

# Entropia de emaranhamento em teorias de calibre



**Marcia Rodrigues Tenser**

Orientador: Amílcar Rabelo de Queiroz

Co-orientador: Ademir Eugênio de Santana

Instituto de Física  
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada para a obtenção de Título de  
*Mestre em Física*

Brasília  
Agosto 2017



# “Entropia de emaranhamento em teorias de calibre.”

Por

**Márcia Rodrigues Tenser.**

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:



Prof. Amílcar Rabelo de Queiroz  
IF/UnB



Prof. Arsen Melikyan  
IF/UnB



Prof. Aleksandr Nikolaievich Pinzul  
IF/UnB

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque  
Coordenador de Pós-Graduação  
Instituto de Física



*Dedicado ao meu amigo Thales (in memoriam)*



# Agradecimentos

Ao professor Amílcar Rabelo de Queiroz, pelo apoio, confiança, paciência e dedicação. Pela orientação e por tantos ensinamentos, que não cabem em palavras. *Piano piano se va a lontano.*

Ao professor Ademir Eugênio de Santana, pelas discussões, seminários e por me acompanhar desde a graduação.

Aos professores do Instituto de Física da Universidade de Brasília, por acrescentarem tanto à minha formação. Agradeço o professor Arsen Melikyan pelo apoio e pelas broncas que não são broncas. Obrigada por todos os conselhos.

À minha família, pela compreensão e por estar sempre ao meu lado. À minha mãe, por ser meu exemplo de força e integridade. Ao meu pai, pelo apoio e por tanto carinho. À minha avó Cynthia, por me acompanhar e aconselhar, mesmo a tantos quilômetros de distância.

Ao Arthur, por dividir comigo as alegrias e frustrações da elaboração desse projeto. Pela paciência e pelo companheirismo. Por ser meu porto seguro e por me apoiar, sempre.

Aos meus amigos da pós-graduação, pela companhia e pelos momentos de descontração.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro, sem o qual este projeto não seria possível.



# Resumo

Neste trabalho, começa-se um estudo sistemático de emaranhamento em teorias de gauge. Adota-se a teoria de Yang-Mills no cilindro como modelo principal. Parte-se da Lagrangiana de Yang-Mills e obtém-se que, resolvendo o vínculo da lei de Gauss, a dinâmica do sistema pode ser reduzida àquela de uma partícula livre movendo-se ao longo da variedade do grupo de gauge. Isso significa que o sistema apresenta somente um grau de liberdade físico. Portanto, não é possível que haja emaranhamento. Acopla-se então a teoria de Yang-Mills à uma partícula livre não-relativística. Uma primeira abordagem é feita considerando o caso abeliano. Obtém-se que o sistema apresenta não só emaranhamento, mas também degenerescência e anomalia axial. Com respeito à anomalia, cálculos analíticos são feitos e sua dependência com relação a outros parâmetros, como energia e degenerescência, é analisada. Com relação ao emaranhamento, cálculos numéricos de entropia de emaranhamento são feitos considerando o estado fundamental. Guiado pelo projeto acima delineado, essa dissertação tem também um objetivo pedagógico, no sentido de introduzir os conceitos de teoria de gauge, teoria de vínculo e teoria de grupos de Lie.



# Abstract

In this work a systematic study of entanglement in gauge theories is started. The Yang-Mills theory on a cylinder is adopted as the main model. Starting from the Yang-Mills Lagrangian one obtains that, by solving the Gauss law constraint, the dynamics of the system can be reduced to that of a free particle moving along the gauge group manifold. This means that the system has only one physical degree of freedom. Therefore, the system does not present entanglement. The Yang-Mills theory is then coupled to a non-relativistic free particle. A first approach is made considering the abelian case. One obtains that the system presents not only entanglement, but also degeneracy and axial anomaly. With respect to anomaly, analytical calculations are carried out and its dependence on other parameters, such as energy and degeneracy, is analysed. Concerning entanglement, numerical calculations of entanglement entropy are made considering the ground-state. Guided by the project outlined above, this dissertation also has a pedagogical purpose, in the sense that it introduces concepts of gauge theory, constrained systems and Lie group theory.



# Notações e convenções

Durante o desenvolvimento deste trabalho, as seguintes convenções serão adotadas:

- As unidades adotadas serão as chamadas unidades naturais, onde  $c$  (velocidade da luz) =  $\hbar$  (constante de Planck dividida por  $2\pi$ ) =  $k_B$  (constante de Boltzmann) = 1;
- A convenção de soma sob índices de Einstein será usada, tal que se o índice aparecer duas vezes, uma em cima e outra embaixo, então o índice está sendo somado sob todas as possibilidades. Se o índice  $i$  corre de 1 a  $N$ , então

$$A^i B_i = \sum_{i=1}^N A^i B_i;$$

- A métrica de Minkowski, denotada por  $g_{\mu\nu}$ , será dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

A assinatura  $(+, -, -, -)$  será utilizada somente quando explicitamente mencionado;

- A seguinte notação para derivadas será utilizada:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

onde  $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$ .



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Teoria de Vínculos</b>	<b>7</b>
1.1 Formalismo Lagrangiano e método dos multiplicadores de Lagrange . . .	7
1.2 Formalismo Hamiltoniano e vínculos primários . . . . .	8
1.3 Hamiltoniana canônica e Hamiltoniana primária . . . . .	10
1.4 Vínculos secundários . . . . .	11
1.5 Igualdade fraca . . . . .	12
1.6 Determinação dos multiplicadores de Lagrange . . . . .	13
1.7 Vínculos de primeira e segunda classe . . . . .	14
1.8 Vínculos de primeira classe e transformações de calibre . . . . .	15
1.9 Hamiltoniana total . . . . .	17
<b>2 Quantização</b>	<b>19</b>
2.1 Vínculos de segunda classe e parênteses de Dirac . . . . .	20
2.2 Vínculos de primeira classe . . . . .	21
2.3 Generalização para teorias de campo . . . . .	22
<b>3 Exemplos de quantização de sistemas clássicos</b>	<b>25</b>
3.1 Partícula no círculo . . . . .	25
3.2 Lagrangiana de Chern-Simons em 1 dimensão . . . . .	28
3.3 Eletromagnetismo em 3+1 dimensões . . . . .	32
3.3.1 Sem correntes externas . . . . .	32
3.3.2 Com correntes externas . . . . .	35
3.4 Partícula livre relativística . . . . .	36
3.4.1 Quantização via parênteses de Dirac . . . . .	40
3.4.2 Quantização a la Gupta-Bleuler . . . . .	41

<b>4</b>	<b>Teorias de calibre</b>	<b>43</b>
4.1	Propriedades . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Cinemática em uma variedade de Grupo de Lie</b>	<b>67</b>
5.1	Álgebra de Lie . . . . .	67
5.2	Grupo de Lie e geometria . . . . .	69
5.3	Partícula livre na variedade de um grupo de Lie . . . . .	72
5.4	O grupo SU(2) . . . . .	76
5.4.1	Ângulos de Euler . . . . .	77
5.4.2	Coordenadas esféricas . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Teoria de Yang-Mills no cilindro</b>	<b>85</b>
6.1	Eletromagnetismo em 1+1 dimensões . . . . .	89
6.1.1	Condições de contorno periódicas . . . . .	90
6.1.2	Condições de contorno quase-periódicas . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Eletromagnetismo acoplado a uma partícula livre não-relativística</b>	<b>95</b>
7.1	O modelo de Manton . . . . .	97
7.2	O modelo de Manton com degenerescência . . . . .	99
7.2.1	Anomalia axial . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Emaranhamento em teorias de calibre</b>	<b>111</b>
8.1	Entropia de emaranhamento . . . . .	116
8.1.1	O modelo de Manton com degenerescência . . . . .	118
8.1.2	Resultados . . . . .	120
<b>Anexo A</b>	<b>Soluções de <math>G(x, x')</math></b>	<b>129</b>
A.1	Domínio de $x$ na reta real . . . . .	129
A.2	Domínio de $x$ no intervalo $[0, L)$ e condição de Dirichlet . . . . .	130
A.3	Domínio de $x$ no círculo e condição periódica . . . . .	130
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>133</b>





# Introdução

O estudo de teorias de calibre (ou teorias de gauge) não-abelianas foi desenvolvido por C. Yang e R. Mills em 1954, como uma extensão da teoria de calibre abeliana, isto é, da eletrodinâmica. Baseada em grupos de Lie semi-simples, a teoria de Yang-Mills trouxe grandes avanços na compreensão das interações fundamentais da natureza e é a base do Modelo Padrão de partículas.

A extensão feita por Yang-Mills ganhou maior reconhecimento em 1960, quando, em conjunto com o mecanismo de quebra espontânea de simetria, introduzido por J. Goldstone, Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, a teoria de S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg foi capaz de descrever as interações eletromagnética e fraca como resultantes de uma só, a interação eletro-fraca. A interação eletro-fraca, descrita pelo grupo  $SU(2) \times U(1)$ , resulta nas interações eletromagnética e fraca a partir do processo de quebra espontânea de simetria, produzindo o fóton (que media a interação eletromagnética) e os bósons massivos  $W^\pm$  e  $Z^0$  (que mediam a interação fraca).

No que diz respeito a interações fortes, a teoria de Yang-Mills é o único modelo dinâmico cujas forças de interação diminuem suficientemente rápido com o aumento da distância, respeitando a chamada liberdade assintótica, característica dessas interações. A descrição da liberdade assintótica foi feita por G. 't Hooft em 1972, porém não foi publicada pelo autor. Em 1973, D. Gross e F. Wilczek e, independentemente, D. Politzer observaram o efeito. Os três receberam o prêmio Nobel de física em 2004.

Apesar do evidente sucesso da teoria de Yang-Mills, alguns de seus aspectos permanecem não esclarecidos. Um deles é fato das soluções exatas dos campos não terem sido obtidas, tanto no contexto clássico quanto quântico. Essa dificuldade se deve, entre outros fatores, à natureza não-abeliana da teoria, que introduz aspectos bastante não intuitivos, como por exemplo a não-linearidade das equações diferenciais. Outro aspecto ainda em aberto diz respeito ao problema de confinamento em cromodinâmica quântica que, apesar de confirmado experimentalmente, não foi provado definitivamente do ponto de vista teórico. Isso se deve principalmente à dificuldade de se trabalhar

com baixas energias em uma teoria com acoplamento forte, uma vez que, nesse caso, métodos perturbativos não podem ser aplicados. Além disso, a própria quantização completa da teoria ainda não foi feita.

O conceito de emaranhamento, por outro lado, ganhou força em 1935 com a publicação do paper de Einstein, Podolsky e Rosen [11]. Nesse mesmo ano, o termo emaranhamento foi introduzido por Schrödinger, que publicou um artigo [27] reconhecendo a importância do emaranhamento como o aspecto característico e definidor da mecânica quântica.

Emaranhamento e correlações quânticas são conceitos equivalentes. O conhecimento dessas correlações é essencial para a compreensão de uma teoria e, em especial, de seus aspectos quânticos. Por esse motivo, estudar emaranhamento em teoria de calibre não-abeliana pode fornecer novas informações e novos entendimentos a respeito da teoria que, por motivos citados anteriormente, ainda não estão claros.

Em termos práticos, estados emaranhados apresentam diversas aplicações, como criptografia e computação quântica, por exemplo. Essas aplicações pressupõem a capacidade de se controlar partes ou subsistemas de um sistema quântico e esse controle depende diretamente do conhecimento de suas correlações. Estudar emaranhamento apresenta ainda aplicações relacionadas a física estatística, uma vez que a própria definição de ensemble pressupõe um sistema físico inserido em outro maior. Outra aplicação está relacionada a física de buracos negros, onde é possível estudar a correlação entre partes acessíveis ou não do espaço-tempo, i.e., correlações entre regiões fora e dentro do horizonte de eventos.

Independentemente de qual seja a aplicação, uma forma de medir o quão emaranhado está um sistema é dada pela entropia de emaranhamento.

Nessa dissertação, a intenção é explorar como a presença de simetrias de gauge em teorias de calibre não-abelianas afeta o emaranhamento. Tendo isso por meta, serão discutidos diversos aspectos relacionados a teorias de calibre, como teoria de vínculos, geometria diferencial e loops de Wilson. Por isso, a dissertação como um todo tem um caráter pedagógico, introduzindo vários assuntos que formam a base para se trabalhar com teorias de calibre.

As dificuldades citadas anteriormente e, em especial a dificuldade de se encontrar uma solução exata para as equações diferenciais de Yang-Mills, motivam o desenvolvimento do trabalho em sistemas mais simples. Uma forma de se fazer essa simplificação consiste em diminuir as dimensões do sistema, por exemplo. Dessa maneira, soluções exatas podem ser obtidas e com isso pode-se ganhar alguma intuição e entendimento

---

que podem ser estendidos para sistemas mais complexos. Essa é a abordagem adotada durante o desenvolvimento desse trabalho.

Uma vez exposta a intenção desse projeto, cabe introduzir os elementos necessários para desenvolvê-lo. O ponto de partida consiste em entender o que são transformações de gauge e isso remete ao estudo de teoria de vínculos. Nesse sentido, um outro passo consiste em entender como se dá o processo de quantização na presença de vínculos.

Uma vez estabelecido o significado de uma transformação de calibre, cabe entender como ela se implementa como simetria em uma teoria. Esse aspecto esclarece o que são teorias de gauge, tanto abelianas quanto não-abelianas. Nesse ponto, faz-se necessário uma introdução formal de teoria de calibre e teoria de grupos. Por fim, cabe ainda introduzir a relação entre teoria de grupos de Lie e geometria diferencial.

Depois de introduzidos esses elementos, um estudo é feito considerando-se a teoria de Yang-Mills no cilindro. Isso significa restringir a única coordenada espacial a um círculo e, nesse caso, o único observável invariante sob transformações de calibre é o loop de Wilson ao longo do círculo.

Resolvendo o vínculo da lei de Gauss, é possível reduzir o problema a um sistema mecânico com um só grau de liberdade. Mais especificamente, a dinâmica é reduzida à de uma partícula livre movendo-se ao longo do grupo de gauge. Como essa redução resulta em somente um grau de liberdade, não há emaranhamento nesse sistema. Em particular, não é possível associar um espaço de Hilbert a um intervalo do círculo. Portanto, não é possível tomar traços parciais, por exemplo.

Isso motiva uma próxima tentativa para se analisar emaranhamento na presença de simetrias de gauge, que é acoplar a teoria à matéria. Uma maneira simples de fazê-lo consiste em acoplar Yang-Mills a uma partícula livre não-relativística. Nesse sentido, a primeira abordagem consiste em considerar o caso abeliano. A interação entre os dois sistemas, campo eletromagnético e partícula livre carregada, é dada via acoplamento mínimo e pelo termo de Coulomb que surge a partir da lei de Gauss.

A Hamiltoniana clássica do sistema composto é equivalente ao problema de Landau em um torus. Para quantizá-la, as variáveis canônicas são então promovidas a operadores e as condições de contorno são cuidadosamente definidas. Um aspecto interessante é que, uma vez impostas as condições de contorno, obtém-se que a carga deve ser quantizada.

As soluções quânticas são encontradas e é possível ver que o sistema apresenta tanto degenerescência quanto anomalia axial. Cálculos dessa anomalia são feitos analiticamente e é possível ver como ela depende de outros parâmetros, como energia e

degenerescência. Um dos resultados obtidos é que a anomalia só está presente quando a função de onda é formada pela superposição de estados com diferentes energias.

Com relação a emaranhamento, cálculos numéricos podem ser feitos considerando estados puros do estado fundamental. É possível ver como a entropia de emaranhamento depende da degenerescência. Em especial, um dos estados degenerados apresenta entropia máxima, isto é,  $S = \log 2$ .

Um próximo passo seria acoplar a teoria de Yang-Mills não-abeliana a uma partícula livre não-relativística. Esse problema permanece em aberto e pode ser explorado em uma oportunidade futura.

# Capítulo 1

## Teoria de Vínculos

As referências pertinentes a esse capítulo são [4], [7], [10], [15], [25].

### 1.1 Formalismo Lagrangiano e método dos multiplicadores de Lagrange

Suponha um sistema físico descrito por uma Lagrangiana não singular  $L$ , que é função das coordenadas generalizadas  $q_i$  e das respectivas velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ , isto é,

$$L \equiv L(q_i, \dot{q}_i). \quad (1.1)$$

A dinâmica desse sistema fica determinada pela minimização da ação  $S$  correspondente,

$$S = \int d^D q L(q_i, \dot{q}_i), \quad d^D q = \prod_{i=1}^D dq_i, \quad (1.2)$$

que fornece as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1.3)$$

Suponha agora que se deseja restringir de alguma forma a dinâmica desse sistema, ou seja, se deseja impor vínculos. Uma forma de introduzi-los é via método dos multiplicadores de Lagrange.

O método consiste em adicionar à Lagrangiana cada vínculo  $\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ , que se deseja impor multiplicado por um respectivo multiplicador de Lagrange  $\lambda_j$ . Assim,

deve-se levar a Lagrangiana inicial,  $L(q_i, \dot{q}_i)$ , a uma nova Lagrangiana, dada por

$$L(q_i, \dot{q}_i, \lambda_j, \dot{\lambda}_j) = L(q_i, \dot{q}_i) + \lambda_j \phi_j. \quad (1.4)$$

A notação utilizada para nova Lagrangiana,  $L(q_i, \dot{q}_i, \lambda_j, \dot{\lambda}_j)$ , sugere que se deve tratar os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_j$  introduzidos como novas coordenadas generalizadas do sistema com respectivas velocidades generalizadas  $\dot{\lambda}_j$ . De fato, além das  $D$  equações fornecidas por (1.3), deve-se considerar também as  $K$  equações envolvendo  $\lambda_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0. \quad (1.5)$$

Considere, por exemplo, uma partícula livre de massa  $m$  movendo-se no espaço tridimensional. Suponha agora que essa partícula só poderá mover-se na superfície de uma esfera de raio  $r$ . De acordo com o descrito, parte-se de

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (1.6)$$

e impõe-se que  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Isso significa introduzir um vínculo  $\phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$  e considerar agora

$$L(x, y, z, \lambda, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\lambda}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \lambda \phi. \quad (1.7)$$

O exemplo acima ilustra o método, mas a resolução completa de problemas como esse será apresentada com mais detalhes no Capítulo 3.

## 1.2 Formalismo Hamiltoniano e vínculos primários

A Seção 1.1 diz respeito a casos nos quais os vínculos são originados por imposições externas, isto é, tem-se um sistema inicial bem definido e deseja-se considerar o seu comportamento quando impostas certas condições sob suas posições e/ou velocidades.

Por outro lado, existem vínculos que aparecem já no sistema inicial. Ou seja, eles estão presentes na teoria sem que sejam introduzidos à mão via multiplicador de Lagrange. Esses vínculos tem sua origem na singularidade da Lagrangiana e estão relacionados justamente ao fato do sistema inicial não ser bem definido. Esta seção é dedicada a esse aspecto.

Para entender o que significa um sistema não ser bem definido, parte-se da conexão entre os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano. No formalismo Lagrangiano, trabalha-se com as coordenadas  $q_i$  e velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ . No formalismo Hamiltoniano, trabalha-se com as coordenadas  $q_i$  e momentos canonicamente conjugados  $p_i$  definidos no espaço de fase.

Os dois formalismos são conectados por uma transformada de Legendre:

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i), \quad (1.8)$$

onde os momentos canonicamente conjugados são definidos como

$$p_j \equiv \frac{L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1.9)$$

e  $i, j = 1, \dots, D$ .

Partindo da Lagrangiana de um sistema, obter a Hamiltoniana correspondente passa por escrever cada  $\dot{q}_i$  que aparece do lado direito da equação (1.8) em termos das coordenadas e dos momentos canonicamente conjugados e para tanto precisa-se inverter a equação (1.9). Isso porque se espera que a Hamiltoniana  $H$  seja escrita somente em termos das coordenadas e momentos. Porém, escrever  $\dot{q}_i$  em termos de  $p$ 's e  $q$ 's nem sempre é possível.

Essa impossibilidade origina-se no teorema da função inversa e está ligada à matriz Jacobiana da transformação:

$$(M)_{ij} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \quad (1.10)$$

Se o determinante de  $M$  for diferente de zero, cada  $p_i$  é linearmente independente e pode ser escrito como função de  $\dot{q}_i$  e das coordenadas  $q$ 's. Essa função pode ser invertida, tal que cada  $\dot{q}_i$  pode ser escrito em termos de  $p_i$  e dos  $q$ 's e substituído na equação (1.8) para se obter  $H(q_i, p_i)$ . Nesse caso, existe uma correspondência um a um entre cada  $p_i$  e  $\dot{q}_i$  e pode-se ir e vir de um formalismo ao outro livremente. É isso que se quer dizer por sistema bem definido.

Por outro lado, se  $\det M = 0$ , isto é, se  $M$  é degenerada (ou singular), os momentos não são linearmente independentes e existe ao menos um  $\dot{q}_k$  que não pode ser escrito em termos de  $p_k$ . Como consequência, o processo descrito em (1.8) não fica definido, uma vez que  $\dot{q}_j$  não fica definido em termos de  $p$ 's e  $q$ 's.

Nesse caso, a Lagrangiana é dita singular e a conexão entre um formalismo e outro deve ser feita com maior cautela. De antemão, vale salientar que essa singularidade dá origem aos chamados vínculos primários e a cautela mencionada é contemplada na teoria de vínculos.

Observe que quando  $\det M = 0$ , coloca-se que existe ao menos um  $\dot{q}_j$  que não está relacionado a  $p_j$ . O fato de se colocar "ao menos um", significa que podem existir outros  $\dot{q}_i$ ,  $i \neq j$ , que estão sim conectados a  $p_i$ . Isso quer dizer que a matriz Jacobiana  $M$  pode ser escrita na forma de uma submatriz não degenerada e outra degenerada. Esta última é, portanto, a responsável pelo aparecimento dos vínculos primários.

Os momentos pertencentes a parte degenerada da matriz  $M$  não são funções independentes das velocidades, tal que  $\dot{q}_k$  não pode ser escrito como função de  $p_k$ . Nesse caso, existem relações do tipo  $\phi(q, p) = 0$  conectando os momentos. Pode existir mais de uma relação desse tipo e essas relações estabelecem os vínculos primários. Para uma teoria com  $M$  vínculos primários, tem-se

$$\phi_k(q, p) = 0, \quad (1.11)$$

com  $k = 1, \dots, M$ .

Os vínculos primários têm origem, portanto, na própria estrutura da Lagrangiana. Eles não são postos à mão como descrito na Seção 1.1. Alguns exemplos de sistemas que apresentam esse tipo de vínculo serão trabalhados na Seção 3.

### 1.3 Hamiltoniana canônica e Hamiltoniana primária

De acordo com a Seção 1.2, a transição entre formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano pode levar ao aparecimento de vínculos. De maneira geral, parte-se de uma Lagrangiana  $L$  e dela extrai-se tanto as relações entre  $p_i$  e  $\dot{q}_i$  quanto os vínculos primários  $\phi_k$ . As relações entre  $p_i$  e  $\dot{q}_i$  são obtidas da parte não degenerada de  $M$ , enquanto os vínculos são obtidos da parte degenerada.

Uma vez extraídos esses dados, a transformada de Legendre, dada por (1.8), é feita substituindo todos  $\dot{q}$ 's da parte não degenerada. Obtém-se então a Hamiltoniana canônica

$$H_{can} \equiv p_i \dot{q}_i - L. \quad (1.12)$$

Suponha que a teoria contenha  $M$  vínculos primários, isto é, que a submatriz degenerada da matriz Jacobiana tenha dimensões  $M \times M$ . Fisicamente, a presença

desses vínculos significa que, além das soluções encontradas a partir de  $H_{can}$ , deve-se considerar ainda as condições impostas pelos  $M$  vínculos da teoria. Isso significa que as soluções físicas obtidas a partir de  $H_{can}$  só tem validade no subespaço onde  $\phi_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Uma forma de se restringir o espaço das soluções ao espaço onde todos os vínculos primários são respeitados consiste em adicionar cada um deles a  $H_{can}$  a partir da sua multiplicação por um multiplicador de Lagrange  $\lambda_k$ .

Obtém-se assim a Hamiltoniana primária

$$H' \equiv H_{can} + \lambda_k \phi_k, \quad (1.13)$$

onde  $k = 1, \dots, M$ . A dinâmica do sistema fica invariante pela adição dos vínculos  $\phi_k$  e as soluções obtidas a partir de  $H'$  são tais que  $\phi_k = 0, \forall k$ . Além disso, estas devem ser tais que os vínculos são respeitados durante toda sua evolução temporal, ou seja, deve-se ter  $\phi_k = 0$  em toda a superfície de soluções.

## 1.4 Vínculos secundários

Exigir que cada vínculo seja respeitado na superfície das soluções significa impor que nela se tenha  $\dot{\phi}_k = 0$ . A essa imposição dá-se o nome de condição de consistência.

Por outro lado, tem-se que a derivada temporal de uma função qualquer  $F(q, p)$  definida no espaço de fase é dada por

$$\frac{dF(q, p)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Além disso, no subespaço das soluções, tem-se

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1.15)$$

tal que (1.14) pode ser reescrita como

$$\frac{dF(q, p)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Aplicando esse resultado para os vínculos primários e lembrando que a dinâmica é descrita por  $H'$ , tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_j &= \{\phi_j, H'\} \\ &= \{\phi_j, H_{can}\} + \lambda_k \{\phi_j, \phi_k\}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

O resultado acima nem sempre é identicamente nulo. Pode acontecer que  $\dot{\phi}_j$  seja ainda alguma função das variáveis  $(q, p)$  ou que  $\dot{\phi}_j$  imponha condições aos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_k$ . O segundo caso será tratado na Seção 1.6.

No primeiro caso, deve-se impor que essa função de  $(q, p)$  seja nula no subespaço das soluções. As funções assim originadas recebem o nome de vínculos secundários e são também denotadas como  $\phi_k$ .

A condição de consistência deve ser respeitada também pelos vínculos secundários. Isso significa que se deve reinserir cada vínculo secundário em (1.17). Assim como no caso dos vínculos primários, esse processo pode resultar em uma função identicamente nula na superfície das soluções ou não. Caso essa função não seja identicamente nula, define-se novamente outro vínculo  $\phi_k$ .

O processo descrito deve ser repetido até que (1.17) não dê origem a mais nenhum vínculo novo.

Por simplicidade, todos os  $N$  vínculos originados a partir da condição de consistência  $\dot{\phi}_k = 0$  serão chamados de vínculos secundários.

Os vínculos secundários diferem dos primários porque são obtidos a partir das relações de consistência, enquanto os primários são obtidos a partir da própria definição do momento canonicamente conjugado.

## 1.5 Igualdade fraca

Foi mencionado anteriormente que em geral os vínculos não são nulos em todo o espaço de fase, mas somente na superfície das soluções das equações  $\phi_k = 0$ . Por isso, é interessante definir a igualdade fraca, denotada por " $\approx$ ".

Suponha que se tenha duas funções,  $F$  e  $G$ , definidas no espaço de fase. Se a diferença entre elas é dada somente por uma combinação linear dos vínculos, ambas são iguais no subespaço das soluções. Isso significa que  $F$  e  $G$  são diferentes no espaço de fase completo, mas iguais no subespaço das soluções. Nesse caso,  $F$  e  $G$  são ditas

fracamente iguais:

$$F(q, p) \approx G(q, p) \iff F - G = a_k \phi_k. \quad (1.18)$$

Assim, denota-se também  $\phi_k \approx 0$ , já que  $\phi_k$  é nulo no subespaço das soluções e não no espaço de fase completo.

Por outro lado,  $F$  e  $G$  são ditas fortemente iguais ( $F = G$ ) se a igualdade é válida em todo o espaço de fase.

## 1.6 Determinação dos multiplicadores de Lagrange

De acordo com o visto na Seção 1.4, as relações de consistência podem resultar na imposição de restrições aos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_k$ .

De fato, para um teoria com  $M$  vínculos primários e  $N$  secundários, as condições de consistência para todos os  $M + N$  vínculos fornece um sistema,

$$\{\phi_j, H_{can}\} + \lambda_k \{\phi_j, \phi_k\} \approx 0, \quad (1.19)$$

de  $j = 1, \dots, M + N$  equações lineares com  $k = 1, \dots, M$  variáveis desconhecidas.

Os coeficientes  $\lambda_k$  que satisfazem (1.19) podem ser escritos como a soma da solução particular  $\lambda_k^p$  com a solução  $\lambda_k^h$  da equação homogênea associada,

$$\lambda_k^h \{\phi_j, \phi_k\} \approx 0. \quad (1.20)$$

Porém, a solução mais geral da equação homogênea associada pode ser escrita como combinação linear de  $A$  soluções linearmente independentes  $\lambda_k^{ha}$ ,  $a = 1, \dots, A$ . Isso significa que a solução  $\lambda_k^h$  pode ser escrita como

$$\lambda_k^h = c_a \lambda_k^{ha}, \quad a = 1, \dots, A. \quad (1.21)$$

Tem-se então

$$\lambda_k = \lambda_k^p + c_a \lambda_k^{ha}, \quad (1.22)$$

onde os coeficientes  $c_a$  são completamente arbitrários e podem, inclusive, depender do tempo. A consequência da presença dos coeficientes  $c_a$  será explorada na Seção 1.8. Entretanto, cabe antes introduzir uma nova forma de classificar os vínculos.

## 1.7 Vínculos de primeira e segunda classe

Uma função  $F$  é dita de primeira classe se o seu parênteses de Poisson com todos os vínculos é fracamente nulo

$$\{F, \phi_k\} \approx 0, \quad k = 1, \dots, M + N. \quad (1.23)$$

Caso contrário, a função é dita de segunda classe.

Essa mesma classificação pode ser aplicada aos vínculos, tal que são ditos de primeira classe aqueles cujos parênteses de Poisson com todos os outros vínculos se anulam fracamente. Caso isso não aconteça, o vínculo é dito de segunda classe.

Os vínculos podem então ser classificamos como primários ou secundários e de primeira ou segunda classe.

A classificação como primário ou secundário é de pouca relevância, pois está ligada somente a como o vínculo é obtido a partir da Lagrangiana - o primário sendo consequência da própria definição do momento e o secundário da relação de consistência.

Por outro lado, um vínculo ser de primeira ou segunda classe tem consequências completamente diferentes para a construção da teoria. Isso será explorado mais adiante.

Antes de encerrar esta seção, é interessante mostrar que o parênteses de Poisson entre funções de primeira classe é também uma função de primeira classe. Para tanto, considere duas funções de primeira classe  $F$  e  $G$ :

$$\{F, \phi_k\} \approx 0 \Rightarrow \{F, \phi_k\} = f_k^j \phi_j, \quad (1.24)$$

$$\{G, \phi_k\} \approx 0 \Rightarrow \{G, \phi_k\} = g_k^j \phi_j. \quad (1.25)$$

Pela identidade de Jacobi,

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0, \quad (1.26)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_k\} &= \{F, \{G, \phi_k\}\} - \{G, \{F, \phi_k\}\} \\ &= \{F, g_k^j \phi_j\} - \{G, f_k^j \phi_j\} \\ &= \{F, g_k^j\} \phi_j + \{F, \phi_j\} g_k^j - \{G, f_k^j\} \phi_j - \{G, \phi_j\} f_k^j \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

## 1.8 Vínculos de primeira classe e transformações de calibre

Uma vez introduzida a definição de vínculos de primeira e segunda classe, é possível notar que a equação (1.20) pode ser escrita como

$$\{\phi_j, \lambda_k^h \phi_k\} \approx 0. \quad (1.28)$$

Dessa maneira fica mais simples ver que, como  $j = 1, \dots, M + N$ , cada  $\lambda_k^h \phi_k$  é um vínculo de primeira classe, já que seus parênteses de Poisson com todos os vínculos da teoria é fracamente nulo.

Uma forma interessante de reescrever a Hamiltoniana primária da equação (1.13) fica então dada por

$$H' = H^* + c_a \phi_a, \quad (1.29)$$

onde  $H^* \equiv H_{can} + \lambda_k^p \phi_k$  e  $\phi_a \equiv \lambda_k^{ha} \phi_k$ .

Segundo a equação (1.28),  $\lambda_k^h \phi_k$  é de primeira classe. Mas  $\lambda_k^h \phi_k$  é combinação linear de  $\phi_a$  com coeficientes  $c_a$ . Segue portanto que cada  $\phi_a$  também é de primeira classe. Além disso, cada  $\phi_k$  é vínculo primário e, como  $\phi_a$  é combinação linear de  $\phi_k$ ,  $\phi_a$  é vínculo primário.

Tem-se, portanto, a dinâmica descrita por  $\dot{F} \approx \{F, H'\}$  com  $H'$  contendo  $A$  coeficientes arbitrários  $c_a$ . Cada  $c_a$  aparece multiplicando um vínculo primário de primeira classe  $\phi_a$  e, portanto, o número  $A$  de coeficientes arbitrários é igual ao número de vínculos primários de primeira classe.

Como mencionado anteriormente, não existem restrições com relação aos coeficientes arbitrários  $c_a$ . Eles podem, inclusive, depender do tempo e, nesse caso,  $c_a = c_a(t)$ .

Para entender as consequências físicas dessa possível dependência temporal, suponha que num instante  $t = 0$  um sistema esteja numa configuração inicial com  $q$ 's e  $p$ 's definidos. Considere agora uma variável dinâmica qualquer  $f(t)$  com valor  $f(t = 0) = f_0$ . Após um curto intervalo de tempo  $t = \delta t$ , tem-se

$$f(\delta t) = f_0 + \dot{f} \delta t \quad (1.30)$$

$$= f_0 + (\{f, H^*\} + c_a \{f, \phi_a\}) \delta t. \quad (1.31)$$

A equação (1.31) mostra que o valor de  $f(\delta t)$  depende da escolha de  $c_a$ . Suponha então duas escolhas distintas  $c_a$  e  $c'_a$ . A diferença entre os resultados de  $f(\delta t)$  seria

então dada por

$$\Delta f(\delta t) = (c_a - c'_a)\{f, \phi_a\}\delta t = \epsilon_a\{f, \phi_a\}, \quad (1.32)$$

onde  $\epsilon_a \equiv (c_a - c'_a)\delta t$ .

Fisicamente, a diferença dada pela equação (1.32) não deve alterar a configuração final no instante  $\delta t$ . Isso significa que alterar qualquer variável dinâmica  $f(t)$  por uma quantidade  $\Delta f = \epsilon_a\{f, \phi_a\}$  não altera a física descrita. É isso que se entende por transformação de calibre. Fica claro, portanto, que variações dadas por (1.32) são transformações de calibre e são geradas pelos vínculos primários de primeira classe.

Entretanto, cabe ainda explorar um outro aspecto. Sabe-se que cada  $\phi_a$  é vínculo primário de primeira classe e que, sob uma transformação de calibre gerada por  $\epsilon_a\phi_a$ , uma variável dinâmica  $f$  varia de acordo com

$$f \rightarrow f + \Delta f = f + \epsilon_a\{f, \phi_a\}. \quad (1.33)$$

Considere então duas transformações de calibre geradas por  $\epsilon_a\phi_a$  e  $\epsilon_b\phi_b$ , onde  $\phi_a$  e  $\phi_b$  são vínculos primários de primeira classe. Aplicando primeiramente  $\epsilon_a\phi_a$  e depois  $\epsilon_b\phi_b$ , tem-se

$$f \rightarrow f' = f + \epsilon_a\{f, \phi_a\} + \epsilon_b\{f, \phi_b\} + \epsilon_a\epsilon_b\{\{f, \phi_a\}, \phi_b\}. \quad (1.34)$$

Por outro lado, aplicando primeiramente  $\epsilon_b\phi_b$  e depois  $\epsilon_a\phi_a$ , tem-se

$$f \rightarrow f'' = f + \epsilon_b\{f, \phi_b\} + \epsilon_a\{f, \phi_a\} + \epsilon_a\epsilon_b\{\{f, \phi_b\}, \phi_a\}. \quad (1.35)$$

Subtraindo esses dois resultados, tem-se

$$f' - f'' = \epsilon_a\epsilon_b(\{\{f, \phi_a\}, \phi_b\} - \{\{f, \phi_b\}, \phi_a\}). \quad (1.36)$$

Usando a identidade de Jacobi, esse resultado pode ser escrito como

$$\Delta f = f' - f'' = \epsilon_a\epsilon_b\{f, \{\phi_a, \phi_b\}\}. \quad (1.37)$$

Essa transformação deve também corresponder a uma transformação de calibre que, nesse caso, é gerada por  $\epsilon_a\epsilon_b\{\phi_a, \phi_b\}$ .

Como os vínculos  $\phi_a$  e  $\phi_b$  são de primeira classe, o parêntese de Poisson  $\{\phi_a, \phi_b\}$  deve ser combinação linear de vínculos de primeira classe. Porém, nada impede que

essa combinação linear contenha vínculos secundários de primeira classe, ou seja, apesar de  $\phi_a$  e  $\phi_b$  serem primário de primeira classe,  $\{\phi_a, \phi_b\}$  pode ser secundário de primeira classe. Isso indica que, a princípio, tanto os vínculos primários quanto secundários de primeira classe podem gerar transformações de calibre.

Existem contraexemplos, nos quais vínculos secundários de primeira classe não são geradores de transformações de calibre. Entretanto, neste trabalho, será considerado que todos os vínculos de primeira classe, primários e secundários, geram transformações de calibre.

## 1.9 Hamiltoniana total

Para uma teoria com  $M$  e  $N$  vínculos primários e secundários, respectivamente, a Hamiltoniana total  $H_T$  é construída via adição de todos os vínculos à Hamiltoniana canônica, isto é,

$$H_T = H_{can} + \sum_{k=1}^{M+N} \lambda_k \phi_k, \quad (1.38)$$

onde  $M + N$  é o número total de vínculos.

A dinâmica do sistema fica dada por

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_T\}. \quad (1.39)$$

As equações de movimento assim obtidas são equivalentes às derivadas via formalismo Lagrangiano, i.e., via (1.3).



# Capítulo 2

## Quantização

As referências pertinentes a esse capítulo são [4], [10] e [25].

Usualmente, a quantização de uma teoria clássica é feita segundo a prescrição de Dirac:

- (i) Escrever a Hamiltoniana  $H$  do sistema;
- (ii) Elevar as coordenadas e momentos conjugados a operadores atuando num espaço de Hilbert satisfazendo a seguinte correspondência entre o parênteses de Poisson clássico e o comutador quântico,

$$\{q_i, p_i\} \rightarrow \frac{1}{i}[q_i, p_i]; \quad (2.1)$$

- (iii) Aplicar o resultado na equação de Schrödinger,

$$i\frac{d\psi}{dt} = H\psi, \quad (2.2)$$

com as devidas condições de contorno impostas a  $\psi$ .

Porém, quando a teoria apresenta vínculos, a prescrição de Dirac precisa ser incrementada. Na presença de vínculos, as soluções  $\psi$  devem satisfazer, além de (2.2), as condições

$$\phi_i\psi = 0 \quad i = 1, \dots, M + N, \quad (2.3)$$

ou seja, os vínculos devem ser promovidos a operadores que aniquilam as soluções. Isso traduz o fato do espaço das soluções físicas ser restrito ao espaço onde os vínculos são respeitados.

## 2.1 Vínculos de segunda classe e parênteses de Dirac

Quando uma teoria apresenta vínculos de segunda classe, entretanto, o procedimento descrito acima pode levar a inconsistências.

Suponha que em um dado sistema tem-se, por exemplo,  $q_1 \approx 0$  e  $p_1 \approx 0$ . O parênteses de Poisson clássico é dado por  $\{q_1, p_1\} = 1$  e os vínculos são de segunda classe. Seguindo a prescrição de Dirac, a versão quântica do sistema deve ser tal que  $[q_1, p_1] = i$ . Mas isso significaria que

$$[q_1, p_1]\psi = i\psi = 0, \quad (2.4)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} q_1\psi &= 0 \\ p_1\psi &= 0. \end{aligned}$$

Assim, a quantização levaria a uma solução  $\psi$  identicamente nula. É necessário então contornar essa dificuldade.

Nesse exemplo simples, os dois vínculos  $q_1 \approx 0$  e  $p_1 \approx 0$  acarretam na simples eliminação do grau de liberdade  $(q_1, p_1)$ . Uma forma de lidar com o problema seria então eliminar esse grau de liberdade da própria definição do parênteses de Poisson e seguir com o método de quantização usual para os graus de liberdade remanescentes.

Isso sugere que uma forma de contornar a dificuldade de lidar com vínculos de segunda classe seria modificar o parênteses de Poisson clássico antes de fazer sua associação com o comutador quântico.

Fisicamente, esse parênteses de Poisson modificado deve eliminar das soluções os graus de liberdade que não são físicos. Isso eliminaria problemas como o encontrado em (2.4), por exemplo. Este parênteses modificado recebe o nome de parênteses de Dirac e é definido como

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \sum_{i,j} \{A, \phi_i\} \Delta_{ij}^{-1} \{\phi_j, B\}, \quad (2.5)$$

onde o elemento de matriz  $\Delta_{ij}$  é dado pelo parênteses de Poisson  $\{\phi_i, \phi_j\}$ , isto é,

$$\Delta \equiv (\{\phi_i, \phi_j\}) = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \cdots & \{\phi_1, \phi_m\} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \{\phi_m, \phi_1\} & \cdots & \{\phi_m, \phi_m\} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Como a teoria apresenta vínculos de segunda classe, a existência da matriz inversa  $\Delta^{-1}$  fica garantida, uma vez que  $\Delta$  é uma matriz simplética, isto é, anti-simétrica e não degenerada ( $\det \Delta \neq 0$ ).

Para se quantizar uma teoria com vínculos de segunda classe, deve-se substituir a correspondência entre parênteses de Poisson usual e comutador por

$$\{q_i, p_i\}_D \rightarrow \frac{1}{i}[q_i, p_i]. \quad (2.7)$$

De maneira geral, vínculos de segunda classe são resolvidos via parênteses de Dirac, enquanto vínculos de primeira classe permitem que posturas diferentes sejam adotadas. Este aspecto será explorado na próxima seção.

## 2.2 Vínculos de primeira classe

Vínculos de primeira classe não levam a contradições da forma vista em (2.4). Uma maneira de lidar com eles no processo de quantização consiste, portanto, em seguir a prescrição mostrada em (2.3), isto é, deve-se promovê-los a operadores atuando num espaço de Hilbert de modo que o espaço de Hilbert físico é composto somente por estados aniquilados por esses operadores.

Porém, existe outra maneira de lidar com esses vínculos de primeira classe. Esta consiste em promovê-los a vínculos de segunda classe a partir da fixação de um calibre. Fixar um calibre significa definir um novo vínculo cujo parênteses de Poisson com o vínculo de primeira classe original seja não nulo. Nesse caso, pode-se construir a matriz  $\Delta$  e os parênteses de Dirac e proceder como em (2.7).

No primeiro caso, mantém-se as relações de comutação originais entre os operadores, mas deve-se restringir os espaço de Hilbert ao espaço de Hilbert físico. Já no segundo, não é necessário fazer essa restrição, mas em contrapartida deve-se alterar as relações de comutação originais de acordo com os parênteses de Dirac.

Esses dois procedimentos podem ser combinados livremente. Por exemplo, dados dois vínculos de primeira classe, pode-se proceder das seguintes maneiras:

- (i) Fixando dois calibres, tal que ambos sejam promovidos a vínculos de segunda classe, e construindo os parênteses de Dirac englobando os dois vínculos. Nesse caso não existem restrições da forma (2.3), mas as relações de comutação entre os operadores é modificada de acordo com (2.7);
- (ii) Fixando um calibre, tal que somente um dos vínculos seja promovido a vínculo de segunda classe, e construindo os parênteses de Dirac referente somente a este vínculo. Nesse caso, um vínculo é resolvido via (2.7), enquanto o outro é mantido como restrição da forma (2.3). Esse é o procedimento adotado na quantização de Gupta-Blueler do eletromagnetismo, por exemplo;
- (iii) Não fixando nenhum calibre e promovendo os dois vínculos a operadores aniquilando as funções do espaço de Hilbert físico. Nesse caso, os dois vínculos são mantidos como restrição da forma (2.3).

Exemplos abrangendo essas possibilidades serão trabalhados no Capítulo 3.

## 2.3 Generalização para teorias de campo

Até o momento, foram considerados sistemas com um número de graus de liberdade finito. Em teorias de campo, porém, este número é infinito e contínuo. Nesse caso, é possível estender o método descrito substituindo as somas em  $D$  dimensões por integrações sobre todo o espaço e definindo os momentos como derivadas variacionais de  $L$  com relação às velocidades generalizadas.

Primeiramente, deve-se fazer a distinção entre as grandezas e suas densidades. Por exemplo, entre a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  e a Lagrangiana  $L$ :

$$L = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}, \quad (2.8)$$

onde  $d\mathbf{x}$  representa o volume espacial infinitesimal.

Usualmente, trabalha-se com as densidades, tal que se  $\mathcal{L}$  depende de um campo  $a(\mathbf{x})$ , por exemplo, sua densidade de momento  $p_a(\mathbf{x})$  fica dada por

$$p_a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 a(\mathbf{x}))}. \quad (2.9)$$

A densidade Hamiltoniana pode então ser construída via transformada de Legendre. Já o parênteses de Poisson entre dois funcionais  $A$  e  $B$  de  $a$  e  $p_a$ , tomado no mesmo

instante de tempo, é dado por

$$\{A(\mathbf{x}, t), B(\mathbf{y}, t)\} := \int d\mathbf{x}' \left( \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial a(\mathbf{x}', t)} \frac{\partial B(\mathbf{y}, t)}{\partial p_a(\mathbf{x}', t)} - \frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial p_a(\mathbf{x}', t)} \frac{\partial B(\mathbf{y}, t)}{\partial a(\mathbf{x}', t)} \right). \quad (2.10)$$

O parênteses de Dirac é dado por

$$\begin{aligned} \{A(\mathbf{x}, t), B(\mathbf{y}, t)\}_D := & \{A(\mathbf{x}, t), B(\mathbf{y}, t)\} - \sum_{i,j} \int d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \{A(\mathbf{x}, t), \phi_i(\mathbf{x}', t)\} \\ & \times \{\phi(\mathbf{x}', t), \phi(\mathbf{x}'', t)\}_{ij}^{-1} \{\phi_j(\mathbf{x}'', t), B(\mathbf{y}, t)\}. \end{aligned}$$

Um exemplo de aplicação do método para uma teoria de campo é a quantização da eletrodinâmica. Este será explorado na Seção 3.3.



# Capítulo 3

## Exemplos de quantização de sistemas clássicos

### 3.1 Partícula no círculo

Suponha uma partícula de massa  $m$  confinada a se mover em um círculo de raio unitário de equação  $\sqrt{x^2 + y^2} \equiv r = 1$ . Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, deve-se adicionar o vínculo  $\phi = r - 1 = 0$  à Lagrangiana da partícula livre via multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . A Lagrangiana do sistema, em coordenadas polares, fica dada por

$$L(r, \theta, \lambda; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\lambda}) = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + \lambda(r - 1). \quad (3.1)$$

Para fazer a transformada de Legendre, calcula-se o momento conjugado associado a cada coordenada generalizada ( $r, \theta, \lambda$ ):

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}; \quad p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0.$$

Os momentos  $p_r$  e  $p_\theta$  são usados para obter a Hamiltoniana canônica

$$H_{can} = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \lambda(r - 1), \quad (3.2)$$

enquanto o momento conjugado  $p_\lambda$  estabelece o único vínculo primário do sistema. Este é definido como  $\phi_1 \equiv p_\lambda \approx 0$  e deve ser adicionado a  $H_{can}$  via multiplicador de Lagrange. Tem-se então

$$H' = H_{can} + \lambda_1\phi_1. \quad (3.3)$$

A condição de consistência para  $\phi_1$  fornece

$$\{\phi_1, H'\} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial p_\lambda} \frac{\partial H'}{\partial \lambda} = r - 1, \quad (3.4)$$

tal que se estabelece o vínculo secundário  $\phi_2 \equiv r - 1 \approx 0$ . Sua condição de consistência fornece

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H'\} = \frac{\partial\phi_2}{\partial r} \frac{\partial H'}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = 0, \quad (3.5)$$

tal que se deve definir  $\phi_3 \equiv p_r \approx 0$ .

Impõe-se então  $\dot{\phi}_3 \approx 0$ , ou seja,

$$\dot{\phi}_3 = \{\phi_3, H'\} = -\frac{\partial\phi_3}{\partial p_r} \frac{\partial H'}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \lambda, \quad (3.6)$$

tal que se define o vínculo  $\phi_4 \equiv \lambda + \frac{p_\theta^2}{mr^3} = 0$ .

Calcula-se então  $\dot{\phi}_4$ ,

$$\dot{\phi}_4 = \{\phi_4, H'\} = \frac{\partial\phi_4}{\partial \lambda} \frac{\partial H'}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial\phi_4}{\partial p_\theta} \frac{\partial H'}{\partial \theta} + \frac{\partial\phi_4}{\partial r} \frac{\partial H'}{\partial p_r} = \lambda_1 - \frac{3p_\theta^2 p_r}{m^2 r^4}. \quad (3.7)$$

Como  $\phi_3$  já estabelece que  $p_r \approx 0$ , a condição acima determina portanto o multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$ , i.e.,  $\lambda_1 \approx 0$ . Com isso, o processo de obtenção dos vínculos do sistema termina. Em resumo, obteve-se os seguintes vínculos:

$$\phi_1 = p_\lambda; \quad \phi_2 = r - 1; \quad \phi_3 = p_r; \quad \phi_4 = \lambda + \frac{p_\theta^2}{mr^3}. \quad (3.8)$$

Os parênteses de Poisson entre os vínculos são dados por

$$\begin{aligned} \{\phi_1, \phi_2\} &= 0, & \{\phi_1, \phi_3\} &= 0, & \{\phi_1, \phi_4\} &= -1, \\ \{\phi_2, \phi_3\} &= 1, & \{\phi_2, \phi_4\} &= 0 & \text{e} & \{\phi_3, \phi_4\} = \frac{3p_\theta^2}{mr^4}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde foram usados os parênteses de Poisson canônicos  $\{r, p_r\} = \{\theta, p_\theta\} = 1$  e os demais zeros.

A partir de (3.9) pode-se construir a matriz  $\Delta$ , onde  $\Delta_{ij} = \{\phi_i, \phi_j\}$ ,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{3p_\theta^2}{mr^4} \\ 1 & 0 & -\frac{3p_\theta^2}{mr^4} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Sua inversa,  $\Delta^{-1}$ , é dada por

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3p_\theta^2}{mr^4} & 0 & 1 \\ -\frac{3p_\theta^2}{mr^4} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Com os elementos da matriz  $\Delta^{-1}$  calcula-se os seguintes parênteses de Dirac

$$\begin{aligned} \{r, p_r\}_D &= \{r, p_r\} - \sum_{i,j} \{r, \phi_i\} \Delta_{ij}^{-1} \{\phi_j, p_r\} \\ &= 1 - \{r, \phi_3\} \Delta_{32}^{-1} \{\phi_2, p_r\} - \{r, \phi_3\} \Delta_{34}^{-1} \{\phi_4, p_r\} \\ &= 0; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \{\theta, p_\theta\}_D &= \{\theta, p_\theta\} - \sum_{i,j} \{\theta, \phi_i\} \Delta_{ij}^{-1} \{\phi_j, p_\theta\} \\ &= 1; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \{\lambda, p_\lambda\}_D &= \{\lambda, p_\lambda\} - \sum_{ij} \{\lambda, \phi_i\} \Delta_{ij}^{-1} \{\phi_j, p_\lambda\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

O resultado (3.12) indica que  $(r, p_r)$  são fixos e não são mais variáveis dinâmicas. De fato, isso equivale a dizer que a partícula está restrita a uma superfície de  $r$  constante.

Usando a prescrição de Dirac, a quantização do sistema é feita fazendo-se

$$[r, p_r] = 0, \quad [\lambda, p_\lambda] = 0, \quad \text{e} \quad \frac{1}{i} [\theta, p_\theta] = 1, \quad (3.15)$$

com todos os outros comutadores resultando em zero.

Esse resultado é o que de fato se espera, visto que há somente um grau de liberdade, o ângulo  $\theta$ , com momento angular canonicamente conjugado  $p_\theta$ . Isso conclui portanto a análise de vínculos da teoria.

### 3.2 Lagrangiana de Chern-Simons em 1 dimensão

Nesse exemplo, a lagrangiana dada por

$$L = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}^2}{2} + C(\dot{x}y - x\dot{y})$$

será estudada e a análise de vínculos para os casos com  $m_1 \neq 0$  e  $m_2 \neq 0$ ,  $m_1 = 0$  e  $m_2 \neq 0$ , e  $m_1 = m_2 = 0$  será feita. Quando  $m_1 = m_2 = 0$ , o único termo da Lagrangiana é de primeira ordem nas derivadas de  $x$  e  $y$ . Esse termo é do tipo momento angular e é alternativamente chamado de Chern-Simons em 1d.

- $m_1 \neq 0$  e  $m_2 \neq 0$

Os momentos canônicos são dados por

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} + Cy \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} - Cx.$$

Essas relações podem ser invertidas, de modo a se obter

$$\dot{x} = \frac{(p_1 - Cy)}{m_1} \quad \text{e} \quad \dot{y} = \frac{(p_2 + Cx)}{m_2}. \quad (3.16)$$

A Hamiltoniana correspondente não contém nenhum vínculo, pois a Lagrangiana nesse caso não é singular. Ela é dada por

$$H = p_1 \dot{x} + p_2 \dot{y} - L = \frac{(p_1 - Cy)^2}{2m_1} + \frac{(p_2 + Cx)^2}{2m_2},$$

onde  $\Pi_1 \equiv p_1 - Cy$  e  $\Pi_2 \equiv p_2 + Cx$  definem os momentos mecânicos. É interessante observar que os parênteses de Poisson entre as coordenadas e os momentos canônicos são os usuais, dados por

$$\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Por outro lado, os parênteses entre os momentos mecânicos são

$$\{\Pi_1, \Pi_2\} = -2C,$$

o que evidencia a não comutatividade dos momentos mecânicos.

- $m_1 = 0$  e  $m_2 \neq 0$

Nesse caso, a Lagrangiana fica dada por

$$L = \frac{m_2 \dot{y}^2}{2} + C(\dot{x}y - x\dot{y}),$$

tal que

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = Cy \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} - Cx.$$

Os momentos canônicos calculados fornecem um vínculo,  $\phi_1 \equiv p_1 - Cy \approx 0$ , e a relação  $\dot{y} = \frac{p_2 + Cx}{m_2}$ . O cálculo da Hamiltoniana correspondente deixa evidente a presença do vínculo  $\phi_1$ :

$$\begin{aligned} H &= p_1 \dot{x} + p_2 \dot{y} - L \\ &= (p_1 - Cy)\dot{x} + \frac{(p_2 + Cx)^2}{2m_2} \\ &= \lambda_1 \phi_1 + \frac{(p_2 + Cx)^2}{2m_2}, \end{aligned}$$

onde  $\lambda_1 \equiv \dot{x}$  faz, portanto, o papel do multiplicador de Lagrange correspondente ao vínculo  $\phi_1$ . A relação de consistência para  $\phi_1$  fornece,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H\} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial x} - C \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ &= -\frac{2C(p_2 + Cx)}{m_2}, \end{aligned}$$

e determina o vínculo secundário  $\phi_2 \equiv -\frac{2C(p_2 + Cx)}{m_2}$ . Sua relação de consistência é tal que,

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_1} = -\frac{4C^2 \lambda_1}{m_2},$$

e determina o multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$  como sendo  $\lambda_1 \approx 0$ . Assim, não são gerados novos vínculos e tem-se

$$\phi_1 = p_1 - Cy \quad \text{e} \quad \phi_2 = -\frac{2C(p_2 + Cx)}{m_2}. \quad (3.17)$$

O parênteses de Poisson entre os vínculos é dado por

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -\frac{2C^2}{m_2}\{p_1, x\} + \frac{2C^2}{m_2}\{y, p_2\} = \frac{4C^2}{m_2}.$$

A matriz de vínculos,  $\Delta$ , é

$$(\Delta)_{ij} = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4C^2}{m_2} \\ -\frac{4C^2}{m_2} & 0 \end{pmatrix},$$

e a matriz inversa correspondente é

$$(\Delta^{-1})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_2}{4C^2} \\ \frac{m_2}{4C^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

O parênteses de Dirac fica escrito como

$$\begin{aligned} \{A, B\}_D &= \{A, B\} - \sum_{i,j} \{A, \phi_i\} (\Delta^{-1})_{ij} \{\phi_j, B\} \\ &= \{A, B\} + \frac{m_2}{4C^2} \{A, \phi_1\} \{\phi_2, B\} - \frac{m_2}{4C^2} \{A, \phi_2\} \{\phi_1, B\}. \end{aligned}$$

Tem-se então,

$$\{x, y\}_D = \frac{1}{2C}, \quad \{x, p_1\}_D = \{y, p_2\}_D = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \{p_1, p_2\}_D = \frac{C}{2}.$$

- $m_1 = m_2 = 0$

Nesse caso, a Lagrangiana é simplesmente

$$L = C(\dot{x}y - x\dot{y}),$$

e os momentos conjugados são

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = Cy \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = -Cx.$$

Estes definem dois vínculos,  $\phi_1 \equiv p_1 - Cy \approx 0$  e  $\phi_2 \equiv p_2 + Cx \approx 0$ . A Hamiltoniana correspondente é obtida fazendo-se

$$\begin{aligned} H &= p_1\dot{x} + p_2\dot{y} - L \\ &= p_1\dot{x} + p_2\dot{y} - C(\dot{x}y - x\dot{y}) \\ &= (p_1 - Cy)\dot{x} + (p_2 + Cx)\dot{y} \\ &\equiv \phi_1\lambda_1 + \phi_2\lambda_2, \end{aligned}$$

onde foi definido  $\lambda_1 \equiv \dot{x}$  e  $\lambda_2 \equiv \dot{y}$  como os multiplicadores de Lagrange correspondentes à  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente. A relação de consistência para  $\phi_1$  é

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H\} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_2} = -2C\lambda_2,$$

tal que  $\lambda_2$  fica determinado como  $\lambda_2 \approx 0$ . A relação de consistência para  $\phi_2$  é

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} = -\frac{\partial\phi_2}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_1} = 2C\lambda_1,$$

tal que  $\lambda_1$  também fica determinado como  $\lambda_1 \approx 0$ .

O parênteses de Poisson entre os vínculos fica dado por

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial p_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial p_2} = -2C,$$

tal que a matriz  $\Delta$  é

$$(\Delta)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -2C \\ 2C & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

A matriz inversa correspondente é

$$(\Delta^{-1})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2C} \\ -\frac{1}{2C} & 0 \end{pmatrix}$$

e os parêntesis de Dirac ficam escritos como

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \frac{1}{2C}\{A, \phi_1\}\{\phi_2, B\} + \frac{1}{2C}\{A, \phi_2\}\{\phi_1, B\}.$$

Com isso, tem-se

$$\{x, y\}_D = \frac{1}{2C}, \quad \{x, p_1\}_D = \{y, p_2\}_D = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \{p_1, p_2\}_D = \frac{C}{2}.$$

### 3.3 Eletromagnetismo em 3+1 dimensões

#### 3.3.1 Sem correntes externas

A densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  do campo eletromagnético na ausência de cargas e correntes externas é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.19)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ .

A minimização da ação  $S$  correspondente,

$$S = \int dt L, \quad \text{onde} \quad L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (3.20)$$

fornece  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ . Esta pode ser separada em dois casos, um para  $\mu = 0$  e outro para  $\mu = i = 1, 2, 3$ ,

$$\partial_i F^{0i} = 0, \quad (3.21)$$

$$\partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = 0. \quad (3.22)$$

O campo elétrico é escrito em termos do tensor  $F^{\mu\nu}$  como  $E^i \equiv F^{0i}$ . Já o campo magnético é definido como  $B^i \equiv \epsilon^{ijk} F_{jk}$ . A densidade Lagrangiana (3.19) fica escrita em termos de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) \quad (3.23)$$

$$= -\frac{1}{2}(-F^{0i}F^{0i} + F_{ij}F_{ij}) \quad (3.24)$$

$$= -\frac{1}{2}(-(F^{0i})^2 + (\epsilon^{kij}F_{ij})^2) \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (3.26)$$

As equações (3.21) e (3.22) são duas das leis de Maxwell na ausência de cargas e correntes externas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (3.28)$$

A última equação é a lei de Ampère, enquanto a primeira é a lei de Gauss. Esta última define um vínculo. Este fato fica claro ao descrever a teoria via formalismo Hamiltoniano. Para tanto, convém reescrever a densidade Lagrangiana da equação (3.19) em termos dos campos  $A_\mu$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\lambda (g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}). \quad (3.29)$$

O momento conjugado  $\Pi^\nu(\mathbf{x})$  é obtido fazendo-se

$$\Pi^\nu(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\nu(\mathbf{x})} = -\partial_\sigma A_\lambda (g^{0\sigma} g^{\nu\lambda} - g^{0\lambda} g^{\nu\sigma}) = -\partial^0 A^\nu + \partial^\nu A^0. \quad (3.30)$$

Separando as coordenadas espaciais da coordenada temporal, tem-se

$$\Pi^i(\mathbf{x}) = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = -F^{0i} = -E^i, \quad (3.31)$$

$$\Pi^0(\mathbf{x}) = -\partial^0 A^0 + \partial^0 A^0 = 0. \quad (3.32)$$

A equação (3.31) pode ser usada para escrever  $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{\Pi} + \nabla A_0$  e obter a densidade Hamiltoniana canônica:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can} = \Pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} &= \Pi^i \Pi^i + \Pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \\ &= \mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{\Pi} \cdot \nabla A_0 + \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{\Pi}^2) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 + \mathbf{\Pi}^2) + \mathbf{\Pi} \cdot \nabla A_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A equação (3.32) define um vínculo primário  $\phi_0 \equiv \Pi^0 \approx 0$ , que deve ser adicionado à  $\mathcal{H}_{can}$ , tal que

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_{can} + \lambda_0 \phi_0. \quad (3.34)$$

A relação de consistência para  $\phi_0$  fornece

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_0 = \{\phi_0, H'\} &= \int \left( \frac{\delta\phi_0(\mathbf{x})}{\delta A_\mu(\mathbf{x}'')} \frac{\delta H'}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{x}'')} - \frac{\delta\phi_0(\mathbf{x})}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{x}'')} \frac{\delta H'}{\delta A_\mu(\mathbf{x}'')} \right) d\mathbf{x}'' \\
&= - \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta_{0\mu} \frac{\delta H'}{\delta A_\mu(\mathbf{x}'')} d\mathbf{x}'' \\
&= - \frac{\delta H'}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\
&= -\partial_i E^i(\mathbf{x}, t),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

definindo o vínculo secundário  $\phi_1 \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$ . Este vínculo corresponde justamente à equação (3.27) e é satisfeito pelo sistema durante toda sua evolução temporal, i.e.,  $\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H'\} = 0$ .

Os dois únicos vínculos são portanto  $\phi_0 = \Pi_0 \approx 0$  e  $\phi_1 = \nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$  e eles são de primeira classe, i.e.,

$$\{\phi_0, \phi_1\} \approx 0. \tag{3.36}$$

Existe então a liberdade de fixar dois, um ou nenhum calibre para quantizar essa teoria.

A quantização de Gupta-Bleuler consiste em fixar somente um calibre, de modo a resolver o vínculo  $\phi_0$ , e promover o vínculo  $\phi_1$  a um operador restringindo o espaço de Hilbert físico. Será feita a quantização de Gupta-Bleuler a seguir.

Fixa-se então o calibre  $\chi_0 \equiv A_0 \approx 0$ , tal que  $\{\phi_0(\mathbf{x}), \chi_0(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . A matriz  $\Delta$  envolvendo somente os vínculos  $\phi_0$  e  $\chi_0$  fica dada por

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\phi_0, \phi_0\} & \{\phi_0, \chi_0\} \\ \{\chi_0, \phi_0\} & \{\chi_0, \chi_0\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

A matriz inversa  $\Delta^{-1}$ ,

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

é usada na construção do parênteses de Dirac. Este é tal que

$$\begin{aligned}
\{\phi_0(\mathbf{x}), \chi_0(\mathbf{y})\}_D &= \{\phi_0(\mathbf{x}), \chi_0(\mathbf{y})\} \\
&+ \int \{\phi_0(\mathbf{x}), \chi_0(\mathbf{x}')\} \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \{\phi_0(\mathbf{x}''), \chi_0(\mathbf{y})\} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \\
&= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esse procedimento resolve, portanto, o vínculo  $\phi_0$  e elimina o grau de liberdade  $(A_0, \Pi^0)$ . Permanecem ainda os graus de liberdade  $(A_i, \Pi^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Suas versões quânticas podem então satisfazer as relações de comutação usuais

$$[A_i(\mathbf{x}), \Pi^i(\mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.39)$$

desde que o vínculo  $\phi_1$  seja promovido à operador

$$\phi_1 = \nabla \cdot \mathbf{E} \rightarrow \hat{\phi}_1 = \widehat{\nabla \cdot \mathbf{E}} \quad (3.40)$$

aniquilando as funções do espaço de Hilbert físico:

$$\widehat{\nabla \cdot \mathbf{E}}|\psi\rangle = 0. \quad (3.41)$$

### 3.3.2 Com correntes externas

Na presença de cargas e correntes externas, a densidade Lagrangiana do campo eletromagnético fica dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu. \quad (3.42)$$

Nesse caso, as equações de Euler-Lagrange, obtidas a partir da minimização da ação correspondente, fornecem  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ . Separando os casos  $\mu = 0$  e  $\mu = i$ , tem-se

$$\partial_i F^{0i} = j^0, \quad (3.43)$$

$$\partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = j^i. \quad (3.44)$$

Em termos dos campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{J})$ , tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{J}. \quad (3.46)$$

Essas são, novamente, as lei de Gauss e Ampère, porém agora na presença de cargas  $(\rho)$  e correntes  $(\mathbf{J})$  externas.

Os momentos canonicamente conjugados são os mesmos obtidos para o caso sem correntes, uma vez que o termo  $A_\mu j^\mu$  não introduz nenhum fator do tipo  $\dot{A}_\mu$ . Portanto,

tem-se novamente

$$\Pi^i(\mathbf{x}) = \partial_0 A_i - \partial_i A_0, \quad \text{e} \quad \Pi^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.47)$$

Além disso,  $\mathcal{H}_{can}$  é dada por

$$\mathcal{H}_{can} = \Pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 + \mathbf{\Pi}^2) + \mathbf{\Pi} \cdot \nabla A_0 - A_\mu j^\mu. \quad (3.48)$$

Adicionando o vínculo primário  $\phi_0 \equiv \mathbf{\Pi}^0 \approx 0$ , obtém-se

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_{can} + \lambda_0 \phi_0. \quad (3.49)$$

A relação de consistência para  $\phi_0$  fornece

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0 = \{\phi_0, H'\} &= \int \left( \frac{\delta \phi_0(\mathbf{x})}{\delta A_\mu(\mathbf{x}'')} \frac{\delta H'}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{x}'')} - \frac{\delta \phi_0(\mathbf{x})}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{x}'')} \frac{\delta H'}{\delta A_\mu(\mathbf{x}'')} \right) d\mathbf{x}'' \\ &= - \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta_{0\mu} \frac{\delta H'}{\delta A_\mu(\mathbf{x}'')} d\mathbf{x}'' \\ &= - \frac{\delta H'}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\ &= \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}, t) + j^0(\mathbf{x}, t) \\ &= -\partial_i E^i(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.50)$$

tal que se define o vínculo secundário  $\phi_1 \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} - \rho \approx 0$ . Novamente, este corresponde justamente à lei de Gauss e é satisfeito durante toda a evolução temporal do sistema.

Os vínculos  $\phi_0$  e  $\phi_1$  são de primeira classe e a quantização pode ser feita fixando ambos, apenas um ou nenhum calibre.

A quantização de Gupta-Bleuler segue como no caso sem cargas e correntes externas e, portanto, não será repetido. A única diferença fica restrita à definição do operador  $\hat{\phi}_1$ , que nesse caso deve ser dado por  $\hat{\phi}_1 = \widehat{\nabla \cdot \mathbf{E}} - \hat{\rho}$ .

### 3.4 Partícula livre relativística

Considere uma partícula livre movendo-se numa variedade  $\mathbb{M}$  (ou espaço) com métrica  $g_{\mu\nu}$ , tal que a distância entre dois pontos fica dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.51)$$

Dados dois pontos quaisquer nesse espaço, a trajetória que essa partícula segue é dada pela curva que define a menor distância entre esses dois pontos. Por ser uma partícula livre, sua trajetória corresponde a uma geodésica no espaço.

Encontrar a equação de movimento da partícula corresponde, portanto, a minimizar a distância entre dois pontos, i.e., a minimizar

$$S = \int_{s_0}^{s_1} ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (3.52)$$

Por outro lado, uma curva nessa variedade pode ser parametrizada como  $x(\tau)$ , tal que se pode definir

$$S_0 \equiv \alpha \int_0^T d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (3.53)$$

onde

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.54)$$

A motivação para definir a ação  $S_0$  contendo o parâmetro  $\alpha$  consiste em considerar uma Lagrangiana análoga a de uma partícula livre clássica  $L = mv^2/2$ , tal que o valor de  $\alpha$  dependerá da assinatura da métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Considere, por exemplo, uma variedade de 3 dimensões espaciais. Nesse caso, quando  $g_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski com assinatura  $(+, -, -, -)^1$ , tem-se

$$S_0 = \alpha \int d\tau \sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2} \quad (3.55)$$

$$= \alpha \int d\tau \dot{x}^0 \sqrt{1 - \frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2}{(\dot{x}^0)^2}} \quad (3.56)$$

$$\simeq \alpha \int d\tau \dot{x}^0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2}{(\dot{x}^0)^2} \right) \quad (3.57)$$

$$= \alpha \int dx^0 - \frac{\alpha}{2} \int dx^0 \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{(dx^0)^2}. \quad (3.58)$$

O primeiro termo é um termo de fronteira que pode ser desconsiderado. O segundo termo indica que se deve ter  $\alpha = -m$ .

<sup>1</sup>Se a assinatura for  $(-, +, +, +)$ , então  $ds = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ .

Por outro lado, para baixas velocidades e  $g_{\mu\nu}$  com assinatura Euclidiana  $(+, +, +)$ , tem-se

$$S_0 = \alpha \int d\tau \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2} \quad (3.59)$$

$$= \alpha \int d\tau \sqrt{1 - (1 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2)} \quad (3.60)$$

$$\simeq \alpha \int d\tau \left( 1 - \frac{1 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2}{2} \right) \quad (3.61)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \int d\tau + \frac{\alpha}{2} \int d\tau \left( (\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 \right). \quad (3.62)$$

Desconsiderando o termo de fronteira, esse resultado indica que, nesse caso, se deve ter  $\alpha = m$ .

Apesar da análise feita ser baseada em uma variedade com 3 dimensões espaciais, ela é válida para quaisquer dimensões.

Cabe notar que  $S_0$  dada em (3.53) é invariante sob reparametrização, i.e., fazendo-se  $\tau \rightarrow f(\tau)$  tem-se

$$S_0 \rightarrow \alpha \int_0^{f(\tau)} df \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{df} \frac{dx^\nu}{df}}, \quad (3.63)$$

uma vez que

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{df} \frac{df}{d\tau}. \quad (3.64)$$

A ação  $S_0$  pode ser difícil de se manusear por conter um termo com raiz quadrada. Por esse motivo, é interessante introduzir uma outra ação,

$$S_1 \equiv \pm \frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{e} \left( \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{e} + m^2 \right), \quad (3.65)$$

contendo um grau de liberdade extra  $e$ . Por consistência, deve-se adotar o sinal  $-$  em  $S_1$  quando a métrica for de Minkowski. O sinal  $+$  deve ser usado quando a métrica for Euclidiana. A variação de  $S_1$  com relação a  $e$  fornece

$$e = \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{m^2}, \quad (3.66)$$

tal que substituindo-se esse resultado em  $S_1$  obtém-se  $S_0$ . Isso significa que  $S_1$  é equivalente a  $S_0$  e ambas levam às mesmas equações de movimento.

A ação  $S_1$  não contém o termo com raiz quadrada, sendo que o preço dessa simplificação consiste na introdução do grau de liberdade extra  $e$ . Existe ainda a

vantagem de se poder tomar o limite  $m \rightarrow 0$  em  $L_1$ , tal que seja possível obter as equações de movimento de uma partícula do tipo luz, i.e., com  $ds^2 = 0$ . Além disso, o grau de liberdade extra  $e$  não é físico e por isso pode ser pensado como um calibre que pode ser ajustado convenientemente. Uma escolha possível para esse calibre é tal que  $e = 1$ . Nesse caso, desconsiderando ainda o termo constante contendo  $m^2$ , obtém-se uma nova ação  $S_2$  a partir de  $S_1$ ,

$$S_2 \equiv \pm \frac{1}{2} \int d\tau g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (3.67)$$

Novamente, para métrica de Minkowski, deve-se adotar o sinal  $-$  e, para métrica Euclidiana, o sinal  $+$ .

Para manter o estudo do caso geral, isto é, sem fixar nenhum calibre, deve-se usar  $S_1$  para quantizar a teoria. Considere então  $g_{\mu\nu}$  como a métrica de Minkowski, tal que  $S_1$  deve ter conter um sinal global negativo. Nesse caso, deve-se primeiramente calcular os momentos canonicamente conjugados:

$$p_\mu = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{e}}, \quad (3.68)$$

$$p_e = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{e}} = 0. \quad (3.69)$$

A Hamiltoniana canônica fica dada por

$$H_{can} = p_\mu \dot{x}^\mu - L \quad (3.70)$$

$$= p_\mu (-\sqrt{e} p^\mu) + \frac{1}{2} \sqrt{e} \left( \frac{g^{\mu\nu}}{e} (-\sqrt{e} p^\mu) (-\sqrt{e} p^\nu) + m^2 \right) \quad (3.71)$$

$$= -\frac{\sqrt{e}}{2} (p^2 - m^2). \quad (3.72)$$

A partir da adição do vínculo  $\phi_1 \equiv p_e \approx 0$  obtém-se  $H' = H_c + \lambda \phi_1$ . A condição de consistência para  $\phi_1$  fornece

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H'\} = \frac{1}{2} (p^2 - m^2) \quad (3.73)$$

e define-se um novo vínculo  $\phi_2 \equiv \frac{1}{2} (p^2 - m^2) \approx 0$ . Tem-se então

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H'\} = 0, \quad (3.74)$$

tal que não são definidos novos vínculos.

Os vínculos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são de primeira classe, isto é,

$$\{\phi_1, \phi_2\} = 0. \quad (3.75)$$

A seguir serão exploradas então duas formas de quantizar esse sistema. Uma consiste em fixar dois calibres e efetuar a quantização somente via parênteses de Dirac. A outra consiste em fixar apenas um calibre e manter um dos vínculos restringindo o espaço de Hilbert físico.

### 3.4.1 Quantização via parênteses de Dirac

Nesse caso, fixam-se dois calibres

$$\chi_1 \equiv e - \frac{1}{m^2} \approx 0, \quad (3.76)$$

$$\chi_2 \equiv \beta - x^0 \approx 0, \quad (3.77)$$

onde  $\beta$  é uma constante. O calibre  $\chi_2$  fixa a coordenada temporal, ou seja, toda análise que segue será feita para uma folha temporal definida.

Tem-se então que

$$\{\phi_1, \chi_1\} = -1, \quad (3.78)$$

$$\{\phi_2, \chi_2\} = p_0, \quad (3.79)$$

e que os demais parênteses de Poisson são nulos.

Constrói-se então a matriz  $\Delta$ ,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

e obtém-se sua inversa,

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{p_0} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_0} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Com isso, os parênteses de Dirac ficam dados por

$$\begin{aligned} \{f, g\}_D &= \{f, g\} - \{f, \phi_1\}\{\chi_1, g\} + \frac{1}{p_0}\{f, \phi_2\}\{\chi_2, g\} + \{f, \chi_1\}\{\phi_1, g\} \\ &\quad - \frac{1}{p_0}\{f, \chi_2\}\{\phi_2, g\}. \end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$\{e, p_e\}_D = 0 \quad (3.82)$$

$$\{x^\mu, p_\nu\}_D = \delta^\mu_\nu - \delta^0_\nu \frac{p^\mu}{p_0}. \quad (3.83)$$

A quantização é feita promovendo as funções no espaço de fase a operadores auto-adjuntos atuando num espaço de Hilbert e substituindo os parênteses de Dirac por comutadores,

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta^\mu_\nu - i\hat{p}_0^{-1}\hat{p}_\mu\delta^0_\nu. \quad (3.84)$$

Uma realização dessa álgebra consiste em definir  $\hat{x}^\mu$  como operador multiplicativo  $x^\mu$  para todo  $\mu$ ,  $\hat{p}_j = -i\partial_j$  para todo  $j \neq 0$ , e  $\hat{p}_0 = \sqrt{-\partial_i\partial^i - m^2}$  onde  $i \neq 0$ . Para checar que essa realização satisfaz (3.84), basta notar que

$$(i) \quad [\hat{x}^\mu, \hat{p}_i] = i\delta^\mu_i,$$

$$(ii) \quad i\delta^\mu_0 - i\hat{p}_0^{-1}\hat{p}_\mu = -i\hat{p}_0^{-1}\hat{p}_i\delta_{\mu i},$$

e usar a relação

$$[x, F(p)] = i\frac{\partial F(p)}{\partial p}. \quad (3.85)$$

Portanto,

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_0] = i\frac{\partial}{\partial p^\mu}(\sqrt{-\partial_i\partial^i - m^2}) = \frac{i}{2\hat{p}_0}\frac{\partial}{\partial p^\mu}(-\hat{p}_i\hat{p}_i - m^2) = -i\frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_0}\delta_{\mu i}. \quad (3.86)$$

### 3.4.2 Quantização a la Gupta-Bleuler

Nesse caso, fixa-se somente o calibre

$$\chi_1 \equiv e - \frac{1}{m^2} \approx 0 \quad (3.87)$$

e constrói-se a matriz  $\Delta$  referente somente à  $\phi_1$  e  $\chi_1$ :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \chi_1\} \\ \{\chi_1, \phi_1\} & \{\chi_1, \chi_1\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

A matriz  $\Delta^{-1}$ ,

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

é então usada para construir os parênteses de Dirac referente somente as variáveis  $e$  e  $p_e$ :

$$\{e, p_e\}_D = \{e, p_e\} - \{e, \phi_1\}\{\chi_1, p_e\} + \{e, \chi_1\}\{\phi_1, p_e\} = 1 - 1 + 0 = 0. \quad (3.90)$$

O parênteses entre  $x^\mu$  e  $p_\nu$  permanecem iguais ao parênteses de Poisson usuais e sua quantização fornece

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta_\nu^\mu. \quad (3.91)$$

Uma realização dessa álgebra é tal que  $\hat{x}^\mu$  é operador multiplicativo e  $\hat{p}_\nu = -i\partial_\nu$ . Resta por fim promover o vínculo  $\phi_2$  a operador agindo no espaço de Hilbert. Segundo o procedimento de Gupta-Bleuler, o espaço de Hilbert físico é então formado por estados  $|\psi\rangle$  aniquilados por  $\hat{\phi}_2$ :

$$\hat{\phi}_2|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 - m^2)|\psi\rangle = 0 \quad (3.92)$$

# Capítulo 4

## Teorias de calibre

As referências pertinentes a esse capítulo são [17], [24] e [29].

Transformações de calibre são transformações feitas nos campos fundamentais de uma teoria que não representam mudanças físicas efetivas, i.e., mudanças mensuráveis em laboratório, por exemplo.

O exemplo mais simples de teoria de calibre é a eletrodinâmica. Esta é completamente descrita pelas equações de Maxwell: dada uma distribuição de cargas  $\rho(\mathbf{x}, t)$  e correntes externas  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  satisfazendo a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.1)$$

os campos elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  satisfazem

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (4.5)$$

Portanto, dado  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  e condições de contorno do sistema, é possível, a princípio, encontrar as soluções dos campos  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ . Como tanto o rotacional do gradiente quanto o divergente do rotacional de um campo escalar são identicamente nulos, as equações (4.4) e (4.5) podem ser resolvidas escrevendo-se  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  como

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.7)$$

Porém, vale notar que transformações de  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  da forma

$$\varphi \mapsto \varphi' = \varphi + \dot{\Gamma}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\Gamma, \quad (4.9)$$

onde  $\Gamma$  é uma função arbitrária, preservam  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Isso significa que toda família de  $(\varphi, \mathbf{A})$  conectados via (4.8) e (4.9) levam ao mesmos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Essa transformação nos campos  $(\varphi, \mathbf{A})$ , que não altera os campos físicos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , é chamada de transformação de calibre. A teoria eletromagnética é, portanto, uma teoria de calibre, i.e., uma teoria com campos que se transformam de acordo com (4.8) e (4.9).

Na análise feita acima, utiliza-se a notação clássica, onde as equações são escritas em termos dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Porém, a teoria eletromagnética pode ser equivalentemente escrita em notação relativística (ou covariante), onde as equações ficam escritas em termos do campo  $A_\mu$ . Ambas as notações foram usadas na Seção 3.3. Cabe aqui, portanto, introduzir formalmente a correspondência entre elas.

Primeiramente, o potencial  $A^\mu$  fica definido como  $A^\mu \equiv (\varphi, \mathbf{A})$ , a quadri-corrente  $j^\mu$  como  $j^\mu \equiv (\rho, \mathbf{J})$  e o tensor  $F^{\mu\nu}$  como  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  ficam definidos em termos de  $F^{\mu\nu}$  como

$$F^{0i} = E^i \quad \text{e} \quad F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k. \quad (4.10)$$

A equação de continuidade, eq. (4.1), fica escrita como

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.11)$$

O conjunto de transformações descritas por (4.8) e (4.9) fica descrito por uma só equação,

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Gamma. \quad (4.12)$$

As duas primeiras equações de Maxwell, eqs. (4.2) e (4.3), ficam reescritas como

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu. \quad (4.13)$$

Enquanto as duas últimas equações, (4.4) e (4.5), são reescritas como

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.14)$$

onde  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  é o tensor de Levi-Civita, totalmente anti-simétrico com  $\epsilon_{0123} = 1$ .

Vale notar que o tensor  $F_{\mu\nu}$  é invariante sob transformações de calibre, uma vez que, dada (4.12), tem-se

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \Gamma) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \Gamma) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

As duas últimas equações de Maxwell, (4.4) e (4.5), seguem diretamente da definição do tensor  $F_{\mu\nu}$ . As equações (4.2) e (4.3), por outro lado, podem ser derivadas a partir da minimização de uma ação. Essa ação é justamente a utilizada na Seção 3.3, dada por

$$S = \int \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right) d^4x. \quad (4.16)$$

O termo  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  é invariante sob transformações de calibre, visto que  $F_{\mu\nu}$  o é. O termo  $A_\mu j^\mu$ , por outro lado, é tal que

$$\begin{aligned} (A'_\mu - A_\mu) j^\mu &= (A_\mu - \partial_\mu \Gamma - A_\mu) j^\mu \\ &= -\partial_\mu \Gamma j^\mu \\ &= (\partial_\mu j^\mu) \Gamma - \partial_\mu (j^\mu \Gamma). \end{aligned} \quad (4.17)$$

O primeiro termo,  $(\partial_\mu j^\mu) \Gamma$ , é nulo devido à equação de continuidade (4.11). Já o segundo termo,  $\partial_\mu (j^\mu \Gamma)$ , é uma divergência total e pode ser desprezado quando sob integração desde que  $\Gamma(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} 0$ . Com isso, a ação proposta é invariante por transformações de calibre, como esperado.

O campo fundamental da eletrodinâmica é, portanto, o campo  $A_\mu$ . A noção de transformação de calibre fica definida em termos de  $A_\mu$  de acordo com (4.12). Porém, essa noção deve ser estendida para abranger também transformações de outros campos, sejam eles escalares ou fermiônicos.

A necessidade dessa extensão é justificada por argumentos de preservação de simetrias e, conseqüentemente, conservação de correntes de Noether. Para exemplificar esse argumento, o exemplo de um campo escalar complexo será tratado a seguir. Nele será possível ver como a noção de transformação de calibre é estendida.

Considere um campo escalar complexo  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . Informações físicas a respeito de  $\phi(\mathbf{x}, t)$  são obtidas a partir de interpretações probabilísticas da forma  $\phi^*(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t)$ . Estas são invariantes por transformações da fase de  $\phi(\mathbf{x}, t)$  que podem, inclusive,

dependem da posição e do tempo. Por isso, é natural esperar que a teoria descrevendo esse campo escalar seja invariante sob transformações da forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow e^{-i\Lambda(\mathbf{x}, t)}\phi(\mathbf{x}, t). \quad (4.18)$$

A densidade Lagrangiana de um campo escalar complexo livre qualquer é dada por

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi. \quad (4.19)$$

Porém, esta não é invariante por transformações da forma dada em (4.18). Isso pode ser visto considerando-se transformações infinitesimais, tais que  $\phi \rightarrow (1 - i\Lambda(\mathbf{x}, t))\phi$ . Nesse caso,

$$\delta\phi = -i\Lambda(\mathbf{x}, t)\phi \quad (4.20)$$

e

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi) = -i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda(\partial_\mu\phi). \quad (4.21)$$

Analogamente,

$$\delta\phi^* = i\Lambda(\mathbf{x}, t)\phi^* \quad (4.22)$$

e

$$\delta(\partial_\mu\phi^*) = i(\partial_\mu\Lambda)\phi^* + i\Lambda(\partial_\mu\phi^*). \quad (4.23)$$

Sob essa transformação, a variação de  $\mathcal{L}$  fica dada por,

$$\delta\mathcal{L} = \delta[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*)] - m^2\delta(\phi\phi^*) \quad (4.24)$$

$$= [\delta(\partial_\mu\phi)](\partial^\mu\phi^*) + (\partial_\mu\phi)[\delta(\partial^\mu\phi^*)] - m^2(\delta\phi\phi^* + \phi\delta\phi^*) \quad (4.25)$$

$$= [-i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda(\partial_\mu\phi)](\partial^\mu\phi^*) + (\partial_\mu\phi)[i(\partial_\mu\Lambda)\phi^* + i\Lambda(\partial_\mu\phi^*)]$$

$$= (\partial_\mu\Lambda)[-i\phi\partial^\mu\phi^* + i\phi^*\partial^\mu\phi].$$

O termo entre colchetes nessa equação corresponde justamente a corrente de Noether  $j^\mu$  associada a  $\mathcal{L}$ :

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(-i\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}(i\phi^*) \quad (4.26)$$

$$= i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*). \quad (4.27)$$

Portanto, a variação de  $\mathcal{L}$  fica dada por

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\Lambda)j^\mu. \quad (4.28)$$

Para que se tenha uma densidade Lagrangiana invariante sob transformações da forma (4.18), adiciona-se um termo  $\mathcal{L}_1$  à  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}_1 = j^\mu A_\mu. \quad (4.29)$$

A densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}_1$  contém um campo  $A_\mu$  extra. Impondo que este se transforme de acordo com

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Lambda, \quad (4.30)$$

então

$$\delta\mathcal{L}_1 = (\delta j^\mu)A_\mu + j^\mu(\delta A_\mu) = (\delta j^\mu)A_\mu - j^\mu(\partial_\mu\Lambda). \quad (4.31)$$

Nesse caso, o último termo de  $\delta\mathcal{L}_1$  cancela a variação  $\delta\mathcal{L}$  obtida na equação (4.28). Resta ainda o primeiro termo, que é dado por

$$(\delta j^\mu)A_\mu = i\delta(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)A_\mu = (2\phi^*\phi\partial^\mu\Lambda)A_\mu. \quad (4.32)$$

Para cancelá-lo, adiciona-se uma segunda densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_2 = A_\mu A^\mu \phi^* \phi. \quad (4.33)$$

Sua variação é dada por

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2A_\mu(\delta A^\mu)\phi^*\phi = 2A_\mu(-\partial_\mu\Lambda)\phi^*\phi \quad (4.34)$$

e cancela, portanto, o fator obtido em (4.32).

O campo  $A_\mu$  introduzido corresponde justamente ao campo fundamental da eletrodinâmica. A regra de transformação (4.30) corresponde portanto à transformação desse campo sob transformações de calibre, introduzida em (4.12).

Antes de considerar a densidade Lagrangiana total do problema, deve-se adicionar ainda uma terceira densidade Lagrangiana à  $\mathcal{L}$ . Esta deve conter a contribuição do campo  $A_\mu$  e deve ser invariante por transformações de calibre, uma vez que  $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$  já o é por si só. Como visto anteriormente, essa corresponde justamente a densidade

Lagrangiana do campo eletromagnético livre

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (4.35)$$

Assim, a densidade Lagrangiana total do sistema fica dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{total} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\ &= (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi + i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)A_\mu \\ &+ A_\mu A^\mu\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= (\partial_\mu\phi - iA_\mu\phi)(\partial^\mu + iA_\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Com essa análise é possível ver que, quando o campo  $\phi$  se transforma de maneira covariante, i.e., de acordo com

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow e^{-i\Lambda(\mathbf{x}, t)}\phi(\mathbf{x}, t), \quad (4.37)$$

o campo  $A_\mu$  se transforma como

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) \rightarrow A_\mu(\mathbf{x}, t) - \partial_\mu\Lambda(\mathbf{x}, t). \quad (4.38)$$

Isso estende o entendimento de transformação de calibre como sendo transformações não só dos campos  $A_\mu$ , mas também dos campos  $\phi$ .

De (4.36) é possível ver que o acoplamento do campo  $\phi$  com o campo eletromagnético se dá via  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iA_\mu$ . Isso define a derivada covariante,

$$D_\mu \equiv (\partial_\mu - iA_\mu). \quad (4.39)$$

Esta recebe esse nome porque, assim como  $\phi$ , se transforma como

$$D_\mu\phi \rightarrow (\partial_\mu - i[A_\mu - \partial_\mu\Lambda])(e^{-i\Lambda}\phi) \quad (4.40)$$

$$= e^{-i\Lambda}(\partial_\mu\phi - i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i[A_\mu - \partial_\mu\Lambda]\phi) \quad (4.41)$$

$$= e^{-i\Lambda}(\partial_\mu - iA_\mu)\phi \quad (4.42)$$

$$= e^{-i\Lambda}D_\mu\phi. \quad (4.43)$$

De maneira mais abstrata, a transformação de  $D_\mu$  pode ser escrita como

$$D_\mu \rightarrow e^{-i\Lambda} D_\mu e^{+i\Lambda}, \quad (4.44)$$

onde fica subentendido que  $D_\mu$  age em qualquer campo que se transforma de acordo com (4.37).

Vale notar que o tensor  $F_{\mu\nu}$  pode ser escrito em termos das derivadas covariantes como

$$F^{\mu\nu} = i[D^\mu, D^\nu], \quad (4.45)$$

uma vez que

$$[D^\mu, D^\nu]\phi = (\partial^\mu - iA^\mu)(\partial^\nu - iA^\nu)\phi - (\partial^\nu - iA^\nu)(\partial^\mu - iA^\mu)\phi \quad (4.46)$$

$$= -i(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\phi \quad (4.47)$$

$$= -iF^{\mu\nu}\phi. \quad (4.48)$$

Em termos de derivadas covariantes, a densidade Lagrangiana total do sistema fica escrita como

$$\mathcal{L}_{total} = D_\mu\phi D^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

onde  $D^\mu\phi^* = (\partial^\mu + iA_\mu)\phi^*$  é a derivada covariante de  $\phi^*$ . Ela recebe esse nome não por ser obtida via conjugação de  $D_\mu\phi$ , mas por se transformar da mesma maneira que  $\phi^*$  se transforma sob transformações de calibre.

Fica estabelecida, portanto, outra maneira de interpretar o campo eletromagnético. Esta consiste em considerá-lo como o campo que deve ser introduzido para garantir a invariância da teoria sob transformações do tipo (4.18).

As transformações definidas em (4.18) podem ser escritas como

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow U(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t), \quad (4.50)$$

onde  $U(\mathbf{x}, t) = e^{-i\Lambda(\mathbf{x}, t)}$ . A regra de transformação dos campos  $A_\mu$  dada em (4.30) pode ser escrita em termos de  $U(\mathbf{x}, t)$  como

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) \rightarrow U(\mathbf{x}, t)A_\mu(\mathbf{x}, t)U^\dagger(\mathbf{x}, t) + iU(\mathbf{x}, t)\partial_\mu U^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (4.51)$$

Os elementos  $U(\mathbf{x}, t)$  podem ser pensados como matrizes unitárias  $1 \times 1$  que formam um grupo  $U(1)$ . O grupo  $U(1)$  é aquele cujos geradores da álgebra são apenas números. Como os geradores comutam, o grupo é Abeliano.

Conforme mencionado no início dessa seção, o eletromagnetismo é o exemplo mais simples de teoria de calibre. Isso se deve ao fato das transformações de calibre pertencerem ao grupo  $U(1)$ . Porém, uma vez entendidos os conceitos explicados até aqui, a generalização para outras teorias (não-Abelianas) segue de maneira direta.

Teorias não-Abelianas foram estudadas por Yang e Mills em 1954. Elas consistem na generalização da teoria de calibre Abelianas para os casos em que as funções de onda são compostas por várias componentes, i.e., podem ser expressas como

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \\ \dots \\ \psi_N(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Nesse caso, a transformação (4.50) é substituída por

$$\psi_a(\mathbf{x}, t) \rightarrow U_{ab}(\mathbf{x}, t)\psi_b(\mathbf{x}, t), \quad (4.53)$$

onde  $\psi_a(\mathbf{x}, t)$  denota a componente  $a$  de  $\psi(\mathbf{x}, t)$  e a matriz  $U(\mathbf{x}, t)$  é uma matriz unitária  $N \times N$ .

O campo  $A_\mu$  agora age numa função  $\psi$  de  $N$  componentes e por isso deve ser substituído por uma matriz hermitiana  $N \times N$  de campos  $A_\mu^{\alpha\beta}$ . A regra de transformação (4.51) continua sendo válida, mas agora com o entendimento de que  $U(\mathbf{x}, t)$  é uma matriz unitária e  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  uma matriz hermitiana.

Da mesma maneira, a derivada covariante, definida em (4.39), deve agora agir num campo  $\psi$  de  $N$  componentes e por isso fica definida como

$$D_\mu^{\alpha\beta} \equiv \delta^{\alpha\beta} \partial_\mu - iA_\mu^{\alpha\beta}. \quad (4.54)$$

Estendendo a definição (4.45), o tensor  $F_{\mu\nu}$  também passa a ter componentes matriciais, dadas por

$$F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = i[D_\mu, D_\nu]^{\alpha\beta} \quad (4.55)$$

$$= \partial_\mu A_\nu^{\alpha\beta} - \partial_\nu A_\mu^{\alpha\beta} - i[A_\mu, A_\nu]^{\alpha\beta}. \quad (4.56)$$

Como os campos  $A_\mu$  agora são matrizes, o comutador  $[A_\mu, A_\nu]$  não se anula, como no caso  $U(1)$ .

As matrizes unitárias  $U(\mathbf{x}, t)$  formam um grupo  $U(N)$ . Em particular, quando  $\det U = 1$ , o grupo é  $SU(N)$ . Nesse caso, as matrizes  $U(\mathbf{x}, t)$  podem ser escritas em termos dos geradores  $T_a$  do grupo como

$$U(\mathbf{x}, t) = e^{-i\Lambda^a(\mathbf{x}, t)T_a}. \quad (4.57)$$

As matrizes geradoras  $T_a$  são hermitianas e de traço nulo. Isso segue do fato que  $U(\mathbf{x}, t)$  é unitária e de determinante 1.

Em termos das matrizes geradoras  $T_a$ , tem-se

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad (4.58)$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a, \quad (4.59)$$

$$(D_\mu)^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \partial_\mu - iA_\mu^a (T_a)^{\alpha\beta}. \quad (4.60)$$

Os elementos  $A_\mu^a$  e  $F_{\mu\nu}^a$  são números e podem ser pensados como componentes de um vetor decomposto na base  $T_a$ . Usualmente, se escreve somente  $A_\mu$  ou  $F_{\mu\nu}$ , com o entendimento de que esses são campos e tensores que tomam valores na álgebra de Lie do grupo  $SU(N)$ , isto é, são escritos em termos das matrizes geradoras como  $A_\mu = A_\mu^a T_a$  e  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$ .

A densidade Lagrangiana para teorias não-Abelianas é obtida via generalização de

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.61)$$

como

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}). \quad (4.62)$$

Dessa maneira, as equações de movimento passam também a ser generalizações de

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.63)$$

e ficam dadas por

$$D_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} - i[A_\nu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (4.64)$$

A seguir serão discutidas algumas propriedades de campos vetoriais e tensoriais introduzidos nesse capítulo.

## 4.1 Propriedades

**Propriedade 1:** Considere uma transformação de coordenadas infinitesimal  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ , definida em termos de um campo vetorial  $f^\mu(x)$  como  $\tilde{x}^\mu = x^\mu + f^\mu(x)$ . Sob essa transformação de coordenadas, um campo vetorial qualquer  $A_\mu(x)$  se transforma como

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\nu(x). \quad (4.65)$$

Em primeira ordem em  $f(x)$  tem-se

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \tilde{A}_\mu(x) + f^\nu \partial_\nu \tilde{A}_\mu(x) + \mathcal{O}(f^2). \quad (4.66)$$

Invertendo a equação (4.65),

$$A_\nu(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \tilde{A}_\mu(\tilde{x}), \quad (4.67)$$

e substituindo (4.66), obtém-se

$$A_\nu(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \tilde{A}_\mu(\tilde{x}) \quad (4.68)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu} (x^\mu + f^\mu(x)) (\tilde{A}_\mu(x) + f^\alpha \partial_\alpha \tilde{A}_\mu(x)) \quad (4.69)$$

$$= \tilde{A}_\nu(x) + f^\mu \partial_\mu \tilde{A}_\nu(x) + (\partial_\nu f^\mu) \tilde{A}_\mu(x). \quad (4.70)$$

Com isso, a transformação do campo  $A_\nu(x)$  fica escrita como a sua derivada de Lie com relação ao campo vetorial  $f^\mu(x)$ :

$$\delta A_\nu(x) \equiv \tilde{A}_\nu(x) - A_\nu(x) = -f^\mu \partial_\mu A_\nu(x) - (\partial_\nu f^\mu) A_\mu(x). \quad (4.71)$$

Se o campo  $A_\nu(x)$  for um potencial vetor, ele se transforma sob transformações de calibre de acordo com (4.38), ou seja,  $A_\mu$  não é invariante de gauge. Por outro

lado, sob essa transformação,  $\delta A_\mu$  se transforma como

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -f^\nu \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \Lambda) - \partial_\mu f^\nu (A_\nu - \partial_\nu \Lambda) \\
&= -f^\nu \partial_\nu A_\mu + f^\nu \partial_\nu \partial_\mu \Lambda - (\partial_\mu f^\nu) A_\nu + (\partial_\mu f^\nu) \partial_\nu \Lambda \\
&= -f^\nu \partial_\nu A_\mu + f^\nu \partial_\nu \partial_\mu \Lambda - \partial_\mu (f^\nu A_\nu) + f^\nu \partial_\mu A_\nu \\
&\quad + \partial_\mu (f^\nu \partial_\nu \Lambda) - f^\nu (\partial_\mu \partial_\nu \Lambda) \\
&= -f^\nu F_{\nu\mu} - \partial_\mu (f^\nu (A_\nu - \partial_\nu \Lambda)), \tag{4.72}
\end{aligned}$$

onde o último termo pode ser desprezado quando sob integração por ser uma derivada total. Tem-se então que a variação de  $A_\mu$  sob transformações arbitrárias de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x^\mu + f^\mu$  e transformações de calibre  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda$  fica dada por

$$\delta A_\mu = -f^\nu F_{\nu\mu}. \tag{4.73}$$

**Propriedade 2:** Considere novamente uma transformação infinitesimal de coordenadas  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + f^\mu(x)$ , sob a qual um campo tensorial qualquer  $t_{\mu\nu}(x)$  se transforma como

$$\tilde{t}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} t_{\rho\sigma}(x). \tag{4.74}$$

Em primeira ordem em  $f^\mu(x)$ , tem-se

$$\tilde{t}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \tilde{t}_{\mu\nu}(x) + f^\alpha \partial_\alpha \tilde{t}_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(f^2). \tag{4.75}$$

Analogamente ao feito para o campo vetorial  $A_\mu(x)$ , escreve-se (4.74) como

$$t_{\rho\sigma}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} \tilde{t}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \tag{4.76}$$

de modo a obter

$$t_{\rho\sigma}(x) = \tilde{t}_{\rho\sigma}(x) + f^\alpha \partial_\alpha \tilde{t}_{\rho\sigma}(x) + (\partial_\sigma f^\nu) \tilde{t}_{\rho\nu}(x) + (\partial_\rho f^\mu) \tilde{t}_{\mu\sigma}(x). \tag{4.77}$$

Isso significa que a variação do campo tensorial fica dada por

$$\delta t_{\rho\sigma}(x) = -f^\alpha \partial_\alpha t_{\rho\sigma}(x) - (\partial_\sigma f^\nu) t_{\rho\nu}(x) - (\partial_\rho f^\mu) t_{\mu\sigma}(x), \tag{4.78}$$

que é justamente a derivada de Lie do campo tensorial com respeito ao campo vetorial  $f^\mu(x)$ .

Em especial, o tensor  $g_{\mu\nu}(x)$ , que define a métrica do espaço-tempo, se transforma dessa maneira. Entretanto, quando o espaço-tempo é munido de certas simetrias, a variação da métrica pode ser nula. Por exemplo, a métrica de Minkowski é invariante por transformações de Lorentz infinitesimais. Isso pode ser visto aplicando (4.78) para  $g_{\mu\nu}(x)$  e obtendo

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -f^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu f^\mu) g_{\lambda\nu}(x) - (\partial_\nu f^\lambda) g_{\mu\lambda}(x). \quad (4.79)$$

O termo  $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)$  é nulo no espaço plano, que é o caso do espaço de Minkowski<sup>1</sup>. Isso significa que a transformação  $x^\mu \rightarrow x^\mu + f^\mu(x)$  é uma simetria de  $g_{\mu\nu}(x)$  desde que  $f_\mu(x) \equiv g_{\mu\nu} f^\nu(x)$  satisfaça

$$\partial_\mu f_\nu(x) + \partial_\nu f_\mu(x) = 0, \quad (4.80)$$

que é chamada de equação de Killing. De fato, as transformações de Lorentz infinitesimais, descritas por  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$  onde  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ , são soluções de (4.80). Na realidade, a solução geral para a equação (4.80) inclui, além das transformações de Lorentz infinitesimais, as translações infinitesimais, descritas por  $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$ . O grupo gerado por essas transformações é o grupo de Poincaré.

**Propriedade 3:** Considere que o campo vetorial  $A_\mu(x)$  se transforme de acordo com (4.73). Nesse caso, a variação de  $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  fica dada por

$$\delta F^2 = 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \quad (4.81)$$

$$= -2F^{\mu\nu} (\partial_\mu (f^\alpha F_{\alpha\nu}) - \partial_\nu (f^\beta F_{\beta\mu})) \quad (4.82)$$

$$= -2F^{\mu\nu} \partial_\mu (f^\alpha F_{\alpha\nu}) + 2F^{\mu\nu} \partial_\nu (f^\beta F_{\beta\mu}) \quad (4.83)$$

$$= -2F^{\mu\nu} \partial_\mu (f^\alpha F_{\alpha\nu}) - 2F^{\mu\nu} \partial_\mu (f^\beta F_{\beta\nu}) \quad (4.84)$$

$$= -4F^{\mu\nu} \partial_\mu (f^\alpha F_{\alpha\nu}). \quad (4.85)$$

Assim, a variação da densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.86)$$

---

<sup>1</sup>Se o espaço for curvo, deve-se tomar a derivada covariante  $D_\lambda g_{\mu\nu}(x) = (\partial_\lambda - \Gamma_\lambda) g_{\mu\nu}(x)$ , onde  $\Gamma_\lambda$  é o símbolo de Christoffel associado a  $g_{\mu\nu}$ .

fica dada por

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= F^{\mu\nu}\partial_\mu(f^\alpha F_{\alpha\nu}) \\
&= F^{\mu\nu}(\partial_\mu f^\alpha)F_{\alpha\nu} + F^{\mu\nu}f^\alpha(\partial_\mu F_{\alpha\nu}) \\
&= F^{\mu\nu}(\partial_\mu f_\alpha)F_\nu^\alpha + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}f^\alpha(\partial_\mu F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}F^{\nu\mu}f^\alpha(\partial_\nu F_{\alpha\mu}) \\
&= -F^{\mu\nu}(\partial_\mu f_\alpha)F_\nu^\alpha + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}f^\alpha(\partial_\mu F_{\alpha\nu} + \partial_\nu F_{\mu\alpha}) \\
&= -F^{\mu\nu}(\partial_\mu f_\alpha)F_\nu^\alpha - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}f^\alpha\partial_\alpha F_{\nu\mu} \\
&= -F^{\mu\nu}(\partial_\mu f_\alpha)F_\nu^\alpha + \frac{1}{4}\partial_\alpha(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})f^\alpha \\
&= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_\nu^\alpha(\partial_\mu f_\alpha + \partial_\alpha f_\mu) + \frac{1}{4}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}f^\alpha) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\partial_\alpha f^\alpha \\
&= \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_\nu^\alpha\left(\partial_\mu f_\alpha + \partial_\alpha f_\mu - \frac{g_{\alpha\mu}}{2}\partial_\rho f^\rho\right) + \frac{1}{4}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}f^\alpha),
\end{aligned} \tag{4.87}$$

onde na quarta igualdade foi usada a identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu F_{\alpha\nu} + \partial_\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\nu\mu} = 0. \tag{4.88}$$

O resultado obtido implica que a transformação (4.73) é, a menos de uma derivada total, uma simetria da Lagrangiana desde que

$$\partial_\mu f_\alpha + \partial_\alpha f_\mu - \frac{g_{\alpha\mu}}{2}\partial_\rho f^\rho = 0. \tag{4.89}$$

Essa equação corresponde a equação de Killing conforme,

$$\partial_\mu f_\alpha + \partial_\alpha f_\mu - \frac{2}{D}g_{\alpha\mu}\partial_\rho f^\rho = 0, \tag{4.90}$$

para o caso de 3 + 1 dimensões. Ou seja, a transformação  $x^\mu \rightarrow x^\mu + f^\mu$  é uma simetria de  $\mathcal{L}$  em 3 + 1 dimensões se  $f^\mu$  satisfizer (4.89).

A equação (4.89) apresenta quatro tipos de soluções:

1. Translações, com 4 geradores  $f^\mu$ , onde cada um deles é constante. Nesse caso, a equação é trivialmente satisfeita;

2. Transformações de Lorentz, onde  $f^\mu = \omega^{\mu\beta}x_\beta$  com  $\omega^{\mu\beta} = -\omega^{\beta\mu}$ . Os parâmetros  $\omega^{\mu\beta}$  formam um conjunto de 6 geradores e, nesse caso,

$$\partial_\mu(\omega_{\alpha\beta}x^\beta) + \partial_\alpha(\omega_{\mu\gamma}x^\gamma) = \omega_{\alpha\beta}g_\mu^\beta + \omega_{\mu\gamma}g_\alpha^\gamma = \omega_{\alpha\mu} + \omega_{\mu\alpha} = 0 \quad (4.91)$$

e, da mesma maneira,

$$\frac{g_{\alpha\mu}}{2}\partial_\rho(\omega^{\rho\beta}x_\beta) = \frac{g_{\alpha\mu}}{2}\omega^{\rho\beta}g_{\rho\beta} = \frac{g_{\alpha\mu}}{2}\omega^{\rho\rho} = 0; \quad (4.92)$$

3. Dilatações, com somente um gerador  $\lambda$  constante tal que  $f^\alpha = \lambda x^\alpha$ . Nesse caso,

$$\partial_\mu(\lambda x_\alpha) + \partial_\alpha(\lambda x_\mu) = \lambda(g_{\mu\alpha} + g_{\alpha\mu}) = 2\lambda g_{\mu\alpha} \quad (4.93)$$

e

$$\frac{1}{2}g_{\alpha\mu}\partial_\rho(\lambda x^\rho) = \frac{g_{\alpha\mu}}{2}\lambda\partial_\rho x^\rho = \frac{g_{\alpha\mu}}{2}\lambda 4 = 2\lambda g_{\mu\alpha}; \quad (4.94)$$

4. Transformações conformes especiais, onde  $f^\alpha = 2b_\beta x^\beta x^\alpha - b^\alpha x^\beta x_\beta$ , com 4 geradores  $b^\mu$  constantes. Nesse caso,

$$\partial_\mu(2x^\beta b_\beta x_\alpha - b_\alpha x^\beta x_\beta) + \partial_\alpha(2x^\beta b_\beta x_\mu - b_\mu x^\beta x_\beta) = 4x^\beta b_\beta g_{\mu\alpha} \quad (4.95)$$

e

$$\frac{g_{\alpha\mu}}{2}\partial_\rho(2x^\beta b_\beta x^\rho - b^\rho x^\beta x_\beta) = \frac{g_{\alpha\mu}}{2}(8x^\beta b_\beta) = 4g_{\alpha\mu}x^\beta b_\beta. \quad (4.96)$$

**Propriedade 4:** Suponha uma generalização da densidade Lagrangiana do campo eletromagnético

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.97)$$

para 2 + 1 dimensões. Nesse caso, esta pode ser adicionada de um termo de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda. \quad (4.98)$$

Este termo não é invariante por transformações de calibre, mas se transforma como uma derivada total. Isso pode ser visto considerando  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Lambda$  e

fazendo

$$\delta\mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}(\delta A_\mu\partial_\nu A_\lambda + A_\mu\partial_\nu\delta A_\lambda) \quad (4.99)$$

$$= \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}[\partial_\nu(\delta A_\mu A_\lambda) - (\partial_\nu\delta A_\mu)A_\lambda + A_\mu\partial_\nu\delta A_\lambda] \quad (4.100)$$

$$= \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}[\partial_\nu(\delta A_\mu A_\lambda) + 2A_\mu\partial_\nu\delta A_\lambda] \quad (4.101)$$

$$= \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}[\partial_\nu(-\partial_\mu\Lambda A_\lambda) - 2A_\mu(\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda)] \quad (4.102)$$

$$= -\frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu(\partial_\mu\Lambda A_\lambda). \quad (4.103)$$

Para obter as equações de movimento referentes a  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{CS}$ , basta substituir  $\mathcal{L}$  nas equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\alpha\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\alpha A_\sigma}\right) - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\sigma} = 0. \quad (4.104)$$

Como visto na Seção 3.3, o termo referente a  $\mathcal{L}_{EM}$  fornece

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 0. \quad (4.105)$$

Já o termo referente a  $\mathcal{L}_{CS}$  é tal que

$$\partial_\alpha\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{CS}}{\delta\partial_\alpha A_\sigma}\right) - \frac{\delta\mathcal{L}_{CS}}{\delta A_\sigma} = \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}[\partial_\alpha(A_\mu g_\nu^\alpha g_\lambda^\sigma) - g_\mu^\sigma\partial_\nu A_\lambda] \quad (4.106)$$

$$= \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}[\partial_\nu A_\mu g_\lambda^\sigma - g_\mu^\sigma\partial_\nu A_\lambda] \quad (4.107)$$

$$= \frac{m}{2}[\epsilon^{\mu\nu\sigma}\partial_\nu A_\mu - \epsilon^{\sigma\nu\mu}\partial_\nu A_\lambda] \quad (4.108)$$

$$= \frac{m}{2}\epsilon^{\sigma\mu\nu}F_{\nu\mu}. \quad (4.109)$$

Portanto, as equações de movimento ficam dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\sigma} + \frac{m}{2}\epsilon^{\sigma\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0. \quad (4.110)$$

Estas correspondem a propagação de um campo massivo cuja massa está relacionada com o parâmetro  $m$ .

É interessante notar que o termo de Chern-Simons pode ser reescrito como

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{4} A_\mu (\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda + \epsilon^{\mu\lambda\nu} \partial_\lambda A_\nu) \quad (4.111)$$

$$= \frac{m}{4} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\lambda} (\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) \quad (4.112)$$

$$= \frac{m}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu F_{\nu\lambda}. \quad (4.113)$$

Escrito dessa maneira, é mais simples ver que a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{CS}$  é análoga ao exemplo trabalhado na Seção 3.2, sendo este em  $0 + 1$  dimensões. Esse fato justifica o título daquela seção.

**Propriedade 5:** Em  $2 + 1$  dimensões, o termo de Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \quad (4.114)$$

se transforma como uma derivada total sob transformações arbitrárias de coordenadas. Isso pode ser visto fazendo

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (\delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda + A_\mu \partial_\nu (\delta A_\lambda)) \quad (4.115)$$

$$= \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} [\delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda - (\partial_\nu A_\mu) \delta A_\lambda + \partial_\nu (A_\mu \delta A_\lambda)] \quad (4.116)$$

$$= \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} [2\delta A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \partial_\nu (A_\mu \delta A_\lambda)] \quad (4.117)$$

e usando (4.71), tal que

$$\delta A_\mu = -f^\nu \partial_\nu A_\mu - A_\nu \partial_\mu f^\nu = -f^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu (f^\nu A_\nu) + f^\nu (\partial_\mu A_\nu) \quad (4.118)$$

$$= f^\nu F_{\mu\nu} - \partial_\mu (f^\nu A_\nu). \quad (4.119)$$

Com isso,

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} [2(f^\alpha F_{\mu\alpha} - \partial_\mu (f^\alpha A_\alpha)) \partial_\nu A_\lambda + \partial_\nu (A_\mu \delta A_\lambda)]. \quad (4.120)$$

O último termo entre colchetes corresponde a uma derivada total. O primeiro termo, por outro lado, é tal que

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} f^\alpha F_{\mu\alpha} \partial_\nu A_\lambda = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} f^\alpha F_{\mu\alpha} F_{\nu\lambda} \quad (4.121)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (f^0 F_{\mu 0} F_{\nu\lambda} + f^1 F_{\mu 1} F_{\nu\lambda} + f^2 F_{\mu 2} F_{\nu\lambda}). \quad (4.122)$$

Cada um dos termos entre parênteses é nulo. Isso pode ser visto considerando, por exemplo, o primeiro deles. Este é tal que

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} f^0 F_{\mu 0} F_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} [\epsilon^{1\nu\lambda} f^0 F_{10} F_{\nu\lambda} + \epsilon^{2\nu\lambda} f^2 F_{20} F_{\nu\lambda}] \quad (4.123)$$

$$= \frac{1}{2} [\epsilon^{102} f^0 F_{10} F_{02} + \epsilon^{120} f^0 F_{10} F_{20}] \quad (4.124)$$

$$+ \epsilon^{201} f^0 F_{20} F_{01} + \epsilon^{210} f^0 F_{20} F_{10}] \quad (4.125)$$

$$= \epsilon^{102} f^0 F_{10} F_{02} + \epsilon^{201} f^0 F_{01} F_{20} \quad (4.126)$$

$$= (\epsilon^{102} + \epsilon^{201}) f^0 F_{10} F_{02} = 0. \quad (4.127)$$

Já o segundo termo de (4.120) é tal que

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu (f^\alpha A_\alpha) \partial_\nu A_\lambda = [\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu (f^\alpha A_\alpha \partial_\nu A_\lambda) - \epsilon^{\mu\nu\lambda} f^\alpha A_\alpha \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda] \quad (4.128)$$

$$= \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu (f^\alpha A_\alpha \partial_\nu A_\lambda). \quad (4.129)$$

Com isso, a variação da densidade Lagrangiana de Chern-Simons sob transformações arbitrárias de coordenadas fica dada por

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} [-2 \partial_\mu (f^\alpha A_\alpha \partial_\nu A_\lambda) + \partial_\nu (A_\mu \delta A_\lambda)]. \quad (4.130)$$

Reescrevendo esse resultado como

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{m}{2} [\epsilon^{\mu\nu\lambda} (-2 \partial_\mu (f^\alpha A_\alpha \partial_\nu A_\lambda)) + \epsilon^{\nu\mu\lambda} \partial_\mu (A_\nu \delta A_\lambda)] \quad (4.131)$$

$$= -\frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu (2 f^\alpha A_\alpha \partial_\nu A_\lambda + A_\nu \delta A_\lambda) \quad (4.132)$$

fica mais claro que a essa variação corresponde, de fato, a uma derivada total.

**Propriedade 6:** Dada uma função matricial  $N \times N$  qualquer, denotada por  $M(x)$ , tem-se

$$[D_\nu, M(x)]\psi = D_\nu(M(x)\psi) - M(x)D_\nu\psi \quad (4.133)$$

$$= (\partial_\nu - iA_\nu)(M\psi) - M(\partial_\nu - iA_\nu)\psi \quad (4.134)$$

$$= (\partial_\nu M - i[A_\nu, M])\psi \quad (4.135)$$

e

$$\begin{aligned} [D_\mu, [D_\nu, M(x)]]\psi &= (\partial_\mu - iA_\mu)(\partial_\nu M\psi - i[A_\nu, M]\psi) \\ &\quad - (\partial_\nu M - i[A_\nu, M])(\partial_\mu\psi - iA_\mu\psi) \\ &= [\partial_\mu\partial_\nu M - i(\partial_\mu A_\nu + A_\nu\partial_\mu M - \partial_\mu M A_\nu) \\ &\quad + iM\partial_\mu A_\nu - iA_\mu\partial_\nu M - A_\mu A_\nu M + A_\mu M A_\nu \\ &\quad + i\partial_\nu M A_\mu + A_\nu M A_\mu - M A_\nu A_\mu]\psi. \end{aligned}$$

Com isso, obtém-se que

$$\begin{aligned} [D_\mu, [D_\nu, M(x)]] - [D_\nu, [D_\mu, M(x)]] &= -i[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)M \\ &\quad - M(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &\quad - i[A_\mu, A_\nu]M + iM[A_\mu, A_\nu]] \\ &= -i[F_{\mu\nu}, M(x)]. \end{aligned} \quad (4.136)$$

**Propriedade 7:** No caso não-abeliano, o campo tensorial  $F_{\mu\nu}(x)$  fica definido em termos do campo vetorial  $A_\mu(x)$  como

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i[A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (4.137)$$

Se o campo  $A_\mu(x)$  variar infinitesimalmente como  $A_\mu(x) + \delta A_\mu(x)$ , a variação de  $F_{\mu\nu}(x)$  fica dada, em primeira ordem, por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow \partial_\mu(A_\nu + \delta A_\nu)\partial_\nu(A_\mu + \delta A_\mu) - i[A_\mu + \delta A_\mu, A_\nu + \delta A_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] + \partial_\mu\delta A_\nu - i[A_\mu, \delta A_\nu] \\ &\quad - \partial_\nu\delta A_\mu + i[A_\nu, \delta A_\mu] \\ &= F_{\mu\nu} + [D_\mu, \delta A_\nu] - [D_\nu, \delta A_\mu]. \end{aligned} \quad (4.138)$$

Assim,

$$\delta F_{\mu\nu} = [D_\mu, \delta A_\nu] - [D_\nu, \delta A_\mu]. \quad (4.139)$$

**Propriedade 8:** Considere uma transformação do campo  $A_\mu(x)$ ,  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \delta_\Omega A_\mu(x)$ , onde  $\delta_\Omega A_\mu(x) = [D_\mu, \Omega(x)]$ . Segundo as propriedades derivadas em (4.136) e (4.138), o campo tensorial  $F_{\mu\nu}(x)$  se transformará de acordo com

$$\delta_\Omega F_{\mu\nu} = [D_\mu, [D_\nu, \Omega(x)]] - [D_\nu, [D_\mu, \Omega(x)]] \quad (4.140)$$

$$= -i[F_{\mu\nu}, \Omega(x)]. \quad (4.141)$$

Essa variação de  $F_{\mu\nu}(x)$  é tal que

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \rightarrow \text{Tr}((F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu})) \quad (4.142)$$

$$= \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (4.143)$$

A variação do traço é dada, portanto, por

$$\begin{aligned} \delta_\Omega \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) &\equiv \text{Tr}(F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ &= -i\text{Tr}(F_{\mu\nu}[F^{\mu\nu}, \Omega] + [F_{\mu\nu}, \Omega]F^{\mu\nu}) \\ &= -i\text{Tr}((F_{\mu\nu}[F^{\mu\nu}, \Omega]) + ([F_{\mu\nu}, \Omega]F^{\mu\nu})). \end{aligned} \quad (4.144)$$

Devido à ciclicidade do traço, i.e.,

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA), \quad (4.145)$$

obtém-se então

$$\delta_\Omega \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.146)$$

**Propriedade 9:** De acordo com as propriedades derivadas até aqui, pode-se concluir que a transformação  $\delta_\Omega A_\mu(x) = [D_\mu, \Omega(x)]$  é uma simetria da ação de Yang-Mills,

$$S_{YM} = \int d^4x \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \quad (4.147)$$

Quando  $\Omega(x)$  é constante, a transformação é dita global e, nesse caso,  $\delta_\Omega A_\mu(x) = [D_\mu, \Omega] = i[\Omega, A_\mu(x)]$ . A corrente de Noether associada a essa simetria é obtida a

partir da definição

$$j^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho^c)} \delta A_\rho^c. \quad (4.148)$$

Para calculá-la explicitamente, parte-se de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= \frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - i[A_\mu, A_\nu]^a) (\partial^\mu A^{\nu b} - \partial^\nu A^{\mu b} - i[A^\mu, A^\nu]^b) \text{Tr}(T_a T_b) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - i[A_\mu, A_\nu]^a) (\partial^\mu A^{\nu b} - \partial^\nu A^{\mu b} - i[A^\mu, A^\nu]^b) (\delta_{ab}) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - i[A_\mu, A_\nu]^a) (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} - i[A^\mu, A^\nu]^a), \end{aligned} \quad (4.149)$$

e toma-se então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho^c)} &= -\frac{\delta^{ac}}{4} \left( (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho) (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} - i[A^\mu, A^\nu]^a) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - i[A_\mu, A_\nu]^a) (\delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho} - \delta^{\nu\sigma} \delta^{\mu\rho}) \right) \\ &= -(\partial_\sigma A_\rho^c - \partial_\rho A_\sigma^c - i[A_\sigma, A_\rho]^c) \\ &= (F^{\rho\sigma})^c. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Por outro lado, a transformação global  $\delta_\Omega A_\mu$  pode ser escrita como

$$\delta_\Omega A_\mu = \delta_\Omega A_\mu^c T_c = i\Omega^a A_\mu^b [T_a, T_b] = i\Omega^a A_\mu^b (if_{ab}^c T_c), \quad (4.151)$$

tal que  $\delta_\Omega A_\mu^c = -\Omega^a A_\mu^b f_{ab}^c$ .

Com isso, tem-se

$$j^\sigma = F^{\rho\sigma c} (-\Omega^a A_\rho^b f_{ab}^c) \equiv (j^\sigma)^a \Omega^a. \quad (4.152)$$

Cada corrente de Noether,

$$j^{\sigma a} = f_{abc} F^{\sigma\rho c} A_\rho^b, \quad (4.153)$$

deve ser conservada. Isso significa que deve-se ter

$$\partial_\mu (j^\mu)^a = f_{abc} \partial_\mu (F^{\mu\nu})^c A_\nu^b \quad (4.154)$$

$$= f_{abc} [(\partial_\mu F^{\mu\nu c}) A_\nu^b + F^{\mu\nu c} (\partial_\mu A_\nu^b)] \quad (4.155)$$

$$= 0 \quad (4.156)$$

De fato, as equações de movimento são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + i[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0 \quad (4.157)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} + iA_\mu^a F^{\mu\nu b} [T_a, T_b] = 0 \quad (4.158)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} - A_\mu^a F^{\mu\nu b} f_{ab}{}^c T_c = 0, \quad (4.159)$$

tal que derivando-as com relação a  $\nu$  tem-se

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu a} = (\partial_\nu A_\mu^b F^{\mu\nu c} + A_\mu^b \partial_\nu F^{\mu\nu c}) f_{abc}. \quad (4.160)$$

O lado esquerdo da equação é nulo, uma vez que as derivadas são simétricas e o tensor  $F^{\mu\nu}$  anti-simétrico com relação a  $\mu$  e  $\nu$ . Manipulando os índices do lado direito da equação e usando  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  obtém-se

$$(\partial_\mu A_\nu^b F^{\mu\nu c} + A_\nu^b \partial_\mu F^{\mu\nu c}) f_{abc} = 0. \quad (4.161)$$

Substituindo esse resultado em (4.155), obtém-se o resultado desejado:

$$\partial_\mu (j^\mu)^a = f_{abc} [\partial_\mu (F^{\mu\nu c}) A_\nu^b - A_\nu^b \partial_\mu (F^{\mu\nu c})] = 0. \quad (4.162)$$

**Propriedade 10:** O resultado obtido em (4.73) pode ser estendido para o caso não-abeliano, tal que sob transformações de coordenadas e de calibre, a variação do campo  $A_\mu$ ,  $A_\mu = (A_\mu)^a T_a$ , fica dada por

$$\delta A_\mu(x) = -f^\nu(x) F_{\nu\mu}(x). \quad (4.163)$$

Por outro lado, a densidade Lagrangiana de Yang-Mills  $\mathcal{L}_{YM}$  varia como

$$\delta \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \text{Tr}(\delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})). \quad (4.164)$$

Essa variação é tal que

$$\text{Tr}(\delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})) = 2\text{Tr}(F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) \quad (4.165)$$

$$= 2\text{Tr}(F^{\mu\nu} (D_\mu \delta A_\nu - D_\nu \delta A_\mu)) \quad (4.166)$$

$$= -2\text{Tr}(F^{\mu\nu} (D_\mu (f^\alpha F_{\alpha\nu}) - D_\nu (f^\alpha F_{\alpha\mu}))) \quad (4.167)$$

$$= -4\text{Tr}(F^{\mu\nu} D_\mu (f^\alpha F_{\alpha\nu})), \quad (4.168)$$

onde foi usada a equação (4.139).

Com isso, tem-se um cálculo análogo ao feito em (4.87), porém agora estendido para o caso não abeliano:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{YM} &= \text{Tr} \left[ F^{\mu\nu} (D_\mu f^\alpha) F_{\alpha\nu} + F^{\mu\nu} f^\alpha (D_\mu F_{\alpha\nu}) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ F^{\mu\nu} (D_\mu f_\alpha) F^\alpha_\nu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} f^\alpha (D_\mu F_{\alpha\nu} + D_\nu F_{\mu\alpha}) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ F^{\mu\nu} (D_\mu f_\alpha) F^\alpha_\nu - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} f^\alpha D_\alpha F_{\nu\mu} \right] \\ &= \text{Tr} \left[ F^{\mu\nu} (D_\mu f_\alpha) F^\alpha_\nu + \frac{1}{4} D_\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) f^\alpha \right] \\ &= \text{Tr} \left[ F^{\mu\nu} \left( \frac{D_\mu f_\alpha + D_\alpha f_\mu}{2} \right) F^\alpha_\nu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} D_\alpha f^\alpha + \frac{1}{4} D_\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} f^\alpha) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \frac{F^{\mu\nu} F_\nu^\alpha}{2} \left( D_\mu f_\alpha + D_\alpha f_\mu - \frac{g_{\alpha\mu}}{2} D_\alpha f^\alpha \right) + \frac{1}{4} D_\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} f^\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Nesse caso, na terceira igualdade foi usada a identidade de Bianchi em termos de derivadas coraviantes

$$D_\mu F_{\alpha\nu} + D_\nu F_{\mu\alpha} + D_\alpha F_{\nu\mu} = 0. \quad (4.169)$$

Se  $f(x)$  satisfizer a equação de Killing covariante

$$D_\mu f_\alpha + D_\alpha f_\mu - \frac{g_{\alpha\mu}}{2} D_\alpha f^\alpha = 0, \quad (4.170)$$

a variação da Lagrangiana de Yang-Mills fica dada por

$$\delta\mathcal{L}_{YM} = \text{Tr} \left( \frac{1}{4} D_\alpha (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} f^\alpha) \right), \quad (4.171)$$

tal que a ação de Yang-Mills,

$$S_{YM} = \int d^4x \mathcal{L}_{YM}, \quad (4.172)$$

fica invariante. Isso significa que, quando  $f(x)$  satisfaz a equação de Killing covariante, a transformação  $\delta A_\mu(x) = -f^\nu(x)F_{\nu\mu}(x)$  é uma simetria da ação.

A essa simetria está associada, portanto, uma corrente de Noether. Esta fica definida como

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_{YM}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu - K^\mu, \quad (4.173)$$

onde  $K^\mu$  é o termo de divergência que aparece em  $\delta \mathcal{L}_{YM}$ , dado pela equação (4.171).

Explicitamente, tem-se

$$J^\mu = \text{Tr} \left[ -F^{\mu\nu} f^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} f^\mu) \right] \quad (4.174)$$

$$= -f^\alpha \text{Tr} \left( F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha} + \frac{g_{\alpha\mu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (4.175)$$

$$= f^\alpha T^\mu{}_\alpha. \quad (4.176)$$

O tensor  $T_{\mu\alpha}$  é o tensor energia-momento e fica definido como

$$T_{\mu\alpha} = \text{Tr} \left( F_\mu{}^\nu F_{\nu\alpha} + \frac{g_{\alpha\mu}}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (4.177)$$

**Propriedade 11:** Por fim, cabe derivar algumas propriedades do tensor energia momento  $T_{\mu\nu}$  obtido no item anterior. Primeiramente, ele é tal que  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Isso pode ser visto considerando simetria por translação, i.e., tomando  $f^\alpha = \epsilon^\alpha =$  constante. Nesse caso, tem-se  $J^\mu = f_\nu T^{\mu\nu} = \epsilon_\nu T^{\mu\nu}$  e

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.178)$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu \epsilon_\nu) T^{\mu\nu} + \epsilon_\nu (\partial_\mu T^{\mu\nu}) = 0 \quad (4.179)$$

$$\Rightarrow \epsilon_\nu (\partial_\mu T^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.180)$$

Como  $\epsilon_\nu$  é arbitrário, segue que  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Além disso, o tensor energia momento é simétrico, isto é,  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ . Isso segue considerando simetria por transformações de Lorentz, i.e., tomando  $f_\alpha = \omega_{\alpha\lambda} x^\lambda$ ,

com  $\omega_{\alpha\lambda} = -\omega_{\lambda\alpha}$ . A corrente de Noether fica dada então por  $J^\mu = f_\nu T^{\mu\nu} = \omega_{\nu\lambda} x^\lambda T^{\mu\nu}$  e

$$\partial_\mu J^\mu = \omega_{\nu\lambda} \delta_\mu^\lambda T^{\mu\nu} + \omega_{\nu\lambda} x^\lambda \partial_\mu T^{\mu\nu} = \omega_{\nu\mu} T^{\mu\nu}. \quad (4.181)$$

Como  $J^\mu$  é tal que  $\partial_\mu J^\mu = 0$  e  $\omega_{\nu\mu}$  é arbitrário e antissimétrico,  $T^{\mu\nu}$  é simétrico. Por último, o traço do tensor energia momento é nulo, ou seja,  $T_\mu{}^\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0$ . Isso segue da simetria por transformações conformes, descritas por  $f_\alpha = \lambda x_\alpha$ , onde  $\lambda$  é constante. Nesse caso  $J^\mu = f_\nu T^{\mu\nu} = \lambda x_\nu T^{\mu\nu}$  e

$$\partial_\mu J^\mu = \lambda(\partial_\mu x_\nu) T^{\mu\nu} + \lambda x_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (4.182)$$

Como  $\lambda$  é arbitrário, segue que  $g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T_\mu{}^\mu = 0$ .

# Capítulo 5

## Cinemática em uma variedade de Grupo de Lie

As referências pertinentes a esse capítulo são [6], [16], [23] e [29].

### 5.1 Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial de dimensão  $|\mathfrak{g}|$  dotado de um produto, o comutador  $[\cdot, \cdot]$ , chamado também de parênteses de Lie. Seus elementos são os geradores  $T_a$ ,  $a = 1, \dots, |\mathfrak{g}|$ . Estes podem ser escolhidos hermitianos, i.e.,  $T_a^\dagger = T_a$ , e, nesse caso, devem satisfazer a relação de comutação

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c, \quad (5.1)$$

onde  $f_{ab}^c$  é a constante de estrutura da álgebra de Lie. Uma álgebra de Lie é completamente caracterizada por sua constante de estrutura. Ela é abeliana quando  $f_{ab}^c = 0$  e não-abeliana quando  $f_{ab}^c \neq 0$ . Para  $\mathfrak{g} = su(2)$ , por exemplo, possíveis geradores são dados por  $T_a = \sigma_a/2$  tal que  $f_{ab}^c = \epsilon_{ab}^c$ ,  $a, b, c = 1, 2, 3$ .

A álgebra de Lie é munida de uma métrica de Killing  $\eta_{ab}$ , definida em termos da representação adjunta<sup>1</sup> como

$$\eta_{ab} \equiv \langle T_a, T_b \rangle = c \operatorname{Tr}(T_a^\dagger T_b) = c \operatorname{Tr}(T_a T_b), \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>A noção de representação e a definição de representação adjunta será contruída a seguir.

onde  $c$  é uma constante de normalização. Para álgebras que dão origem a grupos compactos, como o  $su(N)$ , por exemplo, esta é escolhida tal que se tenha  $\eta_{ab} = \delta_{ab}$ . A definição de grupo compacto será introduzida mais adiante.

Um elemento  $\Lambda \in \mathfrak{g}$  é escrito como

$$\Lambda = \Lambda^a T_a, \quad (5.3)$$

onde  $\Lambda^a = \langle T_a, \Lambda \rangle$ , ou seja, um elemento  $\Lambda$  da álgebra de Lie pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da base  $T_a$  com respectivas componentes  $\Lambda^a$ . Nesse sentido,  $\Lambda^a = \langle T_a, \Lambda \rangle$  seria justamente a projeção (a la produto escalar) do elemento  $\Lambda$  em cada uma das componentes  $T_a$  da base. De fato, o produto  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é chamado de produto de Killing e define o produto escalar entre elementos da álgebra.

Se a álgebra for semi-simples, i.e., for dada pela soma direta de álgebras simples<sup>2</sup>,  $\eta_{ab}$  apresenta inversa  $\eta^{ab}$  e pode-se usá-las para subir e descer os índices:

$$\Lambda^a = \eta^{ab} \Lambda_b; \quad e \quad \Lambda_a = \eta_{ab} \Lambda^b. \quad (5.4)$$

Para descrever essa álgebra em termos de uma representação, é necessário especificar em que espaço vetorial ela deve atuar. Por exemplo, se este é tridimensional, tal que cada vetor fica descrito por um vetor coluna de três componentes, i.e., uma matriz  $3 \times 1$ , cada gerador  $T_a$  deve ser então escrito como uma matriz hermitiana  $3 \times 3$ . De maneira geral, se o espaço vetorial é finito-dimensional, existem duas maneiras comuns de se representar uma álgebra de Lie atuando nesse espaço:

- (i) Representação regular: a dimensão do espaço vetorial é a mesma da ordem  $|\mathfrak{g}|$  da álgebra. Se  $\mathfrak{g} = su(N)$ , por exemplo, tem-se  $|\mathfrak{g}| = N^2 - 1$ . O exemplo mais comum desse tipo de representação é a representação adjunta, na qual cada gerador é escrito em termos da constante de estrutura de acordo com

$$(T_a)^{bc} = -i(f_a)^{bc}, \quad a, b, c = 1, \dots, |\mathfrak{g}|. \quad (5.5)$$

- (ii) Representação fundamental: esta é definida como a menor representação irredutível não trivial. Todas as outras representações são obtidas a partir dela via produto tensorial. Para  $\mathfrak{g} = su(N)$ , a dimensão da representação é  $N$ .

---

<sup>2</sup>Uma álgebra de Lie não-abeliana é dita simples se seus únicos subespaços invariantes são 0 e  $\mathfrak{g}$ .

## 5.2 Grupo de Lie e geometria

Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , o grupo de Lie  $G$  correspondente é construído via mapa exponencial de acordo com

$$\Lambda = \Lambda^a T_a \in \mathfrak{g} \quad \rightarrow \quad g = e^{-i\Lambda} = e^{-i\Lambda^a T_a} \in G. \quad (5.6)$$

Serão considerados aqui apenas grupos unitários. Assim, todo elemento  $g$  do grupo de Lie deve ser unitário, isto é, deve ser tal que  $g^\dagger = g^{-1}$ . Como as matrizes  $T_a$  são hermitianas, essa condição implica que cada elemento  $\Lambda^a$  é real.

Usa-se letras minúsculas para denotar a álgebra e maiúsculas para o grupo. O grupo  $SU(N)$  é o grupo gerado via exponenciação de elementos da álgebra de Lie  $su(N)$ , por exemplo.

A classificação como abeliana ou não e semi-simples ou não, introduzida com relação à álgebra, fica naturalmente estendida à classificação do grupo.

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável. Assim, pode-se considerar uma classificação dos grupos de Lie quanto a sua topologia, ou seja, como conexo ou não-conexo, simplesmente conexo ou não-simplesmente conexo e compacto ou não compacto. Cabe aqui introduzir uma explicação intuitiva de cada classificação:

- (i) **Conexo:** um grupo é classificado como conexo quando pode-se ir de um ponto a outro qualquer do grupo via transformação continua de algum parâmetro. Caso contrário, o grupo é dito não-conexo. O grupo de Lorentz ilustra bem o que seria um grupo não-conexo. Suas transformações são denotadas por  $\Lambda$  e existem quatro cópias, classificadas de acordo com  $\det \Lambda = +1$  ou  $\det \Lambda = -1$  e  $\Lambda^0_0 \geq +1$  ou  $\Lambda^0_0 \leq -1$ . Para passar de  $\det \Lambda = +1$  a  $\det \Lambda = -1$ , é necessário fazer uma transformação discreta de paridade. Já para passar de  $\Lambda^0_0 \geq +1$  ou  $\Lambda^0_0 \leq -1$ , é necessário fazer uma transformação discreta de inversão temporal;
- (ii) **Simplesmente conexo:** classifica-se um grupo como simplesmente conexo se qualquer curva fechada pode ser continuamente encolhida até conter apenas um ponto sem que se saia do domínio do grupo. Caso isso não seja possível, o grupo é dito não simplesmente conexo. Visualmente, um grupo simplesmente conexo não contém nenhuma singularidade (ou "buraco"). O grupo  $U(1)$ , por exemplo, define um círculo de raio 1 no plano complexo. Uma volta fechada no círculo não pode ser levada a um ponto e por isso o grupo  $U(1)$  é não simplesmente conexo;

(iii) Compacto: um grupo é dito compacto quando seus parâmetros variam dentro de um intervalo fechado. Caso contrário, o grupo é dito não-compacto. Um exemplo de grupo não-compacto é o grupo de Lorentz  $O(1, 3)$ , cujos parâmetros não pertencem a um intervalo fechado.

Os grupos do tipo  $SU(N)$ , que são considerados no desenvolvimento desse trabalho, são conexos, simplesmente conexos e compactos. Já os grupos  $U(N)$  são conexos, não simplesmente conexos e compactos.

Como um grupo de Lie é uma variedade diferenciável, ele pode ser visto como um espaço. A noção geométrica associada a esse espaço se baseia nas 1-formas e nos campos vetoriais associados.

Dado um elemento  $g$  de um grupo de Lie  $G$ , a 1-forma invariante à esquerda (ou corrente)  $J$  é construída via

$$J = ig^{-1}dg = J^a T_a. \quad (5.7)$$

De  $g = \exp(-i\Lambda^a T_a)$  segue-se que

$$dg = -ig(\partial_\mu \Lambda^a) T_a dx^\mu, \quad (5.8)$$

tal que

$$g^{-1}dg = -i(\partial_\mu \Lambda^a) T_a dx^\mu. \quad (5.9)$$

Como  $\Lambda^a$  é real e  $T_a$  é hermitiana, segue-se que  $(g^{-1}dg)^\dagger = i(\partial_\mu \Lambda_a) T^a dx^\mu = -(g^{-1}dg)$ . Consequentemente, a corrente  $J$  é hermitiana, pois

$$J^\dagger = (ig^{-1}dg)^\dagger = -i(g^{-1}dg)^\dagger = i(g^{-1}dg) = J. \quad (5.10)$$

Cada componente  $J^a$  de  $J$  é escrita em coordenadas locais  $x^\mu$  como  $J^a = (J^a)_\mu dx^\mu$ . Comparando (5.7) com (5.9), tem-se que  $J^a$  é real e

$$J^a = (\partial_\mu \Lambda^a) dx^\mu \equiv (J^a)_\mu dx^\mu. \quad (5.11)$$

A corrente  $J$  é dita invariante à esquerda porque dada uma transformação de  $g$  pela esquerda,  $g \mapsto hg$ ,  $h \in G$ , tem-se

$$J = ig^{-1}dg \mapsto i(hg)^{-1}d(hg) = ig^{-1}h^{-1}hdg = ig^{-1}dg. \quad (5.12)$$

O mesmo procedimento pode ser considerado na construção de 1-formas invariantes pela direita. Nesse caso, define-se  $J = idgg^{-1}$ .

Os campos vetoriais invariantes à esquerda  $X_a$ , associados a  $J$ , são definidos em coordenadas locais como  $X_a = (X_a)^\mu \partial_\mu$ . A componente  $J^a = (J^a)_\mu dx^\mu$  da corrente e o campo  $X_b = (X_b)^\nu \partial_\nu$  são duais entre si, tal que

$$J^a(X_b) = (J^a)_\mu (X_b)^\nu dx^\mu (\partial_\nu) = (J^a)_\mu (X_b)^\nu g^\mu{}_\nu = (J^a)_\mu (X_b)^\mu = \eta^a{}_b. \quad (5.13)$$

Como cada elemento  $J^a$  é real, a propriedade acima implica que as componentes  $(X_b)^\mu$  de  $X_b$  são reais.

Os campos invariantes a esquerda  $X_a$  satisfazem

$$[X_a, X_b] = f_{ab}{}^c X_c. \quad (5.14)$$

Como cada componente  $(X_a)^\mu$  é real e  $\partial_\mu$  é um operador anti-hermitiano, tem-se que  $X_a = (X_a)^\mu \partial_\mu$  é anti-hermitiano, ou seja,  $X_a^\dagger = -X_a$ . Com isso, é possível checar a consistência de (5.14) fazendo

$$([X_a, X_b])^\dagger = (f_{ab}{}^c X_c)^\dagger \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow [X_b^\dagger, X_a^\dagger] = f_{ab}{}^c X_c^\dagger \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow [-X_b, -X_a] = -f_{ab}{}^c X_c \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow [X_a, X_b] = f_{ab}{}^c X_c. \quad (5.18)$$

Em coordenadas locais, a equação (5.14) fica escrita como

$$\left( (X_a)^\nu \partial_\nu (X_b)^\mu - (X_b)^\nu \partial_\nu (X_a)^\mu \right) \partial_\mu = f_{ab}{}^c (X_c)^\mu \partial_\mu. \quad (5.19)$$

Uma vez construídas as correntes  $J$ , a distância infinitesimal (ou elemento de linha) nesse espaço fica definida como

$$\begin{aligned} ds^2 = \langle J, J \rangle &= c \operatorname{Tr}(J^\dagger J) = c \operatorname{Tr}(J^2) \\ &= J^a J^b c \operatorname{Tr}(T_a T_b) \\ &= J^a J^b \eta_{ab} \\ &= (J^a)_\mu (J^b)_\nu \eta_{ab} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (5.20)$$

tal que, comparando-se com  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , tem-se

$$g_{\mu\nu} = (J^a)_\mu (J^b)_\nu \eta_{ab}. \quad (5.21)$$

Essa equação relaciona, portanto, a métrica plana  $\eta_{ab}$  à métrica curva  $g_{\mu\nu}$ .

Para exemplificar os conceitos introduzidos até aqui, a dinâmica de uma partícula livre movendo-se na variedade de um grupo de Lie será trabalhada. Posteriormente, será desenvolvido o caso no qual o grupo de Lie correspondente é o grupo  $SU(2)$ . Serão construídas as medidas invariantes  $ds^2$  a partir de duas parametrizações diferentes desse grupo. Uma será a parametrização via ângulos de Euler e a outra via coordenadas esféricas.

### 5.3 Partícula livre na variedade de um grupo de Lie

A trajetória de uma partícula livre movendo-se em uma variedade  $\mathbb{M}$  pode ser obtida a partir da ação

$$S = \pm \frac{1}{2} \int d\tau \, g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (5.22)$$

onde o sinal positivo deve ser adotado quando o espaço tem métrica Euclidiana e o sinal negativo para métrica com assinatura de Minkowski. A construção dessa ação foi feita em detalhes na Seção 3.4, onde foi argumentado que sua minimização descreve uma geodésica na variedade  $\mathbb{M}$ .

Um exemplo de espaço curvo é aquele descrito por um grupo de Lie  $G$ . A interpretação geométrica associada a esse grupo é construída em termos de formas diferenciais. Aqui será feito uso dessas definições, com o objetivo de definir a ação  $S$ , dada pela equação (5.22), na variedade do grupo.

Para grupos de Lie compactos, como o  $SU(N)$ , o espaço associado é Euclidiano. Portanto, uma geodésica nesse espaço fica definida a partir de

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \, g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (5.23)$$

Segundo a equação (5.20), a distância  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  fica definida na variedade do grupo como

$$ds^2 = \langle J, J \rangle = c \text{Tr}(J^2) = c \text{Tr} \left( (ig^{-1}dg)^2 \right). \quad (5.24)$$

Aplicando esse resultado em (5.23), obtém-se

$$S_0 \equiv \frac{c}{2} \int dt \operatorname{Tr} \left( (ig^{-1}\dot{g})^2 \right), \quad (5.25)$$

onde  $g(t)$  é uma curva no grupo  $G$  parametrizada por  $t$  e  $\dot{g} = \frac{dg}{dt}$ .

Para checar a equivalência entre  $S_0$  e  $S$ , cabe introduzir o campo de velocidade  $\dot{X} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}^\mu \partial_\mu$ . Em termos desse campo, o termo  $ig^{-1}\dot{g}$  pode ser reescrito como

$$ig^{-1}\dot{g} = ig^{-1} \frac{dg}{dt} = ig^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} = ig^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \quad (5.26)$$

$$= J(\dot{X}) \quad (5.27)$$

$$= (J^a)_\mu T_a \dot{x}^\nu dx^\mu (\partial_\nu) \quad (5.28)$$

$$= (J^a)_\mu T_a \dot{x}^\nu \delta^\mu_\nu \quad (5.29)$$

$$= (J^a)_\mu T_a \dot{x}^\mu. \quad (5.30)$$

Com isso, a ação  $S_0$  pode ser reescrita como

$$S_0 = \frac{c}{2} \int dt \operatorname{Tr} \left( (ig^{-1}\dot{g})^2 \right) \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{2} \int dt (J^a)_\mu (J^b)_\nu \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu c \operatorname{Tr}(T_a T_b) \quad (5.32)$$

$$= \frac{1}{2} \int dt \eta_{ab} (J^a)_\mu (J^b)_\nu \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (5.33)$$

$$= \frac{1}{2} \int dt g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (5.34)$$

Ou seja, as ações  $S_0$  e  $S$  são de fato equivalentes.

Introduz-se então a ação  $S_1$ ,

$$S_1 = \int dt c \operatorname{Tr} \left[ \xi (ig^{-1}\dot{g} - \chi) + \frac{1}{2} \chi^2 \right]. \quad (5.35)$$

Esta é tal que, quando feita a variação com respeito a  $\xi$ , obtém-se  $\chi = ig^{-1}\dot{g}$ . Substituindo esse resultado em  $S_1$  reobtem-se (5.25). A ação  $S_1$  é, portanto, equivalente à  $S_0$ .

Por outro lado, a variação de  $S_1$  com respeito a  $\chi$  fornece  $\chi = \xi$ . Substituindo esse resultado em  $S_1$  obtém-se

$$S_2 = \int dt \, c \text{Tr} \left[ \xi (ig^{-1} \dot{g}) - \frac{1}{2} \xi^2 \right]. \quad (5.36)$$

Essa estrutura que aparece dentro da ação pode ser associada a transformada de Legendre  $L = p_\mu \dot{q}^\mu - H$ . A 1-forma simplética, ou potencial simplético,  $\theta = p_\mu dq^\mu$  fica então associada a

$$\theta = c \text{Tr}(\xi (ig^{-1} dg)) = c \text{Tr}(\xi^a T_a J^b T_b) = \eta_{ab} \xi^a (J^b)_\mu dx^\mu = p_\mu dx^\mu, \quad (5.37)$$

tal que os momentos canonicamente conjugados  $p_\mu$  são dados por  $p_\mu \equiv \eta_{ab} \xi^a (J^b)_\mu$ . Já a Hamiltoniana  $H$  fica dada por

$$H = \frac{c}{2} \text{Tr}(\xi^2) = \frac{c}{2} \text{Tr}(\xi^a T_a \xi^b T_b) = \frac{1}{2} \eta_{ab} \xi^a \xi^b = \frac{1}{2} \xi^a \xi_a. \quad (5.38)$$

A aplicação da 1-forma  $\theta$  no campo vetorial  $X_a$  é tal que

$$\theta(X_a) = \eta_{bc} \xi^b (J^c)_\mu (X_a)^\nu dx^\mu (\partial_\nu) = \xi_c (J^c)_\mu (X_a)^\nu \delta^\mu_\nu \quad (5.39)$$

$$= \xi_c \eta^c_a \quad (5.40)$$

$$= \xi_a. \quad (5.41)$$

Isso significa que

$$\xi_a = \eta_{bc} \xi^b (J^c)_\mu (X_a)^\mu = p_\mu (X_a)^\mu, \quad (5.42)$$

tal que o momento definido na álgebra de Lie  $\xi_a$  fica dado por  $\xi_a = p_\mu (X_a)^\mu$ .

Os parênteses de Poisson entre as variáveis canônicas são os usuais, i.e.,

$$\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu \quad \text{e} \quad \{x^\mu, x^\nu\} = \{p_\mu, p_\nu\} = 0. \quad (5.43)$$

O parênteses de Poisson entre os momentos  $\xi_a$  fica dado por

$$\begin{aligned}
\{\xi_a, \xi_b\} &= \{p_\mu(X_a)^\mu, p_\nu(X_b)^\nu\} \\
&= p_\mu\{(X_a)^\mu, p_\nu(X_b)^\nu\} + \{p_\mu, p_\nu(X_b)^\nu\}(X_a)^\mu \\
&= p_\mu p_\nu\{(X_a)^\mu, (X_b)^\nu\} + p_\mu\{(X_a)^\mu, p_\nu\}(X_b)^\nu \\
&\quad + p_\nu\{p_\mu, (X_b)^\nu\}(X_a)^\mu + \{p_\mu, p_\nu\}(X_b)^\nu(X_a)^\mu \\
&= p_\mu \partial_\nu(X_a)^\mu(X_b)^\nu - p_\nu \partial_\mu(X_b)^\nu(X_a)^\mu \\
&= -\left[(X_a)^\nu \partial_\nu(X_b)^\mu - (X_b)^\nu \partial_\nu(X_a)^\mu\right] p_\mu.
\end{aligned}$$

Segundo a equação (5.19), este resultado fornece

$$\{\xi_a, \xi_b\} = -f_{ab}{}^c(X_c)^\mu p_\mu = -f_{ab}{}^c \xi_c. \quad (5.44)$$

Já o parênteses de Poisson entre  $g$  e  $\xi$  fica dado por

$$\{g, \xi_a\} = \{g, p_\mu\}(X_a)^\mu = \frac{\partial g}{\partial x^\mu}(X_a)^\mu = -ig(J^b)_\mu T_b(X_a)^\mu \quad (5.45)$$

$$= -igT_b \eta_a^b \quad (5.46)$$

$$= -igT_a, \quad (5.47)$$

onde foi usado que  $J = ig^{-1}dg = J^a T_a \Rightarrow dg = -ig(J^a)_\mu T_a dx^\mu$ .

Uma vez construídos os parênteses  $\{\xi_a, \xi_b\}$  e  $\{g, \xi\}$ , é possível derivar as equações de movimento a partir da Hamiltoniana (5.38) fazendo-se

$$\dot{\xi}_a = \{\xi_a, H\} = \frac{1}{2}\{\xi_a, \xi^b \xi_b\} = \xi^b \{\xi_a, \xi_b\} = -f_{ab}{}^c \xi_c \xi^b = 0, \quad (5.48)$$

$$\dot{g} = \{g, H\} = \frac{1}{2}\{g, \xi^a \xi_a\} = \xi^a \{g, \xi_a\} = \xi^a (-igT_a) = -ig\xi. \quad (5.49)$$

Em (5.48) foi usado o fato que a constante de estrutura  $f_{abc}$  é completamente anti-simétrica com respeito aos índices.

Fazendo a correspondência  $g \rightarrow q$  e  $\xi^a \rightarrow p^a$ , tal que  $\xi^a T_a = p^a T_a = p$ , as equações acima correspondem a

$$\dot{p} = 0 \quad (5.50)$$

$$\dot{q} = -iqp. \quad (5.51)$$

## 5.4 O grupo $SU(2)$

O grupo  $SU(2)$  é formado pelas matrizes  $g$  de dimensão  $2 \times 2$  satisfazendo  $\det g = 1$  e  $g^\dagger g = gg^\dagger = \mathbf{1}$ . Devido a essas condições, a forma geral de  $g$  pode ser dada por

$$g = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

onde  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  e  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ .

Em especial, a parametrização

$$z_1 = x^1 + ix^2, \quad (5.53)$$

$$z_2 = x^3 + ix^4, \quad (5.54)$$

leva ao isomorfismo entre o  $S^3$ ,

$$x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4, \quad (5.55)$$

$$1 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2, \quad (5.56)$$

e o  $SU(2)$ ,

$$g = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + ix^2 & -x^3 + ix^4 \\ x^3 + ix^4 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix}, \quad \det g = 1. \quad (5.57)$$

Ainda em termos de  $x^1, x^2, x^3$  e  $x^4$ , tem-se

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} x^1 - ix^2 & x^3 - ix^4 \\ -x^3 - ix^4 & x^1 + ix^2 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

e

$$dg = \begin{pmatrix} dx^1 + idx^2 & -dx^3 + idx^4 \\ dx^3 + idx^4 & dx^1 - idx^2 \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

De (5.56) segue que

$$x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 + x^4 dx^4 = 0, \quad (5.60)$$

tal que as componentes da matriz  $J$ ,  $J = ig^{-1}dg$ , ficam dadas por

$$\begin{aligned} J_{11} &= -x^1 dx^2 + x^2 dx^1 - x^3 dx^4 + x^4 dx^3, \\ J_{12} &= (x^4 dx^1 - x^1 dx^4 - x^2 dx^3 + x^3 dx^2) - i(x^1 dx^3 - x^2 dx^4 - x^3 dx^1 + x^4 dx^2), \\ J_{21} &= (x^4 dx^1 - x^1 dx^4 - x^2 dx^3 + x^3 dx^2) + i(x^1 dx^3 - x^2 dx^4 - x^3 dx^1 + x^4 dx^2), \\ J_{22} &= x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + x^3 dx^4 - x^4 dx^3. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Cabe agora explorar essas construções explicitamente fazendo uso de parametrizações.

### 5.4.1 Ângulos de Euler

A parametrização de  $g$  via ângulos de Euler é feita de acordo com

$$g = \exp\left(i\alpha\frac{\sigma_3}{2}\right) \exp\left(i\beta\frac{\sigma_2}{2}\right) \exp\left(i\gamma\frac{\sigma_3}{2}\right). \quad (5.62)$$

Os parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma$  são tais que

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta < 4\pi, \quad 0 \leq \gamma < \pi, \quad (5.63)$$

e as matrizes  $\sigma_a$  são as matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.64)$$

Estas satisfazem as seguintes relações:

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c, \quad (5.65)$$

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1}_2, \quad (5.66)$$

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1}_2 + i\epsilon_{abc}\sigma_c, \quad (5.67)$$

$$\sigma_a^\dagger = \sigma_a, \quad (5.68)$$

$$\det \sigma_a = -1. \quad (5.69)$$

Fazendo as definições

$$u \equiv \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad v \equiv \frac{\alpha - \gamma}{2} \quad \text{e} \quad \theta \equiv \frac{\beta}{2}, \quad (5.70)$$

a matriz  $g$  em (5.57) fica escrita como

$$g = \begin{pmatrix} e^{iu} \cos \theta & e^{iv} \sin \theta \\ -e^{-iv} \sin \theta & e^{-iu} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

Comparando (5.71) com (5.53) e (5.54), tem-se

$$\begin{aligned} x^1 &= \cos u \cos \theta, \\ x^2 &= \sin u \cos \theta, \\ x^3 &= -\cos v \sin \theta, \\ x^4 &= \sin v \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.72)$$

A corrente  $J$ , cujas componentes são dadas por (5.61), deve então ser decomposta como  $J = J^a T_a = J^a \frac{\sigma_a}{2}$ , tal que cada componente  $J^a$  fica dada por

$$\begin{aligned} J^1 &= 2(-x^1 dx^4 - x^2 dx^3 + x^3 dx^2 + x^4 dx^1), \\ J^2 &= 2(x^1 dx^3 - x^2 dx^4 - x^3 dx^1 + x^4 dx^2), \\ J^3 &= 2(-x^1 dx^2 + x^2 dx^1 - x^3 dx^4 + x^4 dx^3). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Em termos de  $x^1, x^2, x^3$  e  $x^4$  definidos em (5.72), tem-se

$$\begin{aligned} J^1 &= -\cos \gamma \sin \beta d\alpha + \sin \gamma d\beta, \\ J^2 &= -\sin \gamma \sin \beta d\alpha - \cos \gamma d\beta, \\ J^3 &= -\cos \beta d\alpha - d\gamma. \end{aligned} \quad (5.74)$$

O campo vetorial  $X_a$ , que deve ser tal que  $J^a(X_b) = \delta^a_b$ , tem as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \partial_\alpha + \sin \gamma \partial_\beta + \cot \beta \cos \gamma \partial_\gamma, \\ X_2 &= -\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \partial_\alpha - \cos \gamma \partial_\beta + \cot \beta \sin \gamma \partial_\gamma, \\ X_3 &= -\partial_\gamma. \end{aligned} \quad (5.75)$$

O parênteses de Lie entre os campos vetoriais  $X_a$  e  $X_b$  satisfaz

$$[X_a, X_b] = \epsilon_{ab}^c X_c. \quad (5.76)$$

A métrica de Killing para o  $su(2)$  nessa representação é obtida fazendo

$$\eta_{ab} = c \text{Tr} \left( \frac{\sigma_a \sigma_b}{2} \right) = \frac{c}{4} \text{Tr}(\mathbf{1}_2) \delta_{ab} = \delta_{ab} \Rightarrow c = 2, \quad (5.77)$$

onde foi usada a relação (5.67) e o fato que  $\text{Tr}(\sigma_a) = 0$ .

A distância invariante  $ds^2$  fica dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2\text{Tr}(J^2) = 2\text{Tr} \left[ \left( J^a \frac{\sigma_a}{2} \right) \left( J^b \frac{\sigma_b}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) J^a J^b \\ &= \delta_{ab} J^a J^b \\ &= J^a J_a \\ &= d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 + 2 \cos \beta d\alpha d\gamma. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Comparando (5.78) com  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , obtém-se

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.79)$$

A partir da métrica obtida em (5.79) pode-se calcular, por exemplo, o elemento de volume nesse espaço, dado por

$$dV = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} d\alpha d\beta d\gamma = \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma. \quad (5.80)$$

Em um espaço curvo descrito por  $g_{\mu\nu}$ , o laplaciano de uma função  $f$  é obtido fazendo-se

$$\square f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu f) \quad (5.81)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{1}{2\sqrt{g}} \partial_\mu g g^{\mu\nu} \partial_\nu f + \sqrt{g} \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu f + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu f \right) \quad (5.82)$$

$$= \frac{1}{2g} (\partial_\mu g) g^{\mu\nu} \partial_\nu f + (\partial_\mu g^{\mu\nu}) \partial_\nu f + g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu f, \quad (5.83)$$

onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ .

A partir de (5.79), pode-se obter a matriz inversa  $g^{\mu\nu}$ . Esta fica dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \beta} & 0 & -\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} & 0 & \frac{1}{\sin^2 \beta} \end{pmatrix}. \quad (5.84)$$

A partir de (5.79) e (5.84), o laplaciano  $\square$  de uma função  $f$  em termos dos ângulos de Euler fica então dado por

$$\square f = \frac{1}{\sin^2 \beta} (\partial_\alpha^2 f + \partial_\gamma^2 f - 2 \cos \beta \partial_\alpha \partial_\gamma f) + \partial_\beta^2 f + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \partial_\beta f. \quad (5.85)$$

De acordo com (5.42), os momentos  $\xi_a$  definidos na álgebra  $su(2)$  podem ser escritos em termos das componentes  $X_a$  obtidas em (5.75). Lembrando que  $X_a = (X_a)^\mu \partial_\mu$ , tem-se então  $\xi_a = (X_a)^\alpha p_\alpha + (X_a)^\beta p_\beta + (X_a)^\gamma p_\gamma$  e

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\cos \gamma}{\sin \beta} p_\alpha + \sin \gamma p_\beta + \cot \beta \cos \gamma p_\gamma, \\ \xi_2 &= -\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} p_\alpha - \cos \gamma p_\beta + \cot \beta \sin \gamma p_\gamma, \\ \xi_3 &= -p_\gamma. \end{aligned} \quad (5.86)$$

As componentes de  $\xi$  obtidas acima se combinam de acordo com

$$\xi = \xi^a T_a = \xi^a \frac{\sigma_a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix}, \quad (5.87)$$

tal que

$$\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_\gamma & -\frac{e^{-i\gamma}}{\sin \beta} p_\alpha + ie^{-i\gamma} p_\beta + \cot \beta e^{-i\gamma} p_\gamma \\ -\frac{e^{i\gamma}}{\sin \beta} p_\alpha - ie^{i\gamma} p_\beta + \cot \beta e^{i\gamma} p_\gamma & p_\gamma \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

Com isso, o invariante de Casimir  $\xi^2$  do  $su(2)$  fica dado por

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\xi^2) &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} p_\beta^2 + p_\gamma^2 + \left( \cot \beta p_\gamma - \frac{1}{\sin \beta} p_\alpha \right)^2 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & p_\beta^2 + p_\gamma^2 + \left( \cot \beta p_\gamma - \frac{1}{\sin \beta} p_\alpha \right)^2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \beta} (p_\alpha^2 + p_\gamma^2 - 2 \cos \beta p_\alpha p_\gamma) + p_\beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Fazendo uma substituição ingênua dos momentos canonicamente conjugados  $p_\alpha, p_\gamma$  e  $p_\beta$  que aparecem em (5.89) por operadores diferenciais  $\partial_\alpha, \partial_\gamma$  e  $\partial_\beta$ , é possível notar que as equações (5.85) e (5.89) são bastante semelhantes. Entretanto, (5.85) contém um termo de derivada de primeira ordem,  $\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \partial_\beta$ , que não aparece em (5.89). Essa diferença surge devido ao ordenamento que deve ser feito ao se promover os momentos e posições a operadores. Há uma ambiguidade em determinar o ordenamento correto em (5.86). O problema de ordenamento e quantização da partícula livre numa esfera é discutido em [18].

## 5.4.2 Coordenadas esféricas

Outra maneira de se obter  $ds^2$  consiste em usar a matriz  $J$  com componentes dadas por (5.61), obtendo-se

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2\text{Tr}(J^2) \\ &= (1 - 2(x^1)^2)(dx^1)^2 + (1 - 2(x^2)^2)(dx^2)^2 + (1 - 2(x^3)^2)(dx^3)^2 \\ &\quad + (1 - 2(x^4)^2)(dx^4)^2 - 4(x^1 x^2 dx^1 dx^2 + x^1 x^3 dx^1 dx^3 + x^1 x^4 dx^1 dx^4 \\ &\quad + x^2 x^3 dx^2 dx^3 + x^2 x^4 dx^2 dx^4 + x^3 x^4 dx^3 dx^4), \end{aligned} \quad (5.90)$$

onde foi usado

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1. \quad (5.91)$$

Aplicando a parametrização via coordenadas esféricas, na qual

$$\begin{aligned} x^1 &= \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, \\ x^2 &= \sin \psi \sin \theta \cos \varphi, \\ x^3 &= \sin \psi \cos \theta, \\ x^4 &= \cos \psi, \end{aligned} \quad (5.92)$$

com  $0 \leq \psi, \theta < \pi$  e  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , obtém-se

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.93)$$

Comparando (5.93) com  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , obtém-se

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \psi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \psi \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.94)$$

O elemento de volume  $dV$  é obtido a partir de (5.94) como

$$dV = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} d\psi d\theta d\varphi = \sin^2 \psi \sin \theta d\psi d\theta d\varphi. \quad (5.95)$$

A matriz inversa  $g^{\mu\nu}$  nesse caso fica dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \psi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sin^2 \psi \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (5.96)$$

O laplaciano  $\square$  de uma função  $f$  fica então dado por

$$\square f = 2 \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \partial_\psi f + \frac{\cos \theta}{\sin \theta \sin^2 \psi} \partial_\theta f + \partial_\psi^2 f + \frac{1}{\sin^2 \psi} \partial_\theta^2 f + \frac{1}{\sin^2 \psi \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 f. \quad (5.97)$$

Para obter as componentes da corrente  $J$  em coordenadas esféricas, basta substituir (5.92) na decomposição feita em (5.73). Obtém-se então

$$\begin{aligned} J^1 &= 2 \sin \theta \sin \varphi d\psi + 2 \sin \psi \left( \cos \theta \cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi \right) d\theta \\ &\quad + 2 \sin \theta \sin \psi \left( \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi \right) d\varphi, \\ J^2 &= 2 \sin \theta \cos \varphi d\psi + \left( \cos \theta \sin(2\psi) \cos \varphi - 2 \sin \varphi \sin^2 \psi \right) d\theta \\ &\quad - 2 \sin \theta \sin \psi \left( \sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi \right), \\ J^3 &= 2 \cos \theta d\psi - 2 \cos \psi \sin \theta \sin \psi d\theta + 2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi d\varphi. \end{aligned} \quad (5.98)$$

O campo vetorial  $X_a$ , dual a  $J$ , fica dado por

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left( \frac{\sin \theta \sin \varphi}{2} \right) \partial_\psi + \left( \frac{\cos \varphi + \cos \theta \cot \psi \sin \varphi}{2} \right) \partial_\theta \\
&\quad + \left( \frac{\cos \varphi \cot \psi \csc \theta - \cot \theta \sin \varphi}{2} \right) \partial_\varphi, \\
X_2 &= \left( \frac{\cos \varphi \sin \theta}{2} \right) \partial_\psi + \left( \frac{\cos \theta \cos \varphi \cot \psi - \sin \varphi}{2} \right) \partial_\theta \\
&\quad - \left( \frac{\cos \varphi \cot \theta + \cot \psi \csc \theta \sin \varphi}{2} \right) \partial_\varphi, \\
X_3 &= \left( \frac{\cos \theta}{2} \right) \partial_\psi - \left( \frac{\cot \psi \sin \theta}{2} \right) \partial_\theta + \left( \frac{1}{2} \right) \partial_\varphi.
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Por fim, as componentes  $\xi_a$  do momento definido na álgebra, definidas em (5.42), ficam dadas por

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \left( \frac{\sin \theta \sin \varphi}{2} \right) p_\psi + \left( \frac{\cos \varphi + \cos \theta \cot \psi \sin \varphi}{2} \right) p_\theta \\
&\quad + \left( \frac{\cos \varphi \cot \psi \csc \theta - \cot \theta \sin \varphi}{2} \right) p_\varphi, \\
\xi_2 &= \left( \frac{\cos \varphi \sin \theta}{2} \right) p_\psi + \left( \frac{\cos \theta \cos \varphi \cot \psi - \sin \varphi}{2} \right) p_\theta \\
&\quad - \left( \frac{\cos \varphi \cot \theta + \cot \psi \csc \theta \sin \varphi}{2} \right) p_\varphi, \\
\xi_3 &= \left( \frac{\cos \theta}{2} \right) p_\psi - \left( \frac{\cot \psi \sin \theta}{2} \right) p_\theta + \left( \frac{1}{2} \right) p_\varphi,
\end{aligned} \tag{5.100}$$

tal que o momento  $\xi$ ,

$$\xi = \xi^a T_a = \xi \frac{\sigma_a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix}, \tag{5.101}$$

tem componentes matriciais

$$\begin{aligned}
\xi_{11} &= \left(\frac{\cos \theta}{2}\right) p_\psi - \left(\frac{\cot \psi \sin \theta}{2}\right) p_\theta + \left(\frac{1}{2}\right) p_\varphi, \\
\xi_{12} &= -\left(\frac{ie^{i\varphi} \sin \theta}{2}\right) p_\psi - \left(\frac{ie^{i\varphi}(\cos \theta \cot \psi + i)}{2}\right) p_\theta \\
&\quad + \left(\frac{e^{i\varphi} \csc \theta (\cot \psi + i \cos \theta)}{2}\right) p_\varphi, \\
\xi_{21} &= \left(\frac{ie^{i\varphi} \sin \theta}{2}\right) p_\psi + \left(\frac{e^{i\varphi}(1 + i \cos \theta \cot \psi)}{2}\right) p_\theta \\
&\quad + \left(\frac{e^{-i\varphi} \csc \theta (\cot \psi - i \cos \theta)}{2}\right) p_\varphi, \\
\xi_{22} &= -\left(\frac{\cos \theta}{2}\right) p_\psi + \left(\frac{\cot \psi \sin \theta}{2}\right) p_\theta - \left(\frac{1}{2}\right) p_\varphi.
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Nesse caso, o invariante de Casimir  $\xi^2$  fica dado por

$$\text{Tr}(\xi^2) = \frac{1}{2}[\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2] = \frac{1}{2} \left[ p_\psi^2 + \frac{1}{\sin^2 \psi} p_\theta^2 + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta \sin^2 \psi}\right) p_\varphi^2 \right]. \tag{5.103}$$

Assim como em ângulos de Euler, em coordenadas esféricas também é possível notar a semelhança entre (5.97) e (5.103). Novamente, a correspondência entre momentos e operadores diferenciais está restrita a termos de segunda ordem.

# Capítulo 6

## Teoria de Yang-Mills no cilindro

As referências pertinentes a esse capítulo são [9], [13], [14], [19], [20] e [26].

Nessa seção, um espaço-tempo bidimensional será considerado, tal que a coordenada espacial esteja restrita a um círculo de raio  $r$  com coordenada  $x \in (0, 2\pi r]$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Isso significa que a variedade  $\mathbb{M}$  é dada por  $\mathbb{M} = S^1 \times \mathbb{R}$ .

Considere agora um grupo de Lie simplesmente conexo e compacto  $G$  e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  correspondente. Um campo de calibre  $A$  é definido como  $A = A_\mu^a T_a dx^\mu$ , i.e.,  $A$  é uma 1-forma em  $\mathbb{M}$  assumindo valores em  $\mathfrak{g}$ . Analogamente, o tensor  $F = F_{\mu\nu}^a T_a dx^\mu dx^\nu$  é uma 2-forma em  $\mathbb{M}$  assumindo valores em  $\mathfrak{g}$ . Isso significa que ambos são escritos em termos das matrizes de uma representação de  $\mathfrak{g}$ , no caso, a adjunta (regular).

A teoria de Yang-Mills é descrita pela densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{Tr}(T_a T_b), \quad (6.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ .

A minimização da ação  $S$  correspondente,

$$S = \int_{\mathbb{M}} \mathcal{L} d^2x, \quad (6.2)$$

fornece as equações de movimento

$$D_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} - i[A_\nu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (6.3)$$

Uma vez que  $\mathbb{M} = S^1 \times \mathbb{R}$ , (6.3) resulta em duas equações:

$$\partial_0 F^{10} - i[A_0, F^{10}] = 0; \quad (6.4)$$

$$\partial_1 F^{01} - i[A_1, F^{01}] = 0. \quad (6.5)$$

Segundo o visto no Capítulo 4, o campo elétrico fica definido em termos de  $F$  como  $E = F^{01}$ . Usando a notação  $A_1 \equiv A$ ,  $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$  e  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$  as duas equações de movimento acima ficam escritas como

$$\frac{\partial E}{\partial t} - i[A_0, E] = 0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} - i[A, E] = 0, \quad (6.7)$$

com

$$E = F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 - i[A^0, A^1] = -\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A_0}{\partial x} + i[A_0, A]. \quad (6.8)$$

Para resolver as equações (6.6)-(6.8), é conveniente eliminar a variável  $A_0$  do problema. Isso pode ser feito escolhendo-se um calibre no qual  $A'_0 = 0$ , tal que o sistema de equações fica escrito como

$$E' = -\frac{\partial A'}{\partial t}, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial x} - i[A', E'] = 0. \quad (6.11)$$

Sabe-se que os campos  $A_\mu$  e  $E$  se transformam sob transformações de calibre de acordo com

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + iU\partial_\mu U^{-1}, \quad (6.12)$$

$$E' = UEU^{-1}. \quad (6.13)$$

É preciso, portanto, encontrar  $U$  tal que  $A'_0 = 0$ . Explicitamente, deve-se ter

$$\begin{aligned} A'_0 &= UA_0 U^{-1} + iU \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} = 0 \\ \Rightarrow A_0 &= -i \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} U = -i(-U^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1})U = iU^{-1} \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}$$

Portanto, para eliminar  $A_0$ , basta encontrar  $U$  que satisfaça

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -iUA_0, \quad (6.14)$$

com condição de contorno  $U(0) = 1$ .

Cabe comentar que o espaço de configurações do campo  $A'$  é denotado por  $Q$ ,  $Q = \{A' : S^1 \rightarrow \mathfrak{g}\}$ . A variável  $E'$  é canonicamente conjugada a  $A'$ , tal que os dois formam um sistema de coordenadas no espaço de fase  $\Gamma$ .

A equação (6.11) é um vínculo de primeira classe, correspondente à lei de Gauss. Os pares  $(A', E')$  satisfazendo esse vínculo formam um subespaço  $\bar{\Gamma}$  de  $\Gamma$ . Além disso, pares conectados por transformações de calibre são fisicamente equivalentes, ou seja,

$$(A', E') \sim (gA'g^{-1} + ig \frac{\partial g^{-1}}{\partial x}, gE'g^{-1}). \quad (6.15)$$

Isso significa que uma vez encontrados os pares satisfazendo o vínculo, ainda é preciso levar em consideração a equivalência física entre eles. Em termos formais, o espaço de fase físico  $\hat{\Gamma}$  do sistema é definido como o conjunto de classes de equivalência de  $(A', E')$  contidos em  $\bar{\Gamma}$ , i.e.,  $\hat{\Gamma} = \bar{\Gamma} / \sim$ .

Uma vez eliminada a variável  $A_0$  via fixação de calibre, o sistema de equações que deve ser resolvido passa então a ser dado por (6.9)-(6.11). Para resolver (6.11), suponha que  $E'(x)$  possa ser escrito como

$$E'(x) = S(x)E'(0)S^{-1}(x). \quad (6.16)$$

Então, se  $E'(x)$  satisfizer (6.11),  $S(x)$  deve satisfazer

$$\frac{\partial S}{\partial x} - iA'S = 0, \quad (6.17)$$

com condição de contorno  $S(0) = 1$ . A solução dessa equação fica dada por

$$S(x) = P \left[ \exp i \int_0^x A'(y) dy \right]. \quad (6.18)$$

Geometricamente,  $S(x)$  corresponde ao transporte paralelo de  $x = 0$  a  $x$  ao longo do círculo, tal que  $S(2\pi r)$  é o loop de Wilson ao longo do círculo:

$$S(2\pi r) = P \left[ \exp i \int_0^{2\pi r} A'(x) dx \right]. \quad (6.19)$$

Uma vez obtido  $E'(0)$ , a partir de (6.16), um mapa bijetivo  $\phi$  de  $\hat{\Gamma}$  a  $G \times \mathfrak{g}$  pode ser construído, isto é,

$$\begin{aligned} \phi: \quad \hat{\Gamma} &\rightarrow G \times \mathfrak{g} \\ (A', E') &\mapsto (S(2\pi r), E'(0)). \end{aligned}$$

O mapa  $\phi$  leva  $(A'(x), E'(x))$  à  $(S(2\pi r), E'(0))$ , ambos contendo um número finito de graus de liberdade. Como  $\phi$  é um mapa bijetivo, nenhuma informação é perdida ao considerar  $S(2\pi r)$  e  $E'(0)$  ao invés de  $A'(x)$  e  $E'(x)$ . Isso significa que, construindo  $\phi$ , o problema que começa baseado numa teoria de campo passa a ser escrito simplesmente como um sistema mecânico.

Sob uma transformação de calibre  $g(x)$ ,  $S(x)$  se transforma bilocalmente como

$$S(x) \rightarrow g(0)S(x)g(x)^{-1}.$$

Então  $S(2\pi r) \rightarrow g(0)S(2\pi r)g(2\pi r)^{-1} = g(0)S(2\pi r)g(0)^{-1}$ , pois  $g(0) = g(2\pi r)$ . Por outro lado, sabe-se que  $E'(x)$  se transforma por conjugação de  $g(x)$ , i.e.,

$$E'(x) \rightarrow g(x)E'(x)g(x)^{-1}.$$

Portanto, tem-se que

$$\phi(gA'g^{-1} + g\frac{\partial g^{-1}}{\partial x}, gE'g^{-1}) = (g(0)S(2\pi)g(0)^{-1}, g(0)E'(0)g(0)^{-1}). \quad (6.20)$$

Assim, o mapa  $\phi$  é invariante sob transformações de calibre.

Diferenciando (6.17) com relação ao tempo, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial x} - iA'S \right) = \frac{\partial \dot{S}}{\partial x} + iE'S - iA'\dot{S} = 0, \quad \frac{d}{dt} (S(0)) = 0.$$

Usando (6.17) e (6.16) pode-se reescrever a equação acima como,

$$\begin{aligned} S^{-1} \frac{\partial \dot{S}}{\partial x} + iS^{-1}E'(x)S - iS^{-1}A'SS^{-1}\dot{S} &= 0 \\ \Rightarrow S^{-1} \frac{\partial \dot{S}}{\partial x} + iE'(0) - S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} S^{-1}\dot{S} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial (S^{-1}\dot{S})}{\partial x} + iE'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Integrando este último resultado, obtém-se

$$S^{-1}\dot{S} = -iE'(0)x.$$

Tomando então  $x = 2\pi r$ ,

$$S^{-1}(2\pi r)\dot{S}(2\pi r) = -2\pi r i E'(0).$$

Definindo as variáveis  $(q, p) \equiv (S(2\pi r), E'(0))$ , o resultado obtido fica escrito como

$$q^{-1}\frac{dq}{dt} = -2\pi r i p \quad (6.21)$$

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad (6.22)$$

onde (6.22) segue diretamente de (6.10) e (6.16) e do fato que  $S(x)$  não depende do tempo. Em especial, para  $r = \frac{1}{2\pi}$ , tem-se

$$\dot{q} = -i q p \quad (6.23)$$

$$\dot{p} = 0. \quad (6.24)$$

Como mencionado anteriormente, a análise feita reduz o problema, que partiu de uma teoria de campo, a um problema mecânico com um só grau de liberdade  $(q, p)$  no espaço de fase. De fato, as equações de movimento (6.23) e (6.24) equivalem às equações (5.50) e (5.51). Isso significa que a teoria de Yang-Mills no cilindro pode ser reduzida a um sistema mecânico constituído por uma partícula livre movendo-se na variedade do grupo de gauge  $G$ .

Para exemplificar esse resultado, a seguir será considerado o caso mais simples da teoria de Yang-Mills, a teoria eletromagnética, em 1 + 1 dimensões. Nesse caso, o grupo de Lie correspondente é o grupo  $U(1)$ .

## 6.1 Eletromagnetismo em 1+1 dimensões

Em 1+1 dimensões, a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  do campo eletromagnético na presença de correntes externas, introduzida na Seção 3.3.2, fica dada por

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)^2}{2} + A_0 j^0 + A_1 j^1. \quad (6.25)$$

Nesse caso, as equações de movimento,  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ , fornecem

$$\partial_t \partial_x A_1 - \partial_x^2 A_0 = j_0, \quad (6.26)$$

$$\partial_t^2 A_1 - \partial_t \partial_x A_0 = j_1. \quad (6.27)$$

Estas são reescritas em termos do campo elétrico,  $E \equiv F^{01} = -F_{01} = -(\partial_t A_1 - \partial_x A_0)$ , como

$$\partial_x E = -j_0 \quad (6.28)$$

$$\partial_t E = -j_1. \quad (6.29)$$

Fixando o calibre de Coulomb,  $\chi_1 \equiv \partial_x A_1 \approx 0$ , a equação (6.26) fica escrita como

$$\partial_x^2 A_0 = -j_0. \quad (6.30)$$

Encontrar  $A_0(x, t)$  se resume, portanto, a encontrar a função de Green  $G(x, x')$ ,

$$A_0(x, t) = - \int_{-\pi}^{\pi} dx' G(x, x') j_0(x', t), \quad (6.31)$$

onde

$$\partial_x^2 G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (6.32)$$

A solução desta equação depende das condições de contorno impostas sob  $G(x, x')$ . Algumas soluções possíveis são exploradas no Anexo A. A seguir, serão considerados dois casos: condições de contorno periódicas e quase-periódicas.

### 6.1.1 Condições de contorno periódicas

O caso com condições de contorno periódicas é o terceiro caso explorado no Anexo A. Nele conclui-se que  $G(x - x')$  deve satisfazer

$$\begin{cases} \partial_x^2 G(x, x') = \delta(x - x') - \frac{1}{2\pi}, \\ G(-\pi, x') = G(\pi, x'). \end{cases} \quad (6.33)$$

onde o domínio  $[0, 2\pi)$  foi levado à  $[-\pi, \pi)$  para explicitar a simetria de  $G(x, x')$  por paridade.

A remoção do modo zero na solução de  $G(x, x')$  não impede que esta satisfaça (6.31). Isso pode ser visto fazendo-se

$$\begin{aligned}\partial_x^2 A_0 &= - \int dx' \partial_x^2 G(x, x') j_0(x', t) \\ &= - \int dx' \left( \delta(x - x') - \frac{1}{2\pi} \right) j_0(x', t) \\ &= -j_0(x, t) + \frac{1}{2\pi} \int dx' j_0(x', t),\end{aligned}$$

e notando que este último termo se anula. Isso porque o campo elétrico também deve satisfazer as condições  $E(x - \pi, t) = E(x + \pi, t)$ , tal que

$$Q(t) \equiv \int_{x-\pi}^{x+\pi} dx j_0(x, t) = - \int_{x-\pi}^{x+\pi} dx \partial_x E = E(x - \pi, t) - E(x + \pi, t) = 0.$$

Isso mostra que  $G(x, x')$  dada em (6.33) de fato é a solução procurada e, além disso, que a carga total no círculo é nula.

Para encontrar  $A_1(x, t)$ , basta substituir (6.31) em (6.27) e usar  $G(x, x')$  dada em (6.33):

$$\begin{aligned}\partial_t^2 A_1 &= j_1 - \int_{-\pi}^{+\pi} dx' \partial_x G(x, x') \partial_t j_0(x', t) \\ &= j_1 - \int_{-\pi}^{+\pi} dx' \partial_x G(x, x') \partial_{x'} j_1(x', t) \\ &= j_1 + \int_{-\pi}^{+\pi} dx' \partial_x \partial_{x'} G(x, x') j_1(x', t) \\ &= j_1 - \int_{-\pi}^{+\pi} dx' \partial_x^2 G(x, x') j_1(x', t) \\ &= j_1 - \int_{-\pi}^{+\pi} dx' \left( \delta(x - x') - \frac{1}{2\pi} \right) j_1(x', t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dx' j_1(x', t)\end{aligned}$$

onde foi usada a equação de continuidade,  $\partial_t j_0 = \partial_x j_1$ , e  $\partial_x G(x, x') = -\partial_{x'} G(x, x')$ .

Para simplificar o resultado acima, convém introduzir a definição da carga axial  $Q_5$ ,

$$Q_5 \equiv \int_{-\pi}^{+\pi} dx' j_1(x', t). \quad (6.34)$$

Em termos da carga axial tem-se

$$\partial_t^2 A_1 = \frac{Q_5}{2\pi}. \quad (6.35)$$

O resultado obtido é facilmente integrável e encerra a análise das soluções dos campos  $A_0(x, t)$  e  $A_1(x, t)$ . As condições de contorno periódicas implicam, portanto, em uma carga total nula e no aparecimento de uma carga quiral.

É interessante notar ainda que, como  $A_1(x, t)$  não depende da posição, devido ao calibre de Coulomb fixado, tem-se  $A_1(x, t) = a(t)$ . Isso significa que (6.35) é equivalente à segunda lei de Newton com força constante. Tem-se ainda que a função  $a(t)$  pode ser vista como a coordenada no círculo, tal que o problema analisado é equivalente a partícula no círculo sob ação de uma força constante.

Em particular, se  $Q_5 = 0$ , tem-se uma partícula livre no círculo. Esse resultado é um exemplo simples do fato que a teoria de Yang-Mills no cilindro é equivalente a uma partícula livre na variedade do grupo de Lie. No caso  $U(1) \simeq S^1$ , ou seja, um círculo.

### 6.1.2 Condições de contorno quase-periódicas

Sob condições de contorno quase-periódicas, os campos  $A_\mu(x, t)$  devem satisfazer:

$$A_\mu(x + 2\pi, t) = e^{i\theta} A_\mu(x, t), \quad \theta \neq 0. \quad (6.36)$$

Em geral, uma função quase-periódica  $f(x)$  é expandida em série de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i(n+\theta/2\pi)x}. \quad (6.37)$$

A função delta  $\delta_\theta(x)$  correspondente fica definida como

$$\delta_\theta(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{i(n+\theta/2\pi)x} = e^{i\theta x/2\pi} \delta(x), \quad (6.38)$$

e é tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\theta(x) dx = 1. \quad (6.39)$$

A função de Green  $G_\theta(x - y)$  correspondente deve satisfazer

$$\partial_x^2 G_\theta(x - y) = \delta_\theta(x - y). \quad (6.40)$$

Se as condições de contorno quase-periódicas com  $\theta \neq 0$  forem consideradas, não é necessário remover o modo zero na solução da função de Green. Isso porque sua

expansão fica dada por

$$G_\theta(x) = \sum_n G_\theta(n) e^{i(n+\theta/2\pi)x}, \quad (6.41)$$

tal que sua derivada segunda com relação a  $x$  não desaparece quando  $n = 0$ .

De fato, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_n G_\theta(n) \partial_x^2 (e^{i(n+\theta/2\pi)x}) &= - \sum_n G_\theta(n) (n + \theta/2\pi)^2 e^{i(n+\theta/2\pi)x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{i(n+\theta/2\pi)x} \\ \Rightarrow G_\theta(n) &= - \frac{1}{2\pi(n + \theta/2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

e portanto,

$$A_0(x, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(x, x') j_0(x', t) dx'. \quad (6.43)$$

Para encontrar a solução de  $A_1(x, t)$ , basta então substituir (6.43) em (6.27). Primeiramente, convém reescrever (6.27) como

$$\partial_t^2 A_1 = j_1 + \partial_t \partial_x A_0. \quad (6.44)$$

O último termo dessa equação pode ser simplificado fazendo-se

$$\partial_t \partial_x A_0 = - \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x G_\theta(x, x') \partial_t j_0(x', t) dx' \quad (6.45)$$

$$= - \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x G_\theta(x, x') \partial_{x'} j_1(x', t) dx' \quad (6.46)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x \partial_{x'} G(x, x') j_1(x', t) dx' \quad (6.47)$$

$$= - \int_{-\pi}^{\pi} \partial^2 x' G(x, x') j_1(x', t) dx' \quad (6.48)$$

$$= - \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - x') j_1(x', t) dx' \quad (6.49)$$

$$= -j_1(x, t), \quad (6.50)$$

onde foi usada a equação de continuidade  $\partial_t j_0 = \partial_x j_1$  e  $\partial_x G(x, x') = -\partial_{x'} G(x, x')$ .

Portanto, tem-se  $\partial_t^2 A_1 = j_1 - j_1 = 0$ . Isso implica numa carga axial nula, de acordo com o resultado obtido em (6.35). Pode-se dizer que o desaparecimento da carga quiral é compensado pela introdução da nova variável  $\theta$ . A carga total no círculo, por outro

lado, não necessariamente é nula, pois

$$Q(t) = \int_{-\pi}^{\pi} j_0(x, t) dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \partial_1 E dx = -(E(\pi) - E(-\pi)) \quad (6.51)$$

e este último fator não é necessariamente zero quando  $E(x)$  respeita condições quase-periódicas.

A escolha do calibre de Coulomb implica que  $A_1(x, t) = a(t)$ . Uma vez que função  $a(t)$  pode ser vista como a coordenada no círculo, o resultado  $\partial_t^2 A_1 = \ddot{a}(t) = 0$  equivale a equação da partícula livre no círculo. Esse resultado está de acordo com o esperado, uma vez que o círculo é a variedade correspondente ao grupo de Lie  $U(1)$ , que é o grupo de gauge do campo eletromagnético.

# Capítulo 7

## Eletromagnetismo acoplado a uma partícula livre não-relativística

As referências pertinentes a esse capítulo são [12] e [22].

Em 1 + 1 dimensões, acoplar uma partícula não relativística à teoria eletromagnética significa considerar a Lagrangiana

$$L = L_{em} + L_m, \quad (7.1)$$

onde

$$L_{em} = \int \mathcal{L}_{em} dx = \int \left[ \frac{(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)^2}{2} + A_0 j^0 + A_1 j^1 \right] dx \quad (7.2)$$

e

$$L_m = \frac{\dot{x}^2}{2m}. \quad (7.3)$$

Como visto no Capítulo 6, a escolha do calibre de Coulomb implica em  $A_1(x, t) = a(t)$ . Com isso, tem-se

$$\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \dot{a} - \partial_1 A_0. \quad (7.4)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)^2 &= \dot{a}^2 - 2\dot{a}\partial_1 A_0 + (\partial_1 A_0)^2 \\ &= \dot{a}^2 + 2\partial_1 \dot{a} A_0 - (\partial_1^2 A_0) A_0 \\ &= \dot{a}^2 + j_0 A_0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde foi usado que  $\partial_1 \dot{a}(t) = 0$  e a equação  $\partial_1^2 A_0 = -j_0$ , derivada em (6.30).

Esse resultado, juntamente com a solução

$$A_0(x, t) = - \int_{-\pi}^{\pi} G_{\theta}(x, x') j_0(x', t) dx', \quad (7.6)$$

pode ser usado para reescrever  $L_{em}$  como

$$\begin{aligned} L_{em} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{j_0 A_0}{2} + jA \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\dot{a}^2}{2} + jA \right) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j_0(x, t) G_{\theta}(x, x') j_0(x', t) dx dx'. \end{aligned}$$

Considerando que a corrente externa é contribuição somente da carga da partícula livre não-relativística em movimento, tem-se  $j_0(x, t) = e\delta(x)$  e  $j(x, t) = e\dot{x}\delta(x)$ . Então,

$$\begin{aligned} L &= L_{em} + L_m \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\dot{a}^2}{2} + e\dot{x}\delta(x)A_1 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^2\delta(x)\delta(x')G_{\theta}(x, x')dx dx' + \frac{\dot{x}^2}{2m} \\ &= \pi\dot{a}^2 + e\dot{x}a + \frac{e^2}{2}G_{\theta}(0) + \frac{\dot{x}^2}{2m} \\ &= \pi\dot{a}^2 + \frac{1}{2m}(\dot{x} + eam)^2 - \frac{e^2 a^2 m}{2} + \frac{e^2}{2}G_{\theta}(0). \end{aligned} \quad (7.7)$$

O termo  $\frac{e^2}{2}G_{\theta}(0)$  é constante e pode ser desconsiderado.

Assim, a Hamiltoniana correspondente é obtida calculando-se

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = 2\pi\dot{a} \quad \text{e} \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x} + eam}{m}, \quad (7.8)$$

tal que

$$H = p_a \dot{a} + p_x \dot{x} - L = \frac{1}{4\pi} p_a^2 + \frac{m}{2} (p_x - ea)^2. \quad (7.9)$$

Fazendo as definições  $m = 1/2\pi$ ,  $e = -2\pi$  e  $a \equiv y \Leftrightarrow x$ , esta fica escrita como

$$H = \frac{1}{4\pi} p_x^2 + \frac{1}{4\pi} (p_y + 2\pi x)^2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial y} + 2\pi i x \right)^2. \quad (7.10)$$

## 7.1 O modelo de Manton

Nessa seção, será explorado o modelo de uma partícula com massa e carga unitárias acoplada ao campo eletromagnético e movendo-se em um 2-torus de dimensões também unitárias. Esse modelo foi explorado em [22].

O 2-torus pode ser parametrizado como  $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ . A identificação  $y = 0$  com  $y = 1$  forma um cilindro. Já a identificação  $x$  com  $1 + x$  une os extremos do cilindro, formando o torus.

Para que se tenha um campo magnético constante  $B = 2\pi$  na direção  $z$ , uma possível escolha de calibre para o campo  $A_\mu(x, y)$  é dada por  $A_x = 0$  e  $A_y = 2\pi x$ . Nesse caso, tem-se que a Hamiltoniana da partícula livre,

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2, \quad (7.11)$$

é levada a

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(p_y + 2\pi x)^2, \quad (7.12)$$

via acoplamento mínimo.

Fazendo a substituição  $p_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$  e  $p_y = -i\frac{\partial}{\partial y}$ , obtém-se

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\pi ix\right)^2. \quad (7.13)$$

Esta é equivalente à (7.10), a menos de um fator de  $1/2\pi$ , cuja origem está em se considerar  $x, y \in [0, 1)$  ao invés de  $x, y \in [0, 2\pi)$ . Os dois modelos são, portanto, equivalentes.

As soluções desse modelo são obtidas a partir da equação de Schrödinger correspondente

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi. \quad (7.14)$$

As condições de contorno de  $\psi(x, y, t)$  devem ser tais que

$$\psi(0, y, t) = e^{2\pi iy}\psi(1, y, t), \quad (7.15)$$

$$\partial_x\psi(x, y, t)|_{x=0} = e^{2\pi iy}\partial_x\psi(x, y, t)|_{x=1}, \quad (7.16)$$

$$\psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t), \quad (7.17)$$

$$\partial_y\psi(x, y, t)|_{y=0} = \partial_y\psi(x, y, t)|_{y=1}, \quad (7.18)$$

pois somente sob essas condições a Hamiltoniana é auto-adjunta. O aparecimento do fator  $e^{2\pi iy}$  quando se dá uma volta completa ao longo de  $x$  vem da necessidade de inserir uma transformação de calibre  $g(x, y) = e^{-2\pi iy}$  conectando as extremidades do cilindro uma vez que o fluxo total de  $B$  através do cilindro é não-nulo.

Escrevendo-se  $\psi(x, y, t)$  como

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x, t) e^{2\pi i n y}, \quad (7.19)$$

as variáveis  $x$  e  $y$  são separadas na equação de Schrödinger e obtém-se

$$i \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + 2\pi^2 (n+x)^2 \varphi_n, \quad (7.20)$$

com

$$\varphi_{n+1}(0, t) = \varphi_n(1, t), \quad (7.21)$$

$$\partial_x \varphi_{n+1}(x, t)|_{x=0} = \partial_x \varphi_n(x, t)|_{x=1}. \quad (7.22)$$

Denominando-se por  $u$  os estados estacionários do oscilador harmônico de frequência  $2\pi$ , i.e.,  $u$  é solução de

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + 2\pi^2 x^2 u = E u, \quad -\infty < x < \infty, \quad (7.23)$$

as funções de onda satisfazendo (7.20) são então obtidas como  $\varphi_{mn}(x, t) = e^{-iE_m t} u_m(n+x)$ . O espectro de energia fica dado por  $\{E_m = 2\pi(m+1/2) : m \geq 0\}$  e a função  $u$  é dada por  $u_m(x) = N H_m(\sqrt{2\pi}x)$ , onde  $N$  é uma constante de normalização e  $H_m$  é o polinômio de Hermite de grau  $m$ .

Alguns aspectos desse modelo, como o aparecimento de anomalia axial, são explorados em [22]. Esses serão trabalhados na próxima seção, porém como um caso específico ( $\theta = 1$ ) da versão do modelo com degenerescência.

## 7.2 O modelo de Manton com degenerescência

Nessa seção será introduzido um fator  $\theta$  no modelo de Manton, tal que a Hamiltoniana considerada seja dada por

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(p_y + 2\pi\theta x)^2. \quad (7.24)$$

Assim como na Seção (6.1.2), o fator  $\theta$  está relacionado com o fluxo de campo magnético através do 2-torus. De fato, tomando  $\theta = 1$  retoma-se o modelo original. A seguir será visto que  $\theta \neq 1$  implica no aparecimento de degenerescência.

Primeiramente, a equação dos estados estacionários fica dada por

$$H\psi(x, y) = E\psi(x, y), \quad (7.25)$$

com condições de contorno

$$\psi(0, y) = e^{2\pi i\theta y}\psi(1, y), \quad (7.26)$$

$$\partial_x\psi(x, y)|_{x=0} = e^{2\pi i\theta y}\partial_x\psi(x, y)|_{x=1}, \quad (7.27)$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1), \quad (7.28)$$

$$\partial_y\psi(x, y)|_{y=0} = \partial_y\psi(x, y)|_{y=1}. \quad (7.29)$$

Duas formas possíveis de se partir de  $(x, y) = (0, 0)$  e chegar em  $(x, y) = (1, 1)$  são dadas por  $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1)$  e  $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$ . Usando (7.26) e (7.28), o primeiro caminho fornece  $\psi(0, 0) = e^{2\pi i\theta}\psi(1, 1)$  enquanto o segundo fornece  $\psi(0, 0) = \psi(1, 1)$ . Como o resultado final deve ser o mesmo independente do caminho, segue que  $\theta \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $\theta$  deve ser quantizado.

As soluções satisfazendo (7.25) podem ser escritas como

$$\psi_k(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{kn}(x)e^{2\pi i(n+k/\theta)\theta y}, \quad k = 0, \dots, \theta - 1. \quad (7.30)$$

Assim, as funções  $\psi_k(x, y)$  representam um conjunto de  $\theta$  soluções parametrizadas por  $k$ . Além disso, devido à (7.26), as funções  $\varphi_{kn}(x)$  devem ser tais que

$$\varphi_{k(n+1)}(0) = \varphi_{kn}(1). \quad (7.31)$$

Substituindo (7.30) na equação de Schrödinger estacionária, obtém-se

$$-\frac{1}{2}\partial_x^2\varphi_{kn}(x) + \frac{(2\pi\theta)^2}{2}\left(n + \frac{k}{\theta} + x\right)^2\varphi_{kn}(x) = E\varphi_{kn}(x). \quad (7.32)$$

A condição (7.31) sugere  $\varphi_{kn}(x)$  na forma  $\varphi_{kn}(x) = u\left(n + \frac{k}{\theta} + x\right)$ . De fato, substituindo essa sugestão em (7.25), obtém-se a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico de frequência  $2\pi\theta$ . Os autovalores de energia, parametrizados por  $\lambda$ , ficam dados por

$$E_\lambda = 2\pi\theta\left(\lambda + \frac{1}{2}\right). \quad (7.33)$$

As respectivas soluções  $\psi_{\lambda k}(x, y)$  formam um conjunto de  $\theta$  soluções com mesma energia  $E_\lambda$  associada, i.e., o espectro de energia é degenerado. Estas são dadas por

$$\psi_{\lambda k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda kn}(x) e^{2\pi i(n + \frac{k}{\theta})\theta y}, \quad (7.34)$$

com

$$\varphi_{\lambda kn} = u_\lambda\left(n + \frac{k}{\theta} + x\right) \quad (7.35)$$

e

$$u_\lambda(z) = N e^{-\pi\theta z^2} H_\lambda(\sqrt{2\pi\theta}z), \quad (7.36)$$

onde  $N$  é uma constante de normalização e  $H_\lambda$  é o polinômio de Hermite de grau  $\lambda$ .

As funções  $\varphi_{\lambda kn}(x)$  são tais que

$$\varphi_{\lambda k(n+1)}(0) = \varphi_{\lambda kn}(1), \quad (7.37)$$

$$\partial_x\varphi_{\lambda k(n+1)}|_{x=0} = \partial_x\varphi_{\lambda kn}|_{x=1}. \quad (7.38)$$

O estado fundamental, por exemplo, fica dado por

$$\psi_k(x, y) \equiv \psi_{0k}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\theta(x+n+k/\theta)^2} e^{2\pi i(n+k/\theta)\theta y}. \quad (7.39)$$

### 7.2.1 Anomalia axial

Um sistema quântico é dito anômalo quando uma das simetrias presentes no seu sistema clássico correspondente é perdida mediante quantização.

Esse é o caso no sistema considerado. Classicamente, há conservação do momento na direção  $y$ , uma vez que a Hamiltoniana do sistema, eq. (7.24), não contém nenhuma

dependência em  $y$  e as equações de Hamilton são tais que  $\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$ . Por outro lado, as soluções do sistema quântico não garantem que  $\frac{d}{dt}\langle p_y \rangle = 0$ .

Considere, primeiramente, soluções da forma (7.34), tal que o valor esperado parcialmente integrado  $\langle p_y \rangle_x$  é obtido fazendo-se

$$\langle p_y \rangle_x = \int_0^1 dy \psi_{\lambda k}^* \left( -i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_{\lambda k} \quad (7.40)$$

$$= \sum_{m,n} \varphi_{\lambda km}^* \varphi_{\lambda kn} \int_0^1 e^{-2\pi i(m + \frac{k}{\theta})\theta y} \left( 2\pi \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \theta \right) e^{2\pi i(n + \frac{k}{\theta})\theta y} dy \quad (7.41)$$

$$= \sum_{m,n} 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \varphi_{\lambda km}^* \varphi_{\lambda kn} \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)\theta y} dy \quad (7.42)$$

$$= \sum_{m,n} 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \varphi_{\lambda km}^* \varphi_{\lambda kn} \delta(n-m) \quad (7.43)$$

$$= \sum_n 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \varphi_{\lambda kn}^* \varphi_{\lambda kn}. \quad (7.44)$$

Sua derivada temporal é dada por

$$\frac{\partial \langle p_y \rangle_x}{\partial t} = \sum_n 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \left[ \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial t} \varphi_{\lambda kn} + \varphi_{\lambda kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial t} \right].$$

Usando a equação de Schrödinger, é possível reescrever esse resultado como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle p_y \rangle_x}{\partial t} &= \sum_n 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \left[ \left( -\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x^2} + \frac{i(2\pi\theta)^2}{2} \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \varphi_{\lambda kn}^* \right) \varphi_{\lambda kn} \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{\lambda kn}^* \left( \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda kn}}{\partial x^2} - \frac{i(2\pi\theta)^2}{2} \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \varphi_{\lambda kn} \right) \right] \\ &= \sum_n 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \left[ \frac{i}{2} \left( \varphi_{\lambda kn}^* \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda kn}}{\partial x^2} - \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x^2} \right) \right] \\ &= i\pi\theta \sum_n \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_{\lambda kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} - \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

tal que se obtém

$$\frac{\partial \langle p_y \rangle_x}{\partial t} - i\pi\theta \sum_n \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_{\lambda kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} - \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x} \right) = 0. \quad (7.45)$$

A taxa de variação do valor esperado  $\langle p_y \rangle$  fica então dada por

$$\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^1 \langle p_y \rangle_x dx,$$

e, usando (7.45), obtém-se

$$\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} = i\pi\theta \sum_n \left[ \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \left( \varphi_{\lambda kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} - \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=1}. \quad (7.46)$$

Fazendo uso das condições de contorno (7.37) e (7.38), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_n \left[ \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \left( \varphi_{\lambda kn}^*(1, t) \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x}(1, t) - \varphi_{\lambda kn}(1, t) \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x}(1, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varphi_{\lambda kn}^*(0, t) \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x}(0, t) + \varphi_{\lambda kn}(0, t) \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x}(0, t) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} &= i\pi\theta \sum_n \left[ \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \left( \varphi_{\lambda k(n+1)}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda k(n+1)}}{\partial x} - \varphi_{\lambda k(n+1)} \frac{\partial \varphi_{\lambda k(n+1)}^*}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varphi_{\lambda kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} + \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x} \right) \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (7.48)$$

Finalmente, rearranjando os índices mudos,

$$\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} = i\pi\theta \sum_n \left( \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}^*}{\partial x} - \varphi_{\lambda kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (7.49)$$

Para funções de onda da forma (7.34), a taxa  $\frac{d\langle p_y \rangle}{dt}$  obtida em (7.49) é nula, uma vez que  $\varphi_{\lambda kn}$  é tal que  $\varphi_{\lambda kn}^* = \varphi_{\lambda kn}$ . Porém, estados formados pela superposição de funções da forma  $\psi_{\lambda k}$  podem ser tais que  $\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} \neq 0$ , isto é, existem estados que apresentam anomalia.

A seguir serão considerados dois casos de estados formados por superposições de  $\psi_{\lambda k}$ . O mesmo procedimento feito de (7.40) a (7.49) será repetido de modo a obter a anomalia axial correspondente.

- (i) Energia fixa: Considere o estado  $\chi(x, y)$  formado pela superposição de todos os estados degenerados do estado com energia  $\lambda$ , isto é,

$$\chi(x, y) = \sum_{k=0}^{\theta-1} c_k \psi_{\lambda k}, \quad (7.50)$$

onde  $\sum_k |c_k|^2 = 1$ .

Reescrevendo-o como

$$\chi(x, y) = \sum_{k=0}^{\theta-1} c_k \psi_{\lambda k} = \sum_{k=0}^{\theta-1} c_k \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda kn} e^{2\pi i \left(n + \frac{k}{\theta}\right) \theta y} \right), \quad (7.51)$$

o valor esperado de  $p_y$  parcialmente integrado é obtido fazendo-se

$$\begin{aligned} \langle p_y \rangle_x &= \int_0^1 dy \chi^* \left( -i \frac{\partial}{\partial y} \right) \chi \quad (7.52) \\ &= \int_0^1 dy \sum_{k'=0}^{\theta-1} c_{k'}^* \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda k' m} e^{-2\pi i \left(m + \frac{k'}{\theta}\right) \theta y} \right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\theta-1} c_k \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \varphi_{\lambda kn} e^{2\pi i \left(n + \frac{k}{\theta}\right) \theta y} \right) \\ &= \sum_{k, k'=0}^{\theta-1} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} 2\pi \theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \varphi_{\lambda k' m}^* \varphi_{\lambda kn} c_{k'}^* c_k \int_0^1 dy e^{2\pi i \theta y \left( n - m + \frac{k-k'}{\theta} \right)} \\ &= \sum_{k, k'=0}^{\theta-1} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} 2\pi \theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \varphi_{\lambda k' m}^* \varphi_{\lambda kn} c_{k'}^* c_k \delta \left( n - m + \frac{k-k'}{\theta} \right). \end{aligned}$$

Sua derivada temporal fica então dada por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle p_y \rangle_x}{\partial t} &= \sum_{k, k'=0}^{\theta-1} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} 2\pi \theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi_{\lambda k' m}^*}{\partial t} \varphi_{\lambda kn} + \varphi_{\lambda k' m} \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial t} \right) \\ &\quad \times c_{k'}^* c_k \delta \left( n - m + \frac{k-k'}{\theta} \right), \end{aligned}$$

e pode ser reescrita, fazendo-se uso da equação de Schrödinger, como

$$\frac{\partial \langle p_y \rangle_x}{\partial t} = \sum_{k,k'=0}^{\theta-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) c_{k'}^* c_k \delta \left( n - m + \frac{(k - k')}{\theta} \right) \quad (7.53)$$

$$\times \left[ \left( -\frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda k' m}^*}{\partial x^2} + \frac{i(2\pi\theta)^2}{2} \left( m + \frac{k'}{\theta} + x \right)^2 \varphi_{\lambda k' m}^* \right) \varphi_{\lambda kn} \right. \quad (7.54)$$

$$\left. + \varphi_{\lambda k' m}^* \left( \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda kn}}{\partial x^2} - \frac{i(2\pi\theta)^2}{2} \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \varphi_{\lambda kn} \right) \right] \\ = \sum_{k,k'=0}^{\theta-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} \right) c_{k'}^* c_k \delta \left( n - m + \frac{(k - k')}{\theta} \right) \quad (7.55)$$

$$\times \left[ -\frac{i}{2} \left( \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda k' m}^*}{\partial x^2} - \varphi_{\lambda k' m}^* \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda kn}}{\partial x^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{i(2\pi\theta)^2}{2} \left( \left( m + \frac{k'}{\theta} + x \right)^2 - \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \right) \varphi_{\lambda k' m}^* \varphi_{\lambda kn} \right].$$

O termo originado a partir da derivação com respeito a  $y$ ,

$$\left( \left( m + \frac{k'}{\theta} + x \right)^2 - \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \right),$$

se anula quando faz-se uso da função delta. Isso significa que se tem

$$\frac{\partial \langle p_y \rangle_x}{\partial t} = -i\pi\theta \sum_{k,k'=0}^{\theta-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left[ \left( n + \frac{k}{\theta} \right) c_{k'}^* c_k \delta \left( n - m + \frac{(k - k')}{\theta} \right) \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda k' m}^*}{\partial x} - \varphi_{\lambda k' m}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} \right) \right]. \quad (7.56)$$

A taxa de variação do valor esperado fica dada, portanto, por

$$\frac{d \langle p_y \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^1 dx \langle p_y \rangle_x \quad (7.57)$$

$$= -i\pi\theta \left[ \sum_{k,k'=0}^{\theta-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left( n + \frac{k}{\theta} \right) c_{k'}^* c_k \delta \left( n - m + \frac{(k - k')}{\theta} \right) \right. \\ \left. \times \left( \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda k' m}^*}{\partial x} - \varphi_{\lambda k' m}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=1}. \quad (7.58)$$

Fazendo uso das propriedades

$$\varphi_{\lambda k(n+1)}(0) = \varphi_{\lambda kn}(1) \quad \text{e} \quad \partial_x \varphi_{\lambda k(n+1)}(0) = \partial_x \varphi_{\lambda kn}(1), \quad (7.59)$$

o resultado obtido pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_{k,k'=0}^{\theta-1} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{k'}^* c_k \delta \left( n - m + \frac{(k - k')}{\theta} \right) \\ &\times \left( \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda k'm}^*}{\partial x} - \varphi_{\lambda k'm}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Usando o fato que

$$\varphi_{\lambda kn} = e^{-\pi\theta(n+\frac{k}{\theta}+x)^2} H_\lambda \left( \sqrt{2\pi\theta} \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right) \right) \quad (7.61)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi_{\lambda kn} &= e^{-\pi\theta(n+\frac{k}{\theta}+x)^2} \left[ -2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right) H_\lambda \left( \sqrt{2\pi\theta} \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right) \right) \right. \\ &\left. + 2\sqrt{2\pi\theta} \lambda H_{\lambda-1} \left( \sqrt{2\pi\theta} \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (7.62)$$

obtém-se que (7.60) é nula. Isso significa que soluções formadas pela superposição de estados de mesma energia não apresentam anomalia.

Por exemplo, considere o estado formado pela superposição de  $k = 0$  e  $k = 1$  para  $\lambda = 0$ , isto é,

$$\chi_\lambda = c_0 \psi_{00} + c_1 \psi_{01}. \quad (7.63)$$

Primeiramente, vale reescrevê-lo como

$$\chi_\lambda = c_0 \psi_{00} + c_1 \psi_{01} \quad (7.64)$$

$$= c_0 \sum_n \varphi_{00n} e^{2\pi i n \theta y} + c_1 \sum_n \varphi_{01n} e^{2\pi i (n+\frac{1}{\theta}) \theta y} \quad (7.65)$$

$$= c_0 \sum_n e^{-\pi\theta(x+n)^2} e^{2\pi i n \theta y} + c_1 \sum_n e^{-\pi\theta(x+n+\frac{1}{\theta})^2} e^{2\pi i (n+\frac{1}{\theta}) \theta y}. \quad (7.66)$$

Nesse caso, (7.60) fornece

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left[ |c_0|^2 \delta(n-m) \left( \varphi_{00n} \frac{\partial \varphi_{00m}^*}{\partial x} - \varphi_{00m}^* \frac{\partial \varphi_{00n}}{\partial x} \right) \right. \\
&+ c_0^* c_1 \delta\left(n-m + \frac{1}{\theta}\right) \left( \varphi_{01n} \frac{\partial \varphi_{00m}^*}{\partial x} - \varphi_{00m}^* \frac{\partial \varphi_{01n}}{\partial x} \right) \\
&+ c_1^* c_0 \delta\left(n-m - \frac{1}{\theta}\right) \left( \varphi_{00n} \frac{\partial \varphi_{01m}^*}{\partial x} - \varphi_{01m}^* \frac{\partial \varphi_{00n}}{\partial x} \right) \\
&\left. + |c_1|^2 \delta(n-m) \left( \varphi_{01n} \frac{\partial \varphi_{00m}^*}{\partial x} - \varphi_{00m}^* \frac{\partial \varphi_{01n}}{\partial x} \right) \right]_{x=0}. \quad (7.67)
\end{aligned}$$

O primeiro e último termos se anulam, uma vez que  $\varphi = \varphi^*$ . Tem-se então

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_{n,m} \left[ c_0^* c_1 \delta\left(n-m + \frac{1}{\theta}\right) \left( \varphi_{01n} \frac{\partial \varphi_{00m}}{\partial x} - \varphi_{00m} \frac{\partial \varphi_{01n}}{\partial x} \right) \right. \\
&+ \left. c_1^* c_0 \delta\left(n-m - \frac{1}{\theta}\right) \left( \varphi_{00n} \frac{\partial \varphi_{01m}}{\partial x} - \varphi_{01m} \frac{\partial \varphi_{00n}}{\partial x} \right) \right]_{x=0} \quad (7.68) \\
&= i\pi\theta (c_0^* c_1 - c_1^* c_0) \sum_{n,m} \delta\left(n-m + \frac{1}{\theta}\right) \left( \varphi_{01n} \frac{\partial \varphi_{00m}}{\partial x} - \varphi_{00m} \frac{\partial \varphi_{01n}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}.
\end{aligned}$$

Substituindo as soluções  $\varphi_{00m} = e^{-\pi\theta(x+m)^2}$  e  $\varphi_{01n} = e^{-\pi\theta(x+n+\frac{1}{\theta})^2}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_{n,m} \left[ (c_0^* c_1 - c_1^* c_0) \delta\left(n-m + \frac{1}{\theta}\right) e^{-\pi\theta(x+m)^2} e^{-\pi\theta(x+n+\frac{1}{\theta})^2} \right. \\
&\times \left. \left( 2\pi\theta(x+m) - 2\pi\theta\left(x+n + \frac{1}{\theta}\right) \right) \right]_{x=0} \quad (7.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\pi\theta \sum_{n,m} \left[ (c_0^* c_1 - c_1^* c_0) \delta\left(n-m + \frac{1}{\theta}\right) e^{-\pi\theta(x+m)^2} e^{-\pi\theta(x+n+\frac{1}{\theta})^2} \right. \\
&\times \left. \left( 2\pi\theta\left(m-n - \frac{1}{\theta}\right) \right) \right]_{x=0} \quad (7.70)
\end{aligned}$$

A equação (7.70) resulta em zero quando faz-se o uso da função delta. Isso significa que, de fato,

$$\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} = 0. \quad (7.71)$$

- (ii) Degenerescência fixa: Considere um estado formado pela superposição de estados com mesma degenerescência  $k$  e diferentes energias  $\lambda$ , isto é,

$$\psi_k(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} \psi_{\lambda k}. \quad (7.72)$$

Primeiramente, vale reescrever esse estado como

$$\psi_k(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} \varphi_{\lambda kn} \right) e^{2\pi i(n + \frac{k}{\theta})y}. \quad (7.73)$$

A taxa de variação do valor esperado de  $p_y$  pode ser obtida diretamente a partir de (7.49) mediante substituição  $\varphi_{\lambda kn} \rightarrow \sum_{\lambda} \varphi_{\lambda kn}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_n \left[ \left( \sum_{\lambda} c_{\lambda} \varphi_{\lambda kn} \right) \left( \sum_{\lambda'} c_{\lambda'}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda' kn}^*}{\partial x} \right) - \left( \sum_{\lambda'} c_{\lambda'}^* \varphi_{\lambda' kn}^* \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \sum_{\lambda} c_{\lambda} \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} \right) \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (7.74)$$

$$= i\pi\theta \sum_n \sum_{\lambda, \lambda'} c_{\lambda} c_{\lambda'}^* \left[ \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda' kn}^*}{\partial x} - \varphi_{\lambda' kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (7.75)$$

O resultado acima é não-nulo somente quando  $\lambda \neq \lambda'$ , uma vez que  $\varphi_{\lambda kn} = \varphi_{\lambda kn}^*$ . Portanto, pode-se reescrevê-lo como

$$\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} = i\pi\theta \sum_n \sum_{\lambda \neq \lambda'} c_{\lambda} c_{\lambda'}^* \left[ \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda' kn}^*}{\partial x} - \varphi_{\lambda' kn}^* \frac{\partial \varphi_{\lambda kn}}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (7.76)$$

$$= i\pi\theta \sum_n \sum_{\lambda \neq \lambda'} (c_{\lambda} c_{\lambda'}^* - c_{\lambda'} c_{\lambda}^*) \left[ \varphi_{\lambda kn} \frac{\partial \varphi_{\lambda' kn}^*}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (7.77)$$

Pode-se então usar (7.61) e (7.62) para reescrever (7.77):

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_n \sum_{\lambda \neq \lambda'} (c_\lambda c_{\lambda'}^* - c_\lambda^* c_{\lambda'}) e^{-2\pi\theta(n + \frac{k}{\theta} + x)^2} \\ &\times \left[ H_\lambda \left( -2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right) \right) H_{\lambda'} + 2\sqrt{2\pi\theta\lambda'} H_{\lambda'-1} \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$\begin{aligned} &= i\pi\theta \sum_n \sum_{\lambda \neq \lambda'} (c_\lambda c_{\lambda'}^* - c_\lambda^* c_{\lambda'}) \left[ \varphi_{\lambda kn} \left( -2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right) \right) \varphi_{\lambda' kn} \right. \\ &\left. + 2\sqrt{2\pi\theta\lambda'} \varphi_{(\lambda'-1)kn} \right]_{x=0}. \end{aligned} \quad (7.79)$$

Portanto, quando o estado é formado pela superposição de estados com diferentes energias, a anomalia axial é, a princípio, não-nula.

Por exemplo, considere o estado formado pela superposição de estados com energia  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 1$ , tal que

$$\psi_k = c_0 \psi_{0k} + c_1 \psi_{1k}. \quad (7.80)$$

Nesse caso,

$$\psi_k = c_0 \psi_{0k} + c_1 \psi_{1k} \quad (7.81)$$

$$= c_0 \sum_n \varphi_{0kn} e^{2\pi i(n + \frac{k}{\theta})\theta y} + c_1 \sum_n \varphi_{1kn} e^{2\pi i(n + \frac{k}{\theta})\theta y} \quad (7.82)$$

$$= \sum_n (c_0 \varphi_{0kn} + c_1 \varphi_{1kn}) e^{2\pi i(n + \frac{k}{\theta})\theta y} \quad (7.83)$$

Substituindo (7.83) em (7.74), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_n \left[ \left( c_0 \varphi_{0kn} + c_1 \varphi_{1kn} \right) \left( c_0^* \frac{\partial \varphi_{0kn}^*}{\partial x} + c_1^* \frac{\partial \varphi_{1kn}^*}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. - \left( c_0^* \varphi_{0kn}^* + c_1^* \varphi_{1kn}^* \right) \left( c_0 \frac{\partial \varphi_{0kn}}{\partial x} + c_1 \frac{\partial \varphi_{1kn}}{\partial x} \right) \right]_{x=0}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Usando o fato que

$$\varphi_{\lambda kn} = \varphi_{\lambda kn}^*, \quad (7.85)$$

$$\varphi_{0kn} = e^{-\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2}, \quad (7.86)$$

$$\varphi_{1kn} = 2\sqrt{2\pi\theta}\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)e^{-\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2}, \quad (7.87)$$

$$\partial_x\varphi_{0kn} = -2\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)e^{-\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2}, \quad (7.88)$$

$$\partial_x\varphi_{1kn} = 2\sqrt{2\pi\theta}\left(1-2\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2\right)e^{-\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2}. \quad (7.89)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_n \left[ |c_0|^2 (\varphi_{0kn} \partial_x \varphi_{0kn}^* - \varphi_{0kn}^* \partial_x \varphi_{0kn}) + c_0 c_1^* (\varphi_{0kn} \partial_x \varphi_{1kn}^* \right. \\ &\quad - \varphi_{1kn}^* \partial_x \varphi_{0kn}) + c_1 c_0^* (\varphi_{1kn} \partial_x \varphi_{0kn}^* - \varphi_{0kn}^* \partial_x \varphi_{1kn}) \\ &\quad \left. + |c_1|^2 (\varphi_{1kn} \partial_x \varphi_{1kn}^* - \varphi_{1kn}^* \partial_x \varphi_{1kn}) \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (7.90)$$

$$\begin{aligned} &= i\pi\theta \sum_n \left[ c_0 c_1^* (\varphi_{0kn} \partial_x \varphi_{1kn}^* - \varphi_{1kn}^* \partial_x \varphi_{0kn}) \right. \\ &\quad \left. + c_1 c_0^* (\varphi_{1kn} \partial_x \varphi_{0kn}^* - \varphi_{0kn}^* \partial_x \varphi_{1kn}) \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (7.91)$$

De (7.90) para (7.91), foi usado (7.85). Usando agora (7.86)- (7.89), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\langle p_y \rangle}{dt} &= i\pi\theta \sum_n \left[ c_0 c_1^* e^{-2\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2} \left( 2\sqrt{2\pi\theta} \left( 1 - 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\sqrt{2\pi\theta} 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \right) + c_1 c_0^* e^{-2\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left( -2\sqrt{2\pi\theta} 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 - 2\sqrt{2\pi\theta} \left( 1 - 2\pi\theta \left( n + \frac{k}{\theta} + x \right)^2 \right) \right) \right]_{x=0} \\ &= i\pi\theta \sum_n \left[ 2\sqrt{2\pi\theta} (c_0 c_1^* - c_0^* c_1) e^{-2\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}+x\right)^2} \right]_{x=0} \end{aligned} \quad (7.92)$$

O resultado é dado, portanto, por

$$\frac{d\langle p_y \rangle}{dt} = i(2\pi\theta)^{3/2} (c_0 c_1^* - c_0^* c_1) \sum_n e^{-2\pi\theta\left(n+\frac{k}{\theta}\right)^2}. \quad (7.93)$$

Este não é necessariamente nulo, a depender das escolhas de  $c_0$  e  $c_1$ .

# Capítulo 8

## Emaranhamento em teorias de calibre

As referências pertinentes a esse capítulo são [2], [3], [8], [21] e [28].

O emaranhamento quântico é caracterizado pela correlação entre diferentes partes de um sistema que constituem um estado global. Essa correlação é uma propriedade de natureza exclusivamente quântica e por isso é considerada chave na distinção entre sistemas quânticos e clássicos.

Considere dois sistemas físicos, a princípio completamente independentes. Um deles é descrito por funções definidas em um espaço de Hilbert de dimensão  $N$ ,  $\mathcal{H}_1^N$ , enquanto o outro por funções definidas no espaço de Hilbert de dimensão  $M$ ,  $\mathcal{H}_2^M$ .

Considere agora o sistema composto por esses dois espaços de estados. O espaço de Hilbert correspondente, denotado por  $\mathcal{H}$ , terá dimensão  $N \times M$  e será formado a partir do produto tensorial entre  $\mathcal{H}_1^N$  e  $\mathcal{H}_2^M$ , i.e.,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$ . Como os dois sistemas constituintes são independentes, um estado do sistema global  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  fica completamente definido uma vez definidos os estados  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1^N$  e  $|\xi\rangle \in \mathcal{H}_2^M$ .

Escolhendo uma base ortonormal  $|n\rangle$  para  $\mathcal{H}_1^N$  e  $|m\rangle$  para  $\mathcal{H}_2^M$ , é possível decompor os estados  $|\phi\rangle$  e  $|\xi\rangle$  como

$$|\phi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |n\rangle \quad \text{e} \quad |\xi\rangle = \sum_{m=1}^M d_m |m\rangle. \quad (8.1)$$

Uma base para  $\mathcal{H}$  fica então denotada como  $|n \otimes m\rangle$  (ou  $|n\rangle \otimes |m\rangle$ ), tal que

$$\langle n' \otimes m' | n \otimes m \rangle = \langle n' | n \rangle \langle m' | m \rangle = \delta_{n'n} \delta_{m'm}. \quad (8.2)$$

Um estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , dado por  $|\psi\rangle = |\phi \otimes \xi\rangle$ , é chamado de estado produto e fica escrito nessa base como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_n d_m |n \otimes m\rangle. \quad (8.3)$$

Por outro lado, se os dois sistemas físicos constituintes forem interagentes, a forma mais geral de se escrever um estado do sistema global fica dada por

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{nm} |n \otimes m\rangle. \quad (8.4)$$

O elemento  $b_{nm}$ , em geral, não pode ser fatorizado na forma  $c_n d_m$ , como em (8.3). Se fosse possível fatorizá-lo dessa maneira, o estado global  $|\psi\rangle$  seria dado pelo produto tensorial entre  $|\phi\rangle$  e  $|\xi\rangle$  e os sistemas constituintes seriam então não correlacionados, isto é, completamente independentes.

Estados que só podem ser escritos na forma (8.4), independentemente da base escolhida, são ditos emaranhados, enquanto aqueles que, em pelo menos uma base, podem ser escritos como em (8.3) são não-emaranhados ou puros.

Saber se um vetor de estado global  $|\psi\rangle$  pode ou não ser escrito como produto direto de outros vetores de estado nem sempre é simples. É possível que um estado global  $|\psi\rangle$  não possa ser escrito como produto direto de outros dois devido a escolha das bases  $|n\rangle$  e  $|m\rangle$ , podendo existir bases  $|p\rangle$  e  $|q\rangle$  nas quais o estado  $|\psi\rangle$  pode sim ser escrito como (8.3). Assim, uma escolha "inapropriada" de base pode dificultar a decomposição do estado global como produto direto de estados e com isso levar a uma classificação equivocada de um estado não-emaranhado como emaranhado.

A necessidade de se encontrar uma base "ideal" é dispensada quando se descreve o sistema em termos da sua matriz densidade, ao invés dos seus vetores de estado. Por isso vale a pena construir um procedimento capaz de distinguir estados emaranhados de não-emaranhados em termos de matrizes densidade.

Uma matriz densidade, denotada como  $\rho$ , é um mapa  $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  que satisfaz as propriedades  $\rho^\dagger = \rho$ ,  $\text{Tr}(\rho) = 1$  e  $\rho > 0$ , isto é, todos seus autovalores são não negativos. Se um sistema é descrito por um estado vetorial  $|\psi\rangle$ , a matriz densidade correspondente é dada por

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (8.5)$$

Se um sistema é descrito pela soma de  $N$  estados vetoriais  $|\psi_n\rangle$ ,  $n = 1, \dots, N$ , sua matriz densidade é dada por

$$\rho = \sum_{n=1}^N \alpha_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (8.6)$$

onde  $\sum_n \alpha_n = 1$  e  $\alpha_n \geq 0$ . O caso (8.5) é um caso especial de (8.6) onde  $N = 1$ . Se  $N = 1$ , o estado é puro e, se  $N > 1$ , o estado é misto.

Como visto anteriormente, a classificação de um estado como emaranhado ou não diz respeito a possibilidade de se escrever o espaço  $\mathcal{H}$  como produto tensorial  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Em termos da matriz densidade  $\rho$ ,  $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , toma-se o traço parcial de  $\rho$  somando somente sob os graus de liberdade relativos a  $\mathcal{H}_1$  ou  $\mathcal{H}_2$ , por exemplo, tal que a notação adotada é a seguinte:

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho) \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \text{Tr}_1(\rho). \quad (8.7)$$

Se a matriz reduzida  $\rho_i$  puder ser escrita na forma (8.5), isto é, se existir uma base na qual ela é escrita como

$$\rho_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

$\rho_i$  descreve um estado puro e os dois subsistemas são não correlacionados e, portanto, não emaranhados. Por outro lado, se a matriz reduzida  $\rho_i$  só puder ser escrita na forma (8.6),  $\rho_i$  descreve um estado misto e os dois subsistemas são correlacionados e há emaranhamento.

Um caso simples que permite explorar os conceitos introduzidos até aqui é o sistema global composto por dois subsistemas de dois níveis. Um sistema de dois níveis pode ser formado pelas duas polarizações possíveis de um fóton, por exemplo. Nesse caso, o sistema global conteria os graus de liberdade de 2 fótons, cada um com duas polarizações.

Em um sistema de dois níveis, um estado qualquer fica dado pela superposição de seus dois estados base,  $|+\rangle, |-\rangle \in \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$ , tal que pode ser escrito como

$$|\psi_1\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle, \quad (8.9)$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

O sistema global é descrito por um espaço de Hilbert dado por  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Nesse espaço, um estado global fica dado pela superposição dos estados base  $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$  e  $|--\rangle$ , i.e.

$$|\psi\rangle = \alpha|++\rangle + \beta|+-\rangle + \gamma|-+\rangle + \delta|--\rangle, \quad (8.10)$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  e  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ .

Diferentes valores de  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  formam estados emaranhados ou não. Por exemplo:

(i) Se  $\alpha = \delta = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , o estado fica dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (8.11)$$

A matriz densidade é obtida fazendo

$$\begin{aligned} \rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{2}(|+-\rangle - |-+\rangle)(\langle+-| - \langle-+|) \\ &= \frac{1}{2}(|+-\rangle\langle+-| - |+-\rangle\langle-+| - |-+\rangle\langle+-| + |-+\rangle\langle-+|). \end{aligned}$$

Tomando o traço parcial com relação ao segundo grau de liberdade, isto é, calculando  $\rho_1$ , obtém-se

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho) = (\mathbf{1} \otimes \langle+|)\rho(\mathbf{1} \otimes |+\rangle) + (\mathbf{1} \otimes \langle-|)\rho(\mathbf{1} \otimes |-\rangle) \quad (8.12)$$

$$= \frac{1}{2}(|-\rangle\langle-| + |+\rangle\langle+|). \quad (8.13)$$

Com isso  $\rho_1$  fica escrita na base  $|+\rangle, |-\rangle$  como

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

O que significa que ela apresenta dois autovalores não nulos,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ , e por isso o estado do sistema global (8.11) é emaranhado.

É interessante explorar ainda outro aspecto desse caso. Para o estado (8.11), medidas da primeira polarização determinam a medida da segunda polarização. Assim, se a primeira polarização for  $+$ , a segunda obrigatoriamente será  $-$  e vice-versa. Isso significa que, apesar de a princípio as duas polarizações não serem correlacionadas, quando o estado considerado é dado por (8.11), aparece uma correlação entre elas. Esse caso exemplifica, portanto, de maneira bastante clara, o

aparecimento da correlação mencionada no início desse capítulo. Entretanto, deve-se tomar cuidado ao fazer análises como essa, porque nem sempre as conclusões tiradas dessa maneira são verdadeiras. Um caso no qual essa análise não se aplica é o explorado em (8.24), por exemplo.

(ii) Quando  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  e  $\gamma = \delta = -\frac{1}{2}$ , tem-se

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|++\rangle + |+-\rangle - |-+\rangle - |--\rangle). \quad (8.15)$$

Nesse caso, a matriz densidade fica dada por

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}(|++\rangle + |+-\rangle - |-+\rangle - |--\rangle)(\langle++| + \langle+-| - \langle-+| - \langle--|). \quad (8.16)$$

Tomando o traço parcial com relação ao segundo grau de liberdade, tem-se

$$\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho) = (\mathbf{1} \otimes \langle+|)\rho(\mathbf{1} \otimes |+\rangle) + (\mathbf{1} \otimes \langle-|)\rho(\mathbf{1} \otimes |-\rangle) \quad (8.17)$$

$$= \frac{1}{4} \left[ (|+\rangle - |-\rangle)(\langle+| - \langle-|) + (|+\rangle - |-\rangle)(\langle+| - \langle-|) \right] \quad (8.18)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (|+\rangle - |-\rangle)(\langle+| - \langle-|) \right] \quad (8.19)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ |+\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \right]. \quad (8.20)$$

Na base  $|+\rangle, |-\rangle$ ,  $\rho_1$  fica então escrita como

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Seus autovalores  $\lambda_i$  são calculados como raízes da equação obtida tomando  $\det(\rho_1 - \lambda\mathbf{1}) = 0$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1. \quad (8.22)$$

Isso significa que existe uma base, diferente de  $|+\rangle, |-\rangle$ , na qual  $\rho_1$  é escrita como (8.5) e, portanto, o sistema é não-emaranhado.

De fato, é possível escrever o estado (8.15) como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad (8.23)$$

ou seja, como o produto direto de dois estados puros.

(iii) Se  $\alpha = \beta = \delta = \frac{1}{2}$  e  $\gamma = -\frac{1}{2}$ , o estado fica dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|++\rangle + |+-\rangle - |-+\rangle + |--\rangle). \quad (8.24)$$

A matriz densidade correspondente é obtida fazendo-se

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}(|++\rangle + |+-\rangle - |-+\rangle + |--\rangle)(\langle++| + \langle+-| - \langle-+| + \langle--|). \quad (8.25)$$

Tomando o traço parcial com relação ao segundo grau de liberdade, obtém-se

$$\begin{aligned} \rho_1 = \text{Tr}_2(\rho) &= (\mathbf{1} \otimes \langle+|)\rho(\mathbf{1} \otimes |+\rangle) + (\mathbf{1} \otimes \langle-|)\rho(\mathbf{1} \otimes |-\rangle) \quad (8.26) \\ &= \frac{1}{4} \left[ (|+\rangle - |-\rangle)(\langle+| - \langle-|) + (|+\rangle + |-\rangle)(\langle+| + \langle-|) \right] \quad (8.27) \\ &= \frac{1}{2} \left( |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \right). \quad (8.28) \end{aligned}$$

Os autovalores de  $\rho_1$  são portanto degenerados e iguais a  $\frac{1}{2}$ . Isso significa que o subsistema se encontra em um estado misto e o estado global (8.24) é um estado emaranhado.

A esses estados globais constituídos de mais de um subsistema é possível associar vários tipos de entropia. Essas definições de entropia podem ser usadas, inclusive, para distinguir estados emaranhados e não-emaranhados.

## 8.1 Entropia de emaranhamento

A entropia de Renyi é definida como

$$S_{i,n} = \frac{1}{1-n} \log Z_{i,n}, \quad (8.29)$$

onde

$$Z_{i,n} = \text{Tr}(\rho_i^n) \quad (8.30)$$

define a função partição associada ao grau de liberdade  $i$ . Essa função partição pode ser escrita simplesmente como a soma dos autovalores  $\lambda_{i,\alpha}$  de  $\rho_i$  elevados à  $n$ , isto é,

$$Z_{i,n} = \text{Tr}(\rho_i^n) = \sum_{\alpha} \lambda_{i,\alpha}^n. \quad (8.31)$$

Se  $S_{i,n} = 0$ ,  $\rho_i$  pode ser escrita na forma (8.5) para algum  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_i$  e o sistema constituinte é puro. Nesse caso os dois subsistemas não são correlacionados e não há emaranhamento. Por outro lado, se  $S_{i,n} \neq 0$ , a matriz reduzida  $\rho_i$  é mista, isto é, só pode ser escrita na forma (8.6) com  $N > 1$ . Nesse caso, os dois subsistemas estão correlacionados e, conseqüentemente, emaranhados.

Tomando o limite  $n \rightarrow 1$  na definição da entropia de Renyi, obtém-se a entropia de von Neumann:

$$S_i = -\text{Tr}(\rho_i \log \rho_i). \quad (8.32)$$

De fato,

$$\lim_{n \rightarrow 1} S_{i,n} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \left[ \text{Tr}(\rho_i^n) \right] = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \left( \sum_{\alpha} \lambda_{i,\alpha}^n \right) \quad (8.33)$$

$$= \lim_{n \rightarrow 1} -\frac{1}{\sum_{\alpha} \lambda_{i,\alpha}^n} \left( \sum_{\beta} \lambda_{i,\beta}^n \log \lambda_{i,\beta} \right) \quad (8.34)$$

$$= -\sum_{\beta} \lambda_{i,\beta} \log \lambda_{i,\beta} \quad (8.35)$$

$$= -\text{Tr}(\rho_i \log \rho_i) = S_i. \quad (8.36)$$

De (8.33) para (8.34), foi usada a regra de l'Hopital. De (8.34) para (8.35), foi usada a propriedade do traço unitário das matrizes densidade, i.e.,  $\text{Tr}(\rho_i) = \sum_{\alpha} \lambda_{i,\alpha} = 1$ .

Assim como a entropia de Renyi, a entropia de von Neumann é tal que, se  $S_i = 0$ , não há emaranhamento e, se  $S_i \neq 0$ , há emaranhamento. Para ilustrar esse fato, considere novamente o sistema composto considerados anteriormente, cujo estado global fica descrito por (8.10). No caso (i), os autovalores de  $\rho_1$  são degenerados e iguais a  $\frac{1}{2}$ , tal que a entropia de von Neumann fica dada por

$$S_1 = -\text{Tr}(\rho_1 \log \rho_1) = -\sum_{\alpha} \left( \lambda_{1,\alpha} \log(\lambda_{1,\alpha}) \right) = -\left( \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) = \log 2. \quad (8.37)$$

Como  $S_i \neq 0$ , há emaranhamento. No caso (ii), os autovalores de  $\rho_1$  são 0 e 1. A entropia de von Neumann fica então dada por

$$S_1 = -\text{Tr}(\rho_1 \log \rho_1) = -\sum_{\alpha} \left( \lambda_{1,\alpha} \log(\lambda_{1,\alpha}) \right) = -\left( \log 1 \right) = 0, \quad (8.38)$$

tal que não há emaranhamento. Por fim, no caso (iii), tem-se novamente autovalores degenerados e iguais a  $\frac{1}{2}$ . A entropia de von Neumann, assim como em (i), é dada por  $S_1 = \log 2$  e o estado é emaranhado.

### 8.1.1 O modelo de Manton com degenerescência

Na Seção 7.2 foi apresentado o modelo de Manton com degenerescência. Foram encontradas as funções de onda que satisfazem a equação de Schrödinger correspondente, dadas por (7.34). É possível aplicar as ferramentas introduzidas nesse capítulo para analisar a presença de emaranhamento nesse sistema.

Para tanto, considere primeiramente que o sistema encontra-se no estado fundamental com degenerescência  $k$  fixa, dado por

$$\psi_k(x, y) \equiv \psi_{0k}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{0kn}(x) e^{2\pi i \left(n + \frac{k}{\theta}\right) \theta y}. \quad (8.39)$$

A matriz densidade do sistema corresponde a

$$\rho_k(x, y; x', y') = \psi_k(x, y) \psi_k^*(x', y') \quad (8.40)$$

$$= \left( \sum_n \varphi_{0kn}(x) e^{2\pi i \left(n + \frac{k}{\theta}\right) \theta y} \right) \left( \sum_m \varphi_{0km}^*(x') e^{-2\pi i \left(m + \frac{k}{\theta}\right) \theta y'} \right) \quad (8.41)$$

$$= \sum_{m,n} \varphi_{0kn}(x) \varphi_{0km}^*(x') e^{2\pi i \theta (ny - my')} e^{2\pi i k (y - y')} \quad (8.42)$$

Tomando o traço parcial com relação a  $y$ , obtém-se a matriz densidade reduzida  $\rho_k(x, x')$ , dada por

$$\rho_k(x, x') = \int dy \rho_k(x, y; x', y) \quad (8.43)$$

$$= \sum_{m,n} \varphi_{0kn}(x) \varphi_{0km}^*(x') \int dy e^{2\pi i \theta (n-m)y} \quad (8.44)$$

$$= \sum_{m,n} \varphi_{0kn}(x) \varphi_{0km}^*(x') \delta(n - m) \quad (8.45)$$

$$= \sum_n \varphi_{0kn}(x) \varphi_{0kn}^*(x'). \quad (8.46)$$

Uma vez obtida a matriz reduzida, o cálculo da entropia de emaranhamento é feito a partir dos seus autovalores. Para encontrar os autovalores de  $\rho_k(x, x')$ , promove-se a matriz a um operador integral  $\hat{\rho}_k$ , tal que

$$(\hat{\rho}_k f)(x) = \int dx' \rho_k(x, x') f(x'). \quad (8.47)$$

A matriz  $\rho_k(x, x')$  corresponde ao kernel do operador  $\hat{\rho}_k$  e seus autovalores  $\lambda$  são aqueles que satisfazem

$$(\hat{\rho}_k(x, x')f)(x) \equiv \int dx' \rho_k(x, x')f(x') = \lambda f(x). \quad (8.48)$$

Como o domínio de  $x$  está restrito ao círculo, as funções  $f(x)$  são escritas em termos da sua série de Fourier, i.e.,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}. \quad (8.49)$$

Isso significa que  $k$ , que é o momento conjugado a  $x$ , é um inteiro. Por esse motivo, é mais simples encontrar os autovalores  $\lambda$  de (8.48) via sua transformada de Fourier, isto é, via

$$\tilde{\rho}_k(p, q) = \int dx dx' \rho_k(x, x') e^{2\pi i p x} e^{-2\pi i q x'}. \quad (8.50)$$

A matriz  $\tilde{\rho}_k(p, q)$  é uma matriz da forma

$$\tilde{\rho}_k = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \tilde{\rho}_k(-1, -1) & \tilde{\rho}_k(-1, 0) & \tilde{\rho}_k(-1, 1) & \cdots \\ \cdots & \tilde{\rho}_k(0, -1) & \tilde{\rho}_k(0, 0) & \tilde{\rho}_k(0, 1) & \cdots \\ \cdots & \tilde{\rho}_k(1, -1) & \tilde{\rho}_k(1, 0) & \tilde{\rho}_k(1, 1) & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

com dimensão infinita.

É possível encontrar os seus autovalores numericamente truncando  $\tilde{\rho}_k$ . Suponha que isso seja feito de modo a obter uma matriz  $\tilde{\rho}_{kN}$  de dimensões  $(2N + 1) \times (2N + 1)$ , ou seja,

$$\tilde{\rho}_{kN} = \int dx dx' \rho_k(x, x') e^{2\pi i p x} e^{-2\pi i q x'}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad p, q \in [-N, N]. \quad (8.52)$$

Nesse caso,  $\tilde{\rho}_{kN}$  fica dada por

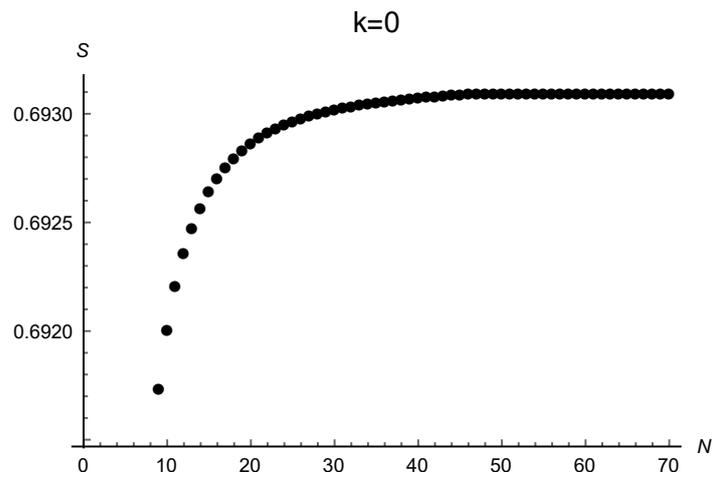
$$\tilde{\rho}_{kN} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_k(-N, N) & \cdots & \tilde{\rho}_k(-N, -1) & \tilde{\rho}_k(-N, 0) & \tilde{\rho}_k(-N, 1) & \cdots & \tilde{\rho}_k(-N, N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \tilde{\rho}_k(-1, -1) & \tilde{\rho}_k(-1, 0) & \tilde{\rho}_k(-1, 1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \tilde{\rho}_k(0, -1) & \tilde{\rho}_k(0, 0) & \tilde{\rho}_k(0, 1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \tilde{\rho}_k(1, -1) & \tilde{\rho}_k(1, 0) & \tilde{\rho}_k(1, 1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\rho}_k(N, -N) & \cdots & \tilde{\rho}_k(N, -1) & \tilde{\rho}_k(N, 0) & \tilde{\rho}_k(N, 1) & \cdots & \tilde{\rho}_k(N, N) \end{pmatrix}. \quad (8.53)$$

A diagonalização dessa matriz fornece os autovalores de  $\tilde{\rho}_{kN}$ . Cada autovalor  $\lambda$  deve ser então dividido pela soma de todos eles, de modo a garantir que  $\text{Tr}(\tilde{\rho}_{kN}) = 1$ . Isso elimina a necessidade de se considerar o fator de normalização de  $\varphi_{\lambda kn}$ , introduzido em (7.36).

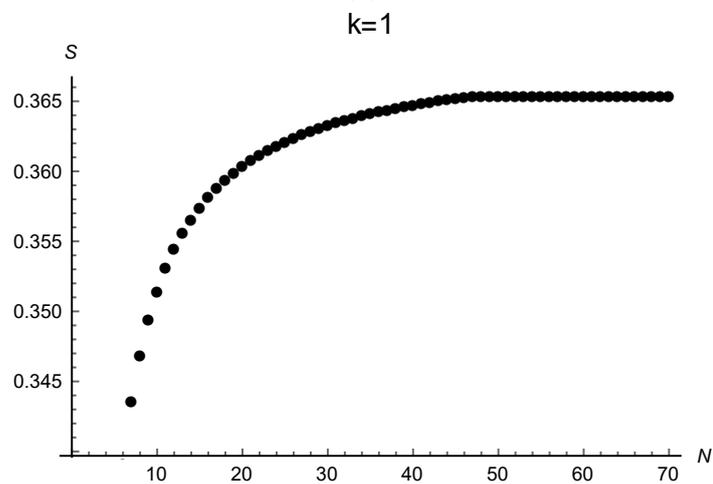
Uma aproximação para os autovalores de  $\tilde{\rho}_k$  pode então ser obtida considerando  $N$  suficientemente grande, isto é, tomando o limite  $N \rightarrow \infty$ . Uma vez obtidos os autovalores de  $\tilde{\rho}_{kN}$ , pode-se calcular a entropia de Renyi correspondente usando (8.31). Para que o resultado se aproxime da entropia de von Neumann, o número  $n$  que aparece no expoente de (8.31) deve ser próximo de 1. Nos cálculos feitos numericamente, o valor considerado foi 1.1. Uma vez estabelecido esse fato, na análise dos resultados obtidos, não é feita distinção entre entropia de Renyi e de von Neumann e denota-se entropia simplesmente por  $S$ .

### 8.1.2 Resultados

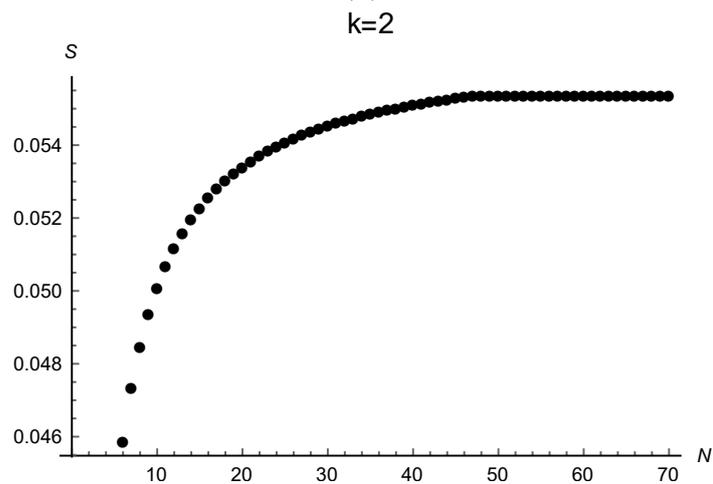
Primeiramente, cabe checar se os valores da entropia encontrados numericamente convergem quando  $N$  aumenta. Caso isso ocorra, truncar a matriz  $\tilde{\rho}_k$  é um procedimento coerente. A Figura 8.1 relaciona entropia  $S$  em função de  $N$ , para  $\theta = 10$  e degenerescências fixas  $k = 0, 1$  e  $2$ . Nela é possível ver que, de fato, os valores de  $S$  convergem a medida que  $N$  cresce.



(a)



(b)



(c)

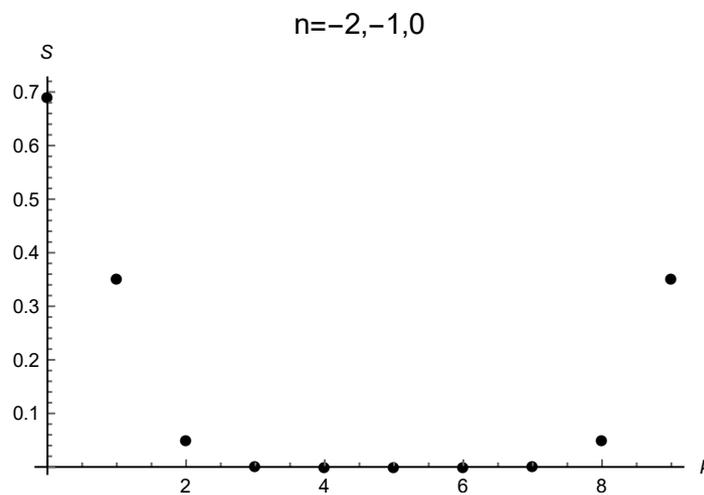
Fig. 8.1 Entropia  $S$  versus  $N$  para  $\theta = 10$  e (a)  $k = 0$ , (b)  $k = 1$  e (c)  $k = 2$ .

Em especial, para  $k = 0$ ,  $S$  parece convergir para  $\ln(2) \approx 0.693147$ . Essa convergência não é exata, uma vez que para  $N > 47$ , a entropia  $S$  obtida numericamente se mantém constante. Uma possível fonte de erros que justifica esse fato é a precisão usada pelo programa durante o cálculo numérico. Alguns valores de  $S$  e os respectivos valores de  $N$  estão relacionados na Tabela 8.1.

<b>N</b>	10	20	30	40	50	60
<b>S</b>	0.692007	0.692865	0.693022	0.693077	0.693096	0.693096

Tabela 8.1 Dependência de  $S$  com  $N$  para  $k = 0$ .

Outro aspecto que pode ser explorado é a dependência entre  $S$  e  $k$ . Sabe-se que, uma vez definido  $\theta$ , a degenerescência  $k$  varia entre  $k = 0$  e  $k = \theta - 1$ . Para  $\theta = 10$ , a entropia varia com  $k$  de acordo com os gráficos da Figura 8.2. Os valores de  $S$  da Figura 8.5a foram obtidos somando os modos  $n = -2, -1, 0$  que aparecem na equação (8.46). Esse resultado não muda quando se soma sobre mais valores de  $n$ . Por outro lado, somar sobre menos valores de  $n$ , como por exemplo  $n = -1, 0$ , altera o resultado e obtém-se o gráfico da Figura 8.5c. Portanto, pode-se concluir que, nesse caso, os modos que contribuem para a entropia são  $n = -2, -1, 0$ .



(a)

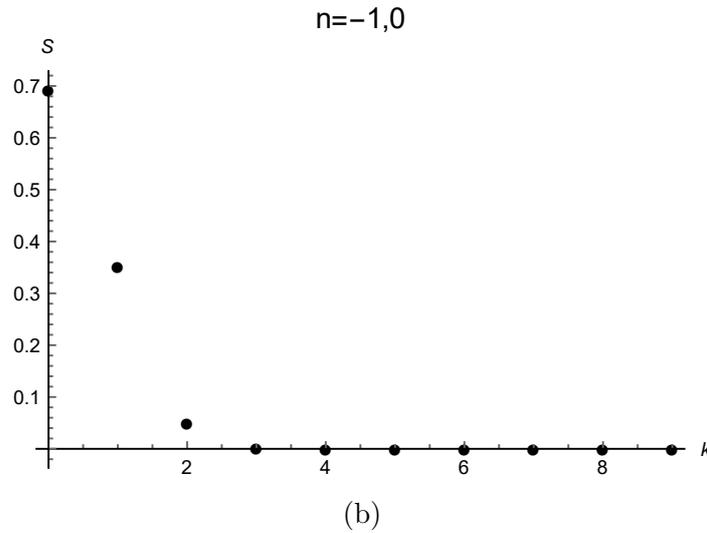


Fig. 8.2 Entropia  $S$  versus degenerescência  $k$  para  $\theta = 10$  e  $N = 10$ . Em (a) a soma foi feita sobre os modos  $n = -2, -1, 0$ . Em (b) a soma foi feita sobre os modos  $n = -1, 0$ .

De maneira geral, para qualquer  $\theta$ , o intervalo mínimo de modos  $n$  que deve-se considerar é  $n = -2, -1, 0, 1$ . Esse aspecto fica evidenciado considerando a distribuição da matriz densidade reduzida  $\rho_k(x, x')$ , dada por (8.46), em termos de  $n$ .

Para  $\theta = 3$  e  $k$  variando entre 0 e 2, por exemplo, a Figura 8.3a representa o gráfico da matriz densidade reduzida correspondente, distinguindo as contribuições de cada  $k$ . A Figura 8.3b mostra a distribuição da densidade para cada  $k$ , ou seja, o primeiro gráfico corresponde a  $\sum_n \varphi_{00n}(x)\varphi_{00n}^*(x')$ , o segundo a  $\sum_n \varphi_{01n}(x)\varphi_{01n}^*(x')$  e o terceiro a  $\sum_n \varphi_{02n}(x)\varphi_{02n}^*(x')$ . Nos gráficos está delimitado o intervalo  $x, x' \in (0, 1]$ , que é o domínio das variáveis  $x$  e  $x'$ . É possível ver que, a medida que  $k$  aumenta, os pontos de pico se deslocam para baixo. Esse deslocamento é inversamente proporcional a  $\theta$ , de modo que, ao ir de  $k$  a  $k + 1$ , os picos são deslocados por uma distância proporcional a  $1/\theta$ .

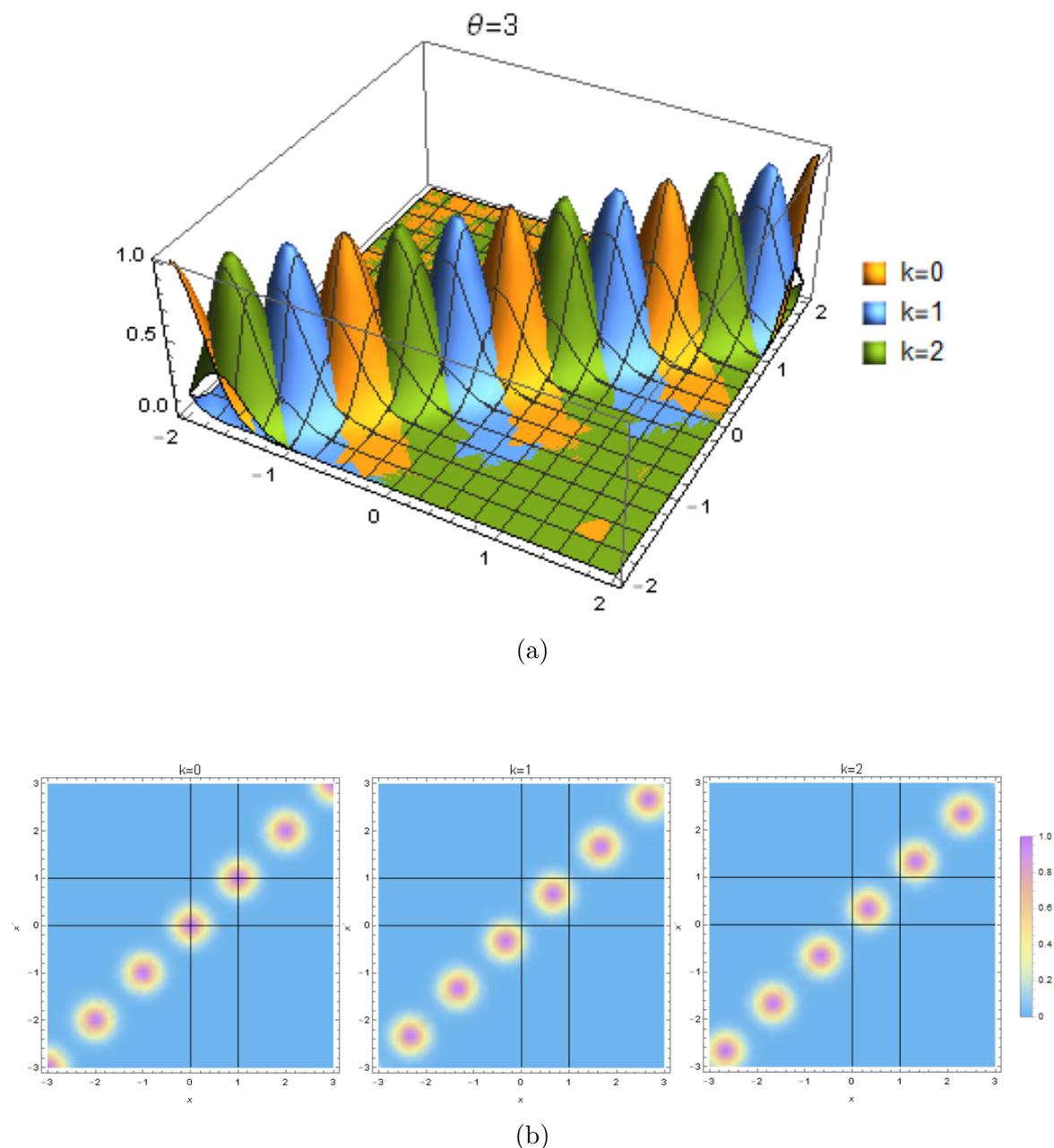


Fig. 8.3 (a) Matriz densidade reduzida  $\rho_k(x, x')$  para  $\theta = 3$ . (b) Distribuição da matriz densidade reduzida para  $k = 0$ ,  $k = 1$  e  $k = 2$ .

Ainda para  $\theta = 3$ , a contribuição dos modos  $n = 0, -1, -2$  é ilustrada pelos gráficos da Figura 8.4. Neles é possível ver que, de fato, os únicos modos que aparecem contidos no domínio  $0 \leq x, x' < 1$  correspondem a  $n = 0, -1, -2$ . Entretanto, quanto menor o valor de  $\theta$ , menos localizados são os picos da matriz densidade reduzida, tal que para  $\theta = 1$ , por exemplo, é necessário considerar ainda o modo  $n = 1$ .

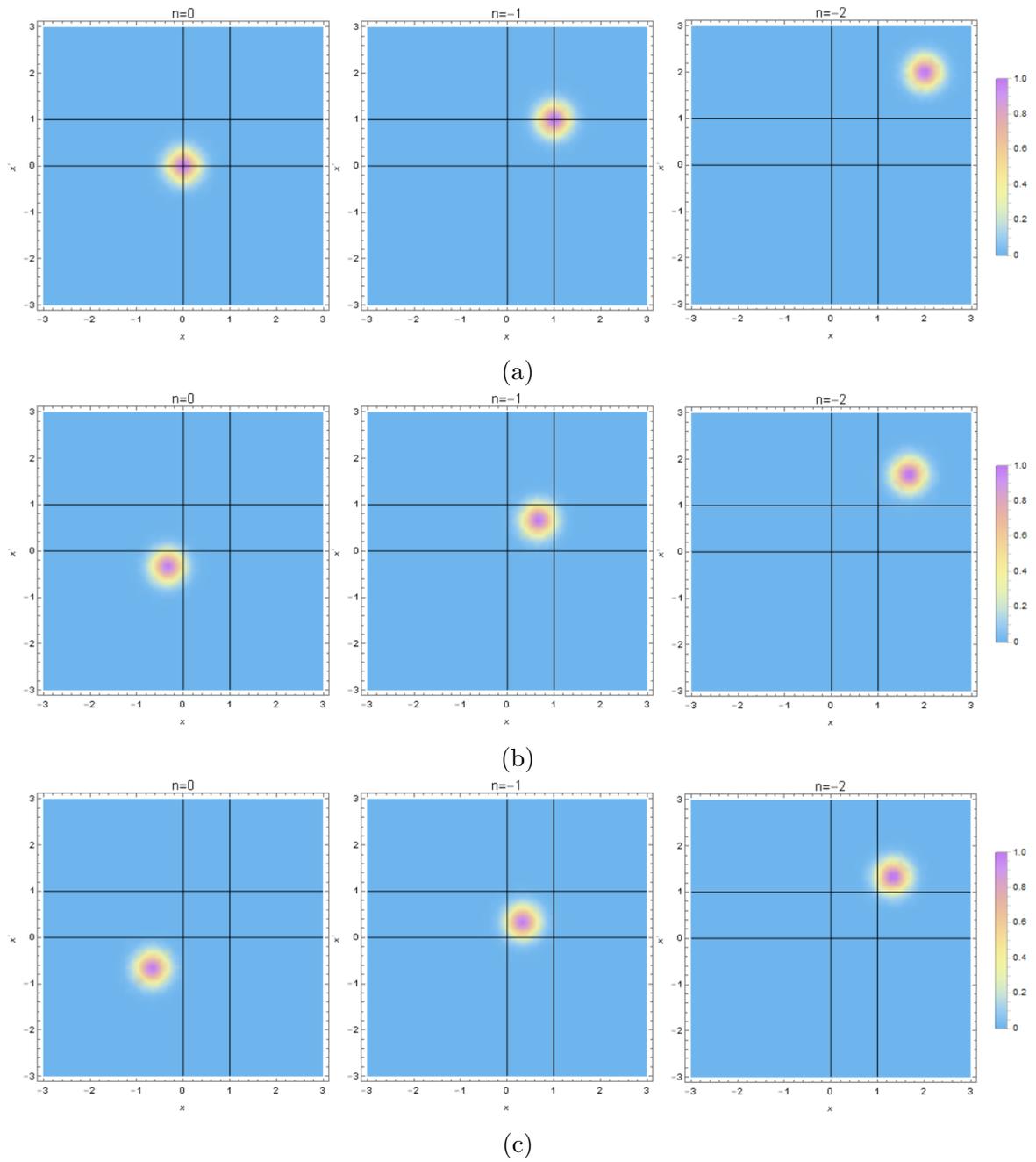


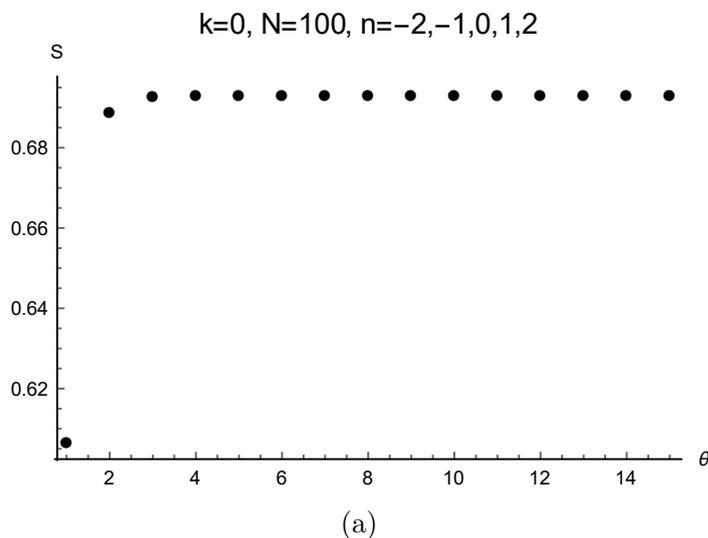
Fig. 8.4 Distribuição da matriz densidade reduzida para  $\theta = 3$ , (a)  $k = 0$ , (b)  $k = 1$ , (c)  $k = 2$  e  $n = 0, -1, -2$ .

Vale ressaltar que, segundo os gráficos da Figura 8.2, a entropia muda para cada valor de  $k$  dentro do espaço de degenerescência. Isso significa que a superposição de estados degenerados do estado fundamental pode levar a valores diferentes de entropia.

Mais especificamente, aparece uma nova simetria no subespaço de estados degenerados, tal que eles podem ser combinados formando estados com entropias distintas.

Cabe, portanto, questionar se é possível associar mais de uma entropia a um estado. Os resultados obtidos mostram que existe uma ambiguidade na determinação da entropia associada ao estado fundamental. Essa ambiguidade está de acordo com aspectos já explorados anteriormente na literatura, como em [1] e [5].

Por fim, é possível explorar a dependência entre  $S$  e  $\theta$ , uma vez fixado um valor para  $k$ . Os gráficos da Figura 8.5 ilustram os casos  $k = 0, 1$  e  $2$ , para  $N = 100$  e soma nos modos  $n = 2, -1, 0, 1, 2$ . Neles é possível ver que a entropia parece convergir com o aumento de  $\theta$ . Em particular, para  $k = 0$ , os valores de entropia obtidos condizem com o discutido anteriormente, isto é,  $S$  de fato parece convergir para  $\ln(2)$ .



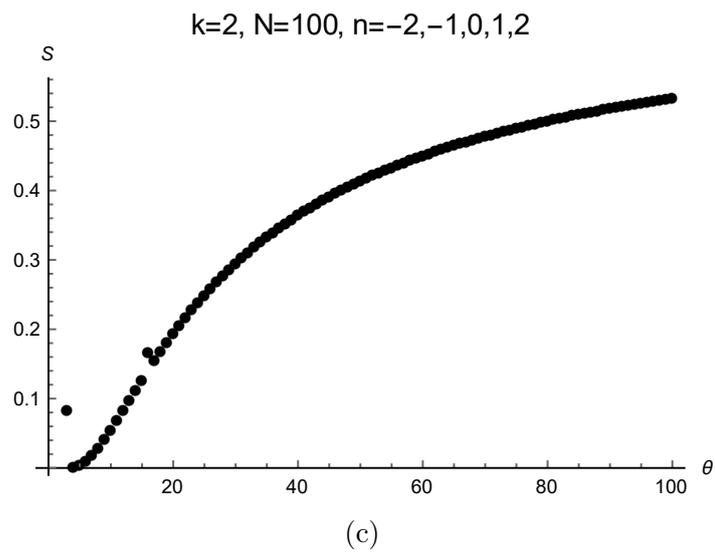
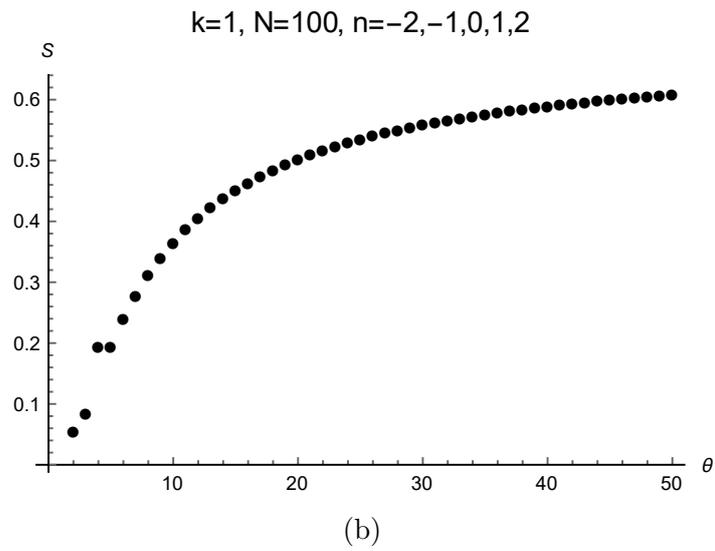


Fig. 8.5 Relação entre  $S$  e  $\theta$  para (a)  $k = 0$ , (b)  $k = 1$  e (c)  $k = 2$ .



# Anexo A

## Soluções de $G(x, x')$

Deseja-se encontrar a função  $G(x, x')$  que satisfaça

$$\partial_x^2 G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (\text{A.1})$$

Para tanto, é necessário impor certas condições de contorno para as soluções. A seguir alguns casos possíveis são explorados.

### A.1 Domínio de $x$ na reta real

Nesse caso, as funções  $G(x, x')$  e  $\delta(x - x')$  são escritas em termos das suas respectivas transformadas de Fourier,

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} G(k) dk \\ \delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk. \end{aligned}$$

Substituindo-as na equação (A.1), obtém-se  $G(k) = -\frac{1}{k^2}$ , tal que

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2} dk,$$

cujas soluções são  $G(x, x') = |x - x'|$ .

## A.2 Domínio de $x$ no intervalo $[0, L)$ e condição de Dirichlet

Nesse caso, impõe-se a condição de contorno de Dirichlet  $G(x = 0, x') = G(x = L, x') = 0$ . O intervalo  $[0, L)$  deve ser dividido em duas regiões. A primeira delas, região I, é o intervalo no qual  $x \leq x'$ . A segunda, região II, o intervalo no qual  $x \geq x'$ . Tem-se então

$$\begin{cases} x < x', & \partial_x^2 G_I(x, x') = 0, \\ x > x', & \partial_x^2 G_{II}(x, x') = 0, \end{cases}$$

com  $G_I(0, x') = G_{II}(L, x') = 0$ .

Além disso, deve-se ter que  $G_I(x', x') = G_{II}(x', x')$  e

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \partial_x^2 G(x, x') dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x - x') dx = \partial_x G(x, x') \Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = 1,$$

ou seja,

$$\partial_x G_{II}(x, x') \Big|_{x=x'} - \partial_x G_I(x, x') \Big|_{x=x'} = 1.$$

As funções  $G_I(x, x')$  e  $G_{II}(x, x')$  que satisfazem essas condições são

$$\begin{cases} G_I(x, x') = \left(\frac{x'}{L} - 1\right) x, & 0 \leq x \leq x', \\ G_{II}(x, x') = \left(\frac{x}{L} - 1\right) x', & x' \leq x < L. \end{cases}$$

## A.3 Domínio de $x$ no círculo e condição periódica

Para resolver o problema com  $x \in [0, 2\pi)$  e condições de contorno periódicas  $G(0, x') = G(2\pi, x')$ , é interessante reescrevê-lo como

$$\begin{cases} \partial_x^2 G(x) = \delta(x), \\ G(0) = G(2\pi). \end{cases}$$

A solução  $G(x)$  e a função  $\delta(x)$  são então escritas em termos de suas respectivas séries de Fourier,

$$G(x) = a_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_k e^{ikx},$$

e

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} e^{ikx}.$$

Substituindo as séries acima na equação  $\partial_x^2 G(x) = \delta(x)$ , obtém-se

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} (ik)^2 a_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} e^{ikx}$$

é possível ver que o problema não tem solução. Isso porque cada modo, caracterizado por  $k$ , é linearmente independente, tal que a equação obtida significaria  $0 = \frac{1}{2\pi}$  para  $k = 0$ .

Para lidar com esse problema, o modo zero é considerado separadamente. Isso significa buscar  $G(x)$  somente para  $k \neq 0$ , satisfazendo

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} (ik)^2 a_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} e^{ikx}.$$

Tem-se então  $a_k = -\frac{1}{2\pi k^2}$ , tal que

$$G(x) = - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{2\pi k^2},$$

e o problema se reduz a calcular a soma infinita.

Para tanto, nota-se que as seguintes manipulações podem ser feitas

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{-e^{ikx}}{2\pi k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-e^{ikx}}{2\pi k^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-ikx}}{k^2} + \frac{e^{ikx}}{k^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left( \text{Li}_2(e^{-ix}) + \text{Li}_2(e^{ix}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2\pi} - x + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

onde  $\text{Li}_2(e^{\pm ix})$  é a função polilogarítmica  $\text{Li}_s(z)$  com  $s = 2$  e  $z = e^{\pm ix}$ , e a seguinte identidade foi usada:

$$\text{Li}_2(z) = -\text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2} \ln^2(z) - \frac{\pi \sqrt{-(z-1)^2}}{z-1} \ln(z) + \frac{\pi^2}{3}.$$

Cabe ressaltar que o problema original estava escrito como  $\partial_x^2 G(x', x'') = \delta(x' - x'')$ , evidenciando que  $G(x', x'')$  deve ser simétrica com relação a  $x'$  e  $x''$ , assim como  $\delta(x' - x'')$ . Porém, a solução

$$G(x) = -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2\pi} - x + \frac{\pi}{3} \right)$$

não é simétrica por paridade. Tal característica se deve ao fato de, ao solucionar o problema, o intervalo de domínio considerado,  $x \in [0, 2\pi)$ , não ser ele próprio simétrico. Isso significa que a solução que deve ser considerada é a mesma encontrada anteriormente, porém transladada por um fator de  $\pi$ , ou seja,

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{(x + \pi)^2}{2\pi} - (x + \pi) + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2\pi} - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Em termos de  $x$  e  $x'$ , tem-se

$$G(x, x') = -\frac{1}{2} \left( \frac{(x - x')^2}{2\pi} - \frac{\pi}{6} \right),$$

para  $k \neq 0$  e  $x \in [-\pi, \pi)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Balachandran, A., de Queiroz, A., and Vaidya, S. (2013a). Entropy of quantum states: ambiguities. *The European Physical Journal Plus*, 128(10):112.
- [2] Balachandran, A., Govindarajan, T., de Queiroz, A. R., and Reyes-Lega, A. (2013b). Algebraic approach to entanglement and entropy. *Physical Review A*, 88(2):022301.
- [3] Balachandran, A., Govindarajan, T., de Queiroz, A. R., and Reyes-Lega, A. (2013c). Entanglement and particle identity: a unifying approach. *Physical review letters*, 110(8):080503.
- [4] Balachandran, A., Marmo, G., Skagerstam, B., and Stern, A. (1991). *Classical topology and quantum states*. World Scientific.
- [5] Balachandran, A., Queiroz, A., and Vaidya, S. (2013d). Quantum entropic ambiguities: Ethylene. *Physical Review D*, 88(2):025001.
- [6] Balachandran, A., Stern, A., and Trahern, G. (1979). Nonlinear models as gauge theories. *Physical Review D*, 19(8):2416.
- [7] Bengtsson, I. (2012). *Constrained Hamiltonian Systems*.
- [8] Bombelli, L., Koul, R. K., Lee, J., and Sorkin, R. D. (1986). Quantum source of entropy for black holes. *Physical Review D*, 34(2):373.
- [9] Chandar, L. and Ercolessi, E. (1994). Inequivalent quantizations of Yang-Mills theory on a cylinder. *Nuclear Physics B*, 426(1):94–106.
- [10] Dirac, P. A. (2013). *Lectures on quantum mechanics*. Courier Corporation.
- [11] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777.
- [12] Esteve, J. (1986). Anomalies in conservation laws in the Hamiltonian formalism. *Physical Review D*, 34(2):674.
- [13] Giles, R. (1981). Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops. *Physical Review D*, 24(8):2160.
- [14] Gupta, K., Henderson, R., Rajeev, S., and Turgut, O. (1994). Yang-Mills theory on a cylinder coupled to point particles. *Journal of Mathematical Physics*, 35(8):3845–3865.

- [15] Henneaux, M. and Teitelboim, C. (1992). *Quantization of gauge systems*. Princeton university press.
- [16] Inomata, A., Kuratsuji, H., and Gerry, C. C. (1992). *Path integrals and coherent states of  $SU(2)$  and  $SU(1, 1)$* . World Scientific.
- [17] Jackiw, R. (1980). Introduction to the Yang-Mills quantum theory. *Reviews of Modern Physics*, 52(4):661.
- [18] Kleinert, H. and Shabanov, S. V. (1997). Proper Dirac quantization of a free particle on a D-dimensional sphere. *Physics Letters A*, 232(5):327–332.
- [19] Langmann, E. and Semenoff, G. W. (1992). Gauge theories on a cylinder. *Physics Letters B*, 296(1-2):117–120.
- [20] Langmann, E. and Semenoff, G. W. (1993). Gribov ambiguity and non-trivial vacuum structure of gauge theories on a cylinder. *Physics Letters B*, 303(3-4):303–307.
- [21] Le Bellac, M. (2011). *Quantum physics*. Cambridge University Press.
- [22] Manton, N. (1985). The Schwinger model and its axial anomaly. *Annals of Physics*, 159(1):220–251.
- [23] Marinov, M. and Terentyev, M. (1979). Dynamics on the group manifold and path integral. *Fortschritte der Physik*, 27(11-12):511–545.
- [24] Morandi, G., Sodano, P., Tagliacozzo, A., and Tognetti, V. (2013). *Field Theories for Low-Dimensional Condensed Matter Systems: Spin Systems and Strongly Correlated Electrons*, volume 131. Springer Science & Business Media.
- [25] Muller-Kirsten, H. J. (2006). *Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral*. World Scientific Publishing Co Inc.
- [26] Rajeev, S. (1988). Yang-Mills theory on a cylinder. *Physics Letters B*, 212(2):203–205.
- [27] Schrödinger, E. (1935). Discussion of probability relations between separated systems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 31, pages 555–563. Cambridge University Press.
- [28] Srednicki, M. (1993). Entropy and area. *Physical Review Letters*, 71(5):666.
- [29] Srednicki, M. (2007). *Quantum field theory*. Cambridge University Press.