Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Aplicação de Gauss de Superfícies Completas de Curvatura Média Constante em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$

por

Karise Gonçalves Oliveira

Brasília
2007

Resumo

Apresentamos demonstrações dos seguintes teoremas, que são encontrados em Hoffman, Osserman e Schoen [11].

Seja S uma superfície completa de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$, tal que a sua imagem pela aplicação de Gauss está contida em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto ou um plano.

Seja S uma superfície completa em $\mathbb{R}^4$, com vetor curvatura média paralelo e não nulo, tal que a sua imagem por qualquer projeção da aplicação de Gauss generalizada está contida em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou um produto de círculos.

Palavras-chave: Aplicação de Gauss generalizada, quádrica complexa $\mathbb{Q}_2$, superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Abstract

We proof the theorems below, that are found in Hoffman, Osserman and Schoen [11].

Let S be a complete surface of constant mean curvature in $\mathbb{R}^3$, such that the image under its Gauss map lies in a closed hemisphere, then S will be a right circular cylinder or a plane.

Let S be a complete surface in $\mathbb{R}^4$, whose mean curvature vector is parallel and non-zero, such that its image under any projection of the generalized Gauss map lies in a closed hemisphere, then S is a right circular cylinder in some $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, or a product of circles.

Keywords: Generalized Gauss map, complex quadric $\mathbb{Q}_2$, surfaces of constant mean curvature in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$.

Introdução

A aplicação de Gauss clássica foi introduzida por Gauss em seu artigo fundamental sobre a teoria de superfícies, [6]. O presente trabalho abrange questões relacionadas com a aplicação de Gauss clássica e a aplicação de Gauss generalizada dada pelo artigo de Hoffman e Osserman [10], tendo como objetivo a demonstração dos seguintes teoremas.

Teorema 4.0.2 *Seja S uma superfície completa orientada de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. Se a imagem de S pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério aberto então S é um plano. Se a imagem pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério fechado então S é um plano ou um cilindro circular reto.*

Teorema 4.0.3 *Seja S uma superfície completa orientada em $\mathbb{R}^4$, cujo vetor curvatura média é paralelo e não nulo. Suponha que o Grassmanniano de 2-planos orientados em $\mathbb{R}^4$ é representado como um produto de esferas $S_1 \times S_2$. Então a imagem de S pela aplicação de Gauss generalizada é tal que nenhuma das projeções em S_1 ou S_2 situa-se em um hemisfério aberto. Se quaisquer das projeções situam-se em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou um produto de círculos.*

Nos teoremas acima, o elo fundamental entre Geometria e Análise é o seguinte: as hipóteses sobre a curvatura média implicam que a aplicação de Gauss é harmônica. Tal fato, combinado com as hipóteses sobre a imagem da aplicação de Gauss e a análise do tipo conforme de S, nos permite exibir uma demonstração dos teoremas a partir de resultados clássicos sobre funções subharmônicas e da não existência de soluções de uma certa equação diferencial parcial encontrada no artigo de Fischer-Colbrie e Schoen [5].

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 fazemos referência a alguns fatos clássicos que serão utilizados freqüentemente em todo o texto, tais como Grassmanniano de k-planos orientados em $\mathbb{R}^n$, o qual denotaremos por $G_{k,n}$, e aplicação de Gauss generalizada, bem como uma rápida análise relacionando o espaço imagem, $G_{2,3}$, de tal aplicação com uma quádrica complexa conveniente.

No Capítulo 2, usando a equivalência obtida entre $G_{2,3}$ e a quádrica complexa, que agora indicaremos por Q_1, passamos a trabalhar com $G_{2,4}$ e exploramos algumas propriedades geométricas desta quádrica, mostrando que ela pode ser identificada com $S_1 \times S_2$ onde cada S_k é uma esfera padrão em $\mathbb{R}^3$ de raio $1/\sqrt{2}$.

No Capítulo 3, são feitas observações gerais sobre a aplicação de Gauss de superfícies imersas em $\mathbb{R}^n$. Em particular, obtemos expressões importantes para o caso $n = 4$, que são fundamentais para a demonstração do Teorema 4.0.3.

Por fim, no Capítulo 4, usando resultados de Hoffman e Osserman [8], Fischer-Colbrie e Schoen [5], e Hoffman [12] demonstramos os Teoremas 4.0.2 e 4.0.3.

Referências Bibliográficas

[1] Ahlfors, L. V. e Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton, New Jersey, 1960.

[2] Chen, B. Y., *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[3] do Carmo, M. P., *Geometria diferencial de curvas e superfícies,* SBM, 2005.

[4] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana, Projeto Euclides,* Rio de Janeiro, 1988.

[5] Fischer-Colbrie, D. e Schoen, R., *The Structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Applied Math. 33 (1980), 199-211.

[6] Gauss, K. F., *Disquisitiones generales cerca superficies curvas*, Comm. Soc. Göttinger Bd 6, 1823-1827.

[7] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, - Reprint of the 1998 ed. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Singapore; Tokyo, Springer, 2001.

[8] Hoffman, D. A. e Osserman, R., *The Gauss map of surfaces in* $\mathbb{R}^n$, J. Diff. Geometry, 18 (1983), 733-754.

[9] Hoffman, D. A. e Osserman, R., *The Gauss map of surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$, Proc. London Math. Soc. (3), 50 (1985), 27-56.

[10] Hoffman, D. A. e Osserman, R., *The geometry of the generalized Gauss map*, Memoirs of the American Mathematical Society 236 (Providence, R.I., 1980).

[11] Hoffman, D. A., Osserman, R. e Schoen R., *On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$, Comment. Math. Helv. 57 (1982) 519-531.

[12] Hoffman, D. A., *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Diff. Geometry 8 (1973), 161-176.

[13] Jost, J., *Compact Riemann surfaces, an introduction to contemporary mathematics*, Springer, 1997.

[14] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1992.

[15] Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*, Stanford University, Dover Publications, Inc. New York 1986.

[16] Protter, M. H. e Weinberger, H. F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Englenwood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall 1967.

[17] Ruh, A. e Vilms, J., *Asymtotic behavior of non-parametric minimal hypersurfaces*, J Diff. Geom. 4 (1970), 509-513.

[18] Schoen, R. e Yau, S. T., *On univalent harmonic maps between surfaces*, Invent. Math. 44 (1978) 265-278.

[19] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 4, Publish or Perish, Boston 1975; 2nd Ed., Berkeley 1979.