Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O grupo de Bianchi $PSL_2(\mathcal{O}_3)$ é separável sob conjugação

por

Igor dos Santos Lima

Orientador: Pavel A. Zalesski

Brasília
Agosto/2008

Se você não sonha, não crê... já morreu.
Mesmo estando vivo, entendeu?
Dexter

Agradecimentos

Se o Senhor é meu pastor, nada me faltará
É à Ele que eu agradeço em primeiro lugar.

Agradeço à minha família (Isabel, Frederico, Fred e Bela)
A quem também nunca deixo de lembrar
Base, alicerce aonde quer que eu vá.

Ao meu orientador Pavel Zalesski, agradeço pela excelência
Competência e paciência.

Sempre fundamentais ao meu aprendizado
A tua cobrança implica em resultado
Muito obrigado por ter me orientado.

Aos professores da MAT: Graduação e Mestrado
Eu também deixo o meu obrigado
Cada um de vocês tem influência neste resultado
O próximo parágrafo não será rimado.

Ao Marcus Vinícius, Raquel Carneiro, Célius, Alexei, João Carlos, Hayde, Nigel, Hélder, Lineu, Noraí, Zalesski, Jairo, José Valdo, Elves, Maria Emília Xavier, Pedro, Hemar, Shumyatsky, Cátia, Carrion, Carlos Alberto, Baigorri, Rudolf, Said e Mauro Rabelo, o meu muito obrigado.

Aos funcionários do MAT, não deixarei de mencionar
Tânia, Hairton, Eveline, Sandra, Luiz, Manoel e Lucimar
Obrigado por me ajudar.

À banca examinadora eu gostaria de dizer de coração:
Muito obrigado pela participação!

Aos amigos:

Vocês sabem o quanto eu caminhei pra chegar até aqui
Percorri milhas e milhas, noites sem dormir

A importância de vocês ao longo de toda essa minha caminhada
Está marcada
Será sempre lembrada em cada caminho
E toda vez em que eu pensar na palavra: CARINHO!

Às diversas ajudas, deixo aqui a minha consideração
Direta ou indiretamente foram vários tipos de contribuição
Tex, livros, notas de aulas
Seminários e discussões fora de sala

Como diria Mano Brown
Eu sigo a mística
São 24 anos contrariando as estatísticas

E por essas e outras, o sonho continua!

A minha mãe
Isabel Pereira dos Santos Lima.
Eu te amo!

Resumo

Os grupos de Bianchi $\Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d)$ com $d > 0$ inteiro livre de quadrados, onde $\mathcal{O}_d$ é o anel de inteiros do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, são importantes devido as suas aplicações em Geometria e Teoria dos Números.

A propriedade de separabilidade sob conjugação é importante pois foi notado por Mal´cev em 1958 que o problema da conjugação para grupos finitamente apresentados separáveis sob conjugação é solúvel.

Em 1998, Wilson e Zalesski demonstraram que Γ_d é separável sob conjugação para $d = 1, 2, 7, 11$ e conjecturaram que todos Γ_d são separáveis sob conjugação.

Nesta tese foi provado que Γ_3 é separável sob conjugação. Combinando com o resultado acima, fica mostrado que todos os grupos de Bianchi Euclideanos são separáveis sob conjugação.

Palavras-chave: Grupos de Bianchi, Separabilidade sob conjugação, topologia profinita, GAP.

Abstract

The Bianchi groups $\Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d)$ with $d > 0$ square-free integer, where $\mathcal{O}_d$ is the ring of integers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, are important because their applications in Geometry and Number Theory.

The conjugacy separability property is important because as noted by Mal´cev in 1958, the conjugacy problem for finitely presented conjugacy separable groups is soluble.

In 1998, Wilson and Zalesski showed that Γ_d is conjugacy separable for $d = 1, 2, 7, 11$ and they conjectured that all Γ_d are conjugacy separable.

In the thesis was proved that Γ_3 is conjugacy separable. Combining with previous results this shows that all Euclidean Bianchi groups are conjugacy separable.

Key words Bianchi groups, Conjugacy separability, Profinite topology, GAP.

Conteúdo

Introdução

Os grupos de Bianchi são os grupos da forma

$$\Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d) = SL_2(\mathcal{O}_d)/ < -I >,$$

onde d é um inteiro positivo livre de quadrados e $\mathcal{O}_d$ é o anel de inteiros algébricos do corpo imaginário quadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Eles têm atraído bastante atenção, sendo uma das causas principais as aplicações em geometria hiperbólica, topologia e teoria dos números. Os grupos de Bianchi recebem esse nome em homenagem a Luigi Bianchi $(1856 - 1928)$ que os estudou inicialmente em 1892 como uma extensão natural do estudo do grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$. Tais grupos são ditos Euclideanos nos casos em que $d = 1, 2, 3, 7$ e 11, pois são os únicos casos em que O_d possui o algoritmo de Euclides.

Recordamos que um grupo G é dito separável sob conjugação se para todo par de elementos $x, y \in G$ não-conjugados em G, existir algum quociente finito de G, onde as imagens de x e y não são conjugadas. Equivalentemente, na versão profinita dizemos que um grupo residualmente finito G é separável sob conjugação se, e somente se, a conjugação de cada par de elementos de G no completamento profinito $\widehat{G}$ de G implicar na conjugação de tais pares de elementos em G se, e somente se, a classe de conjugação de todo elemento de G for fechada na topologia profinita de G. Segue que todo grupo separável sob conjugação é necessariamente residualmente finito. Em particular, o grupo de Bausmlag-Solitar $G =< a, b | b^a = b^3 >$ é um exemplo de um grupo que não é separável sob conjugação, pois não é residualmente finito. Entretanto a condição não é suficiente, pois Remeslennikov em [30] mostrou que $SL_3(\mathbb{Z})$ é residualmente finito, porém não é separável sob conjugação.

Em 1912, M. Dehn formulou em particular o seguinte problema de decisão também conhecido como Problema da Conjugação ou Segundo Problema de Dehn: "Existe um algoritmo que decida se duas palavras quaisquer em um grupo finitamente apresentado são conjugadas?".

A importância da propriedade de separabilidade sob conjugação foi observada por Mal´cev em 1958, [26], que mostrou que grupos finitamente apresentados separáveis sob conjugação são solúveis para o Problema da Conjugação. A seguir, daremos uma idéia desse tal algoritmo também descrito por Dan Segal em [37].

O algoritmo consiste de dois procedimentos executados simultaneamente. O primeiro *deles lista todas as consequências das relações em uma dada apresentação de G, enquanto o segundo procedimento enumera todos os homomorfismos π de G para grupos finitos e lista, para cada π, os finitos pares de elementos não-conjugados em $\pi(G)$. Agora dados $x, y \in G$, ambos procedimentos serão executados até o primeiro deles fornecer uma igualdade $x^g = y$ ou o segundo procedimento fornecer um par $(\pi(x), \pi(y))$. No primeiro caso, concluímos que x e y são conjugados e no segundo, que eles não o são. A hipótese de que G é separável sob conjugação garante que um dos dois casos ocorrerá.*

A seguir alguns aspectos históricos de grupos separáveis sob conjugação.

Foi mostrado por Blackburn em [5] que grupos nilpotentes finitamente gerados livres de torção são separáveis sob conjugação. O resultado de Blackburn foi estendido por Remeslennikov em [29] para grupos policíclicos por finito. E G. Baumslag em [1] mostrou a propriedade em questão para grupos livres. Em [13] Dyer provou que grupos livres por finito são separáveis sob conjugação. Em [38] Stebe e em [30] Remeslennikov mostraram que produto livre de grupos separáveis sob conjugação é separável sob conjugação. Em [14] Dyer mostrou que o produto livre de grupos ou ambos livres ou ambos nilpotentes finitamente gerados com amalgamação cíclica é separável sob conjugação. Este resultado de Dyer foi generalizado por Tang em [39] e posteriormente, com técnicas diferentes, por Ribes-Zalesski em [31] que mostraram que o produto livre de grupos ou livres por finito ou nilpotentes por finito com amalgamação cíclica é separável sob conjugação. O resultado mais geral sobre a separabilidade sob conjugação de produto livre com amalgamação cíclica foi obtido por Ribes-Segal-Zalesski em [32] que mostraram a propriedade para grupos que podem ser obtidos fazendo-se sucessivos produtos livres com amalgamação cíclica a partir de grupos policíclicos por finito e/ou livres por finito.

Outros exemplos de grupos separáveis sob conjugação são os grupos $GL_2(\mathcal{O}_d)$ com $d = 2, 7, 11$ e os grupos $SL_2(\mathcal{O}_d)$ com $d = 1, 2, 7, 11$, em todos esses casos a propriedade de separabilidade sob conjugação foi mostrada por S. C. Chagas em [8].

Ressaltamos que Goryaga em [20] mostrou que a propriedade de separabilidade sob conjugação não é preservada por extensões finitas. Mais recentemente, Chagas-Zalesski mostraram em [11] que subgrupos de índice finito não herdam a separabilidade sob conjugação e deram uma condição suficiente para que a propriedade seja preservada para subgrupos de índice finito.

Em 1998, Wilson e Zalesski mostraram em [41] a separabilidade sob conjugação para os grupos de Bianchi Euclideanos $\Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d)$ com $d = 1, 2, 7$ e 11. Foi usada essencialmente na demonstração deste fato a decomposição não-fictícia desses grupos dada por B. Fine [16] em produto livre com amalgamação para $d = 1, 2, 7, 11$ e HNN-extensão para $d = 2, 7$ e 11. De fato, eles mostraram que sob certas condições, produto livre com amalgamação não-cíclica e HNN-extensão são separáveis sob conjugação e que os grupos Γ_d, $d = 1, 2, 7, 11$, satisfazem essas tais condições. Essa técnica não pôde ser aplicada para o caso $d = 3$, pois $PSL_2(\mathcal{O}_3)$ não possui decomposição não-fictícia como produto livre com amalgamação ou HNN-extensão. Eles conjecturaram que $PSL_2(\mathcal{O}_d)$, $d \neq 1, 2, 7, 11$

é separável sob conjugação. Neste trabalho foi provada a conjectura de Wilson-Zalesski para o caso $d = 3$, fechando a questão para os grupos de Bianchi Euclideanos. Mais precisamente, o Teorema principal desta tese é

Teorema 1. *O grupo de Bianchi* $\Gamma_3 = PSL_2(\mathcal{O}_3)$ *é separável sob conjugação.*

A seguir descreveremos a estrutura desta tese.

O primeiro capítulo contém uma seção sobre espaços topológicos, onde foram selecionados alguns resultados básicos e definições como: a definição de espaço profinito. Na seção seguinte, falamos sobre grupos topológicos visando o entendimento da terceira seção sobre grupos profinitos e completamento profinito. Para isso demonstramos diversos resultados básicos que serão úteis no caso da separabilidade sob conjugação dos elementos de ordem infinita. E foi encerrado o primeiro capítulo com a definição da propriedade de separabilidade sob conjugação e a equivalente versão profinita da mesma da qual faremos uso na demostração do Teorema principal.

No segundo capítulo, na primeira seção, decorremos sobre os grupos de Bianchi Euclideanos e com intuito de tratarmos da estrutura desses grupos, recordamos o que vem a ser produto livre amalgamado e HNN-extensão. Na seção seguinte, falamos sobre a estrutura de um determinado subgrupo de índice finito de $PSL_2(\mathcal{O}_3)$ e usamos a decomposição como HNN-extensão de tal subgrupo para mostrar um caso do resultado principal, que é a separabilidade sob conjugação dos elementos de ordem 2 em $PSL_2(\mathcal{O}_3)$. Na seção 3, descrevemos os centralizadores de $GL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C})$ e usamos este resultado para descrever os centralizadores de $PSL_2(\mathcal{O}_d)$, $d = 1, 2, 3, 7, 11$, conforme [8] e [9]. O capítulo foi encerrado com uma seção sobre as propriedades do grupo alternado A_5, que faremos uso no capítulo seguinte.

E no capítulo 3 estão os resultados principais desta tese, a saber, decorremos sobre o programa GAP (Groups, Algorithms and Programming) que será usado para demonstrar a separabilidade sob conjugação dos elementos de ordem 3 em $PSL_2(\mathcal{O}_3)$. Em seguida, demonstramos o Teorema principal desta tese, onde fizemos uso de resultados discutidos ao longo da mesma, como os resultados de Berkove e outros em [2], [3] e [4] da total complementação e correção da classificação dada por B. Fine em [16], dos subgrupos abelianos dos grupos de Bianchi Euclideanos Γ_d, $d = 1, 2, 7, 11$; e mostramos a separabilidade sob conjugação para os elementos de ordem infinita em $PSL_2(\mathcal{O}_3)$ onde foi usado essencialmente o resultado devido a Chagas-Zalesski em [9] enunciado a seguir:

Teorema 2 (Chagas-Zalesski-2006)**.** *Seja* H *um subgrupo de* $\Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d)$, $d = 1, 2, 3, 7, 11$*, de índice finito e livre de torção. Então* H *é separável sob conjugação.*

Capítulo 1

Topologia Profinita

1.1 Sobre Espaços Topológicos

Recordemos algumas definições e propriedades básicas sobre espaços topológicos, conforme [42], para em seguida falarmos sobre grupos topológicos.

Uma topologia em um conjunto não-vazio X é uma família de subconjuntos de X (ditos abertos). Um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito fechado em X se o complementar $X \backslash Y$ de Y em relação a X for aberto. O fecho $\overline{Y}$ de Y é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contém Y. No caso em que $\overline{Y} = X$, diz-se que Y é denso em X.

Agora iremos estabelecer a definição de espaço topológico.

Definição 1.1.1. *Dizemos que X (juntamente com uma topologia em X) é um espaço topológico se satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *X e $\emptyset$ são conjuntos abertos;*

(2) *A interseção de dois subconjuntos abertos de X é um aberto;*

(3) *A união arbitrária de subconjuntos abertos de X é um aberto.*

Uma base para uma topologia em X é uma coleção $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ tal que cada subconjunto aberto de X pode ser escrito como união de alguns conjuntos U_λ, isto é, se $Y \subseteq X$ é um aberto de X, então $Y = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda^*} U_\lambda$, onde $\Lambda^* \subseteq \Lambda$.

Destacamos a seguir alguns tipos de topologia:

(i) A topologia formada pelo conjunto das partes de X é dita topologia discreta.

(ii) Uma topologia em um subconjunto $Y \subseteq X$ é dita induzida se consiste de todos os subconjuntos de Y da forma $Y \cap U$, onde U é algum aberto de X.

(iii) Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \to Y$ é uma aplicação sobrejetora, então a topologia quociente em Y consiste da topologia mais fraca tal que f é contínua, isto é, consiste de todos os subconjuntos abertos $V \subseteq Y$ tais que $f^{-1}(V)$ é um aberto em X.

(iv) Seja

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \left\{ x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid x(\lambda) \in X_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \right\}$$

o produto cartesiano da família $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, onde cada X_λ é um espaço topológico. Seja $\pi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ a projeção definida por $\pi_\lambda((x_\lambda)) = x_\lambda$.

A topologia produto em $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é a topologia mais fraca tal que π_λ é contínua para cada $\lambda \in \Lambda$. Os abertos na topologia produto são união de conjuntos da forma

$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_n),$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e para cada $i = 1, \cdots, n$, temos que $\lambda_i \in \Lambda$ e U_i é um aberto em X_{λ_i}.

Recordamos que um espaço topológico X é compacto se para cada família dada de subconjuntos abertos $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ tal que $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, existir uma subfamília finita $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_n}$ com $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$. Equivalentemente, X é dito compacto se cada família $\{C_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos fechados cuja interseção de finitos C_λ quaisquer for não-vazia, implicar que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$.

Dizemos que X é Hausdorff se para cada par de elementos $x, y \in X$, existirem abertos (ditos vizinhanças abertas) $x \in U$, $y \in V$ em X tais que $U \cap V = \emptyset$. Dizemos que X é conexo se X não puder ser representado como união disjunta de subconjuntos abertos. E ainda X é dito totalmente desconexo se cada componente conexa tem somente um elemento.

Definição 1.1.2. *Um espaço topológico compacto, Hausdorff e totalmente desconexo é dito um espaço profinito.*

Propriedades básicas sobre espaços topológicos compactos, Hausdorffianos e totalmente desconexos serão selecionadas nos resultados a seguir. Demonstraremos o primeiro resultado e comentaremos algumas idéias envolvidas nas demais demonstrações que podem ser vistas em J. Wilson [42]. Tais propriedades serão livremente usadas nas seções seguintes.

Afirmação 1.1.3. *Cada subconjunto de cardinalidade* 1 *em um espaço Hausdorff é fechado.*

Demonstração: Seja X um espaço Hausdorff. Se $X = \emptyset$ ou $|X| = 1$, não há nada a mostrar. Suponha que X tenha pelo menos 2 elementos. Então para cada $y \in X \setminus \{x\}$, existem abertos A_y e B_y em X tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Em particular, $B_y \subseteq X \setminus \{x\}$, logo $\{x\}$ é fechado.

□

Lema 1.1.4. (*a*) *Cada subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto;*

(*b*) *Cada subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado;*

(*c*) *Se $f : X \to Y$ é contínua e X compacto, então $f(X)$ é compacto;*

(*d*) *Se $f : X \to Y$ é contínua e bijetiva, X compacto e Y Hausdorff, então f é homeomorfismo;*

(*e*) *Se $f, g : X \to Y$ são contínuas e Y é Hausdorff, então $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ é fechado.*

Lema 1.1.5. *Seja $(X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ uma família de espaços topológicos e seja $C = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ o seu produto cartesiano.*

(*a*) *Se cada X_λ é Hausdorff, então C também o é;*

(*b*) *Se cada X_λ é totalmente desconexo, então C também o é;*

(*c*) *Se cada X_λ é compacto, então C também o é.*

O item (c) do Lema 1.1.5 é conhecido como Teorema de Tychonoff´s e a demonstração que envolve o conceito de filtro será omitida.

E encerramos esta seção com o seguinte

Lema 1.1.6. *Seja X um espaço totalmente desconexo. Então $\{x\}$ é fechado para cada $x \in X$.*

A idéia da demonstração do Lema acima é bem simples, pois é suficiente mostrar que o fecho C de $\{x\}$ é conexo, pois como X é um espaço totalmente desconexo cada componente conexa tem no máximo um elemento e portanto o conjunto fechado $C = \{x\}$. Como a conexidade de C segue diretamente da definição de conjunto conexo e da definição de fecho de um conjunto, omitiremos a demonstração.

1.2 Sobre Grupos Topológicos

Vamos definir o que vem a ser um grupo profinito, mas antes iremos relembrar a definição de de grupo topológico, conforme [42].

Definição 1.2.1. *Um grupo topológico é um conjunto G que é, ao mesmo tempo, um espaço topológico e um grupo tal que as seguintes aplicações*

$$m : G \times G \to G, i : G \to G$$

definidas por $m(x, y) = xy$ e $i(x) = x^{-1}$, respectivamente, são contínuas.

Definição 1.2.2. *Um grupo topológico compacto, Hausdorff e totalmente desconexo é dito um grupo profinito.*

Mostraremos a seguir alguns resultados básicos, contudo, importantes que envolvem as propriedades: compacto, Haussdorff e totalmente desconexo, conforme [42]. Demonstraremos a maior parte desses resultados que podem ser encontrados também em outras referências como [33] e [6].

Lema 1.2.3. *Seja G um grupo topológico.*

(a) *A aplicação i é um homeomorfismo. Para cada $g \in G$, as aplicações $x \to xg$ e $x \to gx$ são homeomorfismos;*

(b) *Se $H \leq_o G$ é um subgrupo aberto de G (respectivamente, $H \leq_c G$ é um subgrupo fechado de G), então cada classe lateral Hg ou gH em G é aberta (respectivamente, fechada);*

(c) *Cada subgrupo aberto de G é fechado e cada subgrupo fechado de índice finito é aberto. Se G é compacto, cada subgrupo aberto tem índice finito.*

(d) *Se $H \leq G$ e H contém um subconjunto aberto $U \neq \emptyset$, então $H \leq_o G$;*

(e) *Se $H \leq G$, então H é um grupo topológico com topologia induzida. Se $K \triangleleft G$, então G/K é um grupo topológico com topologia quociente. Além disso, o homomorfismo quociente $q : G \to G/K$ envia abertos em abertos (aplicação aberta);*

(f) *G é Hausdorff se, e somente se, $\{1\}$ é fechado em G. Se $K \triangleleft G$, então G/K é Hausdorff se, e somente se, K é fechado em G. Se G é totalmente desconexo, então G é Hausdorff;*

(g) *Se G é compacto e Hausdorff e C, D são subconjuntos fechados, então CD é fechado.*

Demonstração: Iremos demonstrar alguns dos itens e o restante sugerimos ao leitor consultar [42].

(a) Como i^2 é a aplicação identidade $x \longmapsto x$ e a aplicação i é contínua por definição, segue que i é um homeomorfismo. Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $X \to G \times G$ é contínua se, e somente se, a composição com cada projeção é contínua, pois $G \times G$ tem topologia produto. Portanto, se $\theta, \varphi : G \to G$ são aplicações contínuas, então também o é a composição $x \longmapsto (\theta(x), \varphi(x))$ de G para $G \times G$. Em particular, $\theta = id_G$ a aplicação identidade $x \longmapsto x$ de G e φ a aplicação constante $x \longmapsto g$ são contínuas, logo também o é a aplicação $x \longmapsto (x, g)$. E a composição com m (que é contínua por definição) $x \longmapsto xg$ também é contínua. A sua inversa $x \longmapsto xg^{-1}$ também é contínua, basta tomar $\theta = id_G$ como antes e φ a aplicação constante $x \longmapsto g^{-1}$. Portanto, $x \longmapsto xg$ é um homeomorfismo. O caso $x \longmapsto gx$ é análogo.

(b) É consequência de (a).

(c) Como $H \leq_o G$, então $G \backslash H = \bigcup_{g \in G \backslash H} gH$ o complementar de H em G é aberto, pois gH é aberto por (b) e sendo a união de abertos um aberto, logo segue que $H \leq_c G$. Agora no caso em que $H \leq_c G$ tem índice finito, então $G \backslash H = \bigcup_{k=1}^{n} g_k H$ é fechado, pois cada $g_k H$ é fechado por (b) e sendo a união finita de fechados um fechado, logo H é aberto.

Suponha que G seja compacto e $H \leq_o G$. Então $G = \bigcup_{g \in G} gH$ e por compacidade existem $\{g_1, \ldots, g_n\}$ tais que $G = \bigcup_{k=1}^{n} g_k H$, logo H tem índice finito em G.

(d) Como $U \neq \emptyset$, existe $u \in U$ tal que se $h \in H$, então $h \in Uu^{-1}h = Uh$, portanto segue que $H = \bigcup_{h \in H} Uh$ é aberto, pois é união de abertos.

(e) A afirmação acerca de H é óbvia. Mostraremos que q é uma aplicação aberta e usaremos este fato para mostrar que G/K é um grupo topológico com topologia quociente.

Seja $V \subseteq G$ aberto. Então por (a), temos que kV é aberto, logo $KV = \bigcup_{k \in K} \{kV\}$ também é aberto.

Mas $q(V) = q(KV)$ daí $q^{-1}q(V) = KV$ e portanto como G/K tem topologia quociente por hipótese segue que $q(V)$ é um aberto em G/K.

Agora basta mostrar que as aplicações

$$m_K : G/K \times G/K \to G/K, i : G/K \to G/K$$

definidas por $m(xK, yK) = xyK$ e $i(xK) = x^{-1}K$, respectivamente, são contínuas. Para isso, considere os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q"'] \\ G/K \arrow[r, "i_K"'] & G/K \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "q\times q"'] & G \arrow[d, "q"'] \\ G/K \times G/K \arrow[r, "m_K"] & G/K \end{tikzcd}$$

Seja U um aberto em G/K. Então ${i_K}^{-1}(U) = q(i^{-1}q^{-1}(U))$ e ${m_K}^{-1}(U) = q\times q(m^{-1}q^{-1}(U))$ são abertos, pois i é homeomorfismo e m é contínua, respectivamente, e além disso q é uma aplicação aberta.

(f) Já demonstramos em 1.1.3 que os conjuntos com um só elemento em espaços Hausdorffianos são fechados. Vamos mostrar a recíproca.

Suponha que $\{1\}$ é fechado em G.

Sejam $a, b \in G$ tais que $a \neq b$. Por (a), o conjunto $\{a^{-1}b\}$ é fechado, logo existe $U \subseteq G\setminus\{a^{-1}b\}$ aberto em G tal que $1 \in U$ (por exemplo, tome $U = G\setminus\{a^{-1}b\}$). A aplicação $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ é contínua, pois é composição de m e i que são contínuas por definição. Portanto, pela topologia produto de $G \times G$ existem abertos $1 \in V \subseteq_o G$ e $1 \in W \subseteq_o G$ tais que a imagem inversa de U pela aplicação $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ é um aberto $V \times W$ em $G\times G$ com $a^{-1}b \neq VW^{-1} \subseteq U$. Isto implica que $aV \cap bW = \emptyset$, pois de $av = bw$ segue que $a^{-1}b \in VW^{-1} \subseteq U$, uma contradição. Mas por (a), segue que aV e bW são abertos em G, logo G é Hausdorff por definição. As outras afirmações são consequência da primeira, da definição de topologia quociente e do Lema 1.1.6.

(g) A demonstração seguirá dos Lemas 1.1.4, 1.1.5. De fato, como G é compacto, segue do Lema 1.1.4 item (a) que os subconjuntos fechados $C, D \subseteq_c G$ são compactos. Logo, pelo Lema 1.1.5 item (c), o produto cartesiano (finito) $C \times D$ também é compacto. Pelo Lema 1.1.4 item (c), segue que a imagem CD de $C \times D$ pela aplicação contínua $m : G \times G \to G$ definida por $m(x, y) = xy$ é compacto. Portanto, como G é Hausdorff segue do Lema 1.1.4 item (b) que CD é fechado.

□

Ainda dentro desta linha dos resultados básicos e importantes sobre grupos topológicos compacto, Hausdorffianos e totalmente desconexos, vamos mostrar a seguinte

Proposição 1.2.4. *Seja G um grupo topológico compacto, Hausdorff e totalmente desconexo. Então*

(a) *Todo aberto $U \subseteq_o G$ é união de classes laterais de subgrupos normais abertos.*

(b) *Um subconjunto* $P \subseteq_{o,c} G$ *é aberto-fechado se, e somente se,* P *é união finita de classes laterais de subgrupos normais abertos.*

(c) *Se* $X \subseteq_c G$ *é um subconjunto fechado, então* $X = \bigcap_{N \lhd_o G} NX$*. Em particular, a interseção de todos os subgrupos normais abertos é trivial.*

Demonstração: (a) Na demonstração usaremos o fato de que em um grupo topológico compacto, um subconjunto aberto-fechado que contém 1, também contém um subgrupo normal aberto, vide [42].

Como G é totalmente desconexo, segue do item (f) do Lema 1.2.3 que G é Hausdorff e sendo G compacto por hipótese, temos que se $x \in U \subseteq_o G$, então pelo Lema 1.2.3 item (a), o subconjunto $Ux^{-1} \subseteq_o G$ é aberto. Segue que Ux^{-1} contém 1 e portanto contém um subgrupo normal aberto, digamos K_x. Assim, temos que $U = \bigcup_{x \in U} K_x x$.

(b) Suponha que $P \subseteq_{o,c} G$. Então $P \subseteq_c G$ é compacto, pois pelo Lema 1.1.4 item (a), temos que fechado em compacto é compacto. E pelo item anterior e a definição de compacidade, segue obviamente que $P = \bigcup_{i=1}^{n} K_{x_i} x_i$. A recíproca segue obviamente do Lema 1.2.3.

(c) Vamos fazer apenas uma inclusão, a outra é consequência do item (a) aplicado no complementar $G \backslash X$. Suponha que $y \in NX, \forall N \lhd_o G$. Se $y \notin X$, então y está no aberto $U = G \backslash X$ e por (a), existe um subgrupo normal aberto $N \lhd_o G$ que contém y e cuja interseção com X é vazia, ou seja, $Ny \cap X = \emptyset$, logo $y \notin NX$ pois $y = nx$ implica $x \in Ny$, uma contradição. Portanto, $X = \bigcap_{N \lhd_o G} NX$. Em particular, como G é Hausdorff, temos pelo Lema 1.2.3 item (f) que $X = \{1\}$ é fechado, logo $\bigcap_{N \lhd_o G} N = 1$.

□

Seja χ uma classe de grupos. Recordemos a definição de residualmente-χ.

Definição 1.2.5. *Dizemos que um grupo* G *é residualmente-*χ *se* $\forall\, 1 \neq g \in G$ *existir um subgrupo normal* $N \lhd G$ *tal que* $g \notin N$ *e* $G/N \in \chi$*.*

Equivalentemente, temos também a seguinte definição

Definição 1.2.6. *Um grupo* G *é residualmente-*χ *se a interseção de todos os subgrupos normais* $N \lhd G$ *tal que* $G/N \in \chi$ *é trivial.*

Por exemplo, é fácil verificar que $\mathbb{Z}$ é residualmente finito.

Observação 1.2.7. *Pelo item* (f) *do Lema* 1.2.3 *e pelo item* (c) *da Proposição* 1.2.4*, temos que* G *é Hausdorffiano se, e somente se,* G *é residualmente finito.*

Usaremos livremente as definições acima no caso em que χ é a classe dos grupos finitos e neste contexto diremos que $G \in \chi$ é residualmente finito.

Encerramos esta seção com uma observação sobre o produto cartesiano de grupos topológicos. Tal observação será usada livremente na próxima seção.

Observação 1.2.8. *Sejam* $(G_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ *uma família de grupos topológicos e* $C = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$*. Defina a multiplicação em* C *coordenada-a-coordenada, isto é,*

$$(x_\lambda)(y_\lambda) = (x_\lambda y_\lambda), \forall (x_\lambda), (y_\lambda) \in C.$$

Então com a topologia produto, C *será um grupo topológico.*

1.3 Grupos Profinitos e Completamento Profinito

Esta seção objetiva estabelecer requisitos suficientes para demonstrarmos o resultado abaixo e a equivalente versão profinita da propriedade de separabilidade sob conjugação que será dada na próxima seção.

Lema 1.3.1. *Seja* $\widehat{G}$ *o completamento profinito de um grupo residualmente finito* G*. Suponha que* $H \leq_f G$ *é um subgrupo de* G *de índice finito. Então* $\widehat{G} = G\widehat{H}$*.*

O Lema 1.3.1 será essencialmente usado na demonstração do Teorema principal. Esse Lema pode ser visto também em [33].

A seguir, vamos fazer algumas definições e estabelecer alguns resultados importantes, conforme [42], [33] e [6].

Recordamos que um conjunto I (juntamente com uma relação de ordem parcial $\leq$) é dito dirigido se para quaisquer $i, j \in I$, existir $k \in I$ tal que $k \geq i, j$.

Definição 1.3.2. *Um sistema projetivo inverso* $(X_i, \varphi_{i,j})$ *de espaços topológicos (grupos topológicos), indexados por um conjunto dirigido* I*, consiste de uma família* $(X_i | i \in I)$ *de espaços topológicos (grupos topológicos) juntamente com uma família* $(\varphi_{i,j} : X_i \to X_j | i, j \in I, i \geq j)$ *de aplicações contínuas (homomorfismos contínuos) tais que* $\varphi_{i,i}$ *é a aplicação identidade* id_{X_i} *para cada* $i \in I$ *e* $\varphi_{j,k}\varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ *sempre que* $i \geq j \geq k$*, isto é, o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\varphi_{i,k}"] \arrow[d, "\varphi_{i,j}"'] & X_k \\ X_j \arrow[ur, "\varphi_{j,k}"'] & \end{tikzcd}$$

comuta sempre que $i \geq j \geq k$.

Considere $\{X_i, \varphi_{i,j}\}$ um sistema projetivo de espaços topológicos (grupos topológicos) e Y um espaço topológico (grupo topológico). Dizemos que uma família $(\psi_i : Y \to X_i | i \in I)$ de aplicações contínuas (homomorfismos contínuos) são compatíveis se $\varphi_{i,j}\psi_i = \psi_j$ sempre que $i \geq j$, isto é, o diagrama abaixo é comutativo sempre que $i \geq j$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\ X_i \arrow[r, "\varphi_{i,j}"] & X_j \end{tikzcd}$$

Definição 1.3.3. *O limite projetivo (ou inverso) do sistema projetivo $\{X_i, \varphi_{i,j}\}$ é um espaço topológico X (grupo topológico) juntamente com as aplicações (homomorfismos) compatíveis $\varphi_i : X \to X_i$ (ditas projeções) se satisfaz a seguinte propriedade universal: dado Y um espaço topológico (grupo topológico) e $\psi_i : Y \to X_i$ aplicações contínuas (homomorfismos) compatíveis, existe uma única aplicação (único homomorfismo contínuo) contínua $\psi : Y \to X$ tal que $\varphi_i\psi = \psi_i$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\psi_i"'] & X \arrow[dl, "\varphi_i"] \\ X_i & \end{tikzcd}$$

O limite inverso assim definido existe e é único. Mais precisamente

Proposição 1.3.4. *(a) Se (X, φ_i) e (Y, ψ_i) são limites projetivos de um sistema projetivo $(X_i, \varphi_{i,j})$, então existe um único homeomorfismo (isomorfismo) $\varphi : X \to Y$ de maneira que $\psi_i\psi = \varphi_i$ para cada $i \in I$.*

(b) Seja

$$X = \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i | \varphi_{i,j}((x_i)) = x_j, i \geq j \right\}$$

e $\varphi_i = (\pi_i)_{|X}$ ($\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ é a projeção). Então (X, φ_i) é um limite projetivo de $\{X_i, \varphi_{i,j}\}$.

Demonstração: Vamos demonstrar aqui apenas a unicidade, para a existência sugerimos [33]. Como as aplicações $\psi_i : Y \to X_i$, $i \in I$, são compatíveis por hipótese, a propriedade universal para o limite projetivo (X, φ_i) nos garante a existência de uma única aplicação contínua (homomorfismo contínuo) $\psi : Y \to X$ tal que para cada $i \in I$, tem-se que $\varphi_i\psi = \psi_i$. Analogamente, $\varphi_i : X \to X_i$ são compatíveis e pela propriedade universal, limite inverso (Y, ψ_i) nos garante uma única aplicação contínua (homomorfismo contínuo) $\varphi : X \to Y$ tal que $\psi_i\varphi = \varphi_i, \forall i \in I$. Mas $\psi\varphi : X \to X$ faz o diagrama abaixo comutar para cada $i \in I$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi\varphi"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & X \arrow[dl, "\varphi_i"] \\ X_i & \end{tikzcd}$$

logo pela unicidade da propriedade universal, segue que $\psi\varphi = id_X$ e analogamente, segue que $\varphi\psi = id_Y$. Portanto, $\varphi : X \to Y$ é um homeomorfismo (isomorfismo).

□

Nesse contexto, adota-se a seguinte notação: $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$.

O próximo resultado coleta propriedades importantes envolvendo limites projetivos e os conceitos já definidos aqui: Compacto, Hausdorff e totalmente desconexo.

Proposição 1.3.5. *Seja $\{X_i, \varphi_{i,j}\}$ um sistema projetivo de espaços topológicos e* $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$

(a) *Se cada X_i é Hausdorff, X também o é.*

(b) *Se cada X_i é totalmente desconexo, X também o é.*

(c) *Se X_i é Hausdorff, então X é fechado em* $\prod_{i \in I} X_i$

(d) *Se cada X_i é compacto e Hausdorff, então X também o é.*

(e) *Se cada X_i é não-vazio, compacto e Hausdorff, então X também o é.*

Os itens $(a), (b), (c)$ e (d) seguem dos Lemas 1.1.4, 1.1.5 observando que subespaços e produtos de espaços com as propriedades acima também possuem estas propriedades. E para o item (e), sugerimos [42]. Em particular, observando que

$$X = \bigcap_{i \geq j} \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i | \varphi_{i,j}\pi(x_i) = \pi(x_j), i \geq j \right\} \leq \prod_{i \in I} X_i$$

o item (c) segue diretamente do Lema 1.1.4 item (e) com $f = \varphi_{i,j}\pi_{|X_i}$ e $g = \pi_{|X_j}$.

Observação 1.3.6. *Nesse contexto, temos que $X = \varprojlim_{i \in I} X_i$ é um espaço topológico profinito se cada X_i é um quociente finito e discreto de X. A recíproca segue da proposição anterior juntamente com os Lemas* 1.1.4 *e* 1.1.5.

A observação acima, nos permite fazer a seguinte definição

Definição 1.3.7. *Um grupo profinito é limite inverso de um sistema projetivo de grupos finitos. O limite inverso de um sistema projetivo de grupos finitos cíclicos, solúveis, nilpotentes, p-grupos, etc é dito, respectivamente, um grupo procíclico, pronilpotente, pro-p, etc.*

A seguir, veremos o que vem a ser o completamento profinito de um grupo G qualquer.

Considere um grupo G qualquer. Seja $\aleph = \{N \leq_f G\}$ a coleção de todos os subgrupos normais de G de índice finito. Como $G \in \aleph$, segue que $\aleph \neq \emptyset$. Naturalmente, $\aleph$ é um conjunto dirigido, pois se $N, M \in \aleph$ com $N \leq M$, então existe $V \in \aleph$ com $V \leq N \cap M$ e além disso fica definido o epimorfismo natural $\varphi_{NM} : G/N \to G/M$. Portanto, $\{G/N, \varphi_{NM}\}$ é um sistema inverso de grupos finitos.

Definição 1.3.8. *O limite inverso do sistema projetivo $\varphi_{NM} : G/N \to G/M$ definido acima é dito o completamento profinito de G e é denotado por $\widehat{G}$. Ressaltamos que se a família dos quocientes G/N é de grupos finitos cíclicos, solúveis, nilpotentes, p-grupos, etc então o completamento $\widehat{G}$ é dito, respectivamente, um completamento procíclico, pronilpotente, pro-p, etc.*

Note que pela propriedade universal para limites projetivos, existe um homomorfismo $\iota : G \to \widehat{G}$ definido por $\iota(g) = (g)_{N \in \aleph}$. Observe que $Ker(\iota) = \bigcap_{N \in \aleph} N = 1$ se, e somente se, G é residualmente finito. E neste caso, diremos que $G = \iota(G)$ é denso no completamento $\widehat{G}$.

Conforme [33], dizemos que a topologia profinita sobre um grupo G é a topologia cuja base é a família $\{gH | H \leq_f G\}$ de todas as classes de subgrupos de índice finito em G. É imediato verificar que um subgrupo $K \leq_f G$ é fechado nessa topologia se, e somente se, $K = \bigcap_{N \lhd_o G} NK$, isto é, K é a interseção de subgrupos abertos de G, vide item (c) da Proposição 1.2.4. E a topologia profinita de G induz uma topologia sobre um subgrupo $L \leq G$ (em geral mais fraca do que a topologia profinita de L (dita completa), vide [33]).

Encerramos esta seção com

Demonstração: (Lema 1.3.1) Como H é de índice finito em G, segue que H é residualmente finito e portanto está imerso em seu completamento $\widehat{H}$. Logo, segue que

$$\widehat{H}G = \widehat{H} \bigcup_{i=1}^{n} Hg_i = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{H}Hg_i = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{H}g_i$$

onde a primeira igualdade segue do fato que $H \leq_f G$, segunda igualdade segue pois a união é finita e a terceira igualdade segue do fato de que H está imerso no seu completamento. Portanto, $\widehat{H}G$ é fechado em $\widehat{G}$. Mas como $G \subseteq G\widehat{H} \subseteq \widehat{G}$, logo $\widehat{H}G$ é também denso em $\widehat{G}$ e portanto $\widehat{G} = \widehat{H}G$. □

1.4 Separabilidade sob Conjugação: Versão Profinita

A seguir, vamos recordar a definição da propriedade de separabilidade sob conjugação e, com as ferramentas estabelecidas até aqui, a equivalente versão profinita da mesma será demonstrada na próxima Proposição.

Definição 1.4.1 (Separabilidade sob conjugação)**.** *Um grupo G é dito separável sob conjugação se para todo par de elementos $x, y \in G$ não-conjugados em G, existir algum quociente finito de G, onde as imagens de x e y não são conjugadas.*

Proposição 1.4.2. *Seja G um grupo, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *G é separável sob conjugação;*

(ii) *Para todo $x \in G$, a classe de conjugação x^G de x é fechada na topologia profinita. Em particular, G é residualmente finito;*

(iii) *Para todo par de elementos $x, y \in G$ tal que $y = x^\gamma$, para algum $\gamma \in \widehat{G}$, existir $g \in G$ tal que $y = x^g$.*

Demonstração: $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Seja $y \in G \backslash x^G$, isto significa que y não é conjugado de x em G. Sendo G separável sob conjugação, existe um subgrupo normal $N \lhd_f G$ de índice finito em G tal que xN e yN não são conjugados em G/N, portanto temos que $yN \cap x^G = \emptyset$, pois do contrário existiriam $n \in N$ e $g \in G$ tal $yn = x^g$ contrariando o fato de xN e yN não serem conjugados em G/N. Desta forma, $y \notin x^G N$ e segue que para todo $y \notin x^G$ temos que $y \notin x^G N$ para algum $N \lhd_f G$. Portanto, $\displaystyle\bigcap_{N \lhd_f G} x^G N \leq x^G$ e x^G é fechado na topologia profinita.

Reciprocamente, para todo $x \in G$ temos que x^G é fechado na topologia profinita, isto é, $x^G = \displaystyle\bigcap_{N \lhd_f G} x^G N$. Assim, para todo $x, y \in G$ não-conjugados, temos que $y \notin x^G = \displaystyle\bigcap_{N \lhd_f G} x^G N$, logo existe algum $N \lhd_f G$ tal que $y \notin x^G N$ e daí segue que $yN \cap x^G = \emptyset$, portanto xN e yN não são conjugados em G/N.

Em particular, qualquer grupo G separável sob conjugação é residualmente finito, pois a classe de conjugação do elemento identidade é fechada na topologia profinita de G, isto é, $\cap_{N \lhd_f G} N = 1$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. Sejam $x, y \in G$ quaisquer tal que $y = x^\gamma$ para algum $\gamma \in \widehat{G}$. Suponhamos que x e y não são conjugados em G. Mas pela condição (i) temos que as imagens de x e y não são conjugadas em algum quociente finito e isto contraria o fato de x e y serem conjugados no completamento $\widehat{G}$, portanto x e y são conjugados em G.

Reciprocamente, sejam $x, y \in G$ tal que x e y não são conjugados em G. Suponhamos que para todo subgrupo normal de índice finito $N \triangleleft_f G$, as imagens de x e y sejam conjugadas em G/N. Então, x e y são conjugados em $\widehat{G}$ e pela condição (iii), x e y são conjugados em G, uma contradição.

$\square$

Capítulo 2

Grupos de Bianchi

2.1 Grupos de Bianchi Euclideanos

Os grupos de Bianchi são os grupos da forma

$$\Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d) = SL_2(\mathcal{O}_d)/ < -I >,$$

onde $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}+w\mathbb{Z}$ é o anel de inteiros algébricos do corpo imaginário quadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, para d inteiro positivo livre de quadrados e

$$w = \begin{cases} \sqrt{-d}, & \text{se } d \equiv 1,2 \bmod 4 \\ \frac{-1+\sqrt{-d}}{2}, & \text{se } d \equiv 3 \bmod 4, \end{cases}$$

veja [27], [16].

O anel de inteiros algébricos $\mathcal{O}_d$ é um $\mathbb{Z}$-módulo, por isso Γ_d é uma generalização óbvia do grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$. Como $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}_d$ e $PSL_2(\mathbb{Z}) \subset PSL_2(\mathcal{O}_d)$, os grupos de Bianchi são grupos infinitos, além disso, são subgrupos discretos de $PSL_2(\mathbb{C})$, pois $\mathcal{O}_d$ é um subanel discretamente normado de $\mathbb{C}$. Os grupos de Bianchi recebem esse nome em homenagem a Luigi Bianchi $(1856-1928)$ que os estudou inicialmente em 1892 como uma extensão natural do estudo de $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Um elemento de Γ_d, digamos $\overline{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com entradas em $\mathcal{O}_d$, pode ser identificado como uma transformação linear fracional $\frac{az+b}{cz+d}$. Desse modo, $\overline{g}$ age por isometria sobre o plano complexo extendido $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Bianchi mostrou que cada Γ_d atua descontinuamente sobre o 3-espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3 = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ \mid \zeta > 0\}$ e desenvolveu uma técnica para determinar domínios fundamentais $\mathrm{F} \cong \Gamma_d \backslash \mathbb{H}^3$, $\mathrm{F} \subseteq \mathbb{H}^3$, de Γ_d. Isto é, para determinar um conjunto de representantes das órbitas $\Gamma_d P$, $P \in \mathbb{H}^3$, o que permite computar apresentações para os grupos de Bianchi, vide [16] e [15].

O anel de inteiros algébricos $\mathcal{O}_d$ do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d>0 livre de quadrados, possue um algoritmo Euclideano se, e somente se, $d = 1, 2, 3, 7, 11$. E para esses valores de d, os grupos Γ_d são ditos grupos de Bianchi Euclideanos. O caso $d = 1$ foi primeiramente estudado por Charles Émile Picard $(1856 - 1941)$, que determinou o domínio fundamental em $\mathbb{H}^3$ e geradores para Γ_1, vide [16]. Por esse motivo, Γ_1 é conhecido como o grupo de Picard.

Recordamos agora as definições de produto livre com amalgamação e de HNN-extensão.

Definição 2.1.1. *Sejam G_1 e G_2 grupos com um subgrupo comum H. E para cada $i = 1, 2$, seja $\theta_i : H \to G_i$ um monomorfismo. O produto livre de G_1 e G_2 amalgamado o subgrupo H é o grupo $G = G_1 *_H G_2$ com apresentação*

$$G =< G_1, G_2|\theta_1(h) = \theta_2(h), h \in H >,$$

onde G_1 e G_2 são ditos fatores de G e H o subgrupo amalgamado. E similarmente, uma HNN-extensão de G_1 é o grupo $G = HNN(G_1, H, t)$ com apresentação

$$G =< t, G_1|tht^{-1} = \theta_1(h), h \in H >$$

e dizemos que G_1 é o grupo base, t é a letra estável e H é o subgrupo associado.

O produto livre amalgamado (respectivamente, HNN-extensão) é dito trivial se $H = G_1$ ou $H = G_2$ (respectivamente, $H = G_1$). Outro nome equivalente ao termo trivial, nesse contexto de construções livres, é fictício.

Proposição 2.1.2. *Um elemento de ordem finita em $G = G_1 *_H G_2$ (respectivamente, $G = HNN(G_1, H, t)$) é conjugado a um elemento de ordem finita em um dos fatores (respectivamente, no grupo base G_1). Um subgrupo finito de $G = G_1 *_H G_2$ (respectivamente, $G = HNN(G_1, H, t)$) é conjugado a um subgrupo finito em um dos fatores (respectivamente, no grupo base G_1).*

Para a demonstração da Proposição acima, também conhecida como Teorema de Torção, sugerimos [25] página 187 Corolários 4.1.4 e 4.1.5.

Adotaremos a notação: A_4 é o grupo alternado de ordem 12; S_3 é o grupo de permutação de 3 símbolos; D_2 é o grupo diedral de ordem 4; C_i, $i = 2, 3$, é o grupo cíclico de ordem i; $M = C_2 * C_3$ é o grupo modular.

Quanto a estrutura, segue por [16] que, com exceção de Γ_3, todos os grupos de Bianchi se decompõem, de forma não trivial, como um produto livre amalgamado e além disso para $d \neq 1, 3$ tem-se que Γ_d admite decomposição como HNN-extensão. Nos casos Euclideanos, $d \neq 3$, temos que

$$\Gamma_1 = G_1 *_H G_2 \text{ com}$$
$$G_1 = S_3 *_{C_3} A_4, G_2 = S_3 *_{C_2} D_2, H = M;$$

$$\Gamma_2 = G_1 *_H G_2 \text{ com}$$
$$G_1 = HNN(D_2, C_2, t), G_2 = HNN(A_4, C_3, t), H = \mathbb{Z} * C_2;$$

$$\Gamma_7 = G_1 *_H G_2 \text{ com}$$
$$G_1 = Z * C_2, G_2 = HNN(K, C_3, t), K = S_3 *_{C_2} S_3, H = \mathbb{Z} * C_2 * C_2;$$

$$\Gamma_{11} = G_1 *_H G_2 \text{ com}$$
$$G_1 = \mathbb{Z} * C_3, G_2 = HNN(K, C_3, t), K = A_4 *_{C_3} A_4, H = \mathbb{Z} * C_3 * C_3;$$

E para $d \neq 1, 3$, temos especificamente que $\Gamma_2 = HNN(K_2, M, t)$, $\Gamma_7 = HNN(K_7, M, t)$ e $\Gamma_{11} = HNN(K_{11}, M, t)$ onde

$$K_2 = A_4 *_{C_2} D_2, K_7 = S_3 *_{C_2} S_3, K_{11} = A_4 *_{C_3} A_4.$$

Apesar de Γ_3 não se decompor como um produto livre amalgamado ou HNN-extensão, segue de [36] que Γ_3 é virtualmente uma HNN-extensão (respectivamente virtualmente produto livre amalgamado), isto é, Γ_3 possui um subgrupo de índice finito $\Gamma_{3,2} = PSL_2(\mathcal{O}_{3,2})$ que se decompõe, de forma não-trivial, como uma HNN-extensão (respectivamente produto livre amalgamado), onde $\mathcal{O}_{3,2} = \mathbb{Z} + 2w\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathcal{O}_3$. Mostraremos na próxima seção esse resultado devido a R.M. Scarth: $\Gamma_{3,2}$ é uma HNN-extensão de $K_{3,2}$ com o grupo modular M associado, onde $K_{3,2} = S_3 *_{C_3} D(3,3,3)$ e $D(3,3,3) = \, < x, y | x^3, y^3, (xy)^3 >$ é um grupo de Von Dyck's, vide [23]. Tal resultado, juntamente com a Proposição 2.1.2, será essencial na demonstração do Teorema Principal em relação a separabilidade sob conjugação dos elementos de ordem 2, independentemente do resultado de E. Berkove e Juan-Pineda, [2], que afirma haver somente uma classe de conjugação de ordem 2 em Γ_3 e cuja demonstração usa argumentos da teoria da geometria hiperbólica.

2.2 O subgrupo $\Gamma_{3,2} = PSL_2(\mathcal{O}_{3,2})$ e o Problema do Subgrupo de Congruência

Para p primo, é conhecido que todo ideal primo é da forma $p\mathcal{O}_d$ e é um ideal maximal de $\mathcal{O}_d$.

O Lema seguinte caracteriza a decomposição de p em $\mathcal{O}_d$ e consequentemente o quociente $\frac{\mathcal{O}_3}{2\mathcal{O}_3}$ que será usado na demonstração do resultado principal desta tese, para maiores detalhes sobre tal Lema, sugerimos [27], página 130, exemplo 4.13(a). Antes de enunciá-lo, vamos definir para $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ o que vem a ser o discriminante $D = D_K$ e a característica quadrática $\chi_K(p)$, vide [27].

Definição 2.2.1. *O discriminante D de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ é dado por*

$$D = \begin{cases} -d, & se\ d \equiv 3\ mod\ 4 \\ -4d, & caso\ contrário \end{cases}$$

Definição 2.2.2. *Seja p um primo. Se $p|D$, então a característica quadrática $\chi_K(p)$ de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ é definida como sendo $\chi_K(p) = 0$ e nos outros caso a característica quadrática é dada por*

$$\chi_K(2) = \begin{cases} 1, & se\ D \equiv 1\ mod\ 8 \\ -1, & se\ D \equiv 5\ mod\ 8 \end{cases}$$

e para $p \neq 2$, tem-se que

$$\chi_K(p) = \begin{cases} 1, & se\ D \equiv x^2\ mod\ p \\ -1, & caso\ contrário \end{cases}$$

Lema 2.2.3. *[27], [35], [36] Sejam $p \in \mathbb{Z}$ um primo e $i = |\mathcal{O}_d : p\mathcal{O}_d|$ o índice de $p\mathcal{O}_d$ em $\mathcal{O}_d$. Então*

$$p\mathcal{O}_d \cong \begin{cases} \rho_1\rho_2, \quad i = p, & se\ \chi_K(p) = 1, \\ \rho, \quad i = p^2, & se\ \chi_K(p) = -1, \\ \rho^2, \quad i = p, & se\ \chi_K(p) = 0, \end{cases}$$

onde ρ e ρ_j são ideais de $\mathcal{O}_d$. Em particular, segue que se $\chi_K(p) = -1$, então o ideal primo $p\mathcal{O}_d$ (que é maximal) tem índice p^2 em $\mathcal{O}_d$, portanto

$$\frac{\mathcal{O}_d}{p\mathcal{O}_d} \cong \mathbb{F}_{p^2},$$

onde $\mathbb{F}_{p^2}$ é o corpo com p^2 elementos.

Definição 2.2.4. *Se A é um ideal em $\mathcal{O}_d$, então o subgrupo de congruência principal mod A é dado por*

$$PSL_2(\mathcal{O}_d, A) = \Gamma_d(A) = \{\pm T | T \in SL_2(\mathcal{O}_d), T \equiv ImodA\}.$$

E ainda, $\Gamma_d(A)$ pode ser descrito como o núcleo da aplicação $SL_2(\mathcal{O}_d) \longrightarrow SL_2(\mathcal{O}_d/A)$ módulo $\pm$I. Assim cada subgrupo de congruência principal é normal e de índice finito.

Definição 2.2.5. *(Subgrupo de Congruência) Um subgrupo é dito de congruência se o mesmo contém um subgrupo de congruência principal, caso contrário é dito de não-congruência.*

O Problema do Subgrupo de Congruência (CSP) para $PSL_2(\mathcal{O}_d)$ pergunta se todo subgrupo de índice finito de Γ_d é um subgrupo de congruência. Segue de [22] que os grupos de Bianchi tem resposta negativa para CSP. E sobre o índice mínimo dos subgrupos de não-congruência de Γ_d, denotado por $ncs(d)$, tem-se o seguinte resultado em [36]

Teorema 2.2.6.

$$ncs(d) = \begin{cases} 5, & \textit{se d=1} \\ 4, & \textit{se d=2} \\ 22, & \textit{se d=3} \\ 3, & \textit{se d=7} \\ 2, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Devido a Britto [7], uma maneira de obter uma construção de infinitos subgrupos (normais) de não-congruência de Γ_d, para $d = 1, 2, 3, 7, 11, 5, 6, 15$, é considerar o epimorfismo

$$PSL_2(\mathcal{O}_d) \twoheadrightarrow A_n$$

onde $n \geq 7$. De fato, para um primo p tal que $p\mathcal{O}_d$ é um ideal maximal de $\mathcal{O}_d$, vide Lema 2.2.3, tem-se que

$$\frac{PSL_2(\mathcal{O}_d)}{PSL_2(\mathcal{O}_d, p\mathcal{O}_d)} \cong PSL_2(\frac{\mathcal{O}_d}{p\mathcal{O}_d}),$$

mas $PSL_2(\mathbb{F}_q) \cong A_n \Leftrightarrow n = 4, 5, 6$, onde $\mathbb{F}_q$ é o corpo finito com $q = 3, 4, 5$ ou 9 elementos. Mais precisamente, tem-se que

Lema 2.2.7.

$$PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$$
$$PSL_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5 \cong PSL_2(\mathbb{F}_5)$$
$$PSL_2(\mathbb{F}_9) \cong A_6.$$

Pois de [35] página 292

$$|PSL_2(\mathbb{F}_q)| = \begin{cases} \frac{1}{2}(q+1)q(q-1), & \text{se } q = p^n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ e } p \text{ é um primo ímpar} \\ (q+1)q(q-1), & \text{se } q = 2^m,\ m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e, pelo Teorema de Jordan-Moore, [35], $PSL_2(\mathbb{F}_q)$ é simples para todas as potências de primo $q \geq 4$.

Sejam $d, m \in \mathbb{N}$, $d > 0$ livre de quadrados, e $\mathcal{O}_{d,m} = \mathbb{Z} + mw\mathbb{Z}$, onde

$$w = \begin{cases} \sqrt{-d}, & \text{se } d \equiv 1, 2 \bmod 4 \\ \frac{-1+\sqrt{-d}}{2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora observe que $|\mathcal{O}_d : \mathcal{O}_{d,m}| = m$ e $m\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}_{d,m}$, portanto $PSL_2(\mathcal{O}_d, m\mathcal{O}_d) \leq PSL_2(\mathcal{O}_{d,m})$ e daí $[\Gamma_d : \Gamma_{d,m}]$ é finito. Em particular, $\Gamma_{3,2}$ é um subgrupo de congruência de Γ_3, vide [36].

R. M. Scarth computou algebricamente em [36] que $[\Gamma_3 : \Gamma_{3,2}] = 10$. Além disso, obteve uma apresentação para $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$ e portanto uma apresentação para

$$\Gamma_{3,2} = PSL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]) =< A, T, W | A^2, (AT)^3, (W^{-1}AWA)^3, [T, W] >,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $W = T^{-1}U$ com $U = \begin{pmatrix} 1 & 2\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e mostrou

Teorema 2.2.8 (Scarth, R.M.). *$\Gamma_{3,2}$ é uma HNN-extensão de $K_{3,2}$ com o grupo modular M associado, onde $K_{3,2} = S_3 *_{C_3} D(3,3,3)$ e $D(3,3,3) =< x, y | x^3, y^3, (xy)^3 >$ é um grupo de Von Dyck's.*

Demonstração: Considere a apresentação de $\Gamma_{3,2}$

$$< a, t, w | a^2, (at)^3, (w^{-1}awa)^3, [t, w] > .$$

Seja $v = w^{-1}aw$, então por transformações de Tietze segue que

$$< a, t, v, w | a^2, (at)^3, (av)^3, v^2, (tv)^3, t = w^{-1}aw, v = w^{-1}aw > .$$

Seja $K_{3,2} =< a, t, v | a^2, (at)^3, (av)^3, v^2, (tv)^3 >$. Primeiramente, afirmamos que $PSL_2(\mathcal{O}_{3,2})$ é uma HNN-extensão de $K_{3,2}$ com $< a, t >\cong M \cong< v, t >$ o subgrupo associado e letra estável w.

De fato, considere a aplicação $\phi : M \to< a, t >$ definida por

$$\begin{aligned} \phi : M =< x, y | x^2, y^3 > \quad &\longrightarrow \quad < a, t > \\ x \longmapsto & \quad a \\ y \longmapsto & \quad at. \end{aligned}$$

Como $(\phi(x))^2 = 1 = (\phi(y))^3$, temos que $\phi(x)$ e $\phi(y)$ satisfazem as relações em M, logo pelo Teorema de Von Dyck´s segue que ϕ se extende para um epimorfismo $M \twoheadrightarrow< a, t >$. Mas como $< a, t >\leq K_{3,2}$, a restrição a $< a, t >$ do epimorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \quad K_{3,2} \longrightarrow & \quad M =< x, y | x^2, y^3 > \\ a \longmapsto & \quad x \\ t \longmapsto & \quad xy \\ v \longmapsto & \quad x. \end{aligned}$$

implica que $< a, t >\twoheadrightarrow M$, logo $< a, t >\cong M$. De maneira análoga, $< v, t >\cong M$. Agora seja $\theta : K_{3,2} \to K_{3,2}$ o automorfismo dado por

$$\begin{aligned} \theta : \quad K_{3,2} \longrightarrow & \quad K_{3,2} \\ a \longmapsto & \quad v \\ v \longmapsto & \quad a \\ t \longmapsto & \quad t. \end{aligned}$$

Basta mostrar agora que $\theta(< a, t >) =< v, t >$ e a afirmação de que $\Gamma_{3,2} = HNN(K_{3,2}, M, w)$ seguirá da Definição 2.1.1 de HNN-extensão.

Pela definição de θ, temos que $\theta(a) = v$, $\theta(t) = t \in< v, t >$, logo $\theta(< a, t >) \leq< v, t >$. De modo análogo, $\theta(< v, t >) \leq< a, t >$. Mas $< v, t >= \theta(\theta(< v, t >)) \leq \theta(< a, t >)$, portanto $\theta(< a, t >) =< v, t >$.

Agora falta mostrar apenas que $K_{3,2} = S_3 *_{C_3} D(3, 3, 3)$.

Considere $K_{3,2} =< a, t, v|a^2, (at)^3, (av)^3, v^2, (tv)^3 >$ e faça $s = at$ e $m = av$, logo $t = as$ e $v = am$. Portanto,

$$K_{3,2} =< a, s, m|a^2, s^3, m^3, (am)^3, (sm^2)^3 > .$$

Mas observe que

$$< a, m|a^2, m^3, (am)^2 >\cong S_3$$

e denotando $y = \overline{m}$ e tomando $x = s$ na definição dada na hipótese de $D(3, 3, 3)$, teremos que

$$< s, \overline{m}|s^3, \overline{m}^3, (s\overline{m}^{-1})^3 >\cong D(3, 3, 3)$$

portanto segue da Definição 2.1.1 que $K_{3,2} = S_3 *_{m=\overline{m}} D(3, 3, 3)$, onde $m = \overline{m}$ denota é o subgrupo amalgamado cíclico $< m >\cong< \overline{m} >$ em comum de S_3 e $D(3, 3, 3)$.

□

Com a demonstração do Corolário a seguir sobre conjugação dos subgrupos cíclicos finitos de ordem 2 de $\Gamma_{3,2}$, encerraremos esta seção.

Corolário 2.2.9. *Os subgrupos cíclicos finitos de ordem* 2 *em* $\Gamma_{3,2}$ *são conjugados entre si.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.8 tem-se que $\Gamma_{3,2} = HNN(K_{3,2}, M, t)$ onde M é o grupo modular associado, $K_{3,2} = S_3 *_{C_3} D(3, 3, 3)$ e $D(3, 3, 3) =< x, y|x^3, y^3, (xy)^3 >$ é um grupo de Von Dyck's. Logo, pela Proposição 2.1.2 os subgrupos cíclicos finitos de ordem 2 de $\Gamma_{3,2}$ são conjugados no grupo base $K_{3,2}$ e tem-se também que os subgrupos cíclicos finitos de ordem 2 de $K_{3,2}$ são conjugados nos fatores S_3 ou $D(3, 3, 3)$.

Segue que quaisquer subgrupos cíclicos de ordem 2 em $\Gamma_{3,2}$ são conjugados em S_3, pois $D(3, 3, 3)$ só possui elementos finitos de ordem 3 e todos os 2-subgrupos de Sylow de S_3 são conjugados entre si. Ou seja, os elementos de ordem 2 de $\Gamma_{3,2}$ são conjugados entre si.

□

2.3 Centralizadores em $SL_2(\mathbb{C})$

Os dois Lemas que seguem sobre centralizadores de elementos em $GL_2(\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C})$ e em Γ_d têm como referências principais [8], [16] e [2].

Lema 2.3.1. *Se $g \in G = GL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C})$ tal que $g \notin Z(G)$, então $C = C_G(g)$ é abeliano.*

Demonstração: Seja $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, $ad - bc \neq 0$. Pela forma canônica de Jordan podemos supor que $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $ad \neq 0$. Calcularemos agora o centralizador de g, temos dois casos a considerar.

Se os autovalores de g são distintos, temos que g é diagonalizável e então $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, vejamos os elementos $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ de $GL_2(\mathbb{C})$ que comutam com g.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax & yd \\ az & wd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ dz & dw \end{pmatrix}.$$

Logo temos que,

$$z(a-d) = 0 \;\; e \;\; y = (a-d) = 0,$$

o que implica $y = z = 0$. E desta forma o centralizador de g corresponde à:

$$C_{GL_2(\mathbb{C})}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \;\middle|\; xw \neq 0 \right\}.$$

Agora se $a = d$, isto é, se os autovalores são iguais, temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ az & aw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx + ay \\ az & bz + aw \end{pmatrix}.$$

De onde obtemos $bz = 0$ e $b(x - w) = 0$, como $g \notin Z(G)$ e $b \neq 0$ o centralizador de g é:

$$C_{GL_2(\mathbb{C})}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \;\; x \;\neq 0 \right\}.$$

Portanto, em qualquer um dos casos acima temos que o centralizador de um elemento $g \in GL_2(\mathbb{C})$ é abeliano. Agora observando que $C_{GL_2(\mathbb{C})}(g) \cap SL_2(\mathbb{C}) = C_{SL_2(\mathbb{C})}(g)$, segue então que o centralizador de um elemento $g \in SL_2(\mathbb{C})$ é abeliano. $\square$

Conforme [16], temos que os elementos de ordem finita em Γ_d são de ordem 2 ou 3. E os únicos subgrupos finitos de Γ_d são isomorfos a C_2, C_3, D_2, S_3 ou A_4. Porém, essas possibilidades dependem de cada d e conforme a Proposição 6 de [2], temos

Teorema 2.3.2. *(Berkove-Juan-Pineda)*

d	$G \leq \Gamma_d, \lvert G\rvert < \infty$
1	$C_2,\ C_3,\ D_2,\ S_3,\ A_4$
2	$C_2,\ C_3,\ D_2,\ A_4$
3	$C_2,\ C_3,\ S_3,\ A_4$
7	$C_2,\ C_3,\ S_3$
11	$C_2,\ C_3,\ A_4.$

Em B. Fine [16], página 107, foi afirmado que os únicos subgrupos abelianos de Γ_d, para todo d, são C_2, C_3, D_2, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Além disso, Fine listou os subgrupos abelianos nos casos, $d = 2, 7, 11$. Porém, Berkove e Juan-Pineda, [2], mostraram que a lista de Fine era parcial e apresentaram a lista completa de subgrupos abelianos, a menos de isomorfismos, para os casos $d = 1, 2, 7, 11$. Tal lista completa foi obtida essencialmente da decomposição não-trivial em produto livre com amalgamação e, para $d \neq 1$, HNN-extensão. Especificamente

Teorema 2.3.3 (Berkove-Juan-Pineda). *Para $d = 1, 2, 7, 11$ os subgrupos abelianos de Γ_d são isomorfos a um dos seguintes*

$$C_2, C_3, D_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times C_2, \mathbb{Z} \times C_3.$$

Observação 2.3.4. *Além disso, para $d = 3$, foi mostrado em [2] que o centralizador de um elemento de ordem 2 ou 3 é isomorfo a $\mathbb{Z} \times C_2 \cong < M = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{-3} \\ \sqrt{-3} & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} \sqrt{-3} & -2 \\ 2 & \sqrt{-3} \end{pmatrix} >$ ou C_3, respectivamente, onde, por inspeção, $< M > \cong < N > \cong \mathbb{Z}$, $(MN)^2 = 1$, $M^i N^j = M^{(i-j)} M^j N^j = M^{(i-j)} (MN)^{\epsilon}, \epsilon = 0$ ou 1.*

Em [4], Teorema 14, foram classificadas todas as possibilidades, a menos de isomorfismos, para os subgrupos virtualmente cíclicos infinitos, G, de todos os grupos de Bianchi Euclideanos Γ_d

Teorema 2.3.5. *(Berkove-Farrell-Juan-Pineda-Person)*

d	$G \leq \Gamma_d$
1	$\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times C_3, D_\infty, G_2$
2	$\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times C_2, \mathbb{Z} \times C_3, D_\infty, G_1$
3	$\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times C_2, D_\infty$
7	$\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times C_2, \mathbb{Z} \times C_3, D_\infty$
11	$\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times C_2, \mathbb{Z} \times C_3, D_\infty$

onde $G_1 = D_\infty \times C_2$ *e* $G_2 = S_3 *_{C_3} S_3$.

Em particular, para $d = 3$ tem-se, consequentemente, que $\mathbb{Z} \times C_3$ não é um subgrupo (abeliano) de Γ_3.

Também foi demonstrado em [4], página 13, Lema 11, que $PSL_2(\mathbb{C})$ não contém subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z} \times D_2$. Logo, a mesma conclusão vale para Γ_d.

O Lema a seguir será essencial na demonstração do Teorema Principal.

Lema 2.3.6. *[9] Seja $\overline{g} \in \Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d)$ um elemento de ordem infinita, onde $\mathcal{O}_d$ é o anel de inteiros do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, para $d = 1, 2, 3, 7, 11$. Então o centralizador $C_{\Gamma_d}(\overline{g})$ de $\overline{g}$ em Γ_d é abeliano.*

Demonstração: Considere a projeção $\varphi : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/Z$, onde $Z = Z(GL_2(\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \neq 0 \right\}$ é o centro de $GL_2(\mathbb{C})$, que associa a cada $g \in GL_2(\mathbb{C})$ a sua classe $\overline{g} = gZ$. Seja $\overline{g} \in PGL_2(\mathbb{C})$ com $g \notin Z$. Um elemento $hZ \in PGL_2(\mathbb{C})$ centraliza gZ se, e somente se, $hZ(gZ)h^{-1}Z = gZ$. Escrevamos então a imagem inversa do centralizador do elemento $\overline{g} \in PGL_2(\mathbb{C})$:

$$\varphi^{-1}(C_{PGL_2(\mathbb{C})}(\overline{g})) = \left\{ h \in GL_2\mathbb{C} \mid hgh^{-1} = gz, \text{para algum} z \in Z \right\}.$$

Pela fórmula canônica de Jordan podemos supor que $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix}$ e $gz = \begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & aw \end{pmatrix}$. Como matrizes conjugadas têm os mesmos autovalores, estas matrizes só podem ser conjugadas em $GL_2(\mathbb{C})$ se $a = 1$ ou se $aw = x$ e $w = ax$. No segundo caso temos $a^2 = 1$ e logo $a = -1$. Mas a matriz $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ tem ordem finita em Γ_d, pois o determinante dela é $-x^2$ que tem que ser uma unidade no anel $\mathcal{O}_d$. Como g tem ordem infinita por hipótese, $a = 1$.

Assim temos que

$$\varphi^{-1}(C_{PGL_2(\mathbb{C})}(\overline{g})) = C_{GL_2(\mathbb{C})}(g).$$

Como $Z \subset C_{GL_2(\mathbb{C})}(g)$ temos que $C_{PGL_2(\mathbb{C})}(\overline{g})$ é o quociente do centralizador de g em $GL_2(\mathbb{C})$ pelo centro, isto é, $C_{PGL_2(\mathbb{C})}(\overline{g}) \cong C_{GL_2(\mathbb{C})}(g)/Z$. Pelo Lema 2.3.1 o centralizador de g em $GL_2(\mathbb{C})$ é abeliano, logo em $PGL_2(\mathbb{C})$ também. $\square$

Mencionamos a seguir alguns fatos sobre o grupo alternado A_5 que serão necessários na demonstração do Teorema Principal

2.4 Propriedades de A_5

Lema 2.4.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) *O grupo A_5 é um grupo simples de ordem* 60.

(2) *O grupo A_5 possui exatamente:*

um elemento de ordem 1*;*

quinze elementos de 2*;*

vinte elementos de ordem 3*;*

vinte e quatro elementos de ordem 5.

(3) *O grupo A_5 possui exatamente:*

quinze subgrupos de ordem 2*, todos eles conjugados entre si;*

dez subgrupos de ordem 3*, todos eles conjugados entre si;*

cinco subgrupos de ordem 4*, todos eles conjugados entre si e isomorfos a $C_2 \times C_2$;*

seis subgrupos de ordem 5*,todos eles conjugados entre si;*

dez subgrupos de ordem 6*, todos eles conjugados entre si e isomorfos a S_3;*

seis subgrupos de ordem 10*, todos eles conjugados entre si e isomorfos a D_5;*

cinco subgrupos de ordem 12*, todos eles conjugados entre si e isomorfos a A_4;*

nenhum subgrupo de ordem 15*,* 20*,* 30.

A demonstração dos fatos acima acerca de A_5 pode ser consultada em [19], página 258.

Capítulo 3

Resultado Principal

3.1 GAP

Agora faremos uso do programa GAP, [18], para computador quocientes finitos de Γ_3 com o intuito de mostrarmos a propriedade de separabilidade sob conjugação para os elementos de ordem 3 em Γ_3.

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

onde $w = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Nos cálculos que seguem, usaremos a apresentação de

Lema 3.1.1.

$$\Gamma_3 =< A, L, T, U | A^2, (AT)^3, L^3, (AL)^2, (UAL)^3, TUT^{-1}U^{-1}, T^{-1}L^{-1}UL, UTL^{-1}TL >$$

dada em Fine, [16], e o resultado de Berkove e Juan-Pineda, [2], que diz que únicos representantes das classes de conjugação de ordem 3 de Γ_3 são

Lema 3.1.2.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (AT),$$

$$B_2 = {B_1}^2 = (AT)^2$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = L$$

com $w = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Proposição 3.1.3. *Os elementos de ordem* 3 *em* Γ_3 *são separáveis sob conjugação.*

Demonstração: Para tal, primeiro criamos um grupo livre, com $n = 4$ geradores, por meio da função

```
FreeGroup(n)
```

```
gap> f:=FreeGroup(4);
<free group on the generators [ f1, f2, f3, f4 ]>
```

Em seguida, para obtermos a apresentação de Γ_3 no GAP, criamos um grupo g que é quociente do grupo livre f pelas relações de Γ_3 dadas em termos dos geradores livres de f.

```
gap> g:=f/[f.1^2, (f.1*f.3)^3, f.2^3, (f.1*f.2)^2, (f.4*f.1*f.2)^3,
f.3*f.4*f.3^-1*f.4^-1, f.3^-1*f.2^-1*f.4*f.2, f.4*f.3*f.2^-1*f.3*f.2];
<fp group on the generators [ f1, f2, f3, f4 ]>
```

logo a apresentação de g coincide com a apresentação de Γ_3.

Agora fazemos uso da função

```
GQuotients
```

que computará um epimorfismo de g para o grupo alternado A_4

```
gap> quo:=GQuotients(g, AlternatingGroup(4));
[ [ f1, f2, f3, f4 ] -> [ (1,2)(3,4), (), (1,2,3), (1,2,3) ] ]
```

Observe que o resultado foi dado em forma de uma lista com apenas uma posição e o epimorfismo $\phi : g \to A_4$ é o seguinte

```
gap> phi:=quo[1];
[ f1, f2, f3, f4 ] -> [ (1,2)(3,4), (), (1,2,3), (1,2,3) ]
gap> IsSurjective(phi);
true
gap> a4:=Image(phi);
Alt( [ 1 .. 4 ] )
```

portanto $\phi(AT) = (1,2)(3,4)(1,2,3) = (1,3,4)$, $\phi((AT)^2) = (1,3,4)^2 = (1,4,3)$ e $\phi(L) = ()$.

É claro que $(1,3,4)$ e $(1,4,3)$ não são conjugados em A_4. E as computações a seguir mostrarão que $\phi(AT) = (1,3,4)$, $\phi(AT)^2 = (1,4,3)$ e $\phi(L) = ()$ não são conjugados dois-a-dois em A_4, logo vale a Proposição 3.1.3, isto é, os elementos de ordem 3 de Γ_3 são separáveis sob conjugação. Para tal, fizemos uso da função

```
IsConjugate(A_4,x,y)
```

que computa se x e y são conjugados em A_4. De outra maneira, também computamos as classes de conjugação de A_4 e verificamos o mesmo resultado.

```
gap> (1,2)*(3,4)*(1,2,3);
(1,3,4)
gap> (1,3,4)^2;
(1,4,3)
gap> IsConjugate(a4,(1,3,4), (1,4,3));
false
gap> list:=ConjugacyClasses(a4);
[ ()^G, (1,2)(3,4)^G, (1,2,3)^G, (1,2,4)^G ]
gap> (1,3,4) in Elements(list[3]);
true
gap> (1,4,3) in Elements(list[3]);
false
gap> (1,4,3) in Elements(list[4]);
true
gap> (1,3,4) in Elements(list[4]);
false
```

□

E para encerrar essa seção mostraremos que

Lema 3.1.4. *Existem exatamente* 10 *subgrupos de índice* 10 *em* Γ_3 *e todos eles são conjugados entre si. Em particular,* $\Gamma_{3,2}$ *é um deles.*

Demonstração: Usaremos a função

```
LowIndexSubgroupsFpGroup(G,H,index)
```

que computa os representantes das classes de conjugação de subgrupos de G que contém os subgrupos $H \leq G$ e que tem índice menor ou igual a *index*. Tomaremos H trivial, equivalentemente, H pode ser omitido dos parâmetros da função.

```
gap> S:=LowIndexSubgroupsFpGroup(g,10);;L:=List(S,K->Index(g,K));
[ 1, 3, 6, 9, 7, 7, 7, 7, 10, 6, 5, 4, 8, 8 ]
```

Observe que $S[9]$ corresponde a nona posição da lista que tem o único representante dos subgrupos de índice 10 em g. Vamos determinar quantos subgrupos estão na lista de conjugados de $S[9]$ em g

```
gap> GeneratorsOfGroup(S[9]);
[ f1, f2, f3^-2, f3*f1*f4^-2*f1^-1*f3^-1 ]
gap> h:=S[9];
Group([ f1, f2, f3^-2, f3*f1*f4^-2*f1^-1*f3^-1 ])
gap> Index(g,h);
10
gap> cch:=ConjugateSubgroups(g,h);
[ Group([ f1, f2, f3^-2, f3*f1*f4^-2*f1^-1*f3^-1 ]),
  Group([ f3^-1*f1*f3, f3^-1*f2*f3, f3^-2, f1*f4^-2*f1^-1 ]),
  Group([ f4^-1*f1*f4, f4^-1*f2*f4, f4^-1*f3^-2*f4,
      f4^-1*f3*f1*f4^-2*f1^-1*f3^-1*f4 ]),
  Group([ f1^-1*f3^-1*f1*f3*f1, f1^-1*f3^-1*f2*f3*f1, f1^-1*f3^-2*f1, f4^-2
     ]), Group([ f2^-1*f3^-1*f1*f3*f2, f2^-1*f3^-1*f2*f3*f2, f2^-1*f3^-2*f2,
      f2^-1*f1*f4^-2*f1^-1*f2 ]),
  Group([ f1^-1*f4^-1*f1*f4*f1, f1^-1*f4^-1*f2*f4*f1,
      f1^-1*f4^-1*f3^-2*f4*f1, f1^-1*f4^-1*f3*f1*f4^-2*f1^-1*f3^-1*f4*f1 ]),
  Group([ f2*f1^-1*f3^-1*f1*f3*f1*f2^-1, f2*f1^-1*f3^-1*f2*f3*f1*f2^-1,
      f2*f1^-1*f3^-2*f1*f2^-1, f2*f4^-2*f2^-1 ]),
  Group([ f4^-1*f1^-1*f3^-1*f1*f3*f1*f4, f4^-1*f1^-1*f3^-1*f2*f3*f1*f4,
      f4^-1*f1^-1*f3^-2*f1*f4, f4^-2 ]),
  Group([ f3^-1*f1^-1*f4^-1*f1*f4*f1*f3, f3^-1*f1^-1*f4^-1*f2*f4*f1*f3,
      f3^-1*f1^-1*f4^-1*f3^-2*f4*f1*f3, f3^-1*f1^-1*f4^-1*f3*f1*f4^-2*f1^
        -1*f3^-1*f4*f1*f3 ]),
  Group([ f3^-1*f2*f1^-1*f3^-1*f1*f3*f1*f2^-1*f3,
      f3^-1*f2*f1^-1*f3^-1*f2*f3*f1*f2^-1*f3,
      f3^-1*f2*f1^-1*f3^-2*f1*f2^-1*f3, f3^-1*f2*f4^-2*f2^-1*f3 ]) ]
gap> Length(cch);
10
```

o que completa a demonstração.

□

A proposição a seguir é essencial para a demonstração do resultado principal desta tese pois implicará na separabilidade sob conjugação dos elementos de ordem 2 em Γ_3.

Proposição 3.1.5. *Todos os subgrupos cíclicos finitos de mesma ordem de Γ_3 são conjugados para $\Gamma_{3,2}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{O}_3 = \mathbb{Z} + w\mathbb{Z}$ o anel de inteiros algébricos do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, onde $w = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Do Teorema 2.3.2 tem-se que os únicos subgrupos finitos cíclicos finitos de $\Gamma_3 = PSL_2(\mathcal{O}_3)$ são isomorfos a C_2 ou C_3.

Considere o epimorfismo

$$\phi : PSL_2(\mathcal{O}_3) \twoheadrightarrow PSL_2(\mathcal{O}_3/2\mathcal{O}_3)$$

induzido pelo epimorfismo de anéis $\mathcal{O}_3 \twoheadrightarrow \mathcal{O}_3/2\mathcal{O}_3$.

Do Lema 2.2.3, segue que $\mathcal{O}_3/2\mathcal{O}_3 \cong \mathbb{F}_4$ e do Lema 2.2.7 tem-se que $PSL_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$.

Como $2\mathcal{O}_3 \subseteq \mathcal{O}_{3,2} = \mathbb{Z}+2w\mathbb{Z}$ tem-se que $\Gamma_{3,2}$ contém o $Ker(\phi) = \{\pm A \in SL_2(\mathcal{O}_3) | A \equiv Imod\ 2\mathcal{O}_3\}$ mod $\pm I$, isto é, contém o subgrupo de congruência principal $PSL_2(\mathcal{O}_3, 2\mathcal{O}_3)$ e por [36] segue que o índice de $\Gamma_{3,2}$ em Γ_3 é 10. Portanto, $\phi(\Gamma_{3,2}) \cong S_3$ a menos de conjugação, pois do Lema 2.4.1 todos os 10 subgrupos de ordem 6 em A_5 são conjugados entre si e isomorfos a S_3.

Agora um dado subgrupo cíclico C_n de ordem n, $n = 2$ ou 3, de $\Gamma_3 \backslash \Gamma_{3,2}$, ele é levado por φ em um subgrupo cíclico de mesma ordem n em A_5 com $n = 2$ ou 3, respectivamente. Ou seja, temos que $\phi(C_n) = \overline{C_n} \subseteq A_5$, onde $\overline{C_n}$ corresponde a imagem de C_n por φ em A_5, além disso, $|\overline{C_n}| = n$, $n = 2$ ou 3. Mas como em A_5 todos os subgrupos de mesma ordem são conjugados entre si, vide Lema 2.4.1, logo $\exists\ \overline{1} \neq \overline{g} \in A_5$ tal que $\overline{C_n}^{\overline{g}} \subseteq \overline{\Gamma_{3,2}}$. E por sobrejetividade, $\exists\ 1 \neq g \in \Gamma_3$ tal que $\phi(g) = \overline{g}$ e ${C_n}^g \subseteq \Gamma_{3,2}$, pois do contrário $\phi({C_n}^g) = \overline{C_n}^{\overline{g}} \not\subseteq \Gamma_{3,2}/Ker(\phi) \cong \overline{\Gamma_{3,2}}$, uma contradição. E isto demonstra a Proposição em questão.

□

Corolário 3.1.6. *Todos os elementos de ordem* 2 *em* Γ_3 *são separáveis sob conjugação.*

Demonstração: Consequência imediata do resultado acima e do Corolário 2.2.9. □

3.2 Teorema Principal

A demonstração do Teorema a seguir é baseada na idéia da demonstração do Teorema 2.2.2 da Tese de Doutorado de S.C. Chagas [8] e no resultado (preprint) de Chagas-Zalesski, [9]

Teorema 3.2.1 (Chagas-Zalesski-2006)**.** *Seja H um subgrupo de $\Gamma_d = PSL_2(\mathcal{O}_d)$, $d = 1, 2, 3, 7, 11$, de índice finito e livre de torção. Então H é separável sob conjugação.*

Teorema 3.2.2. Γ_3 *é separável sob conjugação.*

Demonstração: Conforme o Teorema 2.3.2, as ordens finitas dos elementos de Γ_3 são apenas 2 ou 3. Já mostramos a separabilidade sob conjugação para tais ordens finitas, logo basta mostrar a propriedade em questão para elementos de ordem infinita em Γ_3.

Dados $g_1, g_2 \in \Gamma_3$ elementos de ordem infinita com $g_1 = {g_2}^{\gamma}$ para $\gamma \in \widehat{\Gamma_3}$, suponha por absurdo que g_1 e g_2 não são conjugados em Γ_3.

Seja $H \leq \Gamma_3$ livre de torção tal que $[\Gamma_3 : H] = m \in \mathbb{N}$. Segue por [9] que H é separável sob conjugação.

Temos que ${g_1}^m, {g_2}^m \in H$, pois $[\Gamma_3 : H] = m$. Mas pelo Lema 1.3.1, temos que $\widehat{\Gamma_3} = \Gamma_3 \widehat{H}$, logo existem $\gamma_0 \in \Gamma_3$ e $d \in \widehat{H}$ tais que $\gamma = \gamma_0 d$. Assim, tem-se que ${g_1}^m = ({g_2}^{\gamma})^m = ({g_2}^m)^{\gamma_0 d} \in H$ e daí substituindo, se necessário, g_2 por um conjugado em Γ_3, a saber ${g_2}^{{\gamma_0}^{-1}}$, podemos supor sem perda de generalidade que ${g_1}^m$ e ${g_2}^m$ são conjugados em $\widehat{H}$. Mas H é separável sob conjugação, logo ${g_1}^m$ e ${g_2}^m$ são conjugados em H e portanto podemos supor sem perda de generalidade que ${g_1}^m = {g_2}^m$.

Defina $N = < {g_2}^m >$ e $K = < g_1, g_2 >$. É claro que K centraliza N. Mas o centralizador de um elemento de ordem infinita em Γ_3 é abeliano, vide Lema 2.3.6 e sendo K 2-gerado, segue que as únicas possibilidades são $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ caso K seja livre de torção e a outra possibilidade, caso K tenha torção, segue por Berkove-Farrell-Juan-Pineda-Pearson em 2.3.5 que K será isomorfo a $\mathbb{Z} \times C_2$, pois K é virtualmente cíclico infinito. Portanto K só pode ser isomorfo a um dos seguintes 3 casos:

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times C_2$$

onde $\mathbb{Z} \times C_2$ corresponde ao centralizador de um elemento de ordem 2.

No primeiro caso, $K = \mathbb{Z}$, logo $g_1 = g_2$, pois ${g_1}^m = {g_2}^m$. De fato, $K = \mathbb{Z} =< t >$ implica que existem inteiros k e r tais que $g_1 = t^k$ e $g_2 = t^r$ e portanto

$$g_1^m = t^{mk} = t^{mr} = g_2^m$$

logo $m(k - r) = 0$, daí $k = r$ e $g_1 = g_2$, uma contradição.

No segundo caso, $K = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e de maneira análoga ao primeiro caso segue que $g_1 = g_2$, uma contradição.

E no último caso, segue que da Observação 2.3.4 que $K = \mathbb{Z} \times C_2 =< M, N >$, onde $M = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{-3} \\ \sqrt{-3} & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} \sqrt{-3} & -2 \\ 2 & \sqrt{-3} \end{pmatrix} >$, $(MN)^2 = 1$, $MN = NM$ e $M^i N^j = M^{(i-j)} M^j N^j = M^{(i-j)} (MN)^{\epsilon}, \epsilon = 0$ ou 1. Logo existem inteiros k e r tais que $g_1 = M^k (MN)^{\epsilon_1}$ e $g_2 = M^r (MN)^{\epsilon_2}$ com $\epsilon_i = 0$ ou 1. Como $({g_1}^m)^2 = ({g_2}^m)^2$ por hipótese, tem-se que $k = r$. E se $\epsilon_1 = \epsilon_2$, então $g_1 = g_2$, uma contradição. Portanto, podemos supor $\epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_2 = 0$.

Agora, basta mostrar que M^r e $M^r(MN)$ (ou $N^r(MN)$) não são conjugadas em algum quociente finito de $PSL_2(\mathcal{O}_3)$, pois isso será uma contradição com a hipótese de que g_1 e g_2 são conjugados no completamento $\widehat{PSL_2(\mathcal{O}_3)}$.

Seja $A = MN = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Denote por $tr(X)$ o traço de uma matriz X.

Primeiramente, observe que $tr(M) = 4 \neq 2\sqrt{-3} = tr(N)$, logo M e N não são conjugadas em $PSL_2(\mathcal{O}_3)$ e como o ideal $4\mathcal{O}_3$ contém $4 = tr(M)$, mas não contém $2\sqrt{-3} = tr(N)$, segue que no quociente $\mathcal{O}_3/4\mathcal{O}_3$, $tr(M) \neq tr(N)$ são diferentes. Logo, M e N não são conjugadas módulo $4\mathcal{O}_3$, ou seja, não são conjugadas no quociente finito $PSL(2, \mathcal{O}_3/4\mathcal{O}_3)$.

Observe que $M^2 = \begin{pmatrix} 7 & -4\sqrt{-3} \\ 4\sqrt{-3} & 7 \end{pmatrix}$ e para $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ tem-se que

$$\begin{pmatrix} p_1 & -p_2\sqrt{-3} \\ p_2\sqrt{-3} & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{-3} \\ \sqrt{-3} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2p_1 + 3p_2) & -(p_1 + 2p_2)\sqrt{-3} \\ (p_1 + 2p_2)\sqrt{-3} & (2p_1 + 3p_2) \end{pmatrix}.$$

Indutivamente, temos que M^r é uma matriz da forma

$$M^r = \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{-3} \\ b\sqrt{-3} & a \end{pmatrix}$$

com a e b inteiros. Segue que

$$M^r A = \begin{pmatrix} -b\sqrt{-3} & -a \\ a & b\sqrt{-3} \end{pmatrix}$$

logo $tr(M^r) \neq tr(M^r A)$, portanto M^r e $M^r A$ não são conjugadas em $PSL_2(\mathcal{O}_3)$. Mas também $tr(M^r) \neq tr(M^r A)$ em algum quociente finito de $PSL_2(\mathcal{O}_3)$, pois o anel $\mathcal{O}_3$ é residualmente finito.

Portanto, nos 3 casos temos que $g_1 = g_2$ e esta contradição mostra que Γ_3 é separável sob conjugação.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Baumslag, G., *Residual Nilpotence and Relations in Free Groups*, J. Algebra **2** (1965) 271-282.

[2] Berkove, E., Juan-Pineda, D., *On the K-theory of Bianchi groups*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **3** (1996), 15-29.
$http://ww2.lafayette.edu/\ berkovee/Research/Papers.htm$

[3] Berkove, E., *The mod-2 Cohomology of the Bianchi Groups*, Transactions of the American Math. Soc., 352, **10** (2000) 4585-4602.

[4] Berkove, E., Farrell, F. T., Juan-Pineda, D., Pearson, K., *The Farrell-Jones Isomorphism Conjecture for finite covolume hyperbolic actions and the algebraic K-theory of Bianchi groups*, Transactions of the American Math. Soc., 352, **12** (2000) 5689-5702.

[5] Blackburn, N., *Conjugacy in Nilpotent Groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965) 143-148.

[6] Bourbaki, N., *General topology*, Springer, Berlin, 1989.

[7] Britto, J., *On the constrution of non-congruence subgroups*, Acta. Arith., **33** (1997) 261-267.

[8] Chagas, S. C., *Separabilidade sob Conjugação de Grupos Comensuráveis com Grupos de Bianchi Euclideanos*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2005.

[9] Chagas, S. C., Zalesski, P.A., *The Figure eight knot group is conjugacy separable*, Universidade de Brasília, 2006.

[10] Chagas, S. C., Zalesski, P.A., *Limits groups are conjugacy separable*, International Journal of Algebra and Computation, **17** (2007) 851-857.

[11] Chagas, S. C., Zalesski, P.A., *Finite Index Subgroups of Conjugacy Separable Groups*, Forum Mathematicum, 2008.

[12] Dicks, W., *Groups, Trees and Projective Modules*, Lecture Notes in Mathematics, No. 790, Springer-Verlag, 1980.

[13] Dyer, J. L., *Separating Conjugates in Free By Finite Groups*, London Math. Soc., **2** (1979) 215-221.

[14] Dyer, J. L., *Separating Conjugates in Amalgamated Free Products and HNN extensions*, J. Australian Math. Soc., **29** (1980) 35-51.

[15] Elstrodt, J., Grunewald, F., Mennicke, J. L., *Groups acting on hyperbolic space: harmonic analysis and number theory*, Berlin, New York: Springer, 1998, 524 p., ISBN 3540627456.

[16] Fine, B., *Algebraic Theory of the Bianchi Groups*, Marcel Dekker, New York, 1989.

[17] Formanek, E., *Conjugacy Separability in Polycyclic Groups*, J. Algebra, **42** (1976) 1-10.

[18] GAP (Groups, Algorithms and Programming)
$http://www.gap-system.org/gap.html$

[19] Garcia, A., Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*, IMPA, 2nd ed., 2003.

[20] Goryaga, A.V., *Example of a finite extension of an FAC-group that is not an FAC-group*, (Russian) Sibirski. Mat. Zh. 27 (1986), no. 3, 203-205, 225.

[21] Grunewald, F., Schwermer, J., *Free Non-Abelian Quotients of SL_2 over Orders of Imaginary Quadratic Number Fields*, J. Algebra, **69** (1981) 162-175.

[22] Grunewald, F., Schwermer, J., *On the concept of level for the subgroups of SL_2 over arithmetic rings*, Preprint, 1998.

[23] Johnson, D. L., *Presentations of Groups*, London Mathematical Society, Student Texts, 15, 1990.

[24] Lubotzky, A., *Free Quotients and the Congruence Kernel of SL_2*, J. Algebra, **77** (1982) 411-418.

[25] Magnus, W., Karras, A., Solitar, D., *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations*, 2nd ed., New york: Dover, 1976, 444 p., ISBN 0486438309.

[26] Mal'cev, A.I., *On Homomorphism Onto Finite Groups*, Uchen. Zap. Ivanovskogo Gos. Ped. Ins., **18** (1958) 40-60.

[27] Manin, Yu. I., Panchishkin, A. A., *Introduction to modern number theory : fundamental problems, ideas and theories*, Springer, second edition, 2005.

[28] Metaftsis, V., Sykiotis, M., *On the residual finiteness of outer automorphisms of relatively hyperbolic groups II*, In Geometriae Dedicata, 117-125 (2008).

[29] Remeslennikov, V. N., *Conjugacy in Polycyclic Groups*, Algebra and Logic **8** (1969) 404-411.

[30] Remeslennikov, V. N., *Groups that are Residually finite with respect to Conjugacy*, Siberian Math. J., **12** (1971) 783-792.

[31] Ribes, L., Zalesski, P.A., *Conjugacy Separability of Amalgamated Free Products of Groups*, J. Algebra, **179** (1996) 751-774.

[32] Ribes, L., Segal, D., Zalesski, P.A., *Conjugacy Separability and Free Products with Amalgamation*, J. London Math. Soc., 2, **57** (1998) 609-628.

[33] Ribes, L., Zalesski, P.A., *Profinite groups*, Berlin, New York: Springer, 2000, 435 p., ISBN 3540669868.

[34] Rocco, N. R., *Uma Breve Introdução ao Sistema GAP (Groups, Algorithms and Programming)*, Apostila, 1997.

[35] Rotman, J.J., *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, revised 2nd ed., 2003.

[36] Scarth, R. M., *Normal Congruence Subgroups of the Bianchi Groups and Related Groups*, Ph.D. Thesis, University of Glasgow, 2003.

[37] Segal, D., *Some aspects of profinite group theory*, 2008.
http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0703/0703885v1.pdf

[38] Stebe, P.F., *A Residual Property on Certain Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **26** (1970) 37-42.

[39] Tang, C. Y., *Conjugacy Separability of Generalized Free Product of Certain Conjugacy Separable Groups*, Canad. Math. Bull., **38** (1995) 120-127.

[40] Wilson, J. S., Zalesski, P.A., *Conjugacy Separability of Certain Torsion Groups*, Archiv der Mathematik, **67** (1997) 177-182.

[41] Wilson, J. S., Zalesski, P.A., *Conjugacy Separability of Certain Bianchi Groups and HNN extensions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **123** (1998) 227-242.

[42] Wilson, J. S., *Profinite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1998, 284 p., ISBN 0-19-850082-3.