Radiação Gravitacional de Fontes Aceleradas

J.R. Steiner

Sumário

Resumo

A radiação gravitacional de corpos acelerados é um tema intrincado, porém de muito interesse e relevância. A eletrodinâmica de Maxwell prevê que um corpo linearmente acelerado, relativamente a um referencial inercial em repouso, produza um vetor de Poynting não nulo no referencial em repouso. Da mesma forma, esperamos que um corpo acelerado produza radiação gravitacional. Embora se espere que a intensidade de tal radiação seja muito pequena, as questões teóricas que envolvem o fenômeno merecem uma investigação sobre a consistência de sua descrição. O trabalho é desenvolvido por meio do estudo da métrica C no vácuo, a qual é interpretada como uma representação do espaço-tempo exterior de uma fonte gravitacional esfericamente simétrica e com aceleração uniforme, e utilizando o formalismo teleparalelo equivalente à relatividade geral. Para um observador suficientemente afastado dos horizontes de Schwarzchild e Rindler, ambos modificados, obtemos uma expressão simples para a radiação gravitacional total emitida.

Abstract

The gravitational radiation of acclerated bodies is a very complicated but is realy interesting and relevant. The Mazwell's electrodynamics PREVE that a body with a linear ecceleration, relative to a inertial frame in rest, show up a Poynting vector non zero in the rest frame. In the same way, we hope that a accelerated body produce a gravitational radiation. EMBORA the radiation intensity is too small, the theoretical questions that are involting in the pheomena needs a investigation about yours descrition.

Capítulo 1

Introdução

De forma similar à radiação de uma partícula carregada prevista na eletrodinâmica clássica, em relatividade geral uma fonte acelerada supostamente irá emitir uma radiação gravitacional. Sobre a magnitude de tal radiação, esta é esperada ser muito pequena, mesmo assim devemos estudar a sua descrição matemática, pois o seu entendimento é de grande importância teórica. O espaço-tempo exterior de uma fonte gravitacional esfericamente simétrica uniformemente acelerada é descrita pela métrica C. Ela é uma solução das equações de Einstein obtida primeiramente por Levi-Civita [1], e redescoberta ao longo do século passado, principalmente por Ehlers e Kundt [2], que foram os primeiros a usarem o nome *métrica* C. Mais tarde, ao longo da década de 70 e início da de 80 [3, 4, 6] é que se foi dada a interpretação de que a métrica C representa um buraco negro de Schwarzchild acelerado. Kinnersley, Walker e Bonnor [3, 6] mostraram ainda que pela extensão máxima das coordenadas, a métrica C pode ser tomada para representar um par de buracos negros acelerados.

A propriedade física mais relevante do espaço-tempo representado pela métrica C pode ser analisada de maneira direta considerando a forma linearizada da solução [7]. Uma partícula no espaço-tempo da métrica C linearizada está sujeita à atração gravitacional de uma fonte central, mais uma força inercial uniforme, ao longo do eixo z por exemplo. De qualquer forma, o estado inercial da fonte física irá influenciar o campo gravitacional à sua volta, um fato que é consistente com o princípio da equivalência, que afirma que as forças gravitacionais e inerciais são da mesma natureza.

Nesta dissertação iremos estudar a radiação gravitacional emitida por um buraco negro de Schwarzchild na formulação Teleparalela Equivalente da Relatividade Geral (TEGR). Para isto adotaremos um sistema de coordenadas do tipo Bondi, que nos leva a concluir que a forma completa e não-linearizada da métrica C pode ser entendida como uma superposição não-linear dos espaços-tempos de Schwarzchild e Rindler [7]. A métrica C exibe um vetor de Killing do tipo tempo, ∂_t, o qual indica o caráter estático da métrica. Entretanto, a métrica é ainda radiativa [3], pois o vetor de Killing ∂_t não é globalmente do tipo tempo. Ele se torna do tipo espaço além do horizonte de eventos de Rindler.

O sistema de coordenadas mencionado acima, é adotado na ref.[7], está adaptado à fonte acelerada. Construiremos um sistema de referência (aproximadamente) não acelerado através de um *boost* na direção oposta ao movimento do buraco negro, que irá determinar um conjunto de campos de tetradas adaptadas ao observador que se encontra aproximadamente em repouso no espaço-tempo, ou seja, com respeito ao conjunto de campos de tetradas sob o *boost*, o buraco negro irá necessariamente demonstrar um movimento acelerado, em uma aproximação a ser explicada. A energia e a radiação gravitacional emitida pelo buraco negro são calculadas em relação a este conjunto de observadores. As integrais de superfície serão calculadas em uma superfície de intergração que se encontra afastada de ambos os horizontes de eventos modificados (Schwarzchild e Rindler).

No capítulo 2 faremos uma breve revisão das definições mais importantes da TEGR, como o vetor energia-momento e o fluxo da energia-momento do campo gravitacional. Já no capítulo 3 faremos um estudo da métrica C e apresentaremos sua forma em coordenadas do tipo Bondi seguido de uma discussão sobre as propriedades mais relevantes de sua forma linearizada. No capíulo 4 construimos um campo de tetradas, que seja independente do tempo, adaptado ao buraco negro acelerado, *i.e.*, o campo de tetradas para o qual o buraco negro se encontra em repouso. Uma vez que o campo de tetradas está bem definido, aplicamos uma transformação de Lorentz local para determinarmos o campo de tetradas que descreve o movimento acelerado da fonte. Por fim no capítulo 5 apresentamos os cálculos relevantes para o desenvolvimento deste trabalho e subseqüentemente no capítulo 6 fazemos uma análise dos resultados obtidos e pespectivas para o trabalho.

Notação: Os índices latinos do meio alfabético $i, j, k, ...$ referem-se a hipersuperfícies do tipo espaço e assumem os valores 1, 2 e 3. Os índices gregos e latinos do início do alfabeto são índices do espaço-tempo e do grupo $SO(3,1)$ global, respectivamente. Ambos variam de 0 a 3 de acordo com $\mu = \{0, i\}$, $a = \{(0), (i)\}$. Será adotada a convenção de Einstein e unidades onde $c = 1$ e $G = 1$, a menos que se diga o contrário.

Capítulo 2

Formulação Teleparalela da Relatividade Geral

O TEGR é uma reformulação da relatividade geral de Einstein em termos do campo de tétradas $e^a{}_\mu$[10]-[16]. Considerando que a teoria tem de ser invariante sob a transformação do grupo SO(3,1) global de $e^a{}_\mu$, os seis graus de liberdade adicionais das tétradas, com respeito ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, fixa o sistema de referência adaptado ao observador.

A densidade Lagrangeana para o campo gravitacional no TEGR, na presença de um campo de matéria, é dada por

$$\begin{aligned} L(e_{a\mu}) &= -k\,e\,(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a) - L_m \\ &\equiv -k\,e\Sigma^{abc}T_{abc} - L_m\ , \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $k = 1/(16\pi G)$, $e = \det(e^a{}_\mu)$ e T^{abc} são as torções. O tensor Σ^{abc} é definido por

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^{b} - \eta^{ab}T^{c}) \;, \tag{2.2}$$

e $T^a = T^b{}_b{}^a$. A combinação quadrática $\Sigma^{abc}T_{abc}$ é propocional à curvatura escala $R(e)$, exceto por uma divergência total [13]. A densidade L_m vem dos campos de matéria. Com isso posto, temos as equações de campo para o cmapo de tetradas

$$e_{a\lambda}e_{b\mu}\partial_\nu(e\Sigma^{b\lambda\nu}) - e(\Sigma^{b\nu}{}_a T_{b\nu\mu} - \frac{1}{4}e_{a\mu}T_{bcd}\Sigma^{bcd}) \;=\; \frac{1}{4k}eT_{a\mu} \;, \tag{2.3}$$

onde $\delta L_m/\delta e^{a\mu} \;\equiv\; eT_{a\mu}$. É ainda possível mostrar por meio de cálculos explícitos que o lado esquerdo da Eq(2.3) é o mesmo que

$$\frac{1}{2}\,e\,[R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2}e_{a\mu}R(e)].$$

A definição do vetor energia-momento gravitacional, $\mathbf{P}^a$, contido em um volume arbitrário V de hipersuperfícies do tipo espaço, tri-dimensional, surge da formulação Hamiltoniana da TEGR[17]. Este é dado por

$$P^a = -\int_V d^3x\,\partial_j\Pi^{aj} \;, \tag{2.4}$$

onde $\Pi^{aj} = -4ke\Sigma^{a0j}$ é o momentum canonicamente conjugado a e_{aj}. Uma propriedade essencial do momento-energia gravitacional, $P^a = (E, \mathbf{P})$, é a covariância sob uma transformação SO(3,1) global, em adição à invariância sob transformações de coordenadas das hipersuperfícies tri-dimensionais do tipo espaço. Cada configuração do campo de tétradas estabelece um sistema de referência adaptado ao observador.

Após algumas manipulações algébricas simples da Eq.(2.3), chegamos a uma equação de continuidade para o vetor energia-momento gravitacional P^a [18, 19, 20],

$$\frac{dP^a}{dt} = -\Phi^a_g - \Phi^a_m \ , \tag{2.5}$$

onde

$$\Phi^a_g = k\int_S dS_j[ee^{a\mu}(4\Sigma^{bcj}T_{bc\mu} - \delta^j_\mu\Sigma^{bcd}T_{bcd})] \ , \tag{2.6}$$

é a componente a do fluxo energia-momento gravitacional, e

$$\Phi^a_m = \int_S dS_j\,(ee^a{}_\mu T^{j\mu})\,, \tag{2.7}$$

é a componente a do fluxo de enegia-momentum gravitacional dos campos de matéria. S representa o contorno espacial de V. Conseqüentemente no vacuum, $\Phi^{(0)}_g$ o flluxo de energia-momentum gravitacional é

$$\Phi^{(0)}_g = -\frac{dE}{dt} \ , \tag{2.8}$$

onde $E = P^{(0)}$. A análise [18, 19] de algumas configurações do campo gravitacional relevantes e conhecidas, têm confirmado $\Phi^{(0)}_g$ como o fluxo de energia gravitacional.

Podemos estabelecer tanto uma densidade Lagrangeana, invariante sob transformações sob o grupo SO(3,1) local [12, 16] (transformações de Lorentz locais), quanto sob SO(3,1) global [14, 17, 10, 13]. Temos uma simetria SO(3,1) local quando usamos a conexão afim de spin $\omega_{\mu ab}$, além das tétradas $e^a{}_\mu$, para a descrição da densidade Lagrangeana. Esta conexão surge pela imposição da covariância da equação de Dirac pelo grupo SO(3,1) local no espaço-tempo curvo, o que nos leva à definição da derivada covariante local de um campo espinorial $\psi(x)$

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{1}{4} i \omega_{\mu ab} S^{ab} \psi \tag{2.9}$$

com $S^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]$ sendo uma representação de spin $\frac{1}{2}$ do grupo SO(3,1), e assim fixa-se a lei de transformação de tal grupo para uma conexão afim local:

$$\widetilde{\omega}_{\mu ab} = \Lambda_a{}^c \omega_{\mu cd} \Lambda_b{}^d + \Lambda_{ac} \partial_\mu \Lambda_b{}^c. \tag{2.10}$$

Se impusermos que a derivada covariante da tetrada $e^a{}_\mu$, para uma conexão afim $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ e conexão afim local $\omega_{\mu ab}$, se anule, ficamos com:

$$\partial_\mu e^a{}_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} e^a{}_\lambda + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu = 0,$$

o que nos fornece

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda} e^b_\nu \omega_{\mu ab} + e^{a\lambda} \partial_\mu e_{a\nu}. \tag{2.11}$$

Ao substituirmos a conexão acima no tensor de curvatura

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(e, \omega) = e^{\cdot}_\alpha e_b{}^\beta R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) \tag{2.12}$$

e no tensor de torção

$$T^a{}_{\mu\nu}(e, \omega) = e^a{}_\lambda T^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{2.13}$$

obtemos, respectivamente

$$R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b, \tag{2.14}$$

$$T^a{}_{\mu\nu}(e, \omega) = \partial_\nu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b{}_\nu - \omega_\nu{}^a{}_b e^b{}_\nu. \tag{2.15}$$

Ao multiplicarmos a Eq.(2.15) por $e_{a\lambda}$, temos

$$T_{\lambda\mu\nu} = e_{a\lambda} T^{a}{}_{\mu\nu} = e_{a\lambda}\partial_\mu e^{a}{}_{\nu} - e_{a\lambda}\partial_\nu e^{a}{}_{\mu} + \omega_{\mu\lambda\nu} - \omega_{\nu\lambda\mu}. \tag{2.16}$$

Se somarmos $T_{\lambda\mu\nu}$ com as suas permutações, $T_{\mu\lambda\nu}$ e $T_{\nu\mu\lambda}$, e isolarmos $\omega_{\mu ab} = e_a{}^{\lambda} e_b{}^{\nu}\omega_{\mu\lambda\nu}$, chegamos a

$$\omega_{\mu ab} =^{\circ} \omega_{\mu ab} + K_{\mu ab}. \tag{2.17}$$

O termo

$$^{\circ}\omega_{\mu ab} = -\frac{1}{2} e^{c}{}_{\mu}(\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab}) \tag{2.18}$$

é a conexão de Levi-Civita, com $\Omega_{abc} = e_{a\nu}(e_b{}^{\mu}\partial_\mu r_c{}^{\mu} - e_c{}^{\mu}\partial_\mu e_b{}^{\nu})$. Esta conexão possui uma torção nula associada. O outro termo, $K_{\mu ab}$, é o termo de contorção,

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2} e_a{}^{\lambda}\, e_b{}^{\lambda}(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} - T_{\mu\nu\lambda}). \tag{2.19}$$

Capítulo 3

A Métrica de Schwarzchild

Vamos determinar neste capítulo calcular o vetor energia-momento [27] do campo gravitacional de um buraco negro de Schwarzchild de massa M no sistema de referência de um observador em movimento que sofre um *boost* de Lorentz assintoticamente.

3.1 O Sistema de Tetradas

Sabemos que o tensor métrico de Schzwarzchild em coordenadas isotrópicas é dado por

$$ds^2 = -A^2(dx^0)^2 + B^2(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\phi), \tag{3.1}$$

com

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{(1-m/2\rho)^2}{(1+m/2\rho)^2} \\ B^2 &= (1+m/2\rho)^4, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde temos que $m = MG/c^2$ e a variável ρ está relacionada à coordenada radial usual r,

$$r = \rho(1 + m/2\rho)^2.$$

Se definirmos agora o sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ z &= \rho \cos\theta, \end{aligned} \tag{3.3}$$

podemos escrever Eq.(3.1) na seguinte forma

$$ds^2 = -A^2(dx^0)^2 + B^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{3.4}$$

O campo de tetradas $e^a{}_\mu$ mapeia os diferenciais dx^μ do espaço-tempo físico nos diferenciais dq^a,

$$dq^a = e^a{}_\mu dx^\mu \tag{3.5}$$

q^a descrecem as coordenadas de um espaço-tempo de referência plano. Se pudermos integrar a Eq.(3.5) globalmente, tal transformação será chamada de holonômica, e ambos os sistemas de referências descrevem globalmente o espaço-tempo plano. Consequentemente o campo de tetradas é dado pelos vetores gradientes da forma

$$e^a{}_\mu = \frac{\partial q^a}{\partial x^\mu}. \tag{3.6}$$

Uma manifestação não trivial do campo gravitacional ocorre no caso de uma transformação não-holonômica entre as coordenadas diferenciais, no qual Eq.(3.5) não pode ser globalmente integrada e os tensores de torção são não nulos, $T^a{}_{\mu\nu} \neq 0$. Sabemos que o campo de tetradas [28] para um espaço-tempo plano, no qual o sistema de coordenadas Cartesiano satisfaz as propriedades

$$e_{(i)j} = e_{(j)i}, \tag{3.7}$$

$$e_{(i)}{}^{0} = 0, \tag{3.8}$$

estabelece um único espaço-tempo de referência, que não está relacionado ao espaço-tempo físico através de *boost* ou de uma rotação das coordenadas espaciais, o que faz com que sejam fixadas 6 grau de liberdade de $e^a{}_\mu$ e fazendo ainda com que $e^a{}_\mu = \delta^a_\mu$. O sistema de tetradas que satisfaz as Eqs.(3.7) e (3.8) está adaptado a observadores estáticos no espaço-tempo.

O campo de tétradas que satisfaz as Eqs.(3.7) e (3.8), e que conduz ao tensor métrico de Schwarzchild, é dado por

$$e^a{}_\mu(x^0, x, y, z) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Se agora aplicarmos ao espaço-tempo plano uma transformação de *boost*, da forma

$$\begin{aligned} q^{(0)} &= \gamma(x^0 - \beta x) \\ q^{(1)} &= \gamma(x - \beta x^0) \\ q^{(2)} &= y \\ q^{(3)} &= z, \end{aligned} \tag{3.10}$$

com $\gamma = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1}$, e $\beta = v/c$ obteremos aplicando a Eq. (3.6) à transformação acima e comprando os termos com a tetrada (3.9), ficamos com o novo campo de tetradas dado por

$$e^a{}_\mu(x^0, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

O lado direito da Eq. (3.11) pode ser visto como a transformação da forma

$$e^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b (e^b{}_\mu)_{flat} = \Lambda^a{}_b (\delta^b_\mu).$$

Assim se quisermos obter o campo de tetradas para um observador em movimento no espaço-tempo de Schwarzchild, que sofra um *boost* de Lorentz assintoticamente, basta que multipliquemos a Eq. (3.9) pela matriz $\Lambda^a{}_b$, e desta forma obtemos

$$e^a{}_\mu(x^0, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma A & -\beta\gamma B & 0 & 0 \\ -\beta\gamma A & \gamma B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

A matriz acima será de grande importância para os cálculos que se seguem, uma vez que os tensores de torção necessários para o cálculo dos Σ, são determinados a partir da $e^a{}_\mu$.

3.2 Energia Gravitacional Total

Já sabemos que a energia gravitacional total E, é determinada pela componente $a=(0)$ de P^a, Eq. (2.4). Desta forma usando a tetrada Eq.(3.12)

$$P^{(0)} = -\int_{V\to\infty} d^3x \Pi^{(0)j} = 4k \int_{V\to\infty} dS_j e e^{(0)}{}_0 \Sigma^{00j}, \tag{3.13}$$

onde $e = AB^3$ e $e^{(0)}{}_0 = \gamma A$. Usando a Eq. (2.2), temos

$$\Sigma^{00j} = \frac{-1}{A^2B^2}\partial_j B. \tag{3.14}$$

Podemos ainda escrever o integrando na seguinte forma

$$dS_j e e^{(0)} \Sigma^{00j} \cong \gamma m \frac{1}{r^3}(xdx + ydy + zdz) = \gamma m \sin\theta d\theta d\phi, \tag{3.15}$$

e agora aplicando o limite em que $\rho \to \infty$ (e fazendo $\rho \cong r$), ficamos com

$$P^{(0)} = \frac{E}{c} = \gamma M c. \tag{3.16}$$

Temos ainda que

$$P^{(1)} = -\int_{V\to\infty} d^3x \Pi^{(1)j} = 4k \int_{V\to\infty} dS_j e e^{(1)}{}_0 \Sigma^{00j}, \tag{3.17}$$

é a única componente não-nula do momento.

Fazendo contas análogas às anteriores, chegamos a

$$P^{(1)} = -\beta\gamma M c = \frac{-Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3.18}$$

Sendo

$$u^a = (\gamma A, -\beta\gamma A, 0, 0) \tag{3.19}$$

o quadri-vetor velocidade do sistema em movimento, de forma que $u^a u^b \eta_{ab} = -A^2$, temos que

$$P^a = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P} \right) = Mcu^a \tag{3.20}$$

é o quadri-vetor energia-momento para um sistema em movimento suficientemente longe do buraco negro. Podemos facilmente ver que a Eq.(3.20) é a mesma expressão para um quadri-vetor energia-momento de uma partícula inercial de massa M.

Capítulo 4

A Métrica C

4.1 Introdução

As duas soluções mais importantes das equações de Einstein no vácuo, são as slouções de Kerr e a de Schwarzchild.

Primeiramente obtida, a solução de Schwarzchild revelou uma superfície de deslocamento infinito para o vermelho e a existência de uma membrana, unidirecional, que recobre objetos com simetria esférica.

Já a solução de Kerr, generaliza os resultados de Schwarzchild, permitindo rotações uniformes, e revelou a existência de ergoesferas.

Uma terceira solução, tão importante quanto as duas primeiras, surge representando uma partícula uniformemente acelerada. Determinada por Levi-Civita [1] em 1918, a métrica C, permite o estudo da modificação das superfícies de Schwarzchild e segue como uma solução exata com aceleração retilínea uniforme.

A métrica C teve suas propriedades de radiação primeiramente estudadas por Kinnersley e Walker [3], enquanto que as propriedades matemáticas de seus horizontes, tensores de Killing e extensões analíticas foram investigadas por Godfrey[29].

Um dos horizontes é similar à superfície de Schwarzchild causads pela massa da partícula e distorcido pela aceleração, enquanto que o segundo horizonte é governado principalmente pela aceleração da partícula e é similar ao horizonte de Rindler que aparece em sistemas de coordenadas acelerados. Estas duas superfícies se formam de forma que a tipo Rindler contorna a tipo Schwarzchild, e é aberta na direção do movimento.

Uma outra propriedade da métrica C é que a superfície de Schwarzchild se deforma cada vez mais na direção do movimento à medida que aumentamos a aceleração, se expandindo na direção do movimento e se encolhendo na direção oposta.

4.2 Descrição Matemática da Métrica C

A forma mais comum da métrica C é dada por [7]:

$$ds^2 = \frac{-1}{A(\widetilde{x}+\widetilde{y})}\left[(\widetilde{F}dt^2 - \widetilde{F}^{-1}d\widetilde{y}^2) - (\widetilde{G}^{-1}d\widetilde{x}^2 + \widetilde{G}d\widetilde{z}^2)\right] \tag{4.1}$$

onde, $\widetilde{F}(\widetilde{y}) = -1+\widetilde{y}^2-2mA\widetilde{y}^3$, $\widetilde{G}(\widetilde{x}) = 1-\widetilde{x}^2-2mA\widetilde{x}^3$, e $\widetilde{G}(\widetilde{x}) = -\widetilde{F}(-\widetilde{x})$, onde $m \geq 0$ é a massa da fonte e $A \geq 0$ a aceleração.

Na forma da Eq.(4.1), o limite de Schwarzchild, $A = 0$ não é imediato.

Para tanto, introduzimos um novo sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{A}\left[t + \int^{\widetilde{y}} \widetilde{F}^{-1} d\widetilde{y}\right] \\ r &= \frac{1}{A(\widetilde{x}+\widetilde{y})} \\ \phi &= \widetilde{z}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde u é a coordenada retardada, r a radial e ϕ a azimutal. Estas coordenadas nos permitem escrever a métrica dada pela Eq.(4.1) na forma

$$ds^2 = -\widetilde{H} du^2 - 2dudr - 2Ar^2 dud\widetilde{x} + \frac{r^2}{\widetilde{G}} d\widetilde{x}^2 + r^2 \widetilde{G} d\phi^2, \tag{4.3}$$

onde,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(r,\widetilde{x}) &= 1 - \frac{2m}{r} - A^2 r^2 (1 - \widetilde{x}^2 - 2mA\widetilde{x}^3) - Ar(2\widetilde{x} + 6mA\widetilde{x}^2) \\ &+ 6mA\widetilde{x}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

A norma do hiperespaço-ortogonal dos vetores de Killing fica determinada pela relação

$$\kappa_\alpha \kappa^\alpha = -r^2 \widetilde{F} = -\frac{\widetilde{H}}{A^2}, \tag{4.5}$$

o que nos permite afirmar que para $\widetilde{H} > 0$ o vetor de Killing é do tipo tempo.

Exceto por uma mudança de assinatura, iremos adotar a notação usada na Ref.[7] para a descrição da métrica C. Por meio de uma tranformação de coordenadas,Eqs.(4.2) e (4.3), tal métrica na forma dada por Ehlers e Kundt [2], pode ser escrita nas coordenadas de Bondi (u, r, θ, ϕ), as quais podem ser entendidas como um sistema de coordenadas acelerado, em termos de duas funções, $G(\theta)$ e $H(\theta)$ [7],

$$G(\theta) = 1 - \cos^2\theta - 2mA\cos^3\theta, \tag{4.6}$$

e

$$H(r,\theta) = 1 - \frac{2m}{r} - A^2r^2(1-\cos^2\theta - 2mA\cos^3\theta) - Ar(2\cos\theta + 6mA\cos^2\theta) + 6mA\cos\theta.$$

Com isto escrevemos a métrica C na forma

$$ds^2 = -Hdu^2 - 2dudr + 2Ar^2\sin\theta du d\theta + \frac{r^2\sin^2\theta}{G}d\theta^2 + r^2Gd\phi^2. \tag{4.7}$$

Por fim ficamos com,

$$ds^2 = -Hdu^2 - 2dudr + 2Ar^2\sin\theta du d\theta + \frac{r^2}{g^2}d\theta^2 + r^2g^2\sin^2\theta d\phi^2, \tag{4.8}$$

onde $g(\theta)$ é definida através de $G(\theta) = g^2\sin^2\theta$.

Os parâmetros $m > 0$ e $A > 0$ representam, respectivamente, a massa e a aceleração do buraco negro. Não é difícil mostrar que $G > 0$ nos dá a relação $mA < 1/3\sqrt{3}$. O espaço-tempo representado pela métrica C possui dois horizontes, um de Schwarzchild e o outro de Rindler, que estão localizados em r_S e r_R, respectivamente. Vamos definir o comprimento de aceleração $L_A = 1/(3\sqrt{3}A)$ e as funções

$$U = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{m}{L_A}\right)$$
$$V = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{m}{L_A}\right).$$

Em termos destas quantidades, r_S e r_R são dadas por[8]

$$r_S = \frac{1}{A}\frac{\sqrt{3}V - U}{[1 + (3V - U)\cos\theta]}$$

$$r_R = \frac{1}{A}\frac{2U}{(1+2U\cos\theta)}.$$

No limite em que $mA << 1$ estas quantidades se reduzem à [9]

$$r_S \approx 2m(1+2Am\cos\theta)$$

$$r_R \approx \frac{1}{A}\frac{1}{[1-\cos\theta + Am\sin^2\theta]}.$$

Como já foi dito, a métrica C pode ser interpretada como uma superposição não-linear dos espaços-tempos de Schwarzchild e Rindler. Podemos verificar esta interpretação investigando os limites em que os parâmetros se anulam. Fazendo primeiramente, $A = 0$, o tensor métrico se reduz a

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \tag{4.9}$$

que é justamente o tensor métrico de Schwazrchild em termos do tempo retardado,

$$u = t - r - 2m\ln\left(\frac{r}{2m}-1\right). \tag{4.10}$$

De outro lado, se fizermos $m = 0$, teremos

$$\begin{aligned} ds^2 = & - 1(1-2Ar\cos\theta - A^2r^2\sin^2\theta)du^2 - 2dudr \\ & + 2Ar^2\sin\theta dud\theta r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

o qual pode ser transformado no tensor métrico de Minkowiski por meio da seguinte transformação de coordenadas[3]

$$\begin{aligned} \bar{t} &= (A^{-1} - r\cos\theta)\sinh Au + r\cosh Au \\ \bar{z} &= (A^{-1} - r\cos\theta)\cosh Au + r\sinh Au \\ \bar{x} &= r\sin\theta\cos\phi \qquad \bar{y} = r\sin\theta\sin\phi. \end{aligned} \tag{4.12}$$

A transformação (4.12) leva a Eq.(4.11) em

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2. \tag{4.13}$$

No espaço-tempo representado pelas coordenadas $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o ponto $r = 0$ determina a curva do tipo tempo dada por

$$\begin{aligned} \bar{t} &= A^{-1} \sinh Au \\ \bar{z} &= A^{-1} \cosh Au \\ \bar{y} &= \bar{x} = 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

o qual representa uma região da hipérbole $\bar{z}^2 - \bar{t}^2 = 1/A$ ao longo da qual temos o movimento com uma aceleração constante A, parametrizada em termos de u. A forma linearizada da métrica C é obtida de forma simples eliminando os termos em m^2, mA, A^2 e de ordem superior[7]. Fazendo a transformação de $(u, r, \theta, \phi) \to (T, X, Y, Z)$ de forma que

$$\begin{aligned} T &= u + r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \\ X &= r \sin\theta \cos\phi \\ Y &= r \sin\theta \sin\phi \\ Z &= r \cos\theta \end{aligned} \tag{4.15}$$

achamos que no limite linearizado a componente g_{00} do tensor métrico dado pela Eq.(4.8), fica na forma

$$\begin{aligned} -g_{00}(u, r, \theta, \phi) &= -g_{00}(T, X, Y, Z) \\ &\approx 1 - \frac{2m}{r} - 2Ar\cos\theta. \end{aligned} \tag{4.16}$$

A componente g_{00} nos permite identificar o potencial Newtoniano, Φ, de acordo com

$$-g_{00}(T, X, Y, Z) = 1 + 2\Phi, \tag{4.17}$$

o qual nos fornece

$$\Phi = -\frac{m}{r} - Ar\cos\theta = -\frac{m}{r} - AZ. \tag{4.18}$$

O potencial Φ determina a equação de movimento Newtoniana de uma partícula neste espaço-tempo,

$$\frac{d^2x^i}{dT^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i},$$

o que resulta em

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dT^2} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r} + A\mathbf{z}. \tag{4.19}$$

Temos portanto que no espaço-tempo linearizado representado pela métrica C, uma partícula pontual está sujeita à força central usual mais uma força constante e uniforme adicional, devida ao movimento acelerado da fonte, representada por m, ao longo da direção $\theta = \pi$.

4.3 Sistema de Coordenadas para a Métrica C

Ao estudarmos o sistema de coordenadas de uma métrica, precisamos ter em mente que enquanto algumas coordenadas são boas para o entendimento das propriedades geométricas do espaço, outras são melhores para se entender as propriedades físicas da fonte e do campo gravitacional [9].

O que passamos a fazer agora é justamente uma apresentação sobre os sistemas de coordenadas para a métrica C.

Temos que a forma mais comum da métrica C é dada pela Eq.(4.1).

A coordenada temporal varia de $-\infty$ à $+\infty$, enquanto que $0 \leq \widetilde{z} \leq \pi$. Já as coordenadas $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ variam de forma que a função $G(\widetilde{x})$ permaneça positiva, a fim de evitar qualquer variação na métrica.

Temos que para $A^2m^2 < 1/27$ existem dois horizontes, o de Rindler e o de Schwarzchild. Portanto iremos tratar a métrica dentro desse limite. Neste caso a função $G(\widetilde{x})$ possui três raizes reais

$$\widetilde{x}_\pi = -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\lambda}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+1\right] \tag{4.20}$$

$$\widetilde{x}_0 = -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\lambda}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+1\right] \tag{4.21}$$

$$\widetilde{x}_u = -\frac{1}{6Am}\left(2\cos\frac{\lambda}{3}+1\right), \tag{4.22}$$

com

$$\cos\lambda = 1 - 54A^2m^2. \tag{4.23}$$

De forma análoga, a função $F(\widetilde{y})$, também possui 3 soluções reais para $A^2m^2 < 1/27$

$$\widetilde{y}_s = -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\delta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-1\right] \tag{4.24}$$

$$\widetilde{y}_R = -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\delta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-1\right] \tag{4.25}$$

$$\widetilde{y}_u = -\frac{1}{6Am}\left(2\cos\frac{\delta}{3}-1\right), \tag{4.26}$$

onde

$$\cos\delta = -(1 - 54A^2m^2). \tag{4.27}$$

Temos que para cada intervalo no qual definimos $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ obtemos uma diferente solução para o vácuo. Para o nosso caso iremos trabalhar nos intervalos

$$\widetilde{y}_s \geq \widetilde{y} \geq \widetilde{y}_R \tag{4.28}$$

$$\widetilde{x}_\pi \geq \widetilde{x} \geq \widetilde{x}_0. \tag{4.29}$$

A métrica C na forma da Eq.(4.1) é de difícil tratamento. Afim de termos uma forma mais adequada para trabalharmos, vamos transformá-la em um sistema de coordenadas uniformemente acelerado e quasi-esférico. Para tanto, introduzimos as coordenadas

$$r = \frac{1}{A(\widetilde{x} + \widetilde{x})} \tag{4.30}$$

e

$$t = A\left[u + \int_{\widetilde{y}} \frac{d\widetilde{y}}{F(\widetilde{y})}\right]. \tag{4.31}$$

Desta forma podemos reescrever a Eq.(4.1) na forma

$$ds^2 = Hdu^2 + 2dudr + 2Ar^2dud\widetilde{x} - r^2(G^{-1}d\widetilde{y}^2 + Gdz^2), \tag{4.32}$$

com

$$H = 1 - \frac{2m}{r} + 6Am\widetilde{x} + ArG_{,\widetilde{x}} - A^2r^2G(\widetilde{x}). \tag{4.33}$$

onde $G_{,\widetilde{x}}$ representa a derivada ordinária de G em relação a $\widetilde{x}$.

Enquanto que a variável de tempo retardado u varia entre $-\infty$ e $+\infty$, a coordenada radial r fica restrita ao intervalo em que a função H permaneça positiva.

Como já sabemos a métrica C possui dois vetores de Killing ortogonais, sendo um deles do tipo tempo,

$$\xi^{\mu}{}_{(t)} = (1, 0, 0, 0) \tag{4.34}$$

e

$$\xi^{\mu}{}_{(z)} = (0, 0, 0, 1), \tag{4.35}$$

com suas normas determinadas por

$$\xi^{\mu}{}_{(t)}\xi_{(t)\mu} = H = A^2 r^2 F, \tag{4.36}$$

$$\xi^{\mu}{}_{(z)}\xi_{(z)\mu} = -r^2 G, \tag{4.37}$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3 = \mu, r, \widetilde{x}, z$.

Temos que $\xi^{\mu}{}_{(t)}$ é o vetor de Killing do tipo tempo. Este representa a simetria temporal e a estrutura estática da métrica. Por outro lado $\xi^{\mu}{}_{(z)}$, que é o vetor de Killing do tipo espaço, representa a simetria axial da solução.

Precisamos agora dar um significado para estas coordenadas e a fim de fazer isto, vemos que no limite $A \to 0$ na Eq.(4.1) o elemento de linha ds reduz ao elemento de linha da métrica de Schwarzchild escrita em termos das coordenadas nulas com

$$z = \varphi \tag{4.38}$$

e

$$G(\widetilde{x}, A = 0) = 1 - \widetilde{x}^2 = \sin^2\theta, \tag{4.39}$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Temos ainda que u é o tempo retardado e r a coordenada radial, variando de $2m$ à ∞. Neste limite, temos a norma do vetor de Killing do tipo espaço

$$\xi^{\mu}{}_{(z)}\xi_{(z)\mu} = -r^2 \sin^2\theta. \tag{4.40}$$

Para termos uma descrição completa do sistema de coordenadas da métrica C precisamos determinar a coordenada angular para o caso em que $A \neq 0$. A fim de fazermos isto, comparamos as Eqs.(4.37) e (4.40), o que permite escrever

$$G(\widetilde{x}) = \sin^2\theta = 1 - \widetilde{x}^2 - 2mA\widetilde{x}^3 \tag{4.41}$$

a qual possui 3 raizes reais para a nossa região de interesse, $A^2m^2 < 1/27$,

$$\widetilde{x}_a = -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right] \tag{4.42}$$

$$\widetilde{x}_b = -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + 1\right] \tag{4.43}$$

$$\widetilde{x}_c = -\frac{1}{6Am}\left(2\cos\frac{\Theta(\theta)}{3} + 1\right), \tag{4.44}$$

com

$$\cos\Theta(\theta) = 1 - 54A^2m^2\cos^2\theta. \tag{4.45}$$

Ao fazermos $\theta = 0, \pi$ na Eq.(4.42), ela fica na mesma forma de $\widetilde{x}_\pi$, enquanto que para $\theta = \pi/2$ nas Eqs. (4.43) e (4.44) estas são nulas. Já para o caso em que $\theta = 0, \pi$, a Eq.(4.43) assume a mesma forma de $\widetilde{x}_0$.

Segue-se, então que a solução completa para $\widetilde{x}$, em termo da variável θ é

$$\widetilde{x} = \begin{cases} -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + 1\right], & para\, 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -\frac{1}{6Am}\left[2\cos\left(\frac{\Theta(\theta)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right], & para\, \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \tag{4.46}$$

Podemos substituir as coordenadas nulas da Eq.(4.32) pelas coordenadas tipo Schwarzchild, para isso usando as Eqs.(4.30),(4.31) e (4.38), ao longo de

$$t \rightarrow At, \tag{4.47}$$

o que nos leva à

$$ds^2 = Hdt^2 - \frac{1}{H}dr^2 - \frac{2Ar^2}{H}drd\widetilde{x} - r^2\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)d\widetilde{x}^2 - r^2G(\widetilde{x})d\varphi^2, \quad (4.48)$$

com H dado pela Eq.(4.33).

Se aplicarmos o limite $A \to 0$, o elemento de linha na Eq.(4.48) vem a ser o elemento de linha da métrica de Schwarzchild com coordenadas esféricas (r, θ, φ) e o tempo retardado u.

Já para o limite em que $m \to 0$, o espaço se torna Euclideano, e ficamos com

$$\begin{aligned} ds^2 &= H_0dt^2 - \frac{1}{H_0}dr^2 - \frac{2Ar^2\sin\theta}{H_0}drd\theta - r^2\frac{1 + 2Ar\cos\theta}{H_0}d\theta^2 \\ &- r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde

$$H_0 = 1 + 2Ar\cos\theta - A^2r^2\sin^2\theta. \quad (4.50)$$

Esta é a forma do elemento de linha do espaço plano escrito em um sistema acelerado uniformemente. Se agora aplicarmos a transformação

$$\bar{t} = \frac{H_0^{1/2}}{A}\sinh At, \quad (4.51)$$

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{A}\left(H_0^{1/2}\cosh At - 1\right), \quad (4.52)$$

$$\bar{\rho} = r\sin\theta, \quad (4.53)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi, \quad (4.54)$$

com inversa dada por

$$t = \frac{1}{2A}\frac{1 + A(\bar{t} + \bar{\vartheta})}{1 - A(\bar{t} - \bar{\vartheta})}, \quad (4.55)$$

$$r^2 = \bar{\rho}^2 + \bar{z}^2, \tag{4.56}$$

$$\cot\theta = \bar{z}/\bar{\rho}, \tag{4.57}$$

$$\varphi = \bar{\varphi}, \tag{4.58}$$

onde

$$\bar{z} = \bar{\vartheta} - \frac{1}{2}A\bar{t}^2 + \frac{1}{2}A(\bar{\vartheta}^2 + \bar{\rho}^2), \tag{4.59}$$

o elemento de linha da Eq.(4.49), se reduz à

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - d\bar{\rho}^2 - d\bar{\vartheta}^2 - \bar{\rho}^2 d\bar{\varphi}^2. \tag{4.60}$$

Esta última métrica é justamente o elemento de linha do espaço plano em termos do sistema de coordenadas cilíndricas não aceleradas.

Por fim temos que a trajetória do tipo tempo no ponto em que $r = 0$ é

$$\left(\bar{\vartheta} + \frac{1}{A}\right)^2 - \bar{t}^2 = \frac{1}{A^2}. \tag{4.61}$$

A Eq.(4.61) representa um movimento acelerado ao longo do eixo $\bar{\vartheta}$ de um sistema de coordenadas cilíndrico.

Podemos concluir dessa análise sobre o sistema de coordenadas da métrica C que o elemento de linha da Eq.(4.48) representa uma partícula do tipo Schwarzchild acelerada uniformemente ao longo do semi-eixo positivo ϑ. Também temos que as coordenadas $(t, r, \widetilde{x}, \varphi)$ definidos pela Eq.(4.48), constituem um sistema de coordenadas rígido e fixado na partícula acelerada. Temos ainda que o centro da partícula se manifesta através de uma singularidade real na curvatura escalar em $r = 0$. Por fim, temos que o sistema de coordenadas acelerado $(t, r, \widetilde{x}, \varphi)$ é particularmente útil, uma vez que o elemento de linha dado pela Eq.(4.48) é estático e a coordenada r, a qual representa a coordenada radial, esta centrada no centro da partícula.

Capítulo 5

Fonte Gravitacional Acelerada

Neste capítulo iremos expor as contas feitas na realização deste trabalho.

Começaremos determinando o campo de tetradas para a métrica C e então calcularemos o campo de velocidades. Tendo feito isto nos concentraremos nos cálculos necessários para se determinar o vetor energia-momento.

5.1 Introdução

Como já foi falado, usaremos o formalismo teleparalelo equivalente da relatividade geral (TEGR) como pano de fundo para obter os resultados.

Começaremos determinando o campo de tétradas para a métrica C. Em seguida, calculamos os tensores de torção a partir do campo de tétradas. Então usamos as torções para calcular o tensor $\Sigma^{(0)01}$ para que possamos então calcular o vetor energia-momento.

5.2 O Campo de Tetradas para a Métrica C.

Vamos agora determinar os sistema de tetradas que iremos usar para calcularmos os tensores de torção. Temos a métrica C:

$$ds^2 = -Hdu^2 - 2dudr + 2Ar^2 \sin\theta du d\theta + \left(\frac{r^2}{g^2}\right) d\theta^2 + r^2 g^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (5.1)$$

Assim, podemos identificar:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -H & -1 & Ar^2\sin\theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ Ar^2\sin\theta & 0 & \left(\frac{r}{g}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2g^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

de forma que temos a inversa

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & H + A^2r^2g^2\sin^2\theta & Ag^2\sin\theta & 0 \\ 0 & Ag^2\sin\theta & \frac{g^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2g^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Montamos a seguinte tetrada:

$$e_{a\mu} = \begin{pmatrix} -H^{\frac{1}{2}} & -H^{\frac{1}{2}} & H^{\frac{1}{2}}Ar^2\sin\theta & 0 \\ 0 & H^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\phi & X\cos\theta\cos\phi + Y\sin\theta\cos\phi & -rg\sin\theta\sin\phi \\ 0 & H^{\frac{1}{2}}\sin\theta\sin\phi & X\cos\theta\sin\phi + Y\sin\theta\sin\phi & rg\sin\theta\cos\phi \\ 0 & H^{\frac{1}{2}}\cos\theta & -X\sin\theta + Y\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Sabemos que:

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} \quad (5.5)$$

com $\eta_{ab} = diag(-+++)$. Fazendo as contas podemos facilmente determinar X e Y, o que nos dá:

$$X^2 = \frac{r^2}{g^2} \tag{5.6}$$

$$Y = -H^{\frac{1}{2}} A r^2 \sin\theta \tag{5.7}$$

Com isso o campo de tetradas fica completamente definida. Vamos definir

$$B = H^{\frac{1}{2}} \tag{5.8}$$

$$C = B^{-1} = H^{-\frac{1}{2}} \tag{5.9}$$

$$D = H^{-\frac{1}{2}} A r^2 \sin\theta = C A r^2 \sin\theta \tag{5.10}$$

Assim podemos escrever a tétrada na forma:

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} B & C & -D & 0 \\ 0 & C\sin\theta\cos\phi & \frac{r}{g}\cos\theta\cos\phi - D\sin\theta\cos\phi & -rg\sin\theta\sin\phi \\ 0 & C\sin\theta\sin\phi & \frac{r}{g}\cos\theta\sin\phi - D\sin\theta\sin\phi & rg\sin\theta\cos\phi \\ 0 & C\cos\theta & -\frac{r}{g}\sin\theta - D\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Se aplicarmos um *boost* na direção positiva de z,

$$\Lambda^a{}_b = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

ficamos com

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma B & \gamma C - \gamma v C\cos\theta & -\gamma D + \gamma v\left(\frac{r}{g}\sin\theta + D\cos\theta\right) & 0 \\ 0 & C\sin\theta\cos\phi & \frac{r}{g}\cos\theta\cos\phi - D\sin\theta\cos\phi & -rg\sin\theta\sin\phi \\ 0 & C\sin\theta\sin\phi & \frac{r}{g}\cos\theta\sin\phi - D\sin\theta\sin\phi & rg\sin\theta\cos\phi \\ -\gamma B & -\gamma v C + \gamma C\cos\theta & \gamma v D - \gamma\left(\frac{r}{g}\sin\theta - D\cos\theta\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Conforme explicaremos adiante, este campo de tétradas descreve observadores que estão aproximadamente em repouso, se estes observadores se encontrarem afastados dos dois horizontes de evento.

Vamos começar com a expressão para $e\Sigma^{(0)01}$:

$$e\Sigma^{(0)01} = e[e^{(0)}{}_0\Sigma^{001} + e^{(0)}{}_1\Sigma^{101} + e^{(0)}{}_2\Sigma^{201} + e^{(0)}{}_3\Sigma^{301}] \tag{5.14}$$

Precisamos agora determinar os Σ^{abc} usando a forma geral:

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{ac}T^b - g^{ab}T^c\right) \tag{5.15}$$

Logo

$$\Sigma^{001} = \frac{1}{4}\left(T^{001} + T^{001} - T^{100}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{01}T^0 - g^{00}T^1\right)$$

$$\Sigma^{001} = \frac{1}{2}\left(T^{001} + g^{01}T^0\right) \tag{5.16}$$

$$\Sigma^{101} = \frac{1}{4}\left(T^{101} + T^{011} - T^{110}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{11}T^0 - g^{10}T^1\right)$$

$$\Sigma^{001} = \frac{1}{2}\left(T^{101} + g^{11}T^0 - g^{01}T^1\right) \tag{5.17}$$

$$\Sigma^{201} = \frac{1}{4}\left(T^{201} + T^{021} - T^{120}\right) + \frac{1}{2}\left(g^{21}T^0 - g^{20}T^1\right)$$

$$\Sigma^{201} = \frac{1}{4}\left(T^{201} - T^{012} + T^{102}\right) + \frac{1}{2}g^{21}T^0 \tag{5.18}$$

Precisamos agora determinar T^{001},T^{101},T^{201},T^{021},T^{102} em termos dos $T_{\lambda\mu\nu}$.

$$T^{001} = g^{01}T_1{}^{01} = g^{01}g^{01}T_{11}{}^1 = g^{01}g^{01}g^{10}T_{110} + g^{01}g^{01}g^{12}T_{112}$$

$$T^{001} = -g^{01}g^{01}g^{01}T_{110} + g^{01}g^{01}g^{12}T_{112} \tag{5.19}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned} T^{101} = & - g^{01}g^{01}g^{10}T_{001} + g^{01}g^{01}g^{12}T_{012} \\ & - g^{11}g^{01}g^{10}T_{101} + g^{11}g^{01}g^{12}T_{112} \\ & - g^{12}g^{01}g^{01}T_{201} + g^{12}g^{01}g^{12}T_{212} \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} T^{201} = & - g^{01}g^{01}g^{21}T_{101} + g^{21}g^{12}g^{01}T_{112} \\ & - g^{01}g^{01}g^{22}T_{201} + g^{01}g^{22}g^{12}T_{212} \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} T^{012} = & \quad g^{01}g^{01}g^{21}T_{101} + g^{01}g^{01}g^{22}T_{102} \\ & + g^{01}g^{11}g^{22}T_{112} - g^{01}g^{12}g^{21}T_{112} \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$T^{102} = g^{01}g^{01}g^{22}T_{012} + g^{01}g^{11}g^{22}T_{112} + g^{01}g^{12}g^{22}T_{212} \tag{5.23}$$

Vamos agora determinar os traços: T^i onde $i = \{0, 1\}$

$$T^0 = g^{0\mu}T_\mu = g^{0\mu}T^\lambda{}_{\lambda\mu} = g^{01}T^\lambda{}_{\lambda 1} = g^{01}\left(T^0{}_{01} + T^2{}_{21} + T^3{}_{31}\right)$$

Assim

$$T^0 = g^{01}g^{01}T_{101} - g^{01}g^{21}T_{112} - g^{01}g^{21}T_{212} - g^{01}g^{33}T_{313} \tag{5.24}$$

De forma análoga achamos

$$\begin{aligned} T^1 = & - g^{01}g^{01}T_{001} + g^{01}g^{12}T_{202} - g^{01}g^{22}T_{202} \\ & - g^{01}g^{33}T_{303} + \left(g^{11}g^{22} + g^{12}g^{12}\right) T_{212} \\ & + g^{01}g^{12}T_{012} - g^{11}g^{33}T_{313} + g^{12}g^{33}T_{323} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Agora vamos montar os Σ^{001}, Σ^{101}, Σ^{201}

Assim

$$\Sigma^{001} = -\frac{1}{2}\left(g^{01}g^{01}g^{22}T_{212} + g^{01}g^{01}g^{33}T_{313}\right) \tag{5.26}$$

$$\Sigma^{101} = -\frac{1}{2}\left(g^{01}g^{01}g^{22}T_{202} + g^{01}g^{01}g^{33}T_{303} + g^{01}g^{12}g^{33}T_{323}\right) \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{201} = \frac{1}{4}(& - g^{01}g^{01}g^{22}T_{201} - g^{01}g^{01}g^{22}T_{102} \\ & + g^{01}g^{01}g^{22}T_{012}) - \frac{1}{2}g^{01}g^{12}g^{33}T_{313} \end{aligned} \tag{5.28}$$

5.3 O Campo de Velocidades

Vamos agora determinar o campo de velocidades

$$e_{(0)}{}^{\mu} = g^{\mu\lambda}e_{(0)\lambda} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} e_{(0)}{}^{0} &= g^{0\lambda}e_{(0)\lambda} = g^{00}e_{(0)0} + g^{01}e_{(0)1} + g^{02}e_{(0)2} + g^{03}e_{(0)3} \\ &= -e_{(0)1} = \gamma C - \gamma v C \cos\theta \end{aligned} \tag{5.30}$$

De forma análoga calculamos $e_{(0)}{}^{1}$, $e_{(0)}{}^{2}$, $e_{(0)}{}^{3}$, o que resulta em

$$e_{(0)}{}^{\mu}(u, r, \theta, \phi) = \left(\gamma C(1 - v\cos\theta), \gamma v(B\cos\theta - Arg\sin\theta), -\gamma v\frac{g}{r}\sin\theta, 0\right) \tag{5.31}$$

Vamos agora considerar as aproximações $\frac{m}{r} << 1$ e $Ar << 1$. Estas aproximações garantem que um observaor localizado na posição r está suficientemente afastado dos horizontes de evento de Schwarzchild e Rindler. Nesta aproximação, o campo de velocidades $e_{(0)}{}^{\mu}(u,x,y,z)$ é simplificado, como veremos.

$$e_{(0)}{}^{\mu}(u,x,y,z) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} e_{(0)}{}^{\lambda}(u,r,\theta,\phi) \tag{5.32}$$

Assim

$$\begin{aligned}
e_{(0)}{}^{1}(u,x,y,z) &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} e_{(0)}{}^{\lambda}(u,r,\theta,\phi) \\
&= \frac{\partial x}{\partial r} e_{(0)}{}^{1} + \frac{\partial x}{\partial v} e_{(0)}{}^{2} \\
&= \sin\theta\cos\phi\gamma v B\cos\theta + r\cos\theta\cos\phi\left(-\gamma v\frac{1}{r}\sin\theta\right) \\
&= (B-1)\,\gamma v\sin\theta\cos\phi\cos\theta
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
e_{(0)}{}^{2}(u,x,y,z) &= \frac{\partial y}{\partial r}\gamma v B\cos\theta + \frac{\partial y}{\partial \theta}\left(-\gamma v\frac{1}{r}\sin\theta\right) \\
&= \sin\theta\cos\phi\gamma v B\cos\theta - r\cos\theta\cos\phi\gamma v\frac{1}{r}\sin\theta \\
&= (B-1)v\gamma\sin\theta\cos\theta\cos\phi
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
e_{(0)}{}^{3}(u,x,y,z) &= \frac{\partial z}{\partial r} vB\gamma\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta}\left(-v\gamma\frac{1}{r}\sin\theta\right) \\
&= vB\gamma\cos^{2}\theta + (-r\sin\theta)\left(-v\gamma\frac{1}{r}\sin\theta\right) \\
&= vB\gamma\cos^{2}\theta + v\gamma\sin^{2}\theta
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Temos ainda que nos limites tomados acima: $B \simeq 1$, logo

$$e_{(0)}{}^{k}(x,y,z) = (0,0,v\gamma) \tag{5.36}$$

Para ${e_{(0)}}^0(t)$, temos a transformação

$$\begin{cases} t = u + r' \\ x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{5.37}$$

Assim

$$\begin{aligned} {e_{(0)}}^0(t) &= \frac{\partial t}{\partial u}{e_{(0)}}^0(u) + \frac{\partial t}{\partial x}{e_{(0)}}^1(u) + \frac{\partial t}{\partial y}{e_{(0)}}^2(u) + \frac{\partial t}{\partial z}{e_{(0)}}^3(u) \\ &= {e_{(0)}}^0(u) + \frac{\partial r}{\partial z}{e_{(0)}}^3(u) \\ &= \gamma(1 - v\cos\theta) + \frac{z}{r}\gamma v \\ &= \gamma \end{aligned} \tag{5.38}$$

Logo ficamos com o campo de velocidades

$${e_{(0)}}^\mu(t, x, y, z) \simeq (\gamma, 0, 0, v\gamma)\,. \tag{5.39}$$

Uma vez que a métrica C representada pela Eq.(5.1) está adaptada a observadores acelerados ao longo do eixo-z, o campo de velocidadesEq.(5.39) descreve observadores proximadamente em repouso no espaço-tempo da Eq.(5.1) (aproximadamente porque $\frac{m}{r} << 1$ e $Ar << 1$).

5.4 Torções $T_{(a)\mu\nu}$

Temos que as torções são dadas por

$$T_{(a)\mu\nu} = \partial_\mu e_{(a)\nu} - \partial_\nu e_{(a)\mu}. \tag{5.40}$$

Da Eq.(5.40) tiramos facilmente as simetrias

$$\begin{cases} T_{(a)\mu\nu} = -T_{(a)\nu\mu}, \\ T_{(a)\mu\mu} = 0. \end{cases} \tag{5.41}$$

Vamos relacionar apenas os não nulos.

$$\begin{aligned} T_{(0)01} &= \partial_0 e_{(0)1} - \partial_1 e_{(0)0} \\ &= \partial_0 \left(-\gamma C + \gamma v C \cos\theta\right) - \partial_1(-B\gamma) \\ &= -C\dot{\gamma} + C(\dot{v\gamma}) + \gamma(\partial_r B) \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$T_{(3)01} = -(\dot{v\gamma})C + \dot{\gamma}C\cos\theta + \gamma v(\partial_r B) \tag{5.43}$$

$$T_{(0)02} = \dot{\gamma}D - (\dot{v\gamma})\left(\frac{r}{g}\sin\theta + D\cos\theta\right) + \gamma(\partial_\theta B) \tag{5.44}$$

$$T_{(3)02} = (\dot{v\gamma})D - \dot{\gamma}\left(\frac{r}{g}\sin\theta + D\cos\theta\right) + \gamma v(\partial_\theta B) \tag{5.45}$$

$$T_{(0)12} = -\gamma(\partial_r D) + \gamma\frac{v}{g}\sin\theta + \gamma v(\partial_r D)\cos\theta - \gamma(\partial_\theta C) + \gamma v[\partial_\theta(C\cos\theta)] \tag{5.46}$$

$$T_{(1)12} = \left(\frac{1}{g} - C\right)\cos\theta\cos\phi - (\partial_r D + \partial_\theta C)\sin\theta\cos\phi \tag{5.47}$$

$$T_{(2)12} = \left(\frac{1}{g} - C\right)\cos\theta\sin\phi - (\partial_r D + \partial_\theta C)\sin\theta\sin\phi \tag{5.48}$$

$$T_{(3)12} = (\gamma v - \gamma\cos\theta)(\partial_r D) + (\gamma v + \gamma\cos\theta)(\partial_\theta C) - \left(\frac{r}{g} - \gamma C\right)\sin\theta \tag{5.49}$$

$$T_{(1)13} = (C - g)\sin\theta\sin\phi \tag{5.50}$$

$$T_{(2)13} = (g - C)\sin\theta\cos\phi \tag{5.51}$$

$$T_{(1)23} = \left(\frac{1}{g} - g\right) r\cos\theta\sin\phi + [D + r(\partial_\theta g)]\sin\theta\sin\phi \tag{5.52}$$

$$T_{(2)23} = [r(\partial_\theta g) - D]\sin\theta\cos\phi + \left(g - \frac{1}{g}\right) r\cos\theta\cos\phi \tag{5.53}$$

Vamos agora montar os tensores de torção

$$T_{\lambda\mu\nu} = e^{(a)}{}_{\lambda} T_{(a)\mu\nu} \tag{5.54}$$

Assim:

$$\begin{aligned} T_{212} &= e^{(a)}{}_{2} T_{(a)12} \\ &= e^{(0)}{}_{2} T_{(0)12} + e^{(1)}{}_{2} T_{(1)12} + e^{(2)}{}_{2} T_{(2)12} + e^{(3)}{}_{2} T_{(3)12} \\ &= \frac{r}{g}\left(\frac{1}{g} - C\right), \end{aligned} \tag{5.55}$$

e

$$T_{313} = rg\,(g - C)\sin^2\theta. \tag{5.56}$$

Desta forma, substituindo, a Eq.(5.55) e a Eq.(5.56) na Eq.(5.26) ficamos com o Σ^{001} na forma:

$$\begin{aligned} \Sigma^{001} &= -\frac{1}{2}\left[\frac{g^2}{r^2}\frac{r}{g}\left(\frac{1}{g} - C\right) + \frac{1}{r^2 g^2 \sin^2\theta} rg\,(g - C)\sin^2\theta\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{g}{r}\left(\frac{1}{g} - C\right) + \frac{1}{rg}(g - C)\right] \\ &= -\frac{1}{2r}\left[2 - \left(g + \frac{1}{g}\right)C\right]. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Para o Σ^{101} precisamos dos T_{202}, T_{303} e T_{323}. Desta forma

$$T_{202} = e^{(a)}{}_{2} T_{(a)02} = D\partial_\theta B, \tag{5.58}$$

$$T_{303} = e^{(a)}{}_{3} T_{(a)03} = 0, \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned} T_{323} &= e^{(a)}{}_{3} T_{(a)23} \\ &= -\left(1 - g^2\right) r^2 \sin\theta\cos\theta - rg\,(D - r\partial_\theta g)\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Substituindo, Eq.(5.58), Eq.(5.59) e a Eq.(5.60) na Eq.(5.27) ficamos com o Σ^{101} na forma

$$\Sigma^{101} = \frac{1}{2}\left[\frac{g^2}{r^2}D\partial_\theta B + \left(1-g^2\right)A\cos\theta + A\frac{g}{r}\left(D - r\partial_\theta g\right)\sin\theta\right] \quad (5.61)$$

E por último, para o Σ^{201}, temos

$$T_{201} = e_2^{(a)}T_{(a)01} = -D\partial_r B + \gamma^2\dot{v}\frac{r}{g}C\sin\theta \quad (5.62)$$

$$T_{102} = e_1^{(a)}T_{(a)02} = C\partial_\theta B - \gamma^2\dot{v}C\frac{r}{g}\sin\theta \quad (5.63)$$

$$T_{012} = e_0^{(a)}T_{(a)12} = B\left(\partial_r D + \partial_\theta C\right) \quad (5.64)$$

Substituindo em Eq.(5.28), ficamos com

$$\Sigma^{201} = \frac{1}{2}\frac{g^2}{r^2}B\partial_\theta C \quad + \quad \frac{1}{4}\frac{g^2}{r^2}\partial_r(BD) + \frac{1}{2}\frac{g}{r}A\sin\theta\left(g - C\right) \quad (5.65)$$

Vamos agora determinar os termos que faltam ser completamente abertos

$$\begin{aligned} D\partial_\theta B &= CAr^2\sin\theta\partial_\theta B \\ &= Ar^2\sin\theta H^{-1/2}\partial_\theta H^{1/2} \\ &= Ar^2\sin\theta H^{-1/2}\frac{1}{2}\partial_\theta H^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Logo,

$$\begin{aligned} D\partial_\theta B = Ar^2\sin\theta\frac{1}{H}[&- A^2r^2\sin\theta\cos\theta\left(1 + 3mA\cos\theta\right) \\ &+ (Ar - 3mA)\sin\theta], \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} B\partial_\theta C &= H^{1/2}\partial_\theta H^{-1/2} \\ &= H^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)H^{-3/2}\partial_\theta H. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Assim

$$B\partial_\theta C = -\frac{1}{H}[-A^2r^2\sin\theta\cos\theta\,(1+3mA\cos\theta)+(Ar-3mA)\sin\theta], \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned} B\partial_r C &= H^{1/2}\partial_\theta H^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2H}\partial_r H. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Temos ainda

$$B\partial_r C = -\frac{1}{H}\left[\frac{m}{r^2} - A^2r^2\sin^2\theta\,(1+3mA\cos\theta)+(Ar-3mA)\sin\theta\right], \tag{5.71}$$

e por último:

$$B\partial_r D = Ar^2\sin\theta(B\partial_r C)+2Ar\sin\theta. \tag{5.72}$$

Desta forma, se substituirmos Eq.(5.57), Eq.(5.61) e a Eq.(5.65) na Eq.(5.14), usando os resultados da Eq.(5.67) à Eq.(5.72), ficamos com:

$$\begin{aligned} e\Sigma^{(0)01} &= \gamma B\sin\theta\Big\{-\frac{r}{2}\Big[2-\Big(g+\frac{1}{g}\Big)C\Big]\Big\} \\ &+(\gamma C-\gamma v\,C\cos\theta)\sin\theta\Big[\frac{1}{2}\,g^2 D\partial_\theta B \\ &+\frac{1}{2}(1-g^2)Ar^2\cos\theta+\frac{1}{2}Ar\,g(D-r\partial_\theta g)\sin\theta\Big] \\ &+(-\gamma D+\gamma v\,\frac{r}{g}\,\sin\theta+\gamma vD\cos\theta)\sin\theta\Big[\frac{1}{2}g^2\,B\partial_\theta C \\ &+\frac{1}{4}g^2\partial_r(BD)+\frac{1}{2}Ar\,g(g-C)\sin\theta\Big]. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Como não podemos integrar a Eq.(5.73) no limite assintótico devido ao horizonte de eventos de Rindler, precisamos fazer algumas aproximações.

Vamos considerar que estamos muito afastados do centro do buraco negro e do horizonte de eventos de Rindler. E além disso, a uma aceleração pequena, i.e.,

$$1 >> \frac{2m}{r} >> Ar \tag{5.74}$$

Com isso, podemos tirar:

1. $\frac{m}{r} << 1$

2. $Ar << 1$

Vamos dividir a análise em duas partes. Primeiramente iremos fazer $v = 0$, desta forma temos $\gamma = 1$, o que reduz a Eq.(5.73) à:

$$\begin{aligned} e\Sigma^{(0)01} &= \gamma B \sin\theta \Big\{ -\frac{r}{2}\Big[2 - \Big(g + \frac{1}{g}\Big)C\Big]\Big\} \\ &\quad + (\gamma C - \gamma v\, C\cos\theta)\sin\theta\Big[\frac{1}{2}\, g^2 D\partial_\theta B \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-g^2)Ar^2\cos\theta + \frac{1}{2}Ar\, g(D - r\partial_\theta g)\sin\theta\Big] \\ &\quad + (-\gamma D + \gamma v\,\frac{r}{g}\,\sin\theta + \gamma v D\cos\theta)\sin\theta\Big[\frac{1}{2}g^2\, B\partial_\theta C \\ &\quad + \frac{1}{4}g^2\partial_r(BD) + \frac{1}{2}Ar\, g(g - C)\sin\theta\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Usando a Eq.(5.10), ficamos com:

$$
\begin{aligned}
e\Sigma^{(0)01} &= -\frac{r}{2}\sin\theta\left[2B-\left(g+\frac{1}{g}\right)\right] \\
&+ r\sin^2\theta g^2C^2(Ar)(\partial_\theta B)+r\sin^3\theta gC^2(Ar)^2-r\sin^3\theta g^2C^2(Ar)^2 \\
&+ \frac{1}{2}\left[(1-g^2)CAr^2\sin\theta\cos\theta-CAr^2\sin^2\theta(g\partial_\theta g)\right] \qquad (5.76)
\end{aligned}
$$

Precisamos agora calcular explicitamente o $\partial_\theta B$

$$
\begin{aligned}
\partial_\theta B &= \partial_\theta H^{1/2}=\frac{1}{2}H^{-1/2}\partial_\theta H \qquad (5.77)\\
&= \frac{1}{2}C\partial_\theta H.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
H\simeq 1-\frac{2m}{r}-A^2r^2\sin^2\theta-2Ar\cos\theta, \qquad (5.78)
$$

de forma que

$$
\partial_\theta H\simeq -2(Ar)^2\sin\theta\cos\theta+2Ar\sin\theta, \qquad (5.79)
$$

ficando com

$$
\partial_\theta B=-C(Ar)^2\sin\theta\cos\theta+CAr\sin\theta. \qquad (5.80)
$$

$$
\begin{aligned}
B\simeq 1 &- \frac{m}{r}-\left(Ar\frac{1}{2}mA\right)\cos\theta \qquad (5.81)\\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{m}{r}\right)^2-\frac{1}{2}(Ar)^2\sin^2\theta-\frac{1}{8}(Ar)^2\cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

Sabemos que

$$
\Pi^{(0)1}=-\frac{1}{4\pi}e\Sigma^{(0)01} \qquad (5.82)
$$

e que

$$
P^{(0)}=-\oint_S dS_1\Pi^{(0)1}. \qquad (5.83)
$$

Com isso

$$P^{(0)} = m + \frac{m^2}{r} + \frac{25}{24} r (Ar)^2. \tag{5.84}$$

Vamos agora considerar as aproximações o caso em que $v \neq 0$. Tomando ϵ um parâmetro pequeno, temos

$$\begin{aligned} \frac{m}{r} &= O(\epsilon) \\ Ar &= O(\epsilon) \\ mA &= O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{5.85}$$

Com isso podemos reescrver a Eq.(5.76) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} e\Sigma^{(0)01} = & - \gamma B \sin\theta r (1 - C) \\ & + (\gamma C - \gamma v C \cos\theta) \sin\theta \left[\frac{1}{2} D \partial_\theta B + \frac{1}{2} Ar D \sin\theta \right] \\ & + (-\gamma D + \gamma v r \sin\theta + \gamma v D \cos\theta) \sin\theta \times \\ & \times \left[\frac{1}{2} B \partial_\theta C + \frac{1}{4} \partial_r (BD) + \frac{1}{2} Ar \sin\theta - \frac{1}{2} Ar C \sin\theta \right]. \end{aligned} \tag{5.86}$$

Abrindo e organizando os termos, e considerando até ordem $O(\epsilon^2)$, a Eq.(5.86) fica na seguinte forma

$$\begin{aligned} e\Sigma^{(0)01} = & - \gamma r \sin\theta (B - 1) + \gamma r \sin^3\theta (Ar)^2 \\ & - \gamma v r \sin^3\theta \cos\theta (Ar)^2 + \frac{1}{2} \gamma v r (Ar) \sin^3\theta \\ & + \frac{1}{2} \gamma v r \sin^2\theta C \partial_\theta B + \gamma v r (Ar)(1 - C) \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Se aplicarmos as mesmas aproximações até a ordem $O(\epsilon^2)$ na Eq.(5.81), ficamos com

$$\begin{aligned} B - 1 \simeq & - \frac{m}{r} - (Ar + \frac{1}{2} mA) \cos\theta - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} (Ar)^2 \sin^2\theta \\ & - \frac{1}{8} (Ar)^2 \cos^2\theta. \end{aligned} \tag{5.88}$$

E fazendo o mesmo para C temos

$$
\begin{aligned}
1 - C \simeq & - \frac{m}{r} - \left(Ar + \frac{1}{2}mA\right)\cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}(Ar)^2\sin^2\theta \\
& - \frac{1}{8}(Ar)^2\cos^2\theta.
\end{aligned} \tag{5.89}
$$

Com isso podemos escrever facilmente que

$$
C\partial_\theta B \simeq Ar\sin\theta + mA\sin\theta + (Ar)^2\sin\theta\cos\theta + O(\epsilon^3). \tag{5.90}
$$

Substituíndo essas equações na Eq.(5.86) e considerando os termos apenas de primeira ordem, ficamos com

$$
e\Sigma^{(0)01} \simeq \gamma m\sin\theta + \gamma(Ar)\sin\theta\cos\theta + O(\epsilon^2) \tag{5.91}
$$

Ao substituirmos a Eq.(5.91) na Eq.(5.82), temos

$$
\Pi^{(0)1} = -\frac{1}{4\pi}\left(\gamma m\sin\theta + \gamma(Ar)\sin\theta\cos\theta + O(\epsilon^2)\right). \tag{5.92}
$$

Temos que ao integrarmos a Eq.(5.92) no intervalo de 0 à π, o segundo termo irá ser nulo.

Vamos agora substituir a Eq.(5.92) em

$$
P^{(0)} = -\oint_S dS_1\Pi^{(0)1}. \tag{5.93}
$$

Assim, temos a espressão para a energia gavitacional total calculada com respeito a observadores com quadrivetor velocidade dado por Eq.(5.31)

$$
\begin{aligned}
P^{(0)} &= \int_{r=constante} d\theta d\phi\frac{1}{4\pi}\left[\gamma m\sin\theta + \gamma(Ar)\sin\theta\cos\theta\right] \\
&= \gamma m + \frac{1}{4}\gamma Ar2\pi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{5.94}
$$

Logo

$$P^{(0)} = \gamma m. \tag{5.95}$$

Para determinarmos o fluxo de radiação gravitacional total temos, pela Eq.(2.8)

$$\Phi^{(0)} = \dot{P}^{(0)} = \dot{\gamma} m. \tag{5.96}$$

Mas, podemos facilmente mostrar que

$$\dot{\gamma} = v\dot{v}\gamma^3$$

e que como

$$\dot{v}\gamma^3 = A,$$

podemos reescrever a Eq.(5.96) na forma

$$\Phi^{(0)} = (mA)v. \tag{5.97}$$

No seu artigo [9] Farhoosh e Zimmerman concluem que a perda de massa por um corpo acelerado, para a menor ordem na aceleração, é proporcional à $(Am)^2$, enquanto que nos nossos resultados é linear em Am, Eqs.(5.97),(5.96). Isto se deve ao fato de que Farhoosh e Zimmerman tratarem a métrica C na forma Bondi-Metzner-Sachs [23] e tomarem a derivada temporal do aspecto massivo, o que leva a menos o quadrado de novas funções. Nesta forma tratada por eles a métrica C não apresenta as condições de contorno assintóticas da solução radiativa de Bondi, e por isso este tratamento funciona apenas em certas aproximações, uma vez que no espaço-tempo de Bondi não existe o horizonte de Rindler para grandes distâncias radiais. Notamos, contudo, que trabalhamos com um sistema de coordenadas melhor que o deles.

Capítulo 6

Conclusões

Apresentamos primeiramente uma breve discussão sobre o formalismo do Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral, uma vez que utilizamos tal formalismo para a realização da dissertação aqui apresentada.

Uma vez feito isto, passamos a uma descrição do sistema onde um observador se encontra acelerado em relação a uma fonte gravitacional. Tal sistema é representado pela métrica de Scwarzchild. Foi mostrado que apartir da TEGR pode-se determinar a expressão para o fluxo energia-momento [27].

Passamos então a uma descrição da métrica C, pois esta representa o nosso caso de interesse, o de uma fonte gravitacional acelerada em relação a um observador estático. Aqui apresentamos uma descrição do seu sistema de coordenadas, onde vimos que a métrica C possui duas hipersuperfícies ortogonais de Killing, sendo uma do tipo tempo, Eqs.(4.34,4.35). Vimos também que o elemento de linha da Eq.(4.48) representa uma partícula tipo

Schwarzchild acelerada uniformemente ao longo de um semi-eixo positivo ϑ.

Mostramos que fazendo uma boa escolha de coordenadas para a métrica C, podemos calcular a perda de massa para um corpo acelerado, para a menor ordem na aceleração, é proporcional à (Am) e não à $(Am)^2$ como mostrado pelo Farhoosh e Zimmerman [9].

Os resultados aqui obtidos, vêm mais uma vez mostrar que o Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral é consistente para a análise das propriedades da energia e do momento gravitacional.

Referências Bibliográficas

[1] T. Levi-Civita, Rend. Accad. Naz. Lincei **27**, 343 (1918).

[2] J. Ehlers and W. Kundt, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (Wiley, New York, 1962).

[3] W. Kinnersley and M. Walker, Phys. Rev. D **2**, 1359 (1970).

[4] H. Farhoosh and R. L. Zimmerman, J. Math. Phys. **20**, 2272 (1979).

[5] H. Farhoosh and R. L. Zimmerman, Phys. Rev. D **21**, 317 (1980).

[6] W. B. Bonnor, Gen. Rel. Grav. **15**, 535 (1983).

[7] D. Bini, C. Cherubini and B. Mashhoon, Phys. Rev. D **70**, 044020 (2004); *Inertial effects of an accelerating black hole*, AIP Conference Proc. 751 (2005) 37-45 [gr-qc/0410098].

[8] D. Bini, C. Cherubini, S. Filippi and A. Geralico, Class. Quantum Grav. **22**, 5157 (2005).

[9] H. Farhoosh and R. L. Zimmerman, Phys. Rev. D **21**, 317 (1980).

[10] C. Møller, *Tetrad Fields and Conservation Laws in General Relativity*, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", edited by C. Møller (Academic Press, London, 1962); *Conservation Laws in the Tetrad Theory of Gravitation*, Proceedings of the Conference on Theory of Gravitation, Warszawa and Jablonna 1962 (Gauthier-Villars, Paris, and PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1964) (NORDITA Publications No. 136).

[11] K. Hayashi, Phys. Lett. **69B**, 441 (1977); K. Hayashi and T. Shirafuji. Phys. Rev. D **19**, 3524 (1979); Phys. Rev. D **24**, 3312 (1981).

[12] F. W. Hehl, in *Proceedings of the 6th School of Cosmology and Gravitation on Spin, Torsion, Rotation and Supergravity*, Erice, 1979, edited by P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York, 1980); F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[13] J. M. Nester, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 1755 (1989); J. Math. Phys. **33**, 910 (1992).

[14] J. W. Maluf, J. Math. Phys. **35**. 335 (1994).

[15] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **56**, 4689 (1997).

[16] Y. Obukhov and J. G. Pereira, Phys. Rev. D **67**, 044016 (2003).

[17] J. W. Maluf and J. F. da Rocha-Neto, Phys. Rev. D **64**, 084014 (2001).

[18] J. W. Maluf, F. F. Faria and K. H. Castello-Branco, Class. Quantum Grav. **20**, 4683 (2003).

[19] J. W. Maluf and F. F. Faria, Ann. Phys. (Leipzig) **13**, 604 (2004).

[20] J. W. Maluf, Ann. Phys. (Leipzig) **14**, 723 (2005).

[21] F. H. Hehl, J. Lemke and E. W. Mielke, *Two Lectures on Fermions and Gravity*, in *Geometry and Theoretical Physics*, edited by J. Debrus and A. C. Hirshfeld (Springer, Berlin Heidelberg, 1991).

[22] A. Tomimatsu, Phys. Rev. D **57**, 2613 (1998).

[23] H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner, Proc. R. Soc. London **A269**, 21 (1962).

[24] J. D. Anderson *et. al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2858 (1998); J. D. Anderson *et. al.*, Phys. Rev. D **65**, 082004 (2002).

[25] M. M. Nieto and J. D. Anderson, Class. Quantum Grav. **22**, 5343 (2005).

[26] B. Mashhoon, *On the relativity of rotation*, in *Directions of General Relativity*, edited by B. L. Hu and T. Jacobson (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).

[27] J. W. Maluf, Gravitation and Cosmology **11**, 284 (2005) [gr-qc/0412055]

[28] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toríbio andK. H. Castello-Branco, Phys. Rev. D **65**, 124001 (2002)

[29] B. B. Godfrey, Gen. Relativ. Gravit. **3**, 3 (1972)