

$$g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad \frac{D e_a^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (1.23)$$

em que $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski, cuja inversa é η^{ab} , o índice de letras latinas varia entre 0 e 3.

Além disso, temos a relação de completeza e sua inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b \quad (1.24)$$

em termos da tetrada dual à $e_a^\mu(z)$, definida como

$$e_\mu^a \equiv \eta^{ab} g_{\mu\nu} e_b^\nu, \quad (1.25)$$

em que $e_\mu^a e_b^\mu = \delta^a_b$ e $e_\nu^a e_a^\mu = \delta^\mu_\nu$ resultam na função delta de Kronecker que satisfaz;

$$\delta^a_b = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b \\ 0 & \text{se } a \neq b \end{cases} \quad \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1.26)$$

Na próxima seção veremos como a base tetrada ortonormal e sua dual se combinam para definir o bivector propagador paralelo como sendo o responsável pelo transporte paralelo de um quadrivector ao longo de uma curva geodésica.

1.4 Propagador Paralelo

Consideramos um quadrivector arbitrário $A^\mu(z)$ sobre a geodésica β podendo ser decomposto na base tetrada, tal que $A^\mu(z) = A^a e_a^\mu$ e a componente do quadrivector no sistema de referência é $A^a = A^\mu e_\mu^a$. Desse modo, um quadrivector em x pode ser expresso como

$$A^\alpha(x) = (A^{\alpha'} e_{\alpha'}^a) e_a^\alpha = g^\alpha_{\alpha'}(x, x') A^{\alpha'}(x'), \quad (1.27)$$

em que definimos o bivector propagador paralelo como

$$g^\alpha_{\alpha'}(x, x') = e_a^\alpha(x) e_{\alpha'}^a(x'), \quad (1.28)$$

sua função é transportar paralelamente um quadrivector no ponto x' ao longo da geodésica β para um outro ponto x .

De modo similar,

$$A^{\alpha'}(x') = g^{\alpha'}_{\alpha}(x', x) A^\alpha(x), \quad g^{\alpha'}_{\alpha}(x', x) = e_a^{\alpha'}(x') e_\alpha^a(x). \quad (1.29)$$

As equações (1.24) e (1.28) implicam no limite de coincidência do propagador paralelo

$$[g^\alpha_{\beta'}] = \delta^{\alpha'}_{\beta'}. \quad (1.30)$$

O vetor tangente à geodésica, definido na seção (1.2) como $t^\mu = dz^\mu/d\lambda$, pode ser transportado paralelamente ao longo de β , logo temos $t^\alpha = g^\alpha_{\alpha'} t^{\alpha'}$, isso junto com as equações (1.11) e (1.12) resultam nas relações

$$\sigma_\alpha = -g^{\alpha'}_{\alpha} \sigma_{\alpha'}, \quad \sigma_{\alpha'} = -g^\alpha_{\alpha'} \sigma_\alpha. \quad (1.31)$$

Outra importante propriedade do propagador paralelo requer que a sua derivada covariante na direção tangente a geodésica seja nula

$$\sigma^\gamma g_{\mu\nu';\gamma} = 0, \quad (1.32)$$

$$\sigma^{\gamma'} g_{\mu\nu';\gamma'} = 0. \quad (1.33)$$

limitando o transporte apenas na direção paralela a geodésica.

As próximas duas derivadas da relação (1.33) implicam nos limites de coincidência

$$[g^\alpha_{\beta';\gamma}] = [g^\alpha_{\beta';\gamma'}] = 0 \quad (1.34)$$

$$[g^\alpha_{\beta';\gamma\delta}] = [g^\alpha_{\beta';\gamma'\delta}] = -\frac{1}{2} R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} \quad (1.35)$$

$$[g^\alpha_{\beta';\gamma\delta'}] = [g^\alpha_{\beta';\gamma'\delta}] = \frac{1}{2} R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'}. \quad (1.36)$$

Como comentado no final da seção (1.2), podemos expandir um bitensor de modo covariante em termos de $\sigma'(x, x')$. Contudo, se os índices do bitensor se referem a pontos distintos, $A_{\alpha'\beta}$, precisamos primeiramente aplicar o bivector propagador paralelo

$$\bar{A}_{\alpha'\beta} = g^{\beta'}_{\beta} A_{\alpha'\beta'} \quad (1.37)$$

antes de realizar a expansão.

Será útil nos próximos capítulos as expansões covariantes dos bitensores $\sigma_{\alpha'\beta'}$, $\sigma_{\alpha'\beta}$ e das primeiras derivadas do propagador paralelo próximo ao ponto de coincidência em potências de $\sigma^{\alpha'}(x, x')$;

$$\sigma_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{3} R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} \sigma^{\gamma'} \sigma^{\delta'} + O(\epsilon^3), \quad (1.38)$$

$$\sigma_{\alpha'\beta} = -g^{\beta'}_{\beta} \left(g_{\alpha'\beta'} + \frac{1}{6} R_{\alpha'\gamma'\beta'\delta'} \sigma^{\gamma'} \sigma^{\delta'} \right) + O(\epsilon^3), \quad (1.39)$$

$$g^\alpha_{\beta';\gamma'} = \frac{1}{2} g^\alpha_{\alpha'} R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} \sigma^{\delta'} + O(\epsilon^2), \quad (1.40)$$

$$g^\alpha_{\beta';\gamma} = \frac{1}{2} g^\alpha_{\alpha'} g^{\gamma'}_{\gamma} R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} \sigma^{\delta'} + O(\epsilon^2), \quad (1.41)$$

em que ϵ mede a grandeza típica de um componente de σ^α . Para obter as expansões acima é preciso usar os limites de coincidência; (1.15)-(1.22), (1.30) e (1.34)-(1.36), o método de expansão presente no final da seção (1.2) e a definição do propagador paralelo como em (1.37).

1.5 Determinante de Van Vleck

Definimos o biescalar determinante de Van Vleck, $\Delta(x, x')$, como

$$\Delta(x, x') \equiv \det[\Delta^{\alpha'}_{\beta'}], \quad \Delta^{\alpha'}_{\beta'}(x, x') \equiv -g^{\alpha'}_{\alpha}(x', x)\sigma^{\alpha}_{\beta'}(x, x'). \quad (1.42)$$

As equações (1.30) e (1.18) implicam que $[\Delta^{\alpha'}_{\beta'}] = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$, e, portanto,

$$[\Delta] = 1. \quad (1.43)$$

De outro modo, a equação (1.39) implica que próximo ao ponto de coincidência temos

$$\Delta^{\alpha'}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} + \frac{1}{6}R^{\alpha'}_{\gamma'\beta'\delta'}\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\epsilon^3) \quad (1.44)$$

tal que

$$\Delta = 1 + \frac{1}{6}R_{\alpha'\beta'}\sigma^{\alpha'}\sigma^{\beta'} + O(\epsilon^3). \quad (1.45)$$

onde usamos que $\det(1 + \mathbf{a}) = 1 + Tr(\mathbf{a}) + O(\mathbf{a}^2)$ para \mathbf{a} pequeno.

Pode ser mostrado que o determinante de Van Vleck também satisfaz a seguinte relação

$$\Delta^{-1}(\Delta\sigma^{\alpha})_{;\alpha} = 4 \quad (1.46)$$

e que uma família de geodésicas, denominada como superfície caustica, emanam do ponto singular x' . Na região não singular o comportamento de Δ é relacionada à taxa de convergência ou de divergência das geodésicas que emanam do ponto de singularidade.

1.6 Sistema de Coordenadas

Em seguida, introduzimos três sistemas de coordenadas que serão essenciais para a obtenção da equação de movimento de uma partícula com carga elétrica no espaço-tempo curvo; as coordenadas normais de Fermi, a coordenada retardada e a coordenada avançada. Por fim, mostraremos as transformações para a coordenada retardada.

1.6.1 Coordenadas Normais de Fermi

Antes das coordenadas normais de Fermi serem enunciadas, iremos considerar uma curva γ do tipo-tempo descrita pela relação $z^{\mu}(\tau)$, em que τ é o tempo próprio, e definir o transporte de Fermi-Walker (FW) sobre γ para um vetor v quando este satisfizer

$$\frac{Dv^{\mu}}{d\tau} = (v_{\nu}a^{\nu})u^{\mu} - (v_{\nu}u^{\nu})a^{\mu}, \quad (1.47)$$

sendo $u^{\mu} = dz^{\mu}/d\tau$ o quadrivetor tangente e ortonormal à γ e $a^{\mu} = Du^{\mu}/d\tau$ a quadriaceleração. Dizemos que o quadrivetor v^{μ} satisfaz o transporte de FW.

Em um ponto arbitrário \bar{z} sobre a curva γ , associamos uma base tetrada ortonormal $(u^{\bar{\mu}}, e_{\bar{a}}^{\bar{\mu}})$, com o índice a variando de 1 a 3. Quando a base satisfaz o transporte de FW, ela se mantém ortogonal e sem rotação sobre γ . Para um ponto qualquer temos

$$\frac{De_a^\mu}{d\tau} = (a_\nu e_a^\nu)u^\mu, \quad (1.48)$$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1, \quad (1.49)$$

$$g_{\mu\nu}e_a^\mu u^\nu = 0, \quad (1.50)$$

$$g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu = \delta_{ab}. \quad (1.51)$$

A tetrada dual (e_μ^0, e_μ^a) é definida como

$$e_\mu^0 = -u_\mu, \quad e_\mu^a = \delta^{ab}g_{\mu\nu}e_b^\nu. \quad (1.52)$$

A tetrada e a sua dual resultam nas relações de completezas

$$g^{\mu\nu} = -u^\mu u^\nu + \delta^{ab}e_a^\mu e_b^\nu, \quad g_{\mu\nu} = -e_\mu^0 e_\nu^0 + \delta_{ab}e_\mu^a e_\nu^b. \quad (1.53)$$

Consideramos um ponto x pertencente à vizinhança de γ e localizamos a única *geodésica tipo-espaço* β que passa por x e intercepta γ *ortogonalmente*. Denotamos o ponto de intersecção por $\bar{x} = z(t)$, em que t denota o parâmetro de tempo-próprio nesse ponto. As coordenadas normais de Fermi (CNF) em x são definidas como

$$\hat{x}^0 = t, \quad \hat{x}^a = -e_{\bar{\alpha}}^a(\bar{x})\sigma^{\bar{\alpha}}(x, \bar{x}), \quad (1.54)$$

em que

$$\sigma_{\bar{\alpha}}(x, \bar{x})u^{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0, \quad (1.55)$$

a última condição determina \bar{x} exigindo que $-\sigma^{\bar{\alpha}}$, definido em (1.12) como o quadrivetor tangente a β em \bar{x} , seja ortogonal a $u^{\bar{\alpha}}(\bar{x})$, o quadrivetor tangente a γ .

A distância espacial s entre \bar{x} e x ao longo da geodésica β pode ser obtida através da definição da CNF, das relações de completiza (1.53) e da relação (1.14);

$$s^2 \equiv \delta_{ab}\hat{x}^a\hat{x}^b = 2\sigma(x, \bar{x}). \quad (1.56)$$

A componente temporal, t , seleciona um ponto particular sobre γ nos restringindo a um conjunto de geodésicas tipo-espaço que intersecta ortogonalmente o ponto selecionado $z(t)$. Contudo, precisamos ser mais restritos ainda e definir um vetor unitário, $\omega^a \equiv \hat{x}^a/s$, que seleciona uma geodésica específica nesse conjunto. Como o vetor é unitário, ele deve satisfazer $\delta_{ab}\omega^a\omega^b = 1$. Pela definição de ω^a e de \hat{x}^a em (1.54), temos

$$\sigma^{\bar{\alpha}} = -s\omega^a e_{\bar{\alpha}}^a. \quad (1.57)$$

Em termos de coordenadas, a CNF é escrita como $(t, s\omega^a)$, figura (1).

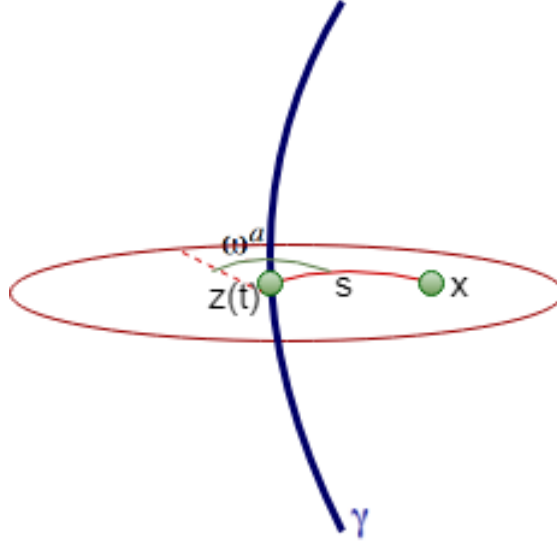


Figura 1 – Coordenadas normais de Fermi para um ponto x sobre a linha de mundo γ . A componente temporal, t , seleciona um ponto particular em γ , e o disco representa um conjunto de geodésicas tipo-espaço que intersecta ortogonalmente o ponto selecionado $z(t)$. O vetor unitário, $\omega^a \equiv \hat{x}^a/s$, seleciona uma geodésica específica nesse conjunto.

As CNF para o ponto x são aquelas que acompanham o movimento da partícula, possuindo o mesmo tempo-próprio desta, sendo assim o ponto \bar{x} representado pela CNF é denominado como sendo o ponto simultâneo a x .

A métrica nas coordenadas Normais de Fermi próximo à linha de mundo γ pode ser encontrada como,

$$g_{tt} = - \left[1 + 2a_a \hat{x}^a + (a_a \hat{x}^a)^2 + R_{0c0d} \hat{x}^c \hat{x}^d + O(s^3) \right], \quad (1.58)$$

$$g_{ta} = -\frac{2}{3} R_{0cad} \hat{x}^c \hat{x}^d + O(s^3), \quad (1.59)$$

$$g_{ab} = \delta_{ab} - \frac{1}{3} R_{abcd} \hat{x}^c \hat{x}^d + O(s^3). \quad (1.60)$$

1.6.2 Coordenada Retardada

A coordenada retardada (CR) possui os mesmos elementos geométricos que a CNF, a diferença se baseia em uma *geodésica nula* β , direcionada para o futuro, conectando a linha de mundo da partícula, γ , com o ponto x considerado sobre o campo. Definimos $x' \equiv z(u)$ o ponto em que β intercepta γ , u é o tempo-próprio associado a esse ponto. Novamente, x pertence à vizinhança convexa de x' .

Associamos uma base tetrada $(u^{\alpha'}, e_a^{\alpha'})$ ao ponto x' que pode ser transportada paralelamente ao longo de β até o ponto x se tornando (e_0^α, e_a^α) . A tetrada dual associada a x é definida como $e_\alpha^0 = -g_{\alpha\beta} e_0^\beta = -u_\alpha$ e $e_\alpha^a = \delta^{ab} g_{\alpha\beta} e_b^\beta$.

O propagador paralelo de x' para x se torna

$$g^{\alpha}_{\alpha'}(x, x') = e^{\alpha}_{\alpha'}(x)e^{\alpha'}_{\alpha}(x') = -e^{\alpha}_0 u_{\alpha'} + e^{\alpha}_{\alpha'} e^{\alpha}_{\alpha'}, \quad (1.61)$$

e, de x para x'

$$g^{\alpha'}_{\alpha}(x', x) = e^{\alpha'}_{\alpha}(x')e^{\alpha}_{\alpha'}(x) = u^{\alpha'} e^0_{\alpha} + e^{\alpha'}_{\alpha} e^{\alpha}_{\alpha'}, \quad (1.62)$$

em que usamos a equação (1.28) que o define.

A coordenada retardada é por fim definida;

$$\hat{x}^0 = u, \quad \hat{x}^a = -e^a_{\alpha'}(x')\sigma^{\alpha'}(x, x'), \quad (1.63)$$

com

$$\sigma(x, x') = 0, \quad (1.64)$$

a última relação se refere ao fato dos pontos x e x' serem conectados por uma geodésica nula. Da condição imposta sobre a geodésica (1.64) e das relações (1.62), (1.63) a distância retardada entre os pontos x e x' ao longo de β , denominada r , é tal que

$$r \equiv (\delta_{ab}\hat{x}^a\hat{x}^b)^{1/2} = u_{\alpha'}\sigma^{\alpha'}, \quad (1.65)$$

essa equação junto com as (1.62)-(1.63), resultam em

$$\sigma^{\alpha'} = -r(u^{\alpha'} + \Omega^a e^a_{\alpha'}), \quad (1.66)$$

em que $\Omega^a \equiv \hat{x}^a/r$ é um vetor unitário e espacial que satisfaz $\delta_{ab}\Omega^a\Omega^b = 1$.

A componente temporal u seleciona um cone de luz sobre γ , o vetor unitário Ω^a seleciona um gerador particular desse cone e r um ponto particular desse gerador; a distância retardada entre os pontos x e x' . Portanto, as componentes da coordenada retardada podem ser escritas como $(u, r\Omega^a)$, figura (2)

Se deslocarmos o ponto x por (du, dx^{α}) restrito ao cone de luz $\sigma(x, x') = 0$, as componentes espaciais e^a_{α} se transformam como

$$de^a_{\alpha'} = \left\{ (u_{\alpha'} a^{\beta'} - u^{\beta'} a_{\alpha'}) + \omega_{\alpha'}^{\beta'} \right\} e^a_{\beta'} du, \quad (1.67)$$

onde $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ é a matriz de rotação que leva em conta as variações da tetrada com relação aos deslocamentos em (dx^{α}) satisfazendo, $\omega_{\alpha'}^{\beta'} u^{\alpha'} = 0$.

Como a base é de FW com $u^{\alpha'} e^a_{\alpha'} = 0$, usando (1.66), temos

$$de^a_{\alpha'} \sigma^{\alpha'} = \left\{ (u_{\alpha'} a^{\beta'} + \omega_{\alpha'}^{\beta'}) e^a_{\beta'} \right\} \sigma^{\alpha'} du \quad (1.68)$$

$$= r a^a du - r \omega_{\alpha'}^{\beta'} e^a_{\beta'} e^{\alpha'}_{\alpha} \Omega^b du$$

$$= (r a^a - w^a_b \hat{x}^b) du, \quad (1.69)$$

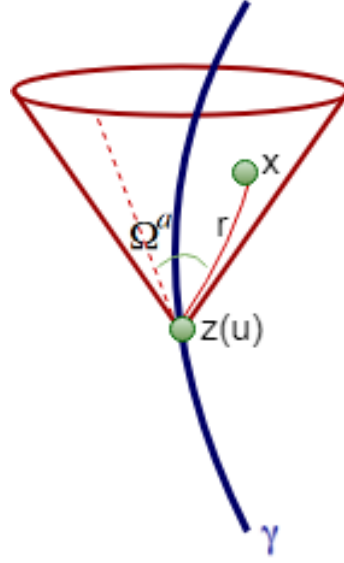


Figura 2 – Coordenada retardada para um ponto x em relação a linha de mundo γ . A componente temporal, u , seleciona um cone de luz sobre γ , o vetor unitário Ω^a seleciona um gerador particular desse cone e r um ponto particular desse gerador.

com $w^a_b \hat{x}^b = r \omega_{\alpha'}^{\beta'} e_{\beta'}^a e_b^{\alpha'} \Omega^b$. Lembrando que deslocamentos em $\sigma^{\alpha'}$ podem ser escritos como a soma $\sigma^{\alpha'}_{\beta} dx^{\beta} + \sigma^{\alpha'}_{\beta'} u^{\beta'} du$ já que um deslocamento no ponto x acarreta em outro deslocamento em x' ao longo de γ , juntando essa contribuição com (1.69) obtemos

$$d\hat{x}^a = -(ra^a - w^a_b \hat{x}^b + e_{\alpha'}^a \sigma^{\alpha'}_{\beta'} u^{\beta'}) du - e_{\alpha'}^a \sigma^{\alpha'}_{\beta} dx^{\beta}. \quad (1.70)$$

Visto que estamos falando de deslocamentos sobre o cone de luz, o efeito de $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ pode apenas resultar em uma rotação nos elementos de base Ω^a , razão do termo $w^a_b \hat{x}^b$ na expressão acima. Se o deslocamento fosse unicamente ao longo da curva tipo-tempo γ , $\omega_{\alpha'}^{\beta'} = 0 \rightarrow w^a_b = 0$ e o transporte de FW dos elementos da base $e_a^{\alpha'}$ é recuperado.

Como um deslocamento em $\sigma(x, x') = 0$ resulta em $\sigma(x + \delta x, x' + \delta x') = \sigma_{\alpha} \delta x^{\alpha} + \sigma_{\alpha'} \delta x^{\alpha'} = 0$, ao longo da linha de mundo, temos $\sigma_{\alpha} dx^{\alpha} = -\sigma_{\alpha'} dx^{\alpha'} = -\sigma_{\alpha'} u^{\alpha'} du = -r du$ que resultam em

$$du = -k_{\alpha} dx^{\alpha}, \quad (1.71)$$

em que $k_{\alpha} = \sigma_{\alpha}/r$ é um quadrivetor nulo em direção ao futuro de x e tangente a geodésica β .

Usando as equações (1.66) e (1.31), temos

$$k^{\alpha} = g^{\alpha}_{\alpha'} (u^{\alpha'} + \Omega^a e_a^{\alpha'}). \quad (1.72)$$

Substituindo as expansões para a segunda derivada da função mundo próximas ao ponto de coincidência (1.38)-(1.39) e as equações (1.66), (1.72) nos deslocamentos (1.70)-(1.71), obtemos a expressão resultante para o deslocamento da coordenada retardada, em termos

do seu gradiente;

$$\partial_\alpha u = e_\alpha^0 - \Omega_a e_\alpha^a \quad (1.73)$$

$$\partial_\alpha \hat{x}^a = - \left[r a^a + \frac{1}{2} r^2 S^a \right] e_\alpha^0 + \left[\delta^a_b + \left(r a^a + \frac{1}{3} r^2 S^a \right) \Omega_b + \frac{1}{6} r^2 S^a_b \right] e_\alpha^b, \quad (1.74)$$

usando a identidade $\partial_\alpha r = \Omega_a \partial_\alpha \hat{x}^a$, podemos obter

$$\partial_\alpha r = - \left[r a_a \Omega^a + \frac{1}{2} r^2 S \right] e_\alpha^0 + \left[\left(1 + r a_b \Omega_b + \frac{1}{3} r^2 S \right) \Omega_a + \frac{1}{6} r^2 S_a \right] e_\alpha^a, \quad (1.75)$$

em que $S_{ab} = R_{a0b0} + R_{a0bc} \Omega^c + R_{b0ac} \Omega^c + R_{acbd} \Omega^c \Omega^d$, $S_a = S_{ab} \Omega^b$ e $S = S_a \Omega^a$.

1.6.3 Transformação entre as Coordenadas Normais de Fermi para a Coordenada Retardada

Para obtermos a transformação entre a CNF $(t, s\omega^a)$ para a coordenada retardada $(u, r\Omega^a)$ vamos considerar os pontos $\bar{x} \equiv z(t)$ e $x' \equiv z(u)$ sobre a linha de mundo γ da partícula. Esses se referem as coordenadas normais de Fermi e retardada de um ponto x pertencente a vizinhança convexa de γ , respectivamente. Consideramos a função mundo

$$\sigma(\tau) = \sigma(x, z(\tau)), \quad (1.76)$$

que possui o tempo próprio τ como parâmetro e o ponto x mantido fixo. De acordo com as equações (1.56) e (1.64), temos $\sigma(t) = \frac{1}{2} s^2$ e $\sigma(u) = 0$. A tetrada $(\bar{e}_0^\alpha, \bar{e}_a^\alpha)$ é obtida através do transporte paralelo de $(u^{\bar{\alpha}}, e_a^{\bar{\alpha}})$ ao longo da geodésica tipo-espaço que intercepta γ ortogonalmente, enquanto a tetrada (e_0^α, e_a^α) é obtida através do transporte paralelo de $(u^{\alpha'}, e_a^{\alpha'})$ ao longo da geodésica nula direcionada para o futuro. Em seguida, definimos a expressão $\Delta \equiv t - u$ e consideramos a função,

$$p(\tau) = \sigma_\mu(x, z(\tau)) u^\mu(\tau), \quad (1.77)$$

tal que $\dot{\sigma}(\tau) = p(\tau)$.

Portanto, podemos calcular a expansão de Taylor para $\sigma(u)$;

$$\sigma(u) = \sigma(t - \Delta) = \sigma(t) - p(t)\Delta + \frac{1}{2} \dot{p}(t)\Delta^2 - \frac{1}{6} \ddot{p}(t)\Delta^3 + \dots, \quad (1.78)$$

uma vez que $p(t) = 0$ e as outras derivadas são obtidas diferenciando a equação (1.77) e usando as relações (1.38) e (1.57) para as derivadas de σ , obtemos uma expansão para s^2 em potência de Δ que pode ser invertida e utilizada para a obtenção do tempo retardado u em termos das CNF resultando em

$$u = t - s \left\{ 1 - \frac{1}{2} s a_a(t) \omega^a + \frac{3}{8} s^2 [a_a(t) \omega^a]^2 + \frac{1}{24} s^2 \dot{a}_0(t) + \frac{1}{6} s^2 \dot{a}_a(t) \omega^a - \frac{1}{6} s^2 R_{a0b0}(t) \omega^a \omega^b + O(s^3) \right\}. \quad (1.79)$$

Da mesma maneira, a distância retardada entre x e $z(u)$ é obtida por meio de $r = p(u) = p(t - \Delta)$;

$$r = s \left\{ 1 + \frac{1}{2} s a_a(t) \omega^a - \frac{1}{8} s^2 [a_a(t) \omega^a]^2 - \frac{1}{8} s^2 \dot{a}_0(t) - \frac{1}{3} s^2 \dot{a}_a(t) \omega^a + \frac{1}{6} s^2 R_{a0b0}(t) \omega^a \omega^b + O(s^3) \right\}. \quad (1.80)$$

Para obtermos a relação entre as coordenadas espaciais consideramos a função

$$p_a(\tau) = -\sigma_\mu(x, z(\tau)) e_a^\mu(\tau) \quad (1.81)$$

a qual podemos escrever como $r\Omega^a = p^a(u)$, de acordo com a equação (1.63) e a definição de Ω^a . Usando o mesmo procedimento anterior, temos $r\Omega^a = p^a(u) = p^a(t - \Delta)$ que pode ser expandido em potência de Δ resultando em

$$r\Omega^a = s \left\{ \omega^a + \frac{1}{2} s a^a(t) - \frac{1}{3} s^2 \dot{a}^a(t) - \frac{1}{3} s^2 R^a{}_{b0c}(t) \omega^b \omega^c + \frac{1}{6} s^2 R^a{}_{0b0}(t) \omega^b + O(s^3) \right\}. \quad (1.82)$$

onde usamos a expressão para o tempo retardado (1.79).

A seguir vamos calcular a matriz de transformação entre a base de tetradas $(\bar{e}_0^\alpha, \bar{e}_a^\alpha)$ e (e_0^α, e_a^α) . Para isso, consideramos as funções

$$p^\alpha(\tau) = g^\alpha{}_\mu(x, z(\tau)) u^\mu(\tau), \quad (1.83)$$

$$p_a^\alpha(\tau) = g^\alpha{}_\mu(x, z(\tau)) e_a^\mu(\tau). \quad (1.84)$$

Com o mesmo método anterior, usando a definição para o propagador paralelo (1.61)-(1.62), sua expansão para a primeira derivada próxima ao ponto de coincidência (1.40) e com a expressão para Δ em termos das CNF, que pode ser obtido de um modo similar, obtemos

$$\bar{e}_0^\alpha = \left[1 - \frac{1}{2} r^2 \dot{a}_0(u) + O(r^3) \right] e_0^\alpha + \left[r(1 - a_b \Omega^b) a^a(u) + \frac{1}{2} r^2 \dot{a}^a(u) + \frac{1}{2} r^2 R^a{}_{0b0}(u) \Omega^b + O(r^3) \right] e_a^\alpha, \quad (1.85)$$

$$\bar{e}_a^\alpha = \left[\delta^b{}_a + \frac{1}{2} r^2 a^b(u) a_a(u) - \frac{1}{2} r^2 R^b{}_{a0c} \Omega^c + O(r^3) \right] e_b^\alpha + \left[r(1 - a_b \Omega^b) a_a(u) + \frac{1}{2} r^2 \dot{a}_a(u) + \frac{1}{2} r^2 R_{a0b0}(u) \Omega^b + O(r^3) \right] e_0^\alpha. \quad (1.86)$$

1.6.4 Coordenada Avançada e sua Transformação para a Coordenada Retardada

Já que desenvolvemos a proximidade simultânea e retardada do ponto representativo, agora definimos a proximidade avançada. O ponto avançado na linha de mundo é denotado por $x'' \equiv z(v)$, em que v é o parâmetro do tempo próprio em x'' . Uma geodésica nula

direcionada para o passado conecta o ponto avançado com o ponto x . A distância entre eles é

$$r_{av} = -\sigma_{\alpha''} u^{\alpha''}. \quad (1.87)$$

E, assim como na coordenada retardada,

$$\sigma(x, x'') = 0. \quad (1.88)$$

Procedendo como anteriormente e definindo $\Delta' \equiv v - u$, pode-se obter o tempo próprio avançado em termos das coordenadas retardadas de x ,

$$v = u + 2r \left[1 - ra_a(u)\Omega^a + r^2[a_a(u)\Omega^a] - \frac{1}{3}r^2\dot{a}_0(u) - \frac{2}{3}r^2\dot{a}_a(u)\Omega^a - \frac{1}{3}r^2R_{a0b0}(u)\Omega^a\Omega^b + O(r^3) \right], \quad (1.89)$$

e o mesmo para a distância avançada ao notarmos que $r_{av} = -p(v) = -p(u + \Delta')$;

$$r_{av} = r \left[1 + \frac{2}{3}r^2\dot{a}_a(u)\Omega^a + O(r^3) \right]. \quad (1.90)$$

As equações (1.73)-(1.75) com (1.89)-(1.90) implicam nos gradientes

$$\partial_{\alpha} v = [1 - 2ra_a\Omega^a + O(r^2)]e_{\alpha}^0 + [\Omega_a - 2ra_a + O(r^2)]e_{\alpha}^a, \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha} r_{av} = & [-ra_a\Omega^a - \frac{1}{2}r^2S + O(r^3)]e_{\alpha}^0 + \left[\left(1 + ra_b\Omega_b + \frac{4}{3}r^2\dot{a}_b\Omega^b + \frac{1}{3}r^2S \right) \Omega_a + \frac{2}{3}r^2\dot{a}_a + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6}r^2S_a + O(r^3) \right] e_{\alpha}^a. \end{aligned} \quad (1.92)$$

2 Equação de ALD

2.1 Espaço-tempo Plano

Uma partícula carregada e acelerada ao longo de sua linha de mundo γ é descrita pela relação $z(\tau)$, em que τ representa o tempo-próprio. A sua equação de movimento sem a presença de campos gravitacionais é conhecida como equação de Abraham-Lorentz-Dirac (ALD);

$$a^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3} (g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) \dot{a}^\nu, \quad (2.1)$$

em que q e m são a carga e a massa da partícula, respectivamente, c a velocidade da luz, $F^\mu{}_\nu$ o tensor de força do campo eletromagnético, $u^\mu = dz/d\tau$ a quadri-velocidade, $a^\mu = du^\mu/d\tau$ a quadri-aceleração e $\dot{a}^\mu = da^\mu/d\tau$ a derivada primeira da quadri-aceleração da partícula.

O primeiro termo da equação de ALD, (2.1), se refere a força externa agindo sobre a partícula e o segundo a autoforça que surge do balanço entre a energia mecânica e a energia irradiada para o infinito da partícula que, por sua vez, age de volta na mesma, como uma força de 'black-reaction'.

Contudo, como foi encontrado pelo próprio pioneiro da teoria (DIRAC, 1938), essa equação permite soluções não físicas.

Como exemplo, vamos considerar o caso mais simples do limite não relativístico de uma partícula carregada e acelerada sujeita a uma força externa constante, \mathbf{F} , limitada a agir apenas durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, a equação de ALD (2.1) se reduz a

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{2q^2}{3m} \dot{\mathbf{a}}(t) \quad (2.2)$$

com solução,

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} [(\mathbf{F}/m) + \mathbf{C}]e^{t/\tau} & \text{se } t \leq 0 \\ [(\mathbf{F}/m) + \mathbf{C}e^{t/\tau}] & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ [(\mathbf{F}/m)e^{-T/\tau} + \mathbf{C}]e^{t/\tau} & \text{se } t \geq T, \end{cases} \quad (2.3)$$

em que \mathbf{C} é uma constante de integração e $\tau \equiv 2q^2/3m$.

Essa solução mostra que independentemente da partícula estar ou não submetida a uma força externa, ela pode adquirir uma aceleração que cresce exponencialmente com o tempo. Essa solução é chamada de solução fugitiva e não é observada na natureza. E, se uma força externa começar a agir em um determinado tempo, ela provoca alterações no movimento da partícula anteriores ao início da ação dessa própria força. Isso não é esperado, pois sabemos que a equação de movimento certamente necessita ser causal: o

desenvolvimento futuro do sistema é completamente determinado a partir da especificação das condições iniciais. Pode-se ser mostrado que não é possível eliminar ambos os problemas de solução fugitiva e pré-aceleração com a mesma escolha de constante de integração.

2.2 Espaço-tempo Curvo

A generalização da equação de ALD para o espaço-tempo curvo foi obtida primeiramente por (DEWITT, 1965) e sumarizado no artigo de revisão (POISSON; POUND; VEGA, 2011). Esses serviram de base para demonstrarmos a seguir a equação de movimento para uma partícula com carga elétrica no espaço-tempo curvo. Nesse caso, a equação de movimento apresenta um termo que se refere ao passado histórico da partícula, denominado termo de cauda. Esse termo é uma peculiaridade do espaço-tempo curvo. A equação de movimento no espaço-tempo curvo se reduz à equação de ALD no espaço-tempo plano.

2.2.1 Eletrodinâmica

Consideramos uma partícula pontual com carga elétrica e , movendo-se sobre a linha de mundo γ descrita pela relação $z(\lambda)$, em que λ é um parâmetro arbitrário. Durante o seu movimento, a partícula gera o quadripotencial $A^\alpha(x)$, sua ação total resulta em,

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + e j^\alpha(x) A_\alpha(x) \right] - m \int_\gamma d\tau \quad (2.4)$$

em que $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}(z) \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu} d\lambda$ quando minimizado resulta no elemento de linha da curva geodésica que a partícula livre percorre, $\dot{z}^\mu \equiv dz^\mu/d\lambda$, m é sua massa e $F_{\alpha\beta}(x) = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$ o tensor de força do campo eletromagnético.

O primeiro termo da integral (2.5) representa a ação devida unicamente ao campo eletromagnético, o segundo é um termo de interação que acopla o campo à partícula e o último se refere apenas a partícula livre se movendo sobre a linha de mundo γ no espaço-tempo.

O comportamento dinâmico do sistema é determinado pelo princípio variacional da ação mínima; a variação da ação total em relação à variação do quadripotencial $\delta A^\alpha(x)$ é estacionária, i.e.,

$$\frac{\delta S}{\delta A^\alpha(x)} = 0. \quad (2.5)$$

A solução para a equação (2.5) resulta nas equações de Maxwell

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi j^\alpha, \quad (2.6)$$

em que j^α é a quadridensidade de corrente eletromagnética,

$$j^\alpha(x) = e \int_\gamma g^\alpha{}_\mu(x, z) \dot{z}^\mu \delta_4(x, z) d\lambda, \quad (2.7)$$

sendo $g^\alpha_\mu(x, z)$ o propagador paralelo definido na seção (1.4), $\delta_4(x, z) = \Delta(x, z)\delta_4(x - z)$ com $\Delta(x, z)$ sendo o determinante de Van Vleck definido na seção (1.5), cujo limite é unitário e $\delta_4(x - z)$ o funcional de Dirac em 4-dimensões no espaço-tempo curvo.

Na condição de calibre de Lorentz, $\nabla_\alpha A^\alpha = 0$, a equação de Maxwell (2.6) resulta na equação de onda para o quadripotencial;

$$\square A^\alpha - R^\alpha_\beta A^\beta = -4\pi j^\alpha, \quad (2.8)$$

em que $\square = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$ é o operador de onda, R^α_β o tensor de Ricci. A equação (2.8) garante que a equação da continuidade, $\nabla_\alpha j^\alpha = 0$, seja satisfeita.

Por outro lado, adotando o parâmetro τ do tempo-próprio para a linha de mundo γ e definindo a quadri-velocidade $u^\mu(\tau) = dz^\mu/d\tau$. Podemos calcular a variação da ação total em relação à variação $\delta z^\mu(\tau)$ sendo estacionária e obter a equação de movimento de Lorentz;

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = e F^\mu_\nu(z) u^\nu, \quad (2.9)$$

em que a notação $D/d\tau$ continua se referindo a derivada covariante.

Com a mudança para o parâmetro τ podemos reescrever a quadridensidade de corrente elétrica como

$$j^\alpha(x) = e \int_\gamma g^\alpha_\mu(x, z) u^\mu \delta_4(x, z) d\tau. \quad (2.10)$$

2.2.2 Função de Green Eletromagnética

A solução para a equação da onda, (2.8), pode ser escrita como

$$A^\alpha(x) = \int \sqrt{-g'} d^4x' G^\alpha_{\beta'}(x, x') j^{\beta'}(x'), \quad (2.11)$$

em que $j^{\beta'}$ é a quadricorrente que aparece em (2.10) e $G^\alpha_{\beta'}(x, x')$ a função de Green que satisfaz a equação de onda não homogênea

$$\square G^\alpha_{\beta'}(x, x') - R^\alpha_\beta G^\beta_{\beta'}(x, x') = -4\pi g^\alpha_{\beta'}(x, x') \delta_4(x, x'). \quad (2.12)$$

Dentre as funções de Green, iremos destacar a função de Green retardada e a avançada. Essas funções são denotadas por $G^\alpha_{+\beta'}(x, x')$ e $G^\alpha_{-\beta'}(x, x')$, respectivamente. Sendo a primeira diferente de zero quando x se encontra no futuro causal de x' e a segunda o oposto; diferente de zero quando x se encontra no passado causal de x' . A seguir veremos como essas funções são representadas na construção de Hadamard.

2.2.3 Construção de Hadamard para a Função de Green

Assumindo que x pertence a vinhança convexa de x' , podemos enunciar como as funções retardada e avançada de Green são escritas na construção de Hadamard;

$$G^\alpha_{\pm\beta'}(x, x') = U^\alpha_{\beta'}(x, x') \delta_\pm(\sigma) + V^\alpha_{\beta'}(x, x') \theta_\pm(-\sigma), \quad (2.13)$$

sendo que $U^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ e $V^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ são bitensores regulares, a função mundo, definida na seção (1.2), aparece como parâmetro nas distribuições ao longo do cone de luz $\delta_{\pm}(\sigma)$ e $\theta_{\pm}(-\sigma)$, tais que

$$\theta_{\pm}(-\sigma) = \theta_{\pm}(x, \Sigma)\theta(-\sigma), \quad (2.14)$$

$$\delta_{\pm}(\sigma) = \theta_{\pm}(x, \Sigma)\delta(\sigma), \quad (2.15)$$

em que $\theta(-\sigma)$ e $\delta(\sigma)$ são as funções degrau e delta de Dirac definidas no espaço-tempo plano. Já a função degrau $\theta_{+}(x, \Sigma)$ é uma generalização para o espaço-tempo curvo, com $x' \in \Sigma$ é definida como sendo um quando x se encontra no futuro da hipersuperfície tipo-espaço Σ e zero no caso contrário. Enquanto que definimos $\theta_{-}(x, \Sigma) = 1 - \theta_{+}(x, \Sigma)$ sendo um no passado da hipersuperfície tipo-espaço Σ e zero no caso contrário. Assim a função degrau ao longo do cone de luz é

$$\theta_{+}(-\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I^{+}(x') \\ 0 & \text{se } c.c. \end{cases} \quad \theta_{-}(-\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{se } c.c. \\ 1 & \text{se } x \in I^{-}(x') \end{cases} \quad (2.16)$$

com $I^{+}(x')$ e $I^{-}(x')$ sendo o futuro e o passado cronológico de x' , respectivamente. Por outro lado, $\delta_{+}(\sigma)$, quando analisada do ponto x para $\sigma(x, x')$, tem sua validade no futuro do cone de luz gerado por x' , enquanto $\delta_{-}(\sigma)$ é válida no passado do cone de luz gerado por x' . Note que $\theta_{+}(-\sigma) + \theta_{-}(-\sigma) = \theta(-\sigma)$ e similarmente $\delta_{+}(\sigma) + \delta_{-}(\sigma) = \delta(\sigma)$. O sinal negativo da função mundo σ presente na função degrau preserva a causalidade da função de Green enquanto o funcional de Dirac preserva a sua singularidade.

A construção de Hadamard no espaço-tempo plano para a função de Green retardada, $G_{+}(x, x')$, depende apenas do futuro de x' , enquanto que a função de Green avançada, $G_{-}(x, x')$, depende apenas do passado de x' ;

$$G_{\pm}(x, x') = \pm\theta(t - t')[\delta(\sigma) + V(\sigma)\theta(-\sigma)]. \quad (2.17)$$

Como podemos ver na figura (3). Por outro lado, no espaço-tempo curvo as funções de Green se tornam mais ricas e possuem dependência dentro do cone de luz do ponto x sobre o passado e o futuro cronológico da partícula em x' , como mostra a construção de Hadamard no espaço-tempo curvo (2.13), figura (4). No decorrer desse capítulo veremos que a aplicação dessa propriedade resulta em potenciais retardado e avançado que dependem do passado e do futuro cronológico da partícula, respectivamente. Essa importante propriedade reflete o fato de que no espaço-tempo curvo as ondas eletromagnéticas não se propagam apenas com a velocidade da luz, mas com velocidades maiores ou menos que esta, por decorrência da interação entre a radiação e a curvatura do espaço-tempo.

Se tornará de grande utilidade os limites de coincidências $x \rightarrow x'$ dos bitensores $U^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ e $V^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$. Com esse intuito desejamos substituir a função de Green (2.13) na sua função de onda não homogênea (2.12), no entanto, precisaríamos diferenciar as

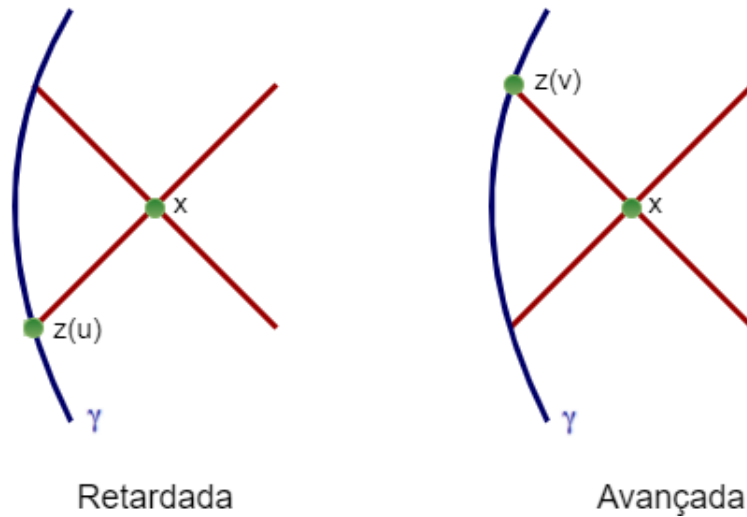


Figura 3 – No espaço-tempo plano, a função de Green retardada no ponto x depende apenas do estado de movimento ponto retardado $z(u)$ e a função de Green avançada depende do estado de movimento do ponto avançado $z(v)$.

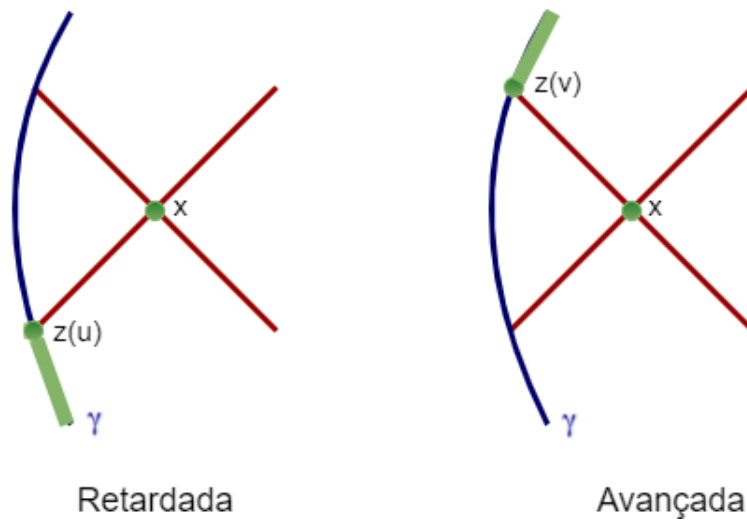


Figura 4 – No espaço-tempo curvo, a função de Green retardada depende de todos os pontos dentro do cone de luz que interceptam γ , assim depende de toda a historia passada do ponto retardado $z(u)$ em relação a x . A função de Green avançada depende de todo o futuro histórico do ponto avançado $z(v)$.

distribuições $\theta_{\pm}(-\sigma)$ e $\delta_{\pm}(\sigma)$ no ponto $x = x'$, em que não são definidas. A fim de resolver esse problema, realizamos uma manipulação conveniente em que consiste em deslocar σ por uma pequena quantidade ϵ . Com isso, a identidade

$$\sigma\delta_{\pm}(\sigma + \epsilon) = -\epsilon\delta_{\pm}(\sigma + \epsilon) \tag{2.18}$$

permite sucessivas derivadas em relação à σ .

$$\sigma\delta'_{\pm}(\sigma + \epsilon) = -\delta_{\pm}(\sigma + \epsilon) - \epsilon\delta'_{\pm}(\sigma + \epsilon), \tag{2.19}$$

$$\sigma\delta''_{\pm}(\sigma + \epsilon) = -2\delta'_{\pm}(\sigma + \epsilon) - \epsilon\delta''_{\pm}(\sigma + \epsilon). \tag{2.20}$$

No limite de $\epsilon \rightarrow 0^+$ temos;

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \delta_{\pm}(\sigma + \epsilon) = 0, \quad (2.21)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \delta'_{\pm}(\sigma + \epsilon) = 0, \quad (2.22)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \delta''_{\pm}(\sigma + \epsilon) = 2\pi \delta_4(x, x'). \quad (2.23)$$

A função de Green (2.13) deslocada pela pequena quantidade ϵ resulta em

$$G_{\pm\beta'}^{\epsilon\alpha}(x, x') = U^{\alpha}_{\beta'}(x, x') \delta_{\pm}(\sigma + \epsilon) + V^{\alpha}_{\beta'}(x, x') \theta_{\pm}(-\sigma - \epsilon) \quad (2.24)$$

com a condição $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\pm\beta'}^{\epsilon\alpha}(x, x') = G_{\pm\beta'}^{\alpha}(x, x')$.

Substituindo a função de Green deslocada (2.24) no lado esquerdo da equação de onda não homogênea que a satisfaz (2.12), e, depois disso, tomando o limite de $\epsilon \rightarrow 0^+$, temos

$$\begin{aligned} \square G^{\alpha}_{\beta'}(x, x') - R^{\alpha}_{\beta} G^{\beta}_{\beta'}(x, x') &= -4\pi \delta_4(x, x') U^{\alpha}_{\beta'} + \delta'_{\pm}(\sigma) \{2U^{\alpha}_{\beta';\gamma} \sigma^{\gamma} + (\sigma^{\gamma}_{\gamma} - 4)U^{\alpha}_{\beta'}\} \\ &+ \delta_{\pm}(\sigma) \{-2V^{\alpha}_{\beta';\gamma} \sigma^{\gamma} + (2 - \sigma^{\gamma}_{\gamma})V^{\alpha}_{\beta'} + \square U^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}_{\beta} U^{\beta}_{\beta'}\} \\ &+ \theta_{\pm}(-\sigma) \{\square V^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}_{\beta'}\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que usamos a relação (1.13) satisfeita pela função mundo e as identidades (2.18)-(2.20) com seus respectivos limites (2.21)-(2.22).

Comparando a equação (2.25) com o lado direito da equação (2.12), temos

i) as equações

$$U^{\alpha}_{\beta'} = g^{\alpha}_{\beta'}, \quad (2.26)$$

$$2U^{\alpha}_{\beta';\gamma} \sigma^{\gamma} + (\sigma^{\gamma}_{\gamma} - 4)U^{\alpha}_{\beta'} = 0, \quad (2.27)$$

No limite de coincidência temos

$$[U^{\alpha}_{\beta'}] = [g^{\alpha}_{\beta'}] = \delta^{\alpha}_{\beta'}, \quad (2.28)$$

em que usamos (1.30).

Essas equações determinam $U^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ unicamente;

ii) a equação

$$\tilde{V}^{\alpha}_{\beta';\gamma} \sigma^{\gamma} + \frac{1}{2}(\sigma^{\gamma}_{\gamma} - 2)\tilde{V}^{\alpha}_{\beta'} = \frac{1}{2}(\square U^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}_{\beta} U^{\beta}_{\beta'})|_{\sigma=0} \quad (2.29)$$

que determina $\tilde{V}^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$, a restrição de $V^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ ao cone de luz $\sigma(x, x') = 0$, obtida da identidade $\sigma \delta(\sigma) = 0$ que nos permite impor $\delta(\sigma)$ para $\sigma = 0$;

iii) por último, a equação

$$\square V^{\alpha}_{\beta'} - R^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}_{\beta'} = 0 \quad (2.30)$$

que determina $V^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ dentro do cone de luz.

A seguir, apresentamos as soluções para cada caso.

i) Supondo $U^{\alpha}_{\beta'}(x, x') = g^{\alpha}_{\beta'}(x, x')U(x, x')$, a equação, (2.28), reduz-se a

$$[U] = 1. \quad (2.31)$$

Para resolver a equação restante, (2.27), precisamos relembrar na seção (1.2) a definição de σ^{α} como um vetor em x tangente à única geodésica β que conecta x a um ponto restrito em sua vizinhança, x' . Considerando λ a parametrização da geodésica podemos descrever um deslocamento ao longo de β por $dx^{\alpha} = (\sigma^{\alpha}/\lambda)d\lambda$. O primeiro termo do lado esquerdo se torna $2\lambda\frac{dU}{d\lambda}$, e, em relação ao segundo, usamos a equação (1.46), a qual o determinante de Van Vleck satisfaz, para obter

$$\sigma^{\alpha}_{\alpha} - 4 = -\Delta^{-1}\Delta_{,\alpha}\sigma^{\alpha} = -\Delta^{-1}\lambda\frac{d\Delta}{d\lambda}. \quad (2.32)$$

Juntando ambos os termos, a equação (2.27) se torna

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}(2\ln U - \ln \Delta) = 0, \quad (2.33)$$

essa equação implica em U^2/Δ sendo uma constante ao longo de β , i.e., seu valor permanece sempre igual ao seu valor inicial em x' ;

$$\frac{U^2}{\Delta} = \left[\frac{U^2}{\Delta} \right] = 1 \quad (2.34)$$

em que usamos $[\Delta] = 1$, equação (1.43). Assim, encontramos a única solução para as equações (2.31) e (2.33);

$$U(x, x') = \Delta^{\frac{1}{2}}(x, x'). \quad (2.35)$$

E, por fim, de acordo com a nossa suposição inicial

$$U^{\alpha}_{\beta'}(x, x') = g^{\alpha}_{\beta'}(x, x')U(x, x') = g^{\alpha}_{\beta'}(x, x')\Delta^{\frac{1}{2}}(x, x') \quad (2.36)$$

em que, usando a expansão para o determinante de Van Vleck próximo ao ponto de coincidência (1.45), o biescalar se reduz a

$$U^{\alpha}_{\beta'} = g^{\alpha}_{\beta'} \left(1 + \frac{1}{12}R_{\gamma'\delta'}\sigma^{\gamma'}\sigma^{\delta'} + O(\lambda^3) \right). \quad (2.37)$$

A diferenciação desse resultado nos leva a

$$U^{\alpha}_{\beta';\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma'}_{\gamma} \left(g^{\alpha}_{\alpha'}R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} - \frac{1}{3}g^{\alpha}_{\beta'}R_{\gamma'\delta'} \right) \sigma^{\delta'} + O(\lambda^2), \quad (2.38)$$

$$U^{\alpha}_{\beta';\gamma'} = \frac{1}{2} \left(g^{\alpha}_{\alpha'}R^{\alpha'}_{\beta'\gamma'\delta'} + \frac{1}{3}g^{\alpha}_{\beta'}R_{\gamma'\delta'} \right) \sigma^{\delta'}, \quad (2.39)$$

$$[\square U^\alpha_{\beta'}] = \frac{1}{6} \delta^\alpha_{\beta'} R(x'). \quad (2.40)$$

em que usamos as expansões (1.38)-(1.41).

ii) Tomando o limite de coincidência em (2.29) e usando $[\sigma^\gamma_\gamma] = 4$, temos

$$[V^\alpha_{\beta'}] = -\frac{1}{2} \left(R^\alpha_{\beta'} - \frac{1}{6} \delta^\alpha_{\beta'} R' \right). \quad (2.41)$$

Essa equação junto com as condições de contorno obtidas da integração da equação (2.29) garantem que a equação de onda (2.30) possui uma solução única. Portanto, as funções retardada e avançada de Green representadas na construção de Hadamard, (2.13), satisfazem a equação de onda (2.12).

2.2.4 Representação de Kirchhoff para o Quadripotencial

Agora, vamos supor que o quadripotencial $A^\alpha(x)$ satisfaz a versão homogênea da equação de onda (2.8):

$$\square A^\alpha - R^\alpha_{\beta'} A^\beta = 0 \quad (2.42)$$

e os valores iniciais $A^{\alpha'}(x')$ e $\eta^{\beta'} \nabla_{\beta'} A^{\alpha'}(x')$ são especificados sobre uma hipersuperfície tipo-espaço Σ . O valor do quadripotencial no ponto x no futuro de Σ é dado pela representação de Kirchhoff:

$$A^\alpha(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(G_{+\beta'}^\alpha(x, x') \nabla^{\gamma'} A^{\beta'}(x') - A^{\beta'}(x') \nabla^{\gamma'} G_{+\beta'}^\alpha(x, x') \right) d\Sigma_{\gamma'}, \quad (2.43)$$

onde $d\Sigma_{\gamma'} = -\eta_{\gamma'} dV$ é o elemento de superfície sobre Σ ; $\eta_{\gamma'}$ um vetor normal direcionado para o futuro e dV o elemento de volume invariante em Σ .

2.2.5 Reciprocidade da Função de Green

Primeiramente, vamos enunciar a relação de reciprocidade satisfeita pela função de Green eletromagnética

$$G_{\beta'\alpha}^-(x', x) = G_{\alpha\beta'}^+(x, x'). \quad (2.44)$$

Esta relação implica na simetria nos índices e argumentos do bitensor

$$V_{\beta'\alpha}(x', x) = V_{\alpha\beta'}(x, x'). \quad (2.45)$$

em que usamos a construção de Hadamard, (2.13), e as propriedades das funções de distribuições das quais pode-se obter $\theta_+(-\sigma(x, x')) = \theta_-(-\sigma(x', x))$ e $\delta_+(\sigma(x, x')) \neq \delta_-(\sigma(x', x))$.

2.2.6 Função de Green Singular e Regular

A ideia principal consiste em decompor a função retardada de Green em uma parte singular responsável apenas por influenciar a inércia da partícula e outra regular responsável pelo o seu movimento. Com este intuito, introduzimos o bitensor $H^\alpha_{\beta'}(x, x')$ que satisfaz;

i) a equação de onda homogênea

$$\square H^\alpha_{\beta'}(x, x') - R^\alpha_{\beta}(x)H^\beta_{\beta'}(x, x') = 0, \quad (2.46)$$

ii) a seguinte simetria nos índices e argumentos

$$H_{\beta'\alpha}(x', x) = H_{\alpha\beta'}(x, x'), \quad (2.47)$$

iii) ser igual à função de Green retardada quando x está no futuro cronológico de x' .

$$H^\alpha_{\beta'}(x, x') = G^\alpha_{+\beta'}(x, x') \quad \text{se } x \in I^+(x') \quad (2.48)$$

iv) ser igual à função de Green avançada quando x está no passado cronológico de x' .

$$H^\alpha_{\beta'}(x, x') = G^\alpha_{-\beta'}(x, x') \quad \text{se } x \in I^-(x') \quad (2.49)$$

Introduzidos a função de Green singular

$$G^\alpha_{S\beta'}(x, x') = \frac{1}{2}[G^\alpha_{+\beta'}(x, x') + G^\alpha_{-\beta'}(x, x') - H^\alpha_{\beta'}(x, x')] \quad (2.50)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) obedece a equação de onda não-homogênea

$$\square G^\alpha_{S\beta'}(x, x') - R^\alpha_{\beta}G^\beta_{S\beta'}(x, x') = -4\pi g^\alpha_{\beta'}(x, x')\delta_4(x, x') \quad (2.51)$$

ii) a seguinte simetria nos índices e argumentos

$$G^S_{\beta'\alpha}(x', x) = G^S_{\alpha\beta'}(x, x'), \quad (2.52)$$

como consequência a função de Green singular não distingue entre o passado e o futuro e descreve uma onda estacionária no infinito.

iii) ser nulo se x pertence ao passado ou futuro cronológico de x' ,

$$G^S_{\beta'\alpha}(x', x) = 0 \quad \text{se } x \in I^\pm(x') \quad (2.53)$$

A função de Green singular depende da historia da partícula durante o intervalo de tempo $u \leq \tau \leq v$, figura (5).

Definimos a função de Green regular $G_{R\beta'}^\alpha(x, x')$ ao remover a singularidade presente na função de Green retardada sem afetar o movimento da partícula. O melhor jeito de fazer isso é defini-la como

$$G_{R\beta'}^\alpha(x, x') = G_{+\beta'}^\alpha(x, x') - G_{S\beta'}^\alpha(x, x') \quad (2.54)$$

que satisfaz as propriedades:

i) obedece a equação de onda homogênea

$$\square G_{R\beta'}^\alpha(x, x') - R^\alpha{}_\beta G_{R\beta'}^\beta(x, x') = 0 \quad (2.55)$$

ii) ser igual à função retardada de Green se x pertence ao futuro cronológico de x' ,

$$G_{R\beta'}^\alpha(x, x') = G_{+\beta'}^\alpha(x, x') \quad \text{se } x \in I^+(x'), \quad (2.56)$$

iii) ser zero se x pertence ao passado cronológico de x' ,

$$G_{R\beta'}^\alpha(x, x') = 0 \quad \text{se } x \in I^-(x'). \quad (2.57)$$

O campo produzido pela função de Green regular não possui singularidades e será o responsável pelo movimento da partícula. A função de Green regular depende da historia da partícula durante $-\infty < \tau \leq v$, figura (5).

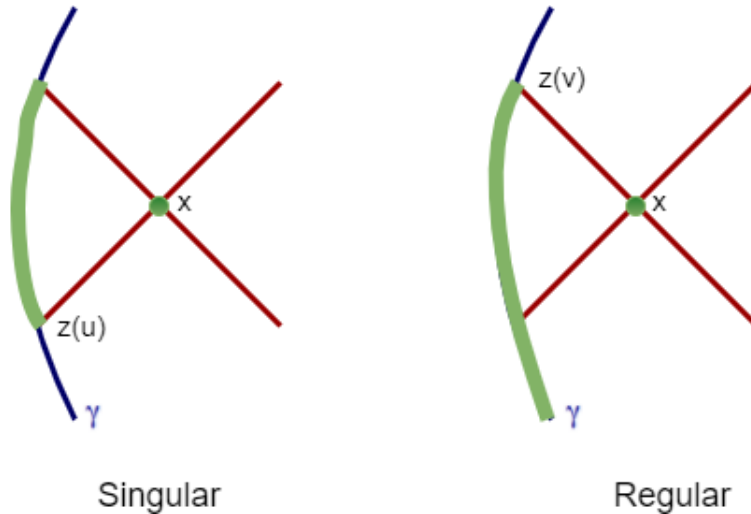


Figura 5 – A função de Green singular depende da historia da partícula durante o intervalo de tempo $u \leq \tau \leq v$; já a função de Green regular depende da historia da partícula durante $-\infty < \tau \leq v$, incluindo o passado cronológico de x .

Quando x estiver restrito a vizinhança convexa de x' , pela construção de Hadamard (2.13), temos

$$H^{\alpha}_{\beta'}(x, x') = V^{\alpha}_{\beta'}(x, x') \quad (2.58)$$

$$G^{\alpha}_{S\beta'}(x, x') = \frac{1}{2}U^{\alpha}_{\beta'}(x, x')\delta(\sigma) - \frac{1}{2}V^{\alpha}_{\beta'}(x, x')\theta(\sigma) \quad (2.59)$$

$$G^{\alpha}_{R\beta'}(x, x') = \frac{1}{2}U^{\alpha}_{\beta'}(x, x')[\delta_+(\sigma) - \delta_-(\sigma)] + V^{\alpha}_{\beta'}(x, x') \left[\theta_+(-\sigma) + \frac{1}{2}\theta(\sigma) \right] \quad (2.60)$$

em que usamos as equações (2.50), (2.54) e a simetria do bitensor $V^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ definida em (2.45).

2.2.7 Quadripotencial Retardado Próximo a Linha de Mundo

A solução retardada que satisfaz a equação de onda para o quadripotencial, (2.8), é $A^{\alpha}(x) = \int \sqrt{-g'}d^4x G^{\alpha}_{+\beta'}j^{\beta'}(x)$, onde j^{α} é dado pela equação (2.10), portanto

$$A^{\alpha}(x) = e \int_{\gamma} G^{\alpha}_{+\mu}(x, z)u^{\mu}d\tau. \quad (2.61)$$

Iremos assumir que a vizinhança convexa e normal, $N(x)$, de um ponto x próximo a linha de mundo atravessa γ , durante o intervalo de tempo próprio $\tau_{<}$ a $\tau_{>}$, veja a figura (6).

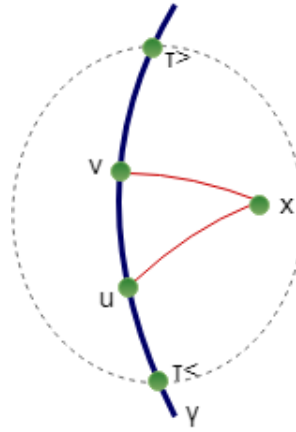


Figura 6 – A região delimitada pela linha tracejada representa a vizinhança convexa e normal do ponto x . A linha de mundo entra na vizinhança no tempo-próprio $\tau_{<}$ e a deixa no tempo-próprio $\tau_{>}$. Enquanto u e v representam o tempo-próprio dos pontos retardado e avançado em relação ao ponto x , respectivamente.

Com isto, a equação (2.61) pode ser expressa como

$$A^{\alpha}(x) = e \int_{-\infty}^{\tau_{<}} G^{\alpha}_{+\mu}(x, z)u^{\mu}d\tau + e \int_{\tau_{>}}^{\tau_{<}} G^{\alpha}_{+\mu}(x, z)u^{\mu}d\tau + e \int_{\tau_{>}}^{\infty} G^{\alpha}_{+\mu}(x, z)u^{\mu}d\tau, \quad (2.62)$$

o último termo é zero pois x está no passado de $z(t)$. A segunda integração pode ser expressa em termos da forma de Hadamard resultando em duas integrações. A primeira

pode ser resolvida se mudarmos a variável τ para σ , usando $d\tau = d\sigma/r$ e a segunda é cortada pela função delta no limite superior u . E, por fim, a equação (2.62) resulta em

$$A^\alpha(x) = \frac{e}{r} U_{\beta'}^\alpha(x, x') u^{\beta'} + e \int_{\tau <}^u V_{\mu}^\alpha(x, z) u^\mu d\tau + e \int_{-\infty}^{\tau <} G_{+\mu}^\alpha(x, z) u^\mu d\tau. \quad (2.63)$$

2.2.8 Campo Eletromagnético Projetado nas Coordenadas Retardada e Normais de Fermi

O gradiente do quadripotencial retardado, equação (2.63), é obtido levando em consideração que uma variação em x também gera uma variação em x' e resulta em

$$\begin{aligned} \nabla_\beta A_\alpha(x) &= -\frac{e}{r^2} U_{\alpha\beta'} u^{\beta'} \partial_\beta r + \frac{e}{r} U_{\alpha\beta';\beta} u^{\beta'} + \frac{e}{r} (U_{\alpha\beta';\gamma'} u^{\beta'} u^{\gamma'} + U_{\alpha\beta'} a^{\beta'}) \partial_\beta u + e V_{\alpha\beta'} u^{\beta'} \partial_\beta u + \\ &+ A_{\alpha\beta}^{Cauda}(x) \end{aligned} \quad (2.64)$$

sendo o último termo dependente do passado cronológico de x' , denominado termo de cauda,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{Cauda}(x) &\equiv e \int_{\tau <}^u \nabla_\beta V_{\alpha\mu}(x, z) u^\mu d\tau + e \int_{-\infty}^{\tau <} \nabla_\beta G_{+\alpha\mu}(x, z) u^\mu d\tau \\ &= e \int_{-\infty}^{u^-} \nabla_\beta G_{+\alpha\mu}(x, z) u^\mu d\tau. \end{aligned} \quad (2.65)$$

na última igualdade usamos (2.48) e (2.58) e cortamos a integração em $u^- \equiv u - 0^+$ para evitar o comportamento singular da função de Green retardada que ocorre em $\sigma = 0$, quando $\delta(\sigma) \neq 0$.

Desejamos expandir o tensor de força eletromagnético $F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha$ em potência de r , usando (2.64), e expressá-lo em termos da coordenada retardada (u, r, ω^a) , definida na seção (1.6.2). Projetando $F_{\alpha\beta}$ na base tetrada (e_0^α, e_a^α) que é obtida através do transporte paralelo de $(u^{\alpha'}, e_a^{\alpha'})$ sobre a geodésica nula que liga x ao seu ponto retardado $x' = z(u)$ ao longo da linha de mundo γ . Usando as equações para o propagador paralelo que aparece em (1.62), $\sigma^{\alpha'} = -r(u^{\alpha'} + \Omega^a e_a^{\alpha'})$ obtida em (1.66), os gradientes $\delta_\alpha u$ (1.73) e $\delta_\alpha r$ (1.75) e as expressões para os bitensores (2.37)-(2.39) e (2.41) que determinam a função de Green retardada unicamente, temos

$$\begin{aligned} F_{a0}(u, r, \Omega^a) &\equiv F_{\alpha\beta}(x) e_a^\alpha(x) e_0^\beta(x) = \frac{e}{r^2} \Omega_a - \frac{e}{r} (a_a - a_b \Omega^b \Omega_a) + \frac{1}{3} e R_{b0c0} \Omega^b \Omega^c \Omega_a + \\ &- \frac{1}{6} e (5R_{a0b0} \Omega^b + R_{ab0c} \Omega^b \Omega^c) + \frac{1}{12} e (5R_{00} + R_{bc} \Omega^b \Omega^c + R) \Omega_a + \frac{1}{3} e R_{a0} + \\ &- \frac{1}{6} e R_{ab} \Omega^b + F_{a0}^{Cauda} + O(r), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} F_{ab}(u, r, \Omega^a) &\equiv F_{\alpha\beta}(x) e_a^\alpha(x) e_b^\beta(x) = \frac{e}{r} (a_a \Omega_b - \Omega_a a_b) + \frac{1}{2} e (R_{a0bc} - R_{b0ac} + R_{a0c0} \Omega_b \\ &- \Omega_a R_{b0c0}) \Omega^c - \frac{1}{2} e (R_{a0} \Omega_b - \Omega_a R_{b0}) + F_{ab}^{Cauda} + O(r), \end{aligned} \quad (2.67)$$

em que

$$F_{a0}^{Cauda} = F_{\alpha'\beta'}^{Cauda}(x')e_a^{\alpha'}e_0^{\beta'} \quad F_{ab}^{Cauda} = F_{\alpha'\beta'}^{Cauda}(x')e_a^{\alpha'}e_b^{\beta'} \quad (2.68)$$

com

$$F_{\alpha'\beta'}^{Cauda}(x') = 2e \int_{-\infty}^{u^-} \nabla_{[\alpha'} G_{+\beta']\mu}(x', z) u^\mu d\tau, \quad (2.69)$$

é o termo de cauda que aparece no tensor de força eletromagnético, em que usamos a definição $A_{[a,b]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$. Como chamamos a atenção anteriormente, esse termo surge como consequência da definição de Hadamard para as funções de Green retardada e avançada no espaço-tempo curvo, em termo da distribuição $\theta_\pm(-\sigma)$ que acarreta na dependência do passado ou do futuro cronológico da partícula. Como aqui, estamos nos referindo ao quadripotencial retardado, que por sua vez depende da função de Green retardada, esse termo dependerá do passado cronológico da partícula, e, por esse motivo, é denominada termo de cauda.

Enfatizamos que todas as componentes são avaliadas no ponto retardado $x' = z(u)$ associado com x .

Com o intuito de expandir o tensor de força eletromagnético $F_{\alpha\beta}$ em potência de s nas coordenadas Normais de Fermi (t, s, ω^a) , definidas na seção (1.6.1), vamos projetar $F_{\alpha\beta}$ na base tetrada $(\bar{e}_0^\alpha, \bar{e}_a^\alpha)$ que é obtida através do transporte paralelo de $(u^{\bar{\alpha}}, e_a^{\bar{\alpha}})$ sobre a geodésica tipo-espaço que liga x ao seu ponto simultâneo $\bar{z} = z(t)$ ao longo da linha de mundo γ , usando as transformações entre as bases (1.85)-(1.86), e então transladar para as coordenadas Normais de Fermi usando (1.79), (1.80) e (1.82);

$$\begin{aligned} \bar{F}_{a0}(t, s, \omega^a) &\equiv F_{\alpha\beta}(x)\bar{e}_a^\alpha(x)\bar{e}_0^\beta(x) = \frac{1}{s^2}e\omega_a - \frac{1}{2s}e(a_a + a_b\omega^b\omega_a) + \frac{3}{4}ea_b\omega^b a_a + \frac{3}{8}e(a_b\omega^b)^2\omega_a \\ &+ \frac{3}{8}e\dot{a}_0\omega_a + \frac{2}{3}e\dot{a}_a - \frac{2}{3}eR_{a0b0}\omega^b - \frac{1}{6}eR_{b0c0}\omega^b\omega^c\omega_a + \frac{1}{12}e(5R_{00} + R_{bc}\omega^b\omega^c + R)\omega_a \\ &+ \frac{1}{3}eR_{a0} - \frac{1}{6}eR_{ab}\omega^b + \bar{F}_{a0}^{Cauda} + O(s), \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ab}(t, s, \omega^a) &\equiv F_{\alpha\beta}(x)\bar{e}_a^\alpha(x)\bar{e}_b^\beta(x) = \frac{1}{2}e(\omega_a\dot{a}_b - \dot{a}_a\omega_b) + \frac{1}{2}e(R_{a0bc} - R_{b0ac})\omega^c - \frac{1}{2}e(R_{a0}\omega_b \\ &- \omega_a R_{b0}) + \bar{F}_{ab}^{Cauda} + O(s), \end{aligned} \quad (2.71)$$

em que

$$\bar{F}_{a0}^{Cauda} = F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{Cauda}(\bar{x})e_a^{\bar{\alpha}}u^{\bar{\beta}} \quad \bar{F}_{ab}^{Cauda} = F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{Cauda}(\bar{x})e_a^{\bar{\alpha}}e_b^{\bar{\beta}} \quad (2.72)$$

com

$$F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{Cauda}(\bar{x}) = 2e \int_{-\infty}^{t^-} \nabla_{[\bar{\alpha}} G_{+\bar{\beta}]\mu}(\bar{x}, z) u^\mu d\tau, \quad (2.73)$$

sendo o termo de cauda.

Todas as componentes são avaliadas nos pontos Normais de Fermi $\bar{x} = z(t)$ associados com x .

A média dos campos \bar{F}_{a0} e \bar{F}_{ab} na superfície $S(t, s)$, constante em t e em s ; representa o valor médio do campo em uma distância própria fixa, como se estivesse sendo medido no sistema de referência que se move junto com a partícula. A superfície é caracterizada pelos ângulos θ^A com $(A=1,2)$, sendo descrita pelo parâmetro $\hat{x}^a = s\omega^a(\theta^A)$. Com a transformação $\omega_A^a \equiv \partial\omega^a/\partial\theta^A$ e usando a métrica (1.60) podemos obter a métrica induzida sobre $S(t, s)$

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = s^2 \left[\omega_{AB} - \frac{1}{3}s^2 R_{AB} + O(s^3) \right] d\theta^A d\theta^B \quad (2.74)$$

onde $\omega_{AB} \equiv \delta_{ab}\omega_A^a\omega_B^b$ e $R_{AB} \equiv R_{acbd}\omega_A^a\omega^c\omega_B^b\omega^d$. Com isso podemos inferir o elemento de superfície de área

$$dA = s^2 \left[1 - \frac{1}{6}s^2 R^c{}_{acb}(t)\omega^a\omega^b + O(s^3) \right] d\omega \quad (2.75)$$

cuja integral nos leva a

$$A = 4\pi s^2 \left[1 - \frac{1}{18}s^2 R^{ab}{}_{ab}(t) + O(s^3) \right]. \quad (2.76)$$

Finalmente podemos obter as médias

$$\langle \bar{F}_{a0} \rangle(t, s) = \frac{1}{A} \oint_{S(t,s)} \bar{F}_{a0}(t, s, \omega^a) dA = -\frac{2e}{3s} a_a + \frac{2}{3} e \dot{a}_a + \frac{1}{3} e R_{a0} + \bar{F}_{a0}^{Cauda} + O(s) \quad (2.77)$$

$$\langle \bar{F}_{ab} \rangle(t, s) = \frac{1}{A} \oint_{S(t,s)} \bar{F}_{ab}(t, s, \omega^a) dA = \bar{F}_{ab}^{Cauda} + O(s) \quad (2.78)$$

onde usamos

$$\frac{1}{4\pi} \oint \omega^a d\omega = 0, \quad \frac{1}{4\pi} \oint \omega^a \omega^b d\omega = \frac{1}{3} \delta^{ab}, \quad (2.79)$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint \omega^a \omega^b \omega^c d\omega = 0. \quad (2.80)$$

Tomando o limite de $s \rightarrow 0$ a tetrada $(\bar{e}_0^\alpha, \bar{e}_a^\alpha)$ se torna $(\bar{u}^\alpha, \bar{e}_a^\alpha)$, e podemos reconstruir o campo em \bar{x} a partir de suas componentes de referência;

$$\langle F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \rangle = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{4e}{3s} \right) u_{[\bar{\alpha}a\bar{\beta}]} + 2e u_{[\bar{\alpha}(g_{\bar{\beta}]\bar{\gamma}} + u_{\bar{\beta}]u_{\bar{\gamma}})} \left(\frac{2}{3} \dot{a}^{\bar{\gamma}} + \frac{1}{3} R^{\bar{\gamma}\delta} u^{\bar{\delta}} \right) + F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{Cauda} \quad (2.81)$$

com

$$F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{Cauda}(\bar{x}) = 2e \int_{-\infty}^{t^-} \nabla_{[\bar{\alpha}G_{+\bar{\beta}]\mu}(\bar{x}, z) u^\mu d\tau. \quad (2.82)$$

2.2.9 Campo Singular e Regular

A solução singular que satisfaz a equação de onda para o quadripotencial, (2.8), com a quadricorrente (2.10) é

$$A_S^\alpha(x) = e \int_\gamma G_{S\mu}^\alpha(x, z) u^\mu d\tau. \quad (2.83)$$

Similar ao caso do quadripotencial retardado, assumindo que a vizinhança convexa, $N(x)$, de um ponto x próximo a linha de mundo atravessa γ , durante o intervalo de tempo próprio $\tau_<$ a $\tau_>$, temos

$$A_S^\alpha(x) = e \int_{-\infty}^{\tau_<} G_{S_\mu}^\alpha(x, z) u^\mu d\tau + e \int_{\tau_<}^{\tau_>} G_{S_\mu}^\alpha(x, z) u^\mu d\tau + e \int_{\tau_>}^{\infty} G_{S_\mu}^\alpha(x, z) u^\mu d\tau, \quad (2.84)$$

A primeira e a terceira integrais são nulas pela propriedade (2.53) da função de Green Singular. Enquanto a segunda integral pode ser expressa na forma de Hadamard obtida em (2.59)

$$\begin{aligned} \int_{\tau_<}^{\tau_>} G_{S_\mu}^\alpha(x, z) u^\mu d\tau &= \frac{1}{2} \int_{\tau_<}^{\tau_>} U^\alpha{}_\mu(x, z) u^\mu \delta_+(\sigma) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau_<}^{\tau_>} U^\alpha{}_\mu(x, z) u^\mu \delta_-(\sigma) d\tau \\ &- \frac{1}{2} \int_{\tau_<}^{\tau_>} V^\alpha{}_\mu(x, z) u^\mu \theta(\sigma) d\tau. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Considerando $x' = z(u)$ e $x'' = z(v)$ os pontos retardado e avançado associados a x , respectivamente. Para resolvermos a primeira e a segunda integral realizamos a mudança de variável $\tau \rightarrow \sigma$, notando que $\sigma_\Sigma = \sigma(x, z(\tau_\Sigma)) > 0$ na primeira integração e $\sigma_\Sigma = \sigma(x, z(\tau_\Sigma)) < 0$ na segunda. A terceira integração é restrita ao intervalo $u \leq \tau \leq v$ pela função degrau,

$$A_S^\alpha(x) = \frac{e}{2r} U^\alpha{}_{\beta'} u^{\beta'} + \frac{e}{2r_{av}} U^\alpha{}_{\beta''} u^{\beta''} - \frac{1}{2} \int_u^v V^\alpha{}_{\beta'}(x, z) u^\mu d\tau \quad (2.86)$$

Procedendo de modo similar ao caso do quadripotencial retardado e usando as transformações da coordenada avançada para a retardada (1.89)-(1.92), podemos obter a projeção do tensor de força singular $F_{\alpha\beta}^S = \nabla_\alpha A_\beta^S - \nabla_\beta A_\alpha^S$ em potência de r na tetrada (e_0^α, e_a^α) ,

$$\begin{aligned} F_{a0}^S(u, r, \Omega^a) &\equiv F_{\alpha\beta}^S(x) e_a^\alpha(x) e_0^\beta(x) = \frac{e}{r^2} \Omega_a - \frac{e}{r} (a_a - a_b \Omega^b \Omega_a) - \frac{2}{3} e \dot{a}_a + \frac{1}{3} e R_{b0c0} \Omega^b \Omega^c \Omega_a \\ &- \frac{1}{6} e (5R_{a0b0} \Omega^b + R_{ab0c} \Omega^b \Omega^c) + \frac{1}{12} e (5R_{00} + R_{bc} \Omega^b \Omega^c + R) \Omega_a - \frac{e}{6} R_{ab} \Omega^b + O(r), \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} F_{ab}^S(u, r, \Omega^a) &\equiv F_{\alpha\beta}^S(x) e_a^\alpha(x) e_b^\beta(x) = \frac{e}{r} (a_a \Omega_b - \Omega_a a_b) + \frac{e}{2} (R_{a0bc} - R_{b0ac} + R_{a0c0} \Omega_b \\ &- \Omega_a R_{b0c0}) \Omega^c - \frac{e}{2} (R_{a0} \Omega_b - \Omega_a R_{b0}) + O(r), \end{aligned} \quad (2.88)$$

Agora estamos prontos para definir o tensor de força regular como a diferença entre o tensor de força retardado e o singular, $F_{\alpha\beta}^R = F_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta}^S$. Usando (2.66)-(2.67) e (2.87)-(2.88), temos

$$F_{a0}^R = \frac{2}{3} e \dot{a}_a + \frac{1}{3} e R_{a0} + F_{a0}^{Cauda} + O(r), \quad (2.89)$$

$$F_{ab}^R = F_{ab}^{Cauda} + O(r), \quad (2.90)$$

sendo regular sobre a linha de mundo.

Reconstruindo o campo em $x' = z(u)$ através das suas componentes de referência obtemos,

$$F_{\alpha'\beta'}^R(x') = 2e u_{[\alpha'}(g_{\beta']\gamma'} + u_{\beta']u_{\gamma'}) \left(\frac{2}{3}\dot{a}^{\gamma'} + \frac{1}{3}R^{\gamma'}_{\delta'}u^{\delta'} \right) + F_{\alpha'\beta'}^{Cauda} \quad (2.91)$$

com

$$F_{\alpha'\beta'}^{Cauda}(x') = 2e \int_{-\infty}^{u^-} \nabla_{[\alpha'} G_{+\beta']\mu}(x', z) u^\mu d\tau. \quad (2.92)$$

2.2.10 Equação de Movimento

Considerando o elétron uma esfera oca, com raio s_0 nas coordenadas normais de Fermi, independente da coordenada de ângulo ω^a , a força líquida que age no tempo próprio τ na partícula é proporcional à média de $F_{\alpha\beta}(\tau, s_0, \omega^a)$ sobre a superfície da esfera. Assumindo que o campo na esfera seja igual ao campo de um ponto avaliado em $s = s_0$, ignorando os termos que desaparecem quando $s_0 \rightarrow 0$, encontramos usando (2.81)

$$e \langle F_{\mu\nu} \rangle u^\nu = -(\delta m) a_\mu + e^2 (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \left(\frac{2}{3}\dot{a}^\nu + \frac{1}{3}R^\nu_{\delta}u^\delta \right) + e F_{\mu\nu}^{Cauda} u^\nu \quad (2.93)$$

em que $\delta m = \lim_{s \rightarrow 0} 2e^2/3s_0$ é uma quantidade divergente e

$$e F_{\mu\nu}^{Cauda} u^\nu = 2e^2 u^\nu \int_{-\infty}^{\tau^-} \nabla_{[\mu} G_{+\nu]\lambda'}(z(\tau), z(\tau')) u^{\lambda'} d\tau' \quad (2.94)$$

avaliados em um ponto arbitrário $z(\tau)$ sobre a linha de mundo.

Substituindo (2.93)-(2.94) em (2.9) obtemos a equação de movimento

$$(m + \delta m) a^\mu = e^2 (\delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu) \left(\frac{2}{3}\dot{a}^\nu + \frac{1}{3}R^\nu_{\delta}u^\delta \right) + 2e^2 u_\nu \int_{-\infty}^{\tau^-} \nabla^{[\mu} G_{+}^{\nu]\lambda'}(z(\tau), z(\tau')) u^{\lambda'} d\tau', \quad (2.95)$$

em que $m_{obs} \equiv m + \delta m$ com m sendo a massa livre da partícula, também divergente. Esta combinação de duas grandezas divergentes resulta em uma massa finita e observável, m_{obs} , procedimento conhecido como renormalização de massa.

Com exceção da parte divergente, a equação (2.91) para a força regular é igual a nossa equação de movimento (2.95)

$$e F_{\mu\nu}^R u^\nu = e^2 (\delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu) \left(\frac{2}{3}\dot{a}^\nu + \frac{1}{3}R^\nu_{\delta}u^\delta \right) + e F_{Cauda}^R u^\nu. \quad (2.96)$$

Portanto, a força agindo de volta na partícula pontual pode ser pensada como se estivesse se originando do campo regular, enquanto que o campo singular apenas influencia a inércia da partícula. E assim, a equação (2.95) se torna equivalente à

$$m_{obs} a_\mu = e F_{\mu\nu}^R u^\nu. \quad (2.97)$$

Note que para o espaço-tempo plano a equação de movimento (2.97) se reduz a equação de ALD,

$$a^\mu = \frac{q}{m} F^\mu_{\nu} u^\nu + \frac{2q^2}{3m} (g^\mu_{\nu} + u^\mu u_\nu) \dot{a}^\nu.$$

3 Correções de Vácuo em Teoria Quântica de Campos

O objetivo desse capítulo é mostrar uma outra situação em que a inclusão das correções radiativas resulta em equações de campo com derivadas superiores e também fazer uma introdução à técnica de núcleo de Schrödinger que é muito parecida com a técnica de núcleo de calor.

3.1 Ação Efetiva

A teoria quântica de um campo externo descreve efeitos de vácuo observáveis no meio clássico; um deles é a polarização do vácuo. Análogo a um dielétrico em um campo externo, a polarização dos pares virtuais de partícula-antipartícula (e^+e^-) leva a uma alteração no campo clássico. Deste modo, a polarização do vácuo pode ser descrita como uma correção clássica para o campo externo, e, conseqüentemente, para a ação clássica.

A ação modificada recebe o nome de ação efetiva W e é dada por

$$W = W_0 + W_1. \quad (3.1)$$

Sendo W_0 a ação clássica

$$W_0 = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de força eletromagnética. E W_1 a contribuição para a ação efetiva que incorpora os efeitos de polarização do vácuo, contudo, possui dois termos divergentes.

A seguir, mostraremos através da técnica desenvolvida por Schwinger-DeWitt que as divergências presentes na ação W_1 são determinadas pela função de Green, e essas divergências podem ser eliminadas pela redefinição do campo, da massa e da constante de acoplamento.

A fim de obter W_1 iremos considerar o espaço-tempo plano e assintoticamente estático, para então introduzir o espaço de Fock de estados construídos sobre os estados de vácuo $|0_{in}\rangle$ e $|0_{out}\rangle$. O elemento de matriz destes estados pode ser escrito em termos de W_1 como,

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = e^{iW_1}. \quad (3.3)$$

Introduzimos um espaço de Hilbert abstrato, H , com vetores de base, $|x\rangle$, que são autovetores do operador \hat{x}^i . As condições de completeza e ortonormalidade são;

$$\int d^4x \sqrt{-g} |x\rangle \langle x| = i1, \quad (3.4)$$

$$\langle x|x'\rangle = i(-g(x))^{-1/2} \delta(x - x'). \quad (3.5)$$

respectivamente, onde 1 é a matriz identidade.

Na interação com o campo eletromagnético, o propagador de Dirac satisfaz

$$(i \not{D} - m)S(x, x') = i(-g(x))^{-1/2} \delta(x - x'), \quad (3.6)$$

onde $\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)$ e as matrizes de Dirac γ^μ obedecem às relações de comutação e anticomutação;

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 4\sigma^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

respectivamente, com

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

sendo σ^0 é a matriz identidade e σ^i as matrizes de Pauli.

De acordo com DeWitt, o propagador de Dirac pode ser escrito em termos da função de Green como,

$$S(x, x') = (i \not{D} + m)G(x, x') \quad (3.10)$$

e a equação (3.6) se torna

$$(i \not{D} - m)(i \not{D} + m)G(x, x') = i(-g(x))^{-1/2} \delta(x - x'). \quad (3.11)$$

Usando as relações (3.7) e (3.8), a função de Green satisfaz a equação

$$(D^2 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2)G(x, x') = -i(-g(x))^{-1/2} \delta(x - x'). \quad (3.12)$$

Em termos do elemento de matriz na base $|x\rangle$ a função de Green pode ser escrita como

$$G(x, x') = \langle x|\hat{G}|x'\rangle.$$

A seguir introduzimos o operador \hat{F} recíproco a \hat{G} : $\hat{F}\hat{G} = 1$, com representação de coordenada no espaço de Hilbert dada por

$$F(x, x') = \langle x|\hat{F}|x'\rangle = iF(x)(-g(x))^{-1/2} \delta(x - x') \quad (3.13)$$

com $F(x) = -(D^2 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2)$.

Ao comparar a última equação com a (3.12) podemos escrever o operador \hat{G} na forma integral

$$\hat{G} = (\hat{F} - i0)^{-1} = i \int_0^\infty ds \exp(-i\hat{F}s) \quad (3.14)$$

e na representação de coordenada

$$G(x, x') = i \int_0^\infty ds \langle x(s) | x(0)' \rangle; \quad (3.15)$$

com

$$\langle x(s) | x(0)' \rangle = \langle x | \exp(-i\hat{F}s) | x' \rangle. \quad (3.16)$$

Assim o operador \hat{F} é um operador de evolução temporal no espaço de Hilbert no "tempo", s . Portanto, a função de onda $\langle x(s) | x(0)' \rangle$, ou amplitude de transição, satisfaz a equação de Schrodinger em 5-D:

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x(s) | x(0)' \rangle = (D^2 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2) \langle x(s) | x(0)' \rangle, \quad (3.17)$$

com $F(x)$ se comportando como a Hamiltoniana. A solução desta equação pode ser encontrada através do ansatz:

$$\langle x(s) | x(0)' \rangle = \frac{-i}{(4\pi s)^2} A(x, x', s) \exp \left[- \left(\frac{i\sigma(x, x')}{2s} + im^2 s \right) \right] \quad (3.18)$$

escrita em termos do bispinor $A(x, x', s)$, uma função regular do parâmetro s com expansão em série de potências

$$A(x, x', s) = \sum_{n=0} a_n(x, x') (is)^n \quad (3.19)$$

e condição de contorno

$$\lim_{x \rightarrow x'} a_0 = 1, \quad (3.20)$$

e do biescalar função mundo, $\sigma(x, x')$, definido na seção (1.2).

Quando o ansatz (3.18) é substituído na equação de Schrodinger em 5-D (3.17) obtemos a seguinte relação de recorrência

$$[(n+1) + \sigma^\mu D_\mu] a_{n+1} + (D^2 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) a_n = 0, \quad (3.21)$$

$$\sigma_\mu D^\mu a_0 = 0, \quad (3.22)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, onde foi utilizado a relação (1.13) e $\square\sigma = 4$ para o espaço-tempo plano.

Antes de continuar definiremos o bispinor de um deslocamento paralelo sobre uma geodésica, $I(x, x')$, satisfazendo

$$\sigma_\mu D^\mu I = 0, \quad \sigma_{\mu'} D^{\mu'} I = 0, \quad (3.23)$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} I(x, x') = \mathbf{1}. \quad (3.24)$$

No limite de $x' \rightarrow x$ podemos obter as derivadas covariantes do bispinor usando a relação de comutação $[D^\alpha, D^\beta] = ieF_{\alpha\beta}$ e os limites de coincidência para a função mundo (1.15-1.22), no espaço-tempo plano:

$$[D_\beta I] = 0 \quad (3.25)$$

$$[D_\alpha D_\beta I] = \frac{ie}{2} F_{\alpha\beta} 1 \quad (3.26)$$

$$[D_\gamma D_\alpha D_\beta I] = -\frac{ie}{3} (F_{\alpha\gamma, \beta} + F_{\alpha\beta, \gamma}) 1 \quad (3.27)$$

$$[D_\rho D_\gamma D_\alpha D_\beta I] = \frac{1}{4} \left[ie(F_{\rho\beta, \alpha\gamma} + F_{\gamma\beta, \alpha\rho} - F_{\beta\alpha, \rho\gamma}) + e^2(F_{\beta\alpha} F_{\rho\gamma} + F_{\beta\gamma} F_{\rho\alpha} + F_{\alpha\gamma} F_{\rho\beta}) \right] 1 \quad (3.28)$$

$$[D^\gamma D_\gamma D^\alpha D_\alpha D^\beta D_\beta I] = \left(-\frac{2}{3} e^2 F^{\beta\alpha}{}_{,\alpha} F_{\beta\gamma, \gamma} - 4e^2 F_{\beta\alpha} F^{\beta\gamma}{}_{,\gamma} - \frac{4}{3} e^2 F^{\beta\alpha}{}_{,\gamma} F_{\beta\alpha, \gamma} \right) 1. \quad (3.29)$$

Comparando o primeiro termo da relação de recorrência (3.22) e sua condição de contorno (3.20) com a definição do bispinor $I(x, x')$ em (3.23) e (3.24), obtemos

$$a_0(x, x') = I(x, x'). \quad (3.30)$$

O próximo termo a_1 se refere a $n = 0$ em (3.21),

$$(1 + \sigma^\mu D_\mu) a_1 + (D^2 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) I = 0 \quad (3.31)$$

onde usamos (3.30).

No limite de coincidência temos,

$$a_0(x, x) = 1, \quad (3.32)$$

$$a_1(x, x) = -ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

de acordo com (1.16), (3.24) e (3.26). Estes termos não contribuem para a dinâmica. Os traços dos próximos dois termos são

$$Tr[a_2(x, x)] = \frac{2}{3} e^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad Tr[a_3(x, x)] = \frac{4}{15} e^2 F^{\mu\nu}{}_{,\nu} F_{\mu\gamma, \gamma} \quad (3.34)$$

Os detalhes do cálculo de $Tr[a_2(x, x)]$ se encontram no apêndice A enquanto que o $Tr[a_3(x, x)]$ pode ser calculado de forma semelhante. Em seguida ficará claro por que desejamos obter o traço dos termos da relação de recorrência (3.21).

A amplitude de transição $\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle$ pode ser escrita na forma da integral funcional e da ação clássica S como

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \int D[\varphi] exp(iS), \quad (3.35)$$

onde, em sua forma quadrática,

$$S = \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \varphi(x) (D^2 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2) \varphi(x) \quad (3.36)$$

com o uso da equação (3.13), temos

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \varphi(x) F(x, y) \varphi(y). \quad (3.37)$$

Portanto, resolvendo a integral funcional em (3.35) obtemos,

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = [\det(i\hat{F}/2\pi M)]^{-1/2}. \quad (3.38)$$

De acordo com (3.3), a ação W_1 pode ser escrita como

$$W_1 = \frac{i}{2} \ln[\det(i\hat{F}/2\pi M)] = \frac{i}{2} Tr \ln[(i\hat{F}/2\pi M)], \quad (3.39)$$

onde $Tr\hat{F}$ é o traço do operador \hat{F} no espaço de Hilbert,

$$Tr\hat{F} = \lim_{x' \rightarrow x} \int d^4x \sqrt{-g} \langle x | \hat{F} | x' \rangle. \quad (3.40)$$

A variação da ação W_1 em relação a métrica é igual a

$$\delta W_1 = \frac{i}{2} Tr(\hat{F}^{-1} \delta \hat{F}) = \frac{i}{2} Tr \left\{ i \int_0^\infty ds \exp(-i\hat{F}s) \delta \hat{F} \right\}, \quad (3.41)$$

onde usamos (3.14). Em termos da variação total

$$\delta W_1 = -\frac{i}{2} \delta Tr \left\{ i \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-i\hat{F}s) \right\}. \quad (3.42)$$

Usando a representação do Traço (3.40)

$$W_1 = -\frac{i}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \int d^4x \sqrt{-g} \int_0^\infty ds s^{-1} \langle x(s) | x(0)' \rangle. \quad (3.43)$$

Com $\langle x(s) | x(0)' \rangle$ dado por (3.35) e com o uso dos termos (3.34) obtemos que o termo a_2 diverge e o termo a_3 contribui para a nossa ação efetiva como

$$W_1 = -\frac{e^2}{120\pi^2 m^2} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} F_{\mu\gamma}{}^{,\gamma}. \quad (3.44)$$

A ação efetiva truncada até segunda ordem na constante de acoplamento (3.1) se torna

$$W = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^2}{120\pi^2 m^2} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} F_{\mu\gamma}{}^{,\gamma}, \quad (3.45)$$

de ordem-4 em $A_\mu(x)$.

Essa ação também resulta em equações de campo de ordem 4.

4 Previsões Físicas da Equação de ALD

Como já tinha sido obtido em (DIRAC, 1938), equações com derivadas superiores podem apresentar soluções fugitivas, talvez ligadas à instabilidades do tipo (OSTROGRADSKY, 1850) e também problemas com causalidade.

Por outro lado, sabe-se muito bem que equações que possuem no máximo derivadas segundas não apresentam esses problemas. Exatamente ligado à tratamentos perturbativos da autoforça é que surge pela primeira vez (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) a ideia da técnica da redução de ordem de (PARKER; SIMON, 1993). Evidentemente por se tratar de perturbações sobre equações diferenciais os autores (PARKER; SIMON, 1993) aplicam a técnica da redução de ordem para equações de gravidade efetiva obtendo bons resultados.

A seguir descreveremos a solução exata para a aceleração própria constante encontrada por Dirac e a técnica da redução de ordem. Logo depois, testamos um método perturbativo semelhante ao proposto por (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) para os casos muito particulares do oscilador harmônico amortecido e do oscilador harmônico amortecido e forçado. Por último testamos o método para o caso particular da equação de ALD, sem a presença de campos gravitacionais, com força externa constante.

4.1 Solução de Dirac

Seguindo (DIRAC, 1938), primeiramente vamos verificar que observadores com aceleração própria constante, constituem soluções exatas para a equação de ALD.

A equação de Abraham-Lorentz-Dirac sem a presença de campos gravitacionais se torna

$$a^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \frac{2}{3} \frac{q^2}{mc^3} (g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) \dot{a}^\nu. \quad (4.1)$$

em que q e m são a carga e a massa da partícula e c a velocidade da luz.

Por outro lado temos as coordenadas de Rindler (ξ, τ)

$$x^\mu = (\xi \sinh \tau, \xi \cosh \tau, y, z), \quad (4.2)$$

onde τ é o tempo próprio e ξ o inverso do módulo da aceleração própria da partícula. As órbitas com $\xi = \text{const.}$ descrevem partículas com aceleração própria constante e constituem soluções exatas de (4.1), quando a força externa, $F_{\mu\nu}$, é constante, veja por exemplo (ROHRLICH, 2007) ou (DIRAC, 1938). Nesse caso o termo de autoforça se anula identicamente.

Através da métrica

$$ds^2 = -\xi^2 d\tau^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2, \quad (4.3)$$

podemos calcular as derivadas de uma partícula posicionada em $\xi = \text{const.}$ nas coordenadas de Rindler

$$u^\mu = (\cosh \tau, \sinh \tau, 0, 0), \quad (4.4)$$

$$a^\mu = \frac{1}{\xi} (\sinh \tau, \cosh \tau, 0, 0), \quad (4.5)$$

$$\dot{a}^\mu = \frac{1}{\xi^2} (\cosh \tau, \sinh \tau, 0, 0). \quad (4.6)$$

No caso específico em que a partícula é sujeita apenas a um campo elétrico na direção- x , o tensor do campo eletromagnético é escrito como

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Substituindo as equações (4.4)-(4.7) na equação de ALD, (4.1), obtemos

$$\frac{1}{\xi} (\sinh \tau, \cosh \tau, 0, 0) = \frac{q}{m} E (\sinh \tau, \cosh \tau, 0, 0), \quad (4.8)$$

onde o termo de autoforça se anula nas coordenadas de Rindler; com $u_\nu \dot{a}^\nu = -1/\xi^2$ temos

$$(g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) \dot{a}^\nu = \frac{1}{\xi^2} (\cosh \tau, \sinh \tau, 0, 0) - \frac{1}{\xi^2} (\cosh \tau, \sinh \tau, 0, 0) = 0. \quad (4.9)$$

Assim, a órbita com $\xi = mE/q = \text{const}$ é uma solução exata em que o termo de autoforça se anula identicamente. Isolando o campo elétrico, obtemos

$$E = \frac{m}{q\xi} \quad (4.10)$$

e, portanto,

$$\frac{q}{m} F^a{}_b = \frac{1}{\xi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

4.2 Método de Landau e Lifshitz

Ele aplica no limite em que a autoforça é muito menor que a força externa exercida sobre a carga pelo campo externo. Sendo assim o termo de autoforça é tratado perturbativamente. Nesta condição, de acordo com (LANDAU; LIFSHITZ, 1951), a equação de ALD não relativística é

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (4.12)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{H} são os campos externos e o último termo se refere à autoforça.

No sistema de referência em que a carga está momentaneamente em repouso procede-se com o método; negligenciando o termo de maior ordem e derivando o restante da equação em relação ao tempo, a segunda derivada da velocidade pode ser escrita como

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{H} + \frac{e}{mc} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{H}}. \quad (4.13)$$

Em seguida, substituindo a equação de movimento de ordem inferior, i.e., $\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}/m$, é obtido o termo de segunda derivada da velocidade em relação ao tempo que pode ser substituído no termo da autoforça, presente na equação (4.12), resultando em

$$\mathbf{f}_{auto} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \frac{2e^3}{3mc^4} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{H}}. \quad (4.14)$$

Advindo da condição imposta sobre a força externa ser muito maior que a autoforça $\mathbf{f}_{auto} \ll e\mathbf{E}$, considerando ω a frequência do movimento, temos que a derivada do campo elétrico $\dot{\mathbf{E}}$ é proporcional à $\omega\mathbf{E}$, portanto dos dois primeiros termos da autoforça (4.14) obtemos as condições:

$$\frac{e^2}{mc^3} \omega \ll 1, \quad \mathbf{H} \ll \frac{m^2c^4}{e^3}. \quad (4.15)$$

Introduzindo o comprimento de onda $\lambda \sim c/\omega$, temos para a primeira condição

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \quad (4.16)$$

Assim como os próprios autores (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) advertem, esse método perturbativo é aplicado apenas quando o comprimento de onda da radiação incidente é largo quando comparado com o "raio" da carga elétrica e^2/mc^2 , ou por outro lado, a frequência do movimento é pequena quando submetida a mesma comparação. Além disso, pela segunda condição, também é necessário que o campo magnético externo, \mathbf{H} , não seja muito grande. Com isso o terceiro termo na expressão para a autoforça é desprezado e essa resulta em

$$\mathbf{f}_{auto} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (4.17)$$

Podemos verificar o caso em que não há campo externo agindo sobre a carga, $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{H} = 0$, a equação de movimento é $m\dot{\mathbf{v}} = 0$, assim a primeira lei de Newton é satisfeita: na ausência de força externa a velocidade da partícula é constante, portanto, o movimento é uniforme.

4.3 Verificação do Método Perturbativo

4.3.1 Osciladores

Testamos um método perturbativo semelhante ao proposto por (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) para os casos muito particulares do oscilador harmônico amortecido e do oscilador

harmônico amortecido e forçado.

4.3.2 Oscilador Harmônico Amortecido

Consideramos a equação do oscilador harmônico amortecido (OHA),

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (4.18)$$

com $x = x(t)$, $\dot{x} = dx/dt$ e $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, γ a constante de amortecimento e ω a frequência natural do oscilador. A fim de tornar possível a aplicação de uma técnica perturbativa é preciso considerar o termo de ordem superior muito menor que os de ordens inferiores, no entanto, na equação apresentada em (4.18) para o OHA não podemos fazer essa comparação pois os termos x , \dot{x} e \ddot{x} possuem dimensão distintas. Para corrigir esse problema precisamos definir um parâmetro adimensional; $\tau \equiv \gamma t$, em que a constante de amortecimento γ possui dimensão de t^{-1} . Com isso, temos $x = x(t) = x(t(\tau))$ e as sucessivas derivadas $\dot{x} = \gamma x'$, $\ddot{x} = \gamma^2 x''$, em que definimos $x' = dx/d\tau$ e $x'' = d^2x/d\tau^2$. Como τ é um parâmetro adimensional podemos considerar o termo de ordem superior muito menor que os demais: $|x''| \ll |x'|$ e $|x''| \ll |x|$, pois agora todos possuem a mesma dimensão. A equação para o OHA (4.18) pode ser reescrita como

$$x'' + x' + \frac{\omega^2}{\gamma^2}x = 0. \quad (4.19)$$

Com as condições mencionadas é possível encontrar uma solução que converge para a solução exata do OHA superamortecido, $\gamma \gg \omega$, usando um método perturbativo semelhante ao proposto por (LANDAU; LIFSHITZ, 1951): o termo de ordem superior é negligenciado para a obtenção da solução de ordem inferior que é, por fim, substituída de volta na equação original, gerando a relação de recorrência

$$x'' + x'_{n+1} + \frac{\omega^2}{\gamma^2}x_{n+1} = 0. \quad (4.20)$$

Em primeira aproximação, para a equação diferencial de primeira ordem,

$$x'_1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}x_1 = 0, \quad (4.21)$$

supomos que a solução seja $x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$ com as sucessivas derivadas de primeira e segunda ordem $x'_1 = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau}$ e $x''_1 = c_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 \tau}$, respectivamente, assim temos

$$c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau} + \frac{\omega^2}{\gamma^2} c_1 e^{\lambda_1 \tau} = 0. \quad (4.22)$$

Cancelando o termo da exponencial e a constante, c_1 , da equação (4.22) e isolando λ_1 , obtemos

$$\lambda_1 = -\frac{\omega^2}{\gamma^2}. \quad (4.23)$$

Em segunda ordem, usando a relação de recorrência (4.20) temos

$$x_1'' + x_2' + \frac{\omega^2}{\gamma^2} x_2 = 0. \quad (4.24)$$

Usando o valor encontrado para a derivada de segunda ordem do termo anterior, com λ_1 dado por (4.23),

$$x_1'' = c_1 \frac{\omega^4}{\gamma^4} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right), \quad (4.25)$$

podemos supor a solução

$$x_2 = \left(c_2 - \frac{\omega^4}{\gamma^4} c_1 \tau\right) \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right). \quad (4.26)$$

Procedendo com o método para as demais ordens, obtemos

$$x_3 = \left[c_3 - \left(c_2 \frac{\omega^4}{\gamma^4} + 2c_1 \frac{\omega^6}{\gamma^6} \right) \tau + \left(c_1 \frac{\omega^8}{\gamma^8} \right) \frac{\tau^2}{2!} \right] \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right), \quad (4.27)$$

$$x_4 = \left[c_4 - \left(c_3 \frac{\omega^4}{\gamma^4} + 2c_2 \frac{\omega^6}{\gamma^6} + 5c_1 \frac{\omega^8}{\gamma^8} \right) \tau + \left(c_2 \frac{\omega^8}{\gamma^8} + 4c_1 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} \right) \frac{\tau^2}{2!} - \left(c_1 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} \right) \frac{\tau^3}{3!} \right] \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right), \quad (4.28)$$

$$x_5 = \left[c_5 - \left(c_4 \frac{\omega^4}{\gamma^4} + 2c_1 \frac{\omega^6}{\gamma^6} + 5c_2 \frac{\omega^8}{\gamma^8} + 14c_1 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} \right) \tau + \left(c_2 \frac{\omega^8}{\gamma^8} + 4c_2 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 14c_1 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} \right) \frac{\tau^2}{2!} - \left(c_2 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + \frac{\omega^{14}}{\gamma^{14}} \right) \frac{\tau^3}{3!} + \left(c_1 \frac{\omega^{16}}{\gamma^{16}} \right) \frac{\tau^4}{4!} \right] \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right) \quad (4.29)$$

$$x_6 = \left[c_6 - \left(c_5 \frac{\omega^4}{\gamma^4} + 2c_4 \frac{\omega^6}{\gamma^6} + 5c_1 \frac{\omega^8}{\gamma^8} + 14c_2 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 42c_1 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} \right) \tau + \left(c_4 \frac{\omega^8}{\gamma^8} + 4c_1 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 14c_2 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + 48c_1 \frac{\omega^{14}}{\gamma^{14}} \right) \frac{\tau^2}{2!} - \left(c_1 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + 6c_2 \frac{\omega^{14}}{\gamma^{14}} + 27c_1 \frac{\omega^{16}}{\gamma^{16}} \right) \frac{\tau^3}{3!} + \left(c_1 \frac{\omega^{16}}{\gamma^{16}} \right) \frac{\tau^4}{4!} \right] \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right) \quad (4.30)$$

Impondo que todas as constantes são iguais a c , $c \equiv c_1 = c_2 = \dots = c_n$ para $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$x_n = c \left[1 - \left(\frac{\omega^4}{\gamma^4} + \frac{2\omega^6}{\gamma^6} + \frac{5\omega^8}{\gamma^8} + 14 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 42 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + \dots \right) \tau + \left(\frac{\omega^8}{\gamma^8} + \frac{4\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 14 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + 48 \frac{\omega^{14}}{\gamma^{14}} + \dots \right) \frac{\tau^2}{2!} - \left(\frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + \frac{6\omega^{14}}{\gamma^{14}} + 27 \frac{\omega^{16}}{\gamma^{16}} + \dots \right) \frac{\tau^3}{3!} + \left(\frac{\omega^{16}}{\gamma^{16}} + \frac{8\omega^{18}}{\gamma^{18}} + \dots \right) \frac{\tau^4}{4!} + \left(\frac{\omega^{20}}{\gamma^{20}} + \dots \right) \frac{\tau^5}{5!} \right] \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right). \quad (4.31)$$

Na medida que o número de interações aumenta essa série é convergente,

$$x_n \approx c \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2} \tau\right) \exp\left[-\left(\frac{\omega^4}{\gamma^4} + \frac{2\omega^6}{\gamma^6} + \frac{5\omega^8}{\gamma^8} + 14 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 42 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + \dots\right) \tau\right] = c \exp\left[-\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{\omega^4}{\gamma^4} + \frac{2\omega^6}{\gamma^6} + \frac{5\omega^8}{\gamma^8} + 14 \frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 42 \frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + \dots\right) \tau\right] \equiv c e^{\lambda \tau} \quad (4.32)$$

em que

$$\lambda = - \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{\omega^4}{\gamma^4} + \frac{2\omega^6}{\gamma^6} + \frac{5\omega^8}{\gamma^8} + 14\frac{\omega^{10}}{\gamma^{10}} + 42\frac{\omega^{12}}{\gamma^{12}} + \dots \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{\gamma^2}} \quad (4.33)$$

corresponde a solução exata do oscilador harmônico superamortecido (4.19). A solução obtida é aquela que decai mais lentamente com o avanço de τ , a outra solução para o oscilador harmônico superamortecido depende de $e^{-\tau}$ e não se torna relevante para τ considerado grande.

4.3.3 Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado

Consideramos a equação do oscilador harmônico amortecido e forçado (OHAF),

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = f_0 \cos \Omega t, \quad (4.34)$$

com $x = x(t)$, $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, γ a constante de amortecimento, ω a frequência natural do oscilador e Ω a frequência exercida pela força externa sobre o oscilador. Procedendo de modo similar ao caso do OHA, reescrevemos a equação do oscilador a fim de podermos impor a condição necessária para a técnica perturbativa; o termo de ordem superior ser muito menor que os termos de ordens inferiores. Portanto, com a introdução do parâmetro adimensional $\tau \equiv \gamma t$ obtemos a equação equivalente para a equação do OHAF (4.34),

$$x'' + x' + \frac{\omega^2}{\gamma^2}x = \frac{f_0}{\gamma^2} \cos \frac{\Omega}{\gamma}\tau, \quad (4.35)$$

em que definimos $x' = dx/d\tau$ e $x'' = d^2x/d\tau^2$. Podemos impor as condições $|x''| \ll |x'|$ e $|x'| \ll |x|$, pois agora todos os termos a serem comparados possuem a mesma dimensão. Aplicamos um método perturbativo semelhante ao proposto por (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) e obtemos a relação de recorrência

$$x''_n + x'_{n+1} + \frac{\omega^2}{\gamma^2}x_{n+1} = \frac{f_0}{\gamma^2} \cos \frac{\Omega}{\gamma}\tau. \quad (4.36)$$

Em primeira aproximação, para a equação diferencial de primeira ordem,

$$x'_1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}x_1 = \frac{f_0}{\gamma^2} \cos \frac{\Omega}{\gamma}\tau, \quad (4.37)$$

supomos que a solução seja $x_1 = c_1 e^{i(\Omega/\gamma)\tau}$ e sua derivada $x'_1 = i\frac{\Omega}{\gamma}c_1 e^{i(\Omega/\gamma)\tau}$, logo temos

$$i\frac{\Omega}{\gamma}c_1 e^{i(\Omega/\gamma)\tau} + \frac{\omega^2}{\gamma^2}c_1 e^{i(\Omega/\gamma)\tau} = \frac{f_0}{\gamma^2} e^{i(\Omega/\gamma)\tau}. \quad (4.38)$$

Cancelando o termo da exponencial comum a ambos os lados e isolando c_1 , obtemos

$$c_1 = \frac{f_0}{\omega^2 + i\gamma\Omega}. \quad (4.39)$$

Em segunda ordem,

$$x_1'' + x_2' + \frac{\omega^2}{\gamma^2} x_2 = \frac{f_0}{\gamma^2} \cos \frac{\Omega}{\gamma} \tau, \quad (4.40)$$

supondo $x_2 = c_2 e^{i(\Omega/\gamma)\tau}$ e sua derivada $x_2' = i\frac{\Omega}{\gamma} c_2 e^{i(\Omega/\gamma)\tau}$, usando (4.39) para o termo anterior obtemos,

$$c_2 = \frac{f_0}{\omega^2 + i\gamma\Omega} + \frac{f_0\Omega^2}{(\omega^2 + i\gamma\Omega)^2}. \quad (4.41)$$

Procedendo com o método para as demais ordens, obtemos a solução geral

$$c_{n+1} = \frac{f_0 + \Omega^2 c_n}{\omega^2 + i\gamma\Omega}, \quad (4.42)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{f_0 e^{i(\Omega/\gamma)\tau}}{\omega^2 + i\gamma\Omega} \left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2 + i\gamma\Omega} + \frac{\Omega^4}{(\omega^2 + i\gamma\Omega)^2} + \frac{\Omega^6}{(\omega^2 + i\gamma\Omega)^3} + \dots \right] \\ &\approx \frac{f_0 e^{i(\Omega/\gamma)\tau}}{\omega^2 + i\gamma\Omega} \left[\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 + i\gamma\Omega}} \right] = \frac{f_0 e^{i(\Omega/\gamma)\tau}}{\omega^2 + i\gamma\Omega - \Omega^2} \end{aligned} \quad (4.43)$$

a solução exata particular não homogênea do OHAF. A solução homogênea foi desconsiderada tanto nas soluções perturbativas quanto na solução exata do OHAF por se tratar de uma solução transiente que decai com o passar do tempo já que contém a dependência de $e^{-\gamma}$ com $\gamma > 0$.

4.4 Equação de ALD

Por último testamos o método perturbativo de (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) para o caso particular da equação de ALD, sem a presença de campos gravitacionais, com força externa constante.

4.4.1 Força Externa Constante

No caso particular em que a partícula está sujeita apenas a um campo elétrico na direção x , o tensor do campo eletromagnética se torna

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

e $\dot{F}^\mu{}_\nu = 0$.

Em seguida, verificamos o método perturbativo para a equação de ALD sem a presença de campos gravitacionais, (4.1),

$$a^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \frac{2q^2}{3m} (g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) \dot{a}^\nu. \quad (4.45)$$

Em primeira ordem, desprezando o termo de ordem mais alta, temos

$$a_1^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu \quad (4.46)$$

cuja derivada,

$$\dot{a}_1^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \dot{u}^\nu = \frac{q^2}{m^2} F^\mu{}_\nu F^\nu{}_\gamma u^\gamma, \quad (4.47)$$

é utilizada para a obtenção do termo de segunda ordem:

$$\begin{aligned} a_2^\mu &= \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \frac{2q^2}{3m} (g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) \dot{a}_1^\nu \\ &= \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \frac{2q^4}{3m^3} (g^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) F^\nu{}_\gamma F^{\gamma\delta} u^\delta \\ &= \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \frac{2q^4}{3m^3} [E^2 u^\mu + E^2 u^\mu (u^\nu u_\nu)] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$a_2^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu \quad (4.48)$$

onde usamos a identidade $u^\nu u_\nu = -1$.

Com um cálculo similar o termo de terceira ordem se torna,

$$a_3^\mu = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (4.49)$$

e o mesmo se repete para todas as próximas ordens mostrando que no caso particular em que a força externa é constante o método perturbativo proposto por (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) funciona.

Conclusão

Correções radiativas geralmente resultam em teorias com derivadas superiores. Já é bem sabido que nesses casos surgem instabilidades e também problemas com causalidade, no caso do movimento de uma partícula. Por outro lado, teorias de ordem dois (com até segundas derivadas) já possuem o comportamento que todos nós queremos. Assim é que surgiu a técnica da redução de ordem (PARKER; SIMON, 1993), que é muito bem aceita. Nesse próprio artigo os autores advertem para a validade dessa técnica. Convém lembrar que a convergência de teorias perturbativas em mecânica clássica, ou quântica, é de longe um assunto trivial.

Nesse trabalho nos propomos a verificar de um modo mais cuidadoso quais as condições para a validade da técnica perturbativa da redução de ordem. Obtemos que o método perturbativo de (LANDAU; LIFSHITZ, 1951) aplicado para o caso muito particular do oscilador harmônico amortecido funciona para o caso em que há força externa. Entretanto, no caso em que a força externa é nula o método funciona apenas quando o oscilador harmônico é superamortecido, não há movimento periódico e a partícula tende muito lentamente à sua posição de equilíbrio. Na equação relativística de ALD verificamos que a técnica funciona no caso em que a força externa é constante. Nesse três casos acima, as sucessivas ordens perturbativas da técnica de redução de ordem convergem para o resultado analítico conhecido.

Por isso que os autores (PARKER; SIMON, 1993) aplicam esse formalismo perturbativo de redução, apenas na presença de fontes.

Já se sabe que em teorias gravitacionais no limite de campos fracos obtemos lagrangianas de campos de spin 0 e 2, que em ordem zero nas constantes de acoplamento são livres. Ondas planas são soluções das equações de movimento desses campos, de grande interesse na segunda quantização dessas teorias gravitacionais. Precisamente no caso de ondas planas o método de redução de ordem não funciona.

Referências

ABRAHAM, M. *Theorie der Elektrizität: Elektromagnetische Theorie der Strahlung*. [S.l.]: Teubner, 1905. v. 2. Citado na página 1.

DEWITT, B. *Dynamical Theory of Groups and Fields*. Gordon and Breach, 1965. (Documents on modern physics). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0vQyAAAAMAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 19.

DIRAC, P. A. Classical theory of radiating electrons. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, JSTOR, p. 148–169, 1938. Citado 3 vezes nas páginas 1, 18 e 39.

DRUMMOND, I. T.; HATHRELL, S. J. QED Vacuum Polarization in a Background Gravitational Field and Its Effect on the Velocity of Photons. *Phys. Rev.*, D22, p. 343, 1980. Citado na página 2.

EICHHORN, R.; LINZ, S. J.; HÄNGGI, P. Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows. *Physical Review E*, APS, v. 58, n. 6, p. 7151, 1998. Citado na página 3.

GRALLA, S. E.; HARTE, A. I.; WALD, R. M. Rigorous derivation of electromagnetic self-force. *Physical Review D*, APS, v. 80, n. 2, p. 024031, 2009. Citado na página 2.

GRIB, A. A.; MAMAYEV, S. G.; MOSTEPANENKO, V. M. *Vacuum quantum effects in strong fields*. St. Petersburg: Fridmann Lab., 1994. Disponível em: <<http://cds.cern.ch/record/330376>>. Citado na página 2.

GRIFFITHS, D. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999. ISBN 9780138053260. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=M8XvAAAAMAAJ>>. Citado na página 1.

JACKSON, J. *Classical Electrodynamics, 3rd Edition*. John Wiley & Sons, Limited, 1999. ISBN 9780471427643. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XFyDkgEACAAJ>>. Citado na página 1.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The classical theory of fields*. Pergamon, 1951. Citado 10 vezes nas páginas 2, 3, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46 e 47.

MAMAYEV, S.; MOSTEPANENKO, V.; EIDES, M. Effective action for a non-stationary electromagnetic field. *Sov. J. Nucl. Phys. (Engl. Transl.); (United States)*, v. 33:4, Apr 1981. Citado na página 2.

MONIZ, E. J.; SHARP, D. H. Radiation Reaction in Nonrelativistic Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, D15, p. 2850, 1977. Citado na página 2.

OSTROGRADSKY, M. V. Les Équations Différentielles Relatives au Problème des Isopérimètres. *Mem. Ac. St. Petersbourg*, VI (4), p. 385, 1850. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 39.

PARKER, L.; SIMON, J. Z. Einstein equation with quantum corrections reduced to second order. *Phys. Rev.*, D47, p. 1339–1355, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 2, 3, 39 e 47.

POISSON, E.; POUND, A.; VEGA, I. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 14, n. 1, p. 7, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 19.

ROHRLICH, F. *Classical charged particles*. [S.l.]: World Scientific Publishing Co Inc, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 39.

RYDER, L. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521478144. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=nnuW_kVJ500C>. Citado na página 2.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculo do termo

$$Tr[a_2(x, x)]$$

O comutador das matrizes de Dirac é

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.1})$$

com

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

sendo σ^0 é a matriz identidade e σ^i as matrizes de Pauli;

$$\sigma^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Usando a propriedade das matrizes de Pauli

$$\sigma^i \sigma^j = i\varepsilon_{ijk} \sigma^k, \quad (\text{A.4})$$

pode-se obter

$$\sigma^{ij} = \frac{-i\varepsilon_{ijk}}{2} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

E, portanto,

$$\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \begin{pmatrix} i\vec{\sigma} \cdot \vec{B} & \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{E} & i\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

e seu quadrado,

$$(\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 = \begin{pmatrix} E^2 - B^2 & 0 & 2\vec{E} \cdot \vec{B} & 0 \\ 0 & E^2 - B^2 & 0 & 2\vec{E} \cdot \vec{B} \\ 2\vec{E} \cdot \vec{B} & 0 & E^2 - B^2 & 0 \\ 0 & 2\vec{E} \cdot \vec{B} & 0 & E^2 - B^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde usamos a identidade $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$, cujo traço é dado por

$$Tr[(\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2] = 4(E^2 - B^2) = -2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Pela relação de recorrência (3.21)

$$[(n + 1) + \sigma^\mu D_\mu]a_{n+1} + (D^2 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})a_n = 0, \quad (\text{A.9})$$

temos

$$a_2(x, x') = -\frac{1}{2}(-\sigma^\mu D_\mu a_2 + D^2 a_1 + ie\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} a_1). \quad (\text{A.10})$$

De acordo com a equação (1.15) o primeiro termo do lado direito é zero quando x tende a x' . Enquanto o segundo termo pode ser facilmente calculado através da relação de recorrência para o termo a_1 , resultando em

$$D^2 a_1(x, x) = -\frac{1}{3}D^2(D^2 I + ieF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} I) \quad (\text{A.11})$$

onde o limite de x tendendo a x' e tomado por último e as equações (1.15-1.22) são usadas.

Substituindo (A.11) na equação (A.10) e usando (3.26) e (3.28) obtemos,

$$a_2(x, x) = -e^2 \frac{1}{12} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} I - e^2 \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu})^2 I \quad (\text{A.12})$$

onde os termos cujo traço é nulo foram já negligenciados. E finalmente, o traço se torna

$$Tr[a_2(x, x)] = \frac{2}{3} e^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

CQD.

O próximo termo na expansão, pode ser calculado de forma semelhante.