

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**O Ensino e a Aprendizagem de Cálculo 1 na
Universidade: Entender e Intervir**

por

Antonio Dantas Costa Neto

Brasília

2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Ensino e a Aprendizagem de Cálculo 1 na Universidade: Entender e Intervir

por


Antonio Dantas Costa Neto *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado "Profissional em Matemática" em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção de grau de

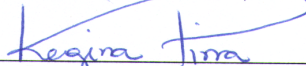
MESTRE

Brasília, 14 de julho de 2017

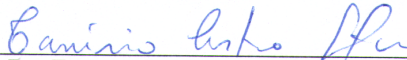
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Ricardo Ruviano - MAT/UnB - Orientador



Profa. Dra. Regina da Silva Pina Neves - MAT/UnB - Examinadora



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva - MAT/UnB - Examinador

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

De Dantas Costa Neto, Antonio
O Ensino e a Aprendizagem de Cálculo 1 na Universidade:
Entender e Intervir / Antonio Dantas Costa Neto;
orientador Ricardo Ruviaro. -- Brasília, 2017.
131 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Uma Sinopse Estatística da Disciplina de Cálculo 1. 2.
A Realidade do Ensino de Matemática no País Segundo
Avaliações em Larga Escala e seus Efeitos. 3. Análise das
Provas de Cálculo na Perspectiva da TRI e TCT. 4.
Filosofias do Ensino da Matemática e Aspectos Históricos das
Ferramentas do Cálculo. I. Ruviaro, Ricardo, orient. II.
Título.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ser a minha fortaleza e a razão de eu estar aqui, me dando a oportunidade de poder estudar e buscar soluções para as dificuldades dos alunos. Aos meus pais, Antônio Dantas Costa Junior e Ana Bernadete, por terem me apoiado em toda a minha trajetória acadêmica, por me incentivarem a seguir esse caminho, e também a toda a minha família. Agradeço aos docentes do PROFMAT, Ary Medina, Hélder Matos, Lineu Araújo Neto, Nilton Barroso, Igor Lima, Mauro Rabelo, Vinícius Ríspoli e Antônio Melo, por, mesmo diante das dificuldades resultantes da grave crise financeira pela qual o país atravessa, terem se proposto a ministrar as aulas para que pudéssemos ter a formação no Mestrado do PROFMAT, e, especialmente, ao professor Rui Seimetz, por batalhar para que o PROFMAT tenha continuidade na UNB. Agradeço ao meu orientador, Ricardo Ruviano, por todo o apoio dado neste trabalho e por ter disposto muito do seu tempo, inclusive finais de semana, para me dar todo o suporte no manuseio do Látex e em todo o trabalho. Sou grato à professora Regina e ao professor Tarcísio, por aceitarem fazer parte da banca; ao professor José Antônio, o qual forneceu dados importantes que me possibilitaram fazer as análises necessárias para sugerir soluções para os problemas aqui mencionados; e também ao Registro Acadêmico da UNB, especialmente ao Bacelar e sua equipe, por fornecerem dados importantes a este estudo. Aos meus colegas de PROFMAT e aos colegas do Instituto Federal Josimar, pelo apoio dado no manuseio do Látex, e ao professor Antônio Márcio, pelas conversas, pela sugestão de várias referências bibliográficas utilizadas neste trabalho. Agradeço também à CAPES, pelo aporte financeiro durante esse período de pesquisa.

Resumo

O índice de reprovação na disciplina de Cálculo 1 em todos os cursos do Campus Brasília, da Universidade de Brasília (UnB), nos períodos letivos entre 2010 – 1 e 2016 – 1, sempre foi maior que 50%, salvo nos períodos letivos de 2010-1, 2012-1, 2013-1 e 2015-1. Dados do Sistema de Avaliação Básica (SAEB) sugerem que existem alunos que finalizam o Ensino Médio com deficiências em Ferramentas de Matemática Elementar que terão importância no desenvolvimento da disciplina de Cálculo 1. Além disso, há, entre os professores de Matemática e, em particular, os da UNB, excessiva preocupação com o ensino de uma Matemática formalizada e evitada de rigor, sem anteriormente fazer-se uma motivação através da qual o aluno possa tacitamente contextualizar a disciplina. Este trabalho possui, portanto, dois objetivos:

- 1- Sugerir a implementação de uma disciplina de Pré-Cálculo no Departamento de Matemática da Universidade;
- 2- Fazer com que, assim como na história das Ferramentas do Cálculo, os professores, por meio, por exemplo, de aplicativos como Excel e Calc, trabalhem aspectos mais intuitivos das ferramentas do Cálculo para depois inserir aquele conceito de maneira formalizada.

Para fazer este trabalho, inicialmente coletamos os dados da disciplina de Cálculo 1 na Universidade, nos três Campi, e comparamos a realidade destes. Depois, coletamos dados de Exames de larga escala pelo país, especialmente aqueles que servem como instrumento de seleção para o ingresso na Universidade, além do SAEB. Depois, correlacionamos e fizemos um estudo de regressão linear para que se possa inferir ou refutar uma relação entre o quantitativo de alunos que ingressam no curso de Matemática na UNB, por meio de determinada forma de ingresso, com o índice de Reprovação em Cálculo 1 no curso de Matemática. Os resultados apontam correlação positiva e moderadamente forte entre índice de reprovação e a quantidade de ingressos via PAS e ENEM e negativa em relação ao Vestibular. Isso não significa que o Pré-Vestibular tenha o método de ensino mais adequado para preparar alunos para a Universidade, uma vez que houve semestres em que as turmas de Matemática só tiveram ingressantes por meio do Vestibular. Dessa forma, não podemos descartar a hipótese de que é alta a probabilidade de que os alunos que entram por meio dos outros dois exames não estejam acompanhando o desenvolvimento da disciplina.

Por fim, analisamos por meio de duas teorias psicométricas, a Teoria Clássica dos Testes (TCT) e a Teoria da Resposta ao Item (TRI), as questões que foram cobradas em provas anteriores de Cálculo 1. Por meio dos parâmetros dessas duas teorias, podemos corroborar que:

- 1- Alunos ingressam na Universidade no curso de Matemática sem o conhecimento necessário para desenvolver a disciplina;
- 2- Existem questões de prova que não cumprem o seu papel pedagógico, seja por terem um alto índice de acerto ao acaso ou por serem extremamente fáceis ou difíceis;
- 3- Alguns itens refutam a expectativa do docente quanto ao aprendizado do aluno, isto é, o professor considera o item mediano quanto à sua dificuldade e os testes apontam que o item é difícil ou muito difícil.

Além disso, a análise via TCT permite também apontar que, em diversos itens que exigem conhecimento de Matemática Elementar, menos da metade da turma os acerta. Isso corrobora a hipótese apontada na análise dos resultados dos Exames de Larga Escala, que indica a falta de pré-requisito em Matemática Básica e Elementar dentre alunos que ingressam na Universidade, em particular no Curso de Matemática e outros cursos de exatas.

Palavras-Chaves: Matemática; Cálculo 1; Reprovações; História do Cálculo; Pré-Cálculo; Realidade do Ensino da Matemática; Avaliações.

Abstract

The failure rate in Calculus 1 in all courses of the Brasilia Campus, of the University of Brasilia (UNB), in the academic periods between 2010-1 and 2016-1, was always greater than 50%, except in the academic periods of 2010-1, 2012-1, 2013-1, and 2015-1. Data from the Basic Evaluation System (SAEB) suggest that there are students who finish secondary school with deficiencies in Elementary Mathematics Tools that will have importance in the development of the discipline of Calculus 1. Moreover, there is an excessive preoccupation among teachers of Mathematics and, in particular, those of the UNB, with the teaching of a formalized and rigorous Mathematics, without previously thinking of some motivation through which the student can tacitly contextualize the discipline. This work therefore has two objectives:

- 1- Suggest the implementation of a Pre-Calculus discipline in the Mathematics Department of the University;
- 2 - Make teachers, as in the history of Calculus Tools, through, for example, applications such as Excel and Calc, work on more intuitive aspects of Calculus tools and then insert that concept formally.

To do this work, we initially collected data from the discipline of Calculus 1 in the University, in the three Campi, and compared their reality. We then collected data from large-scale examinations throughout the country, especially those that serve as a selection tool for admission to the University, in addition to SAEB. Then, we correlated and performed a linear regression study to infer or refute a relationship between the number of students entering the course of Mathematics in the UNB, through a certain form of entry, with the Failure rate in Calculus 1 in the math course. The results indicate a positive and moderately strong correlation between the failure rate and the amount of PAS and ENEM admissions and negative in relation to the Vestibular. This does not mean that the Pre-Vestibular has the most appropriate method of teaching to prepare students for the University, since there were semesters in which the Mathematics classes only had entrants through the Vestibular. Thus, we can not discard the hypothesis that the probability that the students entering through the other two exams are not accompanying the development of the discipline is high.

Finally, we analyze through two psychometric theories, the Classical Test Theory (CTT) and the Item

Response Theory (IRT), the questions that were collected in previous tests of Calculus 1. Through the parameters of these two theories, we can corroborate that:

- 1- Students enter the University in the course of Mathematics without the necessary knowledge to develop the discipline;
- 2- There are test questions that do not fulfill their pedagogical role, either because they have a high degree of random correct answers or because they are extremely easy or difficult;
- 3- Some items refute the teacher's expectation over the student's learning, that is, the teacher considers the item as medium and the tests indicate that the item is difficult or very difficult.

In addition, the CTT analysis also allows us to point out that, in several items requiring knowledge of Elementary Mathematics, less than half of the class get them right. This corroborates the hypothesis pointed out in the analysis of the results of the Large Scale Examinations, which indicate the lack of prerequisite in Basic and Elementary Mathematics among students who enter the University, in particular in the Mathematics Course and other exact courses.

Key-Words: Mathematics; Calculus 1; Disapprovals, Pre Calculus, Reality of Mathematics Teaching, Assessments.

Sumário

Introdução	3
1 Uma Sinopse Estatística da Disciplina de Cálculo 1	8
1.1 Índices de Reprovações	8
1.2 Entrevista com os Alunos	12
2 A Realidade do Ensino de Matemática no País Segundo Avaliações em Larga Escala e seus Efeitos	25
2.1 SAEB	26
2.1.1 Os resultados de Matemática segundo o SAEB	26
2.2 ENEM	30
2.2.1 Os resultados nacionais de Matemática segundo o ENEM	35
2.2.2 O impacto do ENEM na disciplina de Cálculo na Universidade	39
2.3 O impacto do PAS na disciplina de Cálculo 1 na Universidade	44
2.4 O impacto do Vestibular na disciplina de Cálculo 1 na Universidade	48
2.5 A perspectiva do ensino de Matemática Básica na visão de professores e alunos e a necessidade do Pré-Cálculo	53
2.5.1 A necessidade do Pré-Cálculo	54
2.6 Conclusão	55
3 Análise das Provas de Cálculo na Perspectiva da TRI e TCT	56
3.1 A Teoria Clássica dos Testes (TCT)	57
3.1.1 Os Parâmetros e sua respectiva estimação na Teoria Clássica dos Testes	57
3.2 A Teoria da Resposta ao Item (TRI)	60
3.2.1 O modelo logístico de três parâmetros	61
3.2.2 Os Parâmetros na Teoria da Resposta ao Item	61
3.3 Análise psicométrica de itens de prova	64

3.3.1	Ensino Médio	66
3.3.2	Limites e Continuidade	71
3.3.3	Derivada e suas aplicações	77
3.3.4	Integrais	82
4	Filosofias do Ensino da Matemática e Aspectos Históricos das Ferramentas do Cálculo	88
4.1	A Matemática Científica e a Matemática Escolar	89
4.2	O rigor matemático e algumas dificuldades no Cálculo 1	89
4.3	Linhas Filosóficas do Ensino da Matemática	90
4.3.1	Logicismo	91
4.3.2	Intuicionismo	93
4.3.3	Formalismo	95
4.4	Números reais	99
4.5	Funções	105
4.6	Limites	109
4.7	Continuidade	113
4.8	Derivada, taxa de Variação e algumas consequências	116
4.9	Integração e Alguns Métodos	120
4.9.1	O Método da Exaustão	120
5	Conclusão	127
	Bibliografia	129

Definições e Notações

- Conceito Primitivo: são conceitos sem uma definição formal. São tomados como ponto de partida para se definir entes matemáticos mais complexos;
- Postulados: São Conceitos Matemáticos Complexos os quais são tidos como aceitáveis sem terem uma demonstração formal;
- Conjectura: É uma Tese Matemática a ser demonstrada por meio de um procedimento lógico e rigoroso;
- Teorema: É um resultado Matemático aceito como verdade após passar por um processo lógico e rigoroso de demonstração, com base em postulados e conceitos primitivos;
- Ferramentas de Matemática: Conceitos inerentes à Matemática Elementar cuja deficiência pode comprometer a compreensão da disciplina de Cálculo 1, tais como: Funções Periódicas, Exponenciais e Logaritmos; Polinômios, Módulos, e outros;
- Funções Periódicas: são funções cujo valores numéricos sempre se repetem após um dado período;
- Exponenciais: expressões algébricas que podem ser descritas com expoente variável;
- Logaritmos: método de cálculo de um expoente;
- Polinômios: Série de potências de x tal que a menor potência de x é zero;
- Módulo: distância de uma coordenada (a, b) cartesiana até o ponto $(0, 0)$;
- Ferramentas do Cálculo 1: Funções e Números Reais; Limites e Continuidades; Derivadas e suas aplicações; Integrais;
- Matemática Elementar: Matemática ensinada no Ensino Médio;
- Filosofias do Ensino da Matemática: Linhas de Pensamento do Ensino da Matemática;
- $m.d.c(a, b)$: Máximo Divisor Comum entre os números a e b , onde $a, b \in \mathbb{N}$;
- \mathbb{N} : Conjunto dos Números Naturais;
- \mathbb{Z} : Conjunto dos Números Inteiros;
- \mathbb{Q} : Conjunto dos Números Racionais;

- \mathbb{R} : Conjunto dos Números Reais;
- Tangente: lugar geométrico que intercepta outro lugar geométrico em um, e apenas um, ponto;
- *ILR*: Taxa de reprovação em um semestre observado descontada a quantidade de discentes que trancou a disciplina;
- χ : Teste do qui quadrado, que testa a dependência entre variáveis qualitativas;
- Matriz de Referência: é o conjunto de competências que se deseja aferir do aluno, organizadas por objetos de conhecimento e subdivididas em habilidades;
- Competências: Define de maneira latu-sensu os objetos de avaliação em uma avaliação;
- Habilidades; Especifica o objeto de avaliação, subdividindo as competências;
- Correlação: Interdependência entre duas ou mais variáveis;
- Regressão: Técnica de comparação entre valores esperados e observados de uma dada variável aleatória;
- Psicometria: Estudo de métodos quantitativos em Psicologia;
- Módulo: Distância de um ponto na reta à sua origem;
- \int : Integral indefinida;
- Disciplina Piloto: Trata-se de uma disciplina teste ofertada em caráter optativo.

Introdução

A disciplina de Cálculo 1 é vista como a disciplina base para o aluno que fará o curso de Matemática. Em tese, ela fornece os elementos necessários para a compreensão do comportamento das funções de uma variável independente. Segundo Barufi (1999), em [3]:

Os diferentes cursos de Cálculo I ministrados na universidade pretendem levar os alunos a estudar, com maior ou menor profundidade, de acordo com a sua área de concentração, o que seja uma função de uma variável real. A construção deste conceito pretende ser sólida, chegando normalmente à visualização dos gráficos, e consequente análise do comportamento das funções em seu domínio.

Ministrada no 1º semestre nos Cursos de Matemática, Física, Economia, Ciências Biológicas, Ciências Econômicas e Agrárias, a disciplina de Cálculo I fornece as ferramentas necessárias à compreensão de matérias subsequentes nos referidos cursos, como Cálculo 2, Cálculo 3, Equações Diferenciais Ordinárias e Variáveis Complexas e outras disciplinas. Tal curso necessita ser bem ministrado e compreendido, pois, além de ser pré-requisito para praticamente todas as disciplinas da graduação em Matemática segundo o e mentário da Universidade de Brasília, ele também aprofunda os significados da Matemática elementar, reconhecidamente de difícil compreensão na Educação Básica, haja vista que o curso de Matemática na Universidade se propõe a formar professores de Matemática da Educação Básica. Dessa forma, as pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo são de grande interesse à Universidade, a fim de se compreender os índices de reprovação na disciplina e consequente evasão, pois segundo dados do Registro Acadêmico, desde 2010, no Campus Brasília, exceto no período acadêmico de 2012 – 1, o índice de reprovação sempre se manteve em patamares acima de 40%, conforme veremos a seguir. Além disso, ainda que indiretamente, essa pesquisa pode auxiliar a diagnosticar os motivos da defasagem dos alunos em Matemática na Educação Básica, e propor à disciplina de Cálculo 1 uma abordagem voltada à formação de professores para a Educação Básica.

Um dos fatores que certamente influencia na disciplina de Cálculo é a aptidão do aluno em Matemática. Na entrevista realizada, a ser discutida no Capítulo 3, os alunos responderam gostar de Matemática mas muitos deles, conforme veremos, apresentaram desempenho abaixo do esperado em ferramentas de Matemática que deveriam ter aprendido com êxito durante a sua trajetória na Educação Básica. Além disso, muitos dos estudantes que obtiveram desempenho satisfatório no teste apresentavam fórmulas prontas para resolver um exercício, em detrimento do conhecimento aritmético envolvido e, portanto, valendo-se de um raciocínio muito mais complexo do que aquele de fato demandado na questão. Na Universidade, não existe uma formação pedagógica do professor, sendo o título de doutor o único requisito

para ingressar como professor do Departamento, o que não necessariamente significa que o objetivo da disciplina seja cumprido com êxito. Barufi (1999), em [3], ao definir o conhecimento matemático, define dois pilares na construção desse conhecimento:

O matemático profissional, a priori não precisa ser um excelente professor de Matemática, como também este último não necessariamente é um matemático profissional competente de sucesso. São pessoas diferentes cujos trabalhos também são diferentes; desempenham papéis distintos, porque não possuem os mesmos objetivos. Nesse sentido, os dois profissionais não podem ser confundidos, embora, evidentemente, possam existir pessoas que têm competência para o desempenho de ambas as funções.

Ainda segundo Barufi, a responsabilidade do matemático profissional é a construção do conhecimento matemático por si só, descontextualizado, e a do professor de Matemática é a construção do conhecimento por parte desse aluno. Isto é, o matemático profissional realiza pesquisas num campo restrito, profundo, descobre novos resultados e os organiza de maneira geral, profunda e fora de contexto, estabelecendo uma comunicação com uma comunidade limitada, onde os resultados que encontrou são restritos como conhecimento matemático. O conhecimento construído pelo matemático profissional provém de situações com as quais ele trabalha, tem sua marca pessoal e lhe é própria e particular. Quando esse conhecimento é reconhecido pela comunidade científica, precisa ser despersonalizado, perdendo assim as características do autor, sendo descontextualizado e deixando de ter os traços do contexto em que foi construído. Esse conhecimento até então é discutido entre poucas pessoas, numa linguagem técnica e exclusiva. Por outro lado, o papel do professor de Matemática é de reconstruir esse conhecimento, de forma contextualizada e personalizada, isto é, encontrar situações motivadoras e significativas por meio de problemas interessantes para o aluno, objetivando que eles estabeleçam significados para o conhecimento desejado. Um exemplo disso seria a definição de limites, em que o professor pode introduzir, num contexto específico de um curso de Licenciatura em Matemática, onde supõe-se que os alunos desejam ser professores de Matemática no futuro, propor e aplicar um conceito matemático considerado de difícil compreensão no Ensino Médio, e utilizá-lo como fator motivacional para se definir limites de funções. Quando a fase de personalização e contextualização tem sucesso, cabe ao professor auxiliar os alunos, uma vez que não sabem que produzem conhecimento que poderá ser utilizado em novas situações. Faz-se então necessária uma nova fase de descontextualização e despersonalização, que deve ser realizada com a ajuda do professor. O conhecimento deve ser, portanto, contextualizado e depois descontextualizado. Nas palavras de Machado (2005), em [30]:

Ainda que não se possa diminuir a importância da universidade na formação profissional e na geração de tecnologias, é na construção coletiva de uma arquitetura de valores em sentido amplo que a função da universidade se torna ampla e insubstituível. A associação da reflexão acadêmica a uma espécie de “inteligência nacional”, matriz de onde derivará a diversidade de projetos coletivos que constitui a vida e a autonomia do país, não pode ser compreendida sem uma germinação direta que sustentará tais projetos. Uma inteligência, mesmo que possa ser caracterizada como científica, não pode carecer de uma arquitetura de valores, cultivados tacitamente na prática acadêmica.

Não se pode, obviamente, diminuir a importância da formação acadêmica do professor. Para se ensinar algo a alguém, é necessário um conhecimento além do que se espera do aluno. No entanto, cabe ao professor despersonalizar o seu conhecimento da disciplina, uma vez que verificamos que o conhecimento

reproduzido em sala de aula na Universidade, muitas vezes, é aquele pronto e acabado, onde define-se um conceito inerente ao Cálculo 1 e o destrincha em Teoremas, Proposições e Axiomas de forma exaustiva, impedindo que os alunos reflitam sobre aquele conteúdo e tentem associar a um outro conhecimento já adquirido ao longo de sua vida escolar ou social. Inferimos, então, que falta, no universo acadêmico, a cultura de personalizar esse conhecimento de modo que possa ser generalizado depois para os discentes e pelos discentes, isto é, de forma que os alunos tenham autonomia para generalizarem esse conhecimento, despersonalizarem e novamente criarem uma nova matriz de inteligência, conforme define Machado (2005), em [30]

O trabalho do professor de Cálculo, que é uma parte integrante no processo de formação do professor de Matemática, é também o de um pesquisador, que realiza um trabalho de investigação, reflexão e ação. Barufi (1999), em [3], define esse processo em dois níveis:

- O questionamento formulado pelo próprio professor a respeito do conhecimento matemático que se propõe ensinar para os alunos tais como: quando e como foi construído, em qual contexto histórico, segundo quais avanços e recuos. Conhecer as dificuldades vivenciadas pela humanidade para alcançar a compreensão, com a evolução das relações inicialmente estabelecidas, poderão auxiliá-lo, uma vez que os alunos, de alguma forma, precisarão repetir um processo cujos obstáculos são muitas vezes, em certo sentido, previsíveis;
- A busca de situações-problema interessantes e adequadas para o grupo de alunos com o qual o docente trabalha. A História fornece o modelo de construção do conhecimento a partir dos desafios enfrentados. Para gerar o interesse dos estudantes pelas ideias que deseja desenvolver, o professor pode, e deve buscar aqueles problemas importantes que, historicamente, deram origem ao desenvolvimento dos conceitos de Cálculo, ou mesmo buscar problemas relevantes na atualidade. Para Barufi (1999), em [3], certamente, ele precisa ter uma boa visão histórica para poder entender o contexto no qual o conhecimento desejado foi construído e, mais ainda, conhecer a epistemologia para então poder criar situações adequadas para que a recontextualização em sala de aula seja viável. Todo o processo de reflexão concomitante está voltado para a sua ação em sala de aula, onde o seu papel não será o de um mero transmissor de conhecimento, mas o de um orientador dos alunos na busca das respostas inerentes às situações criadas e no processo de formalização do conhecimento, nas palavras de Barufi (1999), em [3], posteriormente re-descontextualizado e re-despersonalizado.

Nesse contexto, há ainda dois aspectos a serem diferenciados: A Matemática Científica e a Matemática Escolar:

- A Matemática Científica cuida de elaborar e formalizar Princípios e Teoremas a partir de Postulados e Conceitos Primitivos, por meio dos quais a lógica é uma ferramenta de suma importância e o rigor e a consistência das demonstrações são o que garantem a validade de qualquer conjectura, quando provada
- A Matemática Escolar, por sua vez, é a responsável por nada menos que ensinar a Matemática. A garantia de validade de um resultado passa a ser algo acessório à disciplina e ele deve ser alcançado a partir da própria intuição dos alunos.

Nessa perspectiva, o trabalho do formador de professores de Matemática, dentre esses o professor de Cálculo 1, deve ser o de cumprir os dois papéis definidos por Barufi (1999), em [3], o de professor de

Matemática e o de Matemático Profissional, uma vez que o aluno ingressante no curso de Matemática passa por um processo de transição entre as duas Matemáticas.

Aqui, em se tratando de um curso de Cálculo, cabe ao professor conhecer as demandas, as dificuldades vivenciadas pelos alunos ao longo da sua carreira escolar, inserir os conceitos mostrando aos alunos onde ele será aplicado, e, em se tratando de um curso formador de futuros professores, construir os conceitos relacionados às funções, aos números reais e às suas ferramentas introduzindo um problema real e palpável aos alunos, onde eles possam modelar matematicamente tal situação-problema e, a partir daí, introduzir os conceitos. Em um curso que se propõe a formar professores, cabe ao professor direcionar e convencer os alunos de que a disciplina de Cálculo é a base para toda a Matemática que eles conhecem. Além disso, é fundamental ao professor de Matemática conhecer a história da disciplina que ministra e, acima de tudo, apresentar aos alunos uma abordagem de como o Cálculo foi desenvolvido, uma vez que se trata de um curso de formação de professores de matemática. Segundo D'Ambrósio (2014), em [29]:

As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.

O grande desafio do Ensino de Matemática, conforme discutido em vários congressos, mesas redondas e debates em sala de aula, é a aplicabilidade dos conceitos de Matemática em sala de aula. No curso de Matemática, em especial, o aluno tem disciplinas teóricas de Pedagogia e Matemática. Nas disciplinas de Matemática, os docentes pouco abordam como aquela ferramenta pode ser abordada ou aplicada em sala de aula na Educação Básica, ao passo que, nas disciplinas de cunho pedagógico, a abordagem tem forte teor ideológico em detrimento da formação de professores. É evidente que não existe uma receita ou um protocolo de como se dar uma boa aula, mas a prática do ensino, como já abordado acima, deve basear-se no contexto social e histórico vivido pelos alunos.

No contexto do discente estar frequentando um curso de Matemática, em que pese, conforme dados apontados pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) e pelo Sistema de Avaliação de Educação Básica (SAEB) e segundo entrevista feita com alunos, os estudantes ainda não ingressarem na Universidade com o conhecimento mínimo esperado de um concluinte do Ensino Médio, tais alunos gostam de Matemática e se propõem a lecioná-la após formados. Neste contexto, cabe ao professor de Cálculo fazer uma abordagem histórica, problematizadora desta disciplina, aplicando-na ao Cálculo. Além disso, devem-se revisar e enfatizar fundamentos de Matemática, especialmente aqueles de uso essencial ao Cálculo, por ora esquecidos na trajetória escolar.

Neste sentido, mostraremos, no Capítulo 4, possibilidades de abordagens históricas dos conceitos de Cálculo. Segundo debates realizados em sala de aula, acredita-se que a referência que um professor toma ao lecionar são os seus professores. O intuito é melhorar o ensino da Matemática, que, segundo apontam dados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), encontra-se deficitário. O uso do contexto histórico em sala de aula auxilia na construção e reconstrução do conhecimento, torna o ensino mais atrativo, além de reafirmar o significado de cada ferramenta do Cálculo. Nas palavras de D'Ambrósio (1999), em [13]:

O aspecto crítico, que resulta de assumir que a Matemática que está nos currículos é um estudo de Matemática histórica? E partir para um estudo crítico do seu contexto histórico, fazendo

uma interpretação das implicações sociais dessa matemática. Sem dúvida isso pode ser mais atrativo para a formação do cidadão. O aspecto lúdico associado ao exercício intelectual, que é tão característico da Matemática, e que tem sido totalmente desprezado. Porque não introduzir no currículo uma matemática construtiva, lúdica, desafiadora, interessante, nova e útil para o mundo moderno. O enfoque histórico favorece destacar esses aspectos, que considero fundamentais na educação Matemática.

Em um contexto de falta de pré-requisito dos alunos, apontado nos Capítulos 1 e 2, onde aqueles apresentam dificuldades para compreender significados de funções periódicas, exponenciais e logaritmos, conforme indicam dados do SAEB coletados, e, no cenário da Universidade de Brasília, onde os índices de reprovação, especialmente os dos dois últimos anos, ultrapassam metade dos alunos matriculados, necessitamos discutir soluções para a redução desse índice no Campus Brasília.

As pesquisas realizadas relacionadas aos exames nacionais de larga escala apontam uma falta de pré-requisito em Cálculo 1 e, nas avaliações internas da Universidade, as provas de Cálculo mostram que os alunos apresentam deficiências em Ferramentas de Matemática Elementar importantes no desenvolvimento do Cálculo. Para identificar esses fatores, inicialmente foi levantado o número de matrículas, reprovações e trancamentos na disciplina de Cálculo 1 nos três Campi da Universidade de Brasília. Em seguida, ao notar-se que no Campus Brasília o índice de reprovação permaneceu quase todos os semestres acima de 50%, foi realizada uma entrevista com uma amostra de alunos do Campus Brasília, dividida em duas partes: um questionário socioeconômico e um teste de conhecimento em Matemática Elementar. Frente a essa realidade realizou-se um estudo sobre os resultados de avaliações de larga escala no país que servem como forma de ingresso na Universidade, além do SAEB. Na sequência, foram pesquisados, por meio de testes estatísticos, possíveis efeitos dessas avaliações de larga escala no desempenho dos alunos em Cálculo 1, no curso de Matemática. Além disso, analisamos por meio da TRI e da TCT, uma amostra de questões que foram aplicadas em provas anteriores de Cálculo 1. Por fim, além de propor um curso de Pré-Cálculo dentro da Universidade, abordaremos a História dos conceitos inerentes ao Cálculo 1, para sugerir que a inserção de conceitos passa primeiro por uma noção palpável destes e a formalização é uma parte integrante do processo. Veremos que alguns conceitos Matemáticos como, por exemplo, o dos Números Reais, levaram séculos até terem uma definição consistente. Defende-se, no Departamento, que haja a mediação de uma investigação, por parte dos alunos, do comportamento das funções. Assim, o conhecimento formal e rigoroso dos conceitos de Cálculo será uma consequência deste processo.

Uma Sinopse Estatística da Disciplina de Cálculo 1

Para iniciar este estudo, coletamos no Registro Acadêmico da Universidade de Brasília os dados referentes à disciplina, conforme seguem, e também fizemos uma entrevista com uma amostra de turmas de Cálculo 1, 2 e 3, do Campus Brasília, que foi dividida em duas etapas: a primeira consiste em uma avaliação socioeconômica do aluno, e a segunda parte em um pequeno teste de Matemática, onde tentamos inferir o nível de aptidão dos alunos que se matriculam no curso de Matemática. No Capítulo 4, traçaremos um perfil do estudante para analisarmos o seu comportamento perante a um item segundo a Teoria da Resposta ao item. Além disso, através desta ferramenta, estudaremos também a necessidade ou não de uma disciplina de “*Pré-Cálculo*”, como já é aplicado em outras universidades.

1.1 Índices de Reprovações

Nas tabelas que se seguem, tratamos dois índices: O Índice de Reprovações Bruto (IRB) e o Índice de Reprovações Líquido (IRL). O Índice de Reprovações Bruto determina o número de alunos reprovados na disciplina de Cálculo sem se levar em conta o número de trancamentos para aquele período. Por sua vez, o Índice Líquido de Reprovações desconta no seu denominador a quantidade de alunos que trancaram e não fizeram a disciplina naquele período.

$$IRB = \frac{\text{reprovações}}{\text{matrículas}} \quad IRL = \frac{\text{reprovações}}{\text{matrículas} - \text{trancamentos}}.$$

Observando-se os gráficos, nota-se que, nos Campi Gama e Planaltina, houve, uma queda brusca nos dois últimos semestres observados, ao passo que, no Campus Brasília, os índices permaneceram acentuados em relação aos dois últimos semestres, havendo crescimento no interstício 2015-2/2016-1, embora tenha se registrado uma queda desse índice no intervalo 2011-2/2012-1 e 2012-2/2013-1. Aqui começa o nosso ponto de partida. Nos dois primeiros Campi citados, as avaliações não são unificadas como ocorre no Campus Brasília. A ideia deste trabalho é entender e diagnosticar as causas do alto índice de reprovação no Campus Brasília.

Período	Matriculas	Reprovações	Trancamentos	MM	MS	SS	Índice de reprovações bruto	Número líquido de matrículas	Índice Líquido de reprovações
20101	469,00	212,00	38,00	141,00	61,00	17,00	0,45	431,00	0,49
20102	508,00	340,00	0,00	136,00	26,00	6,00	0,67	508,00	0,67
20111	504,00	244,00	0,00	199,00	59,00	11,00	0,48	504,00	0,48
20112	461,00	269,00	15,00	144,00	29,00	4,00	0,58	446,00	0,60
20121	499,00	169,00	69,00	188,00	53,00	20,00	0,34	430,00	0,39
20122	432,00	281,00	3,00	113,00	23,00	12,00	0,65	429,00	0,66
20131	500,00	142,00	6,00	265,00	76,00	11,00	0,28	494,00	0,29
20132	384,00	176,00	7,00	154,00	33,00	14,00	0,46	377,00	0,47
20141	446,00	174,00	7,00	170,00	67,00	28,00	0,39	439,00	0,40
20142	432,00	191,00	9,00	140,00	66,00	26,00	0,44	423,00	0,45
20151	391,00	131,00	4,00	138,00	87,00	31,00	0,34	387,00	0,34
20152	348,00	136,00	3,00	114,00	79,00	16,00	0,39	345,00	0,39
20161	384,00	124,00	6,00	152,00	81,00	21,00	0,32	378,00	0,33

Figura 1.1: Desempenho dos Alunos do Campus Gama

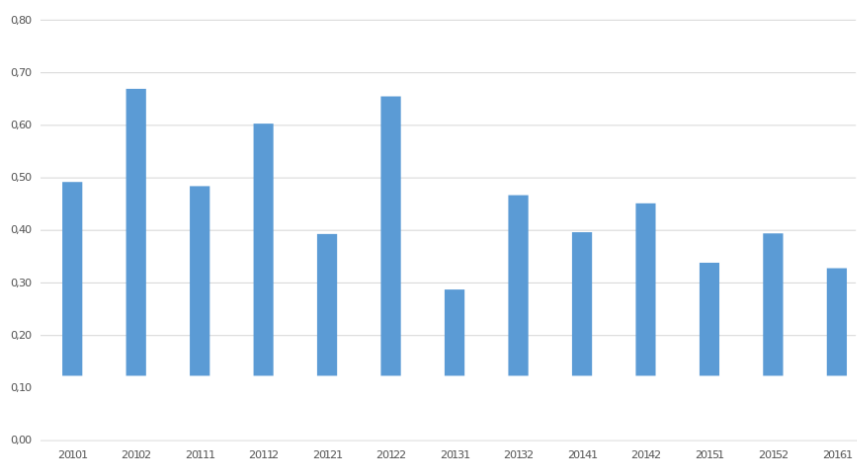


Figura 1.2: Gráfico dos índices líquidos de reprovação do Campus Gama

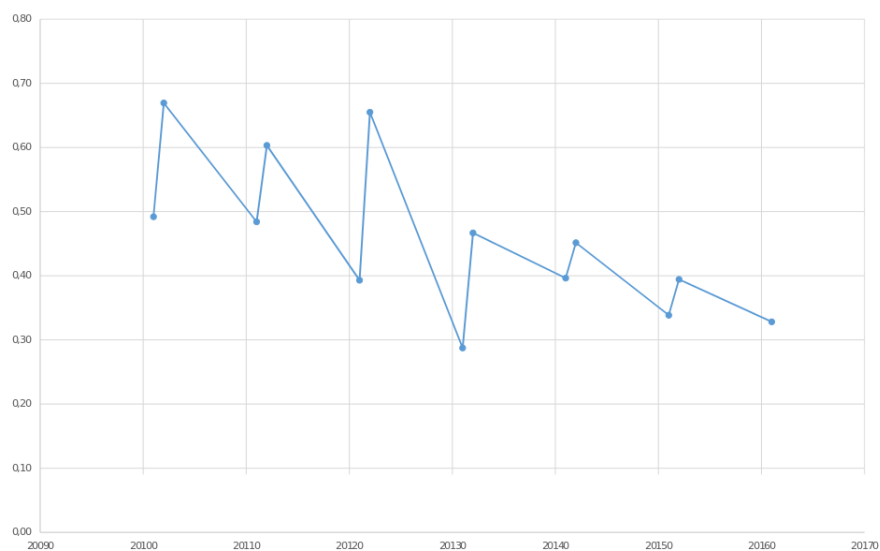


Figura 1.3: Gráfico dos índices líquidos de reprovação do Campus Gama

Período	Matriculas	Reprovações	Trancamentos	MM	MS	SS	Índice de reprovações bruto	Número líquido de matriculas	Índice Líquido de reprovações
20101	61,00	18,00	2,00	31,00	6,00	4,00	0,30	59,00	0,31
20102	86,00	40,00	2,00	19,00	21,00	4,00	0,47	84,00	0,48
20111	57,00	19,00	0,00	23,00	9,00	6,00	0,33	57,00	0,33
20112	91,00	28,00	13,00	36,00	14,00	2,00	0,31	78,00	0,36
20121	86,00	17,00	11,00	40,00	12,00	6,00	0,20	75,00	0,23
20122	108,00	47,00	15,00	34,00	9,00	3,00	0,44	93,00	0,51
20131	99,00	33,00	10,00	33,00	18,00	5,00	0,33	89,00	0,37
20132	110,00	33,00	19,00	30,00	21,00	7,00	0,30	91,00	0,36
20141	103,00	46,00	34,00	18,00	2,00	3,00	0,45	69,00	0,67
20142	97,00	44,00	13,00	25,00	12,00	3,00	0,45	84,00	0,52
20151	100,00	46,00	24,00	24,00	6,00	0,00	0,46	76,00	0,61
20152	118,00	26,00	12,00	39,00	27,00	14,00	0,22	106,00	0,25
20161	102,00	19,00	8,00	32,00	31,00	12,00	0,19	94,00	0,20

Figura 1.4: Desempenho dos alunos no Campus Planaltina

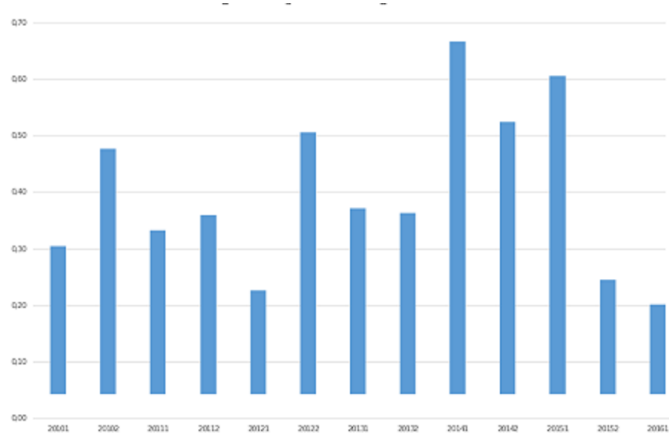


Figura 1.5: Gráfico dos índices líquidos de reprovação no Campus Planaltina

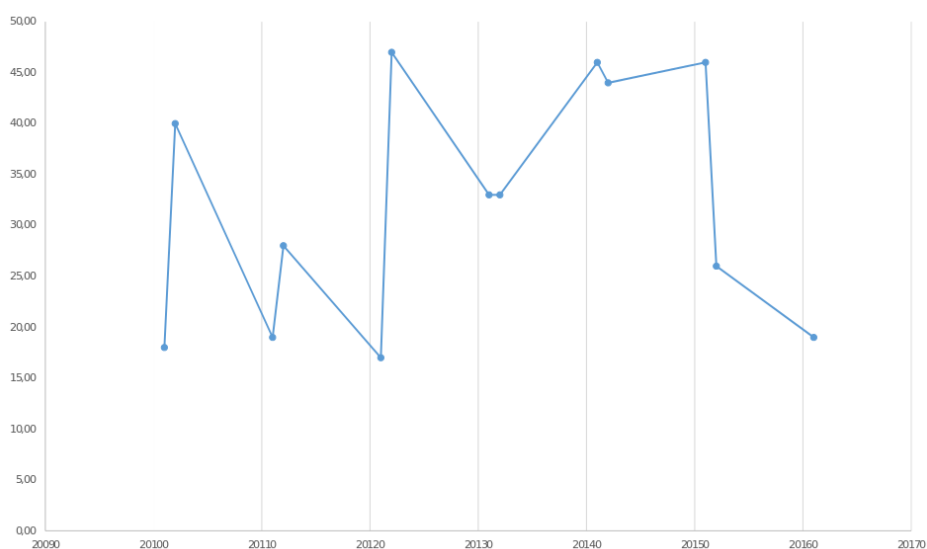


Figura 1.6: Gráfico dos índices líquidos de reprovação no Campus Planaltina

Período	Matriculas	Reprovações	Trancamentos	MM	MS	SS	Índice de Reprovações Bruto	Número Líquido de matriculas	Índice Líquido de reprovações
20101	1272,00	535,00	25,00	353,00	272,00	87,00	0,42	1247,00	0,43
20102	1357,00	740,00	1,00	399,00	176,00	41,00	0,55	1356,00	0,55
20111	1632,00	830,00	20,00	481,00	230,00	71,00	0,51	1612,00	0,51
20112	1534,00	828,00	89,00	378,00	186,00	53,00	0,54	1445,00	0,57
20121	1503,00	431,00	253,00	442,00	262,00	115,00	0,29	1250,00	0,34
20122	1384,00	725,00	53,00	358,00	171,00	77,00	0,52	1331,00	0,54
20131	1420,00	591,00	83,00	477,00	216,00	53,00	0,42	1337,00	0,44
20132	1352,00	687,00	59,00	418,00	157,00	31,00	0,51	1293,00	0,53
20141	1368,00	656,00	94,00	357,00	204,00	57,00	0,48	1274,00	0,51
20142	1153,00	575,00	85,00	307,00	154,00	32,00	0,50	1068,00	0,54
20151	1135,00	494,00	52,00	293,00	223,00	73,00	0,44	1083,00	0,46
20152	1126,00	587,00	64,00	339,00	119,00	17,00	0,52	1062,00	0,55
20161	1106,00	597,00	55,00	316,00	120,00	18,00	0,54	1051,00	0,57

Figura 1.7: Desempenho dos alunos no Campus Brasília

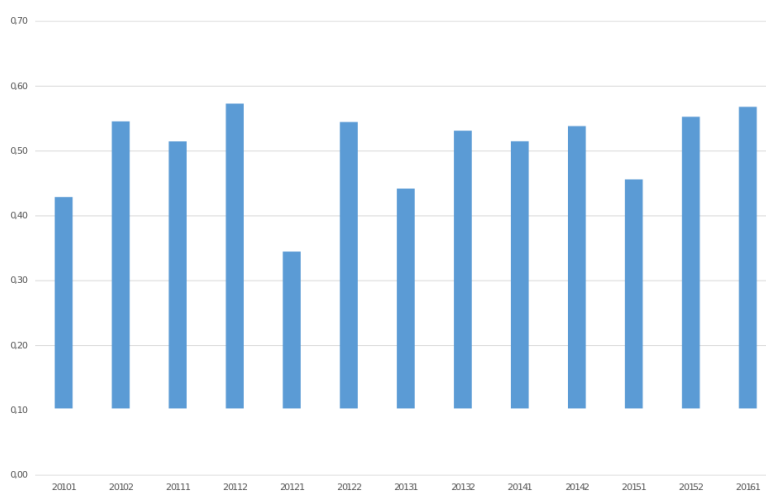


Figura 1.8: Gráfico dos índices líquidos de reprovação no Campus Brasília

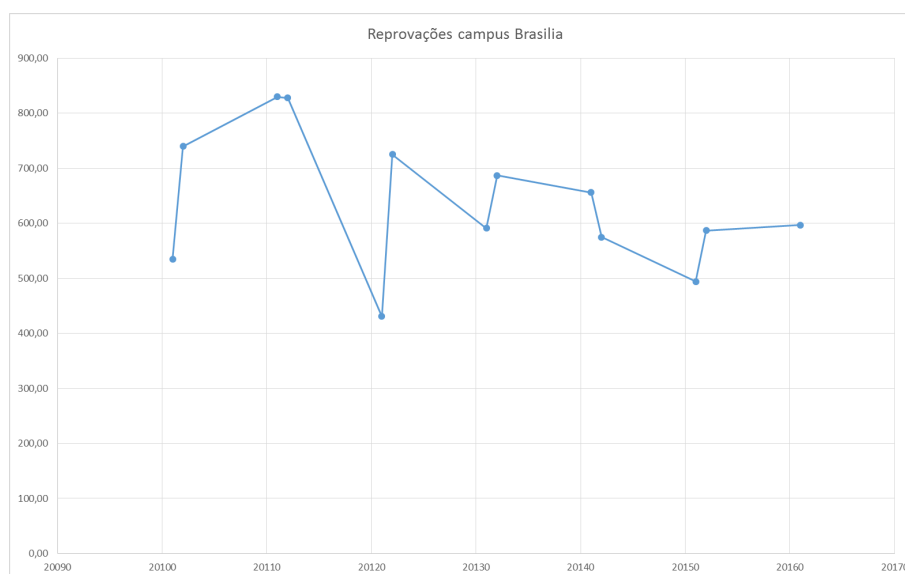


Figura 1.9: Gráfico dos índices líquidos de reprovação no Campus Brasília

No Campus Brasília, desde o advento da ata 270/2013, o Departamento de Matemática tem trabalhado para que o desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo 1 melhore. Além das aulas presenciais, os alunos contam com dois professores por turma: um para ensinar a parte teórica do conteúdo e outro para ministrar aulas de exercícios sobre o conteúdo dado. Os alunos também têm acesso à plataforma moodle, onde contam com materiais de apoio, exercícios resolvidos, videoaulas, aulas de monitoria, dentre outros auxílios.

Os professores do Departamento, por meio de softwares que calculam os Parâmetros da Teoria da Resposta ao Item (TRI) e da Teoria Clássica dos Testes (TCT), têm feito um acompanhamento pedagógico dos itens de avaliação de Cálculo 1. Todos esses fatores mostram o esforço que o Departamento tem realizado para mudar esta realidade. Uma disciplina de Pré-Cálculo, enfatizando e revisando as principais ferramentas de Matemática Elementar utilizadas em Cálculo 1, pode ser um auxiliador para que os alunos compreendam melhor as ferramentas de Cálculo 1 e esse índice de reprovações possa ser, conseqüentemente, reduzido. Tal disciplina já está sendo ofertada no Departamento de Matemática como uma disciplina piloto.

Nos dados relativos ao Campus Gama, nota-se que, nos três últimos períodos letivos, o ILR permaneceu sempre abaixo de 50%. Tal redução pode ser em parte atribuída ao trabalho realizado conhecido como o Método dos 300, desenvolvido por Fragelli (2015), em [19]. O professor, em seu artigo, aponta que, além da falta de pré-requisito, o nervosismo dos alunos perante as provas é fator determinante para os altos índices de reprovação apontados na Figura 1.1 nos períodos letivos de 2012-2 e 2010-2, por exemplo. O método proposto por Fragelli (2015), em [19], consiste em, caso estudantes tenham desempenho inferior a 4,5 numa prova, podem refazer uma prova desde que realize uma atividade de grupo de 5 ou 6 integrantes que, normalmente, é realizada da seguinte maneira:

- 1- Dois encontros presenciais com integrantes do grupo, com duas horas de duração;
 - 2- Entrega de uma lista de exercícios desenvolvida pelo professor;
 - 3- Resolução de uma prova desenvolvida pelo líder do grupo, que é o integrante de maior nota da prova.
- Fragelli (2015), em [19], descreve que os estudantes de baixo desempenho na avaliação podem refazê-la e a nota do estudante na prova é a maior das duas provas realizadas. Fragelli (2005), em [19], relata que, quase na totalidade dos casos, a nota da segunda prova é escolhida. No final do artigo de Fragelli (2005), em [19], é possível encontrar depoimentos de estudantes em que estes declaram terem reduzido a ansiedade com relação às provas.

1.2 Entrevista com os Alunos

Esta entrevista, realizada com os alunos do Campus Brasília, foi dividida em duas partes. A primeira parte é um questionário socioeconômico, e a segunda parte, um teste de conhecimento de Matemática Elementar por parte dos alunos. Uma vez feita a entrevista com os alunos, montamos algumas relações entre algumas perguntas e os desempenhos dos alunos no teste de conhecimento. O teste de conhecimento e a entrevista foram realizados com uma amostra de 27 estudantes no curso de Matemática, na disciplina de Cálculo 1, e os desempenhos foram analisados segundo o critério de o estudante acertar ou não mais de 50% do teste. Aqui relacionamos se o aluno estudou em escola pública ou privada e também o seu desempenho na entrevista. Nesta análise, percebemos que, proporcionalmente, 1 em cada 7 alunos que sempre estudaram em escola privada teve desempenho satisfatório na avaliação do desempenho.

Quando avalia-se dentre alunos oriundos de escolas públicas, esse desempenho cai para 1 a cada 10

estudantes. Pesquisamos também, do ponto de vista da distribuição do qui quadrado, χ^2 com 2 graus de liberdade, se existe uma dependência entre as variáveis qualitativas para diagnosticar se o fato do aluno ter estudado em escola pública ou particular guarda alguma relação com o seu fraco ou bom desempenho no teste de conhecimento. Segundo Bussab e Noretin, em [6], um grande valor de χ^2 indica uma alta probabilidade de existência de uma dependência entre as variáveis. Como se valeu da distribuição do qui quadrado para testar a independência entre as variáveis, far-se-á uma breve explanação a respeito dessa distribuição estatística.

O teste da independência entre duas variáveis

De modo geral, duas características A e B são apresentadas em forma de tabelas $r \times s$, onde r é o número de ocorrências da característica A e s é o número de ocorrências da característica B . A Estatística de qui quadrado usada dependerá dos valores observados e esperados. Se os eventos A e B forem independentes, então os valores esperados (E_i) são dados por

$$E_{ij} = \frac{n_i n_j}{n},$$

onde:

- n_i é o número do total de elementos da característica A , com $1 < i < r$;
- n_j é o número do total de elementos da característica B , com $1 < j < s$;
- n é o número do total de elementos da pesquisa.

Por exemplo, na Figura 2.14, na célula 1X1, isto é, primeira linha e primeira coluna, temos que $n_1 = 21$, $n_1 = 11$ e $n = 27$. Dessa forma, $E_{11} = \frac{21 \cdot 11}{27} \sim 9$.

O teste do qui quadrado χ^2 com dois graus de liberdade é utilizado para se calcular os quadrados das distâncias entre os valores observados O_i e os valores esperados E_i . A estatística do teste da independência, conforme Bussab e Morettin, em [6], é dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{O_{ij} - E_{ij}}{E_{ij}}.$$

Como se vê na Figura 2.15, o valor da correspondente à casela 1X1 é a diferença entre os valores desta mesma casela na tabela da Figura 2.13 e a da Figura 2.14, dividida pelo valor da casela 1X! da Tabela 4.13. Segundo Bussab e Morretin (2012), em [6], um valor alto para χ^2 , a um nível de significância de 5%, indica forte possibilidade de existência de dependência entre essas variáveis.

A seguir serão expostos o questionário e o teste de conhecimento aplicados a uma amostra de alunos de Cálculo 1, 2 e 3, na Universidade de Brasília. O questionário e o teste foram os seguintes:

A pesquisa

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática



Questionário

Prezado estudante, este questionário tem o objetivo de conhecer melhor o perfil do estudante do nosso curso de Matemática e com isso podermos melhorar nosso trabalho. Por favor, responda com o maior cuidado possível e sem nenhum receio. Ninguém será identificado.

1. Qual a sua idade?

(a) Até 18 anos (b) De 19 a 29 anos

(c) De 30 a 39 anos (d) Acima de 40 anos

2. Qual o seu sexo?

(a) Masculino (b) Feminino

3. Qual o seu estado civil

(a) Solteiro(a) (b) Casado(a)

(c) União estável (d) Divorciado(a) (e) Viúvo(a)

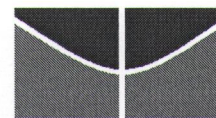
4. Em que ano você concluiu o Ensino Médio?

.....

5. Em qual cidade você concluiu o Ensino Médio?

.....

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

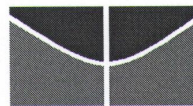


6. Em que tipo de escola você cursou o Ensino Médio?
- (a) Integralmente em Escola Pública
 - (b) Parcialmente em Escola Pública
 - (c) Integralmente em Escola Particular
7. Em que tipo de escola pública você estudou?
- (a) Federal (b) Estadual
 - (c) Municipal (d) Estadual e Municipal
 - (e) Outra
8. Quantos anos você levou para concluir o Ensino Médio?
- (a) 3 anos (b) Menos que 3 anos
 - (c) Mais que 3 anos
9. Em que turno você fez (integralmente ou em sua maior parte) o Ensino Médio ?
- (a) Diurno (b) Noturno
10. Você já prestou vestibular para outros cursos?
- (a) Sim (b) Não

Caso tenha prestado vestibular para outros cursos, qual foi o curso? Foi aprovado(a)?

.....

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática



11. Quantas vezes você prestou vestibular para o curso de Matemática?

- (a) 1 vez (b) 2 vezes
(c) 3 vezes (d) 4 ou mais vezes.

12. Você já cursou ou está cursando outro curso superior?

- (a) Sim (b) Não

Caso tenha respondido “sim” na questão anterior, qual curso superior?

.....

13. Quais os fatores que mais influenciaram sua decisão de cursar o curso de Matemática?

- (a) Gosto de Matemática
(b) Quero ser professor
(c) Quero ser pesquisador
(d) Quero atuar com Matemática em outras áreas
(e) Tenho facilidade em Matemática
(f) Outra.....

.....

14. Você frequentou cursinho pré-vestibular, integrado ou não ao Ensino Médio?

- (a) Sim (b) Não

15. Se não tivesse passado no vestibular para Matemática, você faria o vestibular de novo para o mesmo curso?

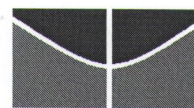
- (a) Sim (b) Não (c) Talvez

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática



16. Você tem atualmente uma atividade remunerada?
(a) Sim (b) Não
17. Caso teve uma atividade remunerada, por quanto tempo você teve ou tem uma atividade remunerada em sua vida?
.....
18. Qual é a renda mensal do seu grupo familiar?
(a) Menos de 1 salário mínimo;
(b) De 1 a 2 salários mínimos ;
(c) De 2 a 5 salários mínimos;
(d) De 5 a 10 salários mínimos;
(e) De 10 a 20 salários mínimos ;
(f) De 20 a 40 salários mínimos;
(g) Acima de 40 salários mínimos.
19. Qual é a sua participação na vida econômica de seu grupo familiar?
(a) Não trabalho nem contribuo para o sustento da família;
(b) Trabalho, mas não contribuo para o sustento da família;
(c) Trabalho e contribuo em parte para o sustento da família;
(d) Trabalho e sou o principal responsável pelo sustento da família.
20. Qual é o nível de escolaridade de seu pai?
(a) Não concluiu o Ensino Fundamental;
(b) Ensino Fundamental completo;
(c) Ensino Médio completo;

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática



- (d) Ensino superior completo;
(e) Pós-Graduado.
21. Qual é o nível de escolaridade da sua mãe?
(a) Não concluiu o Ensino Fundamental;
(b) Ensino Fundamental completo;
(c) Ensino Médio completo;
(d) Ensino superior completo;
(e) Pós-Graduado.
22. Quando se graduar você pretende ter como ocupação principal a atividade de professor de Matemática na Escola Básica?
(a) Sim (b) Não (c) Talvez
23. Você possui um microcomputador (notebook, PC ou tablet)?
(a) Sim (b) Não
24. Você possui acesso a internet em casa?
(a) Sim (b) Não
25. Na sua casa (onde você mora com a família) há quantos automóveis?
(a) Nenhum (b) 1 (c) 2 (d) Mais que 2

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática



26. Você considera que foi fácil passar no vestibular para Matemática?
(a) Sim (b) Não (c) Mais ou menos

27. Você faria vestibular para Matemática mesmo que tivesse certeza de que você seria aprovado(a) no vestibular para qualquer outro curso?
(a) Sim (b) Não

28. Caso tenha respondido “não” na questão anterior, qual seria o curso que faria?

.....

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática



Parte 2 - Teste de conhecimentos

1. Calcule as expressões

a) $\frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$;

b) $2 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) : 5$;

c) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$;

d) $\frac{1}{3 - \sqrt[3]{2}}$.

2. Julgue V para itens verdadeiros e F para afirmativas falsas, justificando-os

a) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$;

b) $\sqrt{x^2} = x$;

c) $\frac{5x+3}{2x+1} > 2$, desde que $x > -1$.

3. A respeito das funções trigonométricas, julgue os itens que se pede como verdadeiros ou falsos, justificando-os

a) $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}(x)$, para todo $x \in (0, 2\pi)$;

b) $\text{cos}(\pi - x) = \text{cos}(x)$, para todo $x \in (0, 2\pi)$;

c) $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x)$, para todo $x \in (0, 2\pi)$.

4. Decomponha as expressões abaixo em frações parciais

a) $\frac{1}{(t-1)(t-2)}$;

b) $\frac{1}{t(t^2+1)}$.

Fazendo um teste de independência entre as variáveis, usando a distribuição do qui quadrado, observamos que sua estatística de qui quadrado é igual a 2,32, enquanto que, para um nível de significância 5%, o valor crítico para esse nível de confiança é de 3,841, segundo tabela para a distribuição do qui quadrado que consta em Bussabe Morettin (2012), em [6]. Isso indica, portanto, que não deve ser rejeitada a hipótese de que esses resultados ocorrem independentemente, em outras palavras, não há de fato algo que justifique um melhor desempenho dentre os alunos das escolas públicas ou particulares. Os cálculos estão explícitos nas tabelas 1.13, 1.14 e 1.15 e foram realizados através da ferramenta Excel.

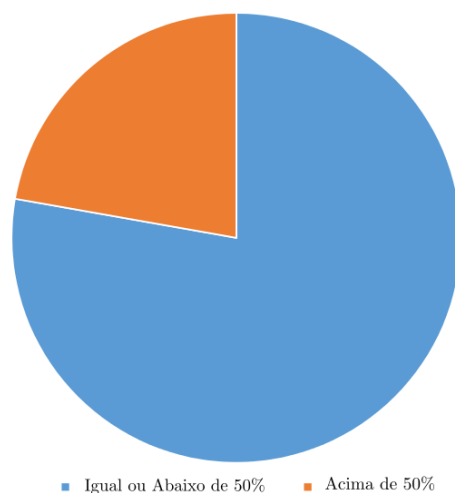


Figura 1.10: Desempenho dos alunos no teste de conhecimento

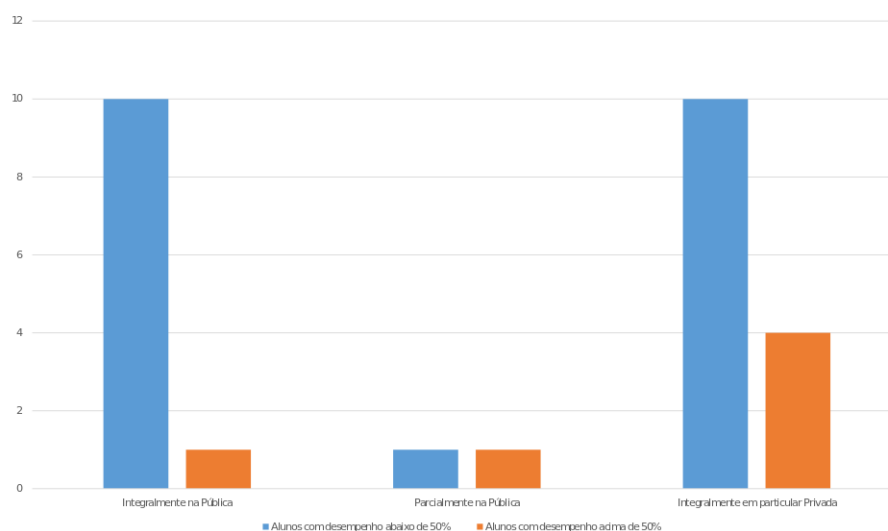


Figura 1.11: Desempenho versus tipo de escola

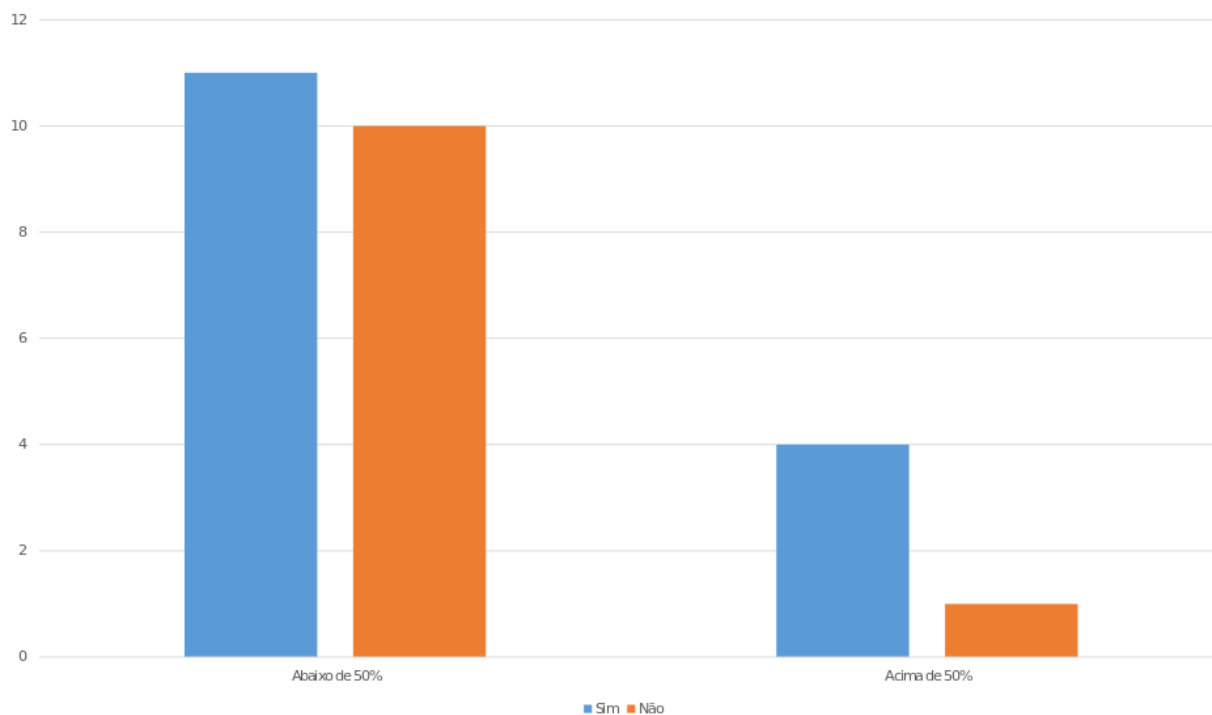


Figura 1.12: Desempenho versus pré-vestibular

Valores Observados	Alunos com desempenho abaixo de 50%	Alunos com desempenho acima de 50%	Total
Integralmente na Pública	10	1	11
Parcialmente na Pública	1	1	2
Integralmente em particular Privada	10	4	14
Total	21	6	27

Figura 1.13: Valores observados para desempenho versus tipo de escola

Valores esperados	Alunos com desempenho abaixo de 50%	Alunos com desempenho acima de 50%	Total
Integralmente na Pública	9	2	11
Parcialmente na Pública	2	0	2
Integralmente em particular Privada	11	3	14
Total	22	5	27

Figura 1.14: Valores esperados para desempenho versus tipo de escola

Entradas qui quadrado	Alunos com desempenho abaixo de 50%	Alunos com desempenho acima de 50%
Integralmente na Pública	0,24	0,85
Parcialmente na Pública	0,20	0,69
Integralmente em particular Privada	0,07	0,25

Figura 1.15: Valores do qui-quadrado para desempenho versus tipo de escola

O teste do qui quadrado não aponta dependência entre as variáveis tipo de escola versus desempenho no teste, embora se observe, a partir disso na amostra, que, dentre alunos que estudaram toda a Educação Básica em escola privada, 28 % apresentaram desempenho superior a 50 % no teste. Dentre os alunos provenientes da escola pública, a proporção foi de 9%. Um outro dado coletado interessante é o relativo aos alunos que responderam na entrevista que frequentaram pré-vestibular. Dentre todos os alunos entrevistados, 43,31% destes, em que pese terem frequentado um curso pré-vestibular, apresentaram um desempenho abaixo daquele considerado satisfatório, a saber, menos de 50% do teste de conhecimento. Quando medimos a proporção dentre os alunos que responderam que frequentaram o curso pré-vestibular, essa parcela passou a ser de 73,3%. Esta proporção alarmante de alunos com este perfil leva a pesquisar qual seria o impacto do pré-vestibular no aprendizado do aluno em Matemática. Para esses dados, em particular, utilizando a distribuição do qui quadrado para a independência entre essas variáveis, tem-se um valor de $\chi^2 = 1,79$, o que, segundo Bussab e Morettin (2012), em [6], não indica nenhum tipo de associação entre essas duas variáveis. Uma outra discussão a ser levantada é a respeito da unificação das provas de Cálculo. Até 2010, ano base da análise, as avaliações eram uma atribuição de cada professor. Cada professor avaliava seus alunos de forma autônoma. Por meio da ata 270/2013, as provas passaram a ser unificadas. Em relação a esse modelo unificado de avaliação, foi feita uma pesquisa, conforme veremos nos gráficos a seguir. Temos que 25 alunos, na pesquisa, responderam a respeito da unificação da disciplina. Dos 16 alunos que afirmaram concordar com o modelo unificado, 13 obtiveram um resultado abaixo de 50% no teste de desempenho. Dentre todos os entrevistados, esse perfil de aluno representa 52%

da amostra, ou seja, mais da metade dos entrevistados concorda com o modelo unificado da disciplina e teve mal desempenho no teste, conforme mostra o gráfico na Figura 1.16.

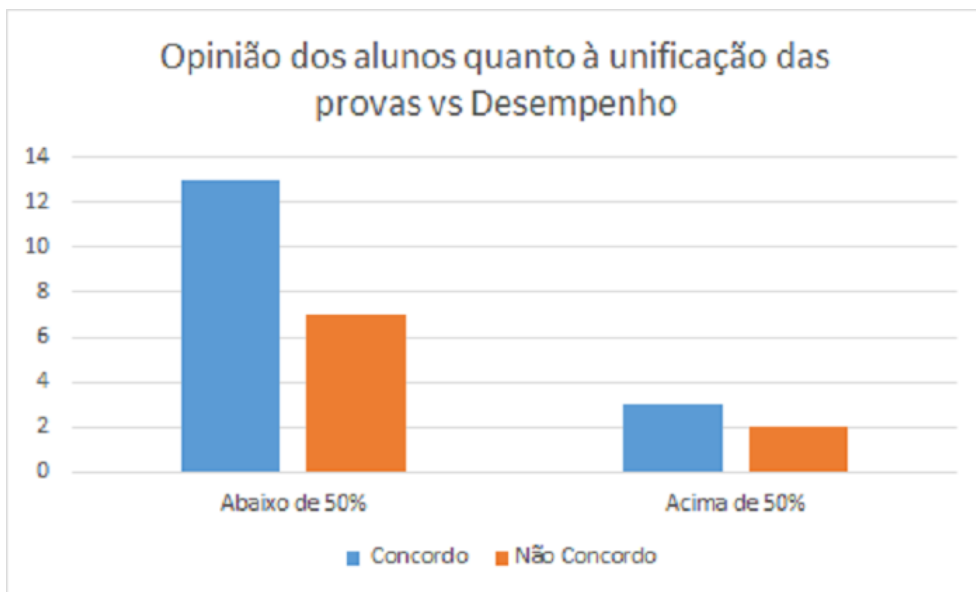


Figura 1.16: Opinião dos alunos quanto à unificação das provas versus o seu desempenho

A Realidade do Ensino de Matemática no País Segundo Avaliações em Larga Escala e seus Efeitos

A ausência de pré-requisito decorre da provável má formação em Matemática na Educação Básica. Em relação ao Ensino de Matemática, especialmente em escolas públicas, e até mesmo em escolas particulares, é comum ouvir-se de alunos e até mesmo de professores que o Ensino da Matemática se apresenta distante da realidade da maioria dos estudantes, ou seja, vários professores não conseguem fazer com que estes associem o conteúdo proposto a aspectos reais da disciplina e apenas preocupam-se em alimentar seu marketing para que o aluno seja aprovado em provas de vestibular. Além disso, existe deficiência na formação dos professores desde o Ensino Fundamental, pois aqueles das séries iniciais que são formados têm formação em pedagogia, mas não a têm em Matemática, e limitam-se a ensinar algoritmos aos alunos, em detrimento da aplicação da disciplina em sua vida cotidiana. Tal fato é apontado por Machado (2014), em [29]:

Se um professor associa o ato de ensinar à meta de “dar a matéria”, no sentido de encher os alunos de “conteúdos”, sua prática educacional, suas ações de planejamento, e avaliação serão tributárias de tal concepção; se pensa a matemática como um tema essencialmente abstrato, exato, extremamente difícil, os resultados que obtém decorrem de tais suposições.

Neste capítulo, abordaremos as possíveis causas da falta de pré-requisito dos alunos e a consequente falta de bagagem para se encarar uma disciplina de Cálculo 1, uma vez que o ensino das ferramentas de Cálculo 1 depende de conteúdos básicos de matemática. Em sala de aula, na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio, convive-se diariamente com alunos que apresentam deficiências sérias, tais como dificuldade em resolver uma equação do 1º grau, em calcular a área de um círculo, em perceber as relações em um plano cartesiano e até mesmo em interpretar e modelar problemas matemáticos básicos. As pesquisas educacionais, bem como as avaliações em larga escala para este mesmo fim, tais como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), dentre outros, apontam essas dificuldades. Aqui

abordaremos para que servem esses exames, qual modalidade de educação esses institutos avaliam e a posição destes sobre o desempenho dos alunos em Matemática.

2.1 SAEB

O Sistema de Avaliação Básica (SAEB) foi instituído em 1990 com o objetivo de diagnosticar, por meio da Teoria da Resposta ao Item, desde 1995, a educação básica no país e também fatores que possam possivelmente interferir no desempenho do estudante. O SAEB fornece um indicador sobre a qualidade do Ensino ofertado e faz um levantamento amostral a fim de oferecer informações em que se baseiam as políticas de formulação, reformulação e monitoramento das políticas, nas esferas municipal, estadual e federal, com o objetivo de contribuir para a melhora da qualidade no ensino. Em 2005, através da Portaria Ministerial nº 931, o SAEB foi reestruturado e passou a ser composto de duas avaliações: a ANEB, Avaliação Nacional da Educação Básica, e a ANRESC, Avaliação Nacional de Rendimento Escolar, conhecida também como Prova Brasil, criadas com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino ministrado nas redes Públicas. A ANEB manteve o caráter amostral, que atendia o mínimo de 10 estudantes por turma para participar da amostra, para avaliar escolas públicas e particulares. A ANRESC passou a avaliar de forma censitária as escolas que atendessem aos critérios de no mínimo 30 estudantes matriculados na última etapa do Ensino Fundamental I (5º ano) ou Fundamental II (9º ano) de escolas públicas. Foi essa mudança no SAEB, a introdução do modelo de avaliação praticado pela Anresc, que permitiu gerar resultados por escola na Prova Brasil. Em 2013, a ANA, Avaliação Nacional de Alfabetização, foi introduzida por meio da Portaria nº 482, em homenagem ao Pacto Nacional pela Alfabetização na idade certa e com o intuito de aferir os níveis de alfabetização e letramento em Português e Matemática. Neste mesmo ano, foi realizado, em caráter experimental, um pré-teste de Ciências Naturais, História e Geografia, que não geraram resultados para a edição. A última realização do SAEB, em 2015, teve participação de todas as escolas públicas brasileiras com mais de 20 estudantes matriculados do 5º ao 9º ano, de acordo com o Censo Escolar, e também uma amostra de escolas particulares com mais de 10 estudantes matriculados no Ensino Fundamental ou no 3º ano do Ensino Médio, uma amostra de escolas públicas municipais e estaduais com 10 a 19 alunos matriculados entre o 5º e o 9º ano do Ensino Fundamental e uma amostra de escolas públicas estaduais e municipais com mais de 10 alunos matriculados no 3º ano do Ensino Médio. As escolas e municípios que têm mais de 50% de participação na Avaliação têm resultado divulgado, exceto as escolas em que a coleta de dados foi feita em caráter amostral. Os resultados do Ensino Médio são divulgados por Estado e para o Brasil.

2.1.1 Os resultados de Matemática segundo o SAEB

Segundo a página oficial do INEP, em [42], Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, a avaliação da ANEB, parte do SAEB que leva em conta o desempenho escolar geral dos estudantes do ensino Fundamental e Médio por meio de amostras, o critério para se medir a habilidade em Matemática do aluno do Ensino Fundamental e Médio é feito a partir de escalas de proficiência, estruturadas com base na matriz de referência do SAEB. Em cada intervalo dessas escalas, determina-se um conjunto de habilidades e competências o qual o aluno avaliado consegue desenvolver ao alcançar aquele determinado nível.

Nível 250 a 300:

- Utiliza o conceito de Progressão Aritmética;
- Interpreta tabelas de dupla entrada com dados reais.

Nível 300 a 350:

- Resolve problemas calculando o valor numérico de uma função de 1° grau;
- Resolve problemas calculando o resultado de uma divisão em partes proporcionais;
- Calcula a probabilidade de um evento em um problema simples;
- Identifica em um gráfico de função o comportamento de crescimento/decrescimento;
- Identifica um gráfico de uma reta dada a sua equação;
- Utiliza o conceito de Progressão Geométrica para identificar o termo seguinte de uma sequência dada.

Nível 350 a 375:

- Resolve problemas calculando o valor numérico de uma função e identificando uma função de 1° grau;
- Resolve problemas com uma equação de 1° grau que requeira manipulação algébrica;
- Calcula a probabilidade de um evento usando o princípio multiplicativo para eventos;
- Identifica, em um gráfico de uma função, os intervalos em que os valores são positivos ou negativos e os pontos de máximo ou de mínimo;
- Identifica uma função linear que traduz a relação entre os dados de uma tabela;
- Opera com polinômio na forma fatorada, identificando suas raízes e os fatores do primeiro grau.

Nível 375 a 400:

- Resolvem problemas calculando o valor numérico de uma função e identificando uma função de 1° grau;
- Resolve problemas com uma equação de 1° grau que requeira manipulação algébrica;
- Calcula a probabilidade de um evento usando o princípio multiplicativo para eventos;
- Identifica, em um gráfico de uma função, os intervalos em que os valores são positivos ou negativos e os pontos de máximo ou de mínimo;
- Identifica uma função linear que traduz a relação entre os dados de uma tabela;
- Opera com polinômio na forma fatorada, identificando suas raízes e os fatores do primeiro grau.

Nível 400 a 425:

- Opera com o plano cartesiano calculando a distância entre dois pontos;

- Reconhece a equação de uma reta a partir de dois dos seus pontos ou do seu gráfico;
- Calcula a área total de uma pirâmide regular;
- Resolve problema envolvendo o ponto médio de um segmento;
- Resolve problema envolvendo o Teorema de Pitágoras em figuras espaciais;
- Resolve problema reconhecendo o gráfico de uma função exponencial;
- Resolve problema distinguindo funções exponenciais crescentes e decrescentes;
- Resolve problemas envolvendo funções exponenciais e equações exponenciais simples;
- Resolve problemas de contagem mais sofisticados usando o princípio multiplicativo;
- Resolve problemas reconhecendo gráficos de funções trigonométricas (seno e cosseno) e o sistema associado a uma Matriz;
- Opera com números reais na reta numérica reconhecendo que o produto de dois números é menor que cada um deles.
- **Nível 425 ou mais**
- Calcula o volume de sólidos simples: cubo, pirâmide regular;
- Reconhece o centro e o raio de uma circunferência dada sua equação na forma reduzida e identifica, dentre várias equações, a que representa uma circunferência;
- Determina o número de arestas de um poliedro conhecidas as suas faces;
- Identifica o coeficiente angular de uma reta dada sua equação ou conhecidos dois dos seus pontos;
- Identifica em um gráfico de uma função que um ponto (a, b) é equivalente a $b = f(a)$;
- Calcula parâmetros desconhecidos de uma função a partir de pontos do seu gráfico;
- Resolve equações utilizando as propriedades da função exponencial reconhecendo o gráfico da função $y = \text{tg}(x)$.

Observando-se as proficiências médias em todo o Brasil, entre os anos de 2005 e 2015, verifica-se que a proficiência média em Matemática no Ensino Médio variou entre os escores de 271 e 275, sendo que, nos dois últimos períodos de observação, nota-se uma queda de 270 para 267 pontos de proficiência.

O segundo gráfico que mostra as proficiências médias por estado, aponta que as duas últimas proficiências médias do Distrito Federal foram de 287 em 2013 e 280 em 2015. A maior proficiência média estadual nos dois últimos anos de observação foi no estado do Rio Grande do Sul, com pontuação de 290. Observando-se ainda, no Distrito Federal, a tabela de resultados do SAEB por escola Privada, Estadual e Federal, o SAEB mostra que, dentre as escolas particulares, a proficiência média foi de 318,2 pontos, enquanto que nas escolas públicas estaduais, essa escala foi de 262,76. A maior proficiência foi das escolas públicas federais, que foi de 326 pontos. A julgar pelo SAEB, os alunos de escolas públicas estaduais no Distrito Federal terminariam o Ensino Médio ainda no nível 0 das escalas de proficiência do SAEB, apresentando dificuldade ainda, por exemplo, para resolver problemas envolvendo o cálculo

do valor numérico de uma função e de reconhecer uma função de 1º grau, identificar gráficos de funções, operar com plano cartesiano, identificar pontos de máximo e mínimo, intervalos de valores positivos ou negativos, resolver problemas envolvendo funções exponenciais e resolver diversos problemas relacionados à Geometria Analítica.

Tomando-se o critério de avaliação utilizado no teste de conhecimentos realizado concomitantemente com a entrevista, em que muitos alunos de Cálculo 1 apresentaram desempenho abaixo do esperado, e confrontando-o com dados do SAEB, pode-se inferir que os alunos ingressam na Universidade sem o conhecimento necessário para se fazer o curso de Cálculo 1. É interessante notar que o gráfico aponta também a evolução da proficiência média, para todo o Brasil, no referido intervalo, do Ensino Fundamental nos anos iniciais e finais. Segundo a escala dos níveis de desempenho do SAEB, parte significativa do corpo discente ingressa no Ensino Médio apresentando dificuldades, por exemplo, para identificar sistemas de equações do 1º grau, interpretar informações por meio de coordenadas cartesianas, resolver problemas envolvendo áreas e perímetros de figuras planas, reconhecer círculos, circunferências e suas relações, identificar frações equivalentes e até mesmo resolver problemas envolvendo porcentagem, entre outros. Dessa defasagem apontada pelo SAEB pode-se depreender que, uma vez que muitas ferramentas de Matemática no Ensino Fundamental são primordiais para a continuidade no Ensino Médio, existe também uma defasagem em relação ao que se espera que o aluno consiga fazer em Matemática ao concluir o Ensino Fundamental. Embora os dados do SAEB apontem, no Distrito Federal, uma discrepância em Matemática no Ensino Médio, uma vez que o Ensino Público apresentou uma defasagem de 17 % em relação à rede privada em 2015, no Capítulo 2 vimos que, dentre os alunos do curso de Matemática que fizeram o teste de conhecimento e são oriundos de escola pública, a proporção de estudantes que teve rendimento superior a 50 % foi de 9,09 % contra uma proporção de 28 % dos alunos oriundos da rede privada. O desempenho da rede Privada, segundo o SAEB, em média, apresentaria dificuldades em muitas ferramentas importantes do Cálculo, tais como operar no plano cartesiano, reconhecer o centro e o raio de uma circunferência e resolver funções exponenciais. O SAEB e a entrevista realizada com a amostra de alunos da Universidade sugerem portanto que o corpo discente, salvo exceções, apresenta a falta de pré-requisito para fazer um curso de Cálculo.

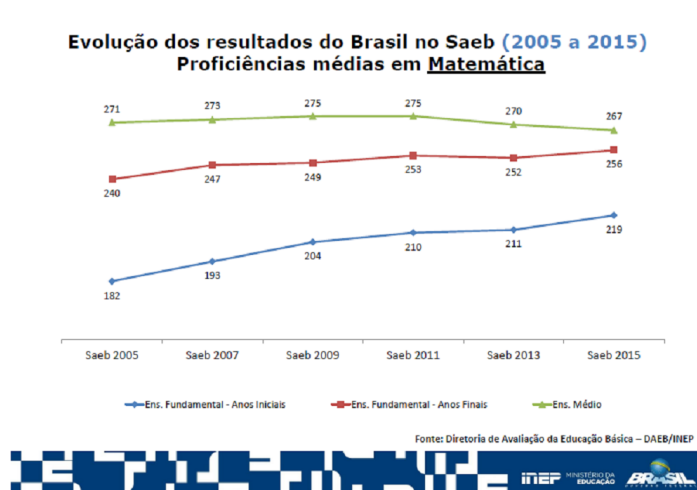


Figura 2.1: Evolução dos resultados do SAEB entre 2005 e 2015 - Fonte: INEP

UF	Dependência Administrativa	Localização	MÉDIAS DE PROFICIÊNCIA		
			ANOS INICIAIS - 5º ANO	ANOS FINAIS-9º ANO	ENSINO MÉDIO - 12º ANO
			MATEMÁTICA	MATEMÁTICA	MATEMÁTICA
Distrito Federal	Estadual	Rural	213,76	250,57	258,57
Distrito Federal	Estadual	Total	220,68	253,9	262,76
Distrito Federal	Estadual	Urbana	221,12	254,04	262,85
Distrito Federal	Federal	Rural	0	0	0
Distrito Federal	Federal	Total	0	330,54	326,01
Distrito Federal	Federal	Urbana	0	330,54	326,01
Distrito Federal	Municipal	Rural	0	0	0
Distrito Federal	Municipal	Total	0	0	0
Distrito Federal	Municipal	Urbana	0	0	0
Distrito Federal	Privada	Rural	0	265,57	283,95
Distrito Federal	Privada	Total	251,57	292,77	317,9
Distrito Federal	Privada	Urbana	251,57	293,1	318,2
Distrito Federal	Total - Estadual e Municipal	Rural	213,76	250,57	258,57
Distrito Federal	Total - Estadual e Municipal	Total	220,68	253,9	262,76
Distrito Federal	Total - Estadual e Municipal	Urbana	221,12	254,04	262,85
Distrito Federal	Total - Federal, Estadual e Municipal	Rural	213,76	250,57	258,57
Distrito Federal	Total - Federal, Estadual e Municipal	Total	220,68	254,83	263,99
Distrito Federal	Total - Federal, Estadual e Municipal	Urbana	221,12	255,01	264,09
Distrito Federal	Total - Federal, Estadual, Municipal e Privada	Rural	213,76	252,03	262,61
Distrito Federal	Total - Federal, Estadual, Municipal e Privada	Total	228,68	264,9	280,13
Distrito Federal	Total - Federal, Estadual, Municipal e Privada	Urbana	229,39	265,34	280,42

Figura 2.2: Proficiência Média no DF em 2015 - Fonte: INEP

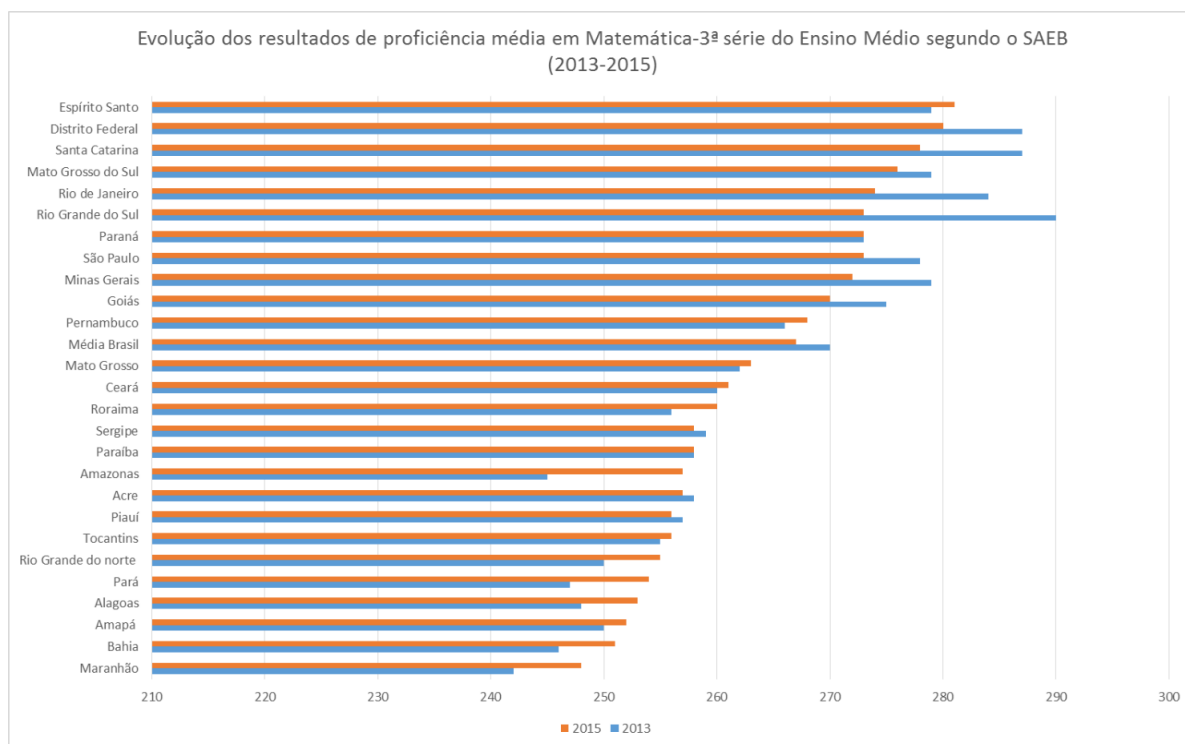


Figura 2.3: Evolução dos resultados do SAEB por Estado entre 2013 e 2015 - Fonte: INEP

2.2 ENEM

O ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio, foi implementado em 1995, pela Portaria nº 438, do MEC, com o objetivo de avaliar, individualmente e por competências, o desempenho dos alunos que concluem o Ensino Médio. Para Mauro Luiz Rabelo, o ENEM tem dois eixos estruturantes: a inter-

disciplinaridade e a contextualização de problemas expressos na forma de situação-problema. O ENEM funciona como um instrumento de medição de competências e habilidades e, além disso, fornece a cada participante um parâmetro para a autoavaliação e orientação no seu processo de formação continuada. Ele permite, assim, que o concluinte faça uma análise a respeito do que considera ter aprendido em sua Educação Básica, da sua expectativa em relação à continuidade de seus estudos e à sua inserção no mercado de trabalho. Ademais, o ENEM possibilita a coleta de dados importantes para se formular políticas públicas educacionais. Segundo o site do INEP, em [42], em 2005, o ENEM tornou-se um mecanismo de seleção para ingresso em Instituições Federais de Educação Superior, democratizando, dessa forma, o acesso às vagas nestas universidades. Para Rabelo (2013), em [36], esse mecanismo iniciou-se em 2009 e, além disso, o ENEM incorporou funções atribuídas ao Exame Nacional para Competências de Jovens e Adultos do Ensino Médio, o ENCCEJA. O ENEM tem como ferramenta de avaliação a Teoria da Resposta ao item (TRI), a ser exposta no Capítulo 3. A sua utilização, nas palavras de Rabelo (2013), em [36], possibilitou a construção de uma série histórica do desempenho dos estudantes egressos do Ensino Médio brasileiro nas habilidades aferidas. A Matriz de Referência do ENEM, que teve por base a do ENCCEJA e a utilizada no período entre 1998 e 2008, é dividida em quatro áreas de conhecimento, a saber:

- Linguagem, Códigos e suas tecnologias (incluindo redação);
- Ciências Humanas e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- Matemática e suas Tecnologias.

De acordo com a descrição de Rabelo (2013), em [36], as matrizes de referência do ENEM são elaboradas baseando-se em eixos cognitivos, que são comuns a todas as quatro áreas de conhecimento. Cada área de conhecimento possui as suas competências, habilidades e os objetos de conhecimento que são específicos de cada disciplina.

Os eixos cognitivos

A proposta do Exame, dada pela Portaria INEP/MEC nº 109, de 27 de maio de 2009, assume o pressuposto de que os conhecimentos adquiridos ao longo da escolarização devem possibilitar ao jovem o domínio de 5 eixos cognitivos, comuns a todas as disciplinas. Domínio de Linguagens (**DL**), Compreensão de Fenômenos (**CF**), Enfrentamento de Situações-Problema (**SP**), Construção de Argumentação (**CA**) e Elaboração de Propostas (**EP**). Na matriz de referência do novo Exame, os 5 eixos cognitivos correspondem às ações, operações mentais que todos os jovens e adultos devem desenvolver como recursos mínimos que os habilitam a enfrentar o mundo que os cerca, com suas responsabilidades e desafios. Rabelo (2013), em [36], assim descreve cada um desses eixos comuns à disciplina:

- **Dominar Linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa; fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa;
- **Compreender Fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos históricos e geográficos, de produção tecnológica e das manifestações artísticas;

- **Enfrentar Situações-Problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema;
- **Construir Argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente;
- **Elaborar Propostas (EP):** recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para a elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Por sua vez, em cada uma das quatro áreas, foram organizadas matrizes de referências a serem avaliadas. Nessa concepção, as matrizes de referências de Matemática e Suas Tecnologias descrevem as interações mais abrangentes ou complexas nas competências, e cada uma destas se desdobra em habilidades que detalham em caráter *stricto sensu* cada uma das competências avaliadas. Esses objetos de conhecimento, organizados em competências e habilidades, são selecionados das Orientações Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM), que segundo Rabelo (2013), em [36], aproxima o ENEM destas orientações sem abandonar o modelo de avaliação centrado no desenvolvimento de competências. Como este trabalho tem como objetivo a discussão e a busca de soluções para o alto quantitativo de reprovações na disciplina de Cálculo 1 e a alta evasão no curso de Matemática, focaremos única e exclusivamente na matriz de referência quarta sub-área, que é Matemática e suas tecnologias.

A matriz de referência do ENEM em Matemática e suas Tecnologias

Cada uma dessas áreas expostas como sendo objetos de avaliação do ENEM é organizada em competências e cada uma delas é desdobrada em habilidades e objetos de conhecimento. Além disso, todas essas áreas possuem cinco eixos cognitivos em comum, expostos na parte introdutória deste tópico. Ademais, detalharemos a matriz de referência de Matemática, que é composta pelas competências, explicitando as habilidades e os objetos de conhecimento de cada uma destas. Os objetos de conhecimento são os seguintes:

- **Conhecimentos Numéricos:** operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais); desigualdades; divisibilidade; fatoração; razões e proporções; porcentagem e juros; relações de dependência entre grandezas; sequências e progressões; princípios de contagem;
- **Conhecimentos Geométricos:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; Teorema de Tales, relações métricas nos triângulos; circunferência; trigonometria nos ângulos agudos;
- **Conhecimentos de Estatística e Probabilidade:** representação e análise de dados; medidas de tendência central (mediana, moda e média); desvios e variância, noção de probabilidade;
- **Conhecimentos Algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1º e 2º grau; polinômios racionais; exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas;
- **Conhecimentos Algébricos e Geométricos:** plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade; sistemas de equações.

Competências e Habilidades

Por sua vez, as competências em Matemática e suas Tecnologias são desdobradas em habilidades da seguinte forma:

Competências da área 1: Construir significado para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

- H1 Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações naturais, inteiros, racionais ou reais;
- H2 Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem;
- H3 Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos;
- H4 Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumento sobre afirmações quantitativas;
- H5 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competências da área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

- H6 Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional;
- H7 Identificar características de figuras planas ou espaciais;
- H8 Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- H9 Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competências da área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

- H10 Identificar relações entre grandezas e unidades de medida;
- H11 Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano;
- H12 Resolver situações-problema que envolvam medidas de grandeza;
- H13 Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente;
- H14 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competências da área 4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

- H15 Identificar a relação de dependência entre grandezas;
- H16 Resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais;

- H17 Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação;
- H18 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competências da área 5: Modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

- H19 Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas;
- H20 Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas;
- H21 Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos;
- H22 Utilizar conhecimentos algébricos ou geométricos como recurso para a construção de argumentação;
- H23 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competências da área 6: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

- H24 Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências;
- H25 Resolver situações-problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos;
- H26 Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recursos para a construção de argumentos.

Competências da área 7: Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras, e cálculos de probabilidade para interpretações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

- H27 Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos;
- H28 Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos de estatística e probabilidade;
- H29 Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação;
- H14 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Segundo Rabelo (2013), em [36], as matrizes de referência do ENEM, em particular as de Matemática, têm caráter tridimensional, isto é, existem relações entre os eixos cognitivos, as competências de área e as habilidades específicas, que são mostradas de forma clara no quadro abaixo.

Competências de área	DL	CF	SP	CA	EP
C1	H1	H2	H3	H4	H5
C2	H6	H7	H8	H9	
C3	H10	H11	H12	H13	H14
C4		H15	H16	H17	H18
C5	H19	H20	H21	H22	H23
C6			H24	H25	H26
C7		H27	H28	H29	H30

Figura 2.4: Relações entre competências, habilidades e eixos cognitivos - Matemática e suas Tecnologias

Segundo Rabelo (2013), em [36], a interpretação das escalas de proficiência tem sido elaborada, mas ainda não foi divulgada pois nem todas as faixas de escala possuem itens âncoras que possibilitam informação a respeito da habilidade aferida. Portanto, diferentemente do SAEB, através dos níveis de rendimento em que o aluno se encontra, não se pode fazer uma indicação precisa de quais ferramentas matemáticas o ingressante domina para aquelas faixas de conhecimento definidas no ENEM. Segundo a nota explicativa do INEP, que pode ser encontrada em seu site oficial, em [42], essas faixas são divididas em 5 níveis de proficiência média da escola em cada disciplina, dada pela média dos alunos naquela disciplina. Diferentemente do SAEB, no ENEM, calcula-se a proficiência média das escolas valendo-se dos dados obtidos pelo Censo Escolar, que é realizado em cada escola. Para o cálculo da proficiência média, é considerado o cálculo do quantitativo de alunos matriculados naquela escola dado o Censo Escolar daquele ano e a participação da escola no Exame. No SAEB, a avaliação é por amostragem de escolas públicas e particulares no 3º ano, enquanto que, no ENEM, a avaliação é feita com base no Censo Escolar, onde todas as escolas participam e o resultado é divulgado por estabelecimento de ensino. Dessa forma, dividiremos o estudo em duas partes: a sinopse dos resultados do ENEM em todo o Brasil, separando por escolas públicas e particulares; e o estudo de um possível impacto do ingresso do aluno no curso de Matemática via ENEM/SISU e no seu desempenho na disciplina de Cálculo 1 no curso de Matemática.

2.2.1 Os resultados nacionais de Matemática segundo o ENEM

Os resultados do Exame são obtidos através da Teoria da Resposta ao item, que, conforme será visto no Capítulo 3, tem como um de seus parâmetros o grau de dificuldade do item. Isso significa que, em uma mesma avaliação, dois candidatos que acertam uma mesma quantidade de questões podem ter desempenhos diferentes. A prova do ENEM, por si só, não faz uma avaliação geral do candidato, mas afere o seu desempenho nos Eixos Cognitivos gerais dentro de cada uma dessas quatro áreas. O ENEM, a partir de 2009, passou a ser uma via de ingresso na Universidade através do Sistema de Seleção Unificada, o SISU, utilizado por Instituições de Educação Superior (IES), dentre estas a Universidade de Brasília. Segundo o site oficial do MEC, as Instituições de Nível Superior definem pesos para cada uma das 5 áreas em cada curso ofertado pela IES via SISU. Isso significa que, em um curso de Matemática ou de Engenharia, a área Matemática e suas suas Tecnologias deve ter mais peso que Ciências Humanas e suas Tecnologias. Na próxima seção, far-se-á um estudo quantitativo sobre hipóteses de possíveis impactos no desempenho de ingressantes na disciplina de Cálculo 1. No Capítulo 2, foram expostos dados sobre o teste de conhecimento dado a uma amostra de alunos de Cálculo 1 juntamente com a entrevista realizada. Obtivemos dados que apontam que, dentre os alunos ingressantes, aqueles que estudaram em Escolas Privadas que obtiveram desempenho menor que 50% foram cerca de 71%, ao passo que, dentre alunos oriundos de Escolas Públicas, foi em torno de 90%. Para se traçar um desempenho do discente com

base na nota do ENEM, foi realizado um estudo comparativo dos desempenhos médios dos estudantes ingressantes do Ensino Médio, separando-os entre aqueles oriundos de Escolas Públicas e os de Escolas Particulares, uma vez que o INEP fornece as proficiências médias por escola. A proficiência média do estabelecimento de ensino é a média aritmética da nota de todos os estudantes participantes do ENEM naquela escola, conforme definido na Nota Explicativa do INEP, em [45]. Esse Cálculo toma por base o número de participantes da escola com base no Censo Escolar daquele ano, conforme visto na nota do INEP, em [45]. A proficiência média por escola é dividida em 5 níveis, em conformidade com os microdados do ENEM expostos no site oficial do INEP, em [42]:

- Nível 1: Menor que 450;
- Nível 2: De 450 a 549,99;
- Nível 3: De 550 a 649,99;
- Nível 4: De 650 a 749,99;
- Nível 5: maior que 750.

Diferentemente do SAEB, não conseguimos presumir quais competências o aluno desenvolve sem dificuldades, mas conseguimos traçar um panorama do aprendizado, de forma satisfatória, pelos alunos do Ensino Médio em Matemática. Os gráficos apontam vantagem das Escolas Particulares em relação às Públicas, embora seja válido apontar que o número de estudantes nos três últimos anos sempre foi maior que o de Escolas Privadas, o que faz com que as médias nestas tendam a ser maiores que naquelas, conforme apontarão os gráficos a seguir, obtidos através de microdados do site oficial do INEP, em [42]. De acordo com o Censo Escolar de 2015, o número de estudantes matriculados na rede pública foi próximo de 70%, ao passo que, nas escolas particulares, esse percentual foi de aproximadamente 30%. Nas próximas figuras, mostraremos uma série histórica dos números de matrículas segundo o Censo, do número de inscritos no ENEM, das Proficiências Médias e da Distribuição dos Níveis, comparando escolas públicas e particulares.

Os gráficos abaixo mostram, a partir dos dados coletados nos microdados do ENEM, obtidos no site oficial do INEP, em [42], o quantitativo de matrículas no 3º ano do Ensino Médio em escolas Públicas e Particulares e o quantitativo de inscritos no ENEM segundo os Censos realizados nos anos seguintes. Segundo a nota explicativa do ENEM (2014), dado em [45], não existe uma chave de ligação que permita unir a base de dados do ENEM e a do Censo Escolar. Dessa forma, é realizada a busca exata dos dados dos alunos inscritos no ENEM no Censo Escolar do ano referente à avaliação. Além disso, é aplicado no processo de avaliação um processo de consistência por meio de um script de verificação fonética, entre os dados informados pelo participante na inscrição do ENEM e os dados cadastrados no Censo Escolar. Segundo esses dados coletados, no Distrito Federal, cerca de 70% dos alunos matriculados no ENEM estiveram matriculados em escolas públicas, aí incluídas escolas distritais e federais, e cerca de 30% dos alunos estiveram matriculados em escolas privadas. Dos inscritos no ENEM, no último ano pesquisado, de 2015, pouco mais de 66% dos alunos inscritos no ENEM, no Distrito Federal, eram oriundos da rede pública de ensino, contra pouco mais de 33% dos alunos que estavam matriculados na rede privada de ensino.

Os microdados do ENEM fornecem os dados das escolas de todos os estados do ENEM, das avaliações do SAEB, do PISA, e também do IDEB. Este trabalho se ateve a pesquisar a amostra no Distrito

Federal, uma vez que presume ser o DF a origem da maioria dos alunos da Universidade. É possível verificar também nesses microdados os resultados do ENEM e de outras avaliações também de outros estados.

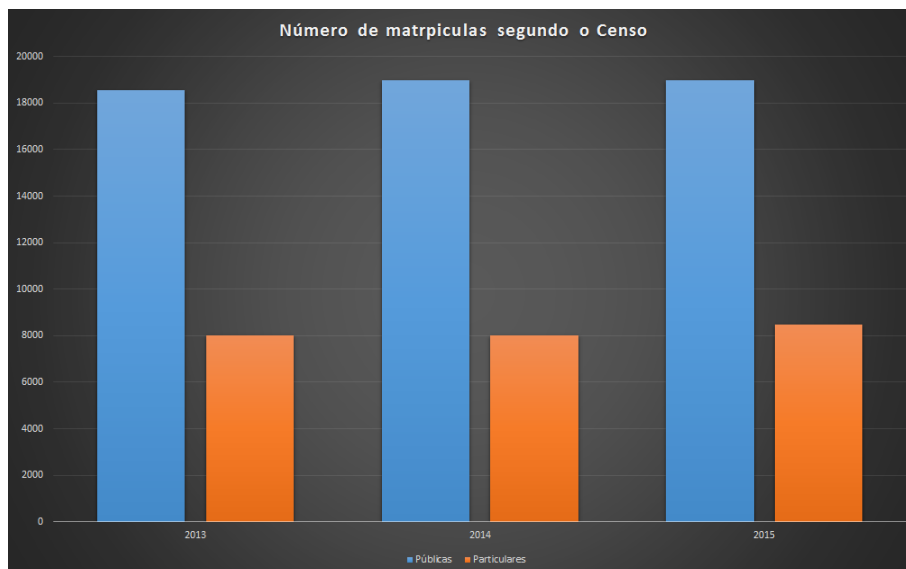


Figura 2.5: Distribuição de alunos matriculados no 3º ano do Ensino Médio

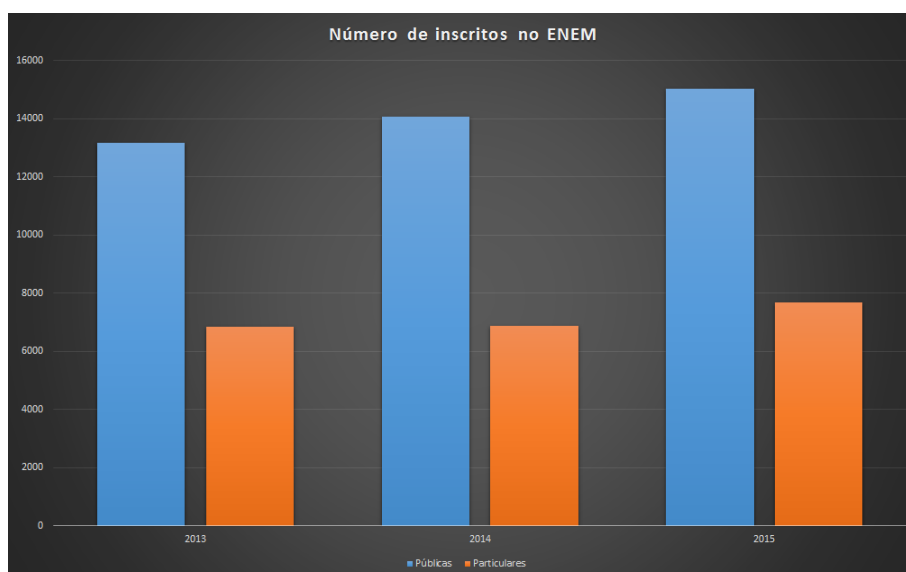


Figura 2.6: Distribuição de alunos inscritos no ENEM

Um outro dado coletado foi sobre a proficiência média dos alunos. Os microdados relacionados ao ENEM, fornecidos pelo INEP, em [42], fornecem as médias de cada escola no ENEM. Por ter uma quantidade de estudantes menor que a das escolas públicas, além de ter escolas que apresentaram excelente proficiência média, a média dos melhores alunos das escolas particulares apresentou-se sempre 12% superior a das escolas públicas. A média geral dos alunos das escolas privadas variou entre 19% e 21% superior a dos alunos de escolas públicas, conforme detalhamos nos gráficos a seguir. Além disso, os resultados

dos últimos anos do ENEM apontam que o Exame realizado em 2013 teve questões de Matemática mais difíceis que nas duas outras provas, conforme mostrado no site oficial do INEP, em [42].

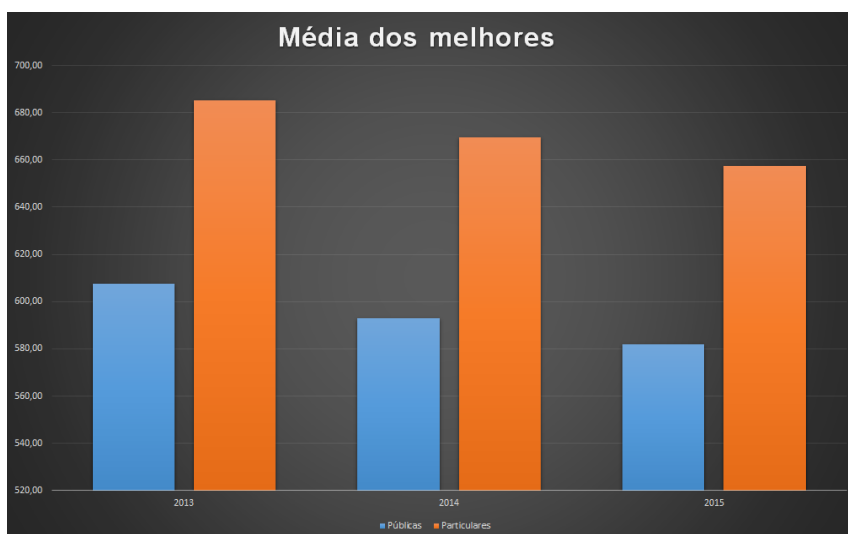


Figura 2.7: Distribuição das Médias dos melhores alunos no ENEM em 2013, 2014 e 2015

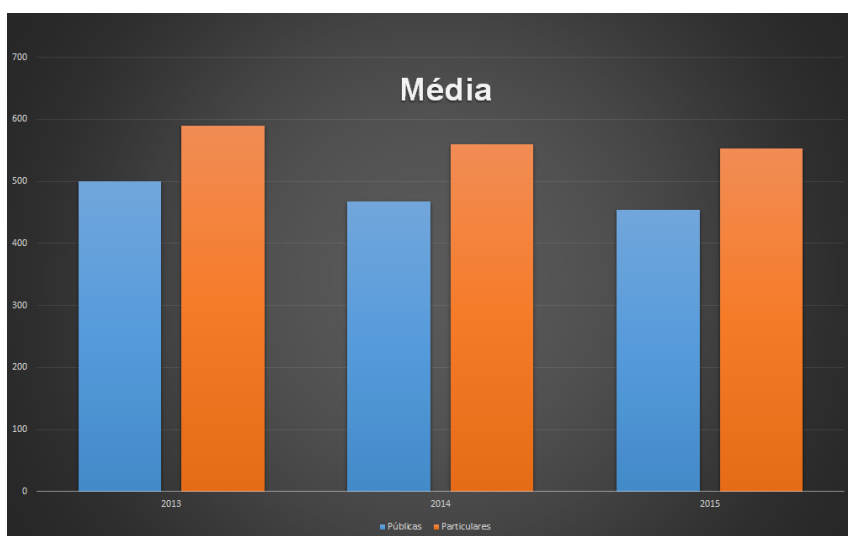


Figura 2.8: Distribuição das Médias dos alunos no ENEM em 2013, 2014 e 2015

Por fim, apresenta-se também a distribuição por Níveis de Ensino. Nota-se um avanço no quantitativo de alunos oriundos de escolas públicas nos dois últimos níveis de proficiência média no Exame, embora ainda exista uma prevalência de alunos de colégios particulares nestes dois níveis e, além disso, o percentual de alunos oriundos de escolas públicas classificados no Nível 1 aumentou significativamente, pulando de cerca de 30%, em 2013, para aproximadamente 50%, em 2015. Nas escolas privadas, também houve um avanço no percentual de alunos classificados nesse nível mais fraco do ENEM, aumentando-se de 9,62% em 2013 para 22,34% em 2015. Essas evoluções são mostradas no gráfico a seguir:

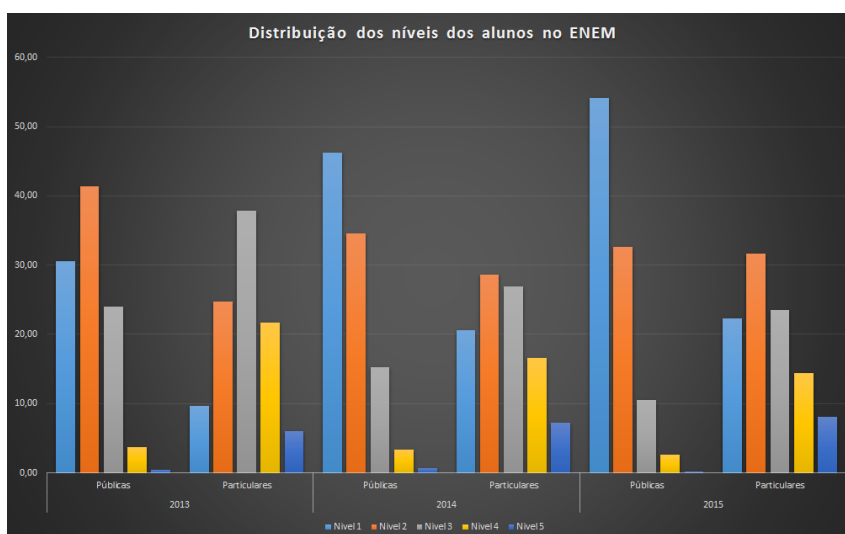


Figura 2.9: Distribuição das Médias dos alunos no ENEM em 2013, 2014 e 2015

2.2.2 O impacto do ENEM na disciplina de Cálculo na Universidade

Nossa coleta de dados fez um levantamento a respeito do quantitativo de alunos que ingressou no ENEM ano a ano e mediu a correlação linear entre a proporção de ingressantes via ENEM naquele período letivo e os índices de reprovação. Segundo o teste feito, a correlação entre essas duas proporções sugere uma relação positiva entre o quantitativo de alunos ingressantes via ENEM e o índice de reprovações. Fazendo uma comparação entre valores esperados para o Índice Líquido de Reprovação e o resultado, percebeu-se que existe uma dispersão muito pequena entre as taxas de reprovação observadas e esperadas, considerando-se que existem períodos letivos em que não ingressaram alunos via ENEM. Segundo Bussab e Morettin (2012), em [6], quando se tem uma grande correlação linear, em módulo, não se pode descartar que existe um nível de dependência, positiva ou negativa, dessas variáveis. Da perspectiva da regressão linear, nos casos em que houve maior proporção de ingressantes via ENEM, nota-se que os Índices Líquidos de Reprovação (ILR) apresentaram-se maiores ou iguais ao ILR esperado. O procedimento da análise do impacto do ENEM sobre os ILR's encontra-se nas tabelas a seguir:

Ingressos	Diurno	Noturno	Total
2010 – 1	38	32	70
2010 – 2	36	32	68
2011 – 2	37	32	69
2011 – 1	36	32	68
2012 – 1	35	29	64
2012 – 2	25	29	54
2013 – 1	36	29	65
2013 – 2	37	33	70
2014 – 1	36	32	68
2014 – 2	38	33	71
2015 – 1	36	32	68
2015 – 2	36	32	68
2016 – 1	19	35	54
2016 – 2	35	33	68

Figura 2.10: Totais de ingressantes

Essa tabela indica o total de ingressantes ano a ano no curso de Matemática, turnos Noturno e Diurno. Como o quantitativo de alunos ingressantes varia ano a ano, então é importante calcularmos os índices relativos líquidos de reprovação, para que tenhamos maior honestidade no estudo das reprovações, conforme consta na tabela a seguir:

Matrículas	Repetentes	Abandonos	Reprovações	TR	ILR
121	51	19	22	0	0,216
140	72	18	45	0	0,369
163	94	27	67	2	0,500
152	84	51	26	2	0,262
168	104	28	53	7	0,398
160	106	44	43	7	0,394
150	85	37	37	8	0,352
140	70	30	35	2	0,324
134	66	19	48	10	0,457
63	0	10	21	2	0,412
69	1	10	22	2	0,386
60	0	18	16	2	0,400
68	14	14	31	0	0,574
64	0	13	18	1	0,360

Figura 2.11: Taxas líquidas de reprovação ano a ano

Presume-se aqui que todos os alunos ingressantes estiveram matriculados na disciplina de Cálculo 1, uma vez que, segundo o fluxograma do curso de Matemática da UnB, a disciplina é cursada no 1º semestre do curso. O Índice Líquido de Reprovação (ILR) foi calculado com base no número de matriculados nessa disciplina, descontando-se os abandonos e os trancamentos, visando-se a dar mais honestidade à pesquisa conforme a fórmula

$$ILR = \frac{\text{reprovações}}{\text{matrículas} - \text{trancamentos} - \text{abandonos}}.$$

Os valores dos ILR's calculados serão os valores observados na análise de regressão a ser feita.

ENEM/SISU	Diurno	Noturno	Total	Proporção de ingressos via ENEM/SISU	Quadrados
2010 – 1	0	0	0	0	0
2010 – 2	0	0	0	0	0
2011 – 2	0	0	0	0	0
2011 – 1	0	0	0	0	0
2012 – 1	0	13	13	0,203	0,041
2012 – 2	5	9	14	0,259	0,067
2013 – 1	0	13	13	0,2	0,040
2013 – 2	0	0	0	0	0
2014 – 1	18	22	40	0,588	0,346
2014 – 2	0	0	0	0	0
2015 – 1	18	16	34	0,5	0,25
2015 – 2	0	0	0	0	0
2016 – 1	18	19	37	0,685	0,469
2016 – 2	0	0	0	0	0

Figura 2.12: Proporção de estudantes via ENEM ano a ano e seus quadrados

Aqui montamos a proporção de estudantes via ENEM e seus quadrados. Para fazer essas análises, utilizamo-nos de conceitos relacionados à Estatística. Defina x para os valores das proporções dos ingressantes via ENEM e y os ILR's. Para se calcular a correlação linear entre as duas variáveis ρ , necessita-se da variância, do desvio padrão e da covariância entre as duas variáveis em questão. O cálculo da variância $\text{var}(x)$ de uma variável aleatória é dada por $\text{var}(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, onde $\overline{x^2}$ é a média dos valores dos quadrados da proporção de ingressantes via ENEM; os valores de y são os ILR's dos períodos letivos de 2010-1 até 2016-2 e \bar{x}^2 é a média das proporções de ingressantes via ENEM elevadas ao quadrado, e o desvio padrão $\sigma(x)$ dessa variável é a raiz quadrada de sua variância. O desvio padrão representa o erro médio entre as variáveis, isto é, um erro relativo entre as variáveis em cada observação. Define-se como covariância entre as variáveis x e y a relação $\text{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$, onde o produto xy significa multiplicar cada duas variáveis, x e y , observadas concomitantemente. A relação \overline{xy} representa a média desses produtos. Por fim, a correlação linear entre essas variáveis é dada por $\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$, onde $-1 < \rho < 1$. A correlação linear estuda o nível de dependência entre duas variáveis aleatórias e é classificada da seguinte maneira, em módulo: *i*) $0 < |\rho| < 0,2$ (correlação fraca); *ii*) $0,2 < |\rho| < 0,4$ (correlação moderadamente fraca); *iii*) $0,4 < |\rho| < 0,6$ (correlação moderadamente forte); *iv*) $0,6 < |\rho| < 1$ (correlação forte).

Covariância entre ILR versus ENEM	0,012
Variância ENEM	0,056
Variância ILR	0,007
Desvio ENEM	0,237
Desvio ILR	0,086
Correlação	0,586
Coefficiente de ajuste	0,213
Coefficiente linear	0,349

Figura 2.13: Cálculo da correlação e dos coeficientes para ajuste linear

Total	Proporção de ingressos via ENEM/SISU	ILR	ILR esperado
0	0	0,216	0,349
0	0	0,369	0,349
0	0	0,5	0,349
0	0	0,263	0,349
13	0,203	0,398	0,392
14	0,259	0,395	0,404
13	0,2	0,352	0,392
0	0	0,324	0,349
40	0,588	0,357	0,474
0	0	0,411	0,349
34	0,5	0,386	0,455
0	0	0,4	0,349
37	0,685	0,574	0,495
0	0	0,36	0,349
Media	0,174	0,386	

Figura 2.14: Valores observados e esperados dada a proporção de estudantes ingressantes via ENEM

Nas tabelas acima, têm-se os dados obtidos através de uma regressão linear dos dados e o resumo desses valores calculados. Trabalhamos em cima de valores esperados e observados e fizemos uma comparação entre eles com vistas a, além de tentar observar um nível de dependência linear entre essas variáveis, contrastar o valor observado e o valor esperado. Para isso, usou-se a equação linear $\hat{y} = a + bx$ para adaptar as variáveis independentes e encontrar os ILR's esperados, onde o parâmetro b , conhecido como coeficiente de regressão, é dado por $b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}$. Nesse caso, sendo x a variável independente que representa as proporções de ingressantes via ENEM e \hat{y} a variável resposta, que representa os valores esperados para a ILR dadas as proporções de ingressantes via ENEM, temos que x representa a proporção de ingressos via este processo seletivo. O ILR esperado, por sua vez, faz o papel da variável resposta. O coeficiente linear a da equação de regressão é dado por $\bar{y} - b \cdot \bar{x}$, onde b é o coeficiente regressor, \bar{y} é a média dos valores observados para a variável resposta. Neste caso tratam-se dos ILR's obtidos na coleta de dados, e \bar{x} é a média das variáveis independentes.

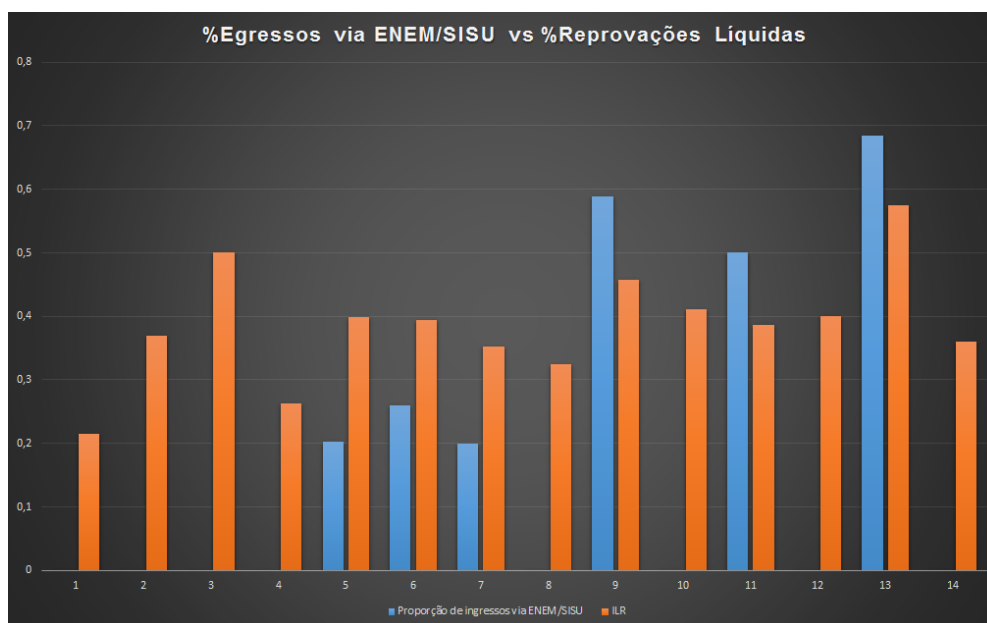


Figura 2.15: Comparativo entre o ILR e o quantitativo de ingressantes via ENEM naquele semestre

No gráfico acima, podemos observar que existe uma correlação moderadamente forte entre esses dois dados. Nota-se que um aumento na proporção de ingressantes via ENEM, segundo a estatística feita, tende a aumentar também a proporção de reprovados na disciplina de Cálculo 1. Isso pode ser observado no período letivo de 2016-1, correspondente à observação de número 14 nesse gráfico de colunas. Nos períodos 2012-1, 2012-2 e 2013-1, correspondente aos números 5, 6 e 7, aponta-se que as quedas nas duas taxas foram praticamente proporcionais e concomitantes. Observa-se também que, nos períodos 2014-1 e 2015-1, respectivamente representados por 9 e 11 no gráfico, observa-se também essa relação. Comparados aos demais índices, são períodos que estão entre os maiores ILR's observados.

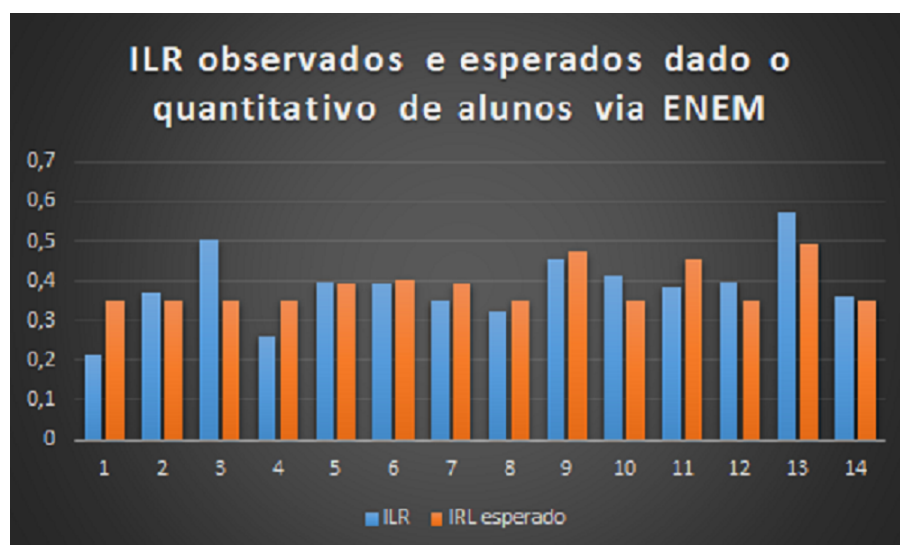


Figura 2.16: Comparativo entre valores observados e valores esperados para o ILR

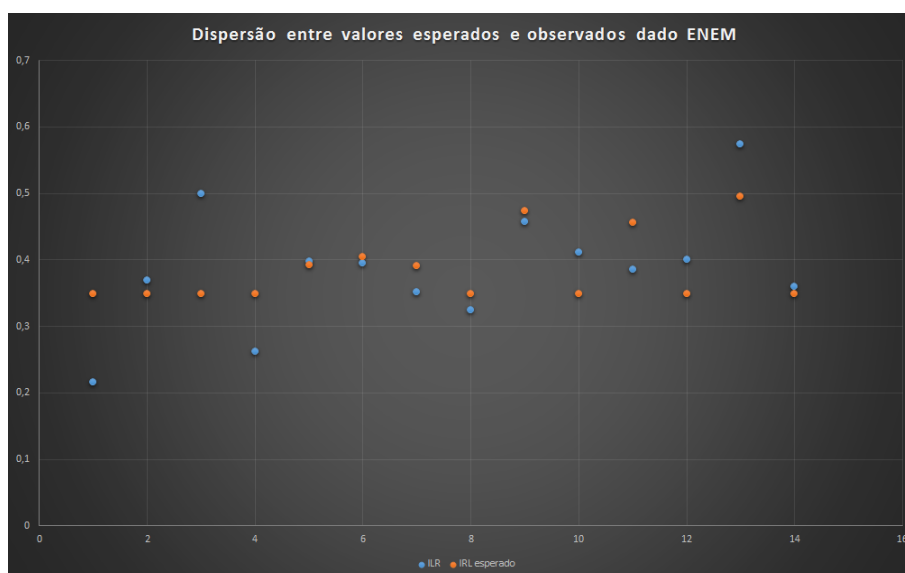


Figura 2.17: Gráfico de dispersão entre valores observados e valores esperados para o ILR

Os gráficos acima foram obtidos usando-se a correlação e fazendo uma regressão linear entre os valores observados e os valores esperados entre essas duas variáveis: Índice Líquido de Reprovação versus Quantitativo de alunos ingressantes via ENEM. A correlação entre a proporção de ingressantes via ENEM e os índices observados foi de aproximadamente 0,59, o que representa uma correlação moderadamente forte. Observando-se o gráfico de dispersão entre valores observados e valores esperados, nota-se que, nos períodos em que existiu um quantitativo de estudantes ingressantes via ENEM, houve uma considerável proximidade entre esses valores. O mesmo pode ser observado no gráfico de barras. Esse gráfico aponta que os valores esperados e observados são praticamente iguais, sendo que, no período de 2016-1, período em que houve maior dispersão, observamos maior proporção de ingressantes via ENEM em relação ao total de matrículas.

2.3 O impacto do PAS na disciplina de Cálculo 1 na Universidade

O Programa de Avaliação Seriada (PAS) é uma forma de ingresso na Universidade de Brasília. Ele é análogo a um vestibular dividido em três etapas. Os Princípios Orientadores do PAS, disponíveis no próprio site oficial do Centro de Seleção de Promoções e Eventos (CESPE), definem o PAS como sendo uma forma de integração entre a Educação Básica e a Educação Superior, que inclui a seleção de estudantes de modo gradual e sistemático segundo um processo que ocorre ao longo do Ensino Médio, conforme relatado no site oficial do CESPE, em [44]. O PAS foi instituído em 1995, por meio de uma comissão constituída pela Resolução 032. Em 1997, foi incluída no PAS a prova discursiva em Língua Portuguesa, abordando conteúdos de diversas disciplinas, deixando claro a interdisciplinaridade como sendo o eixo estruturador das provas do PAS. Essa tendência acompanha o PAS até os dias atuais. Não se avaliam disciplinas separadamente, mas dentro de um contexto se abordam questões de Matemática, Física, Química e até mesmo de História e Geografia. Os Princípios Norteadores, encontrados no site oficial do CESPE, em [44], definem os seguintes pressupostos:

- Os sistemas de acesso à Universidade têm uma influência inegável no Ensino Médio, tanto no conteúdo ministrado quanto no seu enfoque epistemológico. Os vestibulares, tais como vêm sendo feitos na maior parte das instituições da Educação Superior, têm privilegiado o adestramento, o ensino livresco, fragmentado, alienante e anacrônico, e a memorização mecânica. Aquela influência, entretanto, pode ser positiva se houver convergência entre o sistema de acesso e os objetivos próprios do Ensino Médio, como a formação de cidadania, a preparação para o trabalho e o desenvolvimento de competências e habilidades;
- Alterações nos sistemas de acesso exigem também mudanças no eixo de decisão quanto ao estabelecimento do item da forma de avaliação e dos conteúdos programáticos, tornando necessária a participação de professores do Ensino Médio, ao lado dos da Universidade;
- Diante da quantidade e da disponibilidade cada vez maiores de informações na sociedade atual, o estudante, mais do que acumular informações, necessita capacitar-se para selecioná-las criteriosamente e gerenciá-las criticamente. O processo educacional deve contribuir para tornar o educando um cidadão responsável, consciente de seus deveres e direitos, autônomo em suas escolhas e competente para a tomada de decisões e a resolução de problemas. Isso exige também uma nova postura dos educadores;
- O processo educacional deve estar centrado em conteúdos relevantes para a formação do cidadão, respeitadas as especificidades das diferentes disciplinas. Para o acesso à Educação Superior, o estudante deve ser avaliado quanto ao desenvolvimento de competências e habilidades, por meio da aprendizagem significativa daqueles conteúdos;
- É preciso que a mudança de postura de educadores seja tratada como processo em construção. Nele, destaca-se o papel da interação da Universidade com a Educação Básica, que deve incluir, ainda, a comunidade científica, os administradores escolares, os pais de alunos e demais componentes da comunidade escolar.

A ideia da interdisciplinaridade, da formação crítica do cidadão, é válida. Porém, dentro do curso de Matemática, para se concluir com êxito a disciplina de Cálculo 1, é necessário que o aluno tenha certa bagagem em matemática, conforme debateu-se no Capítulo 1.

As provas do PAS, no seu objetivo geral de buscar a qualidade do ensino em todos os níveis e de adotar como eixo estruturante a interdisciplinaridade, têm uma tendência a tentar deixar os conteúdos cada vez mais integrados uns com os outros. Observando-se as últimas provas do PAS, há poucas questões de Matemática. O problema deste processo é que cada vez mais ele acontece em detrimento do que o aluno deveria aprender em Matemática no Ensino Médio, especialmente aqueles que desejam seguir carreira em uma área de exatas. Além disso, as escolas, no afã de terem como propaganda uma maior aprovação em processos seletivos, dentre eles o PAS, acabam por trabalhar com exaustão questões destas avaliações.

Dessa forma, o PAS, embora bem-intencionado, acaba por não ter sucesso no combate ao problema mencionado no primeiro item de seus pressupostos, que é o adestramento e o ensino livresco, pois os cursos pré-vestibulares e as escolas secundárias terminam por fazer com que os alunos aprendam apenas a parte da manipulação de exercícios de Matemática em detrimento da conceituação das ferramentas, isto é, todo o aprendizado se torna um mero apanhado de algoritmos a serem decorados. Essa circunstância pode ser confirmada na entrevista realizada com professores de Matemática, a ser exposta no fim deste capítulo. As questões específicas de Matemática são cada vez mais reduzidas, o que pode levar o aluno, caso ele opte por um curso de Exatas, a ter o seu desempenho em Cálculo e demais disciplinas comprometido. Tal como foi feito com os alunos que ingressaram no Curso de Matemática via ENEM, foi realizado um estudo, calculando a correlação entre a proporção de ingressantes via PAS e o índice de reprovação nesses anos, conforme será visto a seguir.

As tabelas abaixo serão úteis para se fazer um estudo análogo ao realizado na subseção 2.2.2. A primeira mostra a proporção de alunos que ingressaram no Curso de Matemática, nos períodos de 2010 a 2016, e seus respectivos quadrados, para que se obtenham as variâncias e desvios dos ILR's e das proporções de ingressantes via PAS, e seja possível também calcular a covariância e a correlação entre esses dois dados.

Egressos	Diurno	Noturno	Total	PAS	Proporção PAS	Qua PAS
2010 – 1	38	32	70	26	0,371	0,138
2010 – 2	36	32	68	0	0,000	0,000
2011 – 1	37	32	69	15	0,217	0,047
2011 – 2	36	32	68	0	0,000	0,000
2012 – 1	35	29	64	25	0,391	0,153
2012 – 2	25	29	54	0	0,000	0,000
2013 – 1	36	29	65	17	0,262	0,068
2013 – 2	37	33	70	0	0,000	0,000
2014 – 1	36	32	68	28	0,412	0,169
2014 – 2	38	33	71	0	0,000	0,000
2015 – 1	36	32	68	34	0,500	0,250
2015 – 2	36	32	68	0	0,000	0,000
2016 – 1	19	35	54	35	0,648	0,420
2016 – 2	35	33	68	0	0,000	0,000
Totais/Média			925	180	0,200	0,089

Figura 2.18: Proporção do quantitativo de ingressos via PAS e seus quadrados

A tabela abaixo oferece o respectivo produto entre os ILR's observados, na tabela da figura 3.11, e dos percentuais, em valores mnemônicos, de ingressantes via PAS. Esse valor servirá de base para se estudar a regressão da média dos ILR's dado o quantitativo de ingressantes via PAS e também a correlação entre esses dois dados. Calculando a correlação entre essas duas variáveis, obteve-se aqui pouco mais de 40% entre elas, valor considerado moderadamente forte. Não obstante mais fraca que aquela, em comparação com a proporção de ingressantes via ENEM, não se rejeita a hipótese de que exista dependência entre a proporção de ingressantes via PAS e o índice de reprovação em Cálculo 1, isto é, de que o estudante que ingressa no curso de Matemática não tenha uma bagagem para fazer uma disciplina de Cálculo 1.

Período	ILR*PAS
2010 – 1	0,080
2010 – 2	0,000
2011 – 1	0,109
2011 – 2	0,000
2012 – 1	0,156
2012 – 2	0,000
2013 – 1	0,092
2013 – 2	0,000
2014 – 1	0,188
2014 – 2	0,000
2015 – 1	0,193
2015 – 2	0,000
2016 – 1	0,372
2016 – 2	0,000
Produtos	0,085
Covariância	0,008
Variância ILR	0,007
Variância PAS	0,049
Desvio ILR	0,086
Desvio PAS	0,221
Correlação PAS versus ILR	0,405

Figura 2.19: ILR X Proporção via PAS

A terceira tabela, mostrada abaixo, cujos dados foram obtidos de forma análoga à subseção 3.2.2, representa o ILR esperado \hat{y} , depois de calculados os coeficientes de regressão b e o coeficiente linear a . Dessa vez, usou-se a proporção de alunos ingressantes via PAS, onde $\hat{y} = a + bx$.

Regressão da média do ILR dado os resultados do PAS	
Coefficiente de regressão	0,158
Coefficiente linear da regressão	0,354
Período	Valores esperados para a ILR
2010 – 1	0,413
2010 – 2	0,354
2011 – 1	0,389
2011 – 2	0,354
2012 – 1	0,416
2012 – 2	0,354
2013 – 1	0,396
2013 – 2	0,354
2014 – 1	0,420
2014 – 2	0,354
2015 – 1	0,434
2015 – 2	0,354
2016 – 1	0,457
2016 – 2	0,354

Figura 2.20: Estudo da regressão entre ILR vs proporção de ingressantes via PAS

Os gráficos abaixo resumem os valores dos ILR's de cada período letivo em comparação com a proporção de estudantes ingressantes via PAS em cada período. Embora o coeficiente de correlação seja menor que aquele relacionado aos ingressantes via ENEM, nota-se no período letivo de 2016-1 que cerca de 57% dos alunos reprovaram em Cálculo 1. Há de se observar que a ata 270/2103, do Colegiado do Departamento de Matemática, instituiu, a partir do período subsequente, a unificação das provas de Cálculo, isto é, o professor não tem mais autonomia para avaliar os seus próprios alunos. Embora essa autonomia fosse benéfica em alguns aspectos, havia professores que facilitavam excessivamente as provas de modo que se mascarava o real aprendizado dos alunos, impactando dessa forma o seu desempenho nos Cálculos subsequentes e em outras disciplinas. Nos períodos de 2014-1, 2015-1 e 2016-1, correspondentes aos números 9, 11 e 13 no gráfico, períodos letivos em que se observaram os maiores números de matrícula

de alunos ingressos via PAS na disciplina de Cálculo 1, notou-se um índice de reprovação variando entre cerca de 38% e 57%, sendo que, se considerarmos que todos que obtiveram êxito na disciplina são alunos ingressantes via PAS, teríamos, dentre os alunos que ingressam no curso de Matemática por meio deste Programa, um índice de reprovação de aproximadamente 45%, na melhor das hipóteses. Da regressão da média das duas variáveis em questão, realizada na figura 3.20, obteve-se os gráficos a seguir. Neles, pode-se observar que os índices líquidos de reprovação esperados são altos e próximos dos índices reais, especialmente nos períodos de 2014-1, 2015-1 e 2016-1, com uma dispersão maior neste último período. Isso leva à conclusão de que não se deve rejeitar que, por meio do PAS, ingressem alunos que não chegam ao curso de Matemática com bagagem suficiente para realizar a disciplina de Cálculo 1.

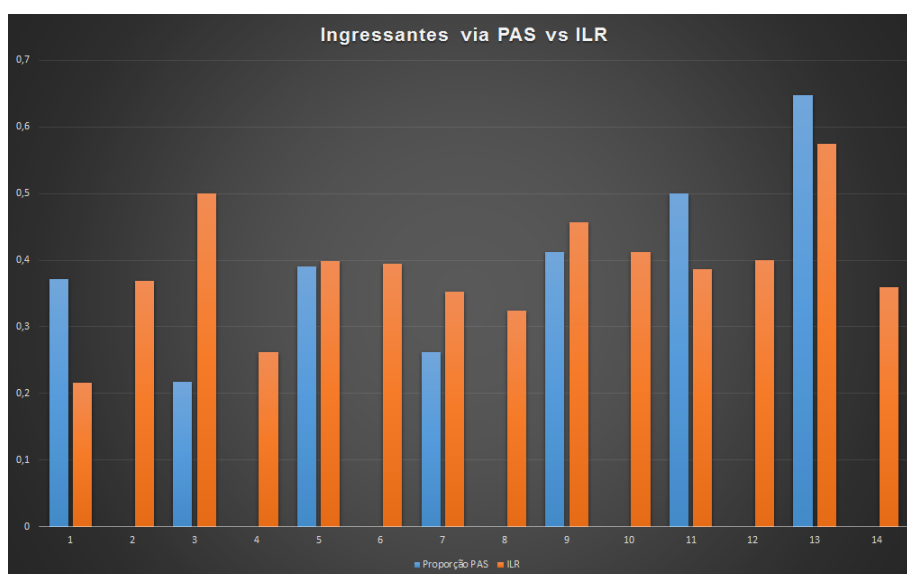


Figura 2.21: gráfico ingressantes via PAS vs ILR

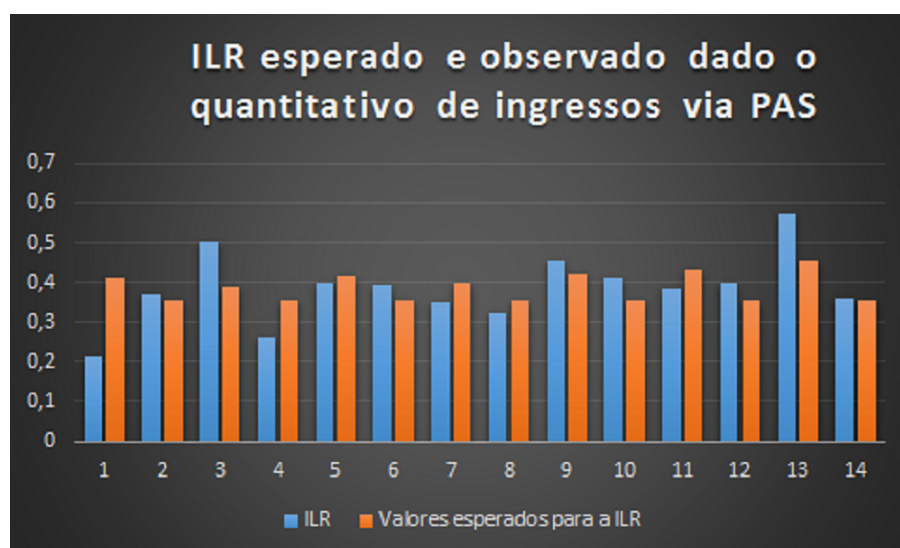


Figura 2.22: Comparativo entre valores esperados e observados dado quantitativo de ingressos via PAS

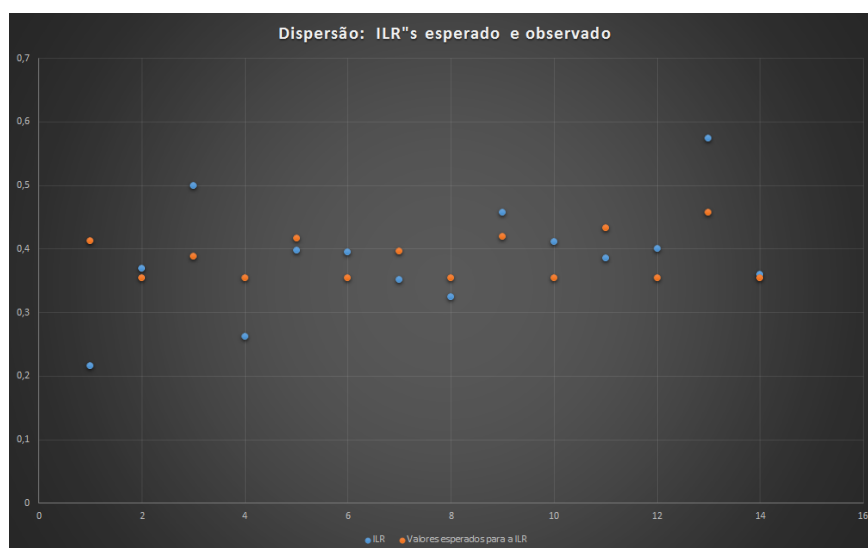


Figura 2.23: Gráfico de dispersão entre valores observados e esperados valores dado quantitativo de ingressos via PAS

Comparando-se os valores observados com os valores esperados, por meio dos gráficos, observa-se que, especialmente após a entrada em vigor da ata 270/2013, em 2014-1, representado pelo ordinal 9 no gráfico, esperava-se um índice de reprovação de 41% contra 45%, que, de fato, ocorreu. No período de 2015-1, indicado pelo ordinal 11, o valor esperado foi maior que o observado: 41% contra 38%, e em 2016-1, indicado no gráfico por 13, o ILR calculado pela Regressão da Média foi de 45% contra os 57% observados. No gráfico de dispersão (Figura 2.23) os pontos estão muito próximos, com uma dispersão maior na penúltima observação, que foi 2016-1. Segundo Bussab e Morettin (2012), em [6], quando os pontos estão muito próximos, não se pode rejeitar a hipótese de que haja uma certa relação de dependência entre essas variáveis. Além disso, nesses últimos anos de observação, observaram-se poucas questões envolvendo Matemática nas três etapas do PAS. Não existe uma ferramenta, portanto, nessa avaliação, capaz de avaliar a aptidão do aluno em Matemática, uma vez que as questões desta disciplina se misturam com questões de outras áreas, não se podendo rejeitar a hipótese de que um aluno pode ingressar no curso de Matemática sem ter acertado uma questão de Matemática desta prova, haja vista que o curso de Matemática tem uma nota de corte relativamente baixa nesta avaliação. Dessa forma, não se pode desconsiderar que um aluno que ingressa no curso de Matemática, através do PAS, tem grandes chances de não fazer a disciplina de Cálculo com êxito, uma vez que se presume que um discente que inicia a graduação em Matemática se matriculará na disciplina de Cálculo 1.

De acordo com os dados apresentados, uma turma que ingressou em 2016-1, por exemplo, considerando, na melhor das hipóteses, que todos os alunos aprovados na disciplina de Cálculo 1 entraram via PAS, teria, dentre esses ingressantes, um índice de reprovação de 45%.

2.4 O impacto do Vestibular na disciplina de Cálculo 1 na Universidade

A coleta de dados do Vestibular da UnB apresentou que, nos períodos correspondentes ao segundo semestre de cada ano, embora exista a possibilidade de ingresso na Universidade via SISU e PAS, todas

as turmas de Matemática referentes a esses períodos foram preenchidas com alunos que ingressaram via Vestibular. No gráfico, os números pertinentes ao segundo semestre são:

2-2010-2; 4-2011-2; 6-2012-2; 8-2013-2; 10-2014-2; 12-2015-2; 14-2016-2.

Em uma ótica quantitativa, tem-se uma correlação negativa. Segundo Bussab e Morettin (2012), em [6], deduz-se que não se pode afirmar que o fato de o ingressante ter feito o Vestibular para ingressar no curso de Matemática impacte o seu desempenho em Cálculo 1 de forma negativa ou positiva, pois os únicos períodos, dentre os analisados, em que o quantitativo de ingressantes via Vestibular foi inferior ao número de alunos aprovados na disciplina foi os de 2014-2 e de 2015-1. Isso não garante que, nos demais períodos letivos, todos os alunos ingressantes via Vestibular foram aprovados, mas existe esta possibilidade. As próximas tabelas, além de mostrarem o quantitativo e as proporções de ingressantes via Vestibular, mostram o estudo da correlação e da regressão linear entre a proporção de ingressantes via Vestibular e o Índice Líquido de Reprovação. As próximas três figuras mostrarão o passo a passo desse estudo de regressão.

Egressos	Diurno	Noturno	Total	Vestibular	Diurno	Noturno	Total	Proporção Vestibular	Qua
2010 – 1	38	32	70	2010 – 1	18	26	44	0,628	0,395
2010 – 2	36	32	68	2010 – 2	36	32	68	1	1
2011 – 1	37	32	69	2011 – 1	26	28	54	0,782	0,612
2011 – 2	36	32	68	2011 – 2	36	32	68	1	1
2012 – 1	35	29	64	2012 – 1	17	9	26	0,406	0,165
2012 – 2	25	29	54	2012 – 2	20	20	40	0,741	0,549
2013 – 1	36	29	65	2013 – 1	20	13	33	0,507	0,258
2013 – 2	37	33	70	2013 – 2	37	33	70	1	1
2014 – 1	36	32	68	2014 – 1	0	0	0	0	0
2014 – 2	38	33	71	2014 – 2	38	33	71	1	1
2015 – 1	36	32	68	2015 – 1	0	0	0	0	0
2015 – 2	36	32	68	2015 – 2	36	32	68	1	1
2016 – 1	19	35	54	2016 – 1	1	0	1	0,018	0,001
2016 – 2	35	33	68	2016 – 2	35	33	68	1	1
Totais/Média								0,649	0,570

Figura 2.24: Proporção do quantitativo de ingressos via Vestibular e seus quadrados

A tabela acima mostra os quantitativos e as proporções de alunos de Cálculo 1 matriculados via Vestibular e os quadrados das proporções. Usaremos esses dados para calcular a Variância entre esses valores, tal como definido na subseção 2.2.2. Eles serão utilizados para se calcular os coeficientes de regressão e os desvios, importantes no cálculo da correlação entre essas variáveis. Todas essas relações foram definidas na subseção 2.2.2.

Período	ILR*Vestibular
2010 – 1	0,136
2010 – 2	0,369
2011 – 1	0,391
2011 – 2	0,263
2012 – 1	0,162
2012 – 2	0,292
2013 – 1	0,179
2013 – 2	0,324
2014 – 1	0,000
2014 – 2	0,412
2015 – 1	0,000
2015 – 2	0,400
2016 – 1	0,011
2016 – 2	0,360

Figura 2.25: ILR X Proporção via Vestibular

Para se calcular a correlação entre as duas variáveis em questão, necessita-se dos produtos da proporção de ingressantes via Vestibular, dos ILR's e da média desses produtos. Tomando a diferença das médias entre esses produtos e os produtos das médias dos ILR's e das proporções de ingressantes via Vestibular ano a ano, obtém-se a covariância. Assim, tendo-se os respectivos desvios dessas duas variáveis, obtém-se a correlação linear entre estas, analogamente à subseção 2.2.2.

Media dos Produtos	0,236
Covariância ILR versus Vestibular	-0,015
Variância ILR	0,007
Variância Vestibular	0,149
Desvio ILR	0,086
Desvio Vestibular	0,386
Correlação ILR versus Vestibular	-0,449
Coefficiente Regressor	-0,101
Coefficiente Linear	0,451

Figura 2.26: Estudo da regressão entre ILR versus proporção de ingressantes via Vestibular

De posse dos dados da variância, dos desvios e da covariância, podemos calcular a correlação, de modo análogo à seção 2.2.2, que, de acordo com a figura 2.26, indica um nível de dependência negativa entre essas variáveis. Segundo Bussab e Morretin (2012), em [6], esses dados apresentaram uma correlação moderada e negativa de 49%. Isso significa que não podemos rejeitar a hipótese de que um calouro do curso de Matemática, matriculado no curso de Cálculo 1, tenha êxito ao concluir a disciplina.

Período	Valores esperados para ILR dado Vestibular
2010 - 1	0,388
2010 - 2	0,351
2011 - 1	0,373
2011 - 2	0,351
2012 - 1	0,411
2012 - 2	0,377
2013 - 1	0,400
2013 - 2	0,351
2014 - 1	0,451
2014 - 2	0,351
2015 - 1	0,451
2015 - 2	0,351
2016 - 1	0,449
2016 - 2	0,351

Figura 2.27: Valores esperados do índice Líquido de Reprovação dada a proporção de ingressantes via Vestibular

Os dados obtidos na tabela acima mostram os valores esperados para o Índice Líquido de Reprovações na disciplina de Cálculo 1 dados os valores por período dos quantitativos alunos que ingressaram pelo Vestibular. Esses valores são obtidos inserindo-se as proporções de alunos ingressantes via Vestibular na equação de regressão linear, que segue o modelo de uma equação do primeiro grau, dado por $\hat{y} = a + bx$, onde \hat{y} é a variável resposta e representará o ILR esperado dado x , que representa desta vez a proporção de alunos ingressantes via Vestibular e é tratada como sendo a variável independente. O coeficiente de regressão b , calculado na figura 2.26, corresponde a um coeficiente angular do modelo que padroniza os valores por meio de uma reta, e foi definido na subseção 2.2.2 e $a = \bar{y} - b\bar{x}$, onde \bar{y} é a média dos ILR's observados, e constam na tabela da figura 2.11, e \bar{x} é a média dos percentuais mnemônicos de alunos ingressantes por meio do Vestibular.

Os períodos correspondentes aos números 2, 4, 8, 10 e 14 no gráfico da figura 2.28, analisados de 2010 a 2016, são períodos em que todas as turmas de Cálculo 1 no curso de Matemática foram preenchidas por alunos que ingressaram no curso de Matemática via Vestibular. Analisando-se todos os anos em

conjunto, vimos que a correlação entre esses dados foi de $-0,449$, ou seja, existe 49% de dependência linear negativa entre a proporção de ingressantes via vestibular e o índice Líquido de Reprovação. Esse tipo de correlação, segundo Bussab e Morettin (2012), em [6], apresenta-se, em módulo, moderada. Os dados apresentados não garantem que a maioria dos estudantes de Cálculo 1 que ingressaram no curso de Matemática da Universidade apresente êxito na disciplina, embora não possamos descartar esta hipótese. Conforme citado no início desta seção, à exceção dos períodos letivos de 2014-2 e 2015-2, o quantitativo de alunos aprovados na disciplina foi superior à quantidade de alunos que fizeram a disciplina e que foram aprovados em Cálculo 1. Esse fato não permite descartar a hipótese de que um aluno que precisou recorrer a um cursinho pré-vestibular, ou que ingressou por meio do Vestibular, exame presumidamente mais difícil que o PAS ou o ENEM, assim que terminou o Ensino Médio, influencie de modo positivo o desempenho do discente na disciplina de Cálculo 1.

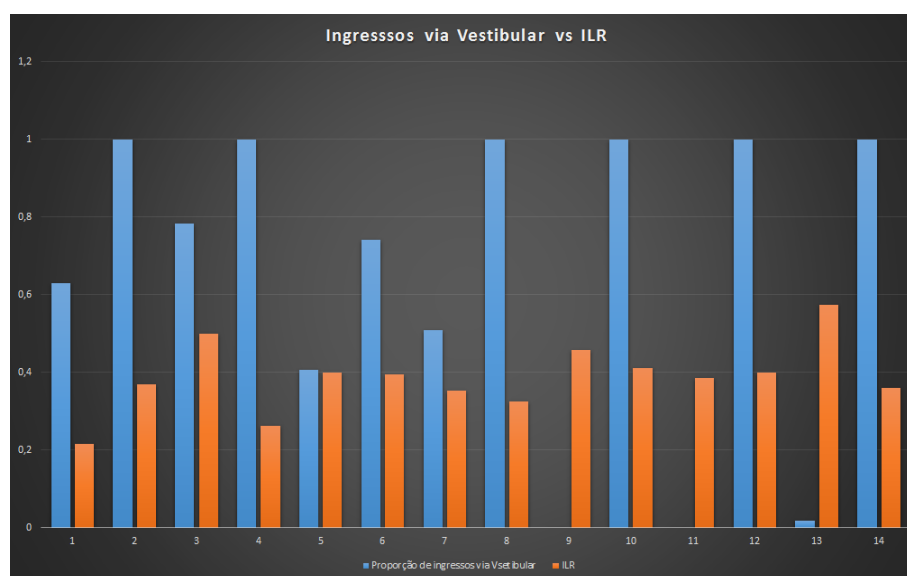


Figura 2.28: gráfico ingressantes via Vestibular vs ILR

O gráficos das figuras 2.29 e 2.30 mostram a comparação entre os índices esperados, calculados a partir das tabelas 2.26 e 2.27, e os observados de reprovação, constatados entre 2010 e 2016. A exceção das observações nos períodos letivos de 2010-1, 2011-1 e 2016-1, os índices esperados e observados parecem equilibrados. Esse resultado pode estar sendo influenciado pelo fato de que algumas das turmas foram preenchidas apenas por alunos que ingressaram via Vestibular. No gráfico da figura 2.28, há de se chamar a atenção para o período letivo de 2016-1, que foi, dentre os períodos analisados, o que apresentou a menor proporção de ingressantes via Vestibular e o maior ILR. Em todos os períodos letivos observados, pode-se notar que, dentre aqueles onde todas as turmas de primeiro semestre de Cálculo foram preenchidas completamente com alunos que ingressaram via Vestibular, o maior ILR observado foi de 41,2%. Tal fato ocorreu no segundo semestre de 2014. Nos períodos de 2014-1 e 2016-1, períodos em que nenhum dos calouros do curso de Matemática conseguiu a sua vaga por meio do Vestibular, conforme coleta de dados realizada junto ao Registro Acadêmico da Universidade, o percentual de repetências foi de 45,7% e de 57,4%. No período de 2015-1, dentre os períodos em que as turmas foram preenchidas totalmente por ingressos de outros exames que não o Vestibular, o menor índice de repetência em Cálculo 1 foi o de 2015-1, com 38% de repetência na referida disciplina.

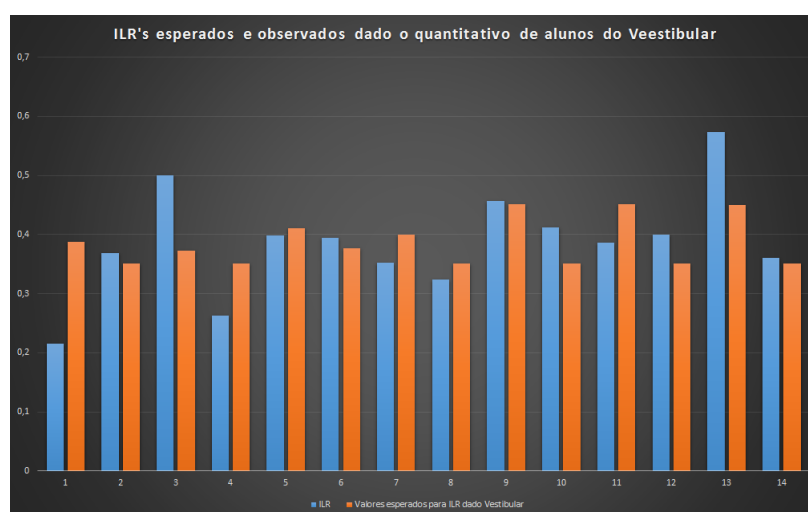


Figura 2.29: Comparativo entre valores esperados e observados dado quantitativo de ingressos via Vestibular

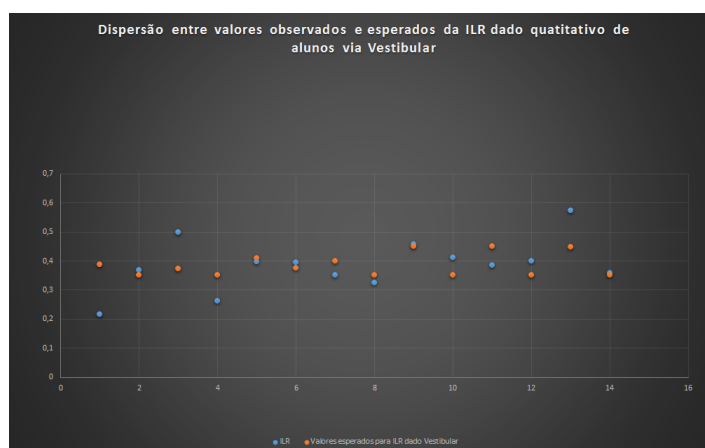


Figura 2.30: Gráfico de dispersão entre valores observados e esperados valores dado quantitativo de ingressos via Vestibular

Os dois gráficos acima comparam os valores observados e esperados para a ILR dado o quantitativo de alunos que ingressaram por meio do Vestibular. É interessante observar também o fato de que, nos períodos em que todos os alunos do 1º semestre ingressaram na Universidade por meio do Vestibular, a saber, 2010-2, 2011-2, 2013-2, 2014-2, 2015-2 e 2016-2, as maiores discrepâncias observadas dentre esses períodos foi a de 2011-2, com uma diferença de cerca de 8% entre esses dois valores. Dentre os demais períodos, não obstante haver aqueles nos quais essa discrepância é mínima, há aqueles em que a discrepância chega, em módulo, a cerca de 17% em 2010-1, com a porcentagem de alunos ingressos via Vestibular de mais ou menos 62%. Em 2011-1, com um percentual de alunos oriundos do Vestibular de cerca de 78%, a discrepância foi de 12,8% e, em 2016-1, com 1,8% de ingressantes via Vestibular, a discrepância foi de 12,5%. Essas discrepâncias, encontradas também nos estudos relacionados a ingressantes via PAS e ENEM, tenderam a ser baixas, salvo exceções, com os ILR's tendendo a ser superiores àqueles esperados por meio da regressão da média, especialmente em períodos posteriores à Ata 270, de 22 de fevereiro de 2013.

Em que pese a correlação entre quantitativo de ingressantes via Vestibular ter dado negativa, isso não deve ser parâmetro para se defender que o Vestibular seja um meio eficaz de ensino, pois o ensino em cursos pré-vestibular visa preparar o aluno para ingressar na Universidade por meio desta prova, deixando o aprendizado em segundo plano. Por outro lado, viu-se no Capítulo 2 que cerca de 73% dos estudantes tiveram um desempenho que estava abaixo de 50% das questões do exame. No Pré-Cálculo, os alunos poderão rever ferramentas que serão de suma importância no desenvolvimento na disciplina de Cálculo, tais como:

- 1- Funções Periódicas;
- 2- Exponenciais e Logarítmos;
- 3- Polinômios;
- 4- Módulo;
- 5- Estudo da reta.

2.5 A perspectiva do ensino de Matemática Básica na visão de professores e alunos e a necessidade do Pré-Cálculo

Conforme visto na seção 2.1, os dados do SAEB apontam que a proficiência média do Brasil em Matemática, entre 2005 e 2015, esteve em um patamar entre 267 e 271, isto é, os alunos do Brasil, em Matemática, encontram-se no primeiro nível de avaliação do SAEB, que seria entre 250 a 300 pontos. Isto significa que não se pode descartar a hipótese de que estudantes concluem o terceiro ano do Ensino Médio apresentando dificuldades para resolver problemas envolvendo valor numérico de funções, identificar comportamento de funções através de um gráfico, identificar gráfico de retas por meio de sua equação, identificar intervalos em que os valores numéricos daquelas funções são positivos e negativos e pontos de máximo e mínimo, dentre outros.

Para cursar a disciplina de Cálculo 1, é primordial que o aluno domine esses conceitos relacionados à função, uma vez que o Cálculo estuda, de uma maneira mais analítica, o comportamento dessas funções do ponto de vista local e infinitesimal. No Distrito Federal, a proficiência das escolas privadas em 2015 foi de 317,2; e, entre as escolas públicas, foi de 263,90, o que aponta para uma situação semelhante em relação à proficiência média geral calculada para todo o Brasil, com maior agravante nas escolas estaduais que participaram do SAEB. Nas escolas públicas, é comum os professores depararem-se com alunos que apresentam dificuldades em ferramentas matemáticas sobre os quais eles deveriam ter domínio ao se concluir o Ensino Fundamental e a isso podem ser atribuídos diversos fatores, tais como falta de acompanhamento dos pais, indisciplina em sala de aula, entre outros problemas que professores do Ensino Fundamental e Médio enfrentam em sua rotina de trabalho. No Ensino Médio, as escolas, no afã de preparar o aluno para ingressar na Universidade, tentam exaurir o conteúdo de Matemática através de uma alta quantidade de exercícios livrescos e macetes para se memorizar a matéria. Busca-se, com isso, que o estudante tenha sucesso nas provas, em detrimento, muitas vezes, de sua formação como cidadão, de seu aprendizado, e do próprio desenvolvimento em Matemática.

Por fim, o conteúdo exigido tanto no Currículo em Movimento do GDF quanto pelo PAS é excessivamente extenso, o que pode comprometer a compreensão dos alunos sobre ferramentas mais importantes para a sua formação cidadã e, além disso, prejudicar o conhecimento de alunos que optem por seguir estudando Matemática na Educação Superior.

A fim de corroborar ou contrapor esses fatores, realizamos uma entrevista com a pergunta: *Sabemos*

que, ao ingressar no Ensino Médio, o estudante está em transição entre a infância e a adolescência. É uma fase em que, entre outras mudanças, o jovem terá que tomar a decisão sobre qual profissão vai exercer e que carreira seguirá pelo resto da sua vida, e essa fase passará pelo Vestibular. Nessa perspectiva, existe a cultura de, no Ensino Médio, preparar o aluno para essa etapa da vida e, muitas vezes, em detrimento da formação do aluno como pessoa, no que tange à cidadania e trabalho. Como professor de Matemática neste contexto, discorra sobre o papel que você acredita que deve desempenhar nessa etapa da vida do aluno e mencione o que você acredita que os alunos esperam de você e que a direção da escola onde você trabalha espera de você. . Uma resposta comum à maioria dos professores foi a de que os alunos esperam que os professores construam receitas prontas para que eles possam aplicar. Para o professor Antônio Márcio da Silva, esse processo denomina-se terceirização do ato de aprender. Segundo ele, na visão dos alunos, cabe ao professor aprender a disciplina e criar receitas prontas para que os alunos lidem com os exercícios que cairão nas provas.

Esta parece ser a realidade de cursinhos pré-vestibular e das escolas secundárias, que têm como objetivo aprovar os alunos em exames de ingresso na Educação Superior. Nessa mesma entrevista, os professores responderam que o seu papel é o de ensinar matemática e o de convencer que aprender esta disciplina é fundamental para que o indivíduo em formação amplie suas possibilidades no mundo do trabalho, uma vez que, se ele não a aprende, faz suas escolhas baseadas no mito de que existem atividades humanas que não necessitam, ainda que indiretamente, de conhecimentos matemáticos. Nos materiais escolares, é cada vez mais comum a presença de itens de vestibulares anteriores, sem uma vinculação adequada à teoria necessária e aos exercícios de compreensão.

2.5.1 A necessidade do Pré-Cálculo

As coletas de dado realizadas, da ótica quantitativa e qualitativa, sugerem que os alunos egressam do Ensino Médio sem terem o domínio de ferramentas básicas de Matemática, especialmente aquelas que serão mais utilizadas para se compreender as ferramentas do Cálculo 1. Os dados do SAEB apontam que existem alunos que concluem o Ensino Médio sem terem uma compreensão satisfatória de coordenadas no plano cartesiano, conceitos de funções e até mesmo manipulações algébricas importantes em demonstrações inerentes ao Cálculo. Pelos resultados encontrados do ENEM, obtém-se que, em 2013, quase 60% dos alunos alcançaram proficiência menor que 550 pontos na área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias. EM 2014, esse percentual foi de cerca 70% e, em 2015, de aproximadamente 71%. Segundo a Nota Explicativa do ENEM, em [42], uma proficiência menor que 550 corresponde aos níveis 1 e 2 das proficiências médias por escola. Não há como inferir, pelos critérios do SISU, se um aluno que ingressa via ENEM tem bom desempenho em Matemática e suas Tecnologias. No PAS, como as áreas de conhecimento são misturadas, não há como se inferir se um aluno que ingressou no curso de Matemática tem as ferramentas necessária e, além disso, os dados apontam que não podemos rejeitar a hipótese de que uma aluno que ingressa pelo PAS não tenha a bagagem necessária para se realizar com êxito a disciplina de Cálculo 1. O curso de Matemática tem como uma das suas razões de existir formar professores de Matemática, logo precisa se primar pela qualidade, tao deficitária, no que tange ao ensino da disciplina na Educação Básica do país. Cálculo 1, disciplina base de quase todo o curso de Matemática, precisa ser bem compreendida, mas, sem os requisitos necessários, os alunos tenderão a encontrar dificuldades para desenvolver a disciplina. Dessa forma, defende-se que, no curso de Matemática, seja ofertada a disciplina de Pré-Cálculo, ainda que em caráter optativo ou de extensão. A disciplina de Pré-Cálculo se encarregaria de ensinar a reconhecer valores de funções em um gráfico cartesiano, a manipular valores

numéricos de funções, a conceituar funções, tais como Domínio, Contra Domínio e Imagem, a associar o valor numérico de uma função a um ponto de um gráfico, dentre outros requisitos de suma importância no desenvolvimento do Cálculo, especialmente relacionados à Geometria Analítica. A oferta de tal disciplina, segundo depoimento de vários discentes, auxiliaria a sanar e a esclarecer dúvidas que os alunos trazem do Ensino Médio. A oferta dessa disciplina poderia não apenas melhorar o desempenho dos alunos em Cálculo 1, como também corrigir a forma com que conteúdos do Ensino Médio são abordados, pois os novos professores se propõem a abordar tais conteúdos de uma forma diferente, além de auxiliar o desempenho dos discentes em disciplinas posteriores.

2.6 Conclusão

Existe a presunção de que os alunos egressos do Ensino Médio são alunos que gostam de Matemática e, em geral, poderiam, e podem, se destacar no mercado de trabalho relativo à docência. A disciplina de Cálculo 1, ferramenta principal para quase todas as disciplinas do curso de Matemática, tendo alto índice de reprovação, pode influenciar o índice de evasão do curso de Matemática. Os dados apontam que as turmas cujos alunos ingressaram imediatamente na Universidade, no curso de Matemática, por meios que não o Vestibular, tendem a ter maiores índices de reprovação, segundo uma correlação moderadamente forte. Por outro lado, o SAEB aponta que os alunos finalizam o terceiro ano do Ensino Médio sem compreender ferramentas de Matemática Básica fundamentais em Cálculo 1. Dessa forma, os dados aqui estudados indicam que existe, de modo geral, falta de pré-requisito, da parte dos discentes, para a disciplina de Cálculo, e defende-se, portanto, a inserção, ainda que na condição de curso de extensão ou disciplina optativa, de um curso de Pré-Cálculo, em que o aluno ingresso pode ter a oportunidade de aprender, revisar e aprofundar ferramentas de Matemática Básica que terão importância em Cálculo 1 e que, eventualmente, não tenham aprendido no Ensino Médio.

Análise das Provas de Cálculo na Perspectiva da TRI e TCT

Neste último capítulo, far-se-á a avaliação psicométrica de uma amostra de itens de prova de Cálculo 1 segundo os principais modelos matemáticos de avaliação educacional: A Teoria Clássica dos Teste(TCT) e a Teoria da Resposta ao Item(TRI). Nesses dois modelos de psicometria, existem três parâmetros que serão analisados: a dificuldade do item, o acerto ao acaso e a discriminação do item. Para se discutir a avaliação em Cálculo 1 por meio destes três parâmetros, foi tomada uma amostra dos itens referentes aos assuntos da disciplina, constantes do Ementário da UNB para a disciplina de Cálculo 1.

1. Funções: conceito de função, exemplo de funções de uma variável real, tipos de funções, gráficos, função composta, função inversa, funções trigonométricas e suas inversas; função exponencial, função logaritmo;
2. Limite e continuidade: conceito de limite; propriedades dos limites, limites laterais, limites envolvendo o infinito, continuidade, Teorema do Valor Intermediário;
3. Derivadas: conceito de derivada, reta tangente e reta normal, derivadas laterais, regras básicas de derivação, regra da cadeia, taxas relacionadas, derivada da função inversa, derivação implícita, comportamento de funções, máximos e mínimos, Teorema do Valor Médio, regras de l'Hospital, concavidade; inflexão e gráficos; problemas de otimização;
4. Integrais: primitivas; integrais indefinidas e suas propriedades, integral definida e suas propriedades, Teorema Fundamental do Cálculo, integração por substituição, integração por partes, integração por frações parciais, integração de produtos de funções trigonométricas, integração por substituição inversa, integração por substituições especiais;
5. Aplicações da integral: aplicações da integral ao cálculo de áreas planas, comprimento de curvas, volumes e áreas de sólidos.

Para cada um desses cinco objetos de avaliação na disciplina de Cálculo 1, selecionaram-se três itens de prova referentes a cada um desses objetos e foi realizada a análise psicométrica segundo TCT e a TRI, por meio dos resultados dos parâmetros obtidos nos dois modelos de psicometria.

3.1 A Teoria Clássica dos Testes (TCT)

Conforme define Rabelo (2013), em [36], na Teoria Clássica dos testes, a análise e interpretações dos itens estão associados à prova como um todo; o resultado pode ser expresso pelo escore bruto ou padronizado e esse escore pode ser comparado com o escore bruto de outros indivíduos submetidos à mesma prova. A Teoria Clássica dos Testes foi utilizada no SAEB até 1993 na construção dos seus instrumentos de avaliação, bem como atribuição dos escores e da análise dos resultados. A aptidão do indivíduo nessa teoria nada mais é do que a quantidade de itens que ele acerta. Compara-se o padrão de respostas do indivíduo com o gabarito e calcula-se o seu escore bruto fazendo-se a soma dos itens que aquele indivíduo acertou. Na Teoria Clássica, os itens são analisados graficamente por meio da denominada Análise Gráfica do Item (AGI). Nessa análise, ordenam-se os alunos por ordem crescente dos escores brutos e calcula-se, por meio de faixa de notas, a proporção de marcação de respostas em um dado item do teste. Nessa análise, espera-se que o percentual de marcações na opção correta aumente à medida que o desempenho global no teste aumenta e vice versa, conforme mostra o gráfico a seguir:

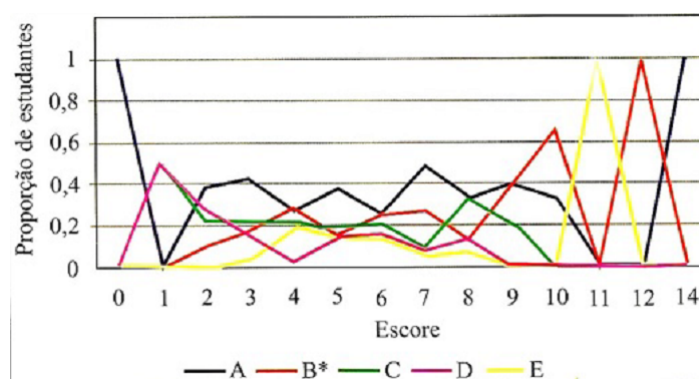


Figura 3.1: Análise gráfica do item - Fonte: Avaliação Educacional: Rabelo (2013), [36]

Para Rabelo (2013), em [36], muitas conclusões importantes podem ser extraídas desse gráfico com relação ao comportamento dos respondentes em relação a cada opção do item. Pode acontecer, por exemplo, de o gráfico sugerir que algumas opções incorretas foram escolhidas por um percentual elevado de estudantes de bom desempenho no teste como um todo. No item do gráfico acima, por exemplo, nenhum estudante que obteve o maior escore o acertou. A análise pedagógica de um item analisado por essa análise gráfica, a AGI, pode revelar conclusões importantes acerca do aprendizado dos estudantes sobre o tema abordado.

3.1.1 Os Parâmetros e sua respectiva estimação na Teoria Clássica dos Testes

Na Teoria Clássica dos Testes (TCT), não se leva em conta a probabilidade de o aluno acertar um item ao acaso, o famoso "chute". Em uma prova discursiva, isso é menos provável de acontecer, pois o aluno precisa discorrer sobre sua solução em relação àquele item. O acerto ao acaso, conforme será visto, é um parâmetro da Teoria da Resposta ao Item (TRI). Na Teoria Clássica dos Testes (TCT), leva-se em conta a dificuldade do item (D_i), que é medida pela razão entre a quantidade de alunos que acertam um item de um teste e a quantidade de alunos que se submeteram ao item, e a discriminação do item, que é a capacidade de o item diferenciar indivíduos com proficiências distintas e se baseia no escore dos indivíduos e também na correlação ponto bisserial.

A dificuldade do item

Na Teoria Clássica dos Testes, a dificuldade do item é o coeficiente abaixo

$$D_i = \frac{C_i}{N_i}$$

onde:

- D_i é a dificuldade do i -ésimo item;
- C_i é a quantidade de indivíduos que marcaram o i -ésimo item de acordo com o gabarito;
- N_i é a quantidade de estudantes submetidos ao i -ésimo item.

Um exemplo dessa versão, dada pela TCT da dificuldade do item, pode ser vista na tabela da figura a seguir. As células sombreadas correspondem ao gabarito, cuja proporção de respostas coincide com o índice de dificuldade do item, segundo a teoria clássica. Observa-se que, neste modelo, quanto maior a dificuldade mais fácil é o item. Segundo Rabelo (2013), em [36], esse índice deveria ser chamado índice de facilidade, pois o parâmetro varia de 0 (ninguém acertou) a 1 (todos acertaram). Supõe-se que, quanto menor esse índice de dificuldade, mais difícil será o item.

ITEM	Dificuldade (TCT)	Percentual de acertos por alternativa				
		A	B	C	D	E
1	0,75	0,10	0,05	0,75	0,07	0,03
2	0,14	0,14	0,17	0,35	0,11	0,23
3	0,52	0,03	0,02	0,23	0,20	0,52

Figura 3.2: Exemplo de dificuldade segundo a TCT

A observação da tabela acima, segundo Rabelo (2013), em [36], sugere existir problemas na elaboração do item 3, pois ela mostra que as alternativas A e B foram escolhidas por poucos estudantes e, portanto, segundo Rabelo (2013), em [36], esse item não segue um princípio básico na construção de itens, que é a plausibilidade das alternativas incorretas. Esse tema, relacionado à engenharia de construção de itens, não será tratado neste trabalho.

A discriminação do item

Nos dois testes psicométricos aqui abordados, a discriminação é a capacidade de um item de diferenciar indivíduos com habilidades distintas. No caso da Teoria Clássica dos Testes (TCT), Rabelo (2013), em [36], a fim de traduzir o parâmetro da discriminação de um item, separa três grupos de indivíduos de acordo com o seu escore no teste, denominando-os da seguinte forma:

- Grupo Superior: os 27% de melhor desempenho;
- Grupo Inferior: os 27% de pior desempenho;
- Grupo Intermediário: os demais 46% .

De acordo com a definição dada por Rabelo (2013), em [36], é esperado que, na ótica da TCT, os 27% de respondentes que tiveram maior desempenho apresentem maior percentual de acerto que a do grupo intermediário, e este, por sua vez, percentual de acerto maior que o do grupo inferior. Matematicamente, podemos expressar esses percentuais da seguinte forma:

- P_{sup} : percentual de acerto do grupo superior;
- P_{int} : percentual de acerto do grupo intermediário;
- P_{inf} : percentual de acerto do grupo inferior.

O recomendado seria que $P_{inf} < P_{int} < P_{sup}$. Quanto maior a diferença $P_{sup} - P_{inf}$, maior será o potencial de discriminação do item. Dessa forma, adota-se como a Discriminação ($Disc$) a diferença:

$$Disc = P_{sup} - P_{inf}.$$

Segundo Rabelo (2013), em [36], a discriminação é dada como consta na tabela da figura abaixo:

Valores	Classificação
$Disc > 40$	Item bom
$30 < Disc < 40$	Item bom, mas sujeito a aprimoramento
$20 < Disc < 30$	Item marginal, sujeito a reelaboração
$Disc < 20$	Item deficiente, que deve ser rejeitado

Figura 3.3: Classificação dos itens de acordo com o poder de discriminação na TCT

A discriminação de um item na Teoria Clássica dos Testes também pode ser medida pelo coeficiente de correlação ponto-bisserial. Esse coeficiente varia de -1 até 1 e tem como característica o fato de que, segundo Rabelo (2013), em [36], o coeficiente assumir valores negativos ou muito próximos de zero implicam que indivíduos com maior score no teste como um todo estão errando o item, o que não parece plausível. O papel desse coeficiente, conforme o próprio nome sugere, é medir a correlação do acerto ou não dos indivíduos em um item específico com o resultado de toda a prova. Portanto, de acordo com Rabelo (2013), em [36], esse coeficiente pode ser considerado como medida do parâmetro da discriminação do item em relação ao resultado do teste. A correlação ponto bisserial (ρ_{pb}) é medida da seguinte forma:

$$\rho_{pb} = \frac{\bar{S}_p - \bar{S}}{\sigma_s} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}$$

onde:

- \bar{S}_p é a média dos escores dos respondentes que acertam o item;
- \bar{S} é a média dos escores de todos os respondentes;
- σ_s é o desvio padrão dos escores obtidos por todos os respondentes;
- p é a proporção de respondentes que acertam o item no teste;
- q é a proporção de respondentes que erram o item no teste.

Por essa ótica, um item que apresenta correlação ponto bisserial inferior a 0,30 tem baixo poder de discriminação e, portanto, deve ser rejeitado.

3.2 A Teoria da Resposta ao Item(TRI)

A Teoria da Resposta ao Item surgiu entre os anos 50 e 60 do século XX para a responder a indagações relativas à inteligência cujos resultados variavam em função de resultados utilizados e, conseqüentemente, era natural se questionar qual era o resultado correto. Segundo Pasquali (2003), em [33], o objeto medido, a inteligência, afetava o próprio instrumento utilizado, pois era definido por ele próprio. Rabelo (2013), em [36], de forma didática, explicita esse contexto da seguinte forma:

Já pensou se o metro medisse de forma diferente se estivéssemos medindo o comprimento de uma sala ou de uma mesa? Já pensou se a grandeza comprimento de um objeto fosse definida pelo instrumento e não um atributo do objeto?

Ainda segundo o professor, a TRI propôs uma solução a esse problema, que era a independência do instrumento de medida em relação ao objeto que se deseja medir. O problema dessa solução dada pela TRI era que esta utilizava modelos matemáticos difíceis de serem manuseados à época e, portanto, somente com o avanço tecnológico dos anos 80, com o desenvolvimento de softwares para uso prático de algoritmos complexos que o modelo cotinha, é que a TRI começou a ser definida. Em que pese a Teoria ter se desenvolvido aos poucos, atribui-se a Frederic Lord a responsabilidade direta pela introdução da TRI, em 1952, pois ele, além de estabelecer um modelo teórico, estabeleceu métodos para estimar os parâmetros dos itens, valendo-se do modelo da ogiva normal. A proposta de Lord se aplicava a testes de respostas dicotômicas ou binárias, isto é, do tipo Certo ou Errado. Nos anos 70, Samejima generalizou a TRI e a utilizou para itens com respostas politômicas e para dados contínuos. A utilização da TRI veio para sanar algumas deficiências da TCT, pois a TCT, conforme descreve Rabelo (2013), em [36], as estatísticas da TCT são restritas a um modelo, a um teste, e isso dificulta o acompanhamento pedagógico ao longo dos anos. Além disso, na TCT, os parâmetros dos itens dependem diretamente da amostra de indivíduos para os quais eles foram calculados. Para Rabelo (2013), em [36], a dificuldade de um item varia de pesquisa para pesquisa em função da amostra de respondentes e o parâmetro depende dos sujeitos. O professor ainda relata que ouvia-se inferências comparativas dos resultados de um ano com o ano seguinte simplesmente baseando-se na média. Essas comparações não são adequadas, pois a dificuldade do teste depende das características inerentes aos sujeitos. Na Teoria da Resposta ao Item, o foco do modelo não é a prova como um todo, mas sim a dificuldade do item. Como o ENEM se baseia neste modelo de avaliação, pode acontecer de dois alunos que acertam o mesmo número de questões terem desempenhos diferentes. A proficiência é estimada por um modelo Estatístico e não pelo escore bruto e os indivíduos são colocados em uma escala comum, mesmo submetidos a exames distintos, o que permite fazer uma análise pedagógica do item ao longo dos anos. Neste trabalho, analisaremos as questões inerentes ao Cálculo sob as duas óticas, a fim de analisar a dificuldade dos itens, fazer um acompanhamento pedagógico e também analisar o perfil dos alunos que ingressam no curso de Matemática e se matriculam na disciplina de Cálculo 1. Na próxima seção, apresentar-se-á o modelo de três parâmetros da TRI, e será definido o que mede esses parâmetros, bem como teoricamente funciona sua estimação.

3.2.1 O modelo logístico de três parâmetros

A TRI é um conjunto de modelos matemáticos que procuram representar a probabilidade de um indivíduo dar uma resposta a um item como função dos parâmetros do item e da habilidade ou proficiência dos respondentes. Os modelos relacionam variáveis observáveis, ou seja, respostas aos itens de um teste, como, por exemplo, aptidões não observáveis e que são responsáveis pelas respostas dadas pelos indivíduos. De acordo com essa relação, quanto maior a habilidade, maior a probabilidade de acerto ao item. O modelo que aqui será utilizado é o modelo de três parâmetros, utilizado no ENEM e no SAEB, aplicado à avaliação de Cálculo 1. Essa teoria fornece a probabilidade de um indivíduo acertar um item, que é uma função da sua habilidade θ , da discriminação, da dificuldade e da probabilidade de acerto ao acaso, conhecido como parâmetro de chute. A TRI apresenta pressupostos que devem ser observados pelos especialistas que elaboram os itens, que são a unidimensionalidade e a independência local. Segundo Pasquali (2003), em [34], a unidimensionalidade é a hipótese segundo a qual há apenas uma aptidão dominante responsável pelo desempenho em um conjunto de itens de um teste. Quanto à independência local, Tavares e Valle (2000), em [39], define-a como sendo para uma dada habilidade, as respostas aos itens são independentes. Para Pasquali (2003), em [34], mantidas constantes as aptidões que afetam o teste, o desempenho de um indivíduo em um item não interferirá no desempenho dele em outro item. Rabelo (2013), em [36], frisa, no entanto, que este fator não impede dois itens de serem correlacionados, mas as respostas são independentes. Quando um indivíduo responde a uma sequência de itens, ele produz um padrão binário de respostas, atribuindo o valor 1 para acertos e 0 para erros, esquematizados em tabelas cujas linhas são os padrões de respostas dos indivíduos submetidos ao teste e as colunas representam os itens. Essa tabela de uns e zeros nada mais é do que a coleção de respostas de todos os respondentes a todos os itens da prova. Se tivermos 6 milhões de respondentes para um teste de 45 itens, será uma matriz de 6 milhões de linhas por 45 colunas.

3.2.2 Os Parâmetros na Teoria da Resposta ao Item

A TRI estuda a probabilidade de um indivíduo acertar um item específico. Essa probabilidade depende do nível de aptidão do indivíduo θ , e das características do item: a dificuldade b , a discriminação a e o acerto ao acaso c . Dentre os vários modelos utilizados pela TRI, o modelo de três parâmetros é o mais usual, e ele representa a probabilidade de um indivíduo j responder corretamente a um item i , definido por:

$$P\left(X_{ji} = \frac{1}{\theta_j}\right) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + \exp[-Da_i(\theta_j - b_i)]},$$

onde:

- X_{ji} é a resposta do indivíduo j ao item i . É uma variável binária, assumindo valor igual a 1 caso o respondente acerte o item e 0 caso erre;
- $a_i > 0$ é o parâmetro de discriminação do item i ;
- b_i é o parâmetro de posição (ou dificuldade) do item, medido na mesma escala ou habilidade;
- $0 < c_i < 1$ é a probabilidade de acerto ao acaso (acerto no chute) de um item i . Rabelo (2013), em [36], define-a como sendo a probabilidade de um estudante de proficiência muito baixa acertar o item. Matematicamente, é a assintota inferior do item;

- θ_j é o traço latente ou habilidade do j-ésimo indivíduo;
- \exp representa a função exponencial;
- D é um fator de escala, igual a 1 na métrica logística e igual a 1,7 na métrica normal.

O número $P\left(X_{ji} = \frac{1}{\theta_j}\right)$, conforme Rabelo (2013), em [36], pode ser pensado como sendo a proporção de respostas corretas ao item i no grupo de habilidade θ_j . A relação expressa pela equação acima está descrita pela curva da figura a seguir, retirada de Tavares e Valle (2000), em [39], chamada de Curva de Característica do Item(CCI). O gráfico, cujo exemplo consta na Figura 3.4, é uma sigmoide, curva em forma de "S", com duas assintotas horizontais. O formato da curva fornecerá as informações sobre o item ao qual se refere, dentre estas a sua qualidade. Na TRI, portanto, estuda-se o comportamento do indivíduo perante cada item. Por isso a base deste modelo é a CCI, gráfico da função $P(X_{ji} = \frac{1}{\theta_j})$.

A função $P(X_{ji} = \frac{1}{\theta_j})$ assume valores pertencentes ao intervalo (0,1), correspondentes ao intervalo 0% a 100%. Na curva estão indicados os valores de a, b e c do item, explicitados nos tópicos a seguir. Os valores da habilidade θ , representadas no eixo horizontal, estão na da distribuição Normal padrão, com média 0 e desvio padrão 1. Rabelo(2013), em [36], demonstra a estimação dos parâmetros da TRI por meio de um método estatístico chamado Máxima Verossimilhança, o qual maximiza o traço latente (θ_j) do indivíduo através de um problema de otimização muito complexo e que, portanto, não será mostrado aqui, por fugir muito do objetivo deste trabalho. Os valores estimados para os parâmetros dos itens aqui analisados foram obtidos através de um algoritmo computacional desenvolvido por professores do próprio Departamento de Matemática.

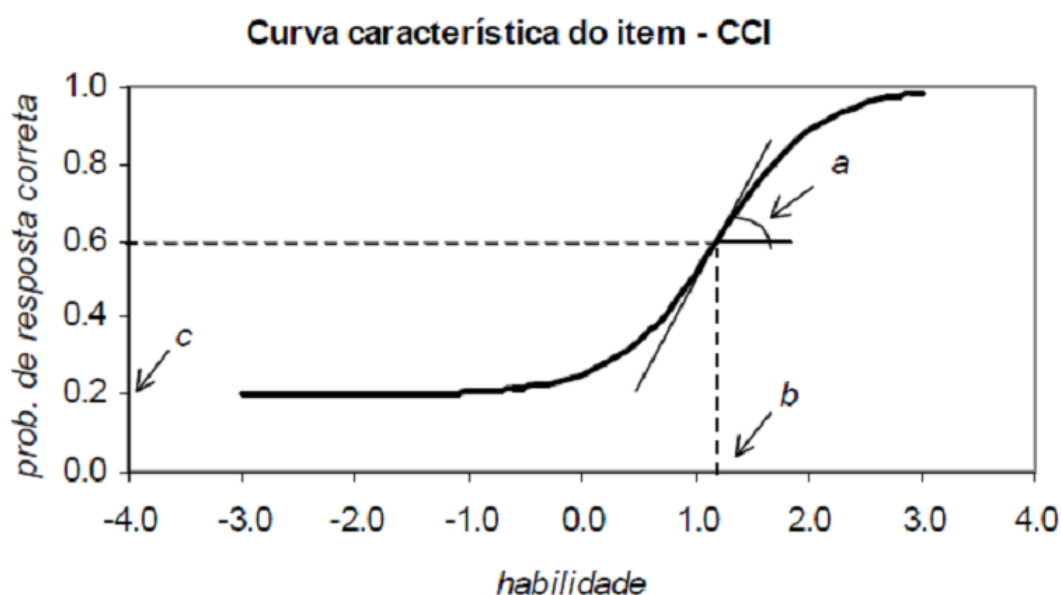


Figura 3.4: Exemplo de Curva Característica do Item - Fonte: Teoria da Resposta ao item: conceitos e aplicações, [39]

O acerto ao acaso

O acerto ao acaso é também conhecido como parâmetro de chute. Ele representa a probabilidade de um item de um estudante com baixa habilidade conseguir acertar o item. Na TRI, o acerto ao acaso é estimado pelo parâmetro c . Por exemplo, em um item de múltipla escolha que dispõe de cinco alternativas, espera-se para c um valor de 0,2. Em itens onde não é permitido o chute, esse parâmetro vale zero. Na curva característica do item, disposta na Figura 3.4, o parâmetro c seria o equivalente à assíntota inferior da curva. Se, no caso de um item de 5 alternativas, a probabilidade estimada pelo processo de estimativa do item for muito superior a esses 20% de chance, pode existir um indicativo de que, de algum modo, a resposta correta se diferencie das demais atraindo estudantes de baixo desempenho, havendo, portanto, equívoco de formulação do item.

A discriminação do item na TRI

Na definição do professor Rabelo (2013), em [36], a discriminação é definida como sendo o poder do item para diferenciar indivíduos com magnitudes próximas da habilidade que está sendo aferida. Na CCI, disposta na figura 3.4, a discriminação é tida como o ponto de inflexão da curva, que nada mais é do que a inclinação da curva no ponto onde ela muda de concavidade. Rabelo (2013), em [36], valores negativos para a CCI apresentam um comportamento estranho, pois indicaria que um sujeito avaliado como tendo boa aptidão teria menos probabilidade de acertar o item do que aqueles com desempenho inferior. Graficamente, um item mal elaborado, com pouco poder de discriminação, teria a sua CCI achatada, ou, nas palavras de Rabelo (2013), em [36], não cumpre os propósitos de avaliação educacional. Um item muito fácil ou muito difícil, segundo Rabelo (2013), em [36], tem menos probabilidade de discriminar a aptidão dos estudantes em relação à habilidade abordada no item do que um item de média dificuldade, próximo parâmetro a ser observado. Não é possível estabelecer, a priori, se um item irá se comportar bem quando da aplicação do teste, mas, na realidade da disciplina de Cálculo 1, isso é possível, por meio de uma análise qualitativa do item, tais como a composição das alternativas, a forma como a habilidade avaliada no item foi abordada em sala de aula e pré-requisito dos respondentes, uma vez que se conhece os alunos que estão respondendo as questões da prova. Alguns autores classificam os itens quanto ao seu poder de discriminação conforme consta da tabela a seguir:

Valores	Discriminação
$a = 0,0$	nenhuma
$0,0 < a < 0,35$	muito baixa
$0,35 < a < 0,65$	baixa
$0,65 < a < 1,35$	moderada
$1,35 < a < 1,70$	alta
$a > 1,70$	muito alta

Figura 3.5: Classificação dos itens quanto à discriminação na TRI

A dificuldade do item

Na TRI, a dificuldade do item pode ser definida como o nível mínimo de proficiência que um estudante precisa possuir para ter uma chance alta de escolher a alternativa correta do item. Segundo Rabelo, a

difficuldade ao item é o nível de aptidão (θ) necessário para se ter uma probabilidade de acerto igual a $\frac{1+c}{2}$. Desse modo, basta traçar uma reta horizontal ao nível desse valor e fazer a intersecção com a CCI para encontrar o θ correspondente. Quando não se é permitido o chute em um item, o valor necessário da habilidade é de 50%. Isso significa que, quanto maior for o nível de aptidão para se acertar o item, maior será a dificuldade deste item. O nível de dificuldade para os itens depende de sua finalidade. Pasquali (2003), em [34], recomenda os níveis de dificuldade de itens no teste dentro de uma curva normal: 10% dos itens em faixas extremas (muito fáceis ou muito difíceis), 20% em faixas seguintes (fáceis ou difíceis) e 40% na faixa média. A tabela da figura 3.6 representa a distribuição dos valores do parâmetro da dificuldade (b). Na figura 3.7, consta um gráfico de barras, simétrico, tal como a distribuição normal, que ilustra a distribuição de dificuldades proposta por Pasquali (2003), em [34].

Classificação	Valores de b	% esperado
Muito fáceis	$b < -1,28$	0,10
Fáceis	$-1,27 < b < -0,52$	0,20
Medianos	$-0,51 < b < 0,51$	0,40
Difíceis	$0,52 < b < 1,27$	0,20
Muito difíceis	$b < 1,28$	0,10

Figura 3.6: Classificação e percentual esperado para os índices de dificuldade na TRI

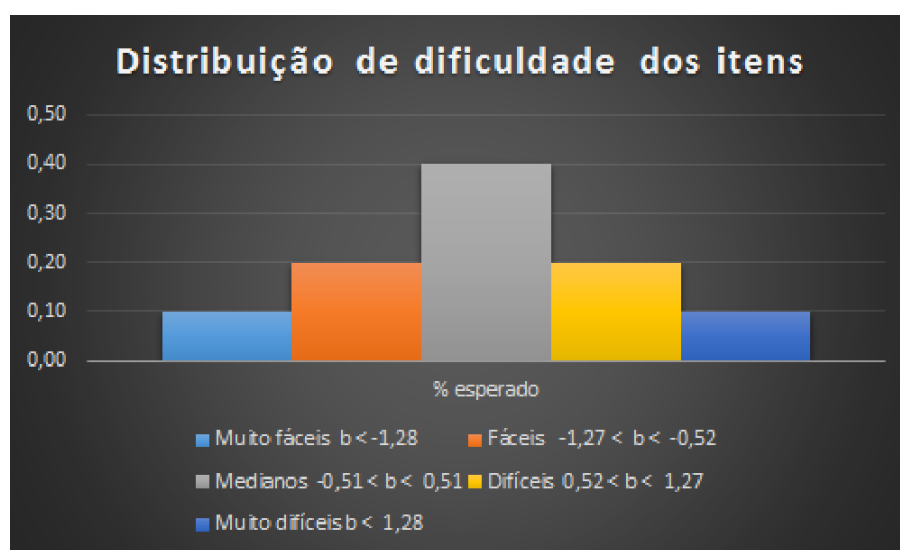


Figura 3.7: Distribuição da classificação dos itens quanto à dificuldade na TRI

3.3 Análise psicométrica de itens de prova

Nesta seção, foi realizada uma das partes mais importante deste trabalho: a avaliação de questões de provas de Cálculo 1. Essas questões foram de provas aplicadas em 2016, fazem parte do banco de questões da disciplina de Cálculo 1 e, por terem caráter sigiloso, não poderão ser enunciadas aqui, mas serão expostas em suas essências, isto é, o conhecimento que era exigido em cada uma dessas questões pertencentes a essa amostra realizada. Os itens de Cálculo se baseiam na Matriz de Referência elaborada

pelos professores do Departamento de Matemática. Tal como a do ENEM, a matriz do MAT tem também proposta tridimensional e são elencadas as seguintes habilidades:

- H1: Identificar linguagens e traduzir sua significação;
- H2: Interpretar diferentes representações de um mesmo conceito, transitando por representações simbólicas, gráficas e numéricas;
- H3: Inter-relacionar objetos de conhecimento em diferentes áreas;
- H4: Organizar estratégias de ação e selecionar métodos;
- H5: Ler e interpretar dados e informações e expressar-se com clareza e precisão;
- H6: Aplicar métodos adequados para resolução de problemas;
- H7: Formular e articular argumentos adequadamente;
- H8: Fazer inferências indutivas, dedutivas e analógicas;
- H9: Formular hipóteses e conjecturas, prever resultados e fazer generalizações;
- H10: Analisar criticamente a solução encontrada para a solução-problema;
- H11: Confrontar possíveis soluções para uma situação-problema.

A seguir, far-se-á uma análise qualitativa de uma amostra de itens de Cálculo, separadas em 4 assuntos, com 3 itens de cada um desses assuntos relativos ao Cálculo 1:

- Ensino Médio;
- Limites e Continuidades;
- Derivadas;
- Integrais.

Nos itens foi feita uma análise dos parâmetros estimados para os itens segundo a ótica da TRI e da TCT. Esses parâmetros foram obtidos por meio de um algoritmo computacional desenvolvido por professores do departamento de Matemática, haja vista a dificuldade para se estimar esses parâmetros manualmente. De posse dos valores desses parâmetros estimados, foi possível analisar, segundo as duas teorias, uma análise pedagógica das questões de Cálculo 1 dessa amostra selecionada. Além disso, fizemos também uma inferência relativa ao que supostamente os alunos que acertam ou erram os itens fariam para alcançar aquela resposta, baseando-se na resolução do próprio item. Além disso, foi realizada, baseando-se nas próprias características do item, uma reflexão sobre o que, de fato, os alunos estão trazendo de bagagem do Ensino Médio e a tratativa dos professores no que diz respeito à dificuldade dos itens que são cobrados. Baseando-se nesses fatores, e também nas óticas Clássica e da TRI, foram comparadas as duas perspectivas relacionadas a esses itens. A perspectiva, a priori, é como o elaborador considera o item, e a posteriori, o que a análise da TRI e da TCT, feita posteriormente, conhecendo as decisões dos avaliados em cada item, aponta.

3.3.1 Ensino Médio

Questão 1:

- Habilidade H9: Fazer inferências indutivas, dedutivas e analógicas;
- T0: tema: Ensino Médio;
- Nível considerado pelo Elaborador: Fácil.

Tratava-se de se calcular o valor máximo de uma função que envolvia o conhecimento do comportamento da função $\cos(-x)$, que, no ciclo trigonométrico, por caminhar no sentido anti-horário, tem como valor máximo o valor $y = -1$. A função dada era $f(x) = 100 - 20 \cos\left(\frac{8\pi \cdot x}{3}\right)$ e tinha as seguintes alternativas:

- a) 20.
- b) 80.
- c) 100.
- d) 120.
- e) 180.

Como se pode ver na Figura 3.8, esse item teve como gabarito a alternativa letra D. Para resolver este item corretamente, o discente precisava conceituar que a função $\cos(-x) = \cos(x)$ era uma função que, no ciclo trigonométrico, caminha no sentido anti-horário.

Pela TCT, a alternativa correta apresenta correlação bisserial de 0,628, o que representa, segundo Rabelo (2013), em [36], que na ótica clássica, o item é bom. Porém, observando a figura 3.8, menos de 10% dos discentes escolheu as alternativas A ou E. Além disso, as opções B e C atraíram quase 50% dos discentes. As opções A e E não parecem ter plausibilidade, uma vez que os resultados propostos por ambos não condizem com as características da função cosseno, além disso, atraíram relativamente poucos alunos. Por sua vez, o item B traduz um erro comum, em que o discente aplica corretamente a otimização da função cosseno, mas esquece que o sinal negativo inverte o sentido da função. O item C, por fim, traduz que o aluno levou em conta que a função proposta comporta-se como a função seno. Essas observações levam a crer que trigonometria é um assunto que os alunos matriculados em Cálculo 1, presumidamente ingressantes na Universidade, não é aprendida de forma satisfatória no Ensino Médio.

Do ponto de vista da TRI, o item teve alto poder de discriminação, o que indica que foi um item capaz de avaliar o que foi proposto em sala de aula, mas, diferentemente do julgamento do elaborador, a sua dificuldade foi de 0,695, o que aponta que é um item considerado difícil para a maioria dos discentes da disciplina. Isto é, na definição de Rabelo (2013), em [36], o nível de aptidão necessário para acertar esse item foi de 69%. Associando-se as análises do item pelo ponto de vista das duas teorias, a TCT diz que cerca de 60% dos discentes não alcançou essa aptidão necessária em uma ferramenta de Matemática Elementar importante na construção dos conceitos do Cálculo.

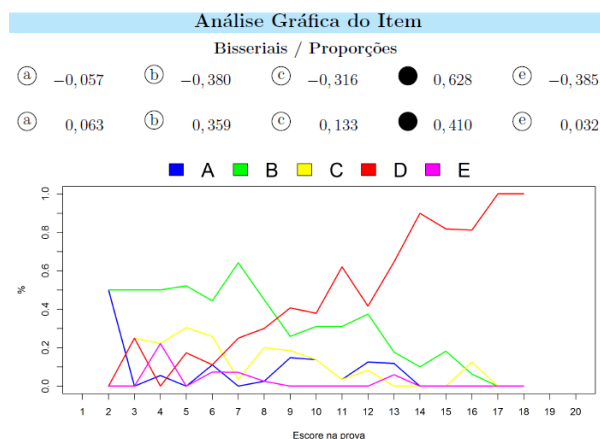


Figura 3.8: Análise do item via TCT

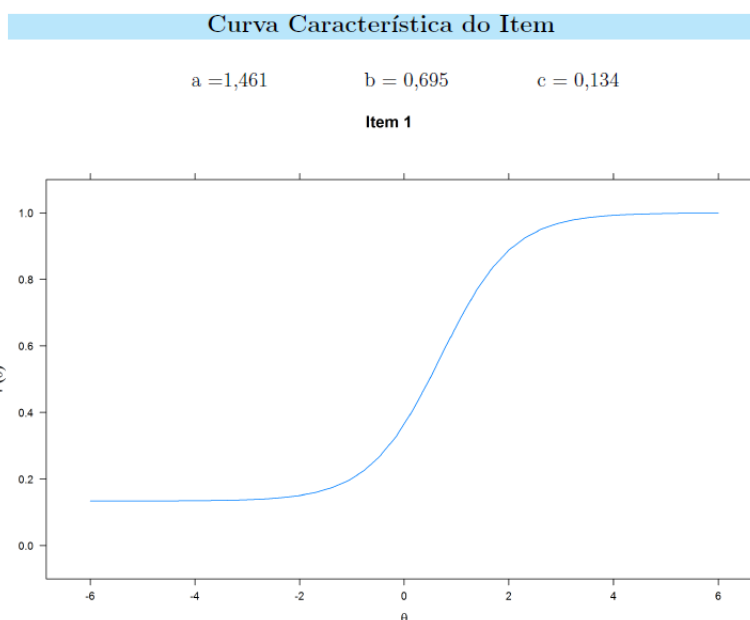


Figura 3.9: Análise do item via TRI

Questão 2:

- Habilidade H9: Fazer inferências indutivas, dedutivas e analógicas;
- T0: tema: Ensino Médio;
- Nível considerado pelo elaborador: Fácil.

Trata-se neste item de uma aplicação direta de uma propriedade de logaritmos, que é a de transformar um produto em uma soma. Isso porque o logaritmo de um número em uma certa base nada mais é do que o expoente a qual se eleva aquela base a fim de obter aquela potência. Isto é, $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. O item tinha como hipótese que $\log a = 2$; $\log b = 3$ e $\log c = 5$ e pedia uma conclusão a respeito de a , b e c , cujas alternativas eram:

- a) $a = b + c$.
- b) $b = a + c$.
- c) $c = a + b$.
- d) $b = ac$.
- e) $c = ab$.

Na Figura 3.10, temos a análise do item pela ótica da TCT. Considerado fácil pelo examinador, a alternativa correta aponta para uma correlação bisserial de 0,746, o que indica, segundo Rabelo (2013), em [36], que a correlação do aluno ter tido um bom desempenho com ele ter acertado o item é de 74,6%. Além disso, a proporção de estudantes que acertaram este item foi de cerca de 53% dos estudantes avaliados, o que significa, pela TCT, que o item não deve ser rejeitado e cumpre seu papel de avaliar a habilidade do indivíduo em Logaritmos. Avaliando-se pela TCT, nota-se pouca plausibilidade nas alternativas A, B e D, pois menos de 10% dos estudantes avaliados escolheram essas alternativas. 43% dos estudantes escolheram a alternativa C, item que provavelmente foi escolhido por estudantes que não compreenderam o conceito de logaritmos, que é o de expressar o produto de dois números reais como sendo a soma dos seus expoentes. Por este item, infere-se que quase a metade da turma de Cálculo 1 aqui estudada, não compreende o conceito de logaritmo, fundamental na compreensão de diversos fenômenos do Cálculo e de outras disciplinas importantes. Na ótica da TRI, disposta na Figura 3.11, em que pese o elaborador considerar o item fácil, ele é um item mediano segundo a definição dada por Rabelo (2013), em [36], tem discriminação de 1,669, o que o aponta que o item cumpre com o seu papel de avaliar a habilidade do avaliado nessa ferramenta importante do Cálculo. A possibilidade de acerto ao acaso foi pouco mais de 2%, o que sugere que nenhuma das alternativas possui discrepância significativa para que os alunos acertem o item sem ter o requisito necessário para tal.

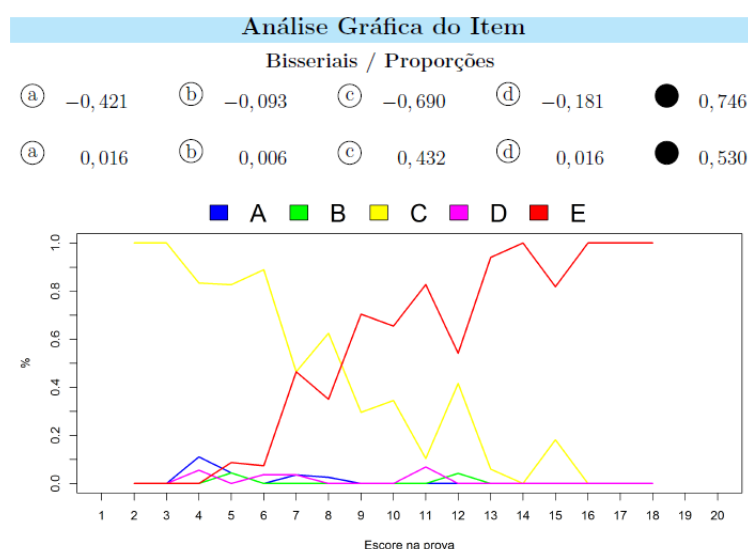


Figura 3.10: Análise do item via TCT

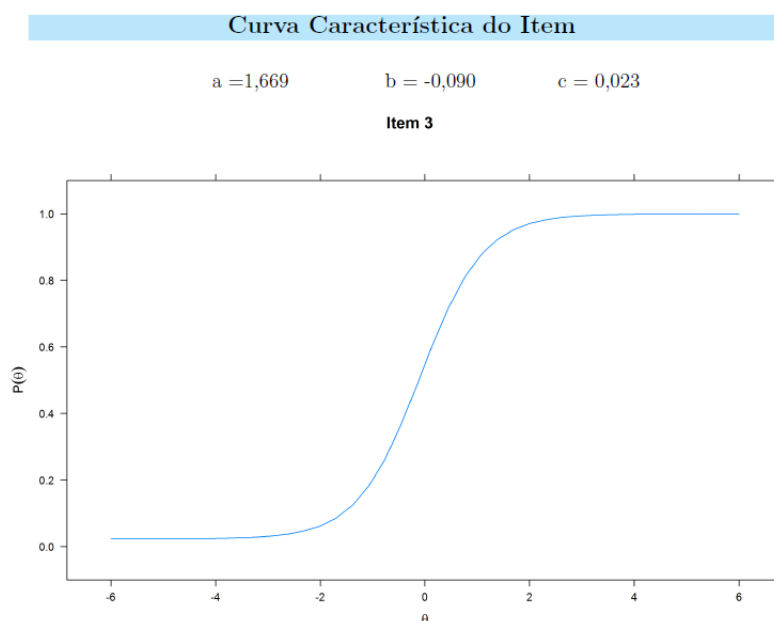


Figura 3.11: Análise do item via TRI

Questão 3

- Habilidade H6: Ler e interpretar dados e informações e expressar-se com clareza e precisão;
- T0: tema: Ensino Médio;
- Nível considerado pelo elaborador: Fácil.

Trata-se neste item de reconhecer o domínio de uma função composta por quociente, raiz e módulo. Para resolver este item corretamente, o estudante avaliado precisava reconhecer as propriedades básicas de uma raiz quadrada de um número real e que um denominador não pode ser igualado a zero, além de conhecer a definição de módulo, que é a seguinte:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Isto significa que o módulo de um número real serve para positivá-lo. No item em questão, pedia-se para se determinar o domínio da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|-1}}$. As alternativas eram as seguintes:

- a) $\{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$.
- b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c) $\{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$.
- d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- e) $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

O item aqui discutido, ao ser utilizado em uma avaliação de Cálculo, mostrou um comportamento interessante. Pela TCT, apresentado na Figura 3.12, apresentou uma proporção de acertos de 55,5%, o que indica que a maior parte da turma acertou o item e, somados os discentes avaliados, que optaram pelas alternativas B e C, eles não chegam a 10%, o que sugere pouca plausibilidade destes itens.

Observando-se essas alternativas, um aluno que optou pela alternativa B, que teve cerca de 3,9% de escolha, possivelmente usou o fato de que o denominador é estritamente maior do que zero, mas esqueceu-se de levar em conta a função módulo, um erro que parece muito mais plausível que aquele contido no item C, que aponta que o estudante tomou apenas o intervalo negativo do módulo, e que teve índice de escolha de cerca de 4,2%. O erro, feito possivelmente por um aluno que optou pelo item A, é muito parecido com aqueles que optaram pelo item C, e um aluno que optou por D deve ter cometido um erro análogo a B. O aluno que optou pelo gabarito do item, a alternativa E, em tese, deve ter levado em conta que $|x| - 1 > 0$ é estritamente positivo, pois se trata de um denominador que também faz papel de base de uma raiz quadrada. O aluno então chega à desigualdade $|x| > 1$. Sem conhecimento a respeito da função módulo, há plausibilidade de marcação dos itens A e C. Sem levar em consideração a raiz quadrada, em tese, existe uma possibilidade de marcação dos itens B e D. O aluno que acertou, usando a definição de módulo, concluiu que $x > 1$ caso o x seja um número real positivo e, caso contrário, $x < -1$. Na ótica da Teoria da resposta ao item, exposto na Figura 3.13, o item apresentou poder de discriminação de 0,570, que é baixo, conforme a definição de Rabelo (2013), em [36]. O índice de dificuldade de -0,084 sugere que foi um item mediano e a probabilidade de acerto ao acaso foi de 0,090. Na TCT, o item apresentou uma correlação bisserial de 39%, o que indica que ele está no limite para ser rejeitado.

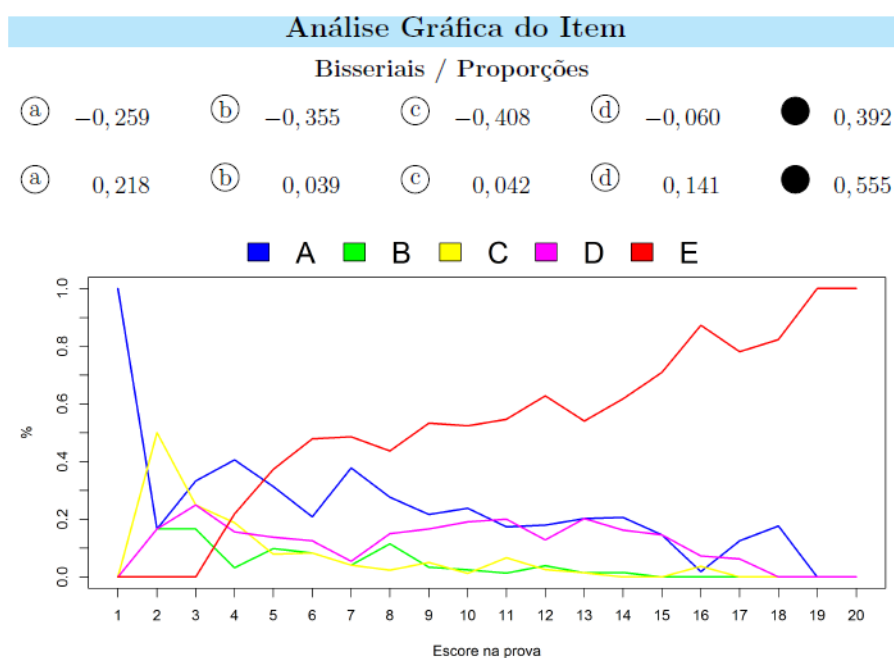


Figura 3.12: Análise do item via TCT

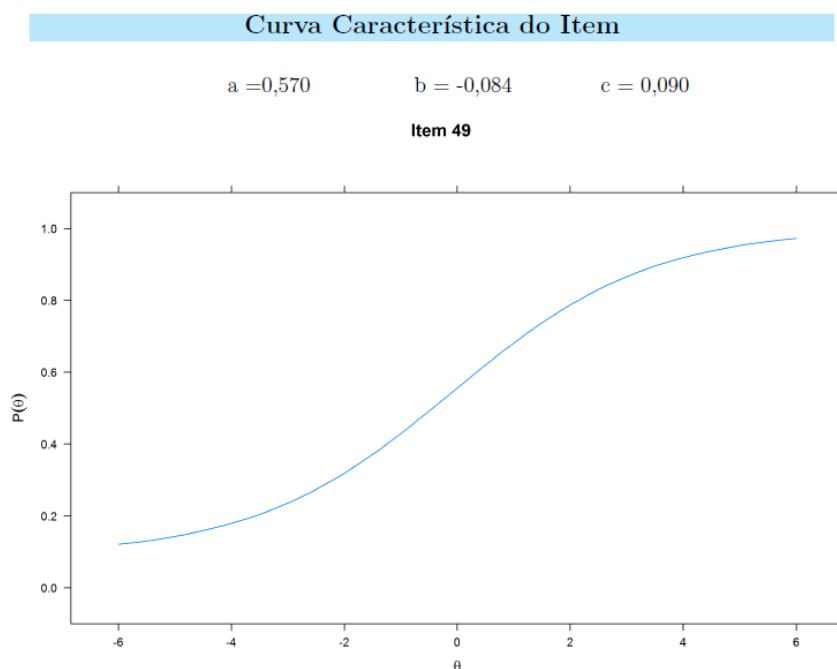


Figura 3.13: Análise do item via TRI

3.3.2 Limites e Continuidade

Questão 1

- Habilidade H7: Aplicar métodos adequados para análise e resolução de problemas;
- T2: Tema: Limites envolvendo o infinito;
- Nível considerado pelo elaborador: Médio.

Embora o tema do item seja considerado como sendo o de Limites tendendo ao infinito, a resolução correta desse item parece não necessitar do uso desta ferramenta para resolver-se corretamente. O item propunha uma hipótese de que $x > 0$ e pedia uma condição para que $\frac{x}{x+1} > 1 - 10^{-3}$. As alternativas dispostas foram, sendo a alternativa A a correta:

- a) $x > 10^3 + 1$.
- b) $x > 1 - 10^{-3}$.
- c) $x < 10^3 - 1$.
- d) $x < 10^{-3} + 1$.
- e) $x < 10^3 + 1$.

Para responder a esse item corretamente bastava multiplicar os dois membros pelo fator $(x + 1)$, obtendo-se $x > (1 - 10^{-3}) \cdot (x + 1)$. Aplicando-se a propriedade distributiva no segundo membro da nova inequação, obtém-se $x > x - 10^{-3}x + 1 - 10^{-3}$. Ajustando-se a desigualdade com vistas a isolar a variável x , tem-se que $x > 10^3 - 1$. O fato do valor de x ser estritamente positivo garante que o denominador não será nulo. Essa resolução mostra que, embora o elaborador tenha definido que o item trata do tema Limites no infinito, a resolução que acarreta no acerto do item não parece valer-se de nenhuma ferramenta relacionada a este tema. Do ponto de vista da TCT, exposta na Figura 3.14, a

alternativa correta apresenta a correlação dos que acertaram o item com o seu desempenho de 62,8%, mas a proporção de respondentes foi de apenas 37,5% dos estudantes. 62,5% dos estudantes erraram o item que, na prática, necessita apenas de Matemática Básica. Na ótica da TRI, apontada pelo gráfico da Figura 3.15, esse item teve discriminação moderada, o que nos possibilita dizer, com ressalvas, que o item cumpre sua função pedagógica, e o índice de dificuldade de 0,603 aponta que o item foi difícil. Sendo os parâmetros da TRI estimados a posteriori, uma vez que, na demonstração dada por Tavares e Valle (2000), em [39], a estimativa desses parâmetros se baseia no fato de o indivíduo ter acertado ou errado o item, podemos dizer que, para os respondentes, esse foi um item considerado difícil, o que indica a falta de pré-requisito em Matemática Básica de alunos que ingressam na Universidade.

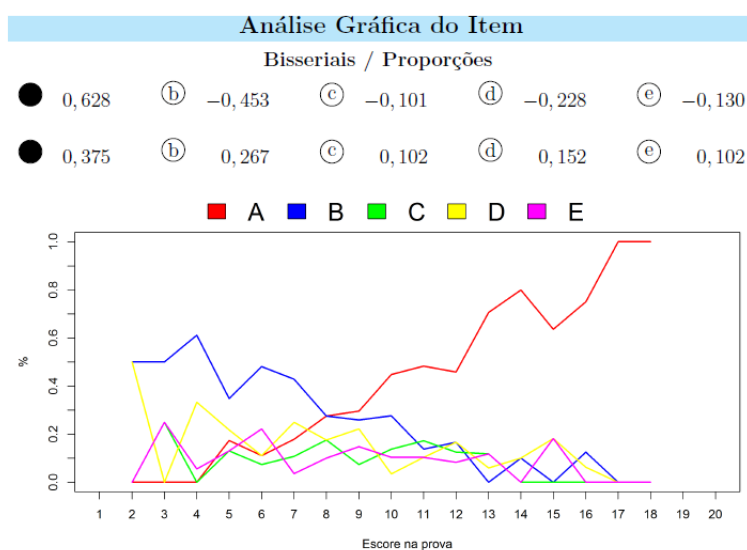


Figura 3.14: Análise do item via TCT

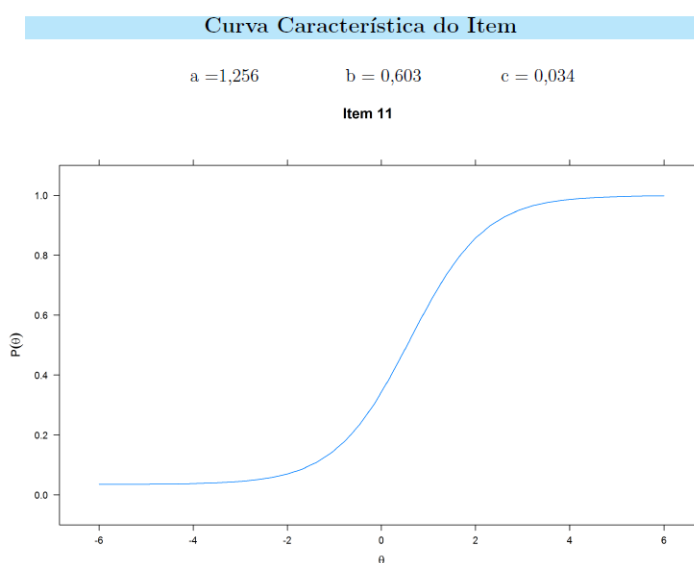


Figura 3.15: Análise do item via TRI

Questão 2

- Habilidade H8: Formular e articular argumentos adequadamente;
- T2: Tema: Limites envolvendo o infinito;
- Nível considerado pelo elaborador: Médio.

Neste item trata-se de interpretar como se comporta o quociente $\frac{\text{sen}(t)}{t}$ quando o argumento t tende para infinito, indagando a respeito do limite deste quando o parâmetro t tender para infinito. As alternativas, dentre as quais tinham a letra A como resposta correta, eram as seguintes:

- a) existe, pois $\text{sen}(t)$ é limitado e $\frac{1}{t}$ tende a zero.
- b) existe, pois é o limite trigonométrico fundamental.
- c) não existe, pois $\text{sen}(t)$ oscila entre -1 e 1.
- d) não existe, pois não vale a regra do quociente para limites.
- e) não existe, pois t assume valores que não estão no domínio da função seno.

De acordo com a TCT e nas vias da correlação bisserial, pode-se dizer que o item tem poder de discriminação no limite do aceitável, uma vez que segundo Rabelo (2013), em [36], um item com correlação bisserial menor de que 0,3 deve ser rejeitado.

Na alternativa A, gabarito da questão, presume-se que um discente que optou por esse item conceituou corretamente a função $\text{sen}(t)$ como limitada nos limites inferior e superior de -1 e 1, respectivamente, e que o quociente $\frac{1}{t}$ tende a zero quando t tende para infinito, uma vez que se trata de uma função assíntota em relação ao eixo x . Essa alternativa teve uma proporção de escolha de apenas 19,5% dos discentes. A opção B, que atraiu 25% dos discentes, mencionava o Limite Fundamental, que se trata do limite deste mesmo quociente da questão só que tendendo para 0. A opção C teve o maior percentual de respondentes, 30%, e aponta os limites inferior e superior da função seno. Ao aluno, faltou diferenciar esse intervalo para o qual a função seno está definida com a noção de Limite Lateral. A opção D dispensa maiores comentários por apresentar pouca plausibilidade, e a opção E, com 21% de escolha, contém um erro que aponta que o estudante não sabe diferenciar o domínio da imagem da função seno. Na ótica da TRI, este item apresentou poder de discriminação de 0,743, o que o classifica como moderado; sua proporção estimada de acerto ao acaso foi de 0,045, o que indica que, dos respondentes que tiveram sucesso na escolha da alternativa, uma parcela pouco significativa o "chutou". Sua dificuldade estimada, por sua vez, foi de 2,48, o que o coloca como sendo um item muito difícil.

O ínfimo índice de acerto deste item pode apontar dois problemas: não reconhecer a função seno, ferramenta que o aluno deveria ter aprendido no Ensino Médio, e os alunos decorarem regras operatórias, mas não saberem conceituar as propriedades do limite de uma função. Isso remete a uma reflexão sobre o Ensino da Matemática Básica no país, sobretudo o de renomadas escolas particulares e sobre a razão de ser do curso de Matemática. Tendo em vista que os alunos não têm um bom domínio de Trigonometria, que é um fundamento requerido para Cálculo 1 e presumidamente foi vista no Ensino Médio, será que os exames de larga escala cumprem o seu papel de avaliar se os alunos possuem os pré-requisitos necessários para fazer o curso de Matemática, em especial a disciplina de Cálculo 1, com êxito? Porque, conforme apontam os dois modelos, TRI e TCT, os discentes apontam dificuldades que deveriam ter sido sanadas no Ensino Médio. Dessa forma, os alunos matriculados na disciplina de Cálculo 1 têm

a maturidade necessária em Matemática para cursar essa disciplina? Por fim, a maioria dos alunos está compreendendo o conceito de Limite? Um fato que pode traduzir esses questionamentos é o item em questão ter sido considerado de dificuldade mediana pelo elaborador. Quando encarado pelos alunos da disciplina de Cálculo 1, mostrou-se muito difícil, segundo classificação dada por Rabelo (2013), em [36].

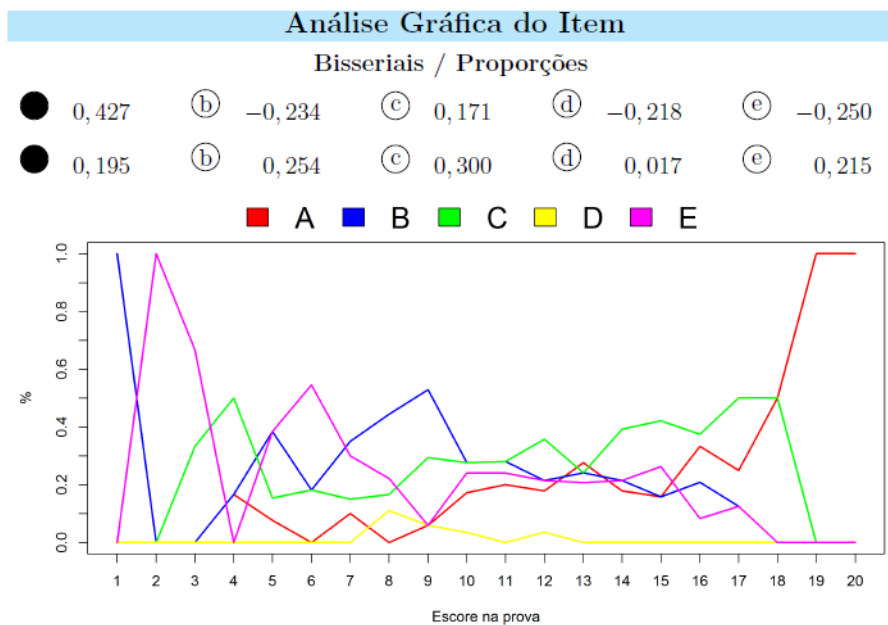


Figura 3.16: Análise do item via TCT

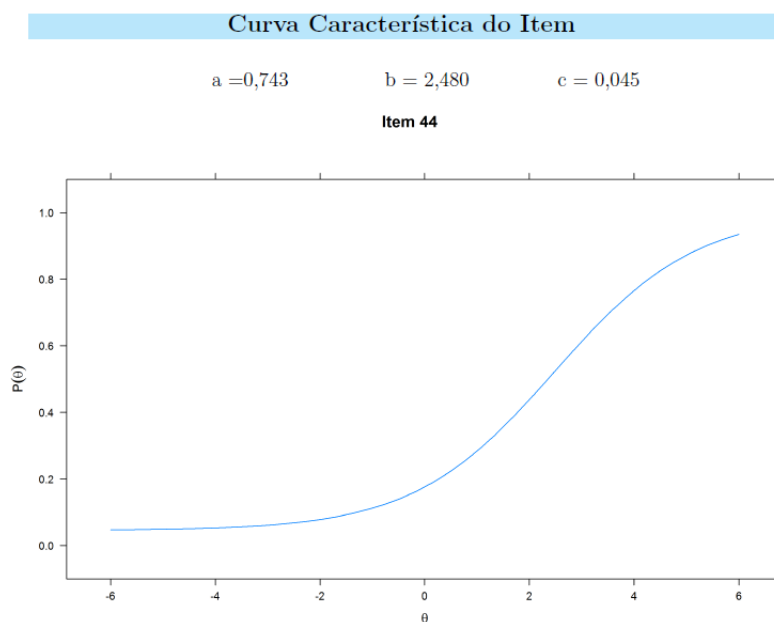


Figura 3.17: Análise do item via TRI

Questão 3

- Habilidade H8: Formular e articular argumentos adequadamente;
- Tema T2: Limites ordinários;
- Nível considerado pelo elaborador: Difícil.

Esse item foi considerado difícil pelo elaborador e exigia conhecimento de propriedades fundamentais de limite. Pedia-se para discutir acerca da inexistência do limite $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$ e as alternativas, dentre as quais a letra D era a correta, se apresentavam da seguinte forma:

- a) certa, pois $\operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$ não está definido em $x = 0$.
- b) errada, pois o limite existe e é igual a $\operatorname{sen}(1)$.
- c) certa, pois não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$.
- d) errada, pois o limite existe e é igual a 0.
- e) errada, pois o limite existe e é igual a 1.

Na ótica da TCT, esse item cumpre seu papel pedagógico, pois sua correlação bisserial foi de 54,3%. 42,9% dos respondentes acertaram o item, sugerindo mais uma vez o alto grau de deficiência na matéria em questão.

Para resolver corretamente o item, o aluno precisava ver que a função seno é limitada no intervalo fechado entre -1 e 1 e que o $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, fato descrito na opção D. A opção A sugere que o aluno entende que todo e qualquer limite denota continuidade, aplicando equivocadamente $x = 0$. A alternativa B sugere pouca plausibilidade, pois o aluno aplicaria equivocadamente $x = 0$ na função em questão e determinaria o valor máximo da função seno de forma incorreta. Apenas cerca de 4% dos respondentes marcou essa opção, e a AGI relativa a esse item sugere que a maior parte destes teve um fraco desempenho na prova em que foi cobrado o item aqui discutido. A opção C, assinalada por aproximadamente 15% dos estudantes, aponta um erro análogo àquele descrito na opção A. O item E, por sua vez, indica um erro em Matemática Básica, pois há multiplicação por 0 em questão.

Por meio da TRI, o item apresenta poder de discriminação de 0,884, portanto moderado, e cumpre com ressalvas, seu papel. É pouco provável que alguém o tenha acertado ao acaso, já que o parâmetro c_i , que aponta esse fator, é muito baixo, conforme aponta a Figura 3.19, e sua dificuldade foi de 0,529, no limite entre o moderado e o difícil para esse parâmetro.

A análise do item evidencia duas dificuldades por parte dos alunos:

- 1- confundir os pontos de máximos da função seno com os da função co-seno. Essa dificuldade é presumida quando 21% dos alunos optam pela opção E;
- 2- Os alunos confundem o valor numérico de uma função, que é o valor exato em determinado ponto, com um valor por aproximação, que é o caso do limite. A opção A mostra essa dificuldade.

Esse item corrobora, mais uma vez, a tese de que, antes de se dar uma definição formal de um conceito matemático em sala de aula, nesse caso, Limite, recomenda-se trabalhar com os alunos uma noção intuitiva

dessas ferramentas, construindo, por meio de valores numéricos de funções, a aproximação para um limite que, em determinado ponto, não existe.

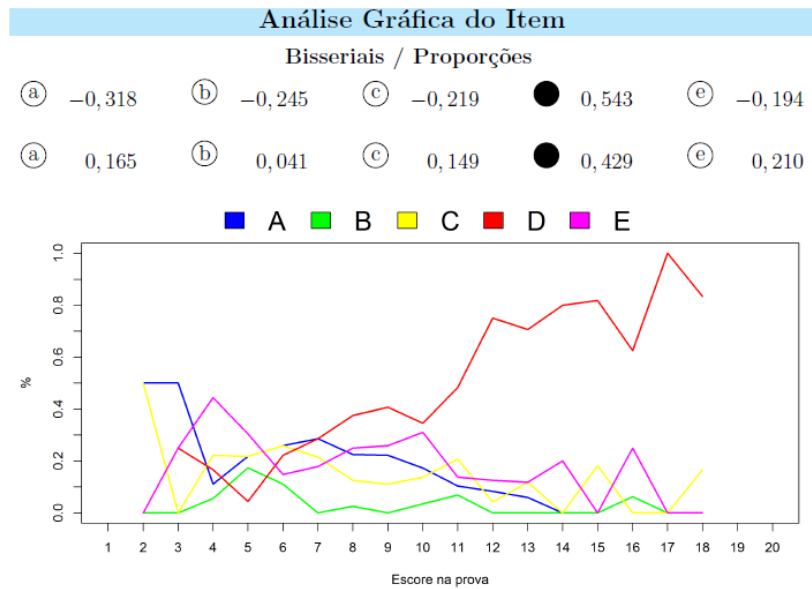


Figura 3.18: Análise do item via TCT

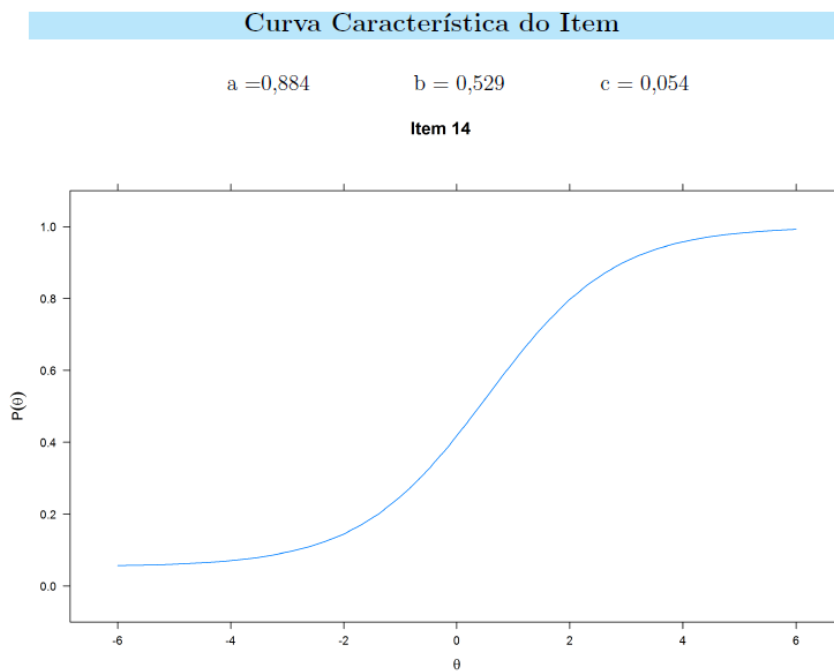


Figura 3.19: Análise do item via TRI

3.3.3 Derivada e suas aplicações

Questão 1

- Habilidade H7: Aplicar métodos adequados para análise e resolução de problemas;
- Tema T1: Regra da Cadeia;
- Nível considerado pelo elaborador: Fácil.

No item, esperava-se do discente domínio da aplicação de duas ferramentas de derivada: A Regra do Produto e a Regra da Cadeia. O item tinha como hipóteses que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em todo o seu domínio e $f(x) = x^2g(x^3)$, sendo $x \in \mathbb{R}$; $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$. Pedia-se $f'(1)$ e dispunha-se das seguintes alternativas, dentre as quais a letra D era a correta:

- 8.
- 10.
- 12.
- 14.
- 16.

Na análise via TCT, disposta na Figura 3.20, tem-se que o item teve 65% de erro, em detrimento do elaborador tê-lo considerado fácil. Pela ótica da TRI, o índice de acerto ao acaso foi de apenas 1,7%. Isso leva a uma análise pedagógica do item no que tange aos erros que supostamente levam os discentes a optarem pelas alternativas erradas.

Na alternativa correta, o discente primeiramente aplicou a regra do produto de funções para derivada, haja vista estar diante de um produto de duas funções. Ao derivar encontrou a expressão $f'(x) = 2x.g'(x^3) + 3x^4.g'(x^3)$ e, em seguida, fez $x = 1$ e aplicou na expressão resultante da derivada, dando $f'(1) = 2.1.g'(1^3) + 3x^4.g'(1^3)$, encontrando o resultado proposto pela alternativa D, a correta.

O indivíduo que optou pela alternativa A não fez a segunda parcela da regra do produto, fazendo $2xg(x^3)$ e, após, aplicou-o no ponto, obtendo a resposta proposta na alternativa. Um erro "aceitável" é o dos optantes da alternativa B, onde não se aplica a regra da cadeia na segunda parcela da equação, que determina a regra do produto, obtendo $f'(x) = 2x.g'(x^3) + x^2.g'(x^3)$. Em seguida, aplicou nessa equação, obtida corretamente, porém de forma incompleta, $x = 1$ e alcançou o valor numérico pedido igual a 10, conforme consta da alternativa.

No tocante à alternativa C, aqueles que por ela optaram provavelmente aplicaram equivocadamente a regra da cadeia, multiplicando $2x3x^2g'(x)$ e nela aplicaram $x = 1$, encontrando o valor numérico pedido igual a 12.

Por fim, aqueles que optaram pela alternativa E aplicaram a regra do produto de maneira equivocada, derivando apenas a potência de x nas duas parcelas, sem derivar a função g e, conseqüentemente, sem aplicar a regra da cadeia.

Na análise da TCT o item deve ser considerado bom, haja vista que o seu coeficiente de correlação bisserial foi de 63,3%. Isso aponta, portanto, que não se teve êxito ao se buscar fazer compreender essa ferramenta do Cálculo 1.

Na ótica da TRI, o valor irrisório do índice de acerto ao acaso (Figura 3.21) aponta que é provável que um aluno que acertou o item aplicou de maneira correta os conceitos aqui exigidos, o que mostra que esses conceitos foram compreendidos por poucos alunos na turma. Conforme mostra a Figura 3.21,

seu poder de discriminação foi de 1.051, o que indica que houve moderada discriminação em relação ao seu papel pedagógico, e sua dificuldade foi de 0,657, o que classifica o item como difícil e, dessa forma, contraria a expectativa do elaborador.

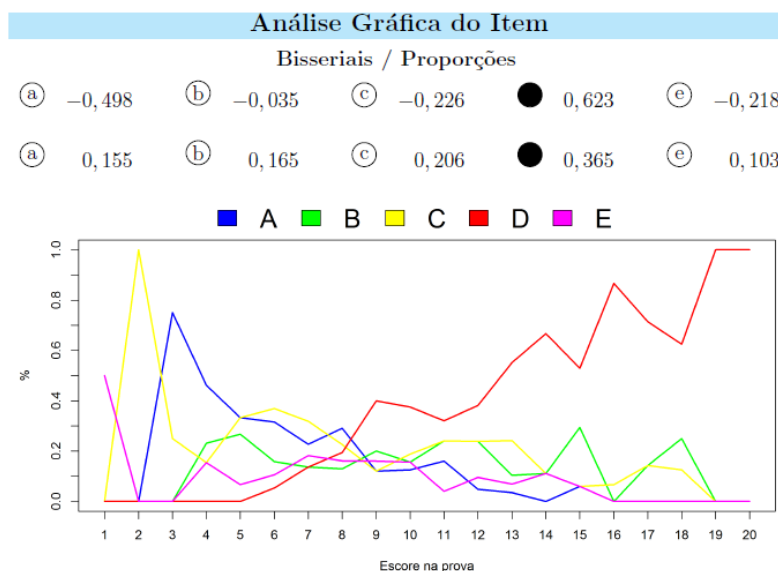


Figura 3.20: Análise do item via TCT

a = 1,051 b = 0,657 c = 0,017

Item 5

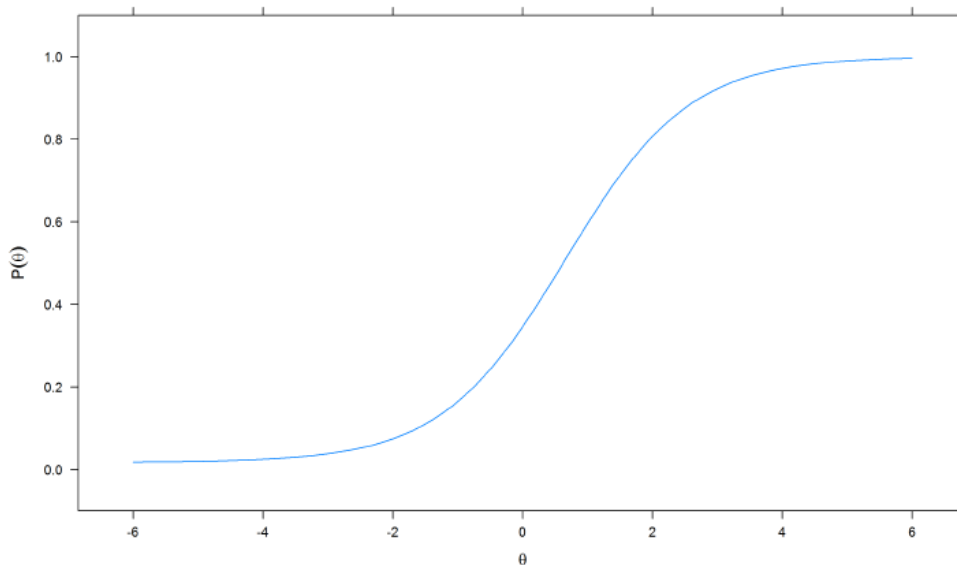


Figura 3.21: Análise do item via TRI

Questão 2

- Habilidade H9: Fazer inferências indutivas, analíticas e analógicas;
- Tema T2: Derivação implícita e da inversa;
- Nível considerado pelo elaborador: Fácil.

O item gira em torno de fazer a derivação implícita da equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, tendo em vista o objetivo da questão ser calcular o coeficiente angular no ponto $-x_0 = y_0 = 3^{-\frac{3}{2}}$. O aluno que se decidiu pela opção A, gabarito do item, aplicou corretamente a regra da potência à equação e obteve a expressão

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} = 0.$$

Em seguida, aplicou corretamente o ponto à equação acima, substituiu $x = -2^{-\frac{3}{2}}$ e $y = 2^{-\frac{3}{2}}$, e obteve $\frac{\delta y}{\delta x} = 1$. O aluno que elegeu a opção E, a qual atraiu muitos indivíduos que tiveram bom desempenho, conforme se pode observar na Figura 3.22, teve raciocínio análogo à ao da opção D, mas não se atentou para o sinal da abscissa do ponto de tangência. Quem optou pela opção C derivou de forma equivocada, obtendo a expressão $\frac{2}{3} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{3}$, e quem optou pelo disposto nas alternativas B e D até derivou corretamente a equação da curva mencionada no item, tal como o item correto, daí isolou a variável y e tratou a equação obtida como sendo uma reta, não substituindo o ponto em questão. Pela TCT, esse item merece ser reelaborado, uma vez que este teve uma correlação bisserial de 18%, o que, segundo Rabelo (2013), em [36], implica que a correlação entre o aluno ter ido bem no teste e ter acertado o item é baixa. Por meio da TRI, o item seria no mínimo discutível, uma vez que este teve um poder de discriminação de 0,6513, conforme disposto na Figura 3.23. A dificuldade dos discentes no que se refere ao item teve uma diferença abismal em relação à expectativa do elaborador, que considerou o item fácil. A CCI (Figura 3.23) mostrou que esse item foi muito difícil para os estudantes. Dessa forma, não é possível rejeitar a hipótese de que essa regra de derivação não foi de fato compreendida pelos alunos.

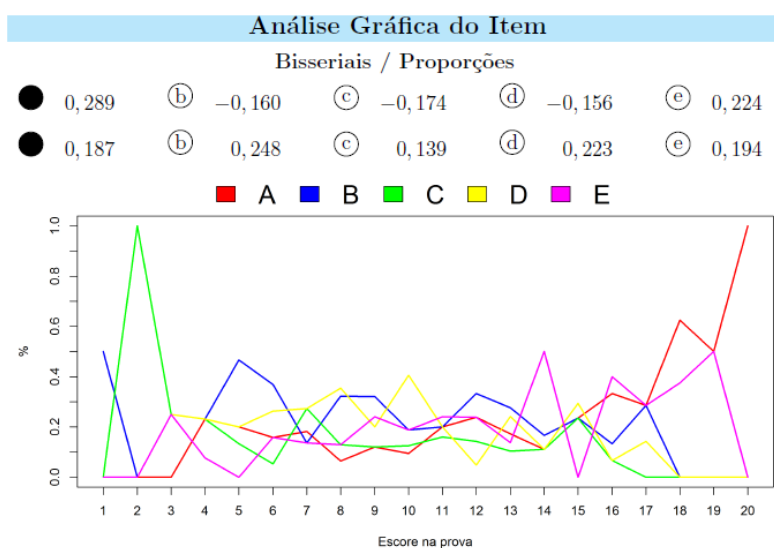


Figura 3.22: Análise do item via TCT

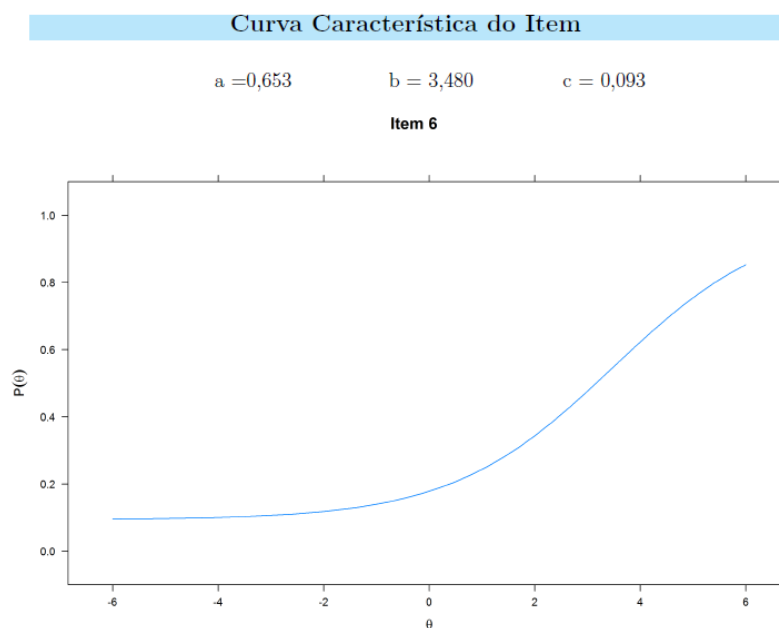


Figura 3.23: Análise do item via TRI

Questão 3

- Habilidade H10: Formular hipóteses e conjecturas, prever resultados e fazer generalizações;
- Tema T1: Regra da Cadeia;
- Nível considerado pelo elaborador: Difícil.

Neste item, tratava-se de discutir do que dependia o sinal da derivada segunda da função composta $h(x) = f(ax+b)$. As alternativas, dentre as quais o disposto na letra B apontava a resposta correta, eram:

- a) a .
- b) f'' .
- c) f' .
- d) a e do sinal de f' .
- e) a e do sinal de f'' .

O indivíduo que acertou o item aplicou a regra da cadeia corretamente duas vezes, obtendo inicialmente $h'(x) = a \cdot ax + b$. Em seguida, derivou novamente a função e obteve $h''(x) = a^2 \cdot f''(ax+b)$. Na opção A, o aluno apenas deriva a função de dentro; no item C, só faz a derivada primeira, tal como na D e no item E, não se atenta ao fato de que na derivada segunda de $h(x)$, o termo a^2 é sempre positivo. Pela TCT (Figura 3.24) o item se mostrou difícil para os alunos, pois 20% dos estudantes o acertaram. A maioria dos estudantes não se atentou para o fato de que um termo elevado ao quadrado é sempre positivo. O coeficiente de correlação bisserial foi de 0,289, o que nas palavras de Rabelo (2013), em [36], condenaria o item. Pela TRI (Figura 3.25), o item é deficiente, por apresentar baixo poder de discriminação, e muito difícil. Nota-se, portanto, que esse item não cumpriu a sua função pedagógica de avaliar se os alunos aprenderam Regra da Cadeia, seja pela notória incompreensão deste assunto por parte da maioria dos

alunos, seja pela falta de pré-requisito ou até mesmo desatenção. O item para a TRI foi classificado como muito difícil.

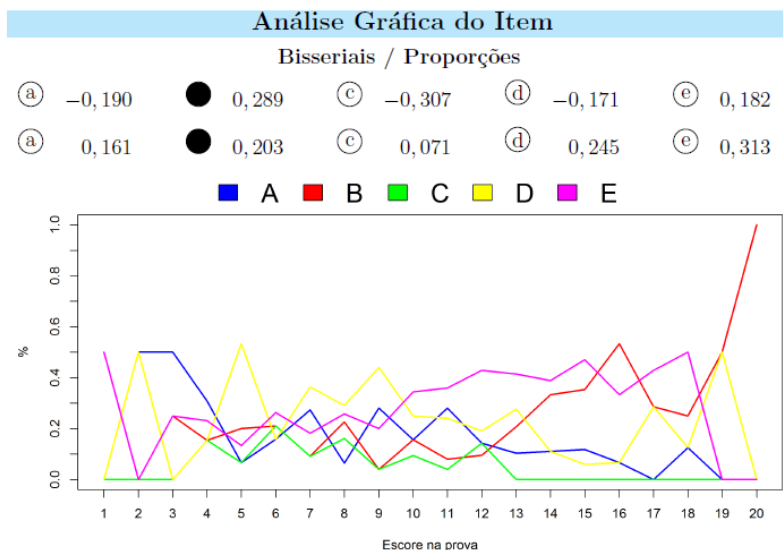


Figura 3.24: Análise do item via TCT

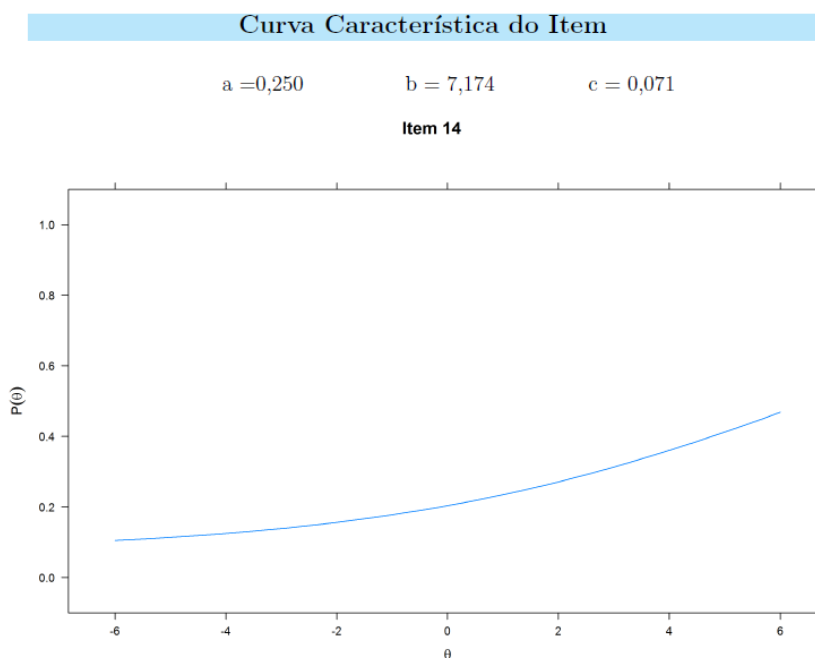


Figura 3.25: Análise do item via TRI

3.3.4 Integrais

Questão 1

- Habilidade H5: Organizar estratégias de ação e selecionar métodos;
- Tema T4: Frações Parciais;
- Nível considerado pelo elaborador: Fácil.

O item se propunha a discutir qual o método mais adequado para se determinar a primitiva

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 9} dx.$$

As alternativas, dentre as quais a B era a correta, dispunham das seguintes afirmações:

- a) substituição, fazendo $u = 2x - 3$.
- b) frações parciais, fazendo $\frac{2x - 3}{x^2 - 9} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 3}$.
- c) Por partes, fazendo $u = x^2 - 9$ e $dv = (2x - 3)dx$.
- d) substituição trigonométrica, fazendo $x = \cos(\theta)$.
- e) substituição trigonométrica, fazendo $x = \tan(\theta)$.

Primeiramente, segundo Rabelo (2013), em [36], observando-se a análise via TCT, aponta-se um defeito básico na engenharia de elaboração de itens: a falta de plausibilidade das alternativas. Por essa razão, as opções não serão discutidas com maiores detalhes, pois apenas 12% dos avaliados não optou pela alternativa correta, como mostra a figura. Apesar disso, o item teve coeficiente de correlação bisserial de 65,4%, o que indica que o item cumpre sua função pedagógica, ressalvada a notória falta de plausibilidade, especialmente das opções D e E. De resto, é possível, e até provável, que alguns estudantes tenham tentado resolver a primitiva pelo métodos propostos pelas opções.

Pela TRI, como mostra a Figura 3.27, o item teve um poder moderado de discriminação e foi considerado muito fácil, algo que parece contraditório, pois um baixo índice de dificuldade sugere que não há a exigência de que, para resolver esse item, o indivíduo tenha um alto traço latente.

Isso significa que não há como fazer uma análise pedagógica relacionada ao desenvolvimento da habilidade descrita no item no que diz respeito à determinação de primitivas.

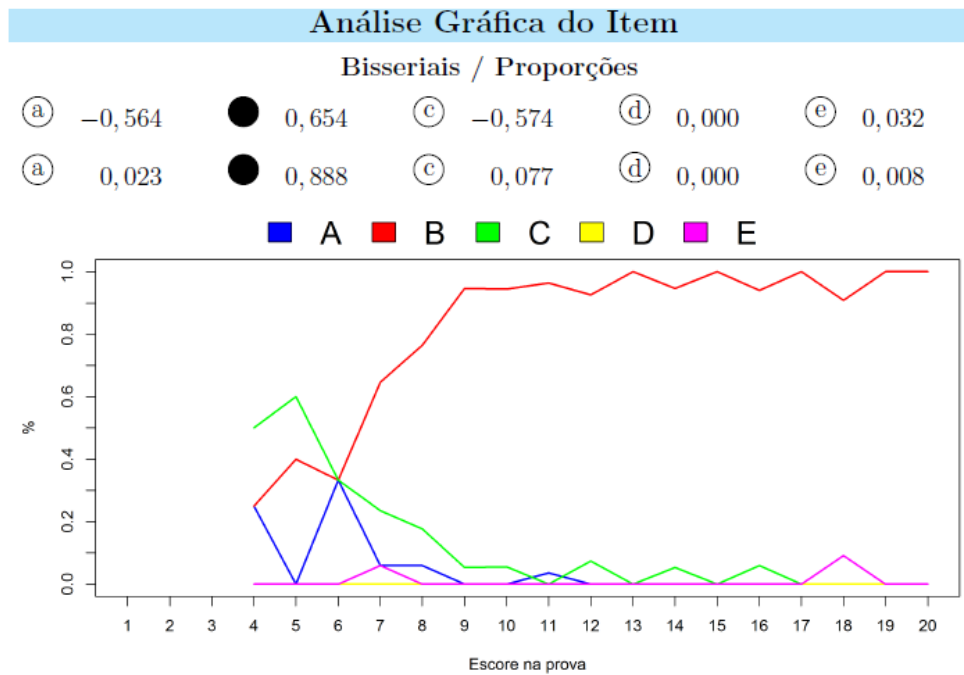


Figura 3.26: Análise do item via TCT

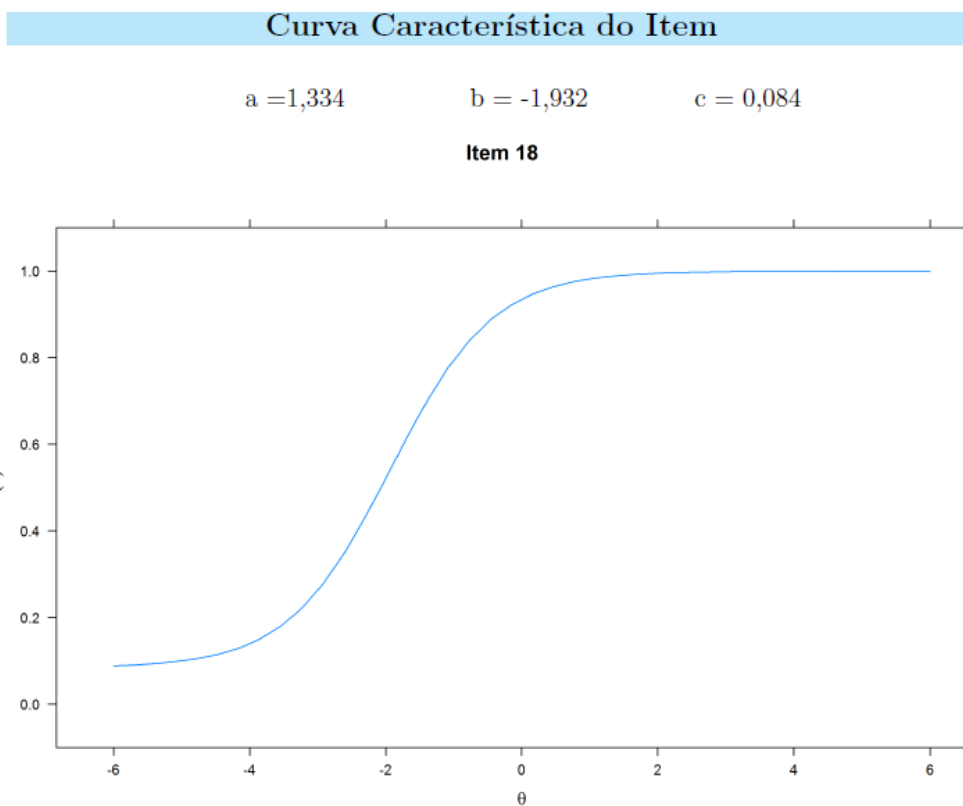


Figura 3.27: Análise do item via TRI

Questão 2

- Habilidade H11: Analisar criticamente a solução dada para uma situação-problema;
- Tema T2: Substituição;
- Nível considerado pelo elaborador: Médio.

O item propunha um método para a solução da Integral $I = \int \text{sen}(x) \cos(x) dx$ por duas maneiras:

$$I - \text{Fazer } u = \text{sen}(x) \text{ e } du = \cos(x) dx$$

$$II - \text{Fazer } u = \cos(x) \text{ e } du = -\text{sen}(x) dx.$$

As duas substituições estariam obviamente corretas. Porém, o resultado obtido em I foi $I = \frac{\text{sen}^2 x}{2}$ e, em II, $I = \frac{-\cos^2 x}{2}$. Mas, pela unicidade das primitivas, concluía-se que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0$, contrariando a Lei Fundamental da Trigonometria, que diz que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, ou seja, uma contradição. A pergunta do item era: Onde está o Erro? As opções, dentre as quais a A era a correta, dispunham o seguinte:

- As constantes de integração foram esquecidas.
- A substituição em I foi feita incorretamente.
- A substituição em II foi feita incorretamente.
- Deve ser usado o método da integração por partes para se calcular I .
- O Teorema Fundamental do Cálculo não pode ser aplicado nesse caso.

À exceção da alternativa D, que atraiu 20% dos respondentes, todas as alternativas apresentaram pouca plausibilidade, segundo a TCT, e não se entrará em discussão sobre elas. Quem acertou o gabarito da questão se valeu do seguinte Teorema, disposto na obra de Lima (2007), em [27]: F é uma integral indefinida de (f) , isto é, existe $a \in I \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(x),$$

se, e somente se, $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I \subseteq \mathbb{R}$. Em outras palavras, as primitivas são as inversas daquelas funções obtidas na derivada a menos de uma constante. O item apresenta correlação bisserial de 56,8%, conforme aponta a Figura 3.28, e a TRI corrobora com a hipótese de que esse item é questionável quanto à sua adequabilidade ao se avaliar se o aluno desenvolveu a habilidade descrita no item para o tema. Pela TCT, há três opções pouco plausíveis, e pela TRI, disposta na Figura 3.29, é um item de discriminação alta, mediano, confirmando, assim, a expectativa do elaborador, mas chama-se a atenção para o índice de acerto ao acaso, de 30%.

O gráfico na Figura 3.28 mostra que esse item foi marcado por muitos candidatos de baixo desempenho, e o da Figura 3.29 aponta um alto índice de acerto ao acaso. Isso confirma a falta de plausibilidade de três alternativas na questão.

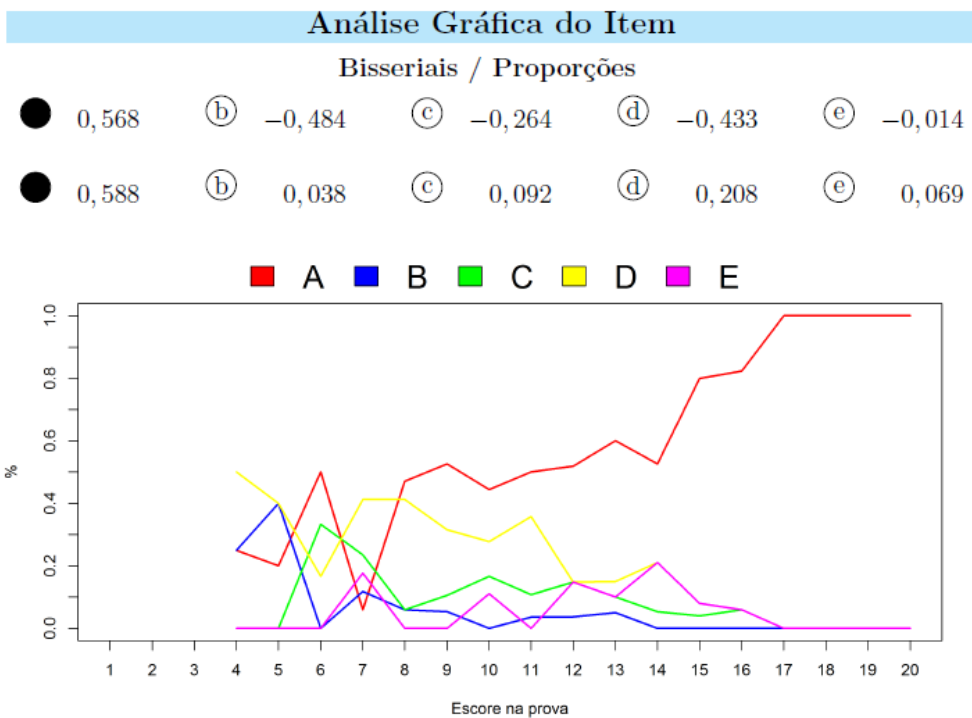


Figura 3.28: Análise do item via TCT

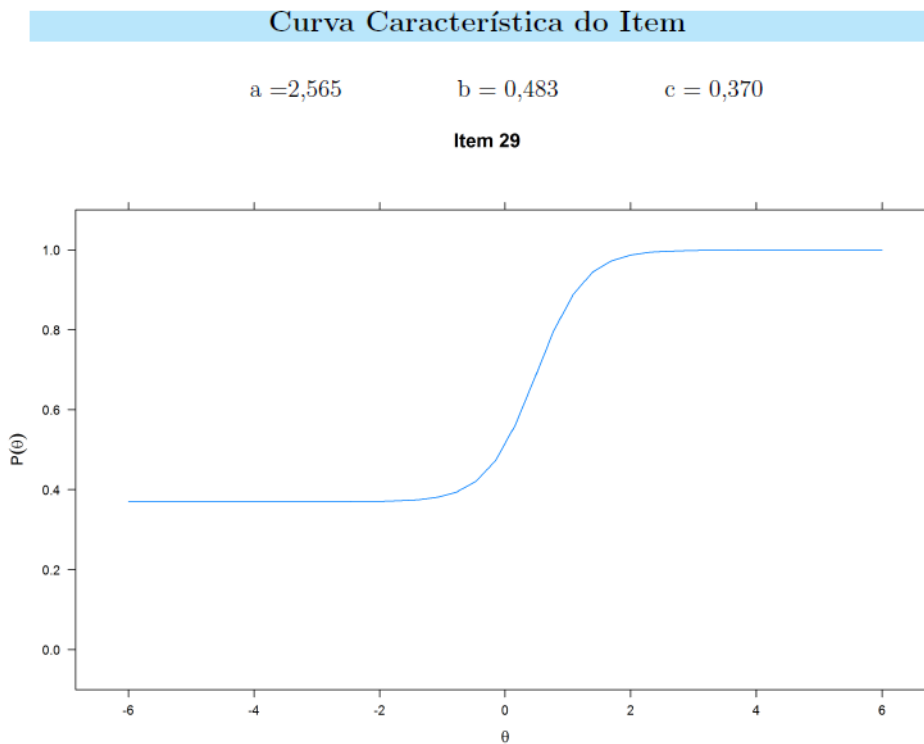


Figura 3.29: Análise do item via TRI

Questão 3

- Habilidade H4: Inter-relacionar objetos de conhecimento em diferentes áreas;
- Tema T2: Teorema Fundamental do Cálculo + Teoria;
- Nível considerado pelo elaborador: Difícil.

O item consistia em aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, que diz que a Integral é o processo inverso da derivação. Pedia -se a derivada da função

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos(x)}{x} dx$$

no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, onde $x > 1$. As alternativas, dentre as quais a opção c era a verdadeira, dispunham o seguinte:

- a) -1 .
- b) $-\frac{2}{\pi}$.
- c) 0 .
- d) $\frac{2}{\pi}$.
- e) 1 .

O aluno que optou pela resposta correta da questão, considerando que ele não acertou ao acaso, aplicou corretamente o Teorema Fundamental do Cálculo, que, segundo Lima (2007), em [27], Guidorizzi (2001), em [21], e outros autores,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{x}.$$

No ponto $x = \frac{\pi}{2}$, sendo $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, então o valor pedido era 0. Os alunos que optaram pelas opções A ou E consideraram $\cos(\frac{\pi}{2}) = 1$ ou $\cos(\frac{\pi}{2}) = -1$ se esquecendo ainda do denominador, ou seja, não aplicando o ponto na função proposta. Quem optou por B ou D aplicou o ponto na função proposta, mas, de forma equivocada, considerou $\cos(\frac{\pi}{2}) = 1$ ou $\cos(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Na ótica da TCT, o item apresentou coeficiente de correlação bisserial de 59,5%, o que, por essa visão, é um item capaz de discriminar as habilidades individuais de cada discente.

Na ótica da TRI, o item cumpre, com ressalvas, seu papel pedagógico e é considerado um item difícil, confirmando a expectativa do elaborador, e, embora significativa, a parcela de estudantes que acertou o item ao acaso é menor de que o esperado, que costuma ser de 20% para um item com 5 opções de escolha.

Na análise da TCT, é importante frisar que mais da metade da turma até soube aplicar o conceito de derivada, mas não soube utilizar as ferramentas de Matemática Básica, o que sugere, mais uma vez, que a dificuldade na assimilação de Cálculo 1 pode ter como uma das razões as deficiências que os alunos trazem da Educação Básica.

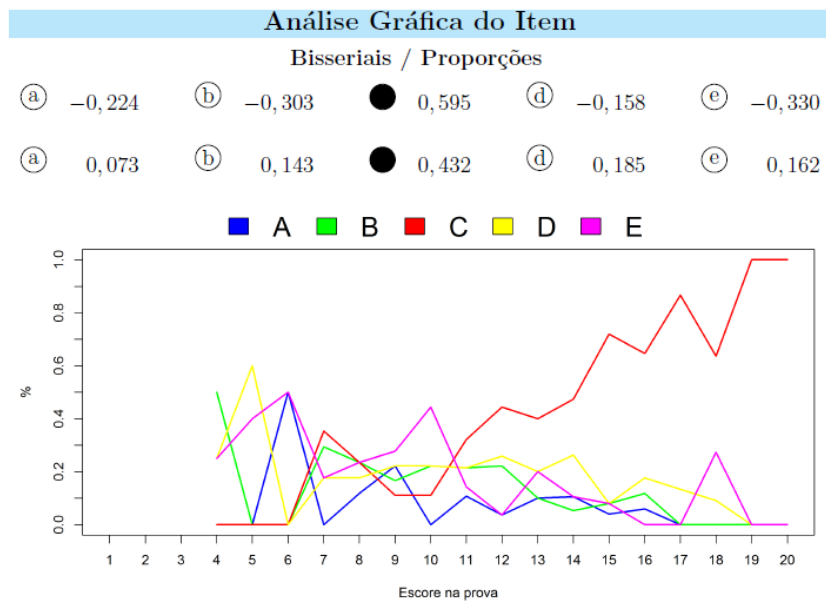


Figura 3.30: Análise do item via TCT

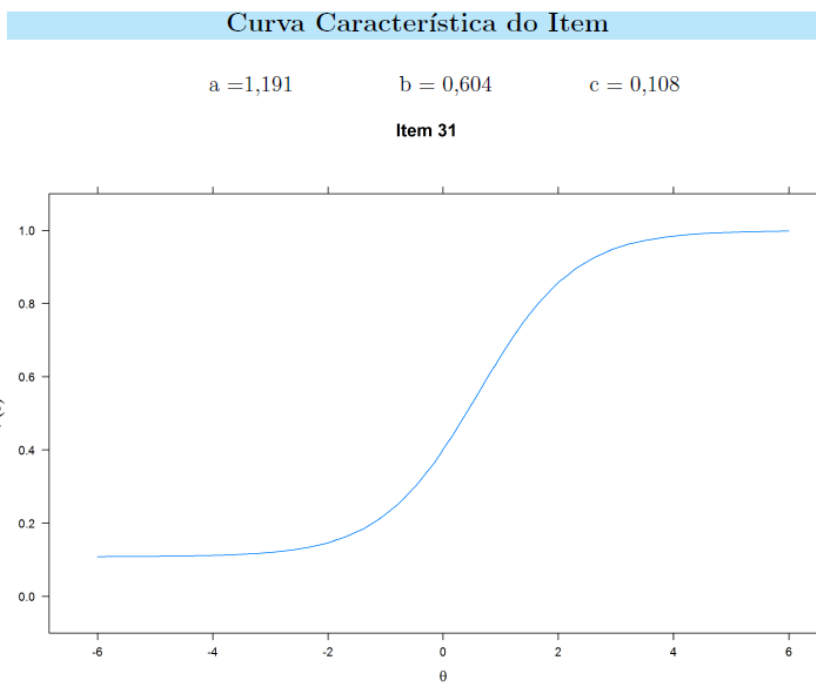


Figura 3.31: Análise do item via TRI

Filosofias do Ensino da Matemática e Aspectos Históricos das Ferramentas do Cálculo

O Cálculo é a disciplina base para todo o curso de Matemática. Deve ser tratado de modo que os alunos entendam os conceitos e possam associá-los a ferramentas matemáticas muito mais complexas ao longo de toda a sua jornada acadêmica. Essa disciplina deve também, em um curso que tem como objetivo formar professores para a Educação Básica e Superior, fazer-se ser associada às ferramentas elementares da Matemática, que se presumem ser de conhecimento dos estudantes. Em um cenário de pouco desenvolvimento de habilidades em Matemática, conforme apontam dados de avaliações de larga escala, que foram discutidas no Capítulo 2, o ensino de Cálculo tende a ser formalista e excessivamente teórico, o que faz com que o aspecto teórico se perca em si mesmo e o ensino acabe por restringir-se a aspectos formais em detrimento de suas aplicações práticas. A sugestão, portanto, é de se fazer uma abordagem histórica da disciplina e uma exposição das ferramentas a partir de um ponto de vista mais empírico, passando ainda por uma mudança na mentalidade dos alunos e docentes em um sistema de ensino voltado apenas para aprovação em provas, vestibulares e concursos, o que faz com que o ensino se perca em sua própria essência. Neste capítulo, portanto, apresentaremos as três linhas filosóficas do Ensino de Cálculo, não com o intuito de criticá-los ou apontá-los como uma linha pedagógica a ser seguida pelo Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, mas retratando-os como as três linhas que influenciam a redação de livros de Cálculo e a metodologia abordada em sala de aula. Além disso, apontaremos o contexto histórico de cada ferramenta do Cálculo 1, a fim de sugerir não só um ensino da História da Matemática ou uma abordagem histórica do Cálculo, mas a inserção de uma abordagem construtivista antes de exibir os conceitos de Cálculo formalizados. Isso visa incentivar no aluno o interesse pela pesquisa e um conhecimento empírico das ferramentas, em um processo de contextualização e descontextualização, conforme ensina Machado (2005), em [30].

4.1 A Matemática Científica e a Matemática Escolar

A Matemática Escolar deve resultar do processo de despersonalização do conceito matemático, definido por Machado (2005), em [30]. Esse processo didático é definido por Chevallard (1991), em [11], como transposição didática, e, por Machado (2005), em [30], como despersonalização, que transforma o saber generalizado por um Matemático Profissional, o qual, dentro de um determinado contexto, desenvolveu uma ferramenta Matemática a fim de resolver um problema específico. Essa Matemática formal, demonstrada por meio de conectivos lógicos e por meio de Axiomas ou Conceitos Primitivos e desenvolvida em Teoremas e Proposições, é conhecida por Matemática Científica ou Matemática Acadêmica, que tem por papel formalizar as ferramentas Matemáticas socialmente desenvolvidas, conforme definido por Machado (2005), em [30]. Os elementos principais para se confirmar uma conjectura em Matemática Científica são as definições formais e os teoremas já validados como verdadeiros pela comunidade científica. Pelo uso destes, em demonstrações formais e rigorosas, é que se garante a validade de algo novo ser inserido dentre as teorias mais válidas. Na Matemática Escolar, já existe a garantia de que um resultado matemático é sempre válido. Nessa concepção, deve-se fazer com que, dentro de algum contexto, os alunos tenham uma relação palpável com uma ferramenta matemática e possam formalizá-los por meio de um padrão por eles percebido. Esse fator pode ser exemplificado por meio dos Exemplos 4.4 e 4.7, em que o aluno nota um padrão de comportamento de uma função e o generaliza. Moreira (2004), em [32], define as justificativas das demonstrações em Matemática Escolar como sendo livres, tácitas e provenientes da vida cotidiana. No caso da Licenciatura em Matemática, defendemos uma caminhada próxima dessas duas Matemáticas, em um processo de inserir os conceitos intuitivamente e depois formalizá-los. Um exemplo disso seria o uso da Educação Financeira para se inserir um contexto de Progressão Geométrica. Pode ser feito da seguinte maneira:

- 1- Insere-se os conceitos de Juros Compostos e de Montante;
- 2- Pede-se para calcular o valor do Montante ano a ano;
- 3- Pede-se para-se determinar o padrão de crescimento dos valores dos montantes;
- 4- Insere-se formalmente o conceito de Termo geral de uma Progressão Geométrica;
- 5- Pede-se para cacular a Soma desses montantes a cada período;
- 6- Insere-se o conceito de Série Geométrica.

O papel do docente de um curso de Licenciatura é, portanto, inserir os conceitos formais passando por um processo de uso de intuição do corpo discente. A Matemática Escolar não deve ser ensinada em prejuízo da Matemática Científica, mas elas devem ser complementares.

4.2 O rigor matemático e algumas dificuldades no Cálculo 1

Um dos problemas do Ensino da Matemática e principalmente do Cálculo é o rigor matemático, uma característica do Formalismo, em que os conceitos são ministrados em detrimento dos valores culturais dos alunos e das competências adquiridas ao longo de sua trajetória escolar e social. Isso não significa que não deva se formalizar a Matemática na Educação Superior nem que a Matemática formalizada não deva ser ensinada, mas defende-se o uso de um contexto para se ensinar os conceitos inerentes ao Cálculo.

Fazendo-se uma breve análise dos livros didáticos de Cálculo na Universidade de Brasília, observa-se, com base em experiências vividas, que os conceitos inseridos em sala de aula, expostos a seguir, são enunciados através de um modelo formalizado e análogo aos encontrados em livros de Análise, que se encarregam de demonstrar os teoremas do Cálculo. O curso de Matemática, tendo como proposta formar professores da Educação Básica e Superior, deve pautar-se por fornecer as ferramentas para que os discentes não só aprendam o conteúdo como também saibam como inserir os contextos matemáticos em sala de aula quando se tornarem professores. Nas palavras de Batarce (2003), em [4]:

Do ponto de vista da Educação Matemática, o problema central no Ensino de Matemática fundamentado no Formalismo estaria restringir-se exclusiva e excessivamente aos significados formais como únicos possíveis ou corretos para a Matemática, e, conseqüentemente, para as do Ensino de Matemática. Esse tipo de abordagem desconsidera sem justificativas, além destas, qualquer outra concepção de Matemática que não acredite que a essência da Matemática se encontra nas relações formais entre os objetos matemáticos.

Em Cálculo 1, os conceitos são normalmente apresentados da mesma maneira que em Análise 1, isto é, providos de um rigor que ainda não pertence à realidade do discente, que, em tese, acaba de ingressar na Universidade. O conhecimento do aluno relacionado às ferramentas de Cálculo foram pouco utilizadas por eles na Educação Básica e muitas vezes abordado de forma incompleta, isto porque, em um contexto de educação voltada apenas para a aprovação em exames de larga escala, em detrimento da construção do conhecimento matemático, o aluno apenas memoriza fórmulas e regras para ser aprovado no vestibular, em detrimento do aprender Matemática como ciência e ferramenta para outras ciências necessárias na formação pessoal. Ao se deparar com a disciplina de Cálculo 1 e as demais disciplinas do Departamento de Matemática, o aluno se defronta com um rigor matemático com o qual ele não está acostumado, primeiro porque não há na Educação Básica preocupação em demonstrá-lo, ainda que de forma intuitiva, para se chegar em um resultado generalizado, e, na Educação Superior, há uma preocupação apenas em demonstrar os resultados matemáticos com o denominado rigor matemático e através de definições e axiomas formais, sem se preocupar com os valores relativos ao conhecimento do aluno em Matemática. Não se deve descartar, no ensino da matemática, mesmo no Ensino Médio e mais ainda na Educação Superior, o rigor dos resultados matemáticos, mas eles devem ser construídos a partir das intuições dos alunos, devem ser construídos pelos alunos, de modo que eles possam se tornar autônomos e atingir um resultado matemático. Deve-se inserir também em sala de aula o histórico daquele conceito, de modo que o discente conheça o contexto em que aquele resultado foi alcançado. Neste capítulo, faremos um aprofundamento e demonstraremos como cada conceito foi construído ao longo da história e, a partir dessas referências cronológicas, tentaremos propor um alcance às noções e resultados de maneira formal.

4.3 Linhas Filosóficas do Ensino da Matemática

Segundo Batarce (2003), em [4], uma questão que surge sobre práticas formalistas em sala de aula é o questionamento a respeito de como é possível que alguns tipos de práticas de Ensino da Matemática possam se manter fundamentadas em princípios que, muitas vezes, eles próprios não conhecem perfeitamente. O Formalismo é uma possibilidade ideológica dentre várias no Ensino da Matemática, juntamente com o Intuicionismo e o Logicismo. Façamos uma breve sinopse sobre cada uma delas.

4.3.1 Logicismo

O Logicismo tem na lógica de Leibniz uma ferramenta indispensável para o pensamento dedutivo. Conforme dito por Machado (2005), em [30], e por Eves (2004), em [16], as definições, proposições e demonstrações deveriam ser desenvolvidas em princípios. Nesta linha filosófica, Eves (2004), em [16], define que se trata a Matemática como sendo apenas um ramo da lógica, que se considera que todos os conceitos da Matemática devem ser formulados em termos de conectivos lógicos e todos os teoremas desenvolvidos como ramificações de lógica. Conforme Costa, em [12], as duas maiores expressões da escola Logicista foram Bertrand A. W. Russel e Alfred N. Whitehead (1965), que na sua obra *Principia Mathematica*, conforme pode ser vista em [40], definem Dedekind (1888), Peano (1889-1908) e Frege (1884-1903) como os precursores do Logicismo na Matemática, além de Leibniz. Para Eves (2004), em [16], na escola logicista, os conceitos matemáticos surgem de conceitos primitivos e postulados de um ponto de vista concreto. Eles evidenciaram a busca na lógica por uma possibilidade de reduzir e derivar toda a Matemática. Para Eves (2004), em [16], e Machado (2005), em [30], as definições, proposições e demonstrações deveriam seguir um princípio lógico. O Logicismo, conforme citado acima, é baseado na teoria da prova de Leibniz.

A Teoria da prova em Leibniz

A Teoria da Prova de Leibniz baseia-se em conceitos lógicos de identidade, verdade e proposição. Sua teoria da Prova propôs que a Matemática, em particular o Cálculo e a Geometria, fosse reelaborada através de três pilares: definições; identidades, que eram proposições do tipo $a = a$, e regras de inferência, que é a permissão para se substituir símbolos de uma lado da identidade por símbolos equivalentes. O modelo de Leibniz teve como inspiração primordial a Aritmética, que foi a Ciência Matemática em que Leibniz mais se inspirou, embora a influência do matemático na Geometria e no Cálculo mereça também atenção. Foi da Teoria da Prova de Leibniz que surgiram dois traços marcantes em demonstrações nos livros de Cálculo e também nas notas de aulas na Universidade: A Redução a uma identidade e a Redução ao Absurdo. Ao se demonstrar um conceito matemático por meio da Redução a uma identidade, Leibniz propôs dois métodos, o analítico e o sintético. O método sintético consiste em demonstrar uma proposição tendo como ponto de partida identidades, ao passo que o método analítico consiste em demonstrar uma identidade tendo como hipótese uma proposição.

Redução a uma identidade e redução ao absurdo

A Redução a uma Identidade guarda uma relação com a Redução ao Absurdo, isto é, os dois tipos de demonstração são monovalentes. O primeiro parte de uma premissa a fim de chegar a uma proposição verdadeira e a segunda nega a proposição e alcança um absurdo. Este princípio é também chamado de contra-recíproca, que é o que norteia as demonstrações por absurdo. Para ilustrarmos a redução a uma identidade, façamos as seguintes definições:

Definição 4.1. *Se $(T, D) \Rightarrow P$, então a proposição P é verdadeira. Nesse condicional, P é uma proposição, T é uma identidade explícita e D é uma definição ou um conjunto de identidades explícitas. A regra afirma que, se P é uma consequência dedutiva de T e D , então a proposição P é verdadeira.*

Conforme visto, a regra afirma que, se P é uma consequência de T e D , então a proposição P é verdadeira. Esta ferramenta lógica é definida como condicional. Um exemplo desse tipo de demonstração, de redução a uma identidade, seria o Lema de Gauss, cuja demonstração é dada a seguir:

Exemplo 4.2. *A demonstração do Lema de Gauss* Sejam a, b, c números inteiros com $a \neq 0$. Se $a \mid bc$ e $m.d.c(a, b) = 1$, então $a \mid c$.

- De fato, como $a \mid bc$, segue que existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ae$;
- Como $m.d.c(a, b) = 1$, então existem m e $n \in \mathbb{Z}$ tais que $ma + nb = 1$;
- Multiplicando os dois membros da equação por c , temos $mac + nbc = c$;
- Pelo primeiro passo da demonstração, segue que $c = a(mc + ne)$, o que mostra que $a \mid c$.

Conforme se nota, nesta demonstração, temos uma identidade explícita T , que é $ma + nb = 1 \equiv m.d.c(a, b) = 1$, e o conjunto de identidades supostas D seria $a \mid bc$, ou então, a definição de que a é um divisor do produto bc .

Definamos agora o que seria uma prova por Redução ao Absurdo:

Definição 4.3. *Se $(\neg P, D) \Rightarrow \neg T$, então a proposição P é verdadeira, onde $\neg P$ e $\neg T$ são, respectivamente, as negações de P e de T .*

Em outras palavras, se, dadas as definições, quando negamos a veracidade da premissa P encontrarmos uma contradição, que pode ser qualquer uma das identidades explícitas de T ou da definição D , segue que P é verdadeira. Essa modalidade de demonstração também se conhece por contra recíproca. Um exemplo comum dessa técnica de demonstração é o da demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional, que será abordado na seção sobre Números Reais.

Método sintético de demonstração

Conforme mencionado acima, as demonstrações da escola Leibniziana se atêm a um simbolismo lógico. São os princípios lógicos que norteiam a Matemática e, em particular, o Cálculo. Nessa modalidade de demonstração segundo a escola logicista, tem-se como hipótese uma igualdade e tenta-se chegar a uma proposição. Um exemplo de demonstração é mostrado no artigo de Cass (2013), em [9], da seguinte forma:

- Propõe-se uma definição, como, por exemplo, $X \leq Y \equiv X$ é igual a uma parte de Y ;
- Afirma-se uma identidade explícita. Uma parte de B é igual a uma parte de B ;
- Substituindo a equação da primeira etapa pela da segunda etapa, mostra-se a proposição a ser provada que é de que uma parte de B é menor do que B .

Método analítico de demonstração

Segundo Cass (2013), em [9], nunca foi apresentado um resumo ou um modelo do Método Analítico nas obras de Leibniz. Por esse método, a tese estará estabelecida se uma identidade explícita for encontrada a partir das substituições da tese em pauta pelas suas respectivas definições. Embora Leibniz nunca tenha exposto um exemplo do Método Analítico de Demonstração, através do que ele define como sendo análise de conceitos, isto é, baseada nas conclusões, pela análise dos termos das conclusões baseadas em definições, Cass (2013), em [9], mostra uma demonstração da identidade $5 = 3 + 2$, em que se chega à identidade explícita $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, isto é:

$$5 = 3 + 2$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$2 = 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

4.3.2 Intuicionismo

A retórica do Intuicionismo, para Eves (2004), em [16], é a tese de que a Matemática deve ser toda construída por meio de métodos construtivos finitos através de uma tentativa de fazer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos Números Naturais (\mathbb{N}). Esse tipo de demonstração é empírica, de fácil compreensão e aplicabilidade, uma vez que o pensamento sequencial é inerente ao raciocínio empírico, o que facilita a compreensão por parte do alunado a respeito de um objeto matemático. Segundo Eves (2004), em [16]:

... por essa visão, a base última da matemática jaz sobre uma intuição primitiva, aliada sem dúvida, ao nosso senso temporal de antes e depois que nos permite conceber um objeto, depois mais um, depois outro mais e assim por diante, indefinidamente.

A influência da escola Intuicionista pode ser vista nos autores, que ao defendê-la, levam consigo a convicção de que o conhecimento matemático deve ser apresentado de modo que ele seja aceito como algo presente na vida do aluno, pois a escola Intuicionista defende que as demonstrações não sejam apresentadas já do seu rigor ou como uma mera ciência lógica, tal como pregam os Logicistas, mas como algo que possa ser construído dentro da realidade do aluno, já que ela leva em conta, conforme o próprio nome sugere, que a Intuição, oriunda de conceitos, valores e sentimentos dos indivíduos, assume o papel de trazer à luz as proposições matemáticas. Segundo o entendimento dessa linha filosófica, portanto, toda a Matemática deveria ser reconstruída, pois, segundo Mondini (2008), em [31], as entidades abstratas existiam, para a escola Intuicionista, somente quando eram construídas pela mente humana. Uma influência da linha de pensamento Intuicionista dos pensamentos construtivos ou sequenciais é a Teoria dos Conjuntos. Os conjuntos, para eles, não podem ser imaginados como uma coleção acabada, mas reconhecidos através de uma lei pela qual os elementos podem ser construídos passo a passo. Para Machado (2005), em [30], os Intuicionistas assumiam que a Matemática poderia ser construída através de métodos construtivos finitos a partir de uma correspondência biunívoca com o conjunto dos Números Naturais (\mathbb{N}), a qual propicia ao sujeito uma espécie de intuição fundamental. O pensamento sequencial, isto é, a construção de um conceito, dá-se através da construção das fórmulas em Números Naturais. Um exemplo disso pode ser os modelos recursivos ao se analisar o comportamento de uma sequência numérica. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.4. *A construção da sequência de Fibonacci e a demonstração de que a razão entre esses termos é uma razão áurea.*

Definição 4.1. *A sequência de Fibonacci é construída de modo que cada termo seja obtido a partir da soma dos termos anteriores. A rigor, seja $n \in \mathbb{N}$, então, se F_n é um termo dessa sequência, tem-se $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos construir a sequência dos 10 primeiros termos.*

- $F_1 = 1; F_2 = 1; F_3 = 2; F_4 = 3; F_5 = 5; F_6 = 8; F_7 = 13; F_8 = 21; F_9 = 34; F_{10} = 55$.

Dessa forma, definimos a razão entre os termos sucessores da sequência, isto é, $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Faremos aqui o que seria uma demonstração do que seria provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,61$, segundo os Intuicionistas.

Proposição 4.5. *Seja $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,61$.*

Demonstração Considerando os 10 primeiros termos da sequência de Fibonacci, temos: $a_1 = \frac{1}{1} = 1$;
 $a_2 = \frac{2}{1} = 2$; $a_3 = \frac{3}{2} = 1,5$; $a_4 = \frac{5}{3} \approx 1,66$; $a_5 = \frac{8}{5} = 1,6$; $a_6 = \frac{13}{8} = 1,625$; $a_7 = \frac{21}{13} \approx 1,615$;
 $a_8 = \frac{34}{21} \approx 1,619$; $a_9 = \frac{55}{34} \approx 1,617$; $a_{10} = \frac{89}{55} \approx 1,61818$.

Nota-se que a sequência a_n se aproxima do número de Fibonacci à medida que o valor de n aumenta. Pode-se conjecturar que, no infinito, valor a_n vai ficar o mais próximo possível do número desejado. De acordo com a escola Intuicionista, esta parece ser a demonstração mais adequada a se fazer ao se mostrar a razão dos termos da Sequência de Fibonacci. Nota-se que o que foi feito foi construir as razões de Fibonacci através de uma associação biunívoca com os conjuntos dos Números Naturais. Vejamos agora uma demonstração do comportamento da função do 1º grau através da maneira Intuicionista.

Definição 4.6. *Segundo os Intuicionistas, a função do 1º grau teria uma definição muito similar à de Progressão Aritmética, pois, ao passo que cada um dos valores de x aumentaria de uma unidade, os valores de $f(x)$ cresceriam a uma razão constante, isto é, a razão definiria, de fato, a taxa de variação, que seria o acréscimo na Variável Dependente ocasionado pelo acréscimo de uma unidade na Variável Independente.*

Exemplo 4.7. *Considere uma função $f(x) = 2x + 5$, tome os 10 primeiros valores da função para $x = 1, 2, 3, 4, \dots, 10$, temos*

$$f(0) = 2(0) + 5 = 5; f(1) = 2(1) + 5 = 7; f(2) = 2(2) + 5 = 9; f(3) = 2(3) + 5 = 11; f(4) = 2(4) + 5 = 13; f(5) = 2(5) + 5 = 15; f(6) = 2(6) + 5 = 17; f(7) = 2(7) + 5 = 19; f(8) = 2(8) + 5 = 21; f(9) = 2(9) + 5 = 23; f(10) = 2(10) + 5 = 25.$$

Ao tomarmos os 10 primeiros valores de $f(x)$, tomemos as diferenças dos valores sucessivos das imagens de cada um dos valores atribuídos a x , obtemos

$$f(1) - f(0) = 2; f(2) - f(1) = 2; f(3) - f(2) = 2; f(4) - f(3) = 2; f(5) - f(4) = 2; f(6) - f(5) = 2; f(7) - f(6) = 2; f(8) - f(7) = 2; f(9) - f(8) = 2; f(10) - f(9) = 2.$$

No exemplo anterior, ao fazermos sucessivas subtrações, mostramos que $f(10) = 2(10) + 5$, que é o modelo de função que queríamos demonstrar. Dessa forma, generalizaria-se para o modelo geral.

Teorema 4.8. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, uma função é dita linear sempre que $f(x) = a \cdot x + b$, onde $a \neq 0$ e b é um número real qualquer.*

A escola Intuicionista não nega a existência de Conjuntos Infinitos. Porém, nela se considera que todo conjunto pode ser demonstrado em um número finito de passos e se mostra que, naquela coleção finita de passos em que se constrói aquele conjunto, podem-se acrescentar novos elementos com aquelas propriedades. Isso pode ser verificado na fala de Poincaré (1924). Ele considera, em seu livro *Últimos Pensamentos*, em [35], três pilares sobre a construção de conjuntos:

- Considerar somente objetos suscetíveis de serem definidos em um número finito de palavras;
- Jamais perder de vista que toda a proposição sobre o infinito deve ser a tradução, o enunciado abreviado de proposições sobre o finito;
- Evitar as classificações e as definições não predicativas.

Se considerarmos duas coleções, pode-se tentar estabelecer uma lei de correspondência entre os objetos dessas duas coleções, de modo que a todo objeto da primeira corresponda um objeto da segunda em um único, e inversamente. Se isso for possível, diz-se que as duas coleções têm o mesmo número cardinal. Mas ainda aqui, convém que essa lei de correspondência seja predicativa. Se tratamos de duas coleções infinitas, nunca poderemos conceber que essas duas coleções estão esgotadas. Se supusermos que tomamos na primeira certo número de objetos, a lei de correspondência nos permitirá definir os objetos correspondentes da segunda. Se, em seguida, introduzirmos novos objetos, poderá acontecer que essa introdução mude o sentido da lei de correspondência, de tal modo que o objeto da 2ª coleção, que, antes dessa introdução, correspondia a um objeto da 1ª, já não corresponderá depois dessa introdução. Nesse caso a lei de correspondência não será predicativa (Poincaré, 1924).

A Matemática Intuicionista defende que todos os conjuntos e suas propriedades devem ser construídos em um número finito de passos. Ela defende a ideia de que todos os conjuntos podem ser associados, portanto, ao conjunto dos Números Naturais, conforme as demonstrações acima ilustram. Os Intuicionistas refutam também a lei do terceiro excluído, uma vez que ela não pode ser aplicada a conjuntos finitos. A contribuição da escola Intuicionista ao Ensino da Matemática, então, foi a possibilidade, ainda que incompleta, de se construir conjuntos através de um pensamento sequencial, embora Poincaré refutasse a introdução de novos objetos, defendendo a possibilidade de existência de mudança no sentido da lei da correspondência biunívoca entre duas coleções. Para Brower, o erro da escola logicista foi aplicar princípios lógicos a conjuntos infinitos em um estágio em que o homem tinha boa capacidade para lidar com conjuntos finitos de fenômenos. Talvez a grande contribuição da influência Intuicionista no Ensino da Matemática seja a de dar um caráter mais palpável e sequencial ao ensino, conforme visto nas demonstrações acima. Um dos problemas desse método defendido pela escola Intuicionista é que, embora eles tenham conseguido reconstruir partes amplas da Matemática, conforme aponta Eves (2004), em [16], ainda há muito o que fazer. Eles acreditavam que todo e qualquer conjunto poderia ser associado ao conjunto dos Números Naturais através de uma correspondência biunívoca, não levando em conta a existência dos Números Reais, por exemplo. Mas a contribuição da escola Intuicionista ajuda a se ter ao menos um primeiro contato com as ferramentas matemáticas que se quer ensinar, mas fica o desafio de se discutir como aquele conhecimento pode ser descrito a outros conjuntos que não sejam apenas os naturais. Para Eves (2004), em [16], essa abordagem se mostra trabalhosa, por vez, complicada de se resolver, mas há concordância de que o método Intuicionista não leva a contradições.

4.3.3 Formalismo

O Formalismo, ponto a ser abordado no que diz respeito ao Ensino de Matemática como um todo e, particularmente, ao Ensino de Cálculo na Universidade, tem em David Hilbert sua maior representação. Para ele, apenas demonstrações consistentes garantem ausência de contradições. Talvez daí surja a ideia de se fazer um contraexemplo quando não se consegue demonstrar uma conjectura. Para Eves (2004),

em [16], a tese Formalista sustenta que a Matemática é essencialmente o estudo de sistemas simbólicos formais. Nesta linha filosófica, considera-se a Matemática apenas como uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações, fórmulas envolvendo esses símbolos.

Para Machado (2005), em [30], os Formalistas buscaram sustentar suas primeiras ideias nas acepções Intuicionistas, mas, para eles, a lógica desempenha em Matemática o mesmo papel a ela dado em qualquer outro ramo da Ciência. Machado (2005), em [30], sustenta que, no Formalismo, os teoremas são sustentados por axiomas, levando-se em consideração as leis da lógica, mas refutam a ideia defendida pela linha Logicista, onde defende-se que teoremas e axiomas se caracterizam apenas por princípios lógicos ou decorrências desses princípios. Segundo Eves (2004), em [16], o precursor dessa linha filosófica foi Hilbert. Ele foi o responsável por aguçar o método matemático na Geometria Euclidiana, transformando-a, segundo o próprio, da axiomática material para a axiomática formal. Para Eves (2004), em [16], o sucesso do programa de Hilbert depende da resolução do problema da consistência. Para Hilbert, apenas demonstrações consistentes garantem ausência de contradições em demonstrações antigas de consistência, baseadas em interpretações e modelos que apenas transferem a questão da consistência de um domínio matemático para outro. Mondini (2008), em [31], afirma que o objetivo dos Formalistas seria provar que as ideias matemáticas estavam isentas de contradição. Para isso, os formalistas buscavam reescrever a Matemática através de demonstrações rigorosas, provas irrefutáveis em um sistema formal.

A influência do formalismo no Ensino de Cálculo é evidente através das demonstrações encontradas nos livros usados na disciplina de Cálculo 1. Fazendo-se uma análise das notas de aula, da bibliografia utilizada na disciplina de Calculo 1 da Universidade, nota-se grande influência Formalista ao se ministrar a disciplina em detrimento dos valores e conceitos adquiridos pelo aluno antes de se chegar à Universidade. Observa-se que, em alguns livros de Cálculo utilizados, as definições e os teoremas são apresentados de modo similar a um livro de Análise, disciplina ministrada no 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, conforme consta da Listagem de Fluxo da Licenciatura em Matemática, e, portanto, presume-se que o discente já tenha maturidade suficiente para cursar um curso mais avançado de Cálculo. Note-se que não se está criticando o rigor matemático nas demonstrações nem se está dizendo que não se deva formalizar os conceitos inerentes ao Cálculo, mas, assim como na Educação Básica, é necessário mostrar exemplos motivacionais para que o aluno entenda o significado daquele conteúdo. Uma crítica ao Formalismo é a de que ele, na busca de solidez, tenta dar essencialidade às demonstrações e a precisão dos objetos matemáticos, em detrimento da compreensão do aluno. O perfeccionismo de alguns professores faz com que, nos curso de Cálculo, seja comum encontrar métodos parecidos com àqueles utilizados em cursos preparatórios. Não há a preocupação com a formação crítica do indivíduo, mas sim um monte de exercícios repetitivos propostos aos alunos para que eles reproduzam, tal como um algoritmo computacional, os procedimentos de resolução e demonstração dos resultados inerentes ao Cálculo. Reiteramos não sermos contra o uso do rigor matemático, nem do Formalismo, mas defendemos que o conhecimento não seja de imediato transposto em sua fundamentação lógica, mas que essa fundamentação lógica seja construída com o aluno, isto é, defendemos que o aluno seja capaz de estabelecer significados no decorrer do aprendizado de Cálculo e saiba como associá-los na sua vida profissional.

Vimos, nos tópicos anteriores, a contribuição das três linhas filosóficas do Ensino da Matemática. Não se trata de defender uma linha de pensamento em detrimento da outra, mas sim de harmonizar essas escolas, a fim de que o aluno seja o centro do conhecimento matemático. Deseja-se buscar soluções para diagnosticar as causas do alto índice de reprovação dos estudantes de Cálculo no Curso de Matemática. Busca-se também avaliar os impactos do desempenho nessa disciplina e a base adquirida na

Educação Básica com vistas a diminuir a diferença no fluxo de alunos no curso de Matemática, e ainda que indiretamente, formar professores.

Desejamos mudar a educação, questionamos a falta de aptidão dos alunos em Matemática, então, cabe à Universidade refletir sobre a didática utilizada no Curso de Matemática, pois existe um senso comum de que os professores se baseiam naqueles que foram seus professores. Barufi (1999), em [3], avalia que, no Ensino Médio, os alunos trabalham com conhecimentos matemáticos muitas vezes isolados, com um enfoque significativo, na melhor das hipóteses, e, em detrimento da expectativa dos professores, o aluno chega na Universidade sem domínio da linguagem lógico-formal. A Matemática, segundo a autora, fica no âmbito da intuição, com o conhecimento não articulado ou logicamente estruturado. Segundo Barufi:

Para os alunos essa perspectiva não tem sentido ainda mais se pensarmos quantos deles que frequentam o curso de Cálculo sequer enveredarão pelo caminho da Matemática Pura. Mesmo para esses, num curso inicial de Cálculo, não faz sentido centrar o enfoque num universo rigoroso e distante, onde não conseguem exercer qualquer tipo de crítica.

Defende-se, portanto, que, antes de formalizar uma lógica interna, se trate das noções intuitivas sobre aquela determinada ferramenta a ser ministrada em sala de aula. Um exemplo disso pode ser explicitado ao se ministrar noções de limites. Comparemos as definições de limite dadas em um livro de Análise e em um livro de Cálculo, respectivamente.

Definição 4.2. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X$ um ponto de acumulação do conjunto X . Diz-se que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$, tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.*

Definição 4.3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, temos $p - \delta < x < p + \delta$ $x \neq p \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.*

Note que a primeira definição foi tirada do livro de Análise Real de Lima (2007), em [27], e a segunda definição de Volume 1, do livro de Cálculo de Guidorizzi (2001), em [21], utilizado conforme a listagem de fluxo do curso de Matemática, como bibliografia complementar ao curso. Defende-se aqui que essa linguagem seja construída com o aluno. Ao almejar a disciplina de Análise, presume-se que o aluno já tenha bagagem para digerir uma disciplina já bem formalizada. Nos exemplos abaixo, seguem dois exemplos de um Cálculo de um Limite no livro do Guidorizzi (2001), em [21], e de Lima (2007), em [27]. Após essas exposições, sugeriremos um método mais intuitivo por meio do aplicativo Excel para não só Calcular, mas mostrar como essas funções se comportam à medida em que a variável x se aproxima de um certo valor.

Exemplo 4.9. *Usando a definição de limite, mostre que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 2) = 10$.*

Solução. Pela definição, devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|(4x - 2) - 10| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$.

Note que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|4x - 2 - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 12| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

A última desigualdade nos sugere a escolha correta do δ . Isto é, considerando $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, temos:

$$|(4x - 2) - 10| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 2) = 10$.

Exemplo 4.10. Usando a definição de limite, mostre que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Solução. Pela definição, devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|x^2 - 9| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$.

Observe-se que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|x^2 - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3||x + 3| < \varepsilon.$$

Agora, precisamos substituir $|x + 3|$ por uma constante. Assim, vamos supor que $0 < \delta \leq 1$, desse modo, de $0 < |x - 3| < \delta$ seguem as seguintes desigualdades, que são todas equivalentes:

$$|x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \Leftrightarrow 5 < x + 3 < 7.$$

Assim, $|x + 3| < 7$. Agora, escolhendo $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{7}, 1\right)$, temos que, se $|x - 3| < \delta$, então:

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| < \delta \cdot 7 \leq \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

De uma maneira mais intuitiva, e tendo nela um ponto de partida para uma demonstração, teríamos o seguinte exemplo:

Considerando a função f definida pela equação

$$f(x) = \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = \frac{(4x - 2)(x - 3)}{x - 3},$$

note que f está bem definida para todos os valores de x , menos para $x = 3$. Desse modo, se $x \neq 3$, o numerador e o denominador podem ser divididos por $(x - 3)$ para obtermos

$$f(x) = 4x - 2.$$

Agora, vamos determinar os valores da função $f(x)$, quando x estiver próximo de 3, mas não é igual a 3. Primeiro, vamos considerar valores de x cada vez mais próximos de 3, com $x < 3$ e observaremos o comportamento da função $f(x)$, conforme o quadro abaixo:

x	2,6	2,7	2,8	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999
f(x)=4x-2	8,4	8,8	9,2	9,6	9,96	9,996	9,9996	9,99996

Agora, vamos considerar que a variável x se aproxima cada vez mais de 3, com $x > 3$, e observar o comportamento de $f(x)$:

x	3,4	3,3	3,2	3,1	3,01	3,001	3,0001	3,00001
f(x)=4x-2	11,6	11,2	10,8	10,4	10,04	10,004	10,0004	10,00004

Note-se que, em ambos os quadros, enquanto x se aproxima cada vez mais de 3, a função f se aproxima cada vez mais de 10. Em outras palavras, é possível obter o valor de f tão próximo de 10 quando desejarmos, desde que tomemos x suficientemente próximo de 3. Como podemos identificar no gráfico de f , a seguir:

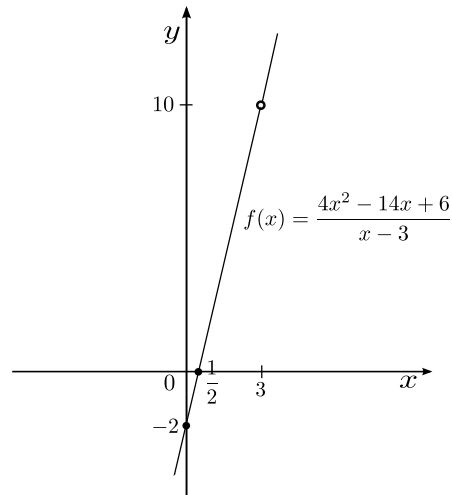


Figura 4.1: gráfico de $f(x) = \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3}$.

Nesse caso, para x cada vez mais próximo de 3, temos que f se aproxima de 10, assim, escreve-se a seguinte expressão:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$$

Nas próximas seções, discorreremos sobre o contexto histórico dos conteúdos seguindo o Fluxograma da disciplina de Cálculo 1 da Universidade de Brasília, a fim de mostrar que os conceitos foram desenvolvidos de maneira material, palpável, empírica, até se consolidarem em um conceito formal e aritmetizado, fator que ocorreu em um período da história da Matemática. Discutir-se-á também, ainda mais à frente, sobre a necessidade de uma disciplina de Pré-Cálculo e como esta poderia ser aplicada na Universidade não como uma disciplina específica, mas como uma extensão da própria disciplina.

4.4 Números reais

O processo de medição, conforme define Caraça (1998), em [8], consiste em três passos, que é o de escolher unidades, comparar e expressar o resultado dessa comparação através de um número. Os matemáticos gregos, dentre os quais destacava-se Pitágoras, tratava a questão da medida utilizando grandezas comensuráveis, que significa o quanto de uma unidade cabe dentro de outra unidade. Em sua época, acreditava-se que os números racionais expressos da forma $\frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, eram suficientes para se medir qualquer tipo de grandeza, tais como peso, comprimento, etc. Para Eves (2004), em [16], os números racionais comportam uma interpretação geométrica, traço marcante na Matemática Grega, de que tomava-se um segmento \overline{AB} e um segmento \overline{CD} contido em \overline{AB} , isto é, tratando-se $|CD|$ pela medida do segmento \overline{CD} e $|AB|$ como a medida do segmento \overline{AB} , temos $|CD| < |AB|$ e, além disso, se tomarmos o segmento \overline{CD} como uma parte dentro n de \overline{AB} , temos que $|AB| = n|CD|$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.11. O exemplo mais clássico para ilustrar esse fato seria o ponto médio, conforme visto na Figura 4.2:



Figura 4.2: Divisão de segmentos em 2 partes

Na Figura 4.2, temos que $|AM| = |MB|$, como $|AM| + |MB| = |AB|$, segue que $\frac{|AB|}{|AM|} = 2$, ou seja, temos $|AB| = 2|AM|$, isto é, o segmento \overline{AM} cabe 2 vezes dentro do segmento \overline{AB} .

Exemplo 4.12. Agora vamos dividir o mesmo segmento \overline{AB} em 4 partes, isto é, obteremos a figura abaixo. Mediremos o quanto o segmento \overline{LM} cabe dentro de \overline{AB} , conforme mostra a figura:



Figura 4.3: Divisão de segmentos em 4 partes

Na Figura 4.3, temos que L é o ponto médio de \overline{AM} e O é o ponto médio de \overline{MB} . Pelo exemplo anterior, observando a figura, podemos observar que \overline{LM} cabe 4 vezes dentro de \overline{AB} . Se tomarmos o segmento \overline{AO} da figura, nota-se que ele corresponde a 3 partes iguais de \overline{AB} , o que significa que a razão $\frac{|AO|}{|AB|} = \frac{3}{4}$. Suponhamos agora que queremos obter um ponto C , colinear com \overline{AB} e tal que $|BC| = |BO| = |LM|$, conforme mostrado na figura. Além disso, como $|BC| = |BO| = |LM|$, tem-se que $|BC| = \frac{|AB|}{4}$, ou seja, estamos acrescentando a quarta parte de \overline{AB} a \overline{AB} , obteremos que $|AC| = \frac{5}{4}|AB|$. De modo geral, podemos dizer que, se um segmento \overline{AB} mede m e um segmento \overline{AC} mede n , com $m < n$, \overline{AB} cabe $\frac{m}{n}$ vezes dentro de \overline{AC} .

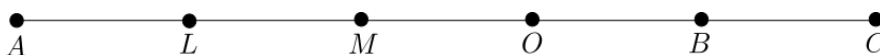


Figura 4.4: Acréscimo de uma unidade de medida

Todos esses exemplos servem para mostrar como os gregos mostraram a existência dos números racionais. Eles acreditavam que esse tipo de notação seria suficiente para se medir qualquer grandeza. Media-se quantas vezes uma medida cabia dentro de outra. Um grande problema surgiu quando os matemáticos gregos, liderados por Pitágoras, foram tentar descobrir quantas vezes o lado de um quadrado caberia dentro da diagonal do quadrado e descobriram que essa razão não existia, descoberta esta que, para Eves (2004), em [16], foi das maiores realizações dos Pitagóricos, embora afirme que foi um grande choque para eles descobrirem pontos na reta que não correspondem a um Número Racional. A prova mais tradicional e conhecida de que a medida da diagonal de um quadrado unitário não poderia ser representada por um Número Racional é a apresentada no tópico a seguir.

A demonstração da existência dos Números Irracionais

Pitágoras duvidou do seu teorema devido à Geometria desenvolvida ser comensurável, isto é, não havia conhecimento dos números irracionais. A prova, segundo Eves (2004), em [16], atribuída a Aristóteles, mostra que, caso não fosse criada uma extensão dos conjuntos numéricos, não existiria nenhuma razão entre a diagonal de um quadrado e o seu lado.

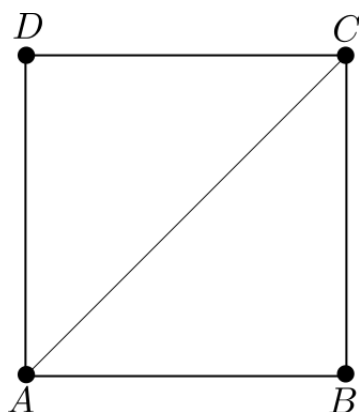


Figura 4.5: Quadrado

Na Figura 4.5, tem-se como objetivo calcular a diagonal do quadrado ABCD e tentar descobrir uma razão entre a diagonal e o lado do quadrado. De fato, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos $\frac{|AC|}{|AB|} = \sqrt{2}$. Por outro lado, suponhamos que existam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m.d.c(m, n) = 1$, tais que $\frac{m}{n} = \frac{|AC|}{|AB|}$, então $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$. Então, $m^2 = 2.n^2$. Como o lado direito da equação tem um número ímpar de divisores e o lado esquerdo da equação tem um número par de divisores, obtém-se um absurdo e deduz-se que $\sqrt{2}$ é um Número Irracional. Segundo Eves (2004), em [16], o número $\sqrt{2}$ era o único Número Irracional conhecido e, mais tarde, Teodoro de Cirene (424 a.C.) descobriu outros números irracionais. Segundo Rezende (1994), em [38], Platão (482 – 348 a.C.) tinha percebido o abismo entre a geometria e a aritmética e que o problema das quantidades incomensuráveis seria alcançado através de uma construção axiomática de número, independente de uma base geométrica, embora ele não tenha dado resposta a esse problema. As teorias dos Números Irracionais foram ganhar forma no século XIX, com Weierstrass, Dedekind, Cauchy e Cantor.

A aritmetização da análise e a libertação da Geometria

Em 1830, Bolzano tentou desenvolver uma teoria para Números Irracionais como limite de seqüências de Números Racionais, conforme relatado por Boyer (1974), em [5]. Segundo o mesmo autor, a obra de Bolzano não foi publicada. Boyer(1974), em [5], relata que o primeiro matemático a apresentar uma definição satisfatória de números reais foi Charles Méray. Em 1869, Méray publicou um artigo chamado *Remarques sur la nature des quantités par la condition de servir de limites à des variables données*, exaltando uma série de falhas de raciocínio que os matemáticos haviam cometido desde os tempos de Cauchy. Méray definiu um Número Irracional tendo em vista a natureza dos limites de sucessões de Números Racionais que não admitiam nenhum número racional como limite. Segundo Boyer (1974),

essencialmente a *petitio principii* consistia em definir o limite de uma seqüência como um número real e em seguida definir um número real como um limite de uma seqüência de números racionais.

Bolzano e, depois, Cauchy tentaram provar que uma seqüência converge a um Número Real S . A dificuldade estava, muitas vezes, em encontrar esse Número Real S . O que Méray fez, conforme aponta Boyer (1974), em [5], foi determinar que os valores da seqüência de Cauchy, quando convergiam, determinavam um Número Real ou um número fictício, fictício este que Méray determinava que poderia ser

ordenado e era, de fato, os Números Irracionais. Boyer (1974), em [5], no entanto, entende que Méray era vago quanto ao fato de a sequência convergente estudada por ele ser ou não, de fato, um número. Para Kline (1972), em [26], Méray é equivalente ao alemão Weierstrass. Ao tentar constituir os fundamentos de Análise, Weierstrass percebeu a necessidade de se elaborar uma teoria de Números Irracionais. A contribuição de Weierstrass, segundo Boyer (1974), em [5], em sua tentativa de separar o cálculo da geometria, haja vista que nessa época existia um processo de Aritmetização da Análise, movimento o qual Eves (2004), em [16], descreve como paralelo à libertação da geometria Euclidiana, foi de tentar considerar o limite de uma sequência convergente tomando a própria sequência como número ou limite. A concepção de Weierstrass, segundo Boyer (1974), foi de tomar o número $\frac{1}{3}$ e expressá-la como o limite da série infinita $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$. Para Boyer (1974), Weierstrass, dessa forma, além de contribuir para a formação de uma definição de número real, também deixou a definição de limite, até então puramente Geométrica, mais clara.

Outra importante contribuição no ganho de rigor na construção dos Números Reais foi aquela dada por Richard Dedekind. Segundo Boyer (1974), em [5], Dedekind voltara sua atenção para a existência dos Números Racionais desde 1858 e defendia que um conceito rigoroso de limite, a ser abordado a seguir, deveria ser desenvolvido via conhecimentos aritméticos, sem se valer da geometria como guia. Dedekind perguntava-se o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos Números Racionais. Leibniz e Galileu já haviam concluído o caráter contínuo de pontos sobre uma reta e que essa continuidade era fruto da densidade deste conjunto, o que significa que entre dois pontos sempre existe um terceiro. Mas essa propriedade pertence também ao conjunto dos Números Racionais, embora esse conjunto guarde relação biunívoca com o conjunto dos números naturais, segundo Elon (2007), em [27].

O conjunto $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ dos números racionais é enumerável. Com efeito, escrevendo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, podemos definir uma função sobrejetiva $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ pondo $f(m, n) = \frac{m}{n}$.

Dedekind percebeu que o conjunto dos Números Reais formava um *continuum* de Números Reais. Segundo Caraça (1998), em [8], o que Dedekind fez foi procurar uma espécie de reagente que mostrasse se, em um determinado conjunto, existe a propriedade de continuidade tal qual se encontra numa reta. Essa procura por esse reagente denomina-se Axioma dos Cortes de Dedekind, que diz que todo corte em uma reta é pela própria reta produzido. Epple (2003), em [17], enuncia a definição de corte em uma reta da seguinte forma:

Qualquer razão entre segmentos de retas a, b produz um “corte” no conjunto dos números racionais, ou seja, o conjunto das razões $\frac{n}{m}$ entre inteiros, que o decompõe em dois conjuntos distintos, conforme vale $ma < nb$ ou sua negação. Duas razões são iguais, isto é, as quatro grandezas envolvidas são proporcionais se, e somente se, os cortes correspondentes são os mesmos.

Para Baroni (2014), em [2], Dedekind também acrescentou a problemática sobre a relação que essa construção tem com a ideia geométrica de pontos em uma reta, ou seja, com a noção intuitiva de uma grandeza contínua. Portanto, era claro que toda razão entre segmentos de retas definia um corte no conjunto de Números Racionais. O problema de Dedekind consistia em resolver a recíproca: será que todo corte define uma possível razão entre segmentos de reta? Ou ainda, dado um segmento unitário fixado, a todo corte corresponde um ponto bem determinado na reta? Baroni (2014), em [2], explica que

a saída enunciada por Dedekind foi estabelecer a conexão entre Aritmética e Geometria por meio de um postulado, o qual determinou um aspecto geométrico à ideia dos cortes. Esse postulado é conhecido como o Axioma de Cantor-Dedekind (1872), tal qual enunciaremos abaixo:

Se todos os pontos de uma reta são decompostos em duas classes de tal modo que todo ponto na primeira classe está à esquerda de todo ponto na segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz essa decomposição de todos os pontos em duas classes, esse corte da reta em duas partes.

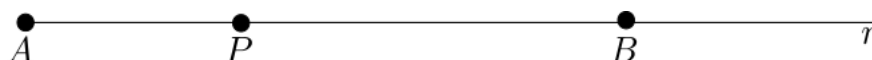


Figura 4.6: Corte de Dedekind

Na Figura 4.6, o ponto P representa o corte de Dedekind. Todo corte de reta é produzido por um ponto dela mesma. Considere $P = (a, 0)$, a ideia de Dedekind era separar dois conjuntos disjuntos $A_1 = (-\infty, P)$ e $A_2 = (P, \infty)$. Se, para um corte desse, produzido por um ponto P arbitrário, sendo ele (A_1, A_2) , A_1 tem um elemento máximo ou A_2 tem um elemento mínimo, dado pela abscissa $P = (a, 0)$, onde $a \in \mathbb{Q}$, dizemos que o corte foi produzido por a nesta situação. Evidentemente, nem todo corte é produzido por um Número Racional, conforme veremos a seguir:

Exemplo 4.13. $\{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ ou } a^2 > 2\}$; $\{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 > 2\}$.

Sempre que dado um corte (A_1, A_2) não é produzido por um Número Racional, cria-se um Número Irracional, que fica completamente definido por esse corte. Como foi então que Dedekind conceituou o conjunto dos números reais? Foi concluindo que todo corte (A_1, A_2) , no conjunto dos Números Racionais, é associado a um número, Racional ou Irracional. Dessa forma, Dedekind estabelece que os pontos de uma reta têm uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais. A ideia de Dedekind pode ser utilizada para se ensinar o conceito de continuidade de Números Reais mesmo para a escola secundária, com o rigor de Dedekind sendo introduzido na Educação Superior. A consistência da teoria dos números reais foi dada por Cantor (1845 – 1918). Segundo Lintz (2007), em [28], a contribuição de Cantor, da sistematização da ideia de infinito atual, foi fundamental para a Matemática. A ideia de infinito de Cantor estava englobada em sua Teoria dos Conjuntos e, no caso desse conjunto de retas, Cantor introduziu ideias de Análise na reta que depois se generalizariam para os Espaços Topológicos, tais como ponto de acumulação, conjunto derivado, conjunto denso e outros. Da sua ideia de infinito surgiu também a ideia de continuidade da reta diferente daquela que foi apresentada por Dedekind. Para Baroni (2014), em [2], Cantor partia da ideia de sequências de Números Racionais, que chamamos de sequências de Cauchy, e os Números Reais eram introduzidos como símbolos associados às classes de equivalência dessas sequências. A abordagem de Cantor enfatizava a possibilidade de se obter o método iterativo de se formar Sequências de Cauchy. Amigo pessoal de Dedekind, Cantor também se interessou pela pesquisa sobre a relação entre quantidades numéricas e pontos de uma reta e reconhecia, segundo Baroni (2014), em [2], a necessidade de um princípio que ligasse essas ideias.

Cantor mostrou, através dos seus estudos sobre o infinito, segundo Boyer (1974), em [5], muito discutido na Teologia, que nem todos os conjuntos infinitos tinham a mesma potência. Se Dedekind provou que os conjuntos de pontos de uma reta têm uma correspondência biunívoca com o conjunto dos Números Reais, coube a Cantor mostrar que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma potência, isto é,

nem todos são bijeções com o conjunto dos Números Reais. Cantor mostrou que qualquer conjunto dos números triangulares ou o conjunto dos quadrados perfeitos tem a mesma potência com o conjunto dos Números Inteiros positivos. Esses conjuntos são bem menores que o conjunto dos Números Racionais, entretanto, Cantor mostrou que o conjunto dos Números Racionais é também enumerável, ou seja, pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números Inteiros Positivos, ou seja, tem a mesma potência que o conjunto dos Números Inteiros positivos. Segundo Boyer (1974), em [5], o conjunto das frações racionais é tão denso que, pelo fato de Cantor mostrar a correspondência biunívoca entre os conjuntos dos Números Racionais e os dos Inteiros Positivos, começou-se a pensar que todo conjunto infinito tem a mesma potência. Cantor mostrou, através de uma redução ao absurdo, que o conjunto dos Números Reais tem maior potência que o conjunto dos Números Racionais e que, portanto, não podem ter uma correspondência biunívoca. Conforme Boyer (1974), em [5]:

Suponhamos que os números reais entre 0 e 1 sejam contáveis, e que estejam expressos como decimais finitos, de modo que $\frac{1}{3}$, por exemplo, aparece como 0,3333333333....., $\frac{1}{2}$ como 0,4999999....., e assim por diante, e que estejam postos em ordem:

$$a_1 = 0, \quad a_{11}a_{12}a_{13}\dots\dots a_2 = 0, \quad a_{21}a_{22}a_{23}\dots\dots a_3 = 0, \quad a_{31}a_{32}a_{33}\dots\dots$$

onde cada a_{ij} é um dígito entre 0 e 9 inclusive. Para mostrar que nem todos os números reais entre 0 e 1 estão incluídos acima, Cantor exibiu uma fração decimal infinita diferente de todas as raízes anteriormente. Para isso, formemos $b = 0, b_1b_2b_3\dots\dots$, onde $b_k = 9$ se $a_{kk} = 1$ e $b_k = 1$ se $a_{kk} \neq 1$. Esse número real estará entre 0 e 1 no entanto será diferente de todos os do arranjo que se presumia conter todos os números reais entre 0 e 1.

Por fim, Lima (2007), em [27], descreve o conjunto de Cantor, o definindo como interessante e útil, pondo todos os números contidos no intervalo $(0, 1)$ na base 3 e define que os Números Irracionais não teriam essa representação periódica quando escritos na base 3, uma vez que as potências de base 3 representassem os decimais finitos e os que não fossem potências de 3 representassem dízimas periódicas.

O desenvolvimento da Análise foi fundamental para a evolução e ganho de rigor das disciplinas do Cálculo. O fenômeno da Aritmetização da Análise, em especial a Análise na Reta, que tem como principal objetivo dar rigor às demonstrações do Cálculo, isto é, abordar o Cálculo 1 sob uma ótica abstrata e formalista, deu-se depois de muita pesquisa a respeito do comportamento dos números em uma reta numérica. Essa é uma clara influência formalista no desenvolvimento histórico do Cálculo. Vimos que, no decorrer do processo de todo esse ganho de rigor da prova da existência dos Números Irracionais e construção do corpo dos Números Reais, todos os autores citados em diversos livros de Análise recorreram à Geometria Euclidiana para desenvolver algo sólido no tocante ao aparecimento dos Números Reais, a qual podemos constatar que, até sofrer o processo de axiomatização por Hilbert, foi toda embasada em senso comum. Em uma turma de Cálculo 1, em que a maioria dos alunos ainda tem pouca maturidade com relação às demonstrações matemáticas rigorosas, sugere-se, ao abordar a construção do corpo dos números reais, essa abordagem de como todos esses matemáticos aqui citados, tais como Cantor, Dedekind, Weierstrass e outros, alcançaram essa construção dos números reais. Dada a noção comum de infinito junto à noção intuitiva de não enumerabilidade dos pontos de uma reta, pode-se construir esses fatos com os alunos em sala de aula.

4.5 Funções

Segundo Baroni (2014), em [2], a noção de função surgiu desde a ideia de dependência funcional, através de algumas funções tabuladas empiricamente em astronomia, em tábuas para encontrar raízes quadradas, cúbicas, etc, conforme relatado por Baroni (2014), em [2]. Na época, ainda não tinha se criado a noção geral de função. No século *XIV*, pode ser encontrada também a sugestão do que hoje definimos como notação gráfica de funções a partir das ideias de Nicole d’Oresme (1323 – 1349), Thomas Brawardine (1290 – 1349), e das escolas de Oxford e Paris sobre latitude das formas, que tornariam familiar a noção de dependência entre grandezas e quantidades, introduzindo, dessa forma, os primeiros rudimentos da representação gráfica. A noção de função começa a se manifestar quando se faz necessária uma ferramenta matemática a fim de se investigar fenômenos naturais.

Para Baroni (2014), em [2], a noção de função começou a se manifestar, da forma como a conhecemos hoje, quando se fez necessário investigar fenômenos naturais, através, especialmente, de Galileu Galilei (1564 – 1642) e Joahannes Kepler (1571 – 1630), pois, para descrever fenômenos, como a trajetória dos corpos celestes em torno do Sol, o movimento de um pêndulo, em que a Amplitude do movimento dependia basicamente do tempo e da massa, os dois cientistas citados começaram a perceber a noção de relação de dependência entre duas variáveis. Para Baroni (2014), em [2], o desenvolvimento e o ganho de rigor das funções se deram graças às notações algébricas criadas por François Viète (1540 – 1603), pela geometria analítica introduzida por René Descartes (1596 – 1650) e por Fermat (1601 – 1665). Descartes, no século *XVIII*, juntamente com Fermat, desenvolvia o que, para Eves (2004), em [16], não chega a ser um ramo, mas sim um método de geometria. A essência da ideia consiste em estabelecer uma correspondência entre equações de duas variáveis e curvas planas, isto é, cada equação da forma $f(x, y) = 0$ está associada a uma curva. O que se faz atualmente ao se expressar uma equação de reta em sua forma reduzida, como, por exemplo, a equação da bissetriz deslocada de uma unidade no eixo y , isto é, $-x + y = 1$, ao se expressar $y = 1 + x$, conseguiria mostrar uma relação de dependência entre as variáveis.

É evidente que, para certas equações, como, por exemplo, a da circunferência, haveria uma certa dificuldade em se expressar uma variável em termos da outra. Dessa forma, a ideia ficava, muitas vezes, restrita ao contexto das curvas, isto é, as variáveis se relacionavam com as curvas e não entre si, embora tenha se mostrado aqui que, na maioria dos casos, pondo as equações na forma $f(x, y) = 0$, expressamos uma variável em termos da outra. Para Baroni (2014), em [2], o estudo das quantidades variáveis foi o divisor de águas entre a Matemática Clássica e a Matemática Moderna. Com o processo de algebrização da geometria, coube à Geometria Analítica trazer uma interpretação algébrica aos fatos da Geometria Euclidiana e não Euclidiana e a Matemática na era moderna passou a ser basicamente interpretada como uma relação de dependência entre quantidades variáveis. De acordo com Hankel (1871), em [24]:

A matemática moderna data do momento quando Descartes foi além do tratamento puramente algébrico das equações para estudar a variação das grandezas que uma expressão algébrica sofre quando uma de suas grandezas, dada de forma geral, passa através de uma série contínua de valores.

No século *XVIII*, o Cálculo já lidava com a noção de variáveis e, no século *XIX*, já utilizava-se a ideia de função. O conceito de função, mais tarde, foi usado por Cauchy para tentar esclarecer o conceito de limite e dar rigor à definição de derivada. Baseando-se em movimentações dos corpos, Isaac Newton (1642 – 1727) estabeleceu uma relação íntima entre os conceitos de função, variação e cálculo fluxional. Leibniz, por sua vez, interessava-se pelo estudo das curvas e pelo problema das tangentes e elaborou

os conceitos fundamentais do Cálculo nesse contexto, uma vez que ele se deparou com problemas de natureza geométrica ligados ao Cálculo. A palavra função apareceu em um artigo escrito por Leibniz em 1692. Leibniz definia funções como quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva, tais como coordenadas, tangentes, subtangentes, normais, raios de curvatura, etc. De acordo com Eves (2004), em [16], alguns métodos principais do Cálculo foram inventados por Leibniz aproximadamente duas décadas antes, quando ele usou, pela primeira vez, um símbolo de integral, um S alongado, que é derivado da primeira letra da palavra latina *Summa*. O objetivo de Leibniz era indicar uma soma de indivisíveis. Para Baroni (2014), em [2], o conceito e a simbologia usados para representar funções ficaram estabelecidos juntamente com Bernoulli (1667 – 1748), pois este publicou um artigo sobre um problema isoperimétrico em 1698, originalmente em latim e republicado em francês alguns anos depois. Nesse artigo, Bernoulli usava o termo *fonctions quelconques de appliqueés* para quaisquer expressões que contivessem as ordenadas como variáveis. Em 1718, Bernoulli elaborou o primeiro conceito de função que, segundo Baroni (2014), em [2], foi utilizado e padronizado por Leonhard Euler (1707 – 1783) em sua obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748). Vejamos as definições dos dois matemáticos, extraídas de Katz (1993), em [25], traduzida por Batarce (2003), em [4]:

Chamo de função de uma magnitude variável uma quantidade composta de qualquer desta magnitude variável e de constantes. (Bernoulli, 1718).

Uma função de uma magnitude variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira da magnitude variável e de números ou quantidades constantes. (Euler, 1748).

Embora Euler não deixe explícito o que seja expressão analítica, subtende-se que nessas expressões incluem-se operações algébricas, compostas por somas, subtrações, produtos, quocientes e raízes, funções elementares transcendentais, tais como exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, séries de potências e outras expressões que envolvem limites. Para Baroni (2014), em [2], essa obra de Euler representou um momento importante na história da Análise porque o conceito de função foi colocado em seu centro, isto é, ao invés das curvas, as funções tornaram-se os principais objetos de estudo do Cálculo e da Análise, permitindo, dessa forma, a algebrização da geometria e o fenômeno já mencionado, a libertação da Geometria. Em sua obra, *Institutiones Calculi Differentialis*, Euler (1755) define função com maior consistência:

Aquelas quantidades que dependem de outras, isto é, aquelas quantidades que experimentam uma variação quando outras variam, chamam-se funções dessas quantidades. (Euler, 1755).

No século *XIX*, tivemos Cauchy como um grande responsável por desenvolver não só as noções de funções, mas também as noções de Limites, Continuidades e Integrais. A sua obra *Cours d'analyse* (1821) foi considerada a obra precursora da era do rigor, característica do século *XIX*. Nesta obra, consta a seguinte definição de Função:

Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entre si que, os valores de alguma forma sendo dados, podemos determinar os valores de todas aquelas outras, imaginamos essas diversas quantidades expressas por meio de algumas dentre elas, as quais recebem então o nome de variáveis independentes; e as quantidades restantes, expressas por meio das variáveis independentes, são as que chamamos de funções dessas variáveis. (Cauchy, 1821).

Cauchy introduziu a ideia de função explícita, que, no Cálculo 1, são funções da forma $y = f(x)$, e a de função implícita, que se trata de funções não expressas em sua forma reduzida, na forma $F(x, y) = 0$, isto é, a função não está com uma variável expressa em termo de outra. Porém, Cauchy indicava funções sempre através de uma função algébrica, visto em [2], e isso também ocorria quando ele definia funções compostas. A definição de Cauchy diferia da de Euler no tocante à supressão do termo funções analíticas, mas a noção estava tão presente em sua mente que todas as suas introduções à noção de função sempre acabavam por definir uma expressão analítica. Para Batarce (2003), em [4], na história da Matemática, este modo de definir funções esteve sempre relacionado a uma concepção da Geometria distinta na Análise Matemática, uma vez que, nesta concepção, uma função seria definida como contínua se fosse dada por uma, e somente uma, expressão algébrica, e naquela, uma função estaria definida como um conjunto de pontos numa curva. Talvez o início do problema das continuidades, que abordaremos um pouco mais adiante, esteja aqui. Segundo Euler:

Uma curva contínua é tal que sua natureza pode ser expressa por uma única função de x . Se uma curva é de uma natureza tal que para várias partes, diferentes funções de x , por expressões, são requeridas, então nós chamamos de descontinuidade de uma tal curva. (Euler, 1748).

Um ano depois, Fourier (1768 – 1830) apresentou o seguinte conceito de função:

Em geral, a função $f(x)$ representa uma sequência de valores ou de ordenadas das quais cada uma é arbitrária. A abscissa x podendo receber uma infinidade de valores, haverá um mesmo número de ordenadas $f(x)$. Todas tem valores numéricos reais, ou positivos ou negativos, ou zero. Não supomos que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; entre elas se sucedem de uma maneira qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade.

Note-se que Fourier, ao se referir às funções, falava em uma sucessão de valores que não obedeceriam a uma lei de formação única, fazendo com que a noção de função aceita fosse discutida. A contribuição de Fourier foi, portanto, desenvolver um conceito de função não atrelado a uma lei de formação. A demonstração de convergência da Série de Fourier de uma função arbitrária valeu-se do fato de que para valores de a e x , onde a é um valor fixo, segue que $f(a)$ e $f(x)$ coincidem, o que significa que Fourier trouxe uma definição de função como uma associação de modo que cada valor atribuído a x tenha um único valor $f(x)$ correspondente. A ideia dada por Fourier deve ter motivado outros matemáticos, conforme veremos a seguir. Para Rosa Lúcia Baroni, em [2], faltava desatrelar o conceito de função do conceito de Continuidade, embora a grande preocupação na época fosse retirar a exigência de que uma função fosse necessariamente dada por uma expressão analítica.

No ano de 1834, Lobachevsky deu a sua contribuição com a definição de função em seu trabalho sobre séries trigonométricas:

O conceito geral sugere que como função se denomine um número dado para todo x e que varia progressivamente com ele. O valor da função pode tanto ser obtido por meio de uma expressão analítica, quanto por meio de uma condição que ofereça uma maneira de se examinar todos os números e de eleger um dentre eles, bem, por último, pode existir uma dependência que permaneça desconhecida.

Três anos mais tarde, baseado na definição de Fourier, foi a vez de Dirichlet (1837) introduzir a sua definição. Embora a concepção de conjuntos de Números Reais não estivesse estabelecida à época, Dirichlet introduziu a noção de intervalos. Verifica-se em alguns livros de Análise frequentemente utilizados que se define funções como uma associação entre intervalos e o conjunto dos números reais. Talvez essa ideia de associar apenas intervalos tenha surgido com Dirichlet, embora ainda não houvesse uma concepção sólida sobre os Números Reais:

Vamos supor que a e b são dois valores dados e seja uma quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores entre a e b . Agora, se a cada x corresponde um único, finito y de modo que, conforme x varia continuamente através do intervalo de a até b , $y = f(x)$ varia do mesmo modo gradualmente, então y é chamado de função contínua de x nesse intervalo.

Essas definições tiveram êxito no que tange o papel de desassociar o conceito de funções daquele descrito por uma expressão analítica ou por uma curva no plano de Descartes. Todos os autores, embora a ideia de conjuntos ainda não fosse consolidado à época, contribuíram para o desenvolvimento formal de funções hoje visto nos livros. Porém, todas essas definições dadas aplicam-se exclusivamente a funções contínuas, uma vez que todas essas definições foram desenvolvidas sem uma definição consolidada dos conjuntos. Apenas no século XX foi provada por Cantor a correspondência biunívoca dos pontos de uma reta com o Conjunto dos Números Reais. Essas definições levavam em conta apenas uma sucessão de valores e se definia como contínua, conforme verificado na definição de Dirichlet, que, dentro um intervalo (a, b) , para cada valor atribuído a x e pertencente àquele intervalo, haveria sempre um elemento $f(x)$ associado àquele elemento. Definia-se erroneamente como uma função contínua o que, na realidade, hoje conhecemos como função, uma vez o conceito de função contínua ser, em síntese: o valor de um $f(x)$, quando x tende para a é que o valor $f(x)$ tenda para o valor do próprio $f(a)$. A ideia Geométrica, associada às curvas, faz associar a continuidade à uma curva contínua, o que talvez possa tê-los levado a definir as funções como contínuas. O desafio agora era definir funções. Segundo Hawkins, em [22], o passo decisivo para que fosse dada uma definição geral de função foi dado por Hankel (1870) em seus trabalhos *Grenze und Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen*. Nesses trabalhos, Hankel analisa a noção de função dada por Dirichlet, além de comparar com a de Euler. Segundo ele, a definição de Dirichlet não levava em conta propriedades mais gerais relacionadas às funções, pois às relações existentes entre os valores desapareciam, conforme Baroni (2014), em [2]. Hankel definiu funções de uma forma já próxima da definição moderna, de correspondência entre conjuntos, conforme veremos a seguir:

Uma função se diz y de x se a cada valor da magnitude variável x que se move dentro de certo intervalo, corresponde-lhe um determinado valor de y ; não importa se y depende de x em todo o intervalo segundo a mesma lei ou não; se a dependência pode ser expressa por meio de operações matemáticas ou não. (Hankel, 1870)

Essa definição dada por Hankel começa a separar o conceito de função do conceito de continuidade de funções. Como na época não se havia consolidado o conceito de conjuntos, não existia uma prova consistente quanto à questão dos números reais. Assim, podemos dizer que a definição formal de Funções é relativamente recente se levarmos em conta toda a história da Matemática. A definição de funções em termos arbitrários apareceu apenas no século XX com Cantor. Cantor definiu função como um subconjunto produto cartesiano de dois ou mais conjuntos com determinadas propriedades.

4.6 Limites

Segundo Cauchy, quando valores numéricos são sucessivamente atribuídos a uma mesma variável e se aproximam indefinidamente de um valor fixo de maneira a terminar por dele se diferir tão pouco quanto queiramos, esse último é definido por Cauchy (1821), em [10], como o limite de todos os outros. Ao se definir limites, deve-se levar em conta o conceito de variáveis, uma vez que elas, conforme visto no tópico sobre funções, assumem uma infinidade de valores. Com a consolidação dos Números Reais, os quais foram definidos por Cantor como algo crucial para a sua realização, uma sucessão de valores arbitrários muito próximos a um valor fixo seria correspondente a uma infinidade de pontos em uma curva à medida que se aproxima daquele ponto e fazem a função se aproximar de um valor fixo. A definição de Cauchy se diferencia da de Euler em alguns aspectos de acordo com Baroni (2014), em [2]. Enquanto para Euler variável é uma quantidade numérica indeterminada, atingindo, portanto, todos os valores determinados, para Cauchy as variáveis assumem diferentes valores, mas não necessariamente todos, isto é, podem estar limitadas a um intervalo. Enquanto para Cauchy as variáveis podem ter limites, Euler se aproxima do conceito moderno de Conjuntos. Segundo Rosa Lúcia Baroni, em [2], diferentemente do que é observado, que as funções convergem para um limite único, Cauchy permitia alguns casos em que uma sequência de variáveis pudesse ter mais de um limite. Isso pode ser visto na formulação da demonstração do seu teste de convergência a seguir:

procura o limite, para os quais converge, ao mesmo tempo em que n cresce indefinidamente, a expressão $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ e designa por k o maior desses limites, ou, em outros termos, o limite dos maiores valores da expressão da qual se trata. A série $[u_1; u_2...; u_n...]$ será convergente, se $k < 1$, e divergente se se tem $k > 1$. (Cauchy, 1821).

Para Grabiner (2005), em [20], o conceito de limite de Cauchy se aproxima da concepção moderna se considerarmos não a maneira como o limite foi definido por ele, mas a forma que ele operava essa definição. Quando Cauchy provava algum resultado, ele traduzia essa definição em termos de épsilons e deltas, conforme é visto hoje nos livros de Cálculo. Algumas definições feitas no século *XVIII*, como a feita por Jean Rond d'Alembert (1717 – 1783) e a de La Chapelle (1710 – 1792), não foram traduzidas em termos de inequações nem forma usadas para provar nenhum resultado substancial. Pode-se dizer que a ideia de limite, especialmente de limites infinitos, surgiu ainda nos anos 450 a.C. para se demonstrar a existência dos incomensuráveis, provados com o conhecido rigor matemático apenas no início do século *XIX*. Para Boyer (1974), em [5], os paradoxos de Zenão influenciaram a Matemática no que tange a descoberta dos incomensuráveis e a discussão sobre a soma dos infinitésimos. Os primeiros problemas do Cálculo eram relacionados ao Cálculo de áreas. Acreditava-se que uma soma de valores infinitamente pequenos, os quais hoje afirmamos que no infinito tendem para zero, daria sempre uma soma de valores muito grandes. Embora, na ementa, o Cálculo 1 seja apresentado a partir de Limites para, mais à frente, introduzirem-se Integrais, o que parece ter motivado todo o desenvolvimento do Cálculo foram as pesquisas gregas de como se calcular áreas, que nada mais é do que uma aplicação da Integral. Prova disso é o Método de Exaustão grego, desenvolvido para resolver problemas de Quadratura do Círculo. Esse problema consistia em tentar encontrar valores próximos à área de uma curva pela área de um polígono inscrito e, para Eves (2004), em [16], surgiu como uma resposta aos paradoxos de Zenão. O Método de Exaustão consiste na subdivisão infinita de uma grandeza. Atribuído a Eudoxo (370 a.C.), o Método de Exaustão é enunciado conforme consta na fala abaixo, atribuída a Eudoxo, citada por Eves (2004), em [16]. Isso parece ter motivado o estudo de integrais, mas notam-se aqui as primeiras noções de limite:

Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

A ideia de limites parece ter se desenvolvido para se calcular valores de limites de somas de termos de seqüências, uma vez que os primeiros problemas de Cálculo foram introduzidos para se calcular as áreas de figuras planas. Ao se fazer essas aproximações pelo Método da Exaustão, remete-se ao modo de se calcular para quanto que tenderá uma seqüência de termos à medida que aumentamos indefinidamente os seus termos. O Método da Exaustão consistia em fazer sucessivas divisões, de modo que nos aproximássemos das áreas das figura. Isto remete ao método das aproximações sucessivas. Para se aproximar a raiz quadrada de um número, Lima (2007), em [27], remete a um método conhecido pelos Babilônios há 17 séculos antes de Cristo. Na seção em que se abordarão os Cálculos Integrais, será demonstrado que o método de Exaustão, confirmado pelo método do equilíbrio de Arquimedes, valia-se de técnicas semelhantes ao Cálculo Integral atual. Para Boyer (1974), em [5], o Método de Exaustão equivale a mostrar que, quando subdividimos um polígono inscrito em um círculo sempre subtraindo uma parte não menor que sua metade, então encontraremos um número inteiro de divisões em que essa grandeza será numericamente nula. Essas propriedades foram utilizadas para encontrar áreas curvilíneas, que serão abordadas na seção sobre integrais. Aqui, nos ateremos a enunciar o método da exaustão, a fim de relacionar à realidade atual o conceito de limite. Primeiro, mostraremos uma demonstração que provavelmente foi aquela tentada por Eudoxo, descrita por Eves (2004), em [16]:

Seja \overline{AB} (Figura 4.7) o lado de um polígono regular inscrito e seja M o ponto médio do arco AB . Note-se que a área do triângulo AMB é metade do retângulo $ARSB$ e, portanto, maior que a metade da área do segmento circular AMB . Assim, dobrando-se o número de lados do polígono regular inscrito, a área do polígono aumentará mais do que a metade da diferença entre a área do círculo e a do polígono. Logo, repetindo-se a operação de dobrar o número de lados um número suficiente de vezes, pode-se fazer com que a diferença entre a área do círculo e a do polígono se torne a menor do que qualquer área fixada previamente, por menor que seja. (Eves, 2004)

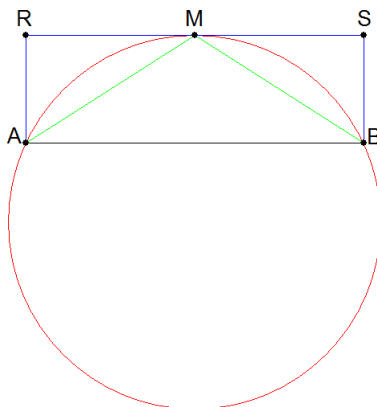


Figura 4.7: Método da exaustão

Será mostrado agora o que seria uma demonstração formalmente rigorosa do método de exaustão, para se concluir que, através de aproximações sucessivas, alcançar-se-á o limite de uma seqüência.

Demonstração do método da exaustão

Considere M como sendo uma grandeza qualquer, ε , uma grandeza prefixada e $\frac{1}{2} < r < 1$ é a proporção tomada do segmento que será retirada.

- $M - Mr = M_1 \Rightarrow M_1 = M(1 - r)$;
- $M_1 - M_1r = M_2 \Rightarrow M_2 = M_1(1 - r)$ e, do primeiro passo, temos $M_2 = M(1 - r)^2$;
- $M_2 - M_2r = M_3 \Rightarrow M_3 = M_2(1 - r)$ e, combinando o primeiro com o segundo passo, temos $M_3 = M(1 - r)^3$.

Pelo princípio da indução infinita, prova-se facilmente a identidade $M_n = M(1 - r)^n$. De fato, pondo $k = n$ e, supondo a proposição verdadeira, isto é, $M_{k+1} = M_k(1 - r)$ e que $M_k = M(1 - r)^k$, multiplicando-se ambos os membros da última equação pelo fator $(1 - r)$, obtém-se $M_k(1 - r) = M(1 - r)^{k+1}$. Então, comparando-se o primeiro membro da primeira equação com o segundo membro desta última equação, conclui-se que $M_{k+1} = M(1 - r)^{k+1}$. Dessa forma, está demonstrado que, para qualquer n , temos $M_n = M(1 - r)^n$ e, como $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, segue que $M_n = M(1 - r)^n < \varepsilon$, isto é, o valor da diferença entre as grandezas, conforme propunha Eudoxo, assumirá valores cada vez mais próximos de zero. Esse fato será usado para mostrar que os problemas de integrais podem ser introduzidos utilizando-se problemas da quadratura do círculo e da parábola, que serão abordados nos tópicos sobre integrais.

O conceito de limite abordado na demonstração acima remete à noção de quantidade infinitamente pequena, conforme a definição de Cauchy (1821):

Dizemos que uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena, quando seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero.

Embora o método de exaustão, tenha sido, historicamente, o pontapé inicial no estudo de integrais, Arquimedes, em seu problema da quadratura da parábola, que será melhor abordado na seção sobre Integrais, vale-se de uma desigualdade similar a do teorema do confronto, um dos resultados mais importantes dos limites, para calcular a área de um arco de parábola. A conclusão obtida por Arquimedes, utilizando-se de elementos de identidades algébricas, segundo Eves (2004), em [16], que já haviam sido demonstrados pelos gregos e encontrados em *Elementos de Euclides*, foi a desigualdade

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n - 1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2.$$

Sendo $b > 0$ um valor arbitrário e $\frac{b}{n}$ a base de cada retângulo que compõe a parábola (Figura 4.8), obtém-se a desigualdade

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}.$$

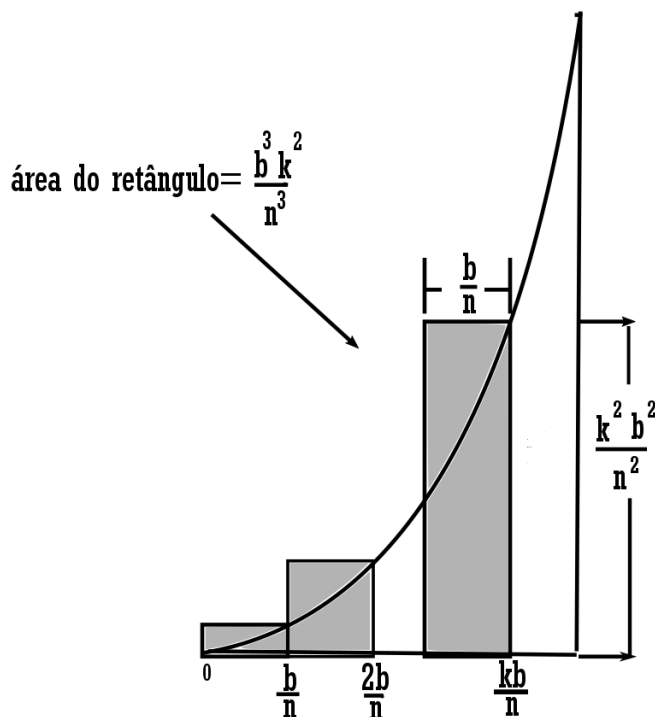


Figura 4.8: Quadratura da parábola

Tornando os valores de n cada vez maiores, a aplicação do Método de Exaustão consiste em fazer com que os valores da fração $\frac{b}{n}$ se tornem cada vez mais próximas de zero, na medida em que os valores de n crescem indefinidamente. Talvez essa ideia seja pioneira à noção de teorema do confronto, embora Arquimedes não a tenha utilizado. Arquimedes, além de desenvolver um método para calcular áreas de curvas não Euclidianas, mostrou a regra do confronto, ainda que pareça não ter se importado.

Lima (2007), em [27], apresenta também em seu livro *Funções de Uma Variável*, valendo-se do formalismo constante nos livros de *Análise na reta*, uma demonstração das aproximações da raiz quadrada, atribuída aos Babilônios no século 17 antes de Cristo. Tomam-se valores aproximados da raiz quadrada com erro tão pequeno quanto queiramos. O método babilônio, descrito por Elon, consiste, de início, em tomar arbitrariamente um valor inicial $x_1 > \sqrt{a}$ e definir indutivamente a sequência $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$. O objetivo é mostrar que a sequência (x_n) converge para a à medida que aumentamos sucessivamente o valor de n . Escolhendo-se $x \in \mathbb{R}$, tal que $\sqrt{a} < x$, ao se multiplicar os membros da desigualdade por \sqrt{a} , obtém-se a desigualdade $\frac{a}{x} < \sqrt{a} < x$, onde o terceiro membro é uma transitividade, uma vez que $\sqrt{a} < x$. Então, definindo-se uma expressão semelhante àquela da sequência para números reais e pondo $y = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$, que é a média aritmética entre x e $\frac{a}{x}$, pela desigualdade clássica de médias, conclui-se que $y = \frac{x + \frac{a}{x}}{2} < \sqrt{a \cdot \frac{a}{x}} = \sqrt{a}$. Portanto, $\sqrt{a} < y < x$, e, assim, os termos da sequência decrescente $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 \dots x_n > x_{n+1} \dots$, todos maiores que \sqrt{a} , convergem para algum c , ou seja, para valores de n muito grandes, isto é, $n \rightarrow \infty$, temos $c = \frac{c + \frac{a}{c}}{2}$, de onde concluímos facilmente que $c^2 = a$, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, os valores de x_n tendem para \sqrt{a} .

O processo descrito fornece boas aproximações para \sqrt{a} de forma rápida. Podemos verificar isso usando exemplos concretos, segundo Lima(2007), em [27].

O desenvolvimento do Cálculo e da Análise na reta foi motivado por dois fatores: o desenvolvimento dos números reais e o estudo de Cálculo de Áreas. A noção de limite desenvolveu-se através da noção das quantidades infinitamente pequenas, que já podem ser percebidas na Matemática dos gregos em suas tentativas lógicas ao encontrar razões e proporções de segmentos. Todavia, o rigor grego excluía o infinitamente pequeno de suas demonstrações geométricas e o que prevaleceu foi o conhecido Método de Exaustão, de acordo com Baroni (2014), em [2], que mostrava que a diferença da área de um polígono e a curva nela circunscrita diminuía gradativamente à medida que se aumentava o número de lados do polígono por meio dos pontos médios dos seus lados. A necessidade de se constituir um conceito formal de Limite surge, então, com o objetivo de dar rigor às demonstrações desses cálculos de áreas. Uma outra versão da necessidade da constituição do conceito de Limites é também a noção da sequência convergente. Vimos que os Babilônios desenvolveram um método para calcular valores aproximados para a raiz quadrada de um número. De acordo com Eves (2004), em [16], os Babilônios pareciam já ter uma noção de sequências e, através desses conhecimentos, deram aproximações para se calcular raízes quadradas de números naturais que não eram quadrados perfeitos. Vimos acima que, na demonstração proposta por Lima(2007), em [27], os Babilônios pareciam ter uma noção de aproximação infinita. A noção de limite pode ser encontrada também na relação da razão áurea e da sequência de Fibonacci, uma vez que, na medida em que os termos se desenvolvessem gradativamente em uma correspondência biunívoca com os números naturais, aproximariam-se cada vez mais daquele número que conhecemos por razão áurea. É necessário, então, desenvolver-se um conceito a fim de dar rigor a essas demonstrações. Newton e Leibniz utilizavam em seus Cálculos a noção de infinitésimos e receberam críticas, uma vez que Newton dizia não depender deles. Mas esse processo estabeleceu um movimento de aprimoramento das noções de Cálculo, conforme visto em Baroni (2014), em [2], em particular da noção de limites. Euler defendia ser exatamente zero uma quantidade infinitamente pequena, depois tivemos os desenvolvimentos da noção de limite que converge para zero com d'Alembert, Lagrange e outros, até chegar em Cauchy. O conceito de que uma quantidade muito pequena tende para zero no infinito é usada em várias obras de Cauchy. Muitos historiadores defendem que a centralidade no conceito de infinitésimos é o de Limite, e os infinitésimos são apenas abreviações. A necessidade do desenvolvimento de um conceito formal de Limite surge dessa questão, de aproximações sucessivas e do problema dos infinitésimos. Cauchy redefiniu o conceito de infinitésimos, embora o aceitasse. Ele definiu que os infinitésimos variavam se aproximando cada vez mais de zero, enquanto, para Euler e Leibniz, os infinitésimos eram constantes. Cauchy conseguiu muitos avanços em relação ao rigor pretendido em sua época, segundo visto em Baroni (2014), em [2], mas seus infinitésimos também não foram aceitos por se basearem em ideias e conceitos em vigor desde o século XVIII. Atrelado à Geometria, considerada ainda pouco rigorosa, só se conseguiu uma definição formal de limite com o advento da aritmetização da Análise, a partir do qual a base dos conceitos foi de infinitésimos para limites e da geometria para números.

4.7 Continuidade

Segundo Cauchy (1821), em [10], seja $f(x)$ uma função da variável x e suponhamos que, para cada valor de x , entre dois limites dados, essa função admita constantemente um valor único e finito, partindo-se de um valor de x , compreendido entre esses limites, atribuímos à variável x um acréscimo infinitamente pequeno α . A função receberá ela mesmo, por acréscimo, a diferença $f(x + \alpha) - f(x)$, que dependerá, ao mesmo tempo, da nova variável α e do valor de x . Isto posto, a função $f(x)$ será, entre os dois

limites fixados para a variável x , função contínua desta variável se, para cada valor de x central, entre esses limites, o valor numérico da diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ decresce indefinidamente com o de α . Em outros termos, a função $f(x)$ permanecerá contínua em relação a x entre os limites dados, se, entre estes, um acréscimo infinitamente pequeno da variável produzir sempre um acréscimo infinitamente da própria função, dizemos ainda que a função $f(x)$ é, na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x , função contínua desta variável, todas as vezes que ela for contínua entre dois limites de x mesmo muito próximos que contêm o valor a que se referem. Em uma abordagem geométrica, uma função contínua é aquela em que o limite da função em um dado ponto fixo x_0 é o próprio valor da função no ponto x_0 , isto é, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, para todo valor de x_0 que pertença ao domínio da função. Vimos na seção sobre funções que se confundiu por um tempo o conceito geral de funções com o conceito de funções contínuas, conforme podemos ver nessas definições. Euler (1748) definia função como sendo uma expressão analítica composta de variável, números ou quantidades contantes, como em [25]. Cauchy (1821), embora não tenha usado o termo expressões analíticas para definir funções, ateu-se a esse conceito, conforme relatado por Baroni (2014), em [2]. Fourier (1822) definiu funções como sendo uma sequência de valores arbitrários sem necessariamente seguir uma lei Matemática, mas, ao demonstrar a convergência da sua série, usou o fato de que, se dois valores de a e de x diferem muito pouco, então os valores de $f(a)$ e $f(x)$ se coincidiriam. Nessa perspectiva, Fourier estava atrelado ao conceito de continuidade, como relatado em Baroni (2014), em [2]. As funções foram associadas às ideias de pontos numa curva; talvez tenha surgido daí a necessidade de se generalizar o conceito de funções além de expressões analíticas. Assim como os alunos ingressam na universidade imaginando que o conceito de função nada mais seja do que pontos associados em uma curva, o conceito de função foi construído, por um lado, com base no interesse de se estudar como grandezas se relacionam e, por outro lado, com vistas a se definir uma lei de formação para essas curvas planas. O conceito de funções até então formulado não estaria errado, porém incompleto. Essa necessidade de se dar às funções um conceito mais geral surge quando Euler define uma curva que pode ser expressa por mais de uma expressão algébrica.

Uma curva contínua é tal que sua natureza pode ser expressa por uma única função de x . Se uma curva é de uma natureza tal que para várias partes diferentes funções de x , por expressões, são requeridas então nós chamamos de descontínua uma tal curva. (Euler, 1707-1783)

Em uma função contínua, não se verificam, de fato, saltos nos valores das funções conforme pode-se ver na Figura 4.9.

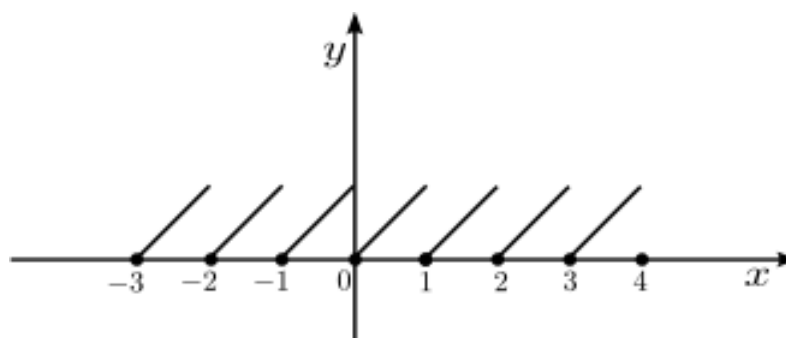


Figura 4.9: Descontinuidade de salto para cada inteiro

A Figura 4.9 representa uma função $f(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa a parte inteira de x . Em

cada valor inteiro que x assume, tem-se o que é definido por descontinuidade em um salto. Nas tabelas das Figuras 4.10 e 4.11, pode-se verificar que $f(2) = 0$, por exemplo, mas, quando x se aproximar de 2 por valores à sua direita, o valor da função tenderá para 0, isto é, quando esses valores estiverem à sua esquerda, eles se aproximarão de 1, conforme podemos ver nas tabelas seguintes.

x	1,0	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20	1,24	1,28	1,32	1,36	1,40	1,44	1,48	1,52	1,56	1,60	1,64	1,68	1,72	1,76	1,80	1,84	1,88	1,92	1,96	2,00
$[x]$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$x - [x]$	0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48	0,52	0,56	0,60	0,64	0,68	0,72	0,76	0,80	0,84	0,88	0,92	0,96	0,00

Figura 4.10: Valores à esquerda de 1

x	2,00	2,04	2,08	2,12	2,16	2,20	2,24	2,28	2,32	2,36	2,40	2,44	2,48	2,52	2,56	2,60	2,64	2,68	2,72	2,76	2,80	2,84	2,88	2,92	2,96	3,00
$[x]$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$x - [x]$	0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48	0,52	0,56	0,60	0,64	0,68	0,72	0,76	0,80	0,84	0,88	0,92	0,96	0,00

Figura 4.11: Valores à direita de 2

Nas duas tabelas das Figuras 4.10 e 4.11, mostra-se que quanto mais aproximamos o valor atribuído a x para 2, pela esquerda, a função retornará um valor cada vez mais próximo de 1, conforme visto especialmente nos últimos valores na segunda tabela, ao passo que, na primeira tabela, quanto mais aproximarmos os valores de 2, pela direita, basta ver o que acontece quando x assume valores muito próximos de 2, percebemos que ela assume valores cada vez mais próximos de 0.

No desenvolvimento histórico do Cálculo, a maior parte das funções era contínua e não se lidava com funções dessa natureza, portanto, não existia necessidade real de se estudar o conceito de continuidade. Isso levou a acreditar que qualquer função poderia ser expressa por uma expressão analítica, isto é, uma única expressão algébrica. No século *XVII*, as funções descontínuas começaram a aparecer em função do aparecimento de problemas de Física, como o da teoria do calor. Isso ocorre também no Ensino Médio. A maioria das funções ensinadas no Ensino Médio são funções com expressões analíticas. Em poucos, ou até mesmo nenhum, momentos, mencionam-se funções com esse tipo de propriedade, embora se definam funções como sendo dois conjuntos associados. Um caso muito pouco aludido, em detrimento de sua continuidade em todos os pontos, é a função módulo, isto é, $f(x) = |x|$,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Na Figura 4.12, temos um “bico” no ponto $x = 0$. A concepção de expressão analítica levava a crer que essa função era descontínua. Ao se escrever a série de Fourier, conseguiu-se obter uma função analítica, ou seja, uma mudança de notação foi suficiente para conseguir descrever uma expressão analítica para a função módulo. Esse erro, que levou Cauchy a definir descontinuidade em 1814, é comum entre os

alunos no curso de Cálculo 1. Daí a importância de se mostrar o comportamento das funções de modo intuicionista em sala de aula, isto é, apresentar, por construção, o comportamento de uma função.

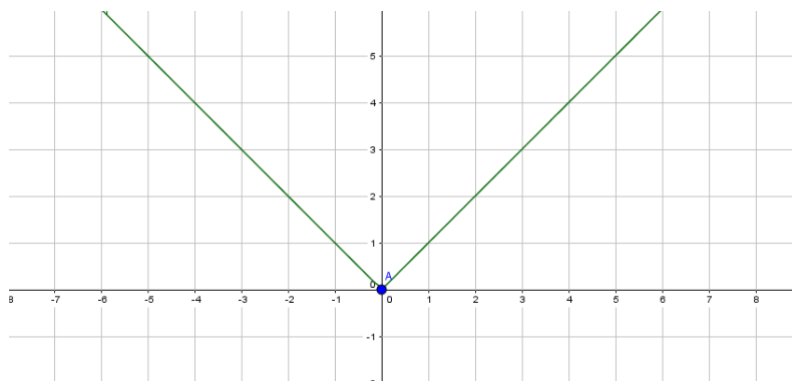


Figura 4.12: Gráfico da função módulo

Na Figura 4.12, vemos que a função muda de comportamento quando $x = 0$. A função é crescente para valores de x à direita de $x = 0$ e é decrescente para valores à esquerda de $x = 0$. Na tabela, descrevemos o comportamento da função módulo.

Na Figura 4.13, nota-se que, enquanto os valores de x se aproximam de zero pela esquerda (vide lado esquerdo da tabela da Figura 4.12), os valores da função se aproximam cada vez mais de $y = 0$ e, à medida que se aproximam de zero pela direita, isto é, os valores positivos mais próximos de zero, conforme se vê na tabela, os valores de y também se aproximam cada vez mais de $y = 0$. Ou seja, apesar de a função "mudar de expressão", não parece afetar a continuidade. Daí a sugestão de se fazer essas aproximações com o aluno em sala, de forma empírica.

$x < 0$	$f(x)= x $	$x > 0$	$f(x)= x $
-1	1	0	0
-0,9	0,9	0,1	0,1
-0,8	0,8	0,2	0,2
-0,7	0,7	0,3	0,3
-0,6	0,6	0,4	0,4
-0,5	0,5	0,5	0,5
-0,4	0,4	0,6	0,6
-0,3	0,3	0,7	0,7
-0,2	0,2	0,8	0,8
-0,1	0,1	0,9	0,9
0	0	1	1

Figura 4.13: Valores da função módulo

4.8 Derivada, taxa de Variação e algumas consequências

Em 1929, Cauchy, conforme relatado em [2], descreve que, quando a função $y = f(x)$ permanece contínua entre dois limites da variável x e quando determinamos a esta variável um valor compreendido entre os dois limites a que se referem um acréscimo infinitamente pequeno, este produz um acréscimo

infinitamente pequeno da própria função. Por consequência, se colocarmos $\Delta x = i$, os dois termos do quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

serão quantidades infinitamente pequenas. Enquanto estes termos se aproximam de zero, esse limite, quando existe, pode assumir um outro valor, diferente de zero, para cada valor particular de x , mas ele varia com x . Essa dependência depende da forma da função proposta $y = f(x)$ e, para indicar esta dependência, damos à nova função o nome de função *derivada* e a denotamos adicionando a ela um acento, pela notação y' ou $f'(x)$, como definido por Baroni (2014), em [2]. Esse quociente foi tratado por Cauchy como um limite, que, para Baroni (2014), em [2], eliminou a ideia de quocientes de infinitésimos, presente nos trabalhos de Euler e evitado nos trabalhos de Cauchy. A contribuição de Cauchy para as derivadas não trouxe nada de relevante, conforme relatado por Katz (1993), em [25], embora ele tenha calculado, valendo-se da definição de Lagrange, a derivada de um grande número de funções, que presumia que toda função poderia ser expandida em séries de potências. Para Eves (2004), em [16], esse falso resultado, conjuntamente com o fato de Cauchy ter traduzido boa parte dessa linguagem e outros matemáticos contemporâneos seus em uma definição conveniente para se demonstrar teoremas, fez com que essa abordagem prevalecesse por muito tempo e ainda se faça presente em textos universitários modernos. A diferenciação se originou de problemas relacionados ao traçado de tangentes a curvas e de questões envolvendo máximos e mínimos, conforme exposto em Eves (2004), em [16]. Em que pese esses problemas de diferenciação remontarem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra na ideia de Fermat. A ideia de Fermat pode ser melhor compreendida ao nos referirmos a uma curva como a da Figura 4.14. Supõe-se que, em cada um dos pontos desta curva, tem-se uma direção determinada que pode ser definida pela tangente à curva. Fermat notou que, em determinados pontos, as tangentes aos valores máximos ou mínimos da função serão sempre paralelos ao eixo das abscissas. Dessa forma, o problema de se calcular os valores extremos parece demandar a resolução de outro problema, que é o de localização das abscissas desses pontos. Para Apostol (1988), em [1], a derivada, tida como ideia central da derivação, foi originada por esse problema de geometria. O conceito de Integrais, que se desenvolveu a partir do Método de Exaustão de Eudoxo e do princípio do equilíbrio de Arquimedes, os dois da Grécia Antiga, parece ser anterior ao das Derivadas.

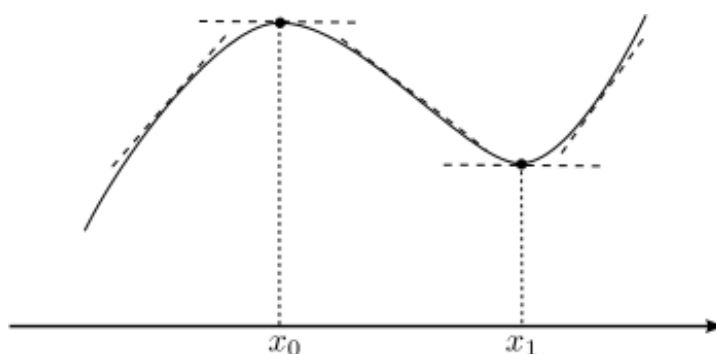


Figura 4.14: Tangente no ponto x_0 e x_1

A Figura (4.14) mostra que o conceito de derivada é local. Cada ponto da curva tem uma tangente específica, e a sua taxa de variação nesses pontos define se naquele ponto a função é crescente ou decrescente.

O objetivo de calcular máximo e mínimo de uma função parece conduzir à discussão de como determinar a direção da tangente em um ponto arbitrário da curva, como visto em Apostol (1988), em [1]. A intenção de resolver esse problema levou Fermat a desenvolver algumas ideias rudimentares relacionadas à noção de derivada. Os problemas de determinação de tangente à curva não pareciam, à primeira vista, ter uma relação com os problemas relacionados às áreas delimitadas por uma região plana. Segundo Apostol (1988), em [1], o primeiro a descobrir o que, de fato, as duas ferramentas matemáticas tinham em comum foi Isaac Barrow (1630 – 1677), que foi professor de Isaac Newton. Porém, Newton e Leibniz foram os pioneiros em compreender a importância da relação entre o Cálculo Integral e Diferencial e a explorá-los, iniciando, conforme descrito por Apostol (1988), em [1], uma era sem precedente no desenvolvimento da Matemática. O problema que motivou Fermat a desenvolver esse estudo foi a observação de Kepler no comportamento geométrico das funções. Kepler observou que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas vizinhanças dos pontos de máximo ou dos pontos de mínimo. Fermat transformou esse fato em um processo para se calcular máximos e mínimos, conforme relatado por Eves (2004), em [16]:

Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor de $f(x - e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode se experimentar fazer $f(x - e) = f(x)$, e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assumo o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um valor máximo ou mínimo.

O procedimento de Fermat consistia em dividir uma quantidade tal que seu produto seja máximo. Seja k a quantidade dada. As partes procuradas são x e $k - x$. Defina uma função $f(x) = x(k - x)$. Conforme Eves, faça $f(x - e) = f(x)$, isto é, $(x - e)(k - x + e)$, obtendo assim a equação $e^2 - 2xe + ke = 0$. Dividindo por e , chega-se a $2x - k - e = 0$. Impondo a condição de Fermat, isto é, $e = 0$, conclui-se que $k = 2x$. O resultado desse procedimento parece, de forma indireta, obter o valor da coordenada x do vértice de uma função polinomial do 2º grau. Embora esse procedimento seja desprovido de rigor matemático, ele equivale a impor a atual conhecida definição de derivada, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i} = 0$, método habitual para se encontrar máximos e mínimos de uma função $f(x)$, muitas vezes referido como método de Fermat. A rigor, o que Fermat fez está correto e contribui hoje para o ensino de Cálculo em relação ao cálculo de problemas de otimização, mas ele ignorou que o fato da condição da derivada se anular é apenas necessária, mas não suficiente para se obter um ponto de máximo ou ponto de mínimo, além de não distinguir se o que se calculavam eram valores máximos ou mínimos.

Outra contribuição de Fermat para o Cálculo diferencial foi descobrir um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua ideia consistia em encontrar a subtangente relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo. A noção de tangente é utilizada como posição de limite para uma secante, isto é, quando duas extremidades da secante à curva tendem a se coincidir.

Na Figura 4.15, considere a reta \overline{AB} (em vermelho), secante à curva $f(x, y) = 0$. À medida em que o ponto B tende para A, obtemos a reta tangente (em verde) à curva (em azul). Temos também que, sendo $A = (x_0, y_0)$ o ponto de tangência a $f(x, y) = 0$, toma-se o ponto E como se ele pertencesse à reta tangente. O valor da subtangente a corresponde à distância entre a projeção do ponto de tangência e a intersecção da reta tangente com o eixo das abscissas. Na Figura 4.15, verifica-se que a distância EF é dada por $y_0 \left(1 + \frac{e}{a}\right)$, onde e seria um infinitésimo. Tratando-se E como sendo um ponto da curva, aqui

estamos impondo a condição $e = 0$, temos que $f\left(x_0 + e, y_0\left(1 + \frac{e}{a}\right)\right) = 0$. Além disso, considerando-se que o coeficiente da reta no ponto $A = (x_0, y_0)$, temos que o coeficiente angular da reta tangente é dado por $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_0\left(1 + \frac{e}{a}\right) - 1}{e}$. Ao manipularmos essa equação, obteremos o valor em função da derivada, dada por $a = y\left(\frac{\delta f/\delta y}{\delta f/\delta x}\right)$.

Dessa forma, e à sua maneira, Fermat determinou tangentes a curvas, como elipse, cicloide, cissoide, conchoide, quadratriz e folium de Descartes, conforme relatado em Eves (2004), em [16].

Conforme podemos ver, o processo de diferenciação desenvolvido por Fermat teve dois grandes pilares: problemas de otimização e de tangentes a curvas dado um ponto fixo pertencente às curvas. Esses dois tipos de problemas são os que norteiam os problemas envolvendo derivadas. Faltava a Fermat dar rigor às suas formulações a respeito de problemas de otimização, quando não mostrou a condição suficiente de se obter máximos e mínimos, além de não distingui-los.

Em contrapartida, no seu problema de calcular a distância do intercepto da reta tangente à curva por um ponto fixo até a projeção dele em relação à curva, Fermat conseguiu desenvolver um procedimento a fim de se determinar o coeficiente angular de uma reta tangente à curva por aquele ponto.

Esse procedimento, descrito por Fermat, na prática, nada mais é do que fazer um ponto de uma reta secante a uma curva tender para o mesmo ponto, ou seja, a derivada de um ponto, que é o limite da taxa de variação quando a variação nas abscissas tende a zero.

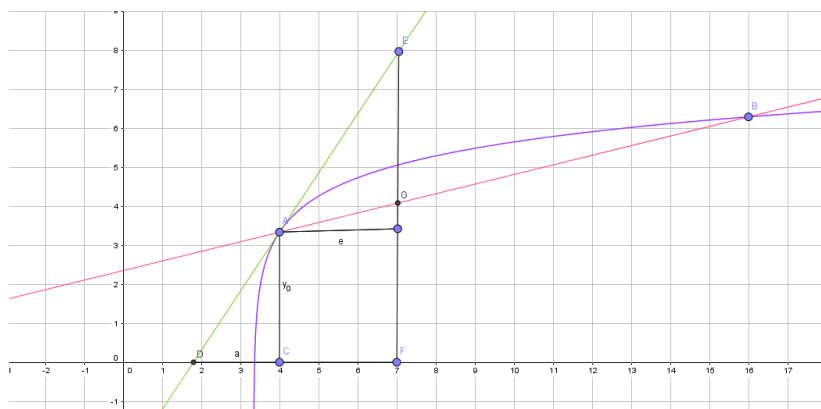


Figura 4.15: Tangente no ponto A

Um procedimento parecido ao da figura acima, para se obter coeficientes angulares de retas tangentes a curvas, foi o dado por Isaac Barrow pouco mais de quarenta anos depois, em sua obra *Lectioes opticae et geometricae*, que se ocupava de óptica geométrica. Nessa obra, Barrow faz, em uma demonstração, uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação, mediante o uso de uma ferramenta conhecida como triângulo diferencial, muito comum em textos de Cálculo. Embora com um objetivo diferente, o procedimento desenvolvido por Barrow pouco se difere daquele apresentado por Fermat. Ele usa a mesma ideia, atribuída a Tales de Mileto, partindo da semelhança de Triângulos. Para Eves (2004), em [16], esse procedimento torna-se rigoroso com o uso da teoria de limites. Barrow é considerado o primeiro matemático a perceber de maneira clara que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa descoberta, que será melhor abordada na seção a seguir, quando faremos uma construção cronológica do estudo das Integrais, nada menos é do que o conhecido Teorema Fundamental do Cálculo, que é enunciado e provado nas *Lectioes*, de Barrow. Nesse período, portanto, quase toda a base

do Cálculo já estava consolidada, mas não existia um sistema formal com uma simbologia que trouxesse a essas ferramentas um cálculo manipulável. Esse trabalho coube, em um trabalho independente, a Newton e Leibniz. Conforme Eves (2004), em [?]:

Nesta altura do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já tinham sido feitas muitas integrações: muitas curvaturas, quadraturas e retificações já haviam sido efetuadas: já aflorara um processo de diferenciação e muitas tangentes a curvas haviam sido construídas; a ideia de limite já fora concebida; e o teorema fundamental já reconhecido. O que mais faltava fazer? Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas, formais e também um re-desenvolvimento consistente e rigoroso dos fundamentos da matéria. Foi à primeira dessas duas coisas que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição. Assim, embora Newton e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do Cálculo em geral é atribuída a eles.

4.9 Integração e Alguns Métodos

Como descrito em Apostol (1988), em [1], a origem do Cálculo integral remonta a mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema de determinação de áreas que culminou no Método da Exaustão. As ideias fundamentais deste método são elementares e podem ser mostradas como fator motivacional. O Método de Exaustão de Arquimedes consiste em inscrever polígonos em regiões planas com o objetivo de exaurir a região e, assim, ter uma aproximação cada vez mais precisa da área exata desta região. Segundo Apostol (1988), em [1], Arquimedes teve êxito para demonstrar a área de regiões circulares e de algumas outras figuras particulares. O método de Arquimedes teve que esperar 18 séculos para ser aceito como um método para o cálculo de áreas, pois a álgebra elementar era desconhecida na época, fazendo com que sua demonstração ficasse desprovida de rigor matemático, impedindo que este método fosse estendido a outras classes de regiões em uma forma compacta. O desenvolvimento do rigor matemático, para Apostol (1988), em [1], lento e revolucionário, fez com que o Método de Exaustão ganhasse, gradualmente, a roupagem que hoje caracteriza o Cálculo Integral, que tem grande importância não só no cálculo de áreas e volumes, mas também em outros ramos da Matemática. Para Apostol (1988), em [1], o cálculo integral conservou alguns aspectos originais do Método de Exaustão e recebeu o seu maior impulso, principalmente de Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Leibniz (1646–1716). Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) e Bernhard Riemann (1826–1866) deram uma base sólida ao cálculo integral, o que fez com que fossem destacados nos livros de Cálculo mais utilizados, levando-se a crer que eles foram os únicos responsáveis pelo desenvolvimento do cálculo integral. Isso leva a supor que não existe uma conexão da Matemática elementar com a Matemática formal.

4.9.1 O Método da Exaustão

Na seção sobre limites, foi visto que o Método de Exaustão foi utilizado para calcular limites de séries de infinitésimos. Aqui nesta seção, veremos que as primeiras noções de integral surgiram ainda na Grécia Antiga com o método de exaustão de Eudoxo, que teve a sua demonstração dada por Arquimedes. O método de exaustão foi pioneiro em todo o estudo do cálculo de áreas sob curvas e volumes sob superfícies. Veremos aqui três aplicações do Método da Exaustão de Arquimedes, o da quadratura da parábola, do círculo e da esfera.

O Problema de Quadratura da Parábola

O método de quadratura da parábola pode ser ensinado no curso de Cálculo 1 dada a sua fácil e prazerosa construção, cálculo agradável e a sua associatividade com a série geométrica. Pode-se dizer que o Método de Exaustão foi pioneiro no estudo de Cálculo, que motivou pesquisas não só em Cálculo Integral como também em diferenciais. Vimos, na seção sobre limites, que Arquimedes, em seu problema de quadratura da parábola, deduziu o teorema do confronto, sem o rigor, obviamente, dos atuais livros de Cálculo. Ele depreendeu a ideia de que, se duas funções convergem pra um mesmo limite e existe uma função intermediária entre as duas funções, para qualquer que seja o valor da variável independente, então a função intermediária também convergirá para aquele limite. Esse fato foi provado por Arquimedes, embora não tenha utilizado a noção de Limites, posterior ao Cálculo Integral. O segmento parabólico aqui representado e os pormenores do Cálculo utilizado não são exatamente aqueles considerados por Arquimedes, mas representam o método de exaustão a ele atribuído, uma vez que o rigor fora desenvolvido por ele. O método da exaustão da parábola consiste em dividi-la em retângulos aproximados, por defeito e por excesso, conforme mostra a Figura 4.16. A área do segmento parabólico é maior do que a área total dos retângulos interiores e menor que a dos retângulos superiores. Se cada banda retangular se subdivide (vide Figura 4.16), para se obter uma nova aproximação com maior número de retângulos, a área total dos retângulos interiores (aproximação por defeito) aumenta, enquanto a área total dos retângulos exteriores diminui, conforme visto em Apostol (1988), em [1]. Arquimedes percebeu que a aproximação da área total dos retângulos interiores aumentava, isto é, se aproximava pela esquerda da área da parábola, e a dos retângulos exteriores se aproximava pela direita com a era da parábola. O cálculo consiste em dividir a base, tomada do eixo das abcissas, conforme se vê na Figura 4.16 em n partes iguais. Sendo b o comprimento dessa base, a base de cada retângulo medirá $\frac{b}{n}$. As abcissas dos pontos de divisão são $0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b$. Cada um desses pontos, expressos na forma $x = \frac{kb}{n}$, onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ e, fatalmente, cada uma dessas ordenadas correspondentes a essas abcissas será $\left(\frac{kb}{n}\right)^2$, dando $\frac{b^2}{n^2}k^2$ e, portanto, a área de cada retângulo, sendo que a base multiplicada pela altura é $\frac{b}{n} \frac{b^2}{n^2} k^2 = \frac{b^3}{n^3} k^2$. Designando por s_n , a soma das área dos n retângulos interiores, pondo a expressão $\frac{b^3}{n^3}$ em evidência, temos $s_n = \frac{b^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2]$. Por outro lado, designado S_n à soma das áreas dos retângulos superiores, temos analogamente $S_n = \frac{b^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2]$. O fator que multiplica $\frac{b^3}{n^3}$ é o somatório $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$, que podemos deduzir por somação uma relação a partir do seu número de termos.

Lema 4.1. *A soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$ é dada por $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração Tome a identidade $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$. Pondo $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ e fazendo $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n-1$, temos:

$$3(1)^2 + 3(1) + 1 = 2^3 - 1^3$$

$$3(2)^2 + 3(2) + 1 = 3^3 - 2^3$$

$$3(3)^2 + 3(3) + 1 = 4^3 - 3^3$$

$$3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = n^3 - (n-1)^3.$$

Somando os termos membro a membro, vamos obter $3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] + 3[1 + 2 + 3 \dots + (n-1)] + (n-1) = n^3 - (1)^3$, onde $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$ é o nosso s_n , isto é, a soma das áreas dos retângulos inferiores, $1 + 2 + 3 \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$, a conhecida soma de Gauss e $n-1$ a soma dos 1's. Dessa forma, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Quando somarmos o fator n^2 , obteremos a identidade $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

Lema 4.2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$, para todo $n \leq 1$

Demonstração

Basta notar que a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} < \frac{n^3}{3}$. Por outro lado, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} > \frac{n^3}{3}$, o que gera o resultado, pois $n \geq 1$.

Teorema 4.14. *Seja A a área da parábola de equação e $b > 0$ a base da parábola tomada do eixo positivo das abcissas. Então $A = \frac{b^3}{3}$.*

De fato, vimos que a desigualdade $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$ é válida para todo $n \geq 1$. Ao multiplicarmos essa dupla desigualdade por $\frac{b^3}{3}$, obteremos a desigualdade $s_n < A < S_n$, onde A é a área da parábola. Falta mostrar agora que $A = \frac{b^3}{3}$.

De fato, quando somamos à desigualdade da esquerda o fator n^2 , temos $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2$. Por outro lado, subtraindo o fator n^2 da desigualdade da direita, tem-se que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 > \frac{n^3}{3} - n^2$.

Multiplicando-se a desigualdade agora obtida por $\frac{b^3}{n^3}$, obteremos a desigualdade $\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}$, para todo $n \geq 1$. Existem três possibilidades: $A > \frac{b^3}{3}$; $A < \frac{b^3}{3}$ ou $A = \frac{b^3}{3}$.

Provemos que as desigualdades são falsas. Como $A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n}$, ou seja, adaptando-a, obteremos $n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$, mas isso é absurdo, pois supomos que a desigualdade vale para todo n . Logo, $A = \frac{b^3}{3}$, e fica provada a quadratura da parábola pelo método de exaustão.

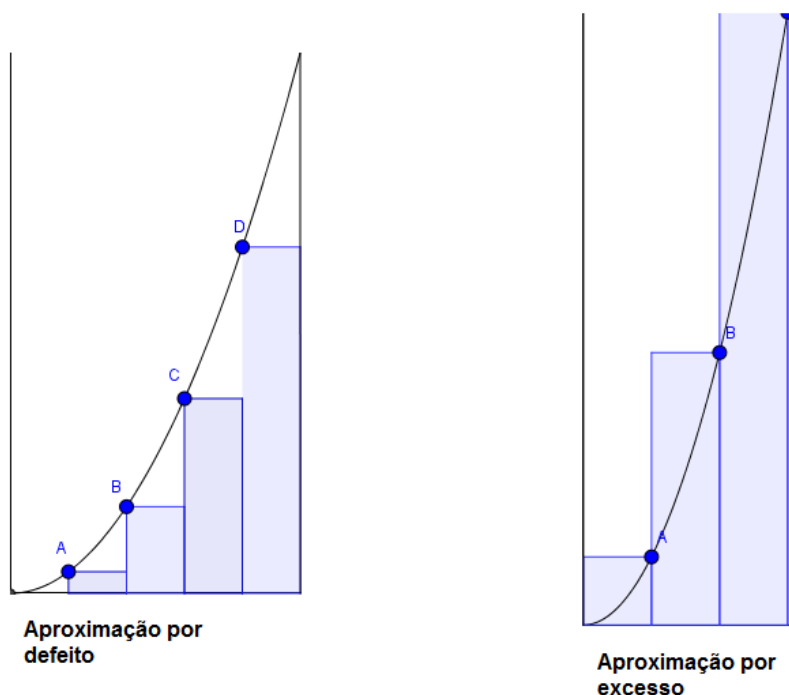


Figura 4.16: Quadratura da parábola

O problema da quadratura do círculo

Arquimedes apresentou um modelo para calcular a área do círculo através da sua obra *A Medida de um Círculo*, composta por apenas três proposições. Primeiro ele demonstra que a área A de um círculo de raio r é igual a de um triângulo cuja a base é igual ao comprimento C da circunferência que contorna esse círculo e altura r , ou seja, $A = \frac{rC}{2}$. Disso podemos concluir que a razão entre a área do círculo pelo quadrado do seu raio é igual a razão da sua circunferência por seu diâmetro. Essa razão nada mais é do que o que hoje conhecemos por π . Os egípcios, por volta do século *XVa.C.*, haviam já obtido um valor aproximado de 3,16 para π , partindo um quadrado inscrito e outro circunscrito à circunferência e, em seguida, dobrando os lados dos respectivos quadriláteros, obtendo dois polígonos de oito lados e calculando a razão entre o perímetro dos octógonos e da circunferências. A ideia de Arquimedes foi valer-se do método da exaustão para obter entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, partindo dos perímetros de dois hexágonos inscritos e circunscritos à circunferência. Ele repetiu esse processo dobrando o número de lados até obter um polígono de 96 lados. Arquimedes obteve a desigualdade $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, que, em decimais, nos daria o intervalo $3,14084 < \pi < 3,142858$. Arquimedes calculou a área do círculo descobrindo os limites entre os quais essa área se estende e estreitando depois, pouco a pouco, esses limites até mais ou menos a área real. O seu procedimento consistiu em inscrever um hexágono regular dentro de um círculo e, após isso, duplicar os lados das figuras através dos pontos médios dos lados dos polígonos até obter dois polígonos com 96 lados, um circunscrito e outro inscrito em um círculo, conforme se pode verificar na Figura 4.17.

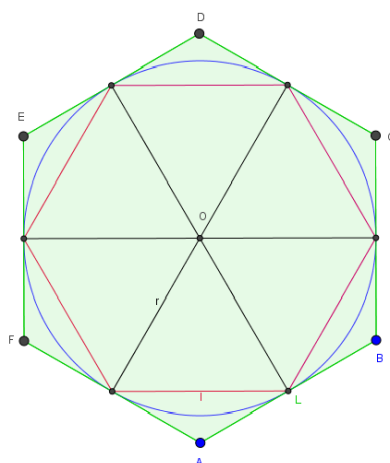


Figura 4.17: Quadratura do círculo

Na Figura 4.17, destacando-se um triângulo da figura, nota-se que, tomando um triângulo interno de 96 lados, fazendo α ao se dividir o hexágono e encontrar um polígono de 96 partes, observa-se que $\alpha = \frac{360}{96}$ e, para se calcular a altura de cada triângulo isósceles, pois precisamos dela para calcular a área desse triângulos, temos $\sin\left(\frac{360}{192}\right)$. Sendo l a medida do lado do polígono de 96 lados inscrito no círculo e sendo, então, a a medida da altura de cada triângulo, r o raio do círculo, temos $a = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$ e, como o $\sin\left(\frac{360}{192}\right) = \frac{l}{2r}$, obteremos que $l = 0,0654381656$ e $a = 0,9994645875$. Dessa forma, a área do polígono inscrito é tal que $A_i = 96 \cdot \frac{l \cdot a}{2}$, de onde concluímos que A_i dá aproximadamente $3,139350203 \cdot r^2$. Por outro lado, sendo $\tan\left(\frac{360}{192}\right) = \frac{L}{2r}$, onde L é o lado do polígono de 96 lados circunscrito, temos que $L = 0,0654732008$, a área do polígono externo é $A_e = 96 \cdot \frac{L \cdot r}{2} = 3,1427145996$ e podemos concluir a desigualdade $3,139350203 \cdot r^2 < A_c < 3,1427145996 r^2$. Ao se aumentar ainda mais o número de lados, em processo análogo, nota-se que o fator de correção ficará cada vez mais próximo daquele número que conhecemos como π .

O método do equilíbrio de Arquimedes e o Volume da Esfera

O Método de Exaustão assemelha-se ao princípio da indução Matemática, no que tange à descoberta inicial do resultado, e gerou o questionamento sobre se a propriedade demonstrada vale para qualquer situação. O método do equilíbrio de Arquimedes, para Eves (2004), em [16], alcançou resultados similares aos de muitas integrais definidas, utilizados até mesmo nos dias atuais.

Basicamente a ideia consistia em dividir o dique em faixas horizontais e então fazer cada uma girar em torno de suas bordas superior e inferior, até que elas se tornassem paralelas ao plano horizontal. Fundamentalmente é esse o método usado hoje em dia em nossos textos elementares de cálculo. Eves (2004).

A aplicabilidade do método será ilustrada aqui conforme a demonstração feita por Eves (2004), em [16], a qual considera que o volume de uma esfera é 4 vezes maior que a de um cone que tem a base

igual ao círculo maior da esfera. Arquimedes descobriu esse fato através de uma engenhosa condição de equilíbrio entre as seções circulares de uma esfera e um cone, de um lado, e os elementares de um cilindro, de outro, conforme mostrado na Figura 4.18.

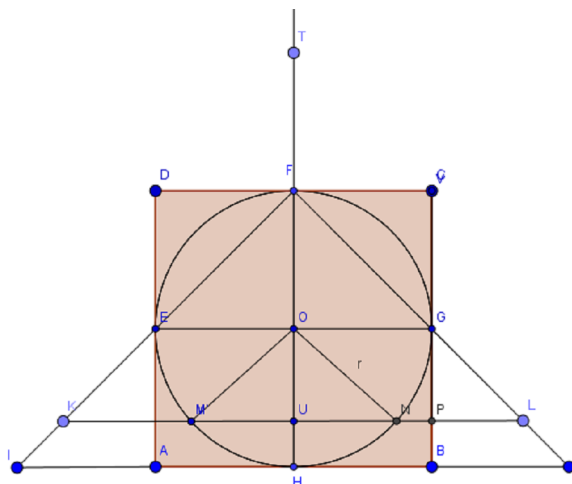


Figura 4.18: Equilíbrio de Arquimedes

Seja \overline{MO} o raio r da esfera. Segundo Eves (2004), em [16], a experiência de Arquimedes foi feita em um eixo horizontal. Neste trabalho, essa experiência será demonstrada tomando-se o eixo vertical y do plano cartesiano. Construindo o cilindro e o cone de revolução, obtidos girando o retângulo $FCBH$ e o triângulo FJH em torno do eixo y , que é isósceles, de catetos iguais a $2r$, cortemos os três sólidos resultantes em fatias finas e horizontais à distância y de F e espessura igual a Δy e $\overline{MU} = \sqrt{2yr - y^2}$. Sendo V_{esfera} , $V_{cilindro}$, V_{cone} os volumes da esfera, do cilindro e do cone, respectivamente, temos:

$$V_{esfera} = \pi y(2r - y)\Delta y, \quad V_{cilindro} = \pi r^2 \Delta y \quad \text{e} \quad V_{cone} = \pi y^2 \Delta y.$$

Ao se tomar fatias correspondentes da esfera e do cone e pendurando seus centros em um ponto T , pertencente a uma distância $2r$ de F e $T \in \overline{HF}$, define-se o momento de um volume sobre um ponto, que é o seu produto pela distância do ponto ao seu centro de massa. O equilíbrio de Arquimedes é dado pela equação $[\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2 \Delta x]2r = 4\pi r^2 x \Delta x$, isto é, o momento da fatia cortada do cilindro corresponde à quarta parte das fatias cortadas da esfera e do cone. A identidade acima mostra que, somando um grande número de fatias, todas penduradas no ponto T , obtém-se que $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

O método do equilíbrio de Arquimedes também foi utilizado por Kepler (1571 – 1630) para calcular as áreas envolvidas na segunda lei do movimento planetário e para calcular os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade de barris de vinho. A veracidade do método de Arquimedes foi confirmada por Cavalieri em 1635. Cavalieri mostrou que um volume pode ser considerado como um composto de áreas que são volumes indivisíveis, conforme explica Boyer 1974), em [5]. Uma contribuição importante na história do Cálculo foi, sem dúvida, a de John Wallis (1616 – 1703). Segundo Eves (2004), em [16], ele foi o primeiro a enxergar uma relação entre a derivada e a sua primitiva, embora essas descobertas sejam atribuídas a Newton, pois foi o primeiro a publicar essas relações. Em 1896, a relação entre integração e derivação foi enfatizada por Leibniz. Riemann, por sua vez, muito citado em livros de Cálculo na parte de integrais, mostrou que a condição de integrabilidade não dependia da continuidade de funções e, formalizando a noção de soma de infinitésimos, formalizou e generalizou o que hoje conhecemos como

soma de partições.

O Teorema Fundamental do Cálculo

A relação percebida por Issac Barrow (1639 – 1677), em termos atuais, nada mais é do que o Teorema Fundamental do Cálculo: a relação $g(x) = f'(x) \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$, tida hoje como base das duas operações centrais do Cálculo, que são as integrais e as derivadas. Uma função contínua é integrada e depois diferenciada, embora uma função integrável não seja necessariamente diferenciável. Até a descoberta de Barrow, escrita mais tarde por Isaac Newton e posteriormente formalizada por Riemann, muitas ideias do Cálculo já haviam sido difundidas. Faltava um conjunto de regras analíticas e um re-desenvolvimento consistente e rigoroso nos fundamentos da matéria, conforme apontado em Eves (2004), em [16].

Conclusão

O objetivo deste capítulo não é reinventar o método desenvolvido nas salas de aula na universidade, tampouco sugerir esse tipo de abordagem em sala de aula. Vimos que, toda ferramenta Matemática foi historicamente desenvolvida através de contextos específicos da realidade de cada matemático, da mesma forma que seus desdobramentos, tais como teoremas, proposições e corolários. Nesse aspecto, sugere-se, portanto, uma abordagem contextualizada das ferramentas relacionadas ao Cálculo, que depende, fatalmente, do contexto cultural vivido pelo aluno em toda a sua trajetória acadêmica, desde o Ensino Fundamental até a Universidade. A formalização de conceitos deveria ser posterior a essa abordagem empírica e palpável ao aluno. A generalização, por fim, deve ter como consequência a generalização e a formalização desses conceitos na mente do aluno. Isso deve ser combinado através da integração entre a teoria e a prática.

Conclusão

A disciplina de Cálculo 1 é a base de todo e qualquer curso de Exatas, em especial o de Matemática. A realidade que os índices educacionais apontam é que, embora tenha ocorrido um avanço, existe ainda deficiência em Matemática no que diz respeito a alguns conceitos Matemáticos. Cabe ao curso de Matemática e a outros cursos de exatas a formação de professores para a Educação Básica, Técnica, Tecnológica e, também, a Superior, para alunos que pretendam seguir o Bacharelado em Matemática e uma carreira acadêmica. Ao Departamento de Matemática da UnB, cuja um dos objetivos é a formação de docentes de Matemática para o magistério na Educação Básica e Superior, cabe o zelo de se propor alterações na cultura educacional e estas mudanças devem partir de dentro da própria instituição. A prática pedagógica dos docentes formados pela Universidade refletirá, de certa forma, na prática pedagógica dos docentes ali formados. O conhecimento adquirido pelos docentes, conforme opinião comum dentro da Universidade, acaba por não ser aplicada na prática pedagógica em sala de aula e os fatos ocorridos no último capítulo acontecem na sala de aula, onde itens que se espera que tenham uma quantidade satisfatória de acertos acabam sendo apontados pelos testes psicométricos, aqui abordados, como difíceis.

A Matemática é uma disciplina essencial à formação do indivíduo, pois, acima de qualquer outra disfunção educacional, é a disciplina responsável por desenvolver o Raciocínio Lógico, a organização de informações e do pensamento, etc, além de contribuir para áreas da vida do indivíduo em formação, como a educação financeira, o tratamento de informações, dentre outros aspectos cotidianos. O uso de testes Estatísticos de avaliação, utilizados no último capítulo para se avaliar a plausibilidade, a dificuldade e a capacidade de discriminar as diferentes capacidades dos indivíduos, deveria ser aplicado não só nas avaliações de larga escala, mas também dentro das escolas, para se ter uma avaliação mais exata do que se está e não se está sendo compreendido. Além disso, dado o atual caráter competitivo da Educação, o SAEB, por ser um modelo de avaliação educacional capaz de identificar quais ferramentas os alunos têm aprendido, deveria servir de base para algum processo seletivo universitário. Isso depende de uma política nacional de educação. No âmbito do estudo realizado, conclui-se dois aspectos a partir do baixo desempenho na disciplina de Cálculo 1: a falta de pré-requisito e, de modo geral, a baixa capacidade de itens das avaliações propostas de discriminarem se os alunos estão, de fato, aprendendo a disciplina. A falta de pré-requisito é sugerida pelo SAEB, que mostrou que, no Ensino Médio, os alunos deixam de aprender várias ferramentas de Matemática Elementar com as quais ele terá que lidar na disciplina de Cálculo 1 caso opte por seguir os estudos em alguma área que envolva Matemática. Apontou-se também

que, em semestres em que ocorreram maior número de ingressantes via PAS e ENEM, houve correlações moderadamente fortes e, em especial, com a aplicação do disposto na Ata 270/2013, do Departamento de Matemática, os índices de reprovação aumentaram concomitantemente com essas proporções de ingressantes via PAS ou ENEM. O caminho inverso ocorreu com aqueles que ingressaram via Vestibular. Além disso, no Capítulo 4, foi mostrado que os alunos mostram deficiências em conceitos inerentes à Matemática Básica. Dessa forma, propõe-se uma disciplina de Pré-Cálculo dentro da Universidade, ainda que de caráter optativo onde se revisem, enfatizem e se aprofundem ferramentas de Matemática Básica, fundamentais em Cálculo 1. Ademais, com o aluno já cursando a disciplina de Cálculo 1, tal como exposto no Capítulo 2, sugere-se que se ensinem as ferramentas do Cálculo, incentivando, por meio de fontes palpáveis, a descoberta do aluno, conforme muito sugerido por Machado (2005), em [30], e outros autores. Defende-se que, tal como ocorreu na História do Cálculo, que os alunos descubram intuitivamente o que são, de fato, essas ferramentas e, posteriormente, se generalize, por meio do que defende o Logicismo e o Formalismo, abordados no Capítulo 1. Isto é, é fundamental que os alunos saibam como resolver os exercícios propostos, mas sabendo também como aplicar adequadamente os aspectos teóricos. Quanto às avaliações, itens apontados como fáceis pelos professores do Departamento de Matemática se mostraram, através dos testes psicométricos propostos pela Teoria da Resposta ao Item e pela Teoria Clássica dos Testes, difíceis para os alunos. Além disso, alguns itens que abordam aplicação de conceitos de Cálculo 1 mostraram-se pouco discriminatórios. Propõe-se, portanto, que os professores sejam incentivados e que o Departamento de Matemática, além de fazer os testes psicométricos dos itens, como já vem sendo realizado por alguns docentes, ofereça treinamentos de engenharia de Elaboração de itens e que esse trabalho seja aprofundado com o intuito de melhorar a capacidade do Departamento de avaliar seus discentes.

Referências Bibliográficas

- [1] T. M. Apostol, *Cálculo com funções de uma variável com uma Introdução à Álgebra Linear*, Editora Reverié, Rio de Janeiro, 1988.
- [2] R. L. Baroni e S.C. Otero Garcia, *Aspectos da História da Análise Matemática, de Cauchy a Lebesgue*, Editora Unesp, Cultura Acadêmica, 2014.
- [3] M. C. B. Barufi, *A construção de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- [4] M. S. Batarce *Um contexto histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática*, Rio Claro, 2003.
- [5] C. B. Boyer, *História da Matemática*, 3ª edição, Blucher, São Paulo, 1974.
- [6] W. O .Bussab e P. A. Morettin, *Estatística Básica*, 7ª edição, Editora Saraiva, São Paulo, 2012.
- [7] G. F. L .P. Cantor, *Notiz zu dem Aufsatz: Beweis, das seine furjenden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form farstellen lasst fur die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, v.73, p.294-296, 1871.
- [8] B. J. Caraça, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, 2ª edição, Lisboa, 1998.
- [9] M. J. Cass, *A teoria da prova em Leibniz*, Scientle Studia, São Paulo, 2013.
- [10] A. L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique: premier partie, analyse algébrique*, Paris: Chez Debure frères, 1821.
- [11] Y. Chevallard, *A Transposición Didáctica: del sabersabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires, 1991.
- [12] F.C. da Costa, *Por que resolver problemas na educação Matemática? Uma contribuição da escola de Gestalt*, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, 2008.
- [13] U. D'Ambrosio, *A história da matemática: questões historiográficas e políticas na Educação Matemática. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*, Editora UNESP, 1999.
- [14] R. Dedekind, *Stetheit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, Viewg, 1872.

- [15] Diretoria de Avaliação Básica, *Relatório Pedagógico do ENEM 2011-2012*, Brasília, Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Direção de Educação Básica, 2015.
- [16] H. Eves, *Introdução á História da Matemática*, Unicamp, Campinas, 2004.
- [17] M. Epple, *The end of the sciences of quantity: fundation of Analisis*, 1860-1910, In: JAHNKE H.N(Ed.), *A History of Analisis*. Translated from the Germany by the auors. Providence: American Mathematical Socyety, 2003.
- [18] J. B. J. Fourier, *Theorie analytiqye de la chaleur*, Paris: Chez Firmin Didot, 1822.
- [19] R. R. Fragelli, *Trezentos, Aprendizagem ativa e colaborativa alternativa ao problema da ansiedade em provas*, Revista Eletrônica Gestão e Saúde, Volume 6, p 860-872; Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- [20] J. V. Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, Mineola: Dover Publications, 2005.
- [21] H. L. Guidorizzi, *Um curso de Cálculo*, 5ª edição, LTC, São Paulo, 2001.
- [22] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: its origins and development*, The Madison: university of Wiscoin Press, 1970.
- [23] H. Hankel, *Untersuchungen uber die unendlich oft uniform convergence*, Proceeding of the Cambridge Philosophical Society. London, v.19, n.4, p.148-156, 1918.
- [24] H. Hanke, *Untertersuchungen uber die unendlich oft oszillieredenund unстетigenfunktionen*, Tubingen: Ludwig Friedrich Fues, Greeze. In: ERSCH,J.S; GRUBER,J.G.(Eds.). *Allgemeine encyclopadie de Wissenschaften und Kunste*. Leipzig: F.A.Brockhaus, 1871.
- [25] V. J. Katz, *A history of Mathematics: an introduction*, New York: Harpercollins, 1993.
- [26] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York: Oxford University Press, 1972.
- [27] E. L. Lima, *Análise Real, funções de uma variável*, volume 1, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [28] R. G. Lintz, *História da Matemática*, Campinas, Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007.
- [29] N. J. Machado e U. D'Ambrosio, *Ensino de matemática: pontos e contrapontos*, Livros eletrônicos, Rio de Janeiro, 2014.
- [30] N. J. Machado, *Matemática e Realidade; análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática*, 6ª edição, São Paulo, 2005.
- [31] F. Mondini, *O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a Matemática*, In *XII EBRAPEM*, Rio Claro, 2008.
- [32] P. C. Moreira, *O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola*, UFMG, 2004.

-
- [33] L. Pasquali, *Teoria da Resposta ao Item; teoria, procedimento e aplicações*, Brasília; LabPam/UNB, 2007.
- [34] L. Pasquali, *Psicometria: Teoria dos testes na Psicologia e na Educação*, Rio de Janeiro: Vozes, 2003.
- [35] H. Poincaré, *Últimos Pensamentos*, Livraria Garnier, Rio de Janeiro, Paris, 1924.
- [36] M. L. Rabelo, *Avaliação Educacional: Fundamentos, Metodologia e Aplicações no Contexto Brasileiro*, Rio de Janeiro, 1ª edição, Coleção Profmat, Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [37] W.M. Rezende, *O Ensino de Cálculo; Dificuldades de Natureza Epistemológica*, Universidade de São Paulo, USP, 2003.
- [38] W.M. Rezende, *Uma análise histórica - Epistêmica da Operação de Limite*, Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.
- [39] D.F. Tavares e R. C. Valle, *Teoria da Resposta ao item: conceitos e aplicações*, São Paulo, 2000.
- [40] A.N. Whitehead e B. Russel, *Principia Mathematica*, 2ª ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1965.
- [41] H. Wussing, *Leciones de historia de las matematicas*. Tradução de Elena Ausejo, José Luis Escorijuela, Mariano Hormigón, Daria Kara-Murzá, Ana Millán. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998. Título Original: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*.
- [42] www.inep.gov.br. Acesso em 08/05/2017; 09/05/2017; 12/05/2017.
- [43] www.mec.gov.br. Acesso em 13/05/2017; 14/05/2017; 16/05/2017.
- [44] www.cespe.unb.br. Acesso em 17/05/2017; 18/05/2017; 20/05/2017.
- [45] Nota Explicativa - ENEM por escola. Acesso em 08/05/2017; 09/05/2017; 12/05/2017.