

UnB – UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FGA – FACULDADE UnB GAMA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
BIOMÉDICA

COMPARAÇÃO OBJETIVA DE IMAGENS DE RESSONÂNCIA  
MAGNÉTICA USANDO *COMPRESSIVE SENSING* EM DIFERENTES  
ESTRUTURAS DE DECOMPOSIÇÃO MULTINÍVEL

GIAN LUCAS DE OLIVEIRA PAIVA

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA BIOMÉDICA

PUBLICAÇÃO: 072A/2017

BRASÍLIA/DF. AGOSTO 2017



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE UNB GAMA  
ENGENHARIA BIOMÉDICA

"COMPARAÇÃO OBJETIVA DE IMAGENS DE RESSONÂNCIA  
MAGNÉTICA USANDO COMPRESSIVE SENSING EM DIFERENTES  
ESTRUTURAS DE DECOMPOSIÇÃO MULTINÍVEL"

GIAN LUCAS DE OLIVEIRA PAIVA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À FACULDADE UNB GAMA DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA BIOMÉDICA.

APROVADA POR:



---

Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes – FGA / UnB  
(ORIENTADOR)



---

Prof. Dr. Marcus Vinicius Chaffim Costa - FGA / UnB  
(EXAMINADOR INTERNO)



---

Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli – FGA / UnB  
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA, 19 DE JULHO DE 2017

---

Gian Lucas de Oliveira Paiva

Comparação Objetiva de Imagens de Ressonância Magnética usando *Compressive Sensing* em Diferentes Estruturas de Decomposição Multinível/ Gian Lucas de Oliveira Paiva. – Brasília, DF, 2017-

83 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília – UnB  
Faculdade UnB Gama – FGA , 2017.

1. Ressonância Magnética. 2. Compressive Sensing. 3. Reconstrução de imagens. 4. Wavelet Dualtree. I. Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Comparação Objetiva de Imagens de Ressonância Magnética usando *Compressive Sensing* em Diferentes Estruturas de Decomposição Multinível

---

# Agradecimentos

Gostaria primeiro de agradecer a todos os professores do curso de mestrado que me auxiliaram nessa jornada, que me fizeram aprender como nunca antes na minha vida.

Agradeço à minha família por sempre terem me apoiado e auxiliado durante esses anos de estudo.

Agradeço aos professores Marcus Chaffim, Fabiano Soares e Vinícius Rispoli pelas suas grandes contribuições para o meu trabalho.

Agradeço ao meu orientador Cristiano, pelo seu grande apoio na minha vida acadêmica, desde a graduação até o mestrado. Sem você, com certeza eu não chegaria aqui. Obrigado por sempre acreditar em mim.

Agradeço à Sara, minha *voslyublennaya*, que me confortou nos períodos mais difíceis e sempre me fez acreditar que tudo ia dar certo no final.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa por financiarem o meu trabalho.

"Dört-on kiři olar kançaar?  
Dörtle biske kayın ceder"

*"O que são quarenta contra nós?  
Eles não aguentarão contra os quatro de nós"*

*(Kaigal-ool Khovalyg).*

# Resumo

## COMPARAÇÃO OBJETIVA DE IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA USANDO COMPRESSIVE SENSING EM DIFERENTES ESTRUTURAS DE DECOMPOSIÇÃO MULTINÍVEL

**Autor:** GIAN LUCAS DE OLIVEIRA PAIVA

**Orientador:** Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Biomédica - Dissertação de Mestrado  
Brasília/DF. 2017**

O imageamento por ressonância magnética (RM) constitui uma das várias modalidades de imagens médicas utilizadas para diagnóstico, acompanhamento de doenças e planejamento de tratamentos. Ela é capaz de produzir imagens com melhor contraste, além de não emitir radiação ionizante, o que a torna uma escolha atraente para exames. Entretanto, seu maior custo e tempo de exame dificultam o seu uso de maneira mais generalizada. Reduzir o tempo de exame tem se tornado um importante tema de pesquisa na área de processamento de sinais nos últimos anos. *Compressive Sensing* é uma técnica que tem sido utilizada em vários estudos de ressonância magnética. O seu uso com transformadas esparsificantes abre uma grande variedade de possibilidades com o uso de filtros sobre as informações da imagem. Transformadas comuns utilizadas em ressonância magnética e *compressive sensing* são as *wavelets*. Um tipo de *wavelet* pouco explorado em ressonância magnética é a transformada *wavelet dualtree*, que possui algumas vantagens sobre a *wavelet* comum. Neste trabalho é feita a hipótese de que a transformada *wavelet dualtree* é superior às transformadas *wavelet* comuns pela possibilidade de esparsificar melhor, devido a maior seletividade de direções para imagens. Foram utilizados bancos de filtros para implementação das transformadas e também como método de reconstrução das imagens pré-filtradas, reconstruídas por *compressive sensing*. O banco de filtros foi comparado com o método de recomposição espectral usando métricas de qualidade objetiva (SNR e SSIM). Os métodos também foram comparados em relação ao tempo de reconstrução. Filtros de diferentes tipos e famílias foram comparados entre si, utilizando banco de filtros como método de reconstrução. Um conjunto de 73 imagens de cabeça foi utilizado para avaliar estatisticamente os resultados, para verificar se a diferença na qualidade das imagens por filtros diferentes é estatisticamente significativa. Os resultados indicaram que, para os filtros de Haar, o método de recomposição espectral foi superior ao método do banco de filtros, com diferenças entre valores da SNR chegando a 14 dB e 0.1 para o SSIM para uma mesma imagem, em um nível. O filtro dtf4 em dois níveis obteve qualidade semelhantes para ambos os métodos de banco de filtros e a recomposição espectral. Foi

observado que o banco de filtros obteve uma melhora na qualidade com o aumento de níveis de decomposição, enquanto a recomposição espectral foi quase insensível ao aumento de níveis, apresentando apenas uma ligeira melhora na qualidade do primeiro nível para o segundo. A comparação objetiva entre diferentes filtros, utilizando o banco de filtros como método de reconstrução, mostrou que os quatro filtros *dualtree*, em todos os casos, obtiveram resultados significativamente melhores que os outros filtros *wavelet*, com valores médios de SNR até 3 dB maiores que os outros filtros. A família de filtros *coiflets* apresentou, na média, resultados próximos aos dos filtros *dualtree*. Os filtros biortogonais reversos 3.1 e 3.3 apresentaram os piores resultados, seguidos dos filtros Daubechies/*symlet* 1 e 2, biortogonal e biortogonal reverso 1.1 e 1.5. Os tempos de recomposição para o banco de filtros foram menores que os tempos da recomposição espectral, chegando a ser 30 vezes menores, embora esse tempo seja praticamente desprezível em relação ao tempo total de reconstrução da imagem. Concluiu-se que o método do banco de filtros, utilizando os filtros *dualtree*, permite a reconstrução de imagens com qualidade semelhante ao do método de recomposição espectral, com tempos menores de recomposição e utilizando a mesma quantidade de informação. Os filtros *dualtree* também se mostraram superiores aos filtros *wavelet* comuns para o uso com banco de filtros.

**Palavras-chave:** Ressonância Magnética. Reconstrução de Imagens. Compressive Sensing. Wavelets. DT-CWT.

# Abstract

## OBJECTIVE COMPARISON OF MAGNETIC RESONANCE IMAGES USING COMPRESSIVE SENSING IN DIFFERENT MULTILEVEL DECOMPOSITION STRUCTURES

**Author:** GIAN LUCAS DE OLIVEIRA PAIVA

**Advisor:** Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso

**Post-Graduation Program in Biomedical Engineering - Masters Dissertation**

**Brasília/DF. 2017**

Magnetic resonance imaging (MRI) is one of several medical imaging modalities used for diagnosis, disease monitoring and treatment planning. It is able to produce images with better contrast, besides not emitting ionizing radiation, which makes it an attractive choice for exams. However, its higher cost and time of examination make it more difficult to use. Reducing exam time has become an important research topic in the area of signal processing in recent years. Compressive sensing is a technique that has been used in several magnetic resonance studies. Its use with sparse transforms opens a wide range of possibilities with the use of filters over the image information. Common transforms used in magnetic resonance imaging and compressive sensing are the wavelets. A type of wavelet not thoroughly explored on MRI is the dualtree wavelet transform, which has some advantages over the common wavelet. In this work, it is hypothesized that the dualtree wavelet transform is superior to the ordinary wavelets due to the possibility of better scattering, thanks to its greater directionalities for images. Filter banks were used to implement the transforms and also as a method of reconstructing the prefiltered images, recovered by compressive sensing. The filter bank was compared to the spectral recomposition method using objective quality metrics (SNR and SSIM). The methods were also compared to in relation to the reconstruction time. Filters of different types and families were compared to each other, using filter bank as reconstruction method. A set of 73 MRI head imaged was used to statistically evaluate the results, to verify if the difference in the image quality recovered using different filters is statistically significant. The results indicated that, for the Haar filters, the spectral recomposition method was superior to the filter bank method, with differences between SNR values reaching up to 14 dB and 0.1 for SSIM for the same image at one level of decomposition. The two-level decomposition dtf4 filter obtained similar quality for both filterbank methods and spectral recomposition. It was observed that the filter bank obtained an improvement in quality with increasing decomposition levels, while the spectral recomposition was almost insensitive to the increase of levels, presenting only a slight improvement in quality from the first level to the sec-

ond. The objective comparison of different filters using the filter bank as a reconstruction method showed that the four dualtree filters, in all cases, obtained significantly better results than the other wavelet filters with mean values of SNR up to 3 dB higher than the other filters. The coiflet family of filters presented, on average, results close to the dualtree filters. The reverse biorthogonal filters 3.1 and 3.3 had the worst results, followed by the Haar filter and reverse biorthogonal filters 1.3 and 1.5. The recomposition times for the filter bank were smaller than that of spectral recomposition, being up to 30 times faster. although this times is negligible in relatino to the total times of reconstruction of the image. It was concluded that the filter bank method, using the dualtree filters, allows the reconstruction of images with similar quality to the spectral recomposition, with smaller recomposition times and using the same amount of information. The dualtree filters were also shown to be superior to the common wavelet filters using filter bank.

**Key-words:** Magnetic Resonance. Image Reconstruction. Compressive Sensing. Wavelets. Dualtree

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Soluções da Equação de Bloch, com a componente (a) real e (b) imaginária [1]. . . . .	23
Figura 2 – Trajetória da magnetização $\mathbf{M}$ ao ser aplicado um campo de RF, indicado por $\mathbf{B}_1$ . A magnetização realiza um movimento de precessão ao longo do eixo $z$ [2]. . . . .	24
Figura 3 – Retorno à magnetização de equilíbrio do campo longitudinal após a perturbação do campo de RF [1]. . . . .	24
Figura 4 – Exemplo simplificado da sequência de pulsos do imageamento eco-planar. . . . .	27
Figura 5 – Trajetória aproximada no espaço $\mathbf{k}$ para a sequência de pulsos da Figura 4. . . . .	27
Figura 6 – Sequência de pulsos aproximada para linhas radiais. Entre cada pulso de RF, uma linha radial é amostrada. Note as diferentes áreas sob as curvas dos gradientes em cada pulso. . . . .	28
Figura 7 – Trajetória aproximada no espaço $\mathbf{b}$ para linhas radiais. . . . .	28
Figura 8 – Operações sobre a senoide discreta (a) de (b) sobreamostragem e (c) subamostragem, com $L$ e $M$ iguais a 2 . . . . .	30
Figura 9 – Estrutura básica de banco de filtros <i>wavelet</i> . . . . .	32
Figura 10 – Estrutura de banco de filtros <i>wavelet</i> em dois níveis . . . . .	32
Figura 11 – Estrutura básica de banco de filtros <i>wavelet</i> 2D . . . . .	35
Figura 12 – Exemplo de decomposição <i>wavelet</i> 2D em (a) 1 nível e (b) 2 níveis, utilizando o filtro <i>coiflet</i> 1 . . . . .	35
Figura 13 – Decomposição em três níveis da transformada <i>wavelet</i> . . . . .	36
Figura 14 – Banco de filtros iterado de 3 níveis . . . . .	36
Figura 15 – As (a) seis orientações da DT-CWT e as (b) três orientações da DWT. Note a maior ambiguidade na terceira direção em (b) . . . . .	38
Figura 16 – Banco de filtros <i>dualtree</i> em três níveis . . . . .	40
Figura 17 – Representação da solução da minimização da norma $L_2$ de um sinal bidimensional . . . . .	45
Figura 18 – Representação da solução da minimização da norma $L_1$ de um sinal bidimensional . . . . .	45
Figura 19 – Representação da solução da minimização da norma $L_p$ de um sinal bidimensional, com $p = 0.4$ . . . . .	46
Figura 20 – Fantoma 256x256 recuperado com 50 linhas utilizando solução de energia mínima usando o filtro biortogonal 4.4 com três níveis. . . . .	50
Figura 21 – Fantoma 256x256 recuperado com 50 linhas utilizando minimização da norma $L_1$ por <i>compressive sensing</i> usando o filtro biortogonal 4.4 com três níveis. . . . .	51

Figura 22 – Aproximação em linhas radiais do espaço $\mathbf{k}$ em um plano cartesiano, com (a) 30 linhas e (b) 90 linhas radiais. . . . .	52
Figura 23 – Estrutura do banco de filtros de análise, precedidos do estágio de amostragem e preparação de medidas da imagem de ressonância magnética .	53
Figura 24 – Banco de filtros de síntese que sucedem a fase de otimização. A adição das medidas originais à imagem reconstruída é representada por $b$ . . .	54
Figura 25 – Correspondência das regiões da imagem de resultados com os filtros. Cada linha cinza delimita onde o resultado de uma família de filtros começa e outro se inicia . . . . .	57
Figura 26 – Cores utilizadas para separar as diferentes famílias de <i>wavelets</i> . As cores azul, verde, ciano, vermelha, magenta, amarela e branca representam as <i>wavelets</i> biortogonais, <i>coiflets</i> , Daubechies, Meyer, <i>dualtree</i> , biortogonais reversas e <i>symlets</i> , respectivamente. . . . .	58
Figura 27 – Gráfico da SNR em função das linhas radiais para o filtro dtf4 em dois níveis . . . . .	59
Figura 28 – Gráfico da SSIM em função de linhas radiais para o filtro dtf4 em dois níveis . . . . .	59
Figura 29 – Gráfico da SNR em função de linhas radiais para o filtro de Haar em um nível . . . . .	60
Figura 30 – Gráfico da SSIM em função de linhas radiais para o filtro de Haar em um nível . . . . .	60
Figura 31 – Imagens reconstruídas com (a) banco de filtros e (b) recomposição espectral, utilizando 100 linhas radiais e o filtro de Haar. . . . .	61
Figura 32 – Imagens com valores de $p$ com base na (a) SNR e (b) SSIM, para os 130 filtros testados, reconstruídos com um nível do banco de filtros . .	63
Figura 33 – Imagens com valores de $p$ com base na (a) SNR e (b) SSIM, para os 130 filtros testados, reconstruídos com dois níveis do banco de filtros .	65
Figura 34 – Imagens com valores de $p$ com base na (a) SNR e (b) SSIM, para os 130 filtros testados, reconstruídos com três níveis do banco de filtros . .	67
Figura 35 – Espectro 2D em três níveis dos filtros (a) biortogonal reverso 3.1 e (b) 3.3. Cada tom de cinza indica a cobertura do espectro para cada nível da transformada. Branco indica o 1º, cinza claro indica o 1º e 2º nível, e cinza escuro indica os três níveis . . . . .	69
Figura 36 – Espectro 2D em três níveis do filtro dtf1. O filtro da árvore superior é representado por (a), enquanto que o filtro da árvore inferior é representado por (b). Cada tom de cinza indica a cobertura do espectro para cada nível da transformada. Branco indica o 1º, cinza claro indica o 1º e 2º nível, e cinza escuro indica os três níveis . . . . .	70

Figura 37 – Valores médios de (a) SNR e (b) SSIM obtidos para as 73 imagens para os 130 filtros. Cada ponto representa um filtro. As divisões horizontais do gráfico representam famílias de filtros . . . . . 71

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores de SNR e SSIM para uma mesma imagem utilizando o filtro dft1 em vários níveis . . . . .	61
Tabela 2 – Ordem de posições dos número de ocorrências de valores de $p$ menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SNR e um nível do banco de filtros . . . . .	64
Tabela 3 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de $p$ menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SNR e dois níveis do banco de filtros . . . . .	66
Tabela 4 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de $p$ menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SSIM e dois níveis do banco de filtros . . . . .	66
Tabela 5 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de $p$ menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SNR e três níveis do banco de filtros . . . . .	68
Tabela 6 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de $p$ menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SSIM e três níveis do banco de filtros . . . . .	68
Tabela 7 – Valores médios (em segundos) dos tempos de reconstrução para o método de banco de filtros e recomposição espectral utilizando o filtro dft1 com 1, 2 e 3 níveis. . . . .	72

# Lista de abreviaturas e siglas

RM	Ressonância magnética
CT	Tomografia Computadorizada
PET-CT	Tomografia Computadorizada por Emissão de Pósitrons
TV	Variação Total
RF	Radiofrequência
DWT	Transformada <i>wavelet</i> discreta
CWT	Transformada <i>wavelet</i> complexa
DT-CWT	Transformada <i>wavelet</i> complexa <i>dualtree</i>
IRLS	<i>Iteratively Reweighted Least Squares</i>
bior	Família <i>wavelet</i> de filtros biortogonais
coif	Família <i>wavelet</i> de <i>coiflets</i>
db	Família dos filtros de <i>Daubechies</i>
dmey	Filtro discreto de Meyer
dtf	Filtro <i>wavelet dualtree</i> com o filtro de Farras para o primeiro nível e os filtros <i>q-shift</i> de Kingsbury para os níveis subsequentes
rbio	Família <i>wavelet</i> de filtros biortogonais reversos
sym	Família <i>wavelet</i> de <i>symlets</i>
SNR	Relação sinal-ruído
SSIM	Índice de Similaridade Estrutural

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização e Problematização</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>20</b>
1.2.1	Objetivo Geral	20
1.2.2	Objetivos Específicos	20
<b>1.3</b>	<b>Justificativa</b>	<b>21</b>
<b>1.4</b>	<b>Estrutura da dissertação</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>22</b>
<b>2.1</b>	<b>Princípios de Ressonância Magnética</b>	<b>22</b>
2.1.1	Sinais de RM	22
2.1.2	Codificação Espacial e o espaço $k$	25
2.1.3	Sequência de Pulsos e Amostragem de Dados	26
<b>2.2</b>	<b>Transformada <i>Wavelet</i></b>	<b>28</b>
2.2.1	Subamostragem e sobreamostragem	29
2.2.2	Banco de Filtros <i>Wavelet</i>	31
2.2.3	Transformada <i>Wavelet</i> 2D	34
2.2.4	Iteração dos Filtros na DWT	35
2.2.5	Famílias de Filtros <i>Wavelets</i>	36
<b>2.3</b>	<b>Transformada <i>Wavelet Dualtree</i></b>	<b>37</b>
2.3.1	Transformada <i>Dualtree</i> 2D	42
<b>2.4</b>	<b><i>Compressive Sensing</i></b>	<b>43</b>
2.4.1	<i>Compressive sensing</i> com Pré-Filtragem	47
2.4.2	Algoritmos de Otimização	47
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>52</b>
<b>3.1</b>	<b>Metodologia de Desenvolvimento</b>	<b>52</b>
3.1.1	Processo de amostragem do espaço $k$	52
3.1.2	Banco de filtros de análise	53
3.1.3	Processos de recomposição da imagem	53
3.1.3.1	Banco de filtros de síntese	53
3.1.3.2	Recomposição espectral	54
<b>3.2</b>	<b>Metodologia Experimental</b>	<b>54</b>
3.2.1	Teste de qualidade objetiva das imagens	55
3.2.2	Teste da qualidade objetiva por diferentes filtros	55
<b>3.3</b>	<b>Metodologia de Análise</b>	<b>56</b>

3.3.1	Análise da qualidade objetiva das imagens . . . . .	56
3.3.1.1	Testes de hipóteses para qualidade de reconstrução dos filtros . . . . .	57
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>4.1</b>	<b>Comparação de qualidade objetiva entre diferentes métodos de re- construção . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>4.2</b>	<b>Comparação de qualidade objetiva entre diferentes filtros . . . . .</b>	<b>62</b>
4.2.1	Resultados estatísticos para a decomposição em um nível . . . . .	62
4.2.2	Resultados estatísticos para a decomposição em dois níveis . . . . .	64
4.2.3	Resultados estatísticos para a decomposição em três níveis . . . . .	67
4.2.4	Valores médios de SNR e SSIM . . . . .	70
<b>4.3</b>	<b>Tempos de reconstruções das imagens . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>75</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE A – LISTA ORDENADA DOS FILTROS UTILIZADOS . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE B – IDENTIFICAÇÃO DAS IMAGENS DO BIRN UTI- LIZADAS NO TRABALHO . . . . .</b>	<b>83</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização e Problematização

O imageamento de ressonância magnética, ou RM, constitui um dos métodos de maior relevância em diagnóstico, planejamento de tratamentos e acompanhamentos de doenças. Além disso, representa o método de imageamento de maior contraste dentre todas as modalidades utilizadas clinicamente [3]. Sua natureza não invasiva e sem emissão de raios ionizantes lhe dá vantagens sobre outros métodos de imageamento para visualização de tecidos internos, como raios-X e tomografia computadorizada (CT, do inglês, *computed tomography*) [4].

A radiação ionizante usada por estes exames, principalmente pela CT, não pode ser ignorada. Estudos mostram que a realização de CT podem aumentar o risco do surgimento de câncer em 1%. Esse mesmo estudo também mostrou que haverá um novo caso de tumor maligno para cada 4000 exames de CT de cabeça (com doses de 40 mSv por exame), e que o risco estimado 10 anos após o exame é de um tumor para cada 10000 pacientes que receberam mais de 10 mGy <sup>1</sup> com menos de 10 anos de idade [5].

A dose em um exame de CT pode variar dependendo do tamanho região escaneada e do tipo de técnica utilizada. Para a cabeça, valores típicos variam entre 2 e 6 mSv [6]. Esses valores podem aumentar até 7,5 mSv caso o exame seja feito utilizando uma PET/CT [7], ou tomografia computadorizada por emissão de pósitrons. Ela aplica uma dose de radiação maior pois é necessária a injeção de um radioisótopo no paciente [8].

Para colocar os valores de doses recebidas em perspectiva, em abril de 2011, os valores médios de doses de radiação na cidade de Fukushima (onde ocorreu um acidente em uma usina nuclear com vazamento de material radioativo em março de 2011) eram de 2,74  $\mu$ Sv por hora [9]. Um exame de CT em que o paciente receba uma dose de 2 mSv equivale a passar cerca de 730 horas na cidade (ou 30 dias) em um lugar considerado perigoso para a vida humana.

Mesmo assim, a CT é importante no diagnóstico de doenças e faz parte de um importante conjunto de imageamento médico para auxiliar o diagnóstico e realizar o acompanhamento de doenças crônicas, como o câncer. Outros exames são ecografias, ressonância magnética e mamografias. No Brasil, esses exames possuem demanda alta e acabam criando filas de espera onde os pacientes demoram a ser atendidos. Na cidade

<sup>1</sup> Ambos o sievert (Sv) e o gray (Gy) são unidades do SI de dose de radiação, com a dimensão de J/Kg. A diferença entre os dois é que o gray representa uma medida crua ou bruta de radiação, sem levar em consideração os efeitos no corpo, enquanto que o sievert leva em consideração a dose realmente absorvida com base nos potenciais problemas que podem ser causados pela radiação.

de Novo Hamburgo (RS), durante o três primeiros meses de 2016, 3452 ecografias, 2538 tomografias, 780 ressonâncias magnéticas e 1645 mamografias não foram atendidas, para um total de 27659, 5810, 1648 e 4996 exames realizados, respectivamente. Portanto, 11% das ecografias, 30% das tomografias, 32% das ressonâncias e 24% das mamografias que foram solicitadas não foram atendidas [10]. No caso de Novo Hamburgo, exames de tomografia demoram, em média, 5 meses para serem atendidos. Esse tempo de espera não é desejável para quem busca tratamento, principalmente se a doença demandar urgência, como o câncer. Desde o tempo de solicitação do exame até a sua realização e, por fim, o retorno ao médico especialista, esse tempo de espera pode facilmente demorar mais de um ano no sistema público de saúde brasileiro [11, 12].

Tendo em vista o número de exames de CT realizados e os potenciais casos de câncer que podem surgir, pode ser benéfico substituí-los pelo exame de RM. A RM gera imagens de melhor qualidade sem emitir radiação ionizante. O compromisso nesse caso diz respeito ao maior custo e tempo de exame. Com base nisso, um importante objetivo é aumentar o número de exames de RM. Uma das maneiras é diminuir o tempo do exame. O exame de ressonância magnética é notório por seu tempo elevado de exame, levando entre 25 e 40 minutos para cada exame. Se forem realizados, digamos, 10 exames em uma máquina por dia e se fosse possível reduzir o tempo de exame em apenas 5 minutos, a máquina poderia realizar um ou dois exames a mais por dia, aumentando o número de pacientes atendidos e reduzindo o tempo de espera. Outro benefício ao se reduzir o tempo do exame (ou tempo de aquisição dos sinais) é torná-lo mais suportável. Algumas pessoas podem sentir incômodo ao ficar imóveis por longos períodos ou mesmo serem claustrofóbicas, impedindo a realização do exame sem algum tipo de sedativo ou sem os tradicionais escâneres em forma de cilindro [13, 14].

A redução do tempo de exame é um foco nos estudos sobre ressonância magnética na área de processamento de sinais. Várias técnicas foram desenvolvidas para a redução do tempo de aquisição de dados de RM. A mais proeminente destas é uma técnica de processamento de sinais desenvolvida a partir de 2005, chamada *Compressed Sensing* (ou *compressive sensing*) [15], que permite a reconstrução de sinais com taxas de amostragem menores que a taxa de Nyquist sob duas condições específicas: o sinal deve ser esparso (a maior parte de seus valores deve ser nula) em um domínio de transformação conhecido e os artefatos da reconstrução causados pela subamostragem do espaço  $\mathbf{k}$  devem ser incoerentes (parecidos com ruído). As imagens de RM satisfazem essas duas condições [16, 17], o que permite que as imagens sejam reconstruídas através do espaço  $\mathbf{k}$ . O espaço  $\mathbf{k}$  é a transformada de Fourier (altamente subamostrada) da imagem a ser reconstruída. Este espaço são as medidas do aparelho (ou escâner) de RM, cuja forma de aquisição depende do aparelho ou fabricante.

Nos últimos anos, foram feitos vários estudos na área de reconstrução de imagens

de ressonância magnética, seja para melhorar a qualidade da imagem, seja para reduzir o tempo de aquisição dos dados ou ainda para reduzir o tempo de reconstrução das imagens. Em [18], é feita uma codificação *wavelet* para determinar os pulsos de radio-frequência (RF) dados pela máquina, de modo a reduzir a constante da propriedade de isometria restrita (RIP, do inglês, *restricted isometry property*), diminuindo o número de medidas necessárias para a reconstrução. Em [19], *noiselets* são utilizadas como matrizes de transformação e codificação para melhorar a incoerência e a propriedade da isometria restrita. Isso gerou uma melhora na preservação da resolução da imagem em relação a transformação codificada por Fourier. Também foi demonstrado que a codificação por *Noiselets* é possível, ao codificar a sequência de pulsos de RF com as *Noiselets* propostas.

Esses últimos trabalhos citados visaram planejar a forma da sequência dos pulsos de RF, o que pode não ser prático: o escâner gera como resultado apenas o espaço  $\mathbf{k}$ . A forma que a máquina obtém esse resultado pode variar com o modelo e marca do aparelho. Outros trabalhos visaram melhorar o tempo de processamento do algoritmo de reconstrução, como feito em [20], no qual são desenvolvidos algoritmos de reconstrução de RM baseados em transformadas de *wavelet*. Além disso, o algoritmo desenvolvido pode ser ajustado de acordo com a trajetória de amostra do espaço  $\mathbf{k}$ . *Wavelets*, que são comumente utilizadas como transformada esparsificante, já foram utilizadas em outras formas, como na sua forma complexa [21] em vez da transformada *wavelet*. Essa aplicação permitiu a criação de um algoritmo mais eficiente, além de evitar problemas de singularidades com a transformada discreta de *wavelet*, como artefatos do fenômeno de Gibbs que podem aparecer nas bordas da imagem. Outro trabalho com *wavelets* é feito em [3], no qual a qualidade da imagem de RM é melhorada em similaridade estrutural com base na avaliação por radiologistas.

Tendo visto que *wavelets* e bancos de filtros já foram utilizados de forma bem sucedida em aplicações de RM, e que reconstrução de imagens de ressonância ainda é um tema que é abordado das mais diversas maneiras, a proposta desse trabalho é o uso de banco de filtros *wavelet* para realizar uma filtragem no domínio de medidas (espaço  $\mathbf{k}$ ) para recuperar versões pré-filtradas da imagem completa. Um trabalho semelhante foi feito em [22] e [17], no qual foram usadas três esquemas para uma filtragem indireta da imagem ainda no espaço  $\mathbf{k}$  e minimização de  $L_p$ . Foi relatada uma melhora na qualidade visual da imagem (com base na relação sinal ruído, SNR) em relação aos métodos clássicos como TV (do inglês *total variation*) e retroprojeção filtrada, utilizando uma composição espectral para recompor as diferentes versões filtradas.

Houve um trabalho que utilizou pré-filtragem com ressonância magnética, que teve por objetivo avaliar reconstruções de imagens de RM com amostragens contínuas da transformada de Fourier fora do plano (ou grade) cartesiano. Com o uso de computação paralela em GPU (do inglês *graphics processing unit*), foi relatada uma redução de até

85,5% no tempo de reconstrução, sem redução significativa na qualidade de imagem [23].

O novo método proposto parte do mesmo princípio de pré-filtragem. Entretanto, serão utilizados diferentes tipos de filtros e uso de banco de filtros de síntese para recompor a imagem, numa tentativa de tentar reduzir a quantidade de informação necessária para reconstruir imagens de boa qualidade. Serão também utilizados os diferentes filtros com métodos clássicos, para investigar as características do filtro que permitem reconstruções de melhor qualidade. Os novos filtros propostos são filtros da transformada complexa de *wavelet*, que tem visto novas aplicações em processamento de imagens, como em reconhecimento de padrões [24], remoção de ruídos [25] e engenharia biomédica [26, 27].

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

O trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um sistema de reconstrução de imagens de RM usando banco de filtros *wavelet* (em diferentes níveis) como método de recomposição e pré-filtragem no domínio da frequência (espaço  $\mathbf{k}$ ), com o intuito de reduzir a quantidade de informação necessária para reconstruir imagens com a mesma qualidade gerada por métodos clássicos. A principal hipótese é que as imagens filtradas com filtros *dualtree* possuam melhor qualidade de imagem.

A reconstrução de cada versão filtrada será feita utilizando *compressive sensing* e serão utilizados vários tipos de filtros *wavelet* (em diferentes níveis) na pré-filtragem, assim como diferentes métodos de recomposição usando tais filtros. Os resultados serão comparados em relação aos tipos de filtros utilizados, qualidade da imagem reconstruída e tempo de processamento de cada método de recomposição.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Desenvolvimento de algoritmos para a realização da pré-filtragem no domínio da frequência utilizando a transformada *wavelet* (em vários níveis)
- Adaptação do uso das técnicas de *compressive sensing* para a reconstrução das versões pré-filtradas geradas pela transformada *wavelet*
- Desenvolvimento de algoritmos para a recomposição das imagens (banco de filtros de síntese)
- Análise e avaliação das técnicas e métodos de recomposição, utilizando diferentes tipos de filtros em vários níveis, para cada caso
- Comparação dos resultados utilizando métodos estatísticos

## 1.3 Justificativa

Quanto menor o número de medidas necessário para se reconstruir a imagem de RM, menor o tempo do exame. Isso possui alguns benefícios, como redução do custo do exame, maior conforto para os pacientes e o mais importante: maior número de realizações de exames. Realizando mais exames, a demanda reprimida seria reduzida e os pacientes poderiam se sentir mais seguros quanto ao início mais rápido do tratamento de uma doença que pode ser potencialmente perigosa, como o câncer.

O uso de *wavelets dualtree* em vários níveis associadas à pré-filtragem também não foi encontrada em áreas relacionadas à reconstrução de imagens de RM. Esse estudo pode abrir novos estudos para projetos de filtros que possam esparsificar melhor imagens de ressonância magnética.

## 1.4 Estrutura da dissertação

No capítulo 2 é feita uma revisão teórica sobre os temas de ressonância magnética, transformada *wavelet* e *compressive sensing*, que são os tópicos teóricos mais importantes para a criação deste trabalho. Será feita uma breve introdução sobre imageamento por ressonância magnética, levando em consideração apenas os aspectos importantes para o desenvolvimento do sistema proposto. Na parte de transformada *wavelet*, serão explicados os conceitos mais básicos até transformada *wavelet dualtree*, que é uma abordagem relativamente nova em bancos de filtros. E por fim, são abordados conceitos básicos sobre *compressive sensing* e pré-filtragem para imageamento por ressonância magnética.

A Metodologia do trabalho é descrita no capítulo 3. Na seção de Metodologia de Desenvolvimento são descritos os códigos e programas criados para a realização dos experimentos, assim como as estruturas de reconstrução da imagem. Na Metodologia Experimental são descritos os procedimentos realizados com os programas desenvolvidos, como a obtenção da simulação do espaço  $k$ , a reconstrução de um conjunto de imagens com os filtros, com número fixo de linhas radiais e a reconstrução de uma imagem, com métodos distintos e diferentes números de linhas radiais. Por fim, a Metodologia de Análise descreve como testes estatísticos são utilizados para determinar quais filtros permitem a reconstrução de imagens de melhor qualidade.

O capítulo 4 contém os Resultados e discussões acerca da qualidade das reconstruções dos filtros, enfatizando as diferenças entre as transformadas *wavelet dualtree* e separável, assim como diferenças no tempo de reconstrução entre os métodos de banco de filtros e recomposição espectral.

## 2 Fundamentação teórica

Este capítulo aborda os tópicos utilizados para o desenvolvimento da técnica de reconstrução de imagens proposta, como princípios de ressonância magnética, transformada de *wavelets* (separável e *dualtree*), otimização por *compressive sensing* e métricas estruturais para avaliação da qualidade de imagens.

### 2.1 Princípios de Ressonância Magnética

O imageamento por ressonância magnética [1, 2, 28] é uma modalidade de imagens médicas que se destaca em relação a exames semelhantes, como tomografia computadorizada, por gerar imagens de qualidade superior sem submeter o paciente à radiação ionizante. Em vez de medir a atenuação de um sinal de raios-X projetados em vários ângulos diferentes, como é o caso da retroprojeção filtrada em CT, a RM utiliza da propriedade magnética dos átomos de hidrogênio para obter informação sobre os tecidos. Devido a isso, o processo de RM é mais complexo.

#### 2.1.1 Sinais de RM

Para gerar as imagens de RM, é utilizado um forte campo magnético estático uniforme  $\mathbf{B}_0$  sobre um volume do corpo de um sujeito. Esse campo magnético alinha os vários momentos magnéticos  $\mu$ , ou *spins*, dos átomos de hidrogênio, que se originam dos vários tecidos do corpo que contém água. As combinações dos momentos magnéticos criam um momento magnético macroscópico  $\mathbf{M}$ , chamado de magnetização. Um segundo campo magnético circular de polarização  $\mathbf{B}_1$  é aplicado perpendicularmente a  $\mathbf{B}_0$ .  $\mathbf{B}_1$  também é chamado de campo de radiofrequência (RF). Isso faz com que o vetor de magnetização  $\mathbf{M}$  seja deslocado em um plano transversal a  $\mathbf{B}_0$ , realizando um movimento de precessão em torno de  $\mathbf{B}_0$  com uma frequência de

$$\omega_0 = \gamma B_0, \quad (2.1)$$

chamada *Frequência de Larmor*. Desta forma, o vetor de magnetização pode induzir tensão elétrica em uma bobina.  $\mathbf{M}$  pode ser descrito pelas *Equações de Bloch*, que são [1, 2]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} - \frac{M_{xy}}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1}, \quad (2.2)$$

em que  $\gamma$  é a razão giromagnética,  $\mathbf{B}$  é o campo magnético efetivo,  $M_0$  é a magnetização de equilíbrio e  $T_1$  e  $T_2$  são os chamados *tempos de relaxação* das componentes  $M_z$  (magnetização longitudinal) e  $M_{xy}$  (magnetização transversal), respectivamente.

A Equação 2.2 é um conjunto de equações diferenciais que podem ser resolvidas para condições iniciais adequadas, de modo a descrever as magnetizações de  $M_{xy}$  e  $M_z$ . Suponha que um pulso de RF foi aplicado (de duração menor do que os tempos de relaxação), de modo a perturbar a magnetização de equilíbrio Utilizando as regras do produto vetorial, fazendo  $\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{z}}B_z$  (assumindo que o campo magnético existe apenas na direção  $\hat{\mathbf{z}}$ ) e utilizando o resultado de 2.1 leva às equações diferenciais [1]

$$\frac{dM_x}{dt} = \omega_0 M_y - \frac{M_x}{T_2} \quad (2.3)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\omega_0 M_x - \frac{M_y}{T_2} \quad (2.4)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}. \quad (2.5)$$

As Equações 2.3 e 2.4 podem formar um par complexo, de modo que  $M_{xy}(t) = M_x(t) + jM_y(t)$ . A notação complexa facilita a solução do problema. Expressando  $M_{xy}$  como uma equação diferencial, temos

$$\frac{dM_{xy}}{dt} = M_{xy}(t) \left( j\omega_0 - \frac{1}{T_2} \right). \quad (2.6)$$

A solução da Equação 2.6 é uma senoide amortecida [1, 2]. Fazendo a condição inicial como a magnetização de equilíbrio, isto é,  $M_{xy}(0) = M_0$ ,

$$M_{xy}(t) = M_0 e^{j\omega_0 t} e^{-t/T_2}. \quad (2.7)$$

As componentes real e imaginária da Equação 2.7 estão na Figura 1a e 1b. Elas oscilam com a frequência de Larmor  $\omega_0$  e decaem com uma constante de tempo  $T_2$ .

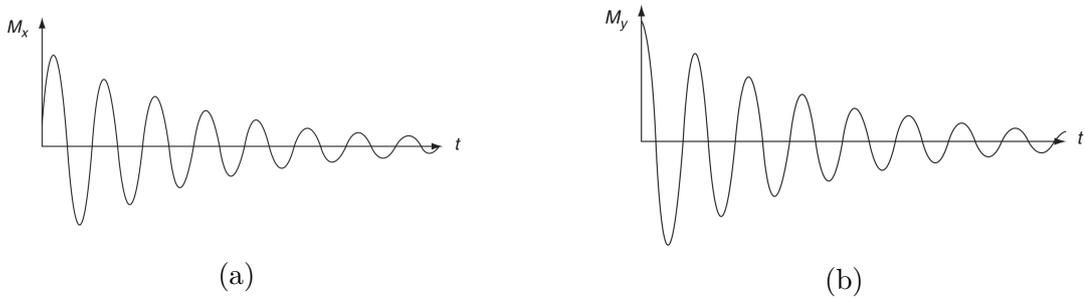


Figura 1 – Soluções da Equação de Bloch, com a componente (a) real e (b) imaginária [1].

A Figura 2 descreve o que acontece com  $\mathbf{M}$  ao ser aplicado o campo de RF: as componentes da magnetização em  $x$  e  $y$  estão em fase e criam um movimento circular.

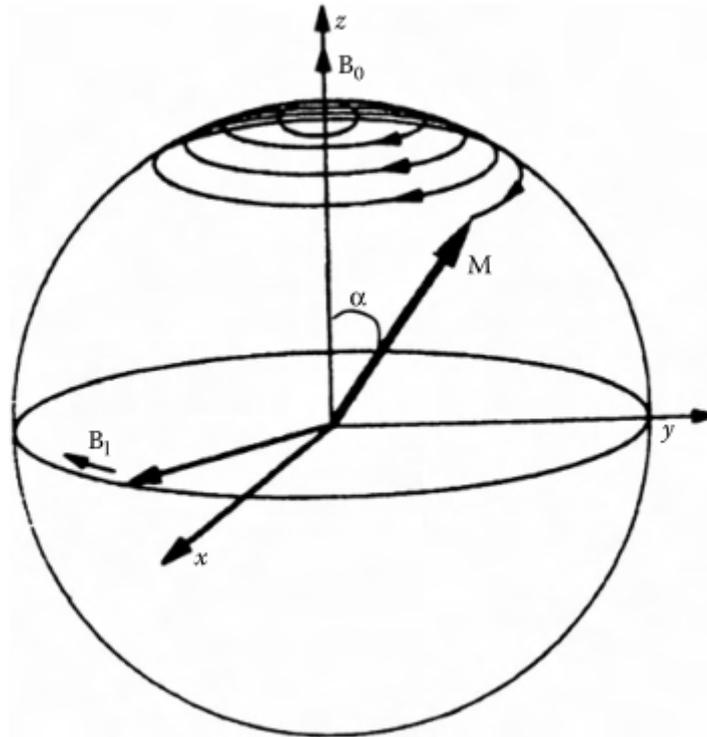


Figura 2 – Trajetória da magnetização  $\mathbf{M}$  ao ser aplicado um campo de RF, indicado por  $\mathbf{B}_1$ . A magnetização realiza um movimento de precessão ao longo do eixo  $z$  [2].

A Equação 2.5, que representa a magnetização longitudinal, tem solução na forma de uma exponencial negativa [1]. Integrando 2.5:

$$M_z(t) = M_0 + (M_z(0) - M_0)e^{-t/T_1}. \quad (2.8)$$

Assumindo  $M_z(0) = 0$ , obtêm-se o resultado da Figura 3: uma exponencial que se restaura ao valor da magnetização de equilíbrio, com uma constante de tempo  $T_1$ , após ser perturbada pelo campo de RF perpendicular.

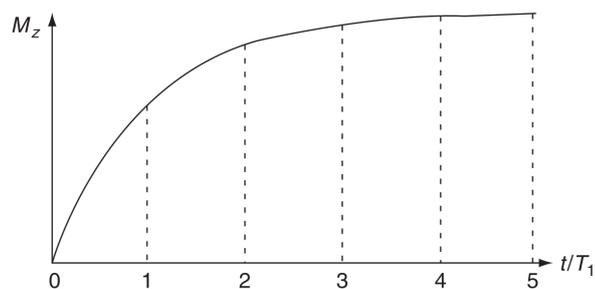


Figura 3 – Retorno à magnetização de equilíbrio do campo longitudinal após a perturbação do campo de RF [1].

$T_1$  e  $T_2$  representam uma taxa de recuperação das magnetizações nos eixos longitudinal e transversal, respectivamente. Eles indicam o quanto as magnetizações demoram para "relaxar" aos seus estados iniciais. Outro fato importante é que  $T_1 \geq T_2$ , pois enquanto houver alguma magnetização no plano perpendicular, a magnetização longitudinal não pode entrar em estado de equilíbrio.

### 2.1.2 Codificação Espacial e o espaço $\mathbf{k}$

A magnetização descrita anteriormente não possui resolução espacial alguma: o sinal é uma combinação de todos os spins dos prótons submetidos ao campo magnético. Para contornar isso, Paul Lauterbur [1] propôs um método que levava a obtenção de imagens de corte de ressonância magnética. A principal ideia é utilizar um campo gradiente  $G(x, y, z, t)$  sobre o campo  $\mathbf{B}_0$  que varia de acordo com o espaço. Isso faz com que os spins emitam um sinal com frequência diferente da frequência de Larmor.

O campo magnético em uma posição  $\mathbf{r} = (r_x\hat{x} + r_y\hat{y} + r_z\hat{z})$  se torna

$$B(\mathbf{r}) = B_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}, \quad (2.9)$$

sendo  $\mathbf{G}$  o campo gradiente aplicado na direção  $\mathbf{r}$ . A frequência de ressonância muda, sendo também uma função da posição:

$$\omega(\mathbf{r}) = -\gamma(B_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}). \quad (2.10)$$

Substituindo  $\omega_0$  na Equação 2.7 pelo resultado da Equação 2.10 e ignorando a precessão devido ao campo de polarização (primeiro termo), podemos ter um sinal em função da magnetização em um ponto  $\mathbf{r}$  no volume  $dxdydz$ :

$$dS(t) = M_{xy}(\mathbf{r}) \exp(j\gamma(G_x\hat{x} + G_y\hat{y} + G_z\hat{z}))dxdydz. \quad (2.11)$$

Entretanto, representar o sinal por uma função do tempo não é conveniente. Lauterbur propôs a criação de uma *frequência espacial*, que é o espaço em que as medidas de RM são codificadas. Definindo a variável  $\mathbf{k}$  como

$$\mathbf{k}(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t \mathbf{G}(t')dt', \quad (2.12)$$

o sinal no domínio da frequência espacial é dada por

$$M'_{xy}(\mathbf{k}) = \int_{\text{objeto}} M_{xy}(r) e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.13)$$

Os valores de  $M'_{xy}$  são conhecidos como **espaço  $\mathbf{k}$** : uma representação em frequência do objeto escaneado pelo aparelho de ressonância. A integral da Equação 2.13 equivale à transformada de Fourier, com um *kernel* ligeiramente modificado: em vez da imagem ser representada por uma frequência  $\omega$ , ela é transformada no domínio de  $\mathbf{k}$ .

### 2.1.3 Sequência de Pulsos e Amostragem de Dados

Os pulsos de RF são os responsáveis por gerar o sinal de ressonância magnética. Entretanto, é necessária uma sequência de pulsos para obter informações que são impossíveis de obter com apenas um único pulso [2].

A amostragem do sinal ocorre na presença de um gradiente constante  $G_x$ , que é aplicado em uma linha nos eixos de codificação espacial. Nesse tempo, uma linha do espaço  $\mathbf{k}$  é amostrada. Mais linhas são amostradas pela aplicação do gradiente codificador de fase,  $G_y$ . Dessa forma, várias linhas são obtidas, formando uma trajetória do espaço  $\mathbf{k}$  e criando um plano cartesiano de dados de RM, de onde as amplitudes dos pixels da imagem são obtidos através da transformada discreta de Fourier [1, 2, 28]. O gradiente no eixo  $z$  é responsável por determinar a região do volume a ser escaneada (em outras palavras, qual fatia do volume será obtida).

A trajetória da frequência espacial obtida do espaço  $\mathbf{k}$  depende das ondas gradientes dependentes do tempo, conforme a Equação 2.12. Essa Equação mostra que a magnitude do vetor  $\mathbf{k}$  em determinado ponto é calculado pela área sob a curva do gradiente em função do tempo [2, 1, 28].

Um exemplo de funcionamento da obtenção de uma trajetória para uma imagem é mostrada na Figura 4. O nome desse método de obtenção da imagem é *imageamento ecolanar*. Observando as áreas sob as curvas dos gradientes é possível determinar as posições do vetor  $\mathbf{k}$ . O primeiro pulso de  $G_y$  é de grande amplitude, largo e negativo. Portanto, a trajetória do espaço  $\mathbf{k}$  é iniciada em um valor na região negativa de  $y$ . O mesmo ocorre com o valor de  $G_x$  e a posição inicial em  $x$ . A partir daí,  $G_x$  passa a alternar entre valores positivos e negativos. Isso se reflete em trajetórias em zigue-zague em relação ao eixo  $x$ . Já  $G_y$  é composto de vários pequenos pulsos positivos, bem menores que o primeiro pulso inicial. No espaço  $\mathbf{k}$ , isso significa subir a trajetória na direção  $y$ . O formato final da amostragem do espaço  $\mathbf{k}$ , para essa sequência de pulsos, está na Figura 5. Este método gera imagens de baixa qualidade em relação a outros, mas é de rápida aquisição. Calculando a transformada inversa de Fourier discreta 2D da trajetória, é obtida a imagem da fatia escolhida [28].

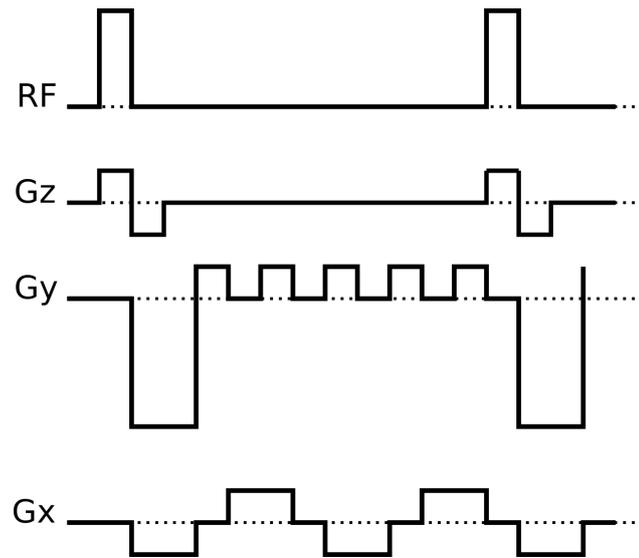


Figura 4 – Exemplo simplificado da sequência de pulsos do imageamento eco-planar.

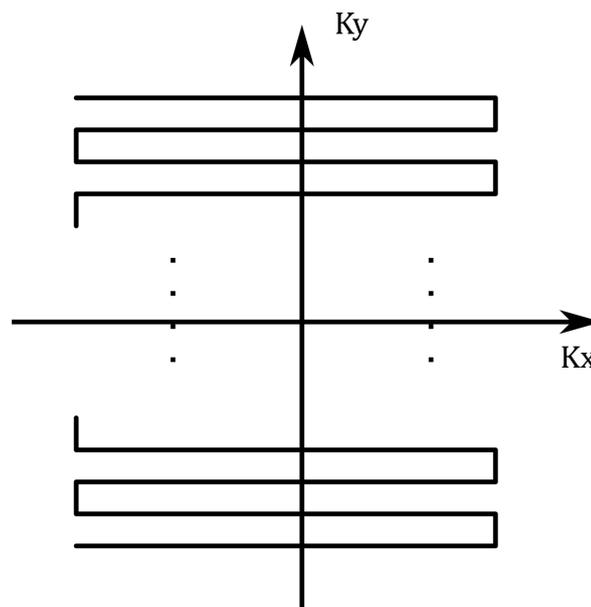


Figura 5 – Trajetória aproximada no espaço  $\mathbf{k}$  para a sequência de pulsos da Figura 4.

Outros tipos de trajetórias são a espiral e radial. Na trajetória espiral, os gradientes são produzidos de modo a tirar vantagem de como as trajetórias do espaço  $\mathbf{k}$  são relacionadas com os campos gradientes (Equações 2.12 e 2.13). Esse método também permite uma rápida aquisição de dados [2]. Na trajetória radial, linhas radiais são amostradas a partir do centro do espectro, de modo que uma grande informação de baixa frequência é adquirida. Para este trabalho, a trajetória de amostragem para o espaço  $\mathbf{k}$  é a de linhas radiais, como ilustrada na Figura 7. Uma sequência de pulsos típica dessa trajetória está na Figura 6.

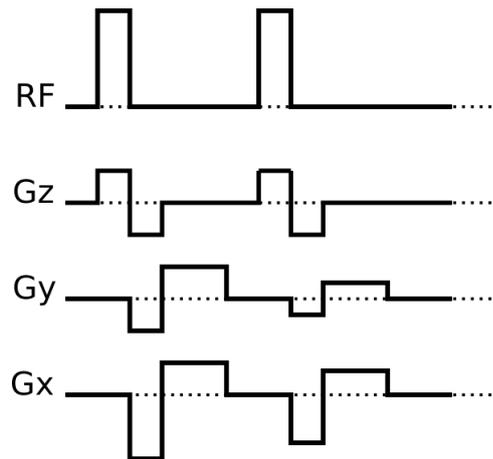


Figura 6 – Sequência de pulsos aproximada para linhas radiais. Entre cada pulso de RF, uma linha radial é amostrada. Note as diferentes áreas sob as curvas dos gradientes em cada pulso.

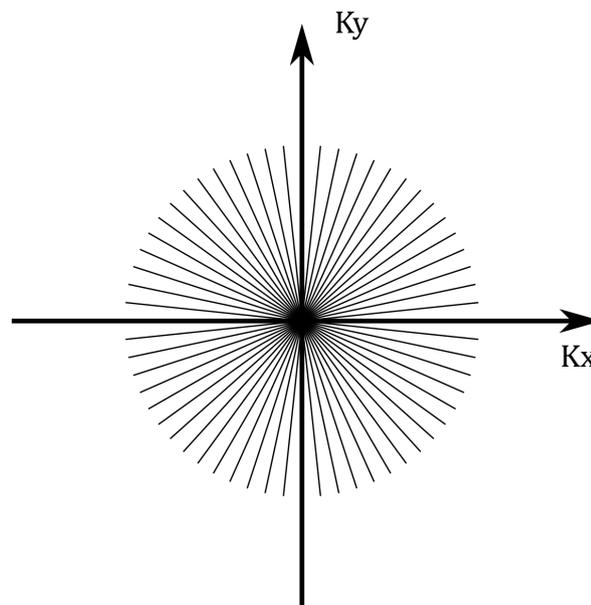


Figura 7 – Trajetória aproximada no espaço  $\mathbf{k}$  para linhas radiais.

## 2.2 Transformada *Wavelet*

Wavelets consistem em um dos principais tipos de transformadas esparsificantes para o uso em *compressive sensing* [16]. O conceito de esparsidade na abordagem de *compressive sensing* é abordado na Seção 2.4

*Wavelets* são um tipo de transformada baseada em várias versões em diferentes escalas e deslocadas (ou transladadas) de uma função, chamada de *wavelet* mãe. Também há uma função de escalonamento. Elas são definidas como

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\phi(2^j t - k) \quad (2.14)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^j t - k), \quad (2.15)$$

em que  $k$  é um parâmetro de translação da função e  $j$  é um parâmetro de resolução em frequência. Todo sinal pode ser representado pelos coeficientes de *aproximação* e de *detalhes* da transformada *wavelet*, como segue:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\phi(t - n) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(j, n)2^{j/2}\psi(2^j t - n), \quad (2.16)$$

com os coeficientes  $c(n)$  e  $d(n)$  dados por

$$c(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t - n)dt, \quad (2.17)$$

$$d(j, n) = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi(2^j t - n)dt, \quad (2.18)$$

em que  $c(n)$  são os coeficientes de aproximação e  $d(j, n)$  são os coeficientes de detalhes.

Essas são as equações da transformada *wavelet* contínua e separável [29, 30]. Sua versão discreta pode ser implementada por meio de uma estrutura banco de filtros. Analisando o lado direito das Equações 2.17 e 2.18, é possível notar que os coeficientes podem ser obtidos por meio de convoluções. Convoluções no domínio temporal (ou espacial, no caso de imagens), equivalem a filtros. Logo, a transformada *wavelet* possui uma conveniente forma de cálculo na forma de banco de filtros [30], onde ela é fácil e eficientemente calculada.

### 2.2.1 Subamostragem e sobreamostragem

Subamostragem e sobreamostragem são operações importantes em banco de filtros e aqui serão derivadas algumas propriedades que auxiliarão na demonstração das condições perfeitas de reconstrução que serão vistas adiante. A transformada *wavelet* discreta pode ser feita aplicando filtros passa-baixa ( $h_0[n], h_1[n]$ ) e passa-alta ( $g_0[n], g_1[n]$ ) recursivamente, aplicando subamostragem e sobreamostragem no sinal. A sub/sobreamostragem do sinal são operações feitas sobre sinais discretos, onde valores do sinal são removidos/adicionados a cada certo número de elementos. As operações são denotadas por

$\lfloor L$  e  $\lceil M$ , respectivamente.  $M$  e  $L$  devem ser valores inteiros. Essa operação deve ser interpretada como segue: para uma subamostragem de  $M$  unidades, é amostrado somente um único valor do sinal a cada  $M$  posições, dividindo o tamanho do sinal por  $M$ . E para uma sobreamostragem de  $L$  unidades, é adicionado  $L - 1$  zeros entre cada valor do sinal, multiplicando o tamanho do sinal por  $L$ . A visualização dessas operações sobre um sinal pode ser visto nas Figuras 8a, 8b e 8c, com  $M$  e  $L$  iguais a 2.

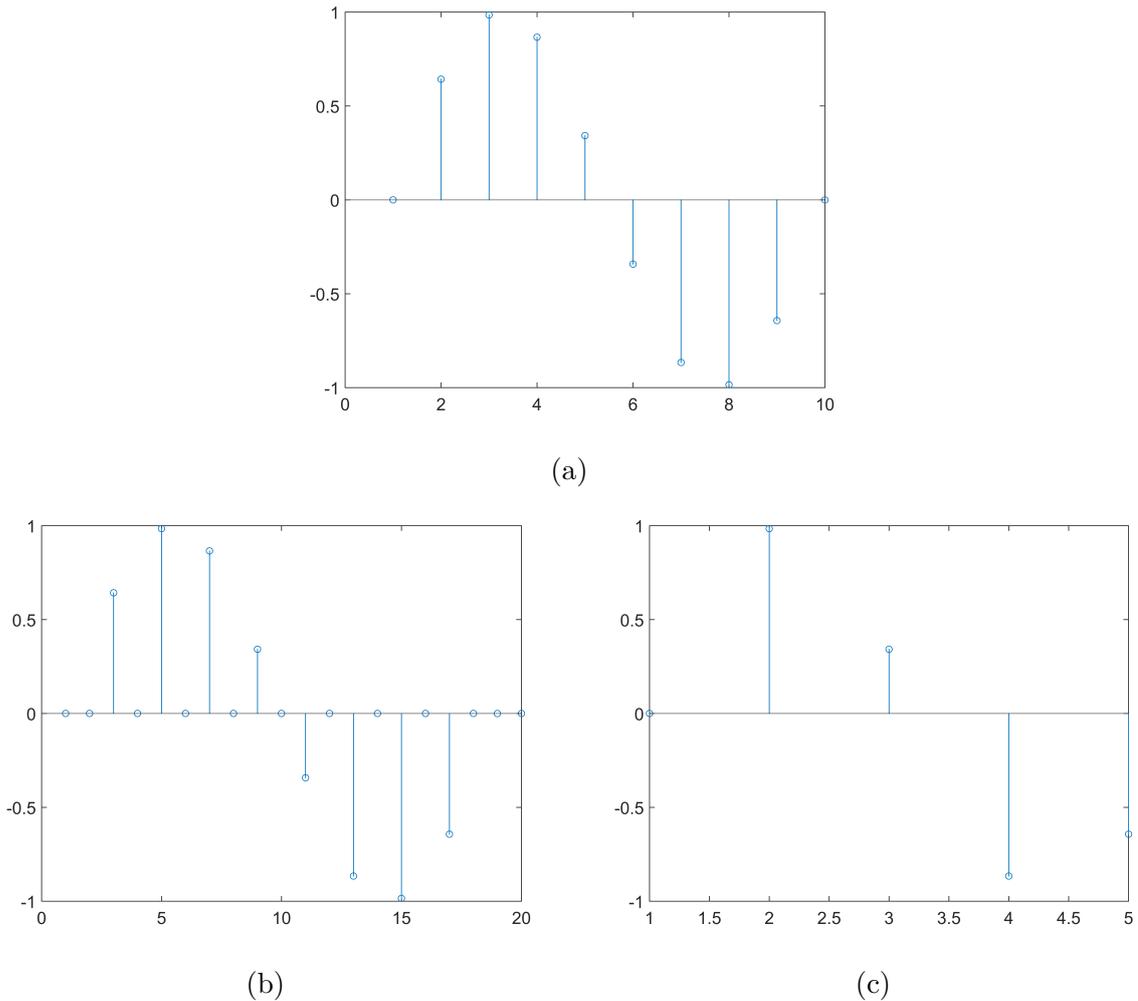


Figura 8 – Operações sobre a senoide discreta (a) de (b) sobreamostragem e (c) subamostragem, com  $L$  e  $M$  iguais a 2

Para essas operações, o sinal pode ser escrito como

$$x[n] \longrightarrow \lfloor M \longrightarrow y[n] = x[Mn] \tag{2.19}$$

$$x[n] \longrightarrow \lceil L \longrightarrow y[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{se } n = kL, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.20}$$

Apesar disso, é mais conveniente representar os sinais no domínio da transformada  $Z$ .

Para o sinal representado na sobreamostragem (Equação 2.20), a transformada Z é

$$Y(z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, & \text{para } n/L \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.21)$$

Fazendo  $n = kL$ , a transformação se torna

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kL]z^{-kL}. \quad (2.22)$$

$kL$  pode ser escrito apenas como  $k$ , pois  $k$  varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Então, rearranjando o expoente,

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](z^L)^{-k} \quad (2.23)$$

$$Y(z) = X(z^L). \quad (2.24)$$

A Equação 2.24 representa a transformada Z da operação de sobreamostragem; para uma sobreamostragem de valor  $L$ , adiciona-se  $L$  como expoente à variável da transformada Z.

Para a subamostragem a demonstração é mais complexa e será omitida. Pode ser demonstrado que a transformada Z para a subamostragem de  $M$  valores é [31]

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{-k}), \text{ com } W_M = e^{-j\frac{2\pi}{M}}. \quad (2.25)$$

Com isso, surgem identidades sobre blocos de operação com sub/sobreamostragem. Algumas identidades, chamadas de *identidades nobres* [31], consistem em mover filtros no domínio da transformada Z para antes ou depois de uma operação de sobreamostragem ou subamostragem. São elas

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow y[n] \equiv x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow \boxed{H(z^L)} \longrightarrow y[n] \quad (2.26)$$

e

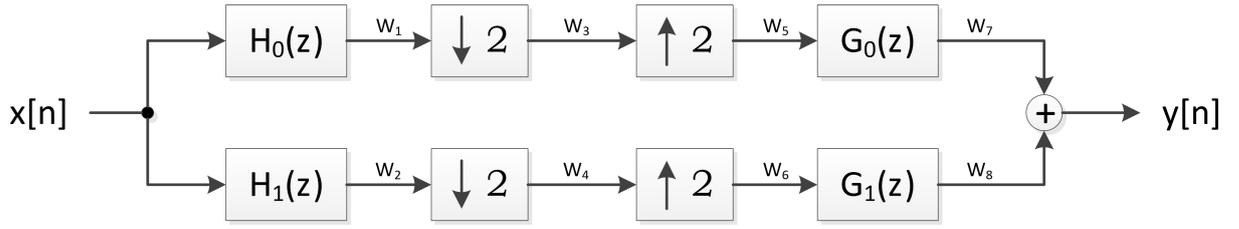
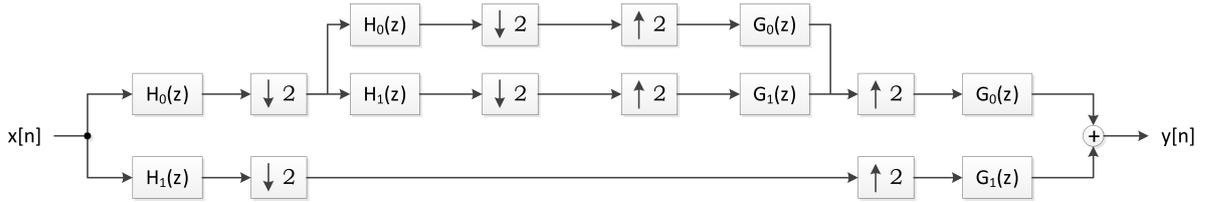
$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(z^L)} \longrightarrow \boxed{\downarrow L} \longrightarrow y[n] \equiv x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow L} \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y[n]. \quad (2.27)$$

Esses resultados são importantes e serão utilizados no desenvolvimento da próxima seção.

## 2.2.2 Banco de Filtros *Wavelet*

A estrutura de banco de filtros permite a criação de *wavelets* com características desejáveis para análise do sinal, como seletividade em frequência e ortogonalidade [16].

O banco de filtros *wavelet* em um nível possui a estrutura da Figura 9, enquanto que um banco com dois níveis está na Figura 10.


 Figura 9 – Estrutura básica de banco de filtros *wavelet*

 Figura 10 – Estrutura de banco de filtros *wavelet* em dois níveis

Para a reconstrução perfeita do sinal, os filtros  $h_0[n]$ ,  $h_1[n]$ ,  $g_0[n]$  e  $g_1[n]$  devem satisfazer certas condições. Para encontrar a condição de reconstrução perfeita, basta utilizar as identidades nobres citadas anteriormente e a Transformada Z. A reconstrução perfeita do sinal é suposta como o sinal original com um atraso [31]. Portanto, denominando  $y[n]$  como o sinal recuperado e  $x[n]$  como o sinal de entrada, temos a relação

$$y[n] = x[n - d], \quad (2.28)$$

que na Transformada Z equivale a

$$Y(z) = X(z)z^{-d}. \quad (2.29)$$

Realizando as operações com os termos de  $W_1(z)$  a  $W_8(z)$  da Figura 9 e utilizando as identidades nobres, temos as seguintes expressões para  $W_1(z)$  e  $W_2(z)$ :

$$W_1(z) = H_0(z)X(z), \quad W_2(z) = H_1(z)X(z). \quad (2.30)$$

Para encontrar  $W_3$  e  $W_4$ , utilizamos a Transformada Z da identidade nobre para a subamostragem. Aplicando essa identidade com  $M$  amostras, temos

$$\mathcal{Z}\{x[Mn]\} = \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} e^{j\frac{2\pi}{M}k}), \quad (2.31)$$

em que  $\mathcal{Z}$  representa a operação da Transformada Z.

Utilizando 2.31 em  $W_3(z)$  e  $W_4(z)$ , com  $M = 2$ , temos os seguintes resultados:

$$W_3(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 W_1(z^{\frac{1}{2}} e^{j\frac{2\pi}{2}k}) \quad (2.32)$$

$$W_4(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 W_2(z^{\frac{1}{2}} e^{j\frac{2\pi}{2}k}). \quad (2.33)$$

Por fim, calculando os somatórios, temos:

$$W_3(z) = \frac{1}{2} \left( W_1(z^{\frac{1}{2}}) + W_1(z^{-\frac{1}{2}}) \right) \quad (2.34)$$

$$W_4(z) = \frac{1}{2} \left( W_2(z^{\frac{1}{2}}) + W_2(z^{-\frac{1}{2}}) \right). \quad (2.35)$$

A próxima operação é uma sobreamostragem de duas amostras. Sua transformada Z para uma sobreamostragem de L amostras equivale a  $X(z^L)$ . Utilizando esse resultado sobre os resultados em 2.34 e 2.35,

$$W_5(z) = \frac{1}{2} \left( W_1((z^2)^{\frac{1}{2}}) + W_1((z^2)^{-\frac{1}{2}}) \right) \mapsto \frac{1}{2} (W_1(z) + W_1(-z)) \quad (2.36)$$

$$W_6(z) = \frac{1}{2} \left( W_2((z^2)^{\frac{1}{2}}) + W_2((z^2)^{-\frac{1}{2}}) \right) \mapsto \frac{1}{2} (W_2(z) + W_2(-z)). \quad (2.37)$$

Por fim,  $W_7(z)$  e  $W_8(z)$  são dados por

$$W_7(z) = \frac{1}{2} G_0 (W_1(z) + W_1(-z)) \quad (2.38)$$

$$W_8(z) = \frac{1}{2} G_1 (W_2(z) + W_2(-z)). \quad (2.39)$$

O sinal  $y[n]$  é a soma dos sinais  $w_7[n]$  e  $w_8[n]$ . Lembrando das expressões em 2.30 para  $W_1(z)$  e  $W_2(z)$ , o resultado final é

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2} G_0(z) (H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)) + \frac{1}{2} G_1(z) (H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)) \\ &= \frac{1}{2} (G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)) X(z) + \frac{1}{2} (G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)) X(-z). \end{aligned} \quad (2.40)$$

O primeiro termo da direita da Equação 2.40 é uma parcela linear e invariante no tempo e que equivale a estrutura do banco de filtros (exceto pelas operações de subamostragem/sobreamostragem). O segundo termo é uma parcela de aliasing adicionado ao sinal, devido aos efeitos de variância no tempo das operações variantes no tempo do

subamostragem/sobreamostragem. Igualando o primeiro termo a  $z^{-d}$ , conforme a Equação 2.29 e o segundo termo a zero, temos

$$\frac{1}{2}(G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)) = z^{-d} \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{2}(G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)) = 0. \quad (2.42)$$

Essas são as condições para os filtros passa-baixa e passa-alta dos bancos de filtros *wavelet*, de modo que a reconstrução seja perfeita.

### 2.2.3 Transformada *Wavelet* 2D

A transformada *wavelet* 2D discreta (pela qual vamos nos referir apenas como DWT) é uma extensão da transformada *wavelet*. Elas possuem três funções *wavelet* e uma função de escalonamento, definidas de forma semelhantes às das Equações 2.14 e 2.15

$$\phi_{j,m,n}(x, y) = 2^{-j/2}\phi(2^j x - m, 2^j y - n) \quad (2.43)$$

$$\psi_{j,m,n}^i(x, y) = 2^{-j/2}\psi(2^j x - m, 2^j y - n), i = \{H, V, D\}. \quad (2.44)$$

Existem três funções *wavelet*, que correspondem a direções na imagem: horizontal, vertical e diagonal. E existe uma função de escalonamento, que é uma componente de baixa frequência. Essas funções são relacionadas com as funções unidimensionais da transformada *wavelet*, de modo que

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (2.45)$$

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\phi(y) \quad (2.46)$$

$$\psi^V(x, y) = \phi(x)\psi(y) \quad (2.47)$$

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y). \quad (2.48)$$

Os índices  $H$ ,  $V$  e  $D$  representam as direções que a transformada obtém das imagens, que representam as direções horizontal, vertical e diagonal<sup>1</sup>. Portanto, a DWT é apenas a aplicação da transformada *wavelet* em diferentes combinações de direções da imagem. Primeiro, calcula-se a convolução sobre as linhas e depois sobre as colunas utilizando os filtros. Ao final, existem quatro bandas de coeficientes: detalhes horizontais

<sup>1</sup> Como será visto adiante, a *wavelet* comum não é capaz de isolar uma direção diagonal. Na realidade, a direção representada pelos filtros  $\psi(x)\psi(y)$  é uma mistura das direções  $\pm 45^\circ$ .

(HL), detalhes verticais (LH), detalhes diagonais (HH) e coeficientes de aproximação (LL). Na forma de banco de filtros, a DWT possui a forma da Figura 11.

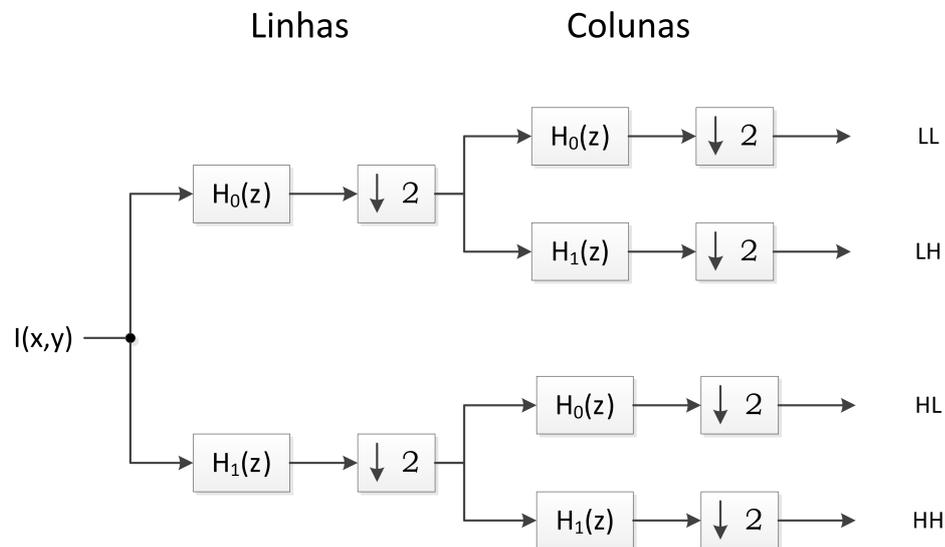


Figura 11 – Estrutura básica de banco de filtros *wavelet* 2D

As Figuras 12a e 12b mostram decomposições *wavelet* em 1 e 2 níveis respectivamente.

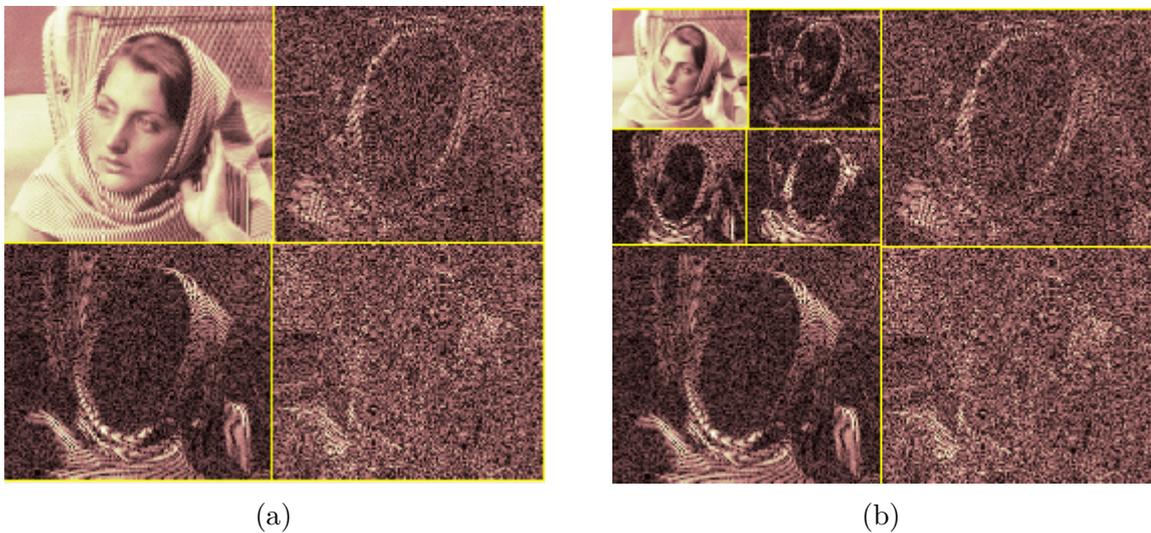


Figura 12 – Decomposição *wavelet* 2D em (a) 1 nível e (b) 2 níveis, utilizando o filtro *coiflet* 1

## 2.2.4 Iteração dos Filtros na DWT

Uma forma conveniente de realizar o processamento da DWT é o uso de filtros iterados. Em suma, os filtros após as operações de subamostragem/sobreamostragem da Figura 13 são passados para o início/fim do banco de filtros, de modo que todas as versões filtradas das imagens são feitas com a mesma imagem original, sem subamostragem ou

filtradas mais de uma vez. Tomando como base a Figura 13, o objetivo é passar todos os filtros para o primeiro estágio, realizar o subamostragem e então passar para a síntese, que possui um processo semelhante.

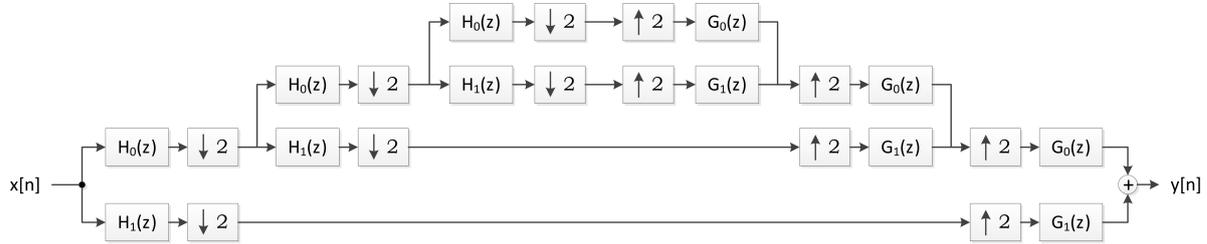


Figura 13 – Decomposição em três níveis da transformada *wavelet*

Considerando os filtros  $H_L(z)$  e  $H_H(z)$  como os filtros básicos  $H_0(z)$  e  $H_1(z)$  respectivamente, da Figura 9, e utilizando as identidades nobres, temos as seguintes relações para bancos de filtros multiníveis:

$$H_0(z) = H_L(z)H_L(z^2)H_L(z^4) \quad H_1(z) = H_L(z)H_L(z^2)H_H(z^4) \quad (2.49)$$

$$H_2(z) = H_L(z)H_H(z^2) \quad H_3(z) = H_H(z) \quad (2.50)$$

$$G_0(z) = G_L(z)G_L(z^2)G_L(z^4) \quad G_1(z) = G_L(z)G_L(z^2)G_H(z^4), \quad (2.51)$$

$$G_2(z) = G_L(z)G_H(z^2) \quad G_3(z) = G_H(z), \quad (2.52)$$

O banco de filtros fica com a estrutura na forma da Figura 14. As operações de subamostragem/sobreamostragem são acumuladas somente em um único bloco para cada canal, onde eles são aumentados em potências de 2, de acordo com o número de níveis.

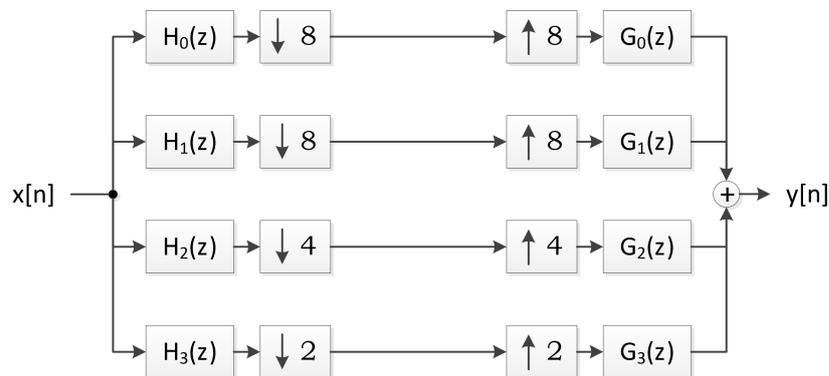


Figura 14 – Banco de filtros iterado de 3 níveis

### 2.2.5 Famílias de Filtros *Wavelets*

Existem várias famílias de *wavelets*, cada uma com suas diferentes características que definem seus coeficientes. Uma delas é a *wavelet* de *Daubechies* (que leva o nome de

sua criadora Ingrid Daubechies), que possui 45 tipos de filtros, sendo o primeiro filtro equivalente à transformada de Haar [32]. Outra família de filtros é a dos filtros biortogonais, que possuem diferentes funções *wavelet* para análise e síntese. Isso permite mais graus de liberdade no projeto de filtros. As *symlets* são uma versão modificada das *wavelets* de Daubechies, com maior simetria em seus coeficientes [32]. E as *coiflets* são uma família projetada por Daubechies à pedido de Ronald Coifman. Essa *wavelet* é quase simétrica, com  $N/3$  momentos nulos e suporte de  $N - 1$  coeficientes [33, 32].

## 2.3 Transformada *Wavelet Dualtree*

A Transformada *wavelet dualtree* (DT-CWT) é uma abordagem relativamente recente, apresentada pela primeira vez em 1999, por Nick Kingsbury [34, 35]. Ela possui algumas características desejáveis que a DWT não possui, como invariância ao deslocamento, oscilações, aliasing e pouca variação em direcionalidades.

Ela é uma das variantes da chamada Transformada Complexa de *wavelet* (CWT), que tem como base a criação de um sinal aproximadamente analítico e que formem um par da Transformada de Hilbert; isto é, que estejam em fase de 90 graus. A Transformada de Fourier é um exemplo de par de Hilbert e que, graças a isso, não sofre dos problemas citados anteriormente que a DWT possui: o deslocamento é simplesmente representado por uma mudança linear de fase; ela não oscila no zero em singularidades, pois ela cria uma envoltória positiva no domínio de Fourier e ela não possui aliasing nem uma condição complicada para cancelá-lo (Equação 2.42) [29].

O princípio básico da CWT é utilizar duas funções *wavelet*, de modo que ela forma uma função complexa, da forma

$$\psi_c(t) = \psi_r(t) + j\psi_i(t). \quad (2.53)$$

A transformada de Fourier é semelhante, de modo que a função de transformação é uma exponencial complexa da forma  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ . E se  $\psi_r(t)$  e  $\psi_i(t)$  estiverem em quadratura (isto é, com diferença de fase de 90 graus), eles formam um par da transformada de Hilbert e o sinal pode ser considerado analítico (e, portanto, sem os quatro problemas da DWT citados anteriormente).

Para o estudo em processamento de imagens, a característica mais desejável da CWT em duas dimensões é a sua maior direcionalidade para imagens. Ela possui seis direções, ao contrário da transformada separável, que possui apenas três. Isso permite melhor representação de características que não poderiam ser representadas por outros filtros da transformada *wavelet*. A DWT é incapaz de produzir coeficientes que isolem as direções diagonais. O que ela produz é uma mistura das duas, criando artefatos do

tipo xadrez [29]. As Figuras 15a e 15b mostram as orientações da transformada *wavelet* complexa *dualtree* e separável, respectivamente.

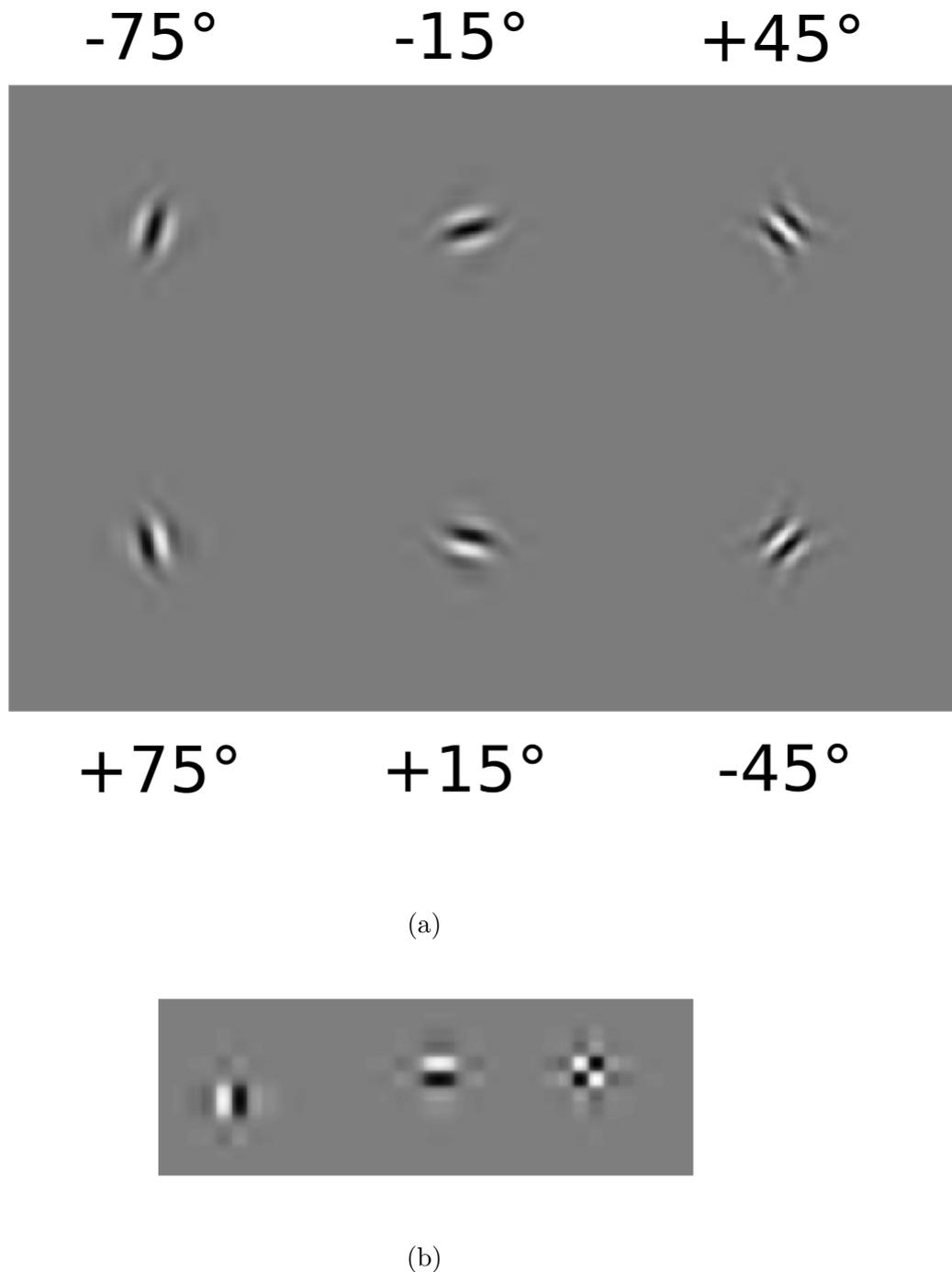


Figura 15 – As (a) seis orientações da DT-CWT e as (b) três orientações da DWT. Note a maior ambiguidade na terceira direção em (b)

Uma das formas de implementação da CWT é o uso da transformada de Hilbert sobre as saídas da transformada *wavelet* em dois canais. Entretanto, a implementação não é direta, pois existem problemas que surgem com a aplicação da transformada de Hilbert. São criadas oscilações na magnitude dos filtros em frequências indesejáveis. E

esse problema não pode ser contornado utilizando filtros com bandas mais estreitas: a oscilação é intrínseca às condições de reconstrução perfeita, sempre criando oscilações com magnitude de 1 na frequência de  $\frac{\pi}{2}$  [29].

A forma que será utilizada neste trabalho, que foi descrita pela primeira vez por [34], utiliza dois bancos de filtros operando em paralelo: um banco de filtros representa a parte real e o outro, a parte imaginária. O banco de análise e de síntese são indicados na Figura 16. O nome *dualtree* vem da aparência do banco, que tem a forma de duas árvores: a árvore superior e inferior.

Apesar dela representar uma transformada complexa, os filtros são reais e nenhuma aritmética de variável complexa é necessária. Os dois conjuntos de filtros são diferentes, de modo que eles satisfazem às condições de reconstrução perfeita e formam um par aproximadamente analítico. Seja  $\psi_h(t)$  e  $\psi_g(t)$  as funções *wavelet* que representam as partes real e complexa da transformada, respectivamente. Então,  $\psi = \psi_h(t) + j\psi_g(t)$  que equivale a

$$\psi_g(t) = \mathcal{H}\{\psi_h(t)\}, \quad (2.54)$$

que representa a função *wavelet* da transformada complexa e é aproximadamente analítica.

Como o banco de filtros *dualtree* é apenas implementado por dois bancos de filtros operando em paralelo, toda a estrutura de banco de filtros *wavelet* conhecida pode ser aplicada, de modo que a implementação da DT-CWT por meio da estrutura *dualtree* se torna apenas um problema de projeto de filtros. É importante lembrar que os filtros da transformada *wavelet* (como os filtros de Daubechies) não podem ser utilizados para implementar a CWT, pois eles não geram um par analítico, o que não remove os quatro problemas citados anteriormente da DWT.

Uma condição básica para que as funções *wavelet* possam representar um par de Hilbert é o atraso de meia amostra [36, 37, 38], que diz que os filtros passa-baixa devem possuir um atraso de 0.5 amostra:

$$g_0[n] \approx h_0[n - 0,5]. \quad (2.55)$$

Entretanto, como sinais discretos são definidos apenas para índices inteiros, essa condição pode ser feita mais rigorosamente no domínio de Fourier, em que 2.55 equivale a  $G_0(j\omega) = e^{-j0.5\omega} H_0$ . Em [36] é provado que se essa condição é satisfeita, então a Equação 2.54 é satisfeita.

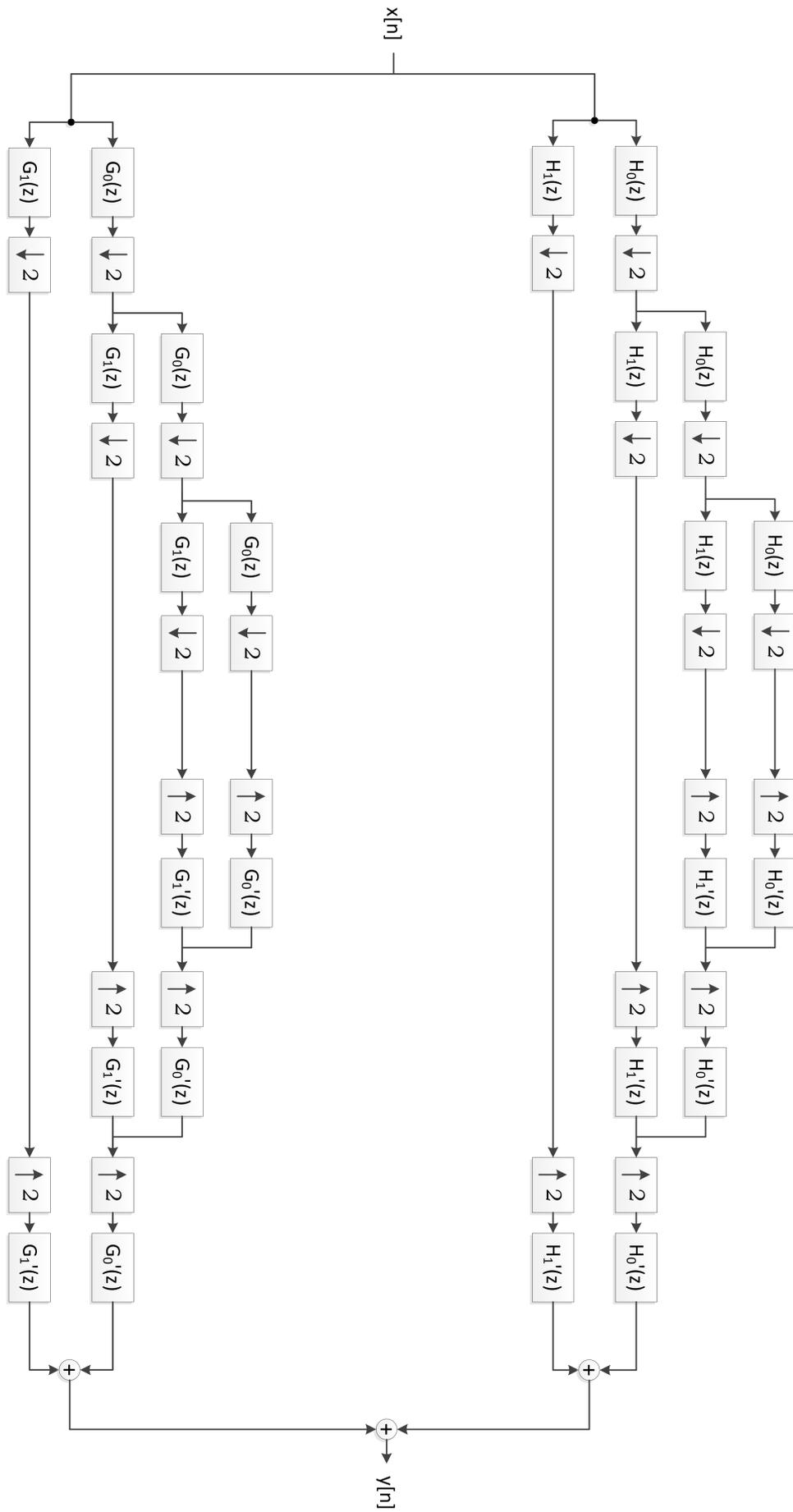


Figura 16 – Banco de filtros *dualtree* em três níveis

O atraso de meia amostra pode ser convenientemente escrita por meios de sua magnitude e fase, que são, respectivamente:

$$|G_0(j\omega)| = |H_0(j\omega)| \quad (2.56)$$

$$\angle G_0(j\omega) \approx \angle H_0(j\omega) - 0.5\omega. \quad (2.57)$$

Este resultado será útil mais adiante.

Uma das técnicas utilizadas para projetos de filtros *dualtree* é descrita em [39]. Eles são chamados de filtros de *Farras* (criados por Abdelnour Farras), que são filtros para o primeiro estágio (nível) da transformada. Eles possuem as vantagens citadas anteriormente sobre a DWT, satisfazem as condições de reconstrução perfeita e usam poucos coeficientes (apenas 10). Para os estágios subsequentes (caso existam), são comumente utilizados os filtros *q-shift*, propostos por Kingsbury [35, 40]. É outra solução para a criação de filtros que formam um par de Hilbert e que possuem fase linear. Seu princípio básico tem como

$$g_0[n] = h_0[N - 1 - n], \quad (2.58)$$

em que  $N$  é o comprimento do filtro. Aplicando a transformada de Fourier em 2.58, tem-se o seguinte:

$$G_0(j\omega) = \overline{H_0(j\omega)} e^{-j(N-1)\omega}. \quad (2.59)$$

A barra indica o conjugado complexo. A fase do filtro, portanto, tem a relação

$$\angle G_0(j\omega) = -\angle H_0(j\omega) - (N - 1)\omega. \quad (2.60)$$

Se sua fase satisfizer as condições de fase do atraso de meia amostra, (pela Equação 2.57:  $\angle G_0(j\omega) \approx \angle H_0(j\omega) - 0.5\omega$ ), então

$$\angle H_0(j\omega) - 0.5\omega \approx -\angle H_0(j\omega) - (N - 1)\omega. \quad (2.61)$$

O que nos leva a

$$\angle H_0(j\omega) \approx -0.5(N - 1)\omega + 0.25\omega. \quad (2.62)$$

O nome *q-shift* (*quarter shift*) vem da Equação 2.62: os filtros em quadratura são atrasadas em um quarto de amostra em relação ao outro. Outro aspecto importante é que

os filtros são aproximadamente de fase linear. Em [40] são projetados filtros com apenas 6 coeficientes não nulos para processamento de imagens, o que permite uma fácil e rápida implementação da transformada *wavelet dualtree*. Também são projetados filtros *q-shift* de 6, 10, 14 e 18 coeficientes, com diferentes propriedades de invariância ao deslocamento. Neste trabalho, serão utilizados filtros *q-shift* variando entre 6 e 18 coeficientes para estágios subsequentes e o filtro de Farras para o primeiro estágio.

### 2.3.1 Transformada *Dualtree* 2D

Como já foi dito anteriormente, a DT-CWT 2D cria *wavelets* direcionais (com seis direções). Vejamos como as direções e as funções de aproximação e *wavelet* são criadas. Conforme as Equações 2.46 a 2.48, podemos escrever as funções como o produto de outras duas. Para as funções *wavelet*, temos  $\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y)$ .  $\psi(x)$  agora é uma função complexa, escrita como  $\psi(x) = \psi_h(x) + j\psi_g(x)$ . A expressão a seguir (que representa a versão HH da imagem) mostra que as funções de detalhes devem ter um pequeno ajuste ao se calcular os coeficientes:

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= (\psi_h(x) + j\psi_g(x))(\psi_h(y) + j\psi_g(y)) \\ &= \psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y) + j(\psi_g(x)\psi_h(y) + \psi_h(x)\psi_g(y)).\end{aligned}\quad (2.63)$$

A Equação 2.63 representa uma *wavelet*. A sua parte real,  $\psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y)$ , dá origem a duas *wavelets* separáveis. Entretanto, ela não possui artefato xadrez e por si só é uma transformada que cria um par de Hilbert com a versão feita com o complexo conjugado das funções  $\psi_g$  e  $\phi_g$ .

Utilizando as outras combinações possíveis, conforme as Equações 2.46 a 2.48, existem outras cinco representações da DT-CWT  $\psi(x)\overline{\psi(y)}$ ,  $\phi(x)\psi(y)$ ,  $\psi(x)\phi(y)$ ,  $\phi(x)\overline{\psi(y)}$  e  $\psi(x)\overline{\phi(y)}$ . Tomando apenas a parte real dos resultados, são criadas seis orientações, como as da Figura 15a. Generalizando, elas são dadas por

$$\psi_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x, y) - \psi_{2,1}(x, y)), \quad (2.64)$$

$$\psi_{i+3}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x, y) + \psi_{2,1}(x, y)), \quad (2.65)$$

com  $i = 1 : 3$ . Os  $\psi_{j,i}$  são definidos por

$$\psi_{1,1}(x, y) = \phi_h(x)\psi_h(y), \psi_{2,1}(x, y) = \phi_g(x)\psi_g(y) \quad (2.66)$$

$$\psi_{1,2}(x, y) = \psi_h(x)\phi_h(y), \psi_{2,2}(x, y) = \psi_g(x)\phi_g(y) \quad (2.67)$$

$$\psi_{1,3}(x, y) = \psi_h(x)\psi_h(y), \psi_{2,3}(x, y) = \psi_g(x)\psi_g(y). \quad (2.68)$$

O fator  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  de normalização é utilizado para que a operação seja ortonormal.

O resultado obtido representa a parte real da DT-CWT. Ela pode ser implementada da mesma maneira que um banco de filtros para a DWT, desde que as Equações de soma e subtração (2.64 e 2.65) sejam satisfeitas. E as duas árvores (ou banco de filtros) são representadas pelas mesmas equações: a árvore superior é representada pela Equação 2.64 e o banco inferior é representada pela Equação 2.65.

Apesar disso, ela não possui a vantagem de quase invariância ao deslocamento, pois seus coeficientes não representam um número complexo. Mas ela possui as várias orientações que ela produz, o que lhe dá vantagem sobre a DWT. Neste trabalho, as várias orientações para representação mais esparsas de características são os principais motivadores em usá-las como filtros que possam esparsificar mais uma imagem. Essas características já são suficientes para justificar seu uso neste trabalho.

## 2.4 Compressive Sensing

*Compressive sensing* (CS) [15, 16, 41, 42] é uma técnica de processamento de sinais que permite a reconstrução destes com baixo número de amostras (com taxas de amostragem inferiores às estabelecidas pela teoria de Shannon), desde que alguns critérios sejam satisfeitos. O principal critério é o de esparsidade: o sinal deve ser esparso (e.g., com poucos valores diferentes de zero) em algum domínio de transformada  $\mathbf{T}$  conhecido. O outro critério é o de incoerência: objetos que possuem uma representação esparsa em um domínio transformado devem ser densamente distribuídas no domínio de medidas [41, 42].

Suponha um sinal (ou imagem) de tamanho  $N$  (no caso de um imagem,  $N$  é o produto entre linhas e colunas da imagem). CS tem como objetivo reconstruir um sinal a partir de  $\ell$  medidas lineares (isto é, as medidas correspondem a um produto entre uma matriz de medidas e o sinal), sendo  $\ell \ll N$ . Entretanto, isso resultaria em um sistema linear subdeterminado, com menos equações que variáveis. Isso faz com que existam infinitas soluções para o problema. Apesar disso, assim como na teoria de Shannon um sinal pode ser reconstruído a partir de um número limitado de amostras discretas, se ele for limitado em banda, em CS um sinal pode ser reconstruído a partir de um número mínimo de medidas lineares, se houver uma representação esparsa em um domínio conhecido. Neste sentido, CS é uma generalização da teoria de Shannon já que não são necessários valores nulos só após uma determinada frequência no domínio de Fourier: o sinal pode ter vários valores nulos distribuídos ao longo de sua banda e em qualquer domínio transformado [17, 41, 42].

Em RM, as  $\ell$  medidas lineares correspondem às amostras no espaço  $\mathbf{k}$ , representadas pelo vetor  $b$ , fornecidas pelo escâner. A imagem é gerada a partir de  $\ell$  medidas lineares no domínio não transformado (espaço  $\mathbf{k}$ ), com  $\ell \ll N$ , em que  $N$  é o número de pixels da imagem  $\mathbf{x}$ . No domínio transformado,  $\mathbf{x}$  pode ser representado por  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ , em

que  $\mathbf{T}$  é a matriz que representa a transformada aplicada sobre as medidas  $\mathbf{b}$  da RM. As medidas são dadas por  $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ , em que  $\mathbf{M}$ , uma matriz de tamanho  $\ell \times N$ , representa os pontos da imagem  $\mathbf{x}$  (no espaço  $\mathbf{k}$ ) que foram tomados como medidas. A imagem pode ser representada por  $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}}$ . Portanto, há a seguinte restrição:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0. \quad (2.69)$$

Levando em consideração o critério de esparsidade, CS se torna um problema de otimização com restrições. O critério de esparsidade, idealmente, levaria à minimização do número de elementos não nulos no vetor  $\hat{\mathbf{x}}$ , denominado  $L_0$  de  $\hat{\mathbf{x}}$  e representado por  $\|\hat{\mathbf{x}}\|_0$ . Entretanto, no caso geral, isso equivale a testar todas as combinações de posições para os valores não nulos de  $\hat{x}$ , de modo que a restrição seja satisfeita com o menor  $L_0$  possível. Esse problema de minimização não é viável, pois resulta em complexidade de ordem combinatorial [43, 44], sendo necessário testar todas as combinações  $\binom{N}{K}$  para  $\hat{x}$ , em que  $K$  é o número de elementos não nulos do sinal (ou esparsidade). Entretanto, é possível utilizar a norma  $L_1$  no problema de minimização e ainda obter uma reconstrução teoricamente sem erro, porém utilizando mais medidas do que as exigidas por  $L_0$  [15, 16, 43]. O problema de minimização se torna

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{x}}} \|\hat{\mathbf{x}}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

que significa encontrar o valor mais esparsos de  $\hat{x}$  que representa as medidas  $b$  no espaço  $\mathbf{k}$ .

No espaço de medidas, o critério de esparsidade pode ser ilustrado nas Figuras 17, 18 e 19, na qual cada eixo coordenado equivale a um ponto do sinal (possui dois valores). Na Figura 17 é indicada a norma  $L_2$ . Fazendo  $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$ , temos a equação de restrição  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0$ , que em duas dimensões, é representada por uma reta. Minimizar  $L_2$  significa encontrar o ponto de menor energia, ou encontrar o ponto mais próximo da origem. Como a figura indica, nem sempre a minimização de energia gera resultados esparsos (sinal com poucos valores não nulos).

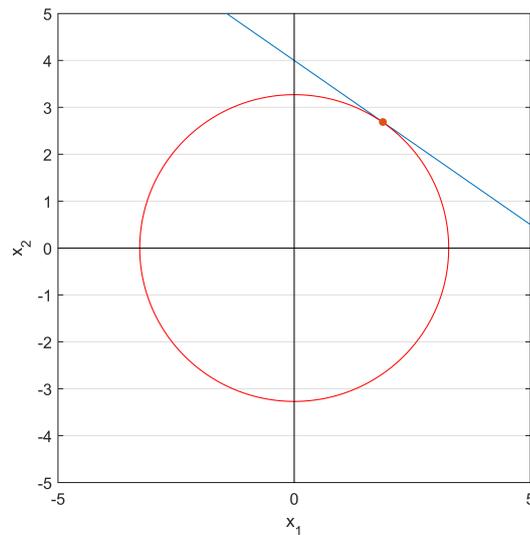


Figura 17 – Representação da solução da minimização da norma  $L_2$  de um sinal bidimensional

A minimização da norma  $L_1$  é representada na Figura 18. Ela permite, teoricamente, resultados mais esparsos. A representação da norma  $L_p$  do sinal está na Figura 19. Ela se sobressai sobre a norma  $L_1$  em casos onde a solução não encontra o sinal mais esparsos devido a proximidade de pontos da bola  $L_1$  que não estão sobre os eixos coordenados com a reta de restrição. Como o processo de *compressive sensing* é iterativo, dependendo da tolerância e critérios de parada, o resultado pode não ficar sobre um dos eixos coordenados.

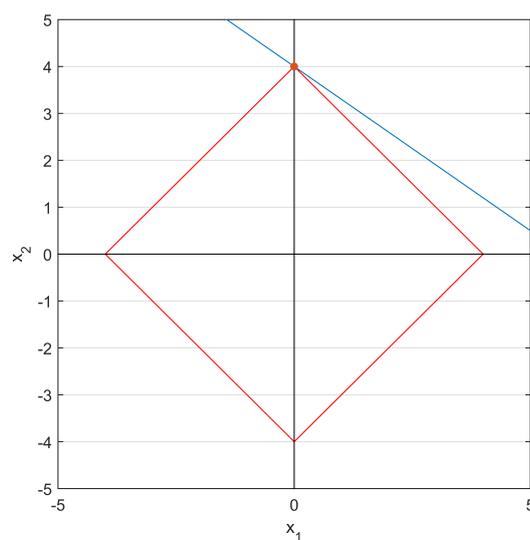


Figura 18 – Representação da solução da minimização da norma  $L_1$  de um sinal bidimensional

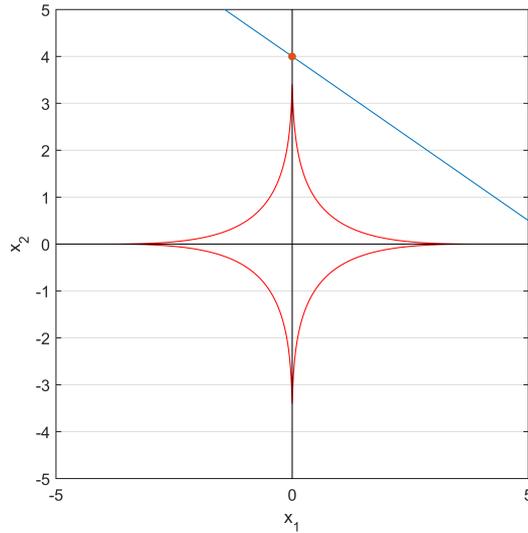


Figura 19 – Representação da solução da minimização da norma  $L_p$  de um sinal bidimensional, com  $p = 0.4$

O segundo critério de reconstrução diz respeito a como as medidas são extraídas; isto é, como projetar uma matriz  $\mathbf{M}$  que permita uma reconstrução bem sucedida do sinal. Existe uma propriedade, chamada de propriedade da isometria restrita (RIP, do inglês, *restricted isometry property*), que associada à incoerência, são condições suficientes para o projeto de uma matriz de medidas estável [43]. Considerando um sinal  $\nu$  de tamanho  $N$  com  $K$  elementos não nulos, a RIP é dada por

$$1 - \epsilon \leq \frac{\|\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\nu\|_2}{\|\nu\|_2} \leq 1 + \epsilon. \quad (2.71)$$

Se  $\epsilon$  não for muito próximo de 1, dizemos que a matriz  $\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$  obedece a RIP de ordem  $K$ . Se  $\epsilon$  for próximo ou igual a zero, os elementos da fração entre as desigualdades da Equação 2.71 possuem aproximadamente o mesmo valor: a matriz preserva o comprimento euclidiano do vetor  $\nu$ , o que indica que ele não está no espaço nulo de  $\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$ .

A incoerência diz que as colunas de  $\mathbf{T}^{-1}$  não podem ser representados pelas linhas de  $M$  e vice versa. Embora fosse necessário testar todas as combinações das matrizes  $M$  com a transformada e verificar se elas satisfazem a RIP (2.71), uma matriz aleatória (gaussiana) de medidas pode satisfazer tanto a incoerência como a RIP com alta probabilidade. Pode ser mostrado que a RIP e a incoerência podem ser satisfeitas, com alta probabilidade, com um número de medidas  $\ell \geq cK \log(K/N)$  [43, 41, 42], em que  $c$  é uma constante de baixo valor.

Entretanto, imagens de ressonância magnética não podem obter medidas de forma aleatória devido a limitações de *hardware*. Por isso, as trajetórias de aquisição de sinais

devem ser feitas de modo que o máximo possível de incoerência seja obtido. Dois tipos de trajetórias são capazes de obter um grau de incoerência satisfatório: linhas radiais e espirais de densidade variável [16]. Os artefatos de reconstrução são incoerentes e eles podem ser suprimidos sem afetar a qualidade da imagem. Uma alta concentração de elementos no centro do espaço  $\mathbf{k}$ , algo que é facilitado pelas trajetórias radial e espiral, facilita a reconstrução por concentrar informação de baixa frequência, que por natureza não é esparsa.

### 2.4.1 Compressive sensing com Pré-Filtragem

CS com pré-filtragem consiste no uso de filtros para filtrar a imagem no domínio da frequência, com as informações obtidas do espaço  $\mathbf{k}$  antes de realizar a minimização da norma  $L_1$  ou  $L_p$ . Em alguns estudos, foi mostrado que o uso da pré-filtragem com o filtro de Haar em um nível melhorou a qualidade da imagem reconstruída em relação a outros métodos [22]. A pré-filtragem é realizada por meio de filtros 2D, que são criados a partir de filtros 1D por meio do produto externo [45] entre dois filtros. Dados dois filtros,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , o produto externo é dado por

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 v_2 v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Após iterados, todos os filtros são criados através das combinações entre os filtros *wavelet* passa baixa e passa alta de cada nível. Excluindo os coeficientes de aproximação (pois não são versões esparsas da imagem), são criados 3 filtros DWT e 6 *dualtree* para cada nível da transformada. Para filtrar a imagem no domínio da frequência, é feito o produto ponto a ponto entre a imagem e o filtro, de modo que

$$I_{f,i,L,d} = I_b(X, Y) \odot H_{LH,HL,HH}(X, Y), \quad (2.73)$$

com  $i = 1 : 3$ ,  $L$  é o nível da transformada,  $d = 1 : 2$  (para o caso da decomposição *dualtree*),  $I_b$  são as medidas do espaço  $\mathbf{k}$  e  $H$  é a transformada de Fourier 2D do filtro. As operações de sub/sobreamostragem para o banco de análise não são feitas nessa etapa.

### 2.4.2 Algoritmos de Otimização

A abordagem para solução da Equação 2.70 será a de mínimos quadrados ponderados iterativamente (IRLS, do inglês, *Iteratively Reweighted Least Squares*) com informação a priori [46, 44]. Partindo da Equação 2.70, é feito um pequeno ajuste:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{x}}} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{x}}\|_p^p \\ & s.t. \quad \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

com  $0 < p \leq 1$ . Minimizar a Equação 2.74 equivale a minimizar a Equação 2.70, com a diferença de que  $L_p$  está sendo minimizado em vez de  $L_1$ .

A ideia do uso de informação a priori é saber quais são as posições de suporte do vetor  $\hat{\mathbf{x}}$  que não são nulas. Quando essa informação é conhecida, é possível reduzir o número de medidas necessárias para uma reconstrução bem sucedida. Seja  $\Phi$  todos os pontos para os quais  $\hat{\mathbf{x}} \neq 0$ . Então, a Equação 2.74 se torna

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}} \quad & \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \Phi}}^N |\hat{x}_k|^p \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Minimizando 2.75 leva a uma reconstrução em que é necessária menos informação do que a utilizada em 2.74, pois a minimização é focada reduzir o número de elementos não-nulos fora do suporte.

Aplicando o método IRLS, a Equação 2.75 se torna

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}} \quad & \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \Phi}}^N w_k^{p-2} \hat{x}_k^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

A ideia subjacente do IRLS é modificar o termo de ponderação  $w_k$  a cada iteração, de modo que ele se aproxime de  $\hat{x}_k$  e, conseqüentemente, o problema se torne o da Equação 2.75. Portanto, cada valor de  $\mathbf{w}$  equivale ao valor da iteração anterior de  $\hat{\mathbf{x}}$ , de modo que

$$w_k^{(m)} = \hat{x}_k^{(m-1)}. \quad (2.77)$$

Definindo  $w_k = 0, \forall k \in \Phi$ , o problema se torna o mesmo da Equação 2.75. Como  $w_k$  deve se aproximar de  $\hat{x}_k$  para todo  $k \notin \Phi$ , define-se

$$w_k^{(m)} = \begin{cases} \hat{x}_k^{(m-1)}, & k \notin \Phi \\ \tau \hat{x}_k^{(m-1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.78)$$

Em 2.78,  $\tau$  é uma pequena constante que permite uma fórmula fechada para  $\hat{x}_k^{(m)}$ . A fórmula é dada por [46]

$$\hat{\mathbf{x}}^{(m)} = \mathbf{Q}^{(m)} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}^{(m)} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.79)$$

em que

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N) \quad (2.80)$$

com

$$q_k = \begin{cases} |\hat{x}_k^{(m-1)}|^{2-p} + \mu, k \notin \Phi \\ \tau^{2-p} |\hat{x}_k^{(m-1)}|^{2-p} + \mu, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (2.81)$$

$\mu$  é uma constante de regularização usada para evitar que 2.81 seja zero em algum ponto da diagonal.

O problema de minimização agora significa resolver a Equação 2.79. Na prática, a matriz  $\mathbf{A}$  não é facilmente armazenada; o sistema de equações deve ser resolvido de forma indireta. Isso significa calcular o produto  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  sem possuir a matriz  $\mathbf{A}$ . Como a matriz  $\mathbf{A}$  em CS representa uma transformada, é possível calcular esse produto com o vetor  $\hat{\mathbf{x}}$ . Os valores iniciais são [44]

$$\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{Q}^{(0)} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.82)$$

com  $\mathbf{Q}^{(0)}$  igual a

$$q_k^0 = \begin{cases} 1, k \notin \Phi \\ \tau^{2-p}, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (2.83)$$

E o critério de parada, com  $\mu$  inicialmente igual a 1 é [44]

$$\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^m - \hat{\mathbf{x}}^{m-1}\|}{1 + \|\hat{\mathbf{x}}^{m-1}\|} \leq \frac{\sqrt{\mu}}{100}. \quad (2.84)$$

Depois que o critério é alcançado,  $\mu$  deve ser dividida por 10 e as iterações devem ser repetidas até que  $\mu \leq 10^{-8}$  [46].

O algoritmo a seguir sumariza o processo de reconstrução utilizando a técnica IRLS

1. Iniciar  $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}$  e  $\mathbf{Q}^{(0)}$ .
2. Fazer o laço:
  - a) Iniciar  $m = 1$ .
  - b) Atualizar  $\mathbf{Q}^{(m)}$ .
  - c) Calcular  $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ .
  - d) Se o critério de parada for satisfeito, ir para o passo 3. Caso contrário, fazer  $m = m + 1$  e retornar para o passo 2b.

3. Atualizar o parâmetro de regularização  $\mu = \mu/10$ .
4. Se  $\mu < 10^{-8}$ , terminar o processo. Caso contrário, retornar para o passo 2.

O processo de CS permite a reconstrução de imagens com qualidade superior àquelas que são recuperadas somente com a solução de energia mínima (ou mínimos quadrados), com menos artefatos de reconstrução. As Figuras 20 e 21 mostram a diferença entre essas reconstruções, com 50 linhas radiais utilizadas para o espaço  $\mathbf{k}$ , filtro biortogonal 4.4 para a pré-filtragem com três níveis da DWT.

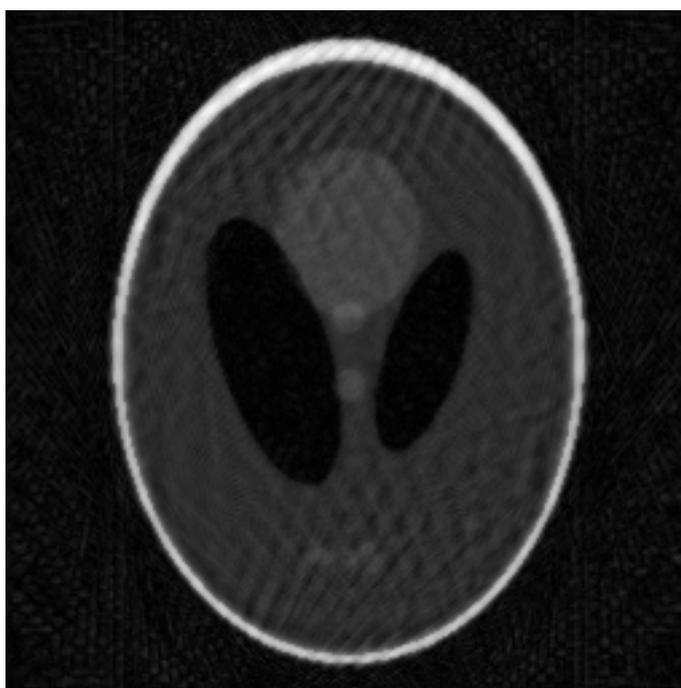


Figura 20 – Fantoma 256x256 recuperado com 50 linhas utilizando solução de energia mínima usando o filtro biortogonal 4.4 com três níveis.

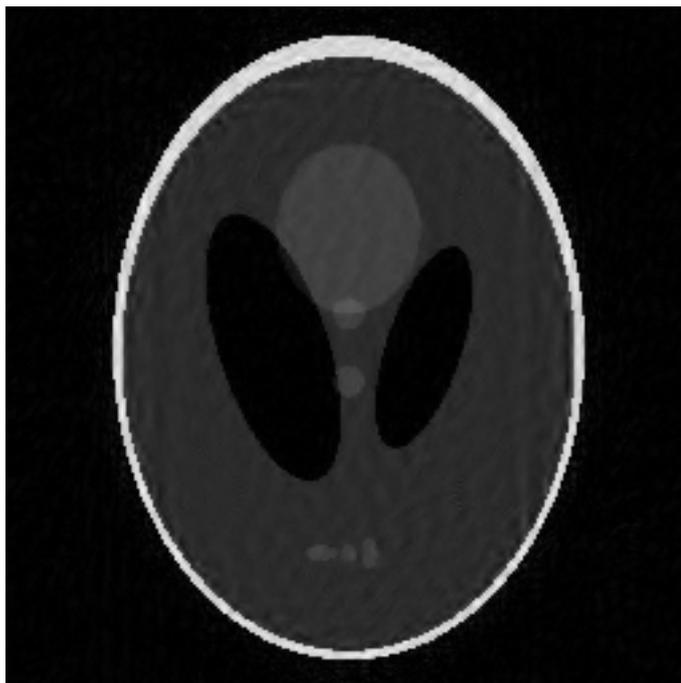


Figura 21 – Fantoma 256x256 recuperado com 50 linhas utilizando minimização da norma  $L_1$  por *compressive sensing* usando o filtro biortogonal 4.4 com três níveis.

## 3 Metodologia

### 3.1 Metodologia de Desenvolvimento

Nesta seção são descritos os algoritmos e procedimentos adotados para o desenvolvimento do sistema de reconstrução/recomposição proposto. Dentre os sistemas desenvolvidos estão os bancos de filtros DWT e *dualtree* no domínio da frequência, iteração e criação dos filtros 2D e pré-filtragem na frequência. Outros algoritmos utilizados, como banco de filtros de síntese e reconstrução das imagens por *compressive sensing* já foram implementados por outros autores e serão referenciados quando necessário.

#### 3.1.1 Processo de amostragem do espaço $\mathbf{k}$

A amostragem da imagem é o processo de se obter um vetor de medidas  $b$  que representa o espaço  $\mathbf{k}$ . Como trajetória utilizada para obtenção das medidas de RM, serão utilizadas linhas radiais, o que facilita o controle sobre a quantidade de informação obtida da imagem original. As linhas radiais são amostras do espectro de Fourier da imagem, que é uma aproximação no plano cartesiano para as amostras do espaço  $\mathbf{k}$ . As Imagens 22a e 22b mostram a amostragem para 30 e 90 linhas radiais, respectivamente.

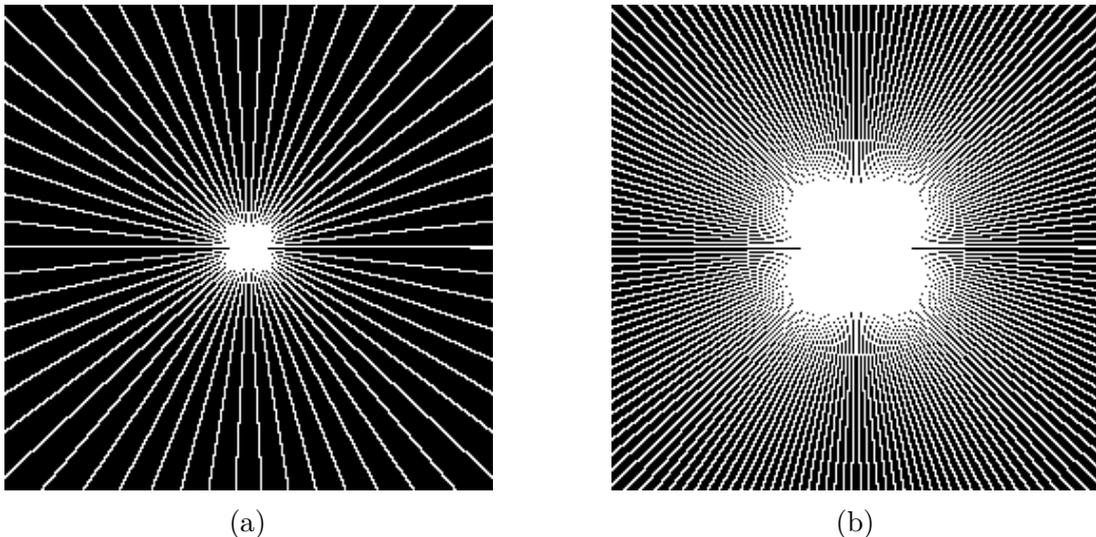


Figura 22 – Aproximação em linhas radiais do espaço  $\mathbf{k}$  em um plano cartesiano, com (a) 30 linhas e (b) 90 linhas radiais.

Essas linhas radiais são aplicadas como uma máscara à transformada de Fourier da imagem a ser reconstruída. A partir do resultado, é feito o processo de pré-filtragem por meio do banco de análise, conforme a Figura 23. Cada linha equivale a três filtros (HH, HL e LH) no caso da DWT e seis filtros no caso da DT-CWT.

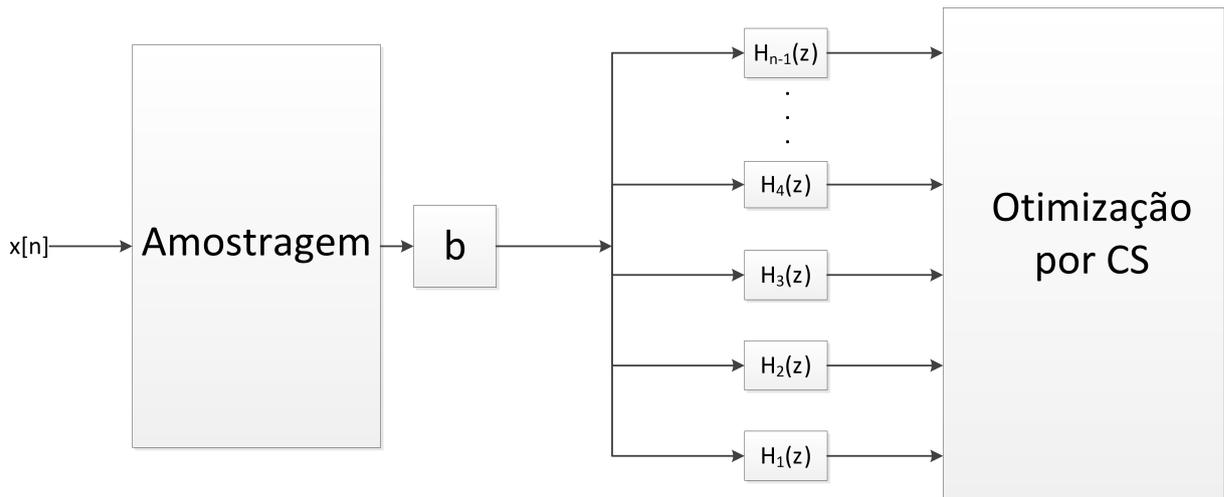


Figura 23 – Estrutura do banco de filtros de análise, precedidos do estágio de amostragem e preparação de medidas da imagem de ressonância magnética

### 3.1.2 Banco de filtros de análise

Os bancos de filtros de análise serão implementados a partir da iteração dos filtros *wavelet*, como Haar e Daubechies, assim como os filtros *dualtree* dtf1 a dtf4. O banco de filtros é o primeiro estágio do sistema de reconstrução, que precede a fase de otimização. O banco possui a forma da Figura 14. A subamostragem é aplicada somente após a fase de otimização.

### 3.1.3 Processos de recomposição da imagem

Os processos de recomposição são os métodos utilizados para recuperar as diferentes versões filtradas da imagem que foram reconstruídas via CS. O método de CS empregado foi o IRLS [44].

#### 3.1.3.1 Banco de filtros de síntese

O banco de filtros de síntese é implementado da maneira usual, utilizando sobre-amostragem e convoluções no domínio espacial, conforme a Figura 24, pois o otimizador retorna as imagens neste domínio. Entretanto, a subamostragem é feita logo antes da sobre-amostragem. A versão passa baixa é substituída por uma imagem vazia, de modo que a informação de baixa frequência é obtida diretamente das medidas originais. Após a recomposição da imagem, as medidas são adicionadas à Transformada de Fourier da imagem recuperada, substituindo qualquer valor que esteja ocupando os lugares de onde as medidas originais pertencem. Note que o cada linha do banco de filtros da Figura 24 é um banco de filtros 1D, de modo que no caso 2D, cada linha representa três versões da imagem.

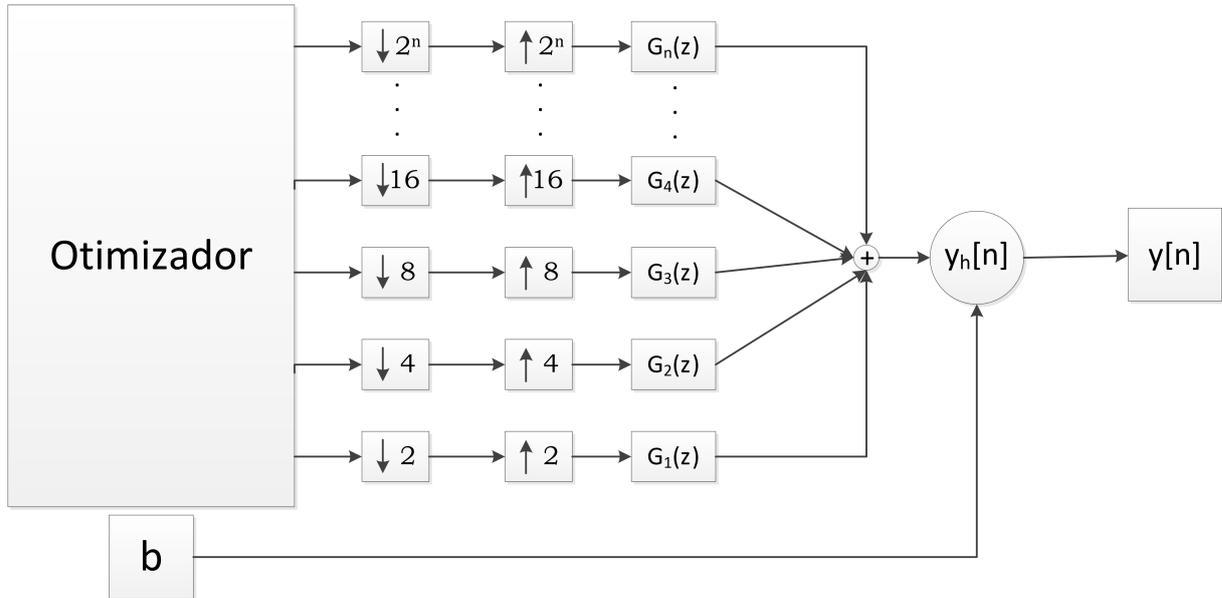


Figura 24 – Banco de filtros de síntese que sucedem a fase de otimização. A adição das medidas originais à imagem reconstruída é representada por  $b$

### 3.1.3.2 Recomposição espectral

O método de recomposição espectral [22] utiliza os resultados que vêm após o otimizador. Cada versão é transformada novamente para o domínio de Fourier e então divididas pelos filtros que foram utilizados em suas respectivas pré-filtragens. Basicamente, há uma inversão da filtragem. Então, os coeficientes das medidas originais  $b$  são adicionados a um espectro vazio, juntamente com todas as outras versões e combinados. Por fim, é calculada a transformada de Fourier, retornando a imagem para o domínio da imagem<sup>1</sup>.

## 3.2 Metodologia Experimental

As imagens de ressonância magnética serão obtidas por meio do banco de dados de imagens médicas *BIRN* [47]. É um banco gratuito que possui vários tipos de imagens de ressonância magnética realizadas com o mesmo protocolo (mesma máquina e mesmos cortes). Neste trabalho, serão utilizados cortes no plano transversal de imagens de cabeça, de tamanho 256x256. O corte utilizado foi o de número 9 de cada um dos sujeitos listados no Apêndice B.

Serão feitos três principais testes com os sistemas de reconstrução: teste de qualidade objetiva das imagens para cada um dos sistemas (o proposto e o de recomposição espectral) utilizando diferentes imagens variando o número de linhas radiais e teste de qualidade objetiva das imagens, comparando os resultados com diferentes filtros. Um ou-

<sup>1</sup> O autor do método não deu nenhum nome ao seu método de reconstrução em seu trabalho publicado. O nome *recomposição espectral* foi dado pelo autor desta dissertação devido a forma de funcionamento e também para facilitar a referência do método nas seções subsequentes.

tro teste irá verificar o tempo de reconstrução de imagens entre o método de banco de filtros e o de recomposição espectral.

As métricas de qualidade objetiva utilizadas serão a relação sinal ruído (SNR, do inglês *Signal to Noise Ratio*), indicada pela equação

$$SNR_{dB} = 20 \log \left( \frac{\|x\|_2}{\|x - x_r\|_2} \right) \quad (3.1)$$

e o índice de similaridade estrutural (SSIM, do inglês, *Structural Similarity Index*) [48]. Este índice possui vantagem em relação a SNR pois ele não leva em conta ruídos de deslocamento circular (*circular shift*) mas sim a percepção geral da estrutura da imagem. A SNR não relaciona o erro com a imagem original, de modo que podem existir inúmeras imagens com a mesma SNR em relação a outra imagem, sem similaridade alguma.

A SSIM é afetada por alterações estruturais na imagem, como filtrações, adição de ruído e artefatos de reconstrução. Apesar disso, seus valores não são afetados por alteração de brilho ou contraste. Dadas pequenas regiões  $x$  e  $y$ , onde  $x$  pertence a imagem de referência e  $y$  pertence a imagem a ser comparada, o SSIM é dado por

$$S(x, y) = l(x, y)c(x, y)s(x, y) = \left( \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1} \right) \left( \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \right) \left( \frac{\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} \right), \quad (3.2)$$

em que  $l$ ,  $c$  e  $s$  são a similaridade da luminância, contraste e estrutura respectivamente.  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes positivas utilizadas para estabilizar cada termo. A SSIM é calculada com uma janela móvel que passa por toda a imagem, de modo que o valor final é a média de todos os valores calculados [48]. Para este trabalho, o tamanho da janela utilizada é de 11 pixels de largura.

### 3.2.1 Teste de qualidade objetiva das imagens

Neste teste, as imagens são submetidas aos sistemas utilizando o mesmo filtro e número de linhas. Serão utilizados os filtros *dualtree* e Haar para essa etapa. O número de linhas radiais irá variar de 30 a 120 (com passos de 5), o que para uma imagem de tamanho 256x256 equivale a 15,66% e 55,73% de informação do espectro, respectivamente. Este teste foi feito com um computador desktop Windows 10, de arquitetura x64, com processador Intel Core i5 de 2,2GHz (dois núcleos) e 8 GB de memória RAM.

### 3.2.2 Teste da qualidade objetiva por diferentes filtros

Vários filtros foram testados utilizando o método de banco de filtros, com o mesmo número de linhas variando os níveis de 1 a 3. O principal objetivo é comparar o desempenho

dos filtros com as imagens de teste. Serão utilizadas 73 imagens do banco *BIRN* com 100 linhas radiais. Os filtros selecionados estão listados a seguir <sup>2</sup>:

- Filtros biortogonais (*bior*) 1.1, 1.3, 1.5, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3.1, 3.3, 3.5, 3.7, 3.9, 4.4, 5.5 e 6.8
- Filtros *coiflets* (*coif*) 1 a 5
- Filtros de Daubechies (*db*) 1 a 45
- Filtro discreto de Meyer (*dmey*), com 102 coeficientes
- Filtros para o banco de filtros *dualtree* (*dtf*) com o filtro de Farras para o primeiro estágio e os filtros *q-shift* de Kingsbury de 6, 10, 14 e 18 coeficientes para os próximos estágios
- Filtros biortogonais reversos *rbio* 1.1, 1.3, 1.5, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3.1, 3.3, 3.5, 3.7, 3.9, 4.4, 5.5 e 6.8
- Filtros *symlets* (*sym*) 1 a 45

A recomposição se dará por meio de um computador comum, no Octave em um computador remoto da *Digital Ocean* [49], com sistema operacional Ubuntu 14.04, de arquitetura x64, 8 GB de memória RAM e 4 núcleos de processamento.

### 3.3 Metodologia de Análise

Nesta seção serão discutidos os métodos de análise dos resultados obtidos, para decidir, dentro de um intervalo de confiança, qual método de reconstrução ou tipo de filtro é capaz de gerar imagens de melhor qualidade.

#### 3.3.1 Análise da qualidade objetiva das imagens

Para verificar qual método ou filtro gera imagens de melhor qualidade, serão utilizados testes pareados, como *t de student*, caso o conjunto de amostras siga uma distribuição normal; caso contrário, será utilizado o teste de *Wilcoxon*. Para verificar se as amostras seguem uma distribuição normal, será feito o teste de *Lilliefors* [50].

<sup>2</sup> A lista completa com os filtros, indicando suas posições nas linhas, está no Apêndice A

### 3.3.1.1 Testes de hipóteses para qualidade de reconstrução dos filtros

Este teste irá verificar a qualidade objetiva de SNR e SSIM dos 130 filtros por meio de testes de hipótese pareados. A hipótese nula é de que ambos os filtros levem a uma mesma média de SNR/SSIM(ou mediana, no caso de uma distribuição não normal). A hipótese alternativa é que o resultado de um dos filtros tenha média/mediana maior que o outro. Serão feitos dois testes de hipótese para cada par de filtros, em que um teste terá a hipótese alternativa caso o primeiro filtro tenha média/mediana maior que o segundo e vice-versa. O objetivo é uma melhor visualização dos resultados, que foi feita utilizando uma imagem de tamanho 130x130, onde as colunas e linhas representam os filtros utilizados para a reconstrução. Cada ponto da imagem será uma representação do valor de  $p$  do teste de hipótese, em que valores menores que 0,05 (que indicam que a hipótese nula é improvável) serão indicados por pontos brancos. Caso não haja indícios que a hipótese nula deva ser rejeitada (valores de  $p$  maiores que 0,05), os *pixels* na imagem serão escuros. A representação dos resultados é semelhante à Figura 25.

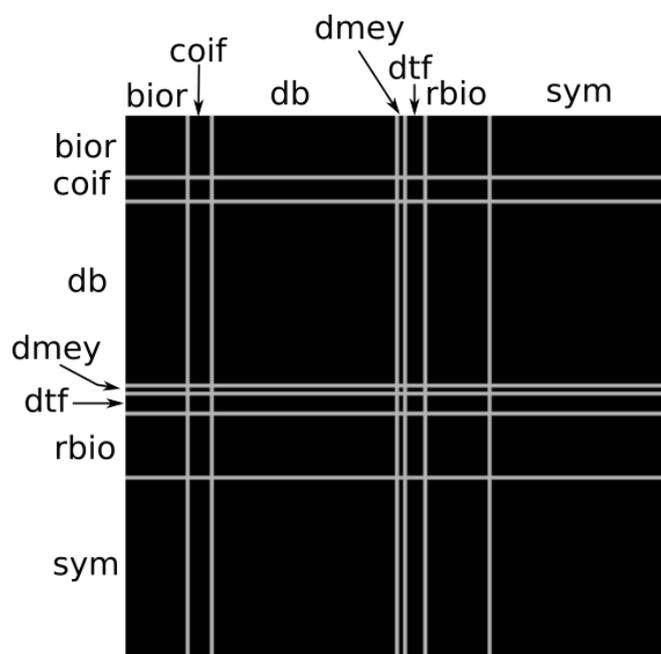


Figura 25 – Correspondência das regiões da imagem de resultados com os filtros. Cada linha cinza delimita onde o resultado de uma família de filtros começa e outro se inicia

Na Figura 25 estão indicados as zonas verticais das famílias de filtros *wavelet*. Os padrões também se repetem nas linhas. Os pontos de cada família estão ordenados de acordo com o número da transformada. O primeiro ponto das famílias bior e rbio correspondem às *wavelets* bior1.1 e rbio1.1, enquanto que das famílias sym, db e dtf são os filtros db1 (ou Haar), sym1 e dtf1. E os últimos são bior6.8, rbio 6.8, db45, sym45 e dtf4, respectivamente. dmey possui apenas um filtro, que está entre as famílias db e dtf.

Na imagem de resultados, os pontos de simetria da matriz são pontos em que a hipótese alternativa irá alternar entre média/mediana maior ou menor. Nos casos em que o valor de  $p$  seja menor que 0,05, espera-se que o valor simétrico seja maior que 0,95, seguindo um comportamento anti-simétrico. Portanto, o significado do ponto  $p(i, j)$  é: *para valores acima da diagonal principal, a hipótese alternativa do teste irá verificar se o filtro da linha  $i$  possui média/mediana maior que o filtro da coluna  $j$ ; para valores abaixo da diagonal principal, a hipótese alternativa do teste irá verificar se o filtro da linha  $i$  possui média/mediana menor que o filtro da coluna  $j$ .*

Entretanto, outra forma de visualizar os resultados é contar os números de pixels brancos na horizontal. Quanto mais pixels brancos, maior o número de rejeições da hipótese nula, indicando que há uma alta probabilidade daqueles filtros gerarem imagens de melhor qualidade. Para melhorar a visualização dos resultados que utilizarem a Figura 25 como modelo, serão utilizadas cores na horizontal para diferenciar as famílias de *wavelets*. O modelo está na Figura 26. As cores utilizadas são azul, verde, ciano, vermelha, magenta, amarela e branca, que representam as famílias *wavelets* biortogonais, *coiflets*, Daubechies, Meyer, *dualtree*, biortogonais reversas e *symlet*

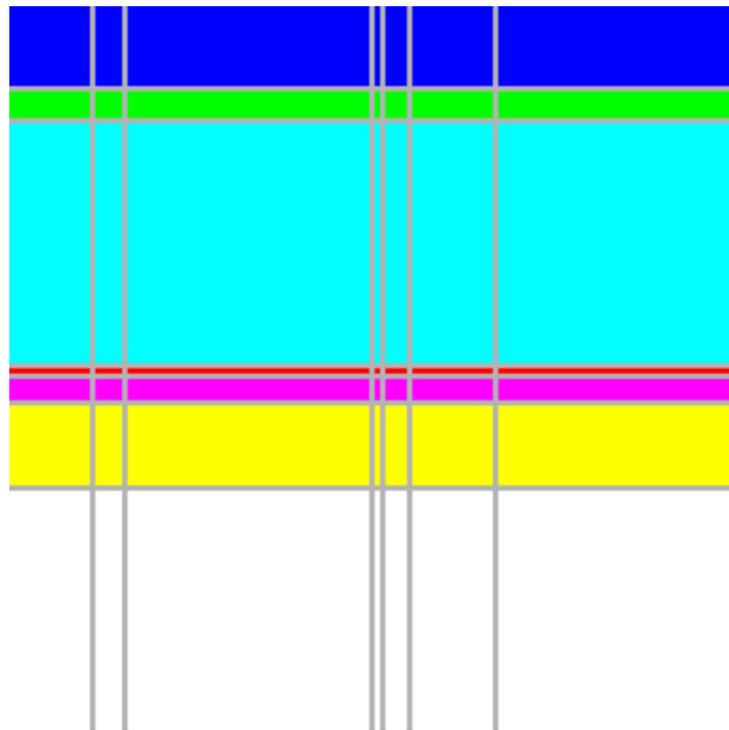


Figura 26 – Cores utilizadas para separar as diferentes famílias de *wavelets*. As cores azul, verde, ciano, vermelha, magenta, amarela e branca representam as *wavelets* biortogonais, *coiflets*, Daubechies, Meyer, *dualtree*, biortogonais reversas e *symlets*, respectivamente.

## 4 Resultados e Discussões

### 4.1 Comparação de qualidade objetiva entre diferentes métodos de reconstrução

Nas Figuras 27 e 28 são indicados respectivamente, para uma mesma imagem de RM e utilizando o mesmo filtro (dtf4 com dois níveis), a SNR e SSIM em função das linhas radiais, variando o número de linhas de 30 a 120 em passos de 5. Para esse teste, foi utilizada uma única imagem de cabeça. A norma de minimização para todos os casos foi a  $L_1$ .

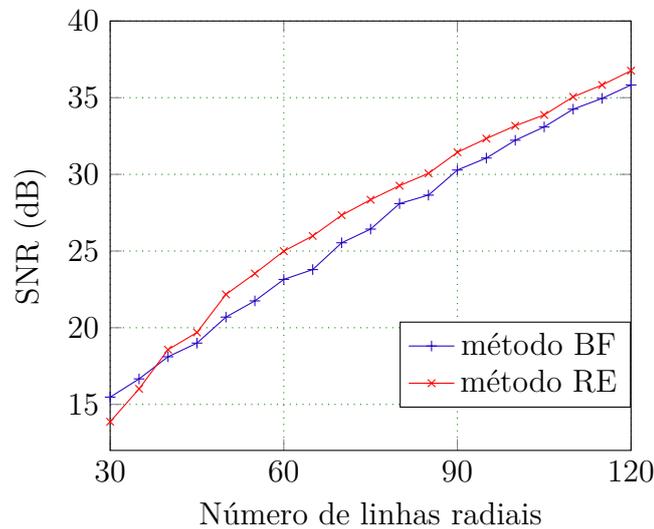


Figura 27 – Gráfico da SNR em função das linhas radiais para o filtro dtf4 em dois níveis

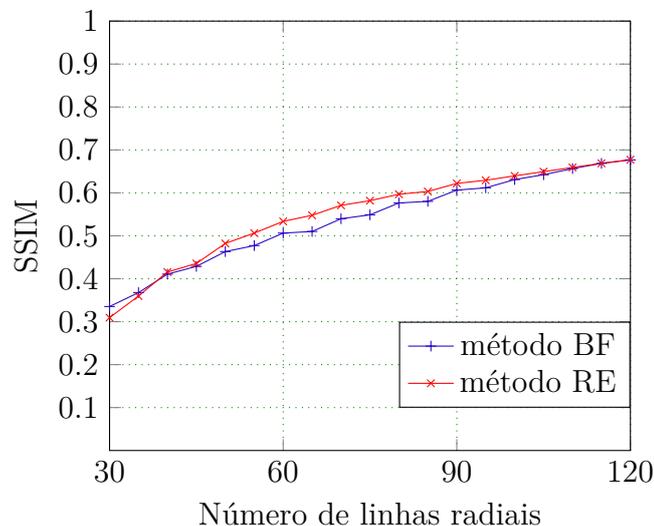


Figura 28 – Gráfico da SSIM em função de linhas radiais para o filtro dtf4 em dois níveis

O método de recomposição espectral possuiu uma qualidade objetiva, tanto em termos de SNR e SSIM, melhor que o banco de filtros de síntese. Para indicar melhor essa característica, nas Figuras 29 e 30 estão os mesmos gráficos para filtros de Haar em 1 nível.

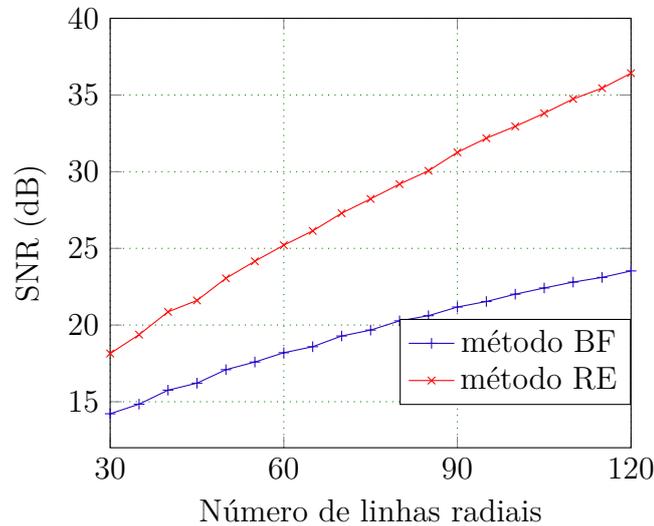


Figura 29 – Gráfico da SNR em função de linhas radiais para o filtro de Haar em um nível

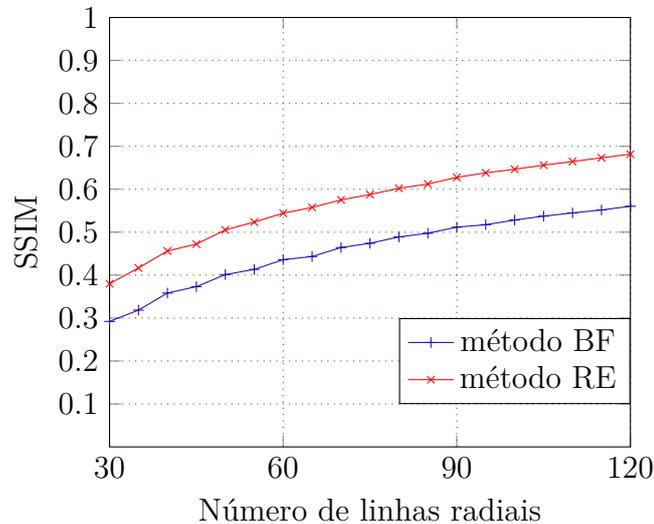


Figura 30 – Gráfico da SSIM em função de linhas radiais para o filtro de Haar em um nível

Para o filtro de Haar, o banco de filtros de síntese gera imagens de qualidade consideravelmente inferior se comparado ao método de recomposição espectral, que por sua vez, apresentou valores de SNR e SSIM similares aos obtidos com o filtro dtf4. Isso mostra que o método de recomposição espectral é menos sensível à seletividade de banda do filtro: os filtros dtf4 utilizados possuem bandas mais estreitas, enquanto que os filtros de Haar decaem lentamente ao longo do espectro. As Figuras 31a e 31b mostram imagens

recuperadas com o banco de filtros e com a recomposição espectral, respectivamente, usando 100 linhas radiais e um nível da decomposição *wavelet* 2D.

O método de banco de filtros de síntese melhora sua qualidade com o aumento de níveis da transformada, conforme a Tabela 1. Já o método de recomposição espectral é aproximadamente insensível ao aumento de níveis.

Tabela 1 – Valores de SNR e SSIM para uma mesma imagem utilizando o filtro *dft1* em vários níveis

Nº de níveis	Banco de filtros		Recomposição Espectral	
	SNR (dB)	SSIM	SNR (dB)	SSIM
1	26,5	0,567	32,5	0,632
2	31,9	0,628	33,3	0,642
3	32,9	0,642	33,3	0,642
4	33,0	0,643	33,3	0,642
5	33,0	0,643	33,3	0,642

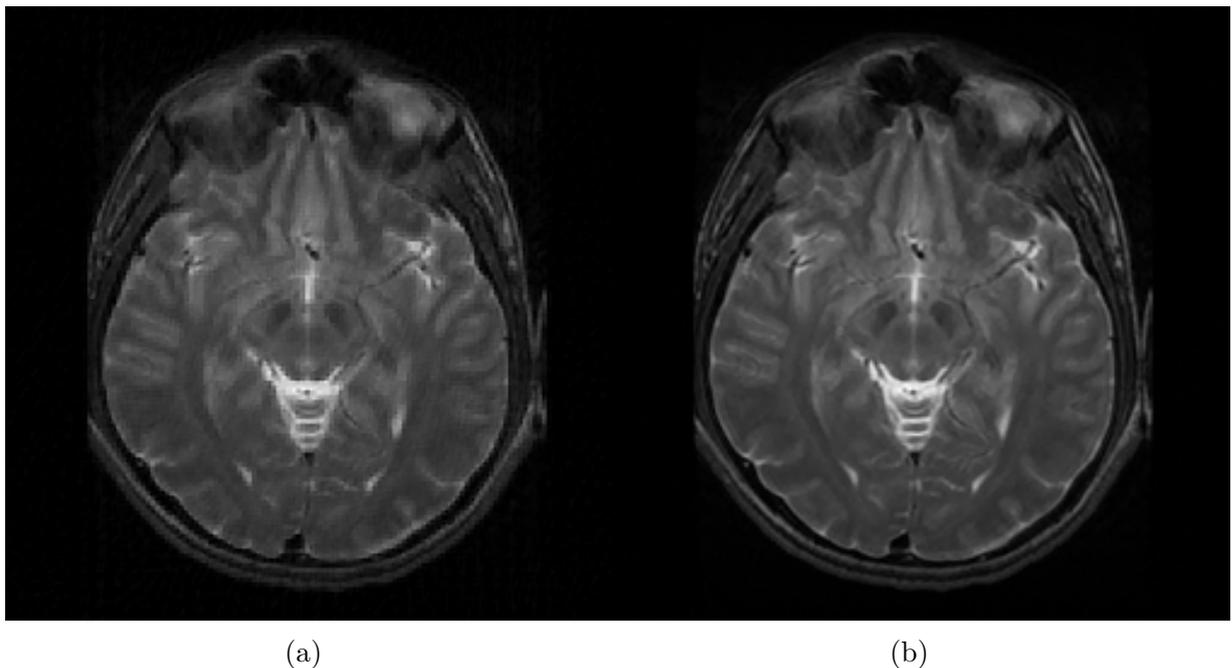


Figura 31 – Imagens reconstruídas com (a) banco de filtros e (b) recomposição espectral, utilizando 100 linhas radiais e o filtro de Haar.

O banco de filtros é consideravelmente inferior ao método de recomposição espectral para o uso em um nível, mas obtém valores comparáveis quando se adiciona um nível de decomposição, especialmente nos valores de SSIM. Uma característica apresentada pelos gráficos de SSIM em função do número de linhas radiais é a redução da taxa de aumento do SSIM. Isso indica que a similaridade estrutural da imagem tende a um

limite, de modo que a percepção subjetiva da qualidade da imagem não melhora muito com o aumento das linhas radiais.

## 4.2 Comparação de qualidade objetiva entre diferentes filtros

Nesta parte, foram feitas reconstruções com os 130 filtros. A reconstrução utilizou 100 linhas radiais e  $L_1$  como norma de minimização. As imagens com os resultados dos valores de  $p$  com base nos valores de SNR estão nas Figuras 32a, 33a, 34a para a reconstrução com um, dois e três níveis, respectivamente. Para os valores obtidos com a SSIM, os resultados estão nas Figuras 32b, 33b, 34b.

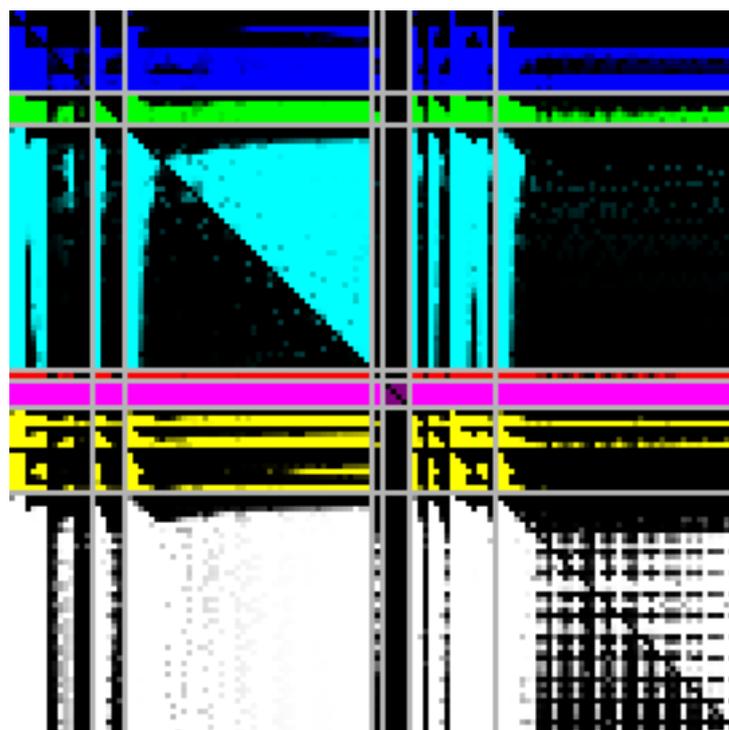
Cada uma das linhas ou colunas representa um filtro, e um ponto da matriz indica o valor de  $p$  para o teste de hipótese entre os dois filtros. Um pixel branco indica um valor de  $p$  baixo (menor que 0,05), de modo que a hipótese nula (as amostras possuem média ou mediana iguais) foi rejeitada; caso contrário, os pixels serão pretos.

As imagens devem ser interpretadas de acordo com o número de pixels brancos na horizontal: quanto mais pixels brancos uma coluna possuir, mais vezes a hipótese nula foi rejeitada, com a hipótese alternativa sendo que o filtro daquela coluna pode possuir média ou mediana de SNR/SSIM maior que a do filtro da linha.

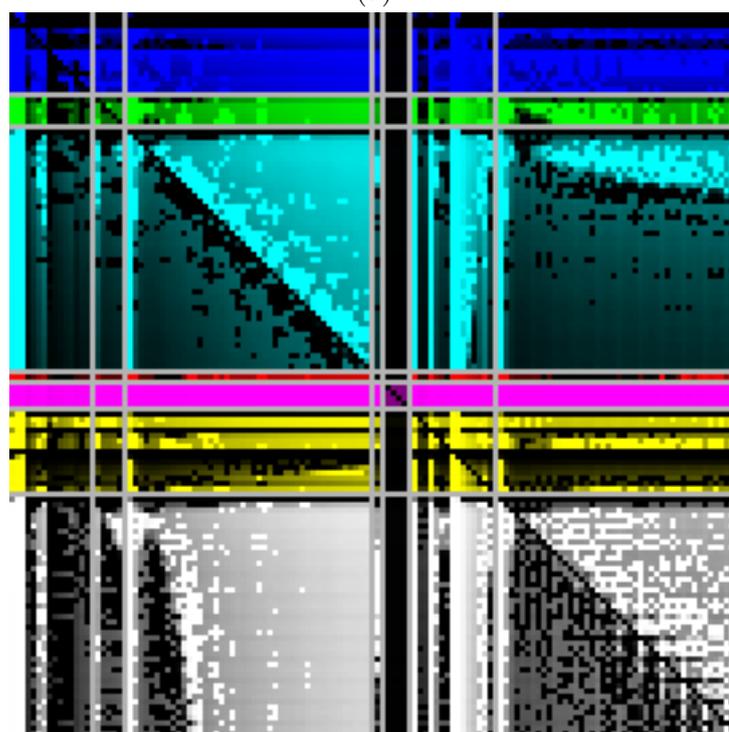
### 4.2.1 Resultados estatísticos para a decomposição em um nível

Na Figura 32a, os filtros que mais possuem pixels brancos na horizontal são os filtros dtf, que correspondem à cor magenta. Os filtros que possuem pixels mais pretos (isto é, a hipótese nula não foi rejeitada) foram os filtros rbio3.1 (linha 78), bior1.5 (linha 3), db1/Haar (linha 21), sym1 (linha 86), bior1.1 (linha 2) e rbio1.1 (linha 71). Sem contar os filtros *dualtree*, os melhores filtros foram bior4.4 (linha 13), bior6.8 (linha 15), rbio1.5 (linha 73), bior3.1 (linha 9) e bior3.3 (linha 14). O filtro discreto de Meyer ficou na 24ª posição.

Os filtros com menos pixels brancos em uma linha são iguais, como db1, sym1, bior1.1 e rbio1.1. Entretanto, um filtro que possui coeficientes diferentes e que obteve resultados semelhantes foi o rbio3.1. Para um nível, os resultados médios de SNR foram baixos, conforme a Tabela 1. A Tabela 2 mostra as primeiras e últimas 10 posições para a Imagem 32a.



(a)



(b)

Figura 32 – Imagens com valores de  $p$  com base na (a) SNR e (b) SSIM, para os 130 filtros testados, reconstruídos com um nível do banco de filtros

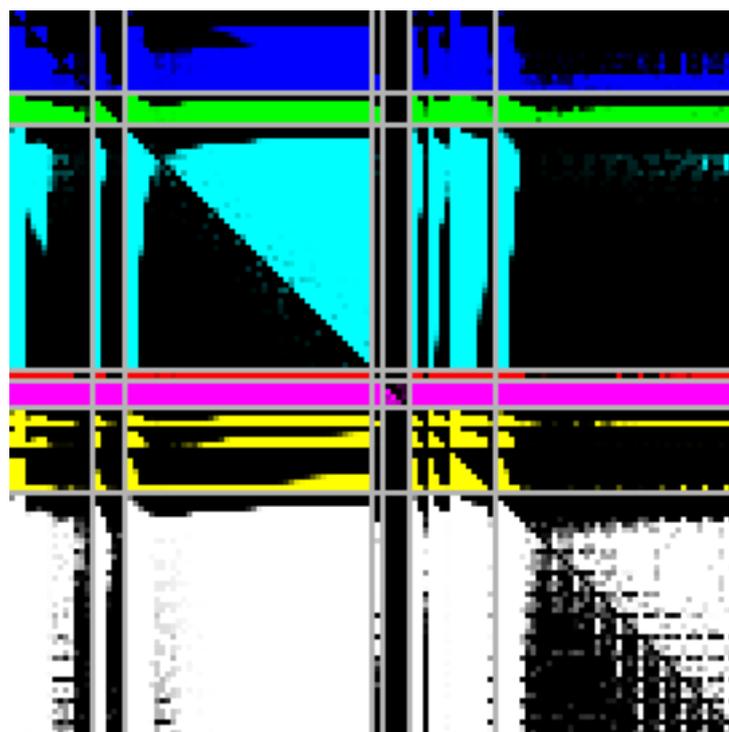
Tabela 2 – Ordem de posições dos número de ocorrências de valores de  $p$  menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SNR e um nível do banco de filtros

Maior número de rejeições		Menor número de rejeições	
Filtro	Nº de ocorrências	Filtro	Nº de ocorrências
dtf1, dtf2, dtf3 e dtf4	126	rbio3.1	0
bior5.5 e bior4.4	115	bior1.5	1
bior3.1	114	bior1.3	2
bior6.8	113	rbio1.1, bior1.1, db1 e sym1	3
rbio1.5	110	rbio3.3	7
sym17	108	rbio2.2	8
sym18	107	rbio3.5	9
coif5	103	db2 e sym2	10
sym13	101	coif1 e rbio5.5	12
sym 10 e sym21	100	bior2.6 e bior2.8	14

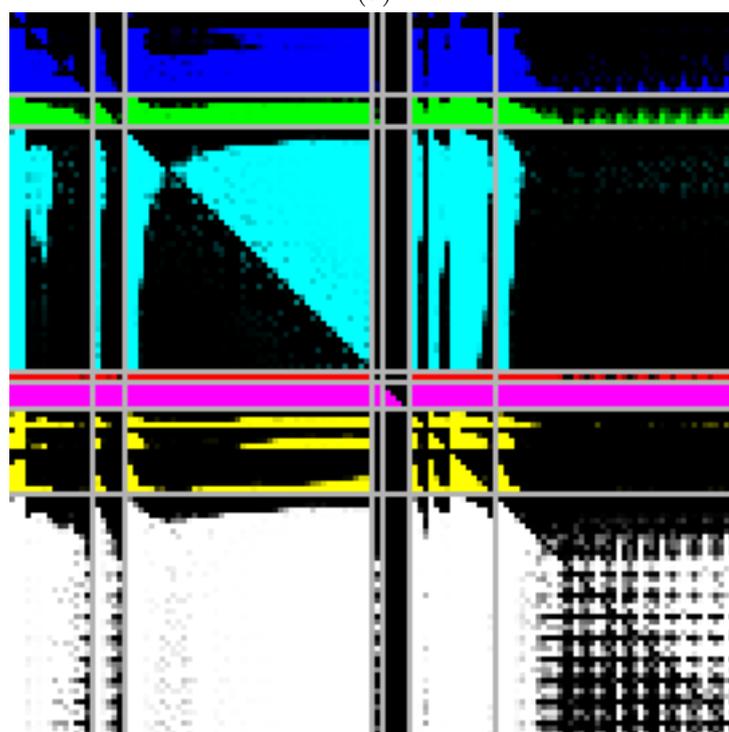
A Figura 32b indica os resultados dos valores de  $p$  com base no SSIM, para um nível. Como no caso da SNR, os filtros que mais rejeitaram a hipótese nula foram os filtros *dualtree*. Entretanto, os vários outros testes não rejeitaram a hipótese nula, para ambas as hipóteses alternativas. Logo, os testes foram inconclusivos, com a maioria dos filtros gerando resultados semelhantes.

#### 4.2.2 Resultados estatísticos para a decomposição em dois níveis

Para dois níveis, os resultados também indicaram que os filtros *dualtree* (cor magenta) foram superiores aos outros. Uma mudança notável é a melhora de resultados para as famílias *coiflets* e *symlets* (cores magenta e branca, respectivamente). Os resultados dos testes de hipóteses sobre os valores do SSIM também foram mais conclusivos se comparados aos resultados obtidos com um nível. A imagem de SNR e SSIM geradas são semelhantes, com a família de filtros *symlet* sendo ligeiramente melhor em SSIM do que na imagem de SNR. As Tabelas 3 e 4 mostra as primeiras e últimas 10 posições para as Figuras 33a e 33b.



(a)



(b)

Figura 33 – Imagens com valores de  $p$  com base na (a) SNR e (b) SSIM, para os 130 filtros testados, reconstruídos com dois níveis do banco de filtros

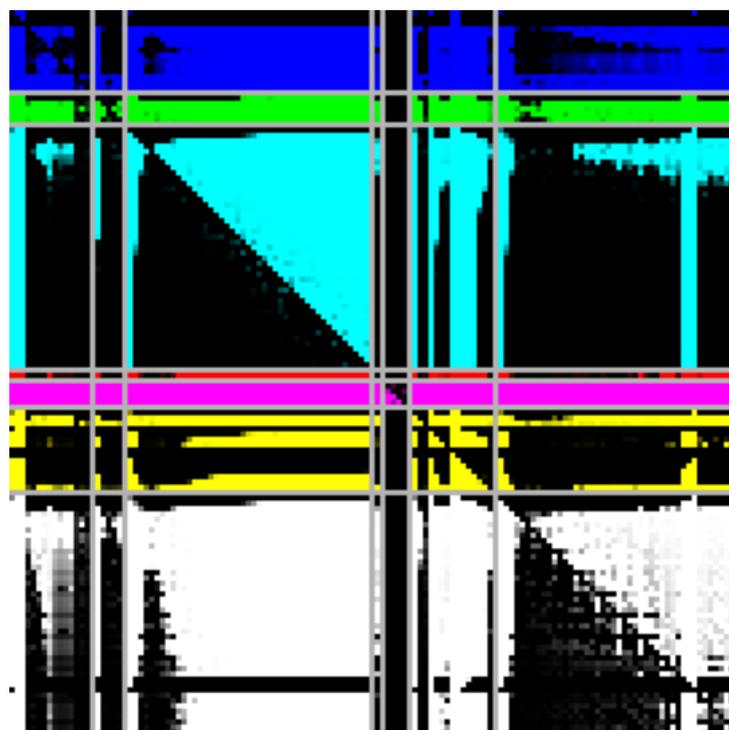
Tabela 3 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de  $p$  menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SNR e dois níveis do banco de filtros

Maior número de rejeições		Menor número de rejeições	
Filtro	Nº de ocorrências	Filtro	Nº de ocorrências
dtf2 e dtf3	127	rbio3.1	0
dtf1 e dtf4	126	rbio3.3	1
coif5	123	bior1.5	2
coif4	117	bior1.3	3
sym9	112	rbio2.2	4
sym10	111	bior1.1, db1, rbio1.1 e sym1	5
sym13	110	rbio3.5	9
bior6.8	109	rbio3.7	10
sym8	108	db2, rbio3.9 e sym2	11
sym12 e sym18	104	coif1	13

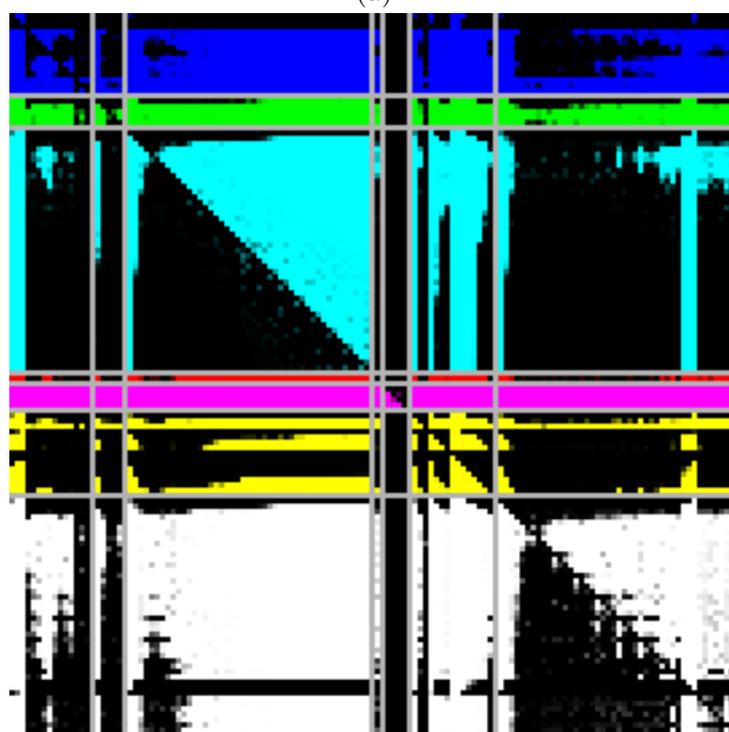
Tabela 4 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de  $p$  menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SSIM e dois níveis do banco de filtros

Maior número de rejeições		Menor número de rejeições	
Filtro	Nº de ocorrências	Filtro	Nº de ocorrências
dtf4	129	rbio3.1	0
dtf3	128	rbio3.3	1
dtf2	127	bior1.5	2
dtf1	126	bior1.3	3
sym14	113	rbio2.2	4
sym13	112	bior1.1, db1, rbio1.1, rbio3.7 e sym1	5
sym17	110	rbio3.7	10
sym22	107	sym3	11
sym25 e sym21	106	db2 e sym2	12
coif5	103	rbio2.4	14

## 4.2.3 Resultados estatísticos para a decomposição em três níveis



(a)



(b)

Figura 34 – Imagens com valores de  $p$  com base na (a) SNR e (b) SSIM, para os 130 filtros testados, reconstruídos com três níveis do banco de filtros

Tabela 5 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de  $p$  menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SNR e três níveis do banco de filtros

Maior número de rejeições		Menor número de rejeições	
Filtro	Nº de ocorrências	Filtro	Nº de ocorrências
dtf3 e dtf4	128	rbio3.1	0
dtf1 e dtf2	126	rbio3.3	1
sym6	117	bior1.5	2
coif3	116	bior1.3	3
sym5	114	rbio2.2	4
bior4.4, coif2 e sym8	112	sym37	5
coif4	111	db1, sym1, bior1.1 e rbior1.1	6
rbio1.5	110	rbio3.5	10
bior6.8	109	sym35	11
bior5.5, coif5 e sym7	106	sym34 e rbio3.7	12

Tabela 6 – Ordem de posições do número de ocorrências de valores de  $p$  menores que 0,05 para os testes de hipótese usando a SSIM e três níveis do banco de filtros

Maior número de rejeições		Menor número de rejeições	
Filtro	Nº de ocorrências	Filtro	Nº de ocorrências
dtf4	129	rbio3.1	0
dtf2 e dtf3	127	rbio3.3	1
dtf1	126	bior1.5	2
bior6.8	124	bior1.3, rbio2.2 e sym37	3
rbio1.5	121	rbio3.5	6
bior4.4	120	bior1.1, db1, rbio1.1 e sym1	7
coif3, coif4 e sym8	116	rbio3.7 e sym36	11
sym6	113	sym35	12
coif5	111	rbio3.9	13
sym7	110	db44	14

Para três níveis, os resultados das famílias *coiflets* (cor verde) foram ainda melhores do que para dois níveis, acompanhada da piora de alguns filtros *symlets* (cor branca) para os resultados baseados na SNR (os resultados para SSIM foram ligeiramente melhores, mas ainda inferiores ao de dois níveis). Os filtros com menores rejeições da hipótese nula se mantiveram relativamente constantes, como os filtros que são iguais, como db1, sym1, bior1.1 e rbio1.1. Notáveis exceções foram os filtros rbio3.1 e rbio3.3, que apareceram em

todos os 10 piores resultados. Casos interessantes foram os filtros sym34, 35, 35 e 37, que apareceram nas 10 últimas posições para a reconstrução com três níveis. Na imagem com os valores de  $p$  (Figuras 34a e 34b), pode ser vista uma faixa preta na parte de baixo, indicando esses filtros. Essa faixa não existe nas imagens para dois níveis. Esse fenômeno pode ser melhor observado nas Figuras 37a e 37b, que mostra os valores médios. Para três níveis, os valores médios de SNR e SSIM desses filtros apresentaram uma alta queda.

Os espectros dos filtros com os piores resultados estão nas Figuras 35a e 35b. As imagens foram obtidas por meio de binarização, com limiar igual a 70% do ganho do filtro. Cada cor indica um nível do banco de filtros. Esses filtros possuem bandas largas e que englobam parte do centro, onde a informação de baixa frequência é garantida pelas medidas obtidas (veja as Figuras 22a e 22b). Aumentando a concentração de baixas frequências nos filtros, as versões pré-filtradas das imagens se tornam menos esparsas, dificultando o processo de reconstrução de *compressive sensing* e, por consequência, reduzindo a qualidade das imagens. Para comparação, os dois filtros da transformada dtfl são mostrados nas Figuras 36a e 36b. Embora eles possuam um espectro nas regiões de baixas frequências semelhantes ao do filtro bior3.3, eles possuem maior banda em altas frequências, o que permite a maior preservação de informação que podem auxiliar na reconstrução por CS.

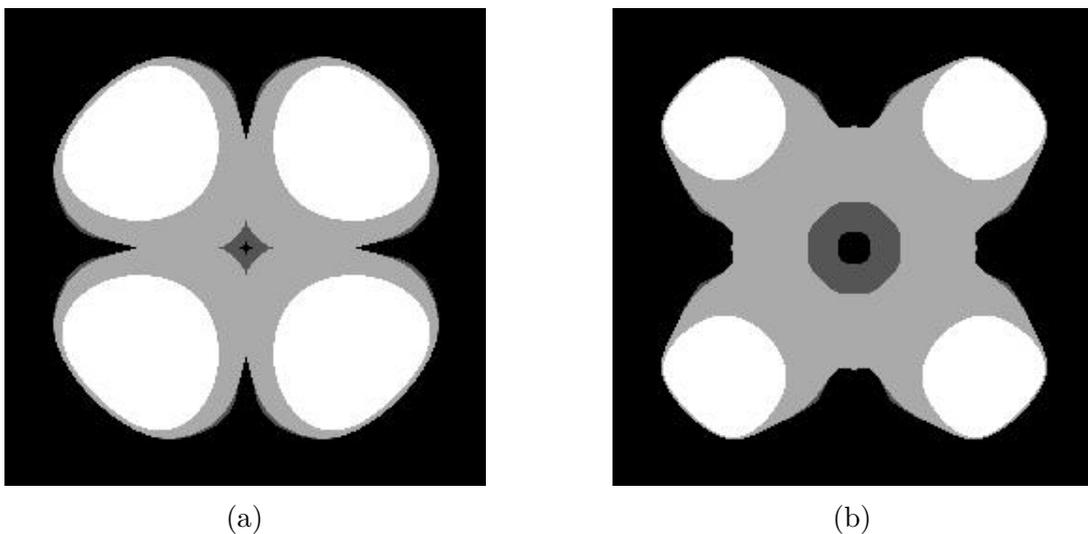


Figura 35 – Espectro 2D em três níveis dos filtros (a) biortogonal reverso 3.1 e (b) 3.3. Cada tom de cinza indica a cobertura do espectro para cada nível da transformada. Branco indica o 1º, cinza claro indica o 1º e 2º níveis, e cinza escuro indica os três níveis

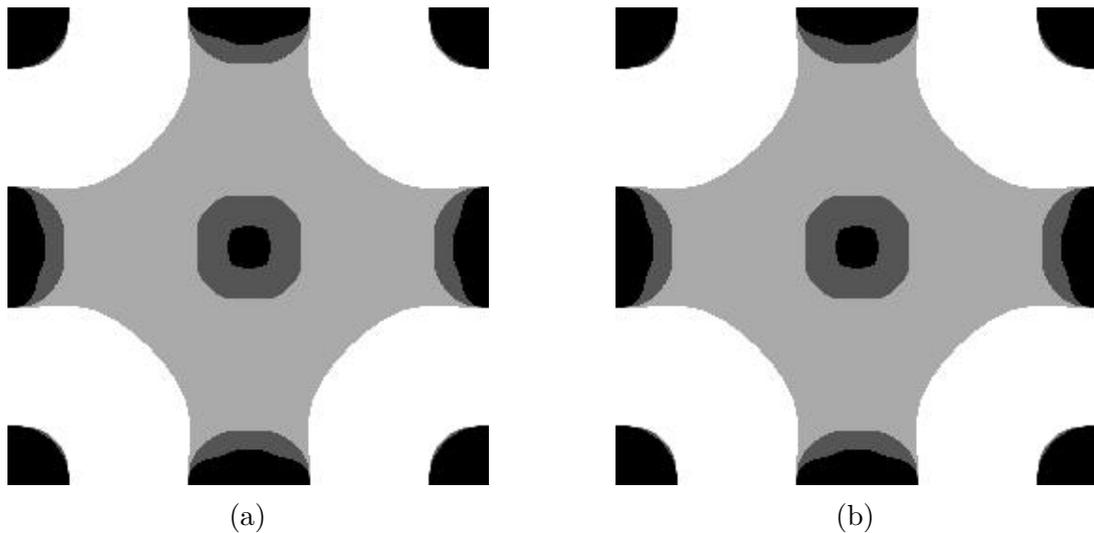
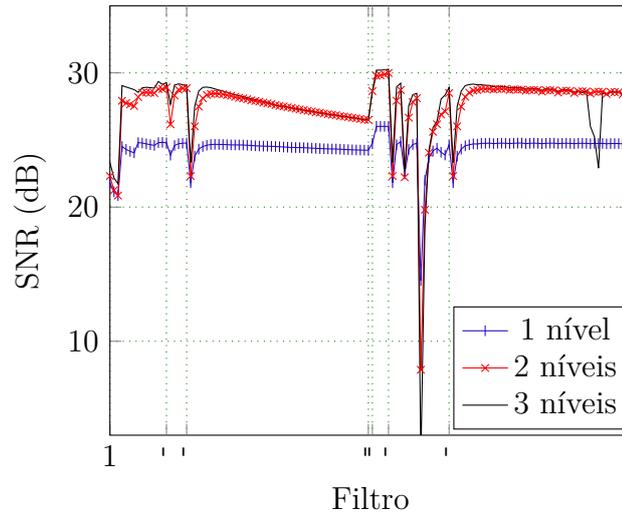


Figura 36 – Espectro 2D em três níveis do filtro *dtfl*. O filtro da árvore superior é representado por (a), enquanto que o filtro da árvore inferior é representado por (b). Cada tom de cinza indica a cobertura do espectro para cada nível da transformada. Branco indica o 1º, cinza claro indica o 1º e 2º níveis, e cinza escuro indica os três níveis

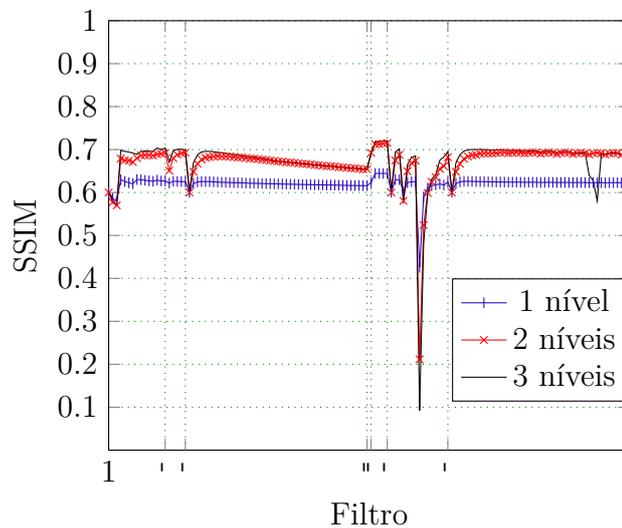
#### 4.2.4 Valores médios de SNR e SSIM

As Figuras 37a e 37b resumam, respectivamente, os resultados de SNR e SSIM médios obtidos com cada família de filtros. Cada ponto no eixo horizontal indica a posição do filtro nas imagens que representa os valores de  $p$ . Para identificar cada filtro, veja o Apêndice A.

Os valores médios de SNR e SSIM acompanharam as mesmas tendências de irem diminuindo a qualidade objetiva das imagens com o aumento do tamanho dos filtros, principalmente para a família de Daubechies. Tanto para a família Daubechies como *symlets*, os valores tiveram um pico em volta do filtro número 7 e foram diminuindo, com uma queda mais acentuada para os filtros Daubechies. O filtro biortogonal reverso obteve, na média, menores valores de SNR e SSIM do que os filtros biortogonais, que se mantiveram valores mais constantes, especialmente para dois e três níveis. O filtro discreto de Meyer possuiu um valor médio comparável aos melhores resultados dos filtros de Daubechies e *symlets*. Por fim, os filtros com melhores resultados foram os filtros *dualtree*, *coiflets*, *symlets* e os filtros biortogonais com maior número de coeficientes.



(a)



(b)

Figura 37 – Valores médios de (a) SNR e (b) SSIM obtidos para as 73 imagens para os 130 filtros. Cada ponto representa um filtro. As divisões horizontais do gráfico representam famílias de filtros

Os resultados médios foram coerentes com os testes estatísticos, onde os filtros *coiflets*, *dualtree* e *symlets* possuíam, em geral, melhores resultados para as imagens utilizadas. Os filtros biortogonais 3.1 e 3.3 (mostrados nas Figuras 35a e 35b) apresentaram resultados consideravelmente piores do que qualquer outro filtro e com menor qualidade com o aumento de níveis, o que foi algo que se repetiu somente em alguns filtros *symlets*.

Em relação aos níveis, houve um aumento de cerca de 5 dB para a SNR do 2º nível em relação ao 1º. O aumento para o 3º nível melhorou ligeiramente, com esse aumento variando entre 0 e 2 dB. Em alguns casos, a reconstrução com dois níveis gerou resultados melhores.

### 4.3 Tempos de reconstruções das imagens

Foram computados os tempos de reconstrução para o método de banco de filtros e recomposição espectral para as 73 imagens selecionadas. Para ambos os casos, foram utilizados os filtros dtf1, de 1 a 3 níveis. O tempo foi separado em tempo de minimização e tempo de recomposição. O tempo de minimização é o tempo de recuperação da imagem por meio do processo de CS, enquanto que o tempo de recomposição é o processo do método de recomposição por banco de síntese ou recomposição espectral.

A Tabela 7 mostra os tempos médios de minimização e recomposição de cada método.

Tabela 7 – Valores médios (em segundos) dos tempos de reconstrução para o método de banco de filtros e recomposição espectral utilizando o filtro dtf1 com 1, 2 e 3 níveis.

Nº de níveis	Banco de filtros			Recomposição Espectral		
	Tempo de Minimização	Tempo de Recomposição	Total	Tempo de Minimização	Tempo de Recomposição	Total
1	41,40 ± 2,675	0,05 ± 0,10	41,45 ± 2,775	38,62 ± 5,690	2,17 ± 0,33	40,79 ± 6,02
2	85,16 ± 5,825	0,05 ± 0,01	85,21 ± 5,835	73,56 ± 5,362	3,36 ± 0,25	76,92 ± 5,61
3	139,6 ± 19,00	0,06 ± 0,01	139,6 ± 19,01	141,0 ± 19,31	5,61 ± 1,11	146,61 ± 20,48

Os tempos de recomposição para o banco de filtros foram até 30 vezes menor do que os tempos utilizando a recomposição espectral, que são dependentes do número de versões filtradas: quanto mais níveis, maior o tempo de recomposição. O banco de filtros possui uma forma de recomposição mais eficiente que a recomposição espectral; a maior rapidez na recomposição era esperada. Apesar disso, a recomposição espectral possui a vantagem de funcionar com qualquer filtro. Apesar disso, os tempos de recomposição são desprezíveis em relação ao tempo total de reconstrução, especialmente no caso do banco de filtros. E em tese, os tempos de minimização deveriam ser iguais. Apesar das médias diferentes, todos os valores podem ser considerados iguais dentro de um desvio padrão. As diferenças podem ter acontecido devido a variações inesperadas de memória RAM disponível no computador utilizado, ou mesmo a criação de novos processos enquanto o computador processava as reconstruções.

## 5 Conclusão e trabalhos futuros

Este trabalho descreveu o uso de técnica com banco de filtros *wavelet* com pré-filtragem para a reconstrução de imagens reais de ressonância magnética. O método proposto de banco de filtros síntese, especialmente quando usado em apenas um nível, apresentou resultados inferiores aos obtidos com o método de referência, a recomposição espectral. Entretanto, ele possui algumas vantagens, como facilidade de implementação e velocidade de processamento. Outra característica importante foi a melhora de qualidade das imagens com o aumento de níveis. A recomposição espectral apresentou uma insensibilidade ao aumento dos níveis a partir do 2º nível.

Já os *dualtree* apresentaram qualidades superiores aos filtros de *wavelets* comuns, como Daubechies, biortogonais, biortogonais reversos, *symlets* e *coiflets*. E isso ocorreu em ambos os métodos de recomposição, o que mostra o potencial do uso desse tipo de filtro em futuras reconstruções de imagens de RM e imagens de tomografia computadorizada que utilizem retroprojeção filtrada como método ou forma de aquisição de dados. Os filtros *coiflets* e alguns filtros *symlets* apresentaram resultados próximos aos dos filtros *dualtree* em termos de qualidade objetiva e que também podem ser utilizado em favor de outras transformadas.

O índice de similaridade estrutural, que é uma medida de qualidade de cálculo mais complexo que a SNR, mostrou tendências semelhantes para a maioria dos resultados obtidos. Entretanto, a medida parece ser mais insensível a pequenas mudanças. Isso pode ser visto no primeiro teste de hipótese para reconstrução com um nível, onde em praticamente todos os casos não houve rejeição da hipótese nula. Estatisticamente, todos os resultados foram iguais para este caso, embora a SNR tenha mostrado que houve resultados com significância estatística melhores que outros.

A análise estatística sobre as 73 imagens mostrou que esses resultados são relevantes e consistentes, mas apenas para imagens de cabeça. Para determinar se os filtros *dualtree* e *coiflets* permitem a reconstrução de imagens com melhor qualidade e de qualquer parte do corpo, é necessário um experimento semelhante.

Os resultados também podem permitir um estudo teórico sobre projetos de filtros que sejam mais adequados para esparsificar as imagens. Como visto, filtros com alta concentração de energia em baixas frequências e baixa concentração em altas frequências geram imagens de qualidade inferior para o uso com banco de filtros. Apesar dessa hipótese, um estudo mais teórico sobre as bandas de frequências deve ser feito, de modo a determinar como as características espectrais do filtro influenciam na qualidade da imagem. Outro potencial estudo consiste em utilizar imagens de outras partes do corpo, já

que este estudo utilizou somente imagens de cabeça. Com outros tipos de imagens, pode-se ter mais confiança em consolidar um novo método de reconstrução de imagens que seja mais eficiente de forma geral.

## Referências

- 1 BRYAN, R. N. *Introduction to the Science of Medical Imaging*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0-521-74762-2. Citado 6 vezes nas páginas 10, 22, 23, 24, 25 e 26.
- 2 LANDINI, L.; SANTARELLI, V. P. e M. F. *Advanced Image Processing in Magnetic Resonance Imaging*. [S.l.]: Taylor and Francis Group, 2005. ISBN 0-8247-2542-5. Citado 6 vezes nas páginas 10, 22, 23, 24, 26 e 27.
- 3 ZHAO, L. et al. Using anatomic magnetic resonance image information to enhance visualization and interpretation of functional images: A comparison of methods applied to clinical arterial spin labeling images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 36, n. 2, p. 487–496, Feb 2017. ISSN 0278-0062. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.
- 4 MEO, S. D. et al. On the feasibility of breast cancer imaging systems at millimeter-waves frequencies. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 65, n. 5, p. 1795–1806, May 2017. ISSN 0018-9480. Citado na página 17.
- 5 CHEN, J. et al. Risk of malignancy associated with head and neck ct in children: A systematic review. In: . [S.l.: s.n.], 2014. v. 151, p. 554–566. Citado na página 17.
- 6 JAFFE, T. et al. Radiation dose for routine clinical adult brain ct: Variability on different scanners at one institution. In: *American Journal of Roentgenology, 2010*. [S.l.: s.n.], 2010. v. 2, p. 433–8. Citado na página 17.
- 7 SANTANA, P. et al. Dosimetria de pacientes submetidos a exames de pet/ct cerebral para diagnóstico de comprometimento cognitivo leve. In: *Image Processing, 2003. ICIP 2003. Proceedings. 2003 International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2014. v. 47, p. 350–354. ISSN 1522-4880. Citado na página 17.
- 8 MEDICINE, U. N. L. of. *PET Scan*. 2016. Disponível em <<https://medlineplus.gov/ency/article/003827.htm>>. Último acesso em: 28 de Maio de 2017. Citado na página 17.
- 9 STATION, F. R. *Radiation Levels in the Prefecture*. 2016. Disponível em <<http://www.pref.fukushima.lg.jp/site/portal-english/en02-01.html>>. Último acesso em: 28 de Maio de 2017. Citado na página 17.
- 10 HAMBURGO, J. de N. *Pacientes chegam a aguardar dois anos por exames no SUS*. 2016. Disponível em <[http://www.jornalnh.com.br/\\_conteudo/2016/03/noticias/regiao/304227-pacientes-chegam-a-aguardar-dois-anos-por-exames-pelo-sus.html](http://www.jornalnh.com.br/_conteudo/2016/03/noticias/regiao/304227-pacientes-chegam-a-aguardar-dois-anos-por-exames-pelo-sus.html)>. Último acesso em: 20 de outubro de 2016. Citado na página 18.
- 11 FROTA, D. P. E. Paciente do sus demora dois anos para confirmar suspeita de câncer. *Folha de S. Paulo*, 28/04/2017. Disponível em <<http://www1.folha.uol.com.br/seminariosfolha/2017/04/1878807-paciente-do-sus-demora-dois-anos-para-confirmar-suspeita-de-cancer.shtml>>. Último acesso em: 31 de Maio de 2017. Citado na página 18.

- 12 NOTÍCIAS, S. Demora no sus prejudica pacientes em tratamento de câncer. *SBT Notícias*, 20/02/2017. Disponível em <<http://www.sbt.com.br/jornalismo/sbtnoticias/noticias/86686/Demora-no-SUS-prejudica-pacientes-em-tratamento-de-cancer.html>>. Último acesso em: 31 de Maio de 2017. Citado na página 18.
- 13 WU, A. et al. Stability test of a pair of conical coils for open-bore rm magnet. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 27, n. 4, p. 1–4, June 2017. ISSN 1051-8223. Citado na página 18.
- 14 WALKER, H. et al. Psychological impact and acceptability of magnetic resonance imaging and x-ray mammography: the maribs study. In: *British Journal of Cancer*. [S.l.: s.n.], 2011. v. 104, p. 578–586. Citado na página 18.
- 15 CANDÉS, E.; ROMBERG, J.; TAO, T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. 2005. Citado 3 vezes nas páginas 18, 43 e 44.
- 16 LUSTIG, M. et al. Compressed sensing magnetic resonance imaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 25, n. 4, p. 72–82, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 18, 28, 31, 43, 44 e 47.
- 17 MIOSSO, C. J.; BORRIES, R. von; PIERLUISSI, J. H. Compressive sensing with prior information: Requirements and probabilities of reconstruction in  $\ell_1$ -minimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 61, n. 9, p. 2150–2164, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 43.
- 18 LIU, Z.; NUTTER, B.; MITRA, S. Compressive sampling in fast wavelet-encoded RM. *Image Analysis and Interpretation (SSIAI), 2012 IEEE Southwest Symposium on*, p. 137–140, 2012. Citado na página 19.
- 19 PAWAR, K.; EGAN, G.; ZHANG, J. Multichannel compressive sensing rm using noiselet encoding. 2014. Citado na página 19.
- 20 GUERQUIN-KERN, M. et al. A fast wavelet-based reconstruction method for magnetic resonance imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 30, n. 9, p. 1649–1660, 2011. Citado na página 19.
- 21 ZHU, Z. et al. Compressed sensing rm by two-dimensional *wavelet* filter banks. *2011 7th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (nDs)*, p. 1–6, 2011. Citado na página 19.
- 22 MIOSSO, C. J.; BORRIES, R. von; PIERLUISSI, J. H. Compressive sensing method for improved reconstruction of gradient-sparse magnetic resonance images. *Signal, System and Computers, 2009 Conference Record on the Forty-Third Asilomar Conference on*, p. 799–806, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 19, 47 e 54.
- 23 COSTA, F. J. da. *Reconstrução de Imagens de Ressonância Magnética com base em Compressive Sensing com pré-filtragem no Domínio de Medidas Usando Computação Paralela*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília - Faculdade UnB Gama, Brasília, 2016. Citado na página 20.
- 24 KUNDARGI, J. M.; KARANDIKAR, R. G. 2-d dual tree complex *wavelet* transform (dt-cwt) based fingerprint ridge structure quality enhancement. In: *2015 Fifth National Conference on Computer Vision, Pattern Recognition, Image Processing and Graphics (NCVPRIPG)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–5. Citado na página 20.

- 25 RAJ, V. N. P.; VENKATESWARLU, T. Denoising of mr images using adaptive multiresolution subband mixing. In: *Computational Intelligence and Computing Research (ICCIC), 2013 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–6. Citado na página 20.
- 26 DONG, E.; LI, C.; CHEN, C. An eog signals recognition method based on improved threshold dual tree complex *wavelet* transform. In: *2016 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 954–959. Citado na página 20.
- 27 KUSHWAHA, A. et al. 3d medical image fusion using dual tree complex *wavelet* transform. In: *2015 International Conference on Control, Automation and Information Sciences (ICCAIS)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 251–256. Citado na página 20.
- 28 KLEIN, H.-M. *Clinical Low Field Strength Magnetic Resonance Imaging - A Practical Guide to Accessible RM*. [S.l.]: Springer, 2016. ISBN 978-3-319-16516-5. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- 29 SELESNICK, I. W.; BARANIUK, R.; KINGSBURY, N. The dual-tree complex *wavelet* transform. *IEEE Signal Processing Magazine*, p. 123–151, November 2005. Citado 4 vezes nas páginas 29, 37, 38 e 39.
- 30 CHUN-LIN, L. *A Tutorial of the wavelet Transform*. 2012. Disponível em <[disp.ee.ntu.edu.tw/tutorial/WaveletTutorial.pdf](http://disp.ee.ntu.edu.tw/tutorial/WaveletTutorial.pdf)>. Último acesso em: 22 de Setembro de 2016. Citado na página 29.
- 31 MITRA, S. K. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach (Mcgraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering)*. [S.l.: s.n.], 1997. ISBN 0070429537,9780070429536. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- 32 DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. ISBN 0-89871-274-2. Citado na página 37.
- 33 WEI, B. E. D. *Coiflet-type wavelets: theory, design and applications*. Tese (Doutorado) — The University of Texas at Austin, Texas, 1998. Citado na página 37.
- 34 KINGSBURY, N. Complex *wavelets* and shift invariance. In: *Time-scale and Time-Frequency Analysis and Applications (Ref. No. 2000/019), IEE Seminar on*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 5/1–510. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- 35 KINGSBURY, N. The dual-tree complex *wavelet* transform: A new efficient tool for image restoration and enhancement. In: *Signal Processing Conference (EUSIPCO 1998), 9th European*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 1–4. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 41.
- 36 SELESNICK, I. W. Hilbert transform pairs of *wavelet* bases. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 8, n. 6, p. 170–173, June 2001. ISSN 1070-9908. Citado na página 39.
- 37 SELESNICK, I. W. The design of hilbert transform pairs of *wavelet* bases via the flat delay filter. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP '01). 2001 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 6, p. 3673–3676 vol.6. ISSN 1520-6149. Citado na página 39.
- 38 SELESNICK, I. W. The design of approximate hilbert transform pairs of *wavelet* bases. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 5, p. 1144–1152, May 2002. ISSN 1053-587X. Citado na página 39.

- 39 ABDELNOUR, A. F.; SELESNICK, I. Symmetric nearly shift-invariant tight frame wavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 53, n. 1, p. 231–239, January 2005. Citado na página 41.
- 40 KINGSBURY, N. Design of q-shift complex *wavelets* for image processing using frequency domain energy minimization. In: *Image Processing, 2003. ICIP 2003. Proceedings. 2003 International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 1, p. I–1013–16 vol.1. ISSN 1522-4880. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- 41 CANDES, E. J.; WAKIN, M. B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 25, n. 2, p. 21–30, March 2008. ISSN 1053-5888. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.
- 42 CANDES, E.; BRAUN, N.; WAKIN, M. Sparse signal and image recovery from compressive samples. In: *2007 4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 976–979. ISSN 1945-7928. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.
- 43 BARANIUK, R. G. Compressive sensing [lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 24, n. 4, p. 118–121, July 2007. ISSN 1053-5888. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.
- 44 MIOSSO, C. J. et al. Compressive sensing reconstruction with prior information by iteratively reweighted least-squares. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 57, n. 6, p. 2424–2431, June 2009. ISSN 1053-587X. Citado 4 vezes nas páginas 44, 47, 49 e 53.
- 45 LIPSCHUTZ, M. L. S. *Schaum's Outline of Linear Algebra*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2000. Citado na página 47.
- 46 CHARTRAND, R.; YIN, W. Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing. In: *2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 3869–3872. ISSN 1520-6149. Citado 3 vezes nas páginas 47, 48 e 49.
- 47 RESEARCH NIH Blueprint for N. *Biomedical Informatics Research Network*. Disponível em <<https://neuroscienceblueprint.nih.gov/factSheet/birn.htm>>. Último acesso em: 22 de Maio de 2017. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 83.
- 48 WANG, Z.; BOVIK, A. C. Mean squared error: Love it or leave it? a new look at signal fidelity measures. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 26, n. 1, p. 98–117, Jan 2009. ISSN 1053-5888. Citado na página 55.
- 49 DIGITAL Ocean. 2017. Disponível em <<https://www.digitalocean.com>>. Último acesso em: 28 de Maio de 2017. Citado na página 56.
- 50 LILLIEFORS, H. W. On the kolmogorov-smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of American Statistical Association*, v. 62, n. 318, p. 399–402, 1967. Citado na página 56.

# Apêndices



# APÊNDICE A – Lista ordenada dos filtros utilizados

Número	Filtro	Número	Filtro
1	Biortogonal 1.1	34	Daubechies 14
2	Biortogonal 1.3	35	Daubechies 15
3	Biortogonal 1.5	36	Daubechies 16
4	Biortogonal 2.2	37	Daubechies 17
5	Biortogonal 2.4	38	Daubechies 18
6	Biortogonal 2.6	39	Daubechies 19
7	Biortogonal 2.8	40	Daubechies 20
8	Biortogonal 3.1	41	Daubechies 21
9	Biortogonal 3.3	42	Daubechies 22
10	Biortogonal 3.5	43	Daubechies 23
11	Biortogonal 3.7	44	Daubechies 24
12	Biortogonal 3.9	45	Daubechies 25
13	Biortogonal 4.4	46	Daubechies 26
14	Biortogonal 5.5	47	Daubechies 27
15	Biortogonal 6.8	48	Daubechies 28
16	Coiflet 1	49	Daubechies 29
17	Coiflet 2	50	Daubechies 30
18	Coiflet 3	51	Daubechies 31
19	Coiflet 4	52	Daubechies 32
20	Coiflet 5	53	Daubechies 33
21	Daubechies 1	54	Daubechies 34
22	Daubechies 2	55	Daubechies 35
23	Daubechies 3	56	Daubechies 36
24	Daubechies 4	57	Daubechies 37
25	Daubechies 5	58	Daubechies 38
26	Daubechies 6	59	Daubechies 39
27	Daubechies 7	60	Daubechies 40
28	Daubechies 8	61	Daubechies 41
29	Daubechies 9	62	Daubechies 42
30	Daubechies 10	63	Daubechies 43
31	Daubechies 11	64	Daubechies 44
32	Daubechies 12	65	Daubechies 45
33	Daubechies 13	66	Meyer 1

---

Número	Filtro	Número	Filtro
67	Dualtree 1	99	Symlet 14
68	Dualtree 2	100	Symlet 15
69	Dualtree 3	101	Symlet 16
70	Dualtree 4	102	Symlet 17
71	Biortogonal Reverso 1.1	103	Symlet 18
72	Biortogonal Reverso 1.3	104	Symlet 19
73	Biortogonal Reverso 1.5	105	Symlet 20
74	Biortogonal Reverso 2.2	106	Symlet 21
75	Biortogonal Reverso 2.4	107	Symlet 22
76	Biortogonal Reverso 2.6	108	Symlet 23
77	Biortogonal Reverso 2.8	109	Symlet 24
78	Biortogonal Reverso 3.1	110	Symlet 25
79	Biortogonal Reverso 3.3	111	Symlet 26
80	Biortogonal Reverso 3.5	112	Symlet 27
81	Biortogonal Reverso 3.7	113	Symlet 28
82	Biortogonal Reverso 3.9	114	Symlet 29
83	Biortogonal Reverso 4.4	115	Symlet 30
84	Biortogonal Reverso 5.5	116	Symlet 31
85	Biortogonal Reverso 6.8	117	Symlet 32
86	Symlet 1	118	Symlet 33
87	Symlet 2	119	Symlet 34
88	Symlet 3	120	Symlet 35
89	Symlet 4	121	Symlet 36
90	Symlet 5	122	Symlet 37
91	Symlet 6	123	Symlet 38
92	Symlet 7	124	Symlet 39
93	Symlet 8	125	Symlet 40
94	Symlet 9	126	Symlet 41
95	Symlet 10	127	Symlet 42
96	Symlet 11	128	Symlet 43
97	Symlet 12	129	Symlet 44
98	Symlet 13	130	Symlet 45

## APÊNDICE B – Identificação das imagens do BIRN utilizadas no trabalho

Para a realização dos testes, foram utilizadas imagens do BIRN [47]. Cada conjunto de imagens é identificada por um número, que representa um único sujeito. O corte utilizado foi o de número 9, que representa uma mesma região do encéfalo. Os conjuntos de imagens, representados pelo seu número de identificação, são os que constam na tabela a seguir.

000301882920	000373206786	001071753990
000303269784	000373694353	001074909456
000303851049	000376668598	001083789439
000304253859	000379407687	001084262659
000305738011	000388045207	001091728827
000308150214	000389506759	001094450869
000308339072	000393763914	001096709026
000310542253	001009914240	001806046107
000311228084	001012126889	001808012216
000311987949	001012753423	001808538100
000314025202	001015956739	001811344398
000316805394	001020948255	001816033517
000324094767	001021160062	001832674707
000324203550	001025290760	001835089949
000324820801	001025550152	001839278328
000327099741	001025797909	001866093123
000330475699	001028614244	001868824349
000331146774	001029291693	
000331496497	001029798240	
000333525993	001037881059	
000337412566	001038889530	
000345930547	001044385032	
000347539107	001046143247	
000353528637	001050720368	
000366203456	001053294261	
000367047295	001059709071	
000368723909	001063297025	
000372130786	001071071414	