Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Um estudo de grupos nilpotentes: O problema do isomorfismo para grupos de classe 2; Endomorfismos virtuais

por
Flávia Ferreira Ramos

Brasília
2007

Resumo

Dado um endomorfismo virtual de um grupo G conseguimos uma representação fechada por estados (ou auto-similar) de G na árvore m-ária uni-raiz, para um conveniente número natural m. Propriedades específicas são extraídas no caso em que G é nilpotente finitamente gerado livre-de-torção. Com hipóteses adicionais sobre G, obtemos limitações para o comprimento derivado e para a classe de nilpotência de G em função de m.

Em nosso trabalho buscamos também resolver o problema do isomorfismo para grupos nilpotentes de classe 2 finitamente gerados e livres-de-torção, chamados de $\mathfrak{T}_2$-grupos. Uma questão que surge naturalmente é se os quocientes finitos de um certo grupo o determinam a menos de isomorfismos. A resposta é negativa e os primeiros contra-exemplos, abordados no Cap. 1, surgem com grupos nilpotentes de classe 2. Finalmente, através de certos invariantes numéricos, apresentamos uma completa classificação para certas subclasses de $\mathfrak{T}_2$-grupos.

Palavras chaves: Grupo nilpotente finitamente gerado livre-de-torção, problema do isomorfismo, endomorfismo virtual, fechado por estados, automorfismo de árvore, autômato.

Abstract

Given a virtual endomorphism of a group G we have a state-closed (or self-similar) representation of G on a 1-rooted regular m-ary tree, for a convenient natural number m. Specific properties are extracted in case G is finitely generated torsion-free nilpotent group. Under additional hypothesis on G, we obtain bounds for the derived length and nilpotent class of G in function of m.

In our work, we also investigate the solution for the isomorphism problem for finitely generated torsion-free nilpotent groups of class 2, called the $\mathfrak{T}_2$-groups. A question that naturally arises is if the set of finite quotients of certain group determines it up to isomorphism. The answer is negative and the first counterexamples, developed in Chap. 1, arise with the nilpotent groups of class 2. Finally, through certain numerical invariants, we present a complete classification for certain subclasses of $\mathfrak{T}_2$-groups.

Key words: Finitely generated torsion-free nilpotent group, isomorphism problem, virtual endomorphism, state-closed, tree automorphism, automata.

Introdução

Este trabalho trata de dois tópicos em grupos nilpotentes finitamente gerados livres-de-torção: o primeiro concentra-se no problema do isomorfismo para grupos de classe 2 segundo os resultados obtidos por Grunewald e Scharlau em [GS79]. O segundo trata da dinâmica de endomorfismos virtuais, baseando-se nos trabalhos desenvolvidos por Nekrashevych-Sidki em [NS04] e Berlatto-Sidki em [BS07].

O problema do isomorfismo – decidir se dois dados grupos são isomorfos ou não – é o mais árduo dos três problemas clássicos em Teoria de Grupos formulados por Max Dehn no começo do século 20. A solubilidade deste problema para grupos finitamente apresentados certamente implicaria na solubilidade do problema da palavra – decidir se um produto dado nos geradores de um grupo representa o elemento trivial. Contudo, na classe dos grupos finitamente apresentados o problema do isomorfismo é não solúvel já que existem grupos finitamente apresentados para os quais o problema da palavra não é solúvel; esta última afirmação é o resultado fundamental de Novikov e Boone em [Nov55] e [Boo59], respectivamente. A questão fundamental, então, é saber para quais classes de grupos finitamente apresentados o problema é solúvel. Dentre as poucas classes para as quais o problema foi resolvido estão a dos grupos livres finitamente gerados, devido ao trabalho de Nielsen, e a dos grupos abelianos finitamente gerados. Aqui, vamo-nos restringir à classe dos grupos nilpotentes de classe 2 finitamente gerados livres-de-torção, os quais chamamos de $\mathfrak{T}_2$–grupos.

Todo grupo nilpotente finitamente gerado possui uma série policíclica e ao considerarmos o número de fatores cíclicos infinitos em uma tal série este é um invariante do grupo, conhecido como comprimento de Hirsch. Neste contexto é natural perguntar se dois grupos em $\mathfrak{T}_2$ com mesmo comprimento de Hirsch e com quocientes finitos isomorfos são isomorfos. Mostraremos que a resposta é afirmativa quando o comprimento de Hirsch é menor ou igual a 5. Mais que isso, através de um conjunto finito de invariantes numéricos chegamos a uma completa classificação dos $\mathfrak{T}_2$-grupos com comprimento de Hirsch no máximo 5, bem como de algumas outras subclasses de $\mathfrak{T}_2$-grupos: os com centro cíclico e os do tipo $\frac{F_n}{N}$, onde F_n é o grupo nilpotente livre de posto n e classe 2 e N é um subgrupo cíclico do centro de F_n. Contudo, é interessante atentarmos para a questão mais geral que é saber se os quocientes finitos de um certo grupo finitamente gerado o determinam a menos de isomorfismo. A resposta é negativa para grupos não abelianos, mais que isso, para todo $n \in \mathbb{N}$ vamos exibir explicitamente n grupos em $\mathfrak{T}_2$, dois a dois não isomorfos e com quocientes finitos isomorfos.

Um endomorfismo virtual de um grupo G é um homomorfismo $f : H \longrightarrow G$ onde H é um subgrupo de índice finito m. Dado um transversal de H em G, produzimos uma representação fechada por estados de G no grupo de automorfismos da árvore regular m-ária uni-raiz. A maioria dos fenômenos por nós observados estão intimamente ligados com os subgrupos de H que são invariantes por f. De fato, o subgrupo maximal de H que é normal em G e invariante por f — chamado de f-$core(H)$ — é precisamente o núcleo desta representação. No caso em que G é um $\mathfrak{T}$–grupo, i.e., nilpotente finitamente gerado e livre-de-torção, se o f–$core(H)$ for trivial então conseguimos uma limitação para o comprimento derivado $s(G)$ de G em termos de $l(m)$, o número de primos divisores de m contando multiplicidades. Se, mais que isso, o único subgrupo de H invariante por f for o trivial, $l(m)$ limita também a classe de nilpotência de G.

Os subgrupos invariantes por um endomorfismo virtual também estão relacionados com o fato do grupo G ser comprimível. Um grupo G é dito comprimível se todo subgrupo H de índice finito em G possui um subgrupo K isomorfo a G. Quando G é um $\mathfrak{T}_c$-grupo, $c \leq 2$, mostraremos que existe um endomorfismo virtual sobrejetivo $f : K \longrightarrow G$ onde $K \leq H$, e o único subgrupo de K invariante por f é o trivial. Como para grupos nilpotentes livres-de-torção a não existência de subgrupos f–invariantes não triviais implica na injetividade de f, teremos como conseqüencia o resultado, mostrado por Smith em [Smi85], que $\mathfrak{T}_c$-grupos são comprimíveis quando $c \leq 2$.

É interessante notar que a noção de endomorfismo virtual não é recente. Ela já se encontra no artigo de Shub [Shu69] sobre endomorfismos de variedades compactas diferenciáveis. O mesmo se pode dizer sobre grupos fechados por estados: o 2-grupo de Grigorchuk, bem como o p-grupo de Gupta-Sidki – ambos construidos na década de 80 – satisfazem tal condição, embora a idéia tenha sido formalizada somente em 2000, conforme [Sid00].

Referências Bibliográficas

[Bel03] I. Belegradek, *On co-Hopfian nilpotent groups*, Bull. London Math. Soc. **35** (2003), no. 6, 805–811.

[Boo59] W. W. Boone, *The word problem*, Annals of Mathematics **70 (2)** (1959), 207–265.

[BS66] A. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number theory*, Translated from the Russian by Newcomb Greenleaf. Pure and Applied Mathematics, Vol. 20, Academic Press, New York, 1966.

[BS07] A. Berlatto and S. Sidki, *Virtual endomorphisms of nilpotent groups*, Groups Geom. Dyn. **1** (2007), 21–46.

[CR62] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, New York: J.Wiley, 1962.

[GS79] F. J. Grunewald and R. Scharlau, *A note on finitely generated torsion-free nilpotent groups of class* 2, J. Algebra **58** (1979), no. 1, 162–175.

[Hal57] P. Hall, *Nilpotent groups*, Canadian Mathematical Congress, Summer Seminar, University of Alberta, 1957.

[Hal69] ______, *The Edmonton notes on nilpotent groups*, Queen Mary College Mathematics Notes, Mathematics Department, Queen Mary College, London, 1969.

[HJ70] M. Hall Jr., *The theory of groups*, The Macmillan Co., USA, 1970.

[Mos62] A. W. Mostowski, *On automorphisms of relatively free groups*, Fund. Math. **50** (1961/1962), 403–411.

[Nek05] V. Nekrashevych, *Self-similar groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 117, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Neu99] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[New72] M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, Pure and Applied Mathematics, Vol. 45.

[Nov55] P. S. Novikov, *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*, Trudy Mat. Inst. Steklov **44** (1955), pp 1–143, (in Russian).

[NS04] V. Nekrashevych and S. Sidki, *Automorphisms of the binary tree: state-closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms*, Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 311, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 375–404.

[Pic71] P. F. Pickel, *Finitely generated nilpotent groups with isomorphic finite quotients.*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 216–219.

[Rot95] J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Springer-Verlag, New York, 1995, Graduated Texts in Mathematics.

[Sco64] W. R. Scott, *Group theory*, Dover Publications, 1964.

[Seg83] D. Segal, *Polycyclic groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 82, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[Shu69] M. Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, Am. J. of Math. **91** (1969), 175–199.

[Sid98] S. Sidki, *Regular trees and their automorphisms*, Monografias de Matemática [Mathematical Monographs], vol. 56, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1998.

[Sid00] ———, *Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity*, J. Math. Sci. (New York) **100** (2000), no. 1, 1925–1943, Algebra, 12. MR MR1774362 (2002g:05100)

[Smi85] G. C. Smith, *Compressibility in nilpotent groups*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), no. 5, 453–457.

[Wil98] J. S. Wilson, *Profinite groups*, Clarendon Press, London Mathematical Society Monographs New Series, Oxford, 1998.

[WJ76] R. B. Warfield Jr., *Nilpotent groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 513.