

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

**UMA NOVA PERSPECTIVA EM
FERROHIDRODINÂMICA: CONTROLE DE
DESCOLAMENTO DE CAMADA LIMITE**

CIRO FRAGA ALEGRETTI

ORIENTADOR: Prof. RAFAEL GABLER GONTIJO, DSc., UnB

PUBLICAÇÃO: ENM-DM260/2017

BRASÍLIA/DF: 04 de Agosto de 2017.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UMA NOVA PERSPECTIVA EM
FERROHIDRODINÂMICA: CONTROLE DE
DESCOLAMENTO DE CAMADA LIMITE

CIRO FRAGA ALEGRETTI

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CI-
ÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. Rafael Gabler Gontijo, DSc (Unicamp)
(Orientador)

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, PhD (ENM-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Erick de Moraes Franklin, Prof. Dr. (Unicamp)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 04 DE AGOSTO DE 2017.

FICHA CATALOGRÁFICA

CIRO FRAGA ALEGRETTI

Uma nova perspectiva em ferrohodinâmica: controle de descolamento de camada limite

[Distrito Federal] 2017.

xx, 128p., 297 mm (ENM/FT/UnB), Mestre, Ciências Mecânicas, 2017

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-----------------------|----------------------------------|
| 1. Fluidos Magnéticos | 2. Ferrohodinâmica |
| 3. Magnetização | 4. Descolamento de camada limite |
| I. ENM/FT/UnB | II. ENM-DM260/2017 |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALEGRETTI., C. F. (2017). Uma nova perspectiva em ferrohodinâmica: controle de descolamento de camada limite. Dissertação de mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM-DM260/2017, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 128p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Ciro Fraga Alegretti.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Uma nova perspectiva em ferrohodinâmica: controle de descolamento de camada limite.

GRAU / ANO: Mestre / 2017

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Ciro Fraga Alegretti
SQN 214, Bloco I, Apto 404. Asa-Norte.
70.873-090 Brasília - DF - Brasil.

DEDICATÓRIA

“ Dedico este trabalho a todos que contribuíram para o meu desenvolvimento pessoal e acadêmico. ”

AGRADECIMENTOS

Ao fim de mais uma etapa, gostaria de agradecer às pessoas que me acompanharam e contribuíram para a conclusão de mais um ciclo.

Primeiramente agradeço à minha família, pelo apoio incondicional, incentivo e paciência. Minha mãe Márcia, a mulher forte e sábia que eu tenho como professora e conselheira do dia-a-dia e da vida. Minha irmã Laís, que tenho como referência de dedicação e garra. E meu pai Wilson, que mesmo longe consegue ser o amigo próximo, que me acompanha e me dá suporte em todos os sentidos. Aos demais queridos de Brasília, São Paulo e Americana: obrigado pelo apoio e compreensão, os eventos familiares que eu com pesar deixei de comparecer estão sendo recompensados.

Agradeço à minha namorada Isabel, a melhor companheira, que entrou na minha vida logo no começo desse Mestrado e sempre me deu incentivo e apoio. Te amo, gatinha, é sempre um prazer dividir conquistas com você, que as próximas pra nós dois! Meus amigos Sales, Natasha, Tarcila e Giovana, que me acompanharam de perto. Até o *Sobralzinho*, que nem tão de perto assim, mas mesmo morando no Pará sempre comparece como amigo. Vocês então sempre tornando meus fins de semana cada vez mais felizes, mesmo que ninguém se imagine contando nossas histórias pros nossos netos. Medalha pra vocês!

Agradeço aos meus colegas de graduação e de mestrado na UnB, que tornaram mais fáceis as horas de estudo, de café e de descontração. Ao Arthur, que me ajudou demais e contribuiu diretamente com este trabalho e com meu aprendizado, ao Alencar e Cabeça pelo companheirismo nas matérias cursadas, aos amigos Luiz, Juvenal e Jean. Valeu SG-09!

Principalmente agradeço ao meu orientador Rafael, que desde a graduação como meu professor e orientador de Projeto de Graduação tem sido uma influência sempre muito positiva e uma grande referência pessoal e profissional. Grande responsável pelo meu desenvolvimento, sempre inspirando, motivando e me oferecendo as melhores oportunidades desde sempre. Valeu, Rafael! É uma satisfação enorme estar encarando o desafio do Doutorado sob sua orientação. Ao Professor Francisco, que sempre foi e será um exemplo dentro e fora da sala de aula para mim. Obrigado pelos diversos *mindblows* em conversas informais de corredor, que ocasionalmente terminavam em Mecânica dos Fluidos e me deixavam digerindo as suas lições por muito tempo. Além de todos os ensinamentos, obrigado pelo apoio e preocupação em tornar nossa rotina mais produtiva e até por diversas vezes comprar brigas burocráticas em

nosso nome. Mais uma vez, obrigado pela contribuição ao longo do desenvolvimento da minha dissertação, e também durante a minha defesa.

Agradeço o Professor Erick, que aceitou o convite de participar da minha banca, veio de Campinas em pleno encerramento de semestre, e contribuiu muito para a conclusão deste trabalho. Com certeza sua experiência será um diferencial na realização dos experimentos da minha tese de Doutorado na Unicamp!

Por fim, agradeço aos funcionários e Professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília e ao CNPq pelo apoio financeiro ao longo da execução desta dissertação.

RESUMO

UMA NOVA PERSPECTIVA EM FERROHIDRODINÂMICA: CONTROLE DE DESCOLAMENTO DE CAMADA LIMITE.

Autor: **Ciro Fraga Alegretti**

Orientador: **Prof. Rafael Gabler Gontijo**

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, Julho de 2017

O presente estudo tem como objetivo a investigação dos efeitos provenientes da aplicação de campos magnéticos sobre o escoamento de um fluido magnético sujeito a uma expansão abrupta. O descolamento de camada limite provocado pela geometria do problema resulta na formação de zonas de recirculação. Simulações são realizadas visando a avaliação da possibilidade de controle da instabilidade gerada pela geometria deste problema físico, por meio da aplicação de um campo magnético. A formulação teórica do problema é composta de uma revisão das proposições existentes para a equação constitutiva de um fluido magnético, e de uma análise das equações do movimento resultantes de cada proposição. Visando a análise do acoplamento entre o comportamento magnético e hidrodinâmico deste material complexo, equações evolutivas para a magnetização são adotadas. Diferentes proposições são implementadas, incluindo estudos recentes referentes ao efeito da parte simétrica do tensor gradiente de velocidades sobre a magnetização deste meio polarizável. Um código computacional é desenvolvido utilizando o Método das Diferenças Finitas com uma abordagem pseudo-transiente. A formulação vorticidade-função de corrente é implementada para a solução deste problema. Resultados numéricos obtidos para diferentes formulações de equações evolutivas para a magnetização são comparados. Estudos computacionais são conduzidos para números de Reynolds 50 e 100. Observa-se a possibilidade de controle por parâmetros magnéticos do ponto de recolamento da camada limite e, conseqüentemente, do comprimento da zona de recirculação.

ABSTRACT

A NEW PERSPECTIVE IN FERROHYDRODYNAMICS: BOUNDARY LAYER DETACHMENT CONTROL.

Author: **Ciro Fraga Alegretti**

Supervisor: **Prof. Rafael Gabler Gontijo**

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, July of 2017

The present work investigates the effects provenient from an external magnetic field application on the flow of a ferrofluid subjected to a sudden expansion. The geometry-driven boundary layer detachment results in the formation of recirculating zones. Simulations were performed in order to evaluate the possibility of controlling this instability via magnetic fields. The theoretical formulation of this physical problem is composed by a review of the propositions for the constitutive equation of a ferrofluid, and by an analysis of the resulting linear momentum equation associated to each proposition. In order to analyze the coupling between the magnetic and hydrodynamic fields of this complex material, different evolutive equations for the global magnetization are considered. Different propositions are implemented, including the latest investigations regarding the effect of the symmetric part of the velocity gradient tensor on the magnetization on this polarizable medium. A computational algorithm is developed using the Finite Differences Method with a pseudo-transient approach. The vorticity-stream function formulation was implemented to solve this physical problem. The numerical results obtained considering different evolutive equations for the global magnetization are compared. Computational studies are conducted for Reynolds numbers 50 and 100. The possibility to control the boundary layer reattachment point due to magnetic parameters, and consequently the length of the recirculating zone, is observed.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Fluidos Magnéticos	1
1.2	Escoamento laminar sujeito a uma expansão abrupta	8
1.3	Objetivos Gerais	10
1.4	Objetivos Específicos	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	Equações de Maxwell e limite magnetostático	13
2.2	Estudo do sistema de equações da FHD	14
2.2.1	Conceitos Ferromagnéticos	14
2.2.2	Superparamagnetismo	16
2.2.3	Potencial Magnético	18
2.2.4	Relaxação Magnética	19
2.2.5	Condições de contorno magnéticas	23
2.3	Uma breve discussão sobre efeitos de assimetria em Fluidos Polares . .	27
2.4	Tensor de tensões de Maxwell	30
2.4.1	Desenvolvimento de uma expressão matemática para o Tensor de Maxwell	30
2.4.2	Formulações para a parcela deviatória do Tensor de Maxwell .	32
2.4.3	Objetividade das Equações Constitutivas	34
2.5	Equação da Vorticidade para um Fluido Magnético	36
2.6	Comentários sobre a equação da vorticidade no limite superparamagnético	38
2.7	Dedução de uma equação para o potencial magnético em um regime superparamagnético	40
2.8	Conexão microscópica-contínua em FHD: modelos de magnetização de equilíbrio	41
2.9	Desenvolvimento de uma equação evolutiva para a magnetização do meio	49
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	53
3.1	Formulação vorticidade-função de corrente: motivação e dedução	53

3.2	Sumário do Sistema de equações	56
3.3	Parâmetros físicos da Ferrohidrodinâmica	57
3.4	Discretização das Equações Governantes pelo Método das Diferenças Finitas	62
3.4.1	Esquema Upwind	63
3.4.2	Esquema de discretização FTCS	65
3.5	Condições de contorno	67
3.6	Proposta de algoritmo sequencial para solução do problema	70
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	73
4.1	Solução do problema puramente hidrodinâmico	73
4.1.1	Determinação do comprimento adequado do domínio de cálculo	74
4.1.2	Refinamento de malha	75
4.1.3	Tolerância numérica	77
4.1.4	Validação do algoritmo proposto	77
4.2	Implementação de efeitos magnéticos	79
4.2.1	Retração do ponto de recolamento de camada limite	79
4.2.2	Perfis de magnetização e o parâmetro λ_2	86
5	CONCLUSÕES	95
5.1	Trabalhos futuros	96
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98
	APÊNDICE A – Condição de simetria do tensor de tensões	108
	APÊNDICE B – Teorema de Brown e dedução do Tensor de Maxwell	112
	APÊNDICE C – Equação do movimento de um fluido magnético	114
	APÊNDICE D – Teorema de Kelvin da Circulação	117
	APÊNDICE E – Método das Diferenças Finitas	120
	ANEXO A – Identidades Vetoriais e Tensoriais	127

Lista de Figuras

1.1	Esquema representativo da colisão elástica entre duas partículas revestidas com uma camada molecular ($\sim 2 \text{ nm}$) de um dispersante.	2
1.2	Esquema representativo da dimensão média associada à estrutura de uma partícula magnética suspensa em um ferrofluido estável, devido à presença de um surfactante. Figura cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.	3
1.3	Representação da hipertermia magnética: Dado uma parcela de tecido cancerígeno A com partículas magnéticas B depositadas, a aplicação de um campo magnético oscilatório C , de intensidade descrita pela curva D , a temperatura do sistema irá aumentar no decorrer do tempo, como mostrado no gráfico E . Esta figura foi gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.	4
1.4	Descrição do efeito resultante da melhora das propriedades de transferência de calor promovidas pela convecção termomagnética. (a), (c) e (e) representam histogramas dos campos de temperaturas dados em (b), (d) e (f). No sistema (a) não há nenhum campo magnético aplicado, no sistema (b) é aplicado um campo magnético de baixa intensidade e em (f) é aplicado um campo magnético de intensidade moderada. A partir dos histogramas é possível observar uma distribuição mais homogênea do campo de temperatura, com menor concentração de pontos quentes locais. Esta figura foi gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.	6
1.5	Ilustração do descolamento de camada limite provocado pela geometria, e neste caso pelo alto número de Reynolds ($Re_L \approx 10000$), em um escoamento axisimétrico.	8

1.6	Descrição do problema - Controle de intensidade das zonas de recirculação após a expansão do canal por meio da aplicação de um campo magnético Hy ; divisão do problema em dois domínios numéricos. Neste problema, a altura do degrau S é igual à altura do canal antes da expansão, de forma que o diâmetro hidráulico D após a expansão seja o dobro da altura h do canal de entrada ($D = 2h$).	9
2.1	Esquema representativo da força atuante em dois polos magnéticos de intensidades p e p' a uma distância r	15
2.2	A magnetização gradual de uma suspensão magnética - A figura (a) representa a ausência de campo magnético aplicado e de magnetização líquida da suspensão; a figura (b) representa um campo magnético aplicado de baixa intensidade e magnetização parcial da suspensão; a figura (c) denota o alinhamento total dos momentos magnéticos das partículas e a suspensão atinge sua magnetização de saturação	17
2.3	Esquema representativo da relação entre o tempo de relaxação magnética característico e a rotação do momento de dipolo magnético \mathbf{m} de uma partícula de orientação de referência \mathbf{o} . A figura (a) ilustra a condição característica de partículas suspensas de tamanho característico micrométrico, e conseqüentemente dominadas pelo mecanismo de relaxação de origem Browniana ($\tau_B \ll \tau_N$). Nesta situação o momento de dipolo \mathbf{m} é acoplado à partícula; a figura (b) ilustra o comportamento de partículas de tamanho característico nanométrico, dominadas pelo mecanismo de relaxação de Néel ($\tau_N \ll \tau_B$). Nesta situação o momento de dipolo rotaciona livremente internamente à partícula e o estado de equilíbrio não é perturbado pelo escoamento; a figura (c) ilustra a condição na qual ambos mecanismos de relaxação são de mesma ordem e se balanceiam ($\tau_N \approx \tau_B$). Neste caso, tanto uma equação evolutiva para a magnetização quanto uma equação para o spin de momento interno das partículas são necessárias para determinação do estado resultante.	21
2.4	A região à direita da linha sólida representa uma região, para combinações de diâmetros médios (d) e de valores para a constante de anisotropia magnética das partículas (\mathbf{I}_s), dados em erg/cm^3 , que resultam em $\tau_B \ll \tau_N$. Curva produzida para valores típicos de $\mu = 0.08MPa.s$ e $T = 298K$. A reta vertical representa o diâmetro médio das partículas suspensas em fluidos magnéticos. Esta figura foi gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.	22

2.5	Esquema representativo demonstrando a necessidade de relacionar e deduzir propriedades magnéticas através de uma interface entre dois meios distintos. Neste caso, dados pelo material que compõe o canal de escoamento e o fluido de trabalho.	23
2.6	Análise da continuidade das condições de contorno em um volume infinitesimal δV e uma curva fechada L , ambos sobre a interface entre os meios em análise.	24
2.7	Coordenadas referentes à solução do campo magnético gerado por um ímã retangular permanente de polaridade uniforme.	26
2.8	Torque atuante em uma partícula magnética devido ao desalinhamento entre a orientação de seu momento de dipolo \mathbf{m} e um campo magnético externo \mathbf{H}	28
2.9	Comparativo entre possíveis direções para a aplicação do campo magnético externo e suas implicações no surgimento de um balanço de torques.	29
2.10	Transformação ortogonal \mathbf{Q} de rotação de um sistema de coordenadas de base $\{\hat{\mathbf{e}}\}$ para um outro sistema de base $\{\hat{\mathbf{e}}'\}$ com componentes $Q_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}'_j$	35
2.11	Alinhamento parcial de partículas suspensas na direção do campo aplicado, obtido via simulação computacional de muitos corpos. Figura cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.	41
2.12	Esquema representativo do volume δV da média volumétrica com posição \mathbf{x} fixa e uma coordenada de varredura interna \mathbf{y} em um volume infinitesimal δV de uma suspensão de partículas magnéticas com um momento magnético \mathbf{m} associado.	42
2.13	A magnetização de equilíbrio em função de α para $\phi = 0.05$: A linha contínua representa o modelo de Langevin $\mathcal{O}(\phi)$, a linha pontilhada e os quadrados representam os modelo $\mathcal{O}(\phi^2)$ e $\mathcal{O}(\phi^3)$, respectivamente. Por último, os pontos pretos representam os resultados numéricos, desconsiderando a periodicidade para interações magnéticas. Em detalhe estão plotados os valores de magnetização de equilíbrio para pequenos valores de α , com a solução assintótica para $\alpha \ll 1$: $M_0/\phi M_d = \alpha/3$ em um regime paramagnético.	48
2.14	Determinação de uma expressão para equação evolutiva fenomenológica do campo de magnetização do escoamento de um fluido magnético, submetido à um campo aplicado, em termos do tempo de relaxação magnética equivalente.	52

3.1	Representação individual dos domínios de cálculo adimensionalizados a partir da figura 1.6, sobre os quais serão especificadas as condições de contorno.	67
4.1	Evolução do ponto de recolamento Xr computado para diferentes comprimentos L de domínio de cálculo, obtidos para $Re = 50$ e $Re = 100$. Linhas horizontais tracejadas representam os pontos de recolamento obtidos em estudos anteriores mostrados na tabela 4.1. Simulações foram realizadas para malhas 100×100 e 150×150 , para $Re = 50$ e $Re = 100$, respectivamente, e um resíduo numérico $r = 10^{-5}$	75
4.2	Evolução do ponto de recolamento Xr computado para diferentes números de nós computacionais (n^2), para $Re = 50$ e $Re = 100$, com um resíduo de iteração $r = 10^{-5}$ e um comprimento de domínio computacional $L = 5.0$. Linhas horizontais tracejadas representam os pontos de recolamento obtidos em estudos anteriores mostrados na tabela 4.1. . .	76
4.3	Evolução do ponto de recolamento Xr em função da tolerância adotada para o resíduo numérico r entre as iterações. Os resultados apresentados foram obtidos para $Re = 50$, uma malha cartesiana 100×100 e um comprimento de domínio numérico $L = 5.0$. Linhas horizontais tracejadas representam os pontos de recolamento obtidos em estudos anteriores mostrados na tabela 4.1.	77
4.4	Visualização das linhas de corrente associadas ao campo de velocidades obtido na validação do algoritmo desenvolvido para o caso puramente hidrodinâmico.	78
4.5	Resultados obtidos no cálculo do ponto de recolamento da camada limite em função da fração volumétrica ϕ , obtidos para diversos valores de Re_m . As simulações foram realizadas para $0.0 \leq \phi \leq 0.25$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1$, $\lambda_2 = 0.0$, e para os parâmetros numéricos estipulados na seção anterior e apresentados na tabela 4.2. Linhas horizontais pontilhadas representam o ponto de recolamento calculado a partir da solução do sistema de equações (3.22) sem a implementação de efeitos magnéticos. Círculos representam os resultados obtidos para $Re_m = 0.01$, quadrados para $Re_m = 0.1$, gradientes para $Re_m = 1.0$, deltas para $Re_m = 10.0$ e losangos para $Re_m = 100.0$	80

4.6	Cálculo do ponto de recolamento obtido para diferentes $10^{-2} \leq Re_m \leq 10^2$. Os resultados apresentados foram obtidos para $\phi = 0.05$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1$, $\lambda_2 = 0.0$ e permitem computar a influência do parâmetro magnético Re_m sobre a retração do ponto de recolamento de camada limite para $Re = 50$	81
4.7	Cálculo do ponto de recolamento obtido para diferentes λ_2 . Os resultados apresentados foram obtidos para $\phi = 0.05$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1$, $Re_m = 1.0$ e permitem computar a influência do parâmetro magnético λ_2 sobre a retração do ponto de recolamento de camada limite para $Re = 50$	82
4.8	Representação do efeito da componente elongacional do gradiente de velocidades sobre uma área material discreta, resultando em uma deformação gradual. Observa-se que os momentos de dipolo de partículas perfeitamente esféricas, por serem geometricamente isotrópicas, não são perturbadas pela componente elongacional do gradiente de velocidades, enquanto cadeias de partículas magnéticas são profundamente afetadas devido à forma de sua estrutura.	83
4.9	Representação gráfica da expressão matemática (4.7) determinada experimentalmente do parâmetro λ_2 em função do número de partículas compondo um microagregado na forma de cadeia [114]. Figura gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.	84
4.10	Decomposição de um cisalhamento simples em uma componente elongacional e uma rotacional, de forma que a componente elongacional \mathbf{D} seja responsável pela deformação de um microagregado, resultando em uma estrutura em forma de cadeia, e a componente rotacional \mathbf{W} seja responsável por uma perturbação na orientação dos dipolos magnéticos de tal microagregado por meio de um balanço de torques dado globalmente por $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$, cujo desalinhamento é proveniente de efeitos hidrodinâmicos (i.e.: vorticidade). Figura gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.	85
4.11	O ponto de recolamento de camada limite como função do número de Reynolds [111]. Resultados obtidos, experimental e numericamente, para um escoamento sujeito a uma expansão abrupta unidirecional. . .	86

4.12	Ilustração da posição das seções de teste para avaliação de perfis de magnetização \mathbf{M}_y . A seção A é posicionada em $0.5Xr$, a seção B em Xr , a seção C em $1.5Xr$ e a seção D em $X = 4.9$, em que Xr é o ponto de recolamento calculado na solução do caso hidrodinâmico do problema e $X = 4.9$ uma posição onde a camada limite está totalmente reestruturada e o escoamento totalmente desenvolvido.	87
4.13	Ilustração dos diferentes perfis de velocidades extraídos dos resultados obtidos para a validação do algoritmo desenvolvido para o caso puramente hidrodinâmico, descritos na tabela 4.2. Quadrados representam os dados obtidos para a seção A, triângulos a seção B, gradientes a seção C e círculos a seção D. A avaliação da magnetização global em seções com perfis de velocidades distintos permitirá relacionar e interpretar os resultados obtidos para o campo de velocidades e a magnetização.	88
4.14	Perfis de magnetização extraídos sobre as seções rescritas na figura 4.12. Linhas contínuas representam os perfis obtidos para $\lambda_2 = 0.0$, linhas tracejadas para $\lambda_2 = 0.5$ e linhas traço-ponto para $\lambda_2 = 1.0$. Todas as simulações apresentadas foram realizadas para $Re = 50$, $Re_m = 1.0$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.05$, $\alpha = 1$ e uma magnetização de equilíbrio $\mathbf{M}_0 = 0,0156$	89
4.15	Perfis de velocidades e de vorticidade extraídos a partir das seções descritas na figura 4.12. Linhas sólidas representam os resultados obtidos para $\lambda_2 = 0.0$, tracejadas para $\lambda_2 = 0.5$ e traço-ponto para $\lambda_2 = 1.0$. Todas simulações foram realizadas para $Re_m = 1.0$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.05$ e $\alpha = 1$	91
4.16	O campo de magnetização calculado é representado pelos vetores, com a representação de uma única linha de corrente que define a dimensão da zona de recirculação por meio de uma linha branca. Simulações realizadas para $Re = 50$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.05$, $\alpha = 1$ e $\lambda_2 = 0.0$ para diferentes valores de Re_m	93
4.17	O campo de magnetização calculado é representado pelo campo de cores, com a representação de uma única linha de corrente que define a dimensão da zona de recirculação por meio de uma linha branca. Campo de cores gerado para um intervalo fixo de My , em que azul representa o valor mínimo computado ($My = -0.0006$) e vermelho representa o valor máximo ($My = 0.5$). Simulações realizadas para $Re = 50$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.25$, $\alpha = 1$ e $\lambda_2 = 1.0$ para diferentes valores de Re_m	94

1	A figura 1a representa o domínio de cálculo neste exemplo da solução da equação do calor sem geração pelo método das diferenças finitas. A figura 1b mostra a discretização do domínio de cálculo em uma malha de 4096 nós.	121
2	Ampliação de um nó interno em uma malha bidimensional	122

Lista de Tabelas

2.1	Formulações existentes para a parcela deviatórica do Tensor de Maxwell σ_m^D , com termos resultantes na equação do momento ($\nabla \cdot \sigma_m$) e simetria avaliada pela operação $\epsilon : \sigma_m$	33
4.1	Resultados existentes na literatura para a determinação do ponto de recolamento da camada limite para diversos Re	73
4.2	Sumário dos parâmetros numéricos adotados para a execução das simulações para $Re = 50$ e $Re = 100$. Os parâmetros L , H e h representam o comprimento do domínio, a altura do domínio e a altura do degrau, respectivamente, e estão ilustrados na figura 1.6. $n \times n$ representa o número de nós de malha, r a tolerância para o resíduo numérico adotado e Xr o ponto de recolamento computado para as simulações realizadas com estes parâmetros numéricos apresentados. Os erros percentuais máximos apresentados foram calculados a partir dos resultados presentes na literatura, referentes ao caso puramente hidrodinâmico, apresentados na tabela 4.1.	78

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{M}	Magnetização global de um meio contínuo
\mathbf{m}	Momento de dipolo de um volume contínuo infinitesimal
M_S	Magnetização de saturação
M_0	Magnetização de equilíbrio
M_d	Magnetização do sólido
\mathbf{B}	Indução magnética
\mathbf{H}	Campo magnético aplicado $\mathbf{H} = H_y \hat{\mathbf{e}}_y$
Re_L	Número de Reynolds baseado em um comprimento L
h	Altura do canal de desenvolvimento do escoamento (Domínio A)
S	Altura do degrau associado à expansão abrupta do canal de escoamento
D	Diâmetro hidráulico do canal após a expansão
X_r	Ponto de recolamento de camada limite
\mathbf{B}	Campo indução magnética
\mathbf{E}	Campo elétrico
\mathbf{J}	Densidade de corrente elétrica
ρ_f	Densidade de cargas elétricas livres
\mathbf{D}	Densidade de fluxo elétrico
$\nabla \cdot$	Operador divergente
$\nabla \times$	Operador rotacional
∇	Operador gradiente
∇^2	Operador Lapaciano
F	Magnitude da força magnética atuante sobre dois polos p e p'
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
μ	Permeabilidade magnética de um meio contínuo
\mathbf{r}	Vetor posição
ρ_s	Densidade superficial de polos magnéticos
ρ_V	Densidade volumétrica de polos magnéticos
\mathbf{S}_m	Tensor suscetibilidade magnética
\mathbf{I}	Tensor identidade
\mathbf{P}_m	Tensor permeabilidade magnética
χ_m	Suscetibilidade magnética de um meio isotrópico
T	Campo de temperatura
ϕ_m	Campo escalar potencial magnético
τ_B	Escala de tempo de relaxação Browniana

τ_N	Escala de tempo de relaxação de Nèel
τ_{eq}	Escala de tempo de relaxação equivalente
k	Constante de Boltzmann
d	Diâmetro característico de uma partícula magnética suspensa
I_s	Constante de anisotropia magnética
$\frac{\partial}{\partial t}$	Operador derivada temporal
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada material
ϕ	Fração volumétrica de partículas magnéticas suspensas
τ_m	Torque magnético por unidade de volume
\mathbf{u}	Campo de velocidades euleriano
ξ	Campo de vorticidade
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker
ν	Viscosidade cinemática do fluido
ρ	Massa específica
σ	Tensor de tensões do meio
σ^N	Tensor de tensões hidrodinâmico
σ^M	Tensor de tensões de Maxwell
χ	Suceptibilidade magnética
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação
\mathbf{W}	Tensor taxa de rotação
\mathbf{g}	Aceleração da gravidade
p	Pressão
p_m	Pressão magnética
ϵ	Operador de Levi-Civita
\mathbf{x}	Vetor posição espacial
$\overline{\mathbf{m}}$	Média dos momentos de dipolo magnético
N	Número de partículas magnéticas suspensas
v_p	Volume de uma única partícula magnética suspensa
n	Número de densidade de partículas
$\langle \mathbf{m} \rangle$	Média volumétrica da orientação dos momentos de dipolo magnéticos
P_θ	Função densidade de probabilidade
\mathcal{L}	Função Langevin
α	Parâmetro de Langevin
α_T	Difusividade térmica do fluido

λ_2	Fator de acoplamento de Odenbach
κ	Fator de forma de Odenbach
ω	Velocidade angular de rotação de dipolo magnético
J	Momento de inércia polar de um volume contínuo infinitesimal
μ'	Coefficiente de difusão de spin
Re	Parâmetro adimensional número de Reynolds
Re_m	Parâmetro adimensional número de Reynolds magnético
ψ	Função de corrente
U_0^2	Campo de velocidades uniforme adotado na entrada do domínio de cálculo A
t_ν	Escala de tempo difusiva
t_i	Escala de tempo inercial
t_m	Escala de tempo magnética
\mathbf{L}	Momento angular

Capítulo 1 INTRODUÇÃO

1.1 Fluidos Magnéticos

Fluidos magnéticos são líquidos de constituição reológica Newtoniana, acrescidos de partículas sólidas ferromagnéticas contendo domínios com propriedades específicas. Estes chamados domínios magnéticos compõem as estruturas cristalinas de sólidos ferromagnéticos. Segundo a teoria de domínios magnéticos [1, 2], os elétrons que circundam e rotacionam ao redor de si no interior de um átomo possuem um momento magnético associado. No caso de materiais ferromagnéticos, as interações entre momentos de dipolo individuais de cada elétron são intensas, porém estudadas no âmbito da mecânica quântica e não no escopo deste trabalho. Entretanto, devido à esta forte interação, momentos de dipolo magnético de elétrons vizinhos interagem e se alinham mesmo na ausência de um campo magnético externo, resultando em pequenas regiões de magnetização intensa que compõem um material desmagnetizado. Este fenômeno ocorre naturalmente em frações infinitesimais do volume de um sólido ferromagnético (aproximadamente a cada 100 átomos [3]), sem resultar em magnetização líquida, e tais frações são denominadas subdomínios magnéticos. Em um sólido ferromagnético livre da ação de um campo externo, tais dipolos são orientados de forma aleatória, devido à agitação térmica. Com a aplicação de um campo magnético externo, os momentos de dipolo de cada domínio magnético irão tender a se alinhar ao campo aplicado de forma parcial, porém a agitação térmica irá prevenir o alinhamento total e a magnetização líquida resultante do sólido ferromagnético será fraca. Este fenômeno é chamado de Paramagnetismo.

As partículas ferromagnéticas de domínio único são suspensas em um fluido base, sem ordenamento de longo alcance. Quando suspensas, o alinhamento de tais partículas na direção do campo aplicado é mais suscetível, quando comparado ao alinhamento que ocorre dentro de um sólido ferromagnético. Desta forma, a magnetização líquida resultante é capaz de atingir intensidades consideráveis, mesmo para campos magnéticos aplicados de baixa intensidade. A síntese de fluidos magnéticos é realizada a partir da redução de sólidos ferromagnéticos a partículas subdomínio, que são suspensas em um líquido Newtoniano base, como água e óleo mineral, cuja estabilidade é obtida pela utilização de surfactantes depositados nas partículas suspensas. O movimento

Browniano mantém as partículas suspensas, enquanto o surfactante evita sua aglomeração e sedimentação [3]. A figura 1.1 apresenta uma representação gráfica de uma colisão elástica entre duas partículas magnéticas devido à adição de tensoativos feitos de macromoléculas poliméricas (geralmente de ácido oleico).

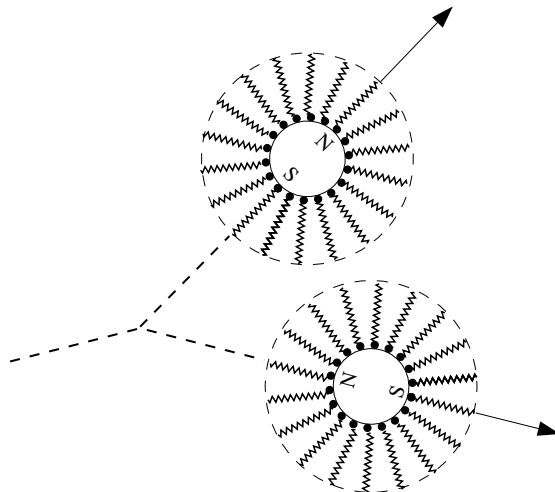


Figura 1.1: Esquema representativo da colisão elástica entre duas partículas revestidas com uma camada molecular ($\sim 2 \text{ nm}$) de um dispersante.

A estabilidade de uma suspensão coloidal de subdomínios magnéticos deve ser garantida a fim de proporcionar ao material propriedades bem definidas, conferindo aplicabilidade e confiabilidade em âmbito industrial e em estudos científicos. Um fluido magnético é estável se tanto suas interações entre partículas, tais quais a magnética e as forças atrativas de van der Waals, quanto as influências externas, como campo magnético e gravitacional, forem consideradas na seleção de parâmetros da solução, como concentração e dimensão das partículas magnéticas, atendendo às condições de estabilidade e balanço energético da solução. As partículas suspensas possuem comprimento característico médio da ordem de 10 nanômetros, enquanto o comprimento médio de uma macromolécula de ácido oleico utilizada como surfactante é de aproximadamente 2 nanômetros.

Livre da ação de um campo magnético, um fluido magnético não exibe magnetização líquida, pois as partículas suspensas estão em constante movimento randômico (tanto translacional quanto rotacional) devido à agitação térmica associada à dinâmica molecular do líquido base e não se alinham em uma direção preferencial. Esse movimento randômico associado às interações das moléculas do líquido base e as partículas magnéticas é denominado movimento Browniano, as propriedades físico-estatísticas desse fenômeno foram amplamente estudadas por Einstein [4]. Este fenômeno foi am-

plamente estudado, com teorias de correção desenvolvidas para suspensões de diversas faixas de concentração [5, 6].

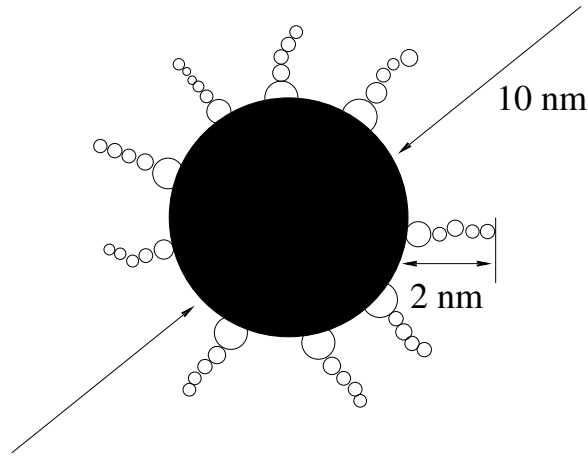


Figura 1.2: Esquema representativo da dimensão média associada à estrutura de uma partícula magnética suspensa em um ferrofluido estável, devido à presença de um surfactante. Figura cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo [7].

Diversos estudos em fluidos magnéticos tem sido realizados em sistemas particulados discretos [8, 7, 9, 10], porém a descrição deste material em uma abordagem da Mecânica dos Meios Contínuos por meio de uma equação constitutiva é um problema em aberto e carece de maiores estudos. A representação completa de efeitos de origem microscópica em uma formulação contínua e fora do equilíbrio (i.e: na presença de um escoamento), por meio de uma equação constitutiva e de uma equação evolutiva para a magnetização, permanece sem uma formulação definitiva e tem sido desenvolvida e proposta há décadas por diversos pesquisadores [3, 11, 12, 13, 14]. O estudo proposto neste projeto consiste também em um estudo de caso para as proposições mais recentes para tais problemas de fechamento da Ferrohodinâmica.

A reorientação das partículas sólidas provém do surgimento de torques magnéticos devido ao desalinhamento entre sua magnetização e a direção do campo aplicado. No problema proposto neste projeto, a constante perturbação na orientação dos dipolos magnéticos das partículas suspensas é causada pela condição de não equilíbrio, dada pelo escoamento, e é responsável pela possibilidade de controle do padrão de escoamento resultante do problema físico acoplado.

Investigações em escoamentos de fluidos magnéticos são profundamente motivadas pela crescente tendência do desenvolvimento de novas aplicações. Na área das ciências biomédicas, fluidos magnéticos biocompatíveis são utilizados na manipulação e separação entre células vivas e micropartículas, com uma eficiência de 99%, e também na

separação de glóbulos vermelhos e células doentes, reduzindo períodos de incubação e aumentando a precisão de diagnósticos [15]. Além disso, diferentes estudos são focados na avaliação da eficiência da utilização de fluidos magnéticos compostos de óxido de ferro ou magnetita como substâncias que aumentam o contraste em imagens de ressonância magnética [16, 17]. Com o propósito de garantir aplicações seguras e efetivas, propriedades termo-físicas de dois fluidos magnéticos biocompatíveis foram estudadas e relacionadas com efeitos provenientes de escoamentos. Foi possível observar alterações reológicas associadas a mudanças na microestrutura do material, fator que deve ser levado em conta no desenvolvimento de aplicações de fluidos magnéticos biocompatíveis [18, 19].

Ainda referente às aplicações na área das ciências biomédicas, fluidos magnéticos são utilizados em hipertermia magnética. A hipertermia consiste em uma técnica de tratamento de câncer, na qual tecido vivo é exposto a altas temperaturas. Resultados mostram que altas temperaturas são capazes de danificar e destruir células cancerígenas e de provocar a redução de tumores [20]. No caso da hipertermia magnética, tal aumento de temperatura é provocado a partir da aplicação de um campo magnético oscilatório, de forma que as irreversibilidades associadas à constante reorientação da magnetização provocam um aumento localizado de temperatura [21], como descrito na figura 1.3.

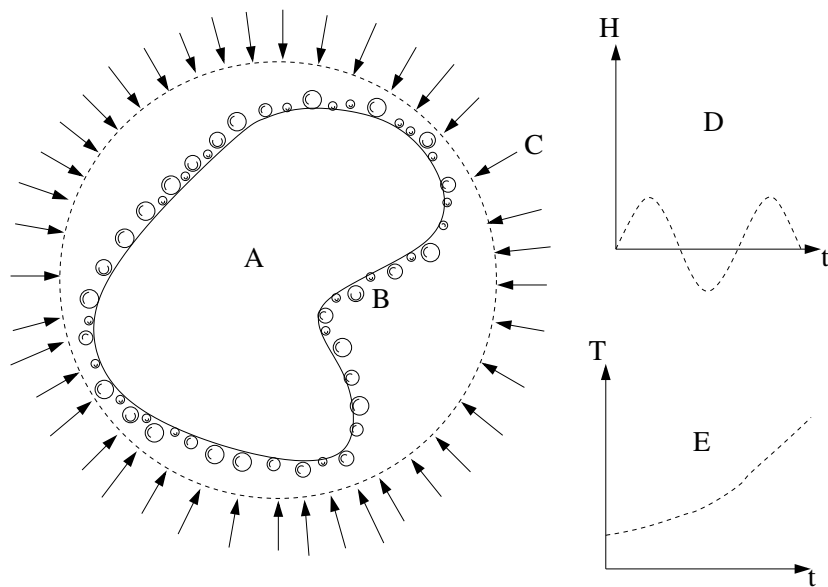


Figura 1.3: Representação da hipertermia magnética: Dado uma parcela de tecido cancerígeno **A** com partículas magnéticas **B** depositadas, a aplicação de um campo magnético oscilatório **C**, de intensidade descrita pela curva **D**, a temperatura do sistema irá aumentar no decorrer do tempo, como mostrado no gráfico **E**. Esta figura foi gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.

A utilização de fluidos magnéticos está presente também na área de óptica adaptativa. Lentes líquidas combinam a funcionalidade de um conjunto de diversas lentes em uma única, e a utilização de fluidos magnéticos neste aparato confere peso reduzido, dimensão compacta, alta definição e baixa suscetibilidade à força gravitacional ao sistema [22].

No âmbito de medição e controle, fluidos magnéticos tem sido utilizados em diversos sistemas de engenharia. Sendo um material inteligente, fluidos magnéticos permitem diversas aplicações, incluindo sensores sísmicos [23], refrigerantes em unidades solares fotovoltaicas [24] e como lubrificantes de migração controlável [25]. A utilização de fluidos magnéticos no controle de padrões transientes não-lineares de escoamento, como proposto neste trabalho, tem sido aplicada no controle do colapso de bolhas em cavitação acústica [26, 27] e na estabilização de leitos fluidizados de partículas magnéticas [28]. Além do mais, atualmente estuda-se a possibilidade de uso de fluidos magnéticos para fins de resfriamento de componentes eletrônicos em ambientes de microgravidade através de um fenômeno conhecido como convecção termomagnética, descrito na figura 1.4. Em um ambiente de microgravidade, a estratificação de massa específica devido à gradientes de temperatura não é capaz de gerar convecção natural. Por outro lado, a estratificação de susceptibilidade magnética induzida por gradientes de temperatura combinada com a aplicação de um campo magnético externo resulta na formação de regiões de recirculação em um sistema conhecido por convecção termo-magnética. Esse sistema induz um *mixing* do fluido arrefecedor e um conseqüente incremento controlado das taxas de troca de calor, mesmo na ausência de campo gravitacional. [29, 30, 31].

Devido a sua composição microscópica, a descrição matemática do movimento deste complexo líquido é derivada a partir das equações de Maxwell do magnetismo e das equações clássicas da mecânica dos fluidos [32]. O estudo da interação entre fluidos e campos magnéticos pode ser abordado sob diferentes perspectivas: da Magnetohidrodinâmica e da Ferrohídrodinâmica. Uma análise magnetohidrodinâmica investiga a interação entre fluidos condutores de corrente elétrica (e.g.: metais líquidos, plasma e gases com dissociação iônica em altos números de Mach) e campos magnéticos por meio da atuação de Forças de Lorentz em todo o volume do fluido de trabalho [33], como o estudo do escoamento magnetohidrodinâmico de nuvens moleculares no âmbito da astrofísica [34]. Como os efeitos provenientes do magnetismo são contabilizados simplesmente pela adição de uma força de campo à equação do momento linear em uma análise magnetohidrodinâmica, e nenhum fenômeno microscópico deve ser extrapolado à análise da mecânica dos meios contínuos, sua formulação é consideravelmente mais

simples, quando comparada à uma abordagem fenomenológica ferrohidrodinâmica.

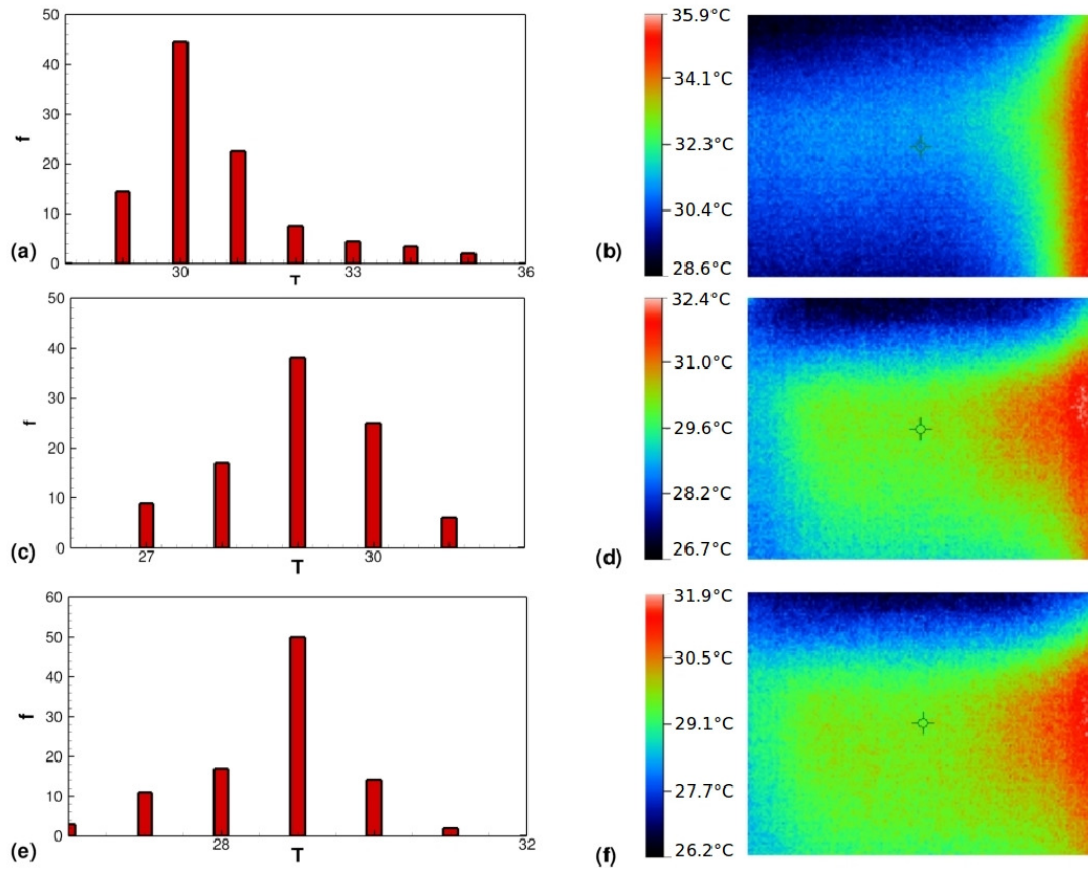


Figura 1.4: Descrição do efeito resultante da melhora das propriedades de transferência de calor promovidas pela convecção termomagnética. (a), (c) e (e) representam histogramas dos campos de temperaturas dados em (b), (d) e (f). No sistema (a) não há nenhum campo magnético aplicado, no sistema (b) é aplicado um campo magnético de baixa intensidade e em (f) é aplicado um campo magnético de intensidade moderada. A partir dos histogramas é possível observar uma distribuição mais homogênea do campo de temperatura, com menor concentração de pontos quentes locais. Esta figura foi gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.

Devido à ausência de cargas elétricas livres e de condutividade elétrica em fluidos magnéticos, as equações de Maxwell são aplicadas no regime magnetostático. No âmbito da mecânica do contínuo, adota-se a condição de incompressibilidade e uma equação constitutiva apropriada para que tensões magnéticas provenientes da composição microscópica deste meio contínuo sejam contabilizadas [35, 36]. Nestas condições, as equações que governam o escoamento de um fluido magnético são dadas pela combinação das equações de Maxwell aplicadas no regime magnetostático, da equação da continuidade e da equação da quantidade de movimento linear, com um tensor de tensões modificado devido à presença de tensões magnéticas. Entretanto, deve-se destacar

que esta abordagem que resulta em um problema de fechamento devido à necessidade de uma equação para a magnetização do fluido polarizável e para o potencial magnético, no caso de campos magnéticos aplicados não uniformes.

No âmbito do controle da instabilidade resultante do escoamento sujeito a uma expansão abrupta, este problema físico foi amplamente estudado na perspectiva da magnetohidrodinâmica [37, 38, 39, 40, 41]. Por outro lado, no âmbito da mecânica dos meios contínuos a ferrohídrodinâmica permanece sem uma formulação definitiva e sacramentada, estando ainda sujeita a proposições tanto constitutivas quanto fenomenológica de suas principais equações.

Na análise Ferrohídrodinâmica, a magnetização global \mathbf{M} representa uma propriedade global referente à orientação média dos momentos de dipolo magnético \mathbf{m} associados a um volume contínuo infinitesimal. Na ausência de um campo magnético externo, fluidos magnéticos não exibem magnetização global líquida, pois os momentos de dipolo de seus domínios contínuos são aleatoriamente orientados e perturbados (tanto translacional quanto rotacional) devido ao movimento randômico ao movimento Browniano. Quando sujeito a um campo externo, os momentos de dipolo individuais se alinham ao campo externo de forma gradual, de acordo com o aumento da intensidade do campo aplicado, até que um valor de saturação \mathbf{M}_S seja atingido. Tal magnetização de equilíbrio \mathbf{M}_0 (i.e.: na ausência de escoamento), compreendida entre zero e um valor de saturação dado pela concentração de partículas sólidas e suas propriedades, tem sido estudada intensivamente e representa um parâmetro crucial em uma análise Ferrohídrodinâmica [42, 43, 14, 44]. Investigações foram conduzidas teórica, numérica e experimentalmente para uma ampla faixa de concentração de partículas magnéticas suspensas, e modelos de correção foram desenvolvidos visando considerar interações hidrodinâmicas entre as partículas suspensas em suspensões concentradas [5, 45, 46].

Quando sujeito a um escoamento e a um campo externo, a magnetização global é perturbada pelo escoamento e então se estabelece um balanço de torques entre mecanismos magnéticos e hidrodinâmicos. Fenômenos de relaxação magnética tendem a restaurar o estado de equilíbrio \mathbf{M}_0 por meio de diferentes mecanismos, dependendo da intensidade do campo aplicado e do tamanho médio das partículas suspensas [47, 48, 49]. O acoplamento entre esses diferentes mecanismos e a magnetização global é postulado por meio de diferentes metodologias de dedução, como teoria de quase-equilíbrio, teoria de Debye e teoria de campo efetivo [3]. Proposições posteriores são capazes de descrever com maior precisão o mecanismo de relaxação magnética, baseadas

na relaxação generalizada de Debye e transformações termodinâmicas irreversíveis [13], macroscopicamente a partir da equação de Fokker-Planck [50] e a partir do momento angular das partículas ferromagnéticas [51].

1.2 escoamento laminar sujeito a uma expansão abrupta

Escoamentos sujeitos à expansões abruptas e outras mudanças repentinas de geometria descrevem muitos problemas em aplicações industriais (e.g. trocadores de calor, resfriadores de dispositivos eletrônicos e reatores nucleares) [52, 53] e tem sido objetivo de estudo para o desenvolvimento de técnicas de solução versáteis e determinação das relações entre os vários parâmetros que caracterizam a formação de áreas de recirculação para diferentes taxas de escoamento e coeficientes de expansão do canal.



Figura 1.5: Ilustração do descolamento de camada limite provocado pela geometria, e neste caso pelo alto número de Reynolds ($Re_L \approx 10000$), em um escoamento axisimétrico [54].

Como uma alternativa à abordagem de solução do problema pelo método do acoplamento entre o campo de pressão e o campo de velocidade, será adotada neste trabalho a formulação vorticidade-função de corrente, implementada na simulação do escoamento de um fluido Newtoniano sujeito a uma expansão abrupta [55, 56], utilizando o método das diferenças finitas para a solução das equações diferenciais parciais que governam o problema.

O escoamento laminar de fluidos Newtonianos sujeitos a mudanças abruptas de

geometria são estudados de forma abrangente há décadas, tanto numericamente [57, 58], quanto experimentalmente [59, 60], na determinação da perda de carga em tais escoamentos, e na busca por metodologias para minimizar perdas energéticas.

Simulações numéricas de controle do comprimento da região de recirculação, induzida por mudanças abruptas na geometria de um escoamento, foram realizadas por meio da injeção e sucção de fluido após a expansão [61], e pela aplicação de campos magnéticos em escoamentos de fluidos magnéticos sujeitos a forças de Lorentz [62]. Analogamente, a proposta deste trabalho é a simulação numérica do controle do comprimento das zonas de recirculação, geradas pela expansão abrupta no escoamento de um fluido magnético não condutor de corrente elétrica, por meio da aplicação de campos magnéticos após a expansão como exemplificado na figura 1.6.

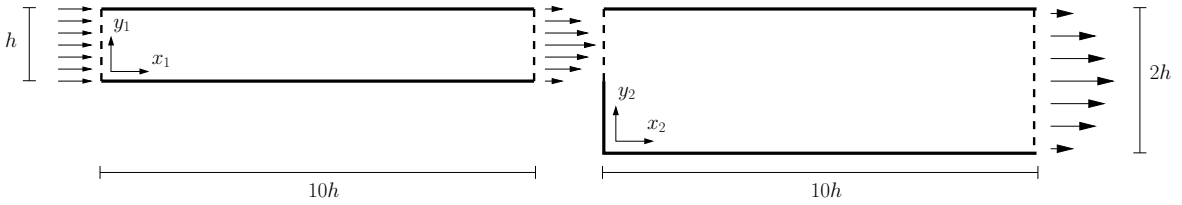


Figura 1.6: Descrição do problema - Controle de intensidade das zonas de recirculação após a expansão do canal por meio da aplicação de um campo magnético Hy ; divisão do problema em dois domínios numéricos. Neste problema, a altura do degrau S é igual à altura do canal antes da expansão, de forma que o diâmetro hidráulico D após a expansão seja o dobro da altura h do canal de entrada ($D = 2h$).

Diversos estudos foram conduzidos em escoamentos sujeitos a uma expansão abrupta interagindo com campos magnéticos, porém no âmbito da Magnetohidrodinâmica [63, 38, 40]. Na classe de estudos da interação entre fluidos e campos magnéticos, a Magnetohidrodinâmica tem foco na interação entre fluidos condutores de corrente elétrica (e.g.: metais líquidos) e campos magnéticos, contudo a formulação de problemas desta classe é completamente diferente do contexto proposto nesse projeto. Na magnetohidrodinâmica a interação entre o meio contínuo e o campo aplicado é dada por forças de campo que agem sobre todo o volume contínuo, e portanto os termos de origem magnética são incorporados simplesmente pela adição de forças de campo na equação do movimento e dispensam uma formulação para a equação constitutiva de um fluido magnético [41]. No caso da Ferrohídrodinâmica, o comportamento magnético resultante da alteração na estrutura física da suspensão está associado às questões constitutivas, e é modelado através de forças de superfície calculadas pelo divergente do tensor de tensões do material magnético. Desta forma, os termos de origem magnética que surgem na equação do movimento levam a um problema de fechamento e a necessidade de uma nova equação que permita a solução do sistema com novas incógnitas.

Por meio da utilização de uma equação evolutiva para a magnetização do meio contínuo é possível resolver o problema físico acoplado em que efeitos hidrodinâmicos e magnéticos se balanceiam, permitindo então o controle hidrodinâmico do escoamento através da aplicação de campos magnéticos controláveis. Esse controle pode ser feito, por exemplo, em um contexto de descolamento de camada limite, por meio da atuação de mecanismos físicos de origem magnética [64].

O estudo teórico e numérico proposto neste projeto será conduzido por meio de uma análise Ferrohidrodinâmica, baseada nas equações clássicas da Mecânica dos Fluidos e das Equações de Maxwell no limite magnetostático (i.e.: sem condução de corrente elétrica e sem cargas livres), com a implementação de propostas recentes para a equação constitutiva e para a equação evolutiva da magnetização de um fluido magnético.

1.3 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo principal a investigação numérica do escoamento bidimensional de um fluido magnético sujeito a uma expansão abrupta unidirecional. O problema proposto consiste na investigação das propriedades de um fluido de composição e comportamento complexos, aplicada a uma geometria simples amplamente estudada, que permita uma clara associação de alterações no padrão de escoamento a propriedades microestruturais deste material. Uma investigação teórica será conduzida visando a formulação de um escoamento de um fluido magnético sujeito a uma expansão abrupta, submetido a um campo magnético aplicado, e do consequente potencial teórico de controle da intensidade das zonas de recirculação provocadas pela geometria do escoamento. Para conduzir esta análise, serão discutidas, comparadas e interpretadas as diferentes formulações das condições de contorno dos campos escalares e vetoriais a serem determinados, os modelos de equações constitutivas existentes para um fluido magnético a partir das equações de Maxwell no limite magnetostático e as equações evolutivas de movimento e vorticidade resultantes. Serão estabelecidas também análises teóricas acerca dos modelos de magnetização de equilíbrio de uma suspensão coloidal de partículas magnéticas e das formulações para a equação evolutiva fenomenológica do campo de magnetização existentes.

A formulação vorticidade-função de corrente será desenvolvida e irá compor o sistema de equações governantes como alternativa ao método do acoplamento pressão-velocidade das equações governantes. Ao fim da discussão e dedução da formulação

a ser utilizada, um algoritmo sequencial será proposto para implementação e solução das equações governantes de uma análise Ferrohodinâmica, juntamente com as equações obtidas a partir da formulação vorticidade-função de corrente de um fluido magnetizável.

1.4 Objetivos Específicos

- **Definição das condições de contorno:** Escolha apropriada da formulação das condições de contorno para o campo indução magnética \mathbf{B} e campo aplicado \mathbf{H} a partir da solenoidade e irrotacionalidade dos campos, respectivamente, nas interfaces entre os meios que compõem o sistema físico em estudo. Solução do problema para um campo aplicado uniforme, e determinação das equações para solução do problema com um campo magnético aplicado gerado por um ímã permanente retangular [65]. Não será realizada a implementação da solução do problema para um campo não uniforme, porém sua dedução motivará trabalhos futuros;
- **Escolha da formulação da equação evolutiva fenomenológica da magnetização do meio a ser utilizada:** Visando a concepção de uma investigação numérica consistente, serão comparadas recentes formulações propostas [35, 13, 51], e determinada a proposição de equação fenomenológica que contabilize de forma mais completa os fenômenos investigados na escala de tempo de relaxação magnética característica do problema;
- **Desenvolvimento da formulação vorticidade-função de corrente:** Visando a simplificação da solução numérica a ser desenvolvida neste trabalho, será desenvolvida e utilizada a formulação vorticidade-função corrente para o escoamento de um fluido magnético, e descritas as vantagens na sua utilização, quando comparada ao método do acoplamento de campo de pressão e velocidade (acoplamento $P - v$);
- **Proposição de um algoritmo sequencial de solução:** Determinada a formulação a ser utilizada na solução e obtido o sistema de equações adimensionais governantes do problema em estudo, será proposto um algoritmo que será implementado em Python, após a discretização do meio contínuo pelo Método das Diferenças Finitas, para a solução iterativa do problema a partir das condições de contorno e inicial pré-determinadas;

- **Realização das simulações computacionais:** Implementação do algoritmo proposto ao sistema de equações governantes devidamente discretizado, com as condições de contorno e iniciais previamente discutidas e definidas. Realização de um estudo numérico preliminar para a determinação de tolerância numérica e refinamento de malha apropriados;
- **Estudo numérico do problema hidrodinâmico:** Solução do sistema de equações governantes na ausência de efeitos magnéticos para validação dos resultados obtidos neste estudo preliminar, visando conferir confiabilidade aos resultados que incorporam efeitos magnéticos e ainda existem na literatura;
- **Solução do problema e interpretação dos resultados:** Solucionar numericamente o problema proposto, incorporando todos os mecanismos físicos desejados, considerando parâmetros hidrodinâmicos e magnéticos que possibilitem o acoplamento de tais mecanismos; avaliar o comportamento da solução em limites assintóticos e estabelecer discussões e interpretar os resultados obtidos.

Capítulo 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equações de Maxwell e limite magnetostático

As equações de Maxwell são um conjunto de quatro equações que descrevem completamente os fenômenos eletromagnéticos. Por meio de um rigoroso formalismo matemático, Maxwell foi capaz de unificar leis experimentais do eletromagnetismo, resultando nas seguintes equações apresentadas em formulação diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

sendo \mathbf{E} o campo elétrico, \mathbf{H} o campo magnético aplicado, \mathbf{J} a densidade de corrente elétrica e ρ_f a densidade de cargas elétricas livres, \mathbf{B} campo indução magnética ou campo induzido, e a densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} . A equação (2.1) representa a Lei de Faraday, a equação (2.2) a Lei de Ampère Maxwell, a equação (2.3) a 1ª Lei de Gauss (ou Lei de Gauss da eletricidade) e a equação (2.4) a 2ª Equação de Gauss (ou Lei de Gauss do magnetismo).

O divergente de um campo vetorial está diretamente associado ao fluxo líquido de linhas de campo que atravessam uma superfície fechada. A partir da equação (2.4), é possível concluir que a quantidade de linhas de campo de \mathbf{B} que saem é igual à quantidade de linhas que entram na superfície de um volume arbitrário, e portanto não existem monopolos magnéticos, cujas linhas de campos seriam orientadas unicamente para dentro ou para fora de uma superfície que os envolvesse. Por outro lado, a partir da equação (2.2) é possível concluir que a rotacionalidade do campo aplicado \mathbf{H} está associado unicamente a propriedades elétricas. Pode-se então relacionar a irrotacionalidade do campo \mathbf{H} com a ausência de mecanismos de origem elétrica no problema físico estudado.

A Eletrohidrodinâmica e a Magnetohidrodinâmica são as áreas do estudo de fluidos não-Newtonianos que analisam os efeitos provenientes da interação entre cargas elétricas livres e campos elétricos, e entre campos magnéticos e fluidos condutores de corrente, respectivamente. Em uma análise Ferrohídrodinâmica (FHD), descarta-se a existência de cargas elétricas livres e a presença de forças de Lorentz, geradas pela condução de corrente elétrica através de um fluido submetido a um campo magnético externo. Dessa forma, na presente análise serão descartadas a densidade de carga livre ρ_f , a densidade de corrente livre \mathbf{J} , o deslocamento elétrico \mathbf{D} e o campo elétrico aplicado \mathbf{E} , dada a ausência de cargas elétricas e de condutibilidade elétrica em um fluido magnético típico.

Sabendo que qualquer campo magnético deve satisfazer as Equações de Maxwell [66, 67], aplicando o limite magnetostático às Equações de Maxwell obtemos as equações de campo empregadas em uma análise Ferrohídrodinâmica livre de interações eletrostáticas [68]:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \tag{2.6}$$

É possível inferir também que o limite magnetostático pode ser obtido em condições menos restritivas, como na ausência de densidade de carga elétrica e com um campo de deslocamento elétrico em regime permanente.

2.2 Estudo do sistema de equações da FHD

2.2.1 Conceitos Ferromagnéticos

Charles Coulomb determinou em 1785, com base em observações experimentais, que polos de mesma polaridade se repelem, e polos de polaridades diferentes se atraem como uma força proporcional ao produto de suas intensidades de polo, e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Dados dois polos pontuais de intensidades p e p' imersos em vácuo e separados por uma distância r , a magnitude da força

atuante sobre eles, direcionada ao longo das linhas de campo, é dada por [3]:

$$F = \frac{pp'}{4\pi\mu_0 r^2}, \quad (2.7)$$

em que μ_0 é a permeabilidade magnética do meio, como ilustrado na figura 2.1.

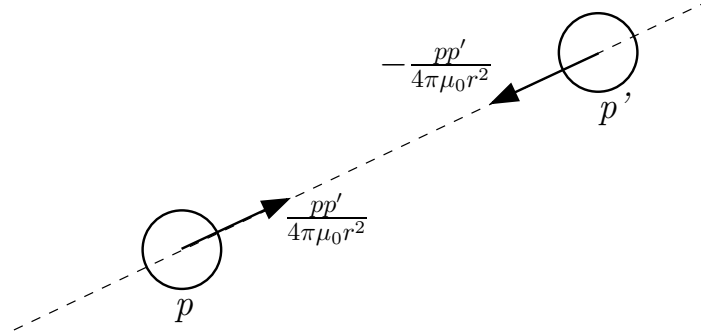


Figura 2.1: Esquema representativo da força atuante em dois polos magnéticos de intensidades p e p' a uma distância r .

Seja uma partícula de prova esférica, p' negativa, o campo magnético \mathbf{H} na vizinhança de um polo pontual p de área dada por $a = 4\pi r^2$ é

$$\mathbf{H} = \frac{p\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{p}{\mu_0 a} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_s}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.8)$$

sendo \mathbf{r} o vetor posição orientado de p a p' , $\hat{\mathbf{r}}$ o vetor unitário de \mathbf{r} e ρ_s a densidade superficial de polos magnéticos. O campo magnético \mathbf{H} tem a unidade de Ampère por metro [A/m], o parâmetro μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo e tem o valor de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \times \text{m}^{-1}$.

No SI, um campo induzido é definido da forma que, no vácuo, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, e da equação (2.8) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{B} = \frac{p}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} = \rho_s \hat{\mathbf{r}} \quad (2.9)$$

O campo \mathbf{B} pode ser interpretado como linhas de indução ao redor de um polo de intensidade p e tem unidade de Weber por metro quadrado, ou Tesla [T].

A magnetização do meio \mathbf{M} , ou intensidade de magnetização, denota o estado de polarização da matéria magnetizada e tem unidade de Ampères por metro [A/m]. Considerando um polo de intensidade uniforme p com uma área a , sua magnetização

é dada por

$$\mathbf{M} = \frac{p}{\mu_0 a} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_s}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

sendo ρ_s a densidade superficial de polos magnéticos.

Considerando que uma esfera uniformemente magnetizada produz um campo externo equivalente ao campo gerado por um dipolo, posicionado no centro da esfera, com o mesmo momento magnético total, serão analisadas agora as contribuições dos campos \mathbf{H} e \mathbf{M} na composição do campo indução magnética \mathbf{B} . Comparando as equações (2.8) e (2.10), podemos inferir que o campo externo aplicado \mathbf{H} contribui com $\mu_0 H$ linhas de indução, enquanto a magnetização do meio \mathbf{M} fornece uma contribuição de $\mu_0 M$ linhas no campo induzido total \mathbf{B} . Consequentemente, a partir da densidade superficial podemos concluir que o campo indução magnética é dado por

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (2.11)$$

Dessa forma, está estabelecida a relação entre o campo indução magnético \mathbf{B} e os campos magnético aplicado \mathbf{H} e magnetização do meio \mathbf{M} .

2.2.2 Superparamagnetismo

Considerando uma suspensão sem magnetização líquida, com partículas magnéticas orientadas randomicamente, observa-se que a aplicação de um campo magnético resulta gradualmente na orientação das partículas suspensas no subdomínio em direção ao campo aplicado. Para campos magnéticos de baixa intensidade aplicados, o surgimento de torques magnéticos causado pelo desalinhamento dos campos \mathbf{H} e \mathbf{M} provoca o alinhamento parcial das partículas, superando parcialmente a agitação térmica da suspensão. O aumento da intensidade do campo magnético aplicado resulta no aumento do estado de magnetização da suspensão, e para campos intensos as partículas podem se orientar completamente e a magnetização da suspensão atinge seu valor máximo, denominado magnetização de saturação. Tal fenômeno está representado pela figura 2.2.

Superparamagnetismo é o estado físico de um material onde o campo de magnetização global da suspensão e o campo magnético aplicado são colineares, e sua magnitude corresponde à soma dos momentos magnéticos das partículas suspensas.

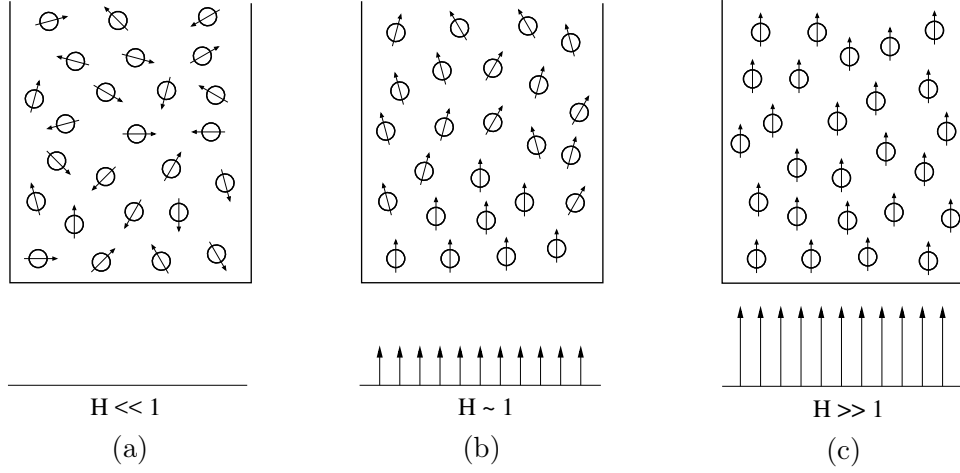


Figura 2.2: A magnetização gradual de uma suspensão magnética - A figura (a) representa a ausência de campo magnético aplicado e de magnetização líquida da suspensão; a figura (b) representa um campo magnético aplicado de baixa intensidade e magnetização parcial da suspensão; a figura (c) denota o alinhamento total dos momentos magnéticos das partículas e a suspensão atinge sua magnetização de saturação

De forma geral, para um material contínuo e anisotrópico, tem-se:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{H}, \quad (2.12)$$

em que \mathbf{S}_m é um tensor de segunda ordem denominado suscetibilidade magnética e representa a tendência de um meio contínuo a se magnetizar, dado um campo aplicado. O regime de superparamagnetismo representa um limite hipotético em que o alinhamento da partículas na direção do campo aplicado ocorre instantaneamente. Nesta condição de colinearidade dos campos \mathbf{M} e \mathbf{H} não há torques magnéticos e portanto não há acoplamento entre hidrodinâmica e magnetismo. Dessa forma, substituindo (2.12) em (2.11):

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{S}_m + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{H}. \quad (2.13)$$

Define-se então $\mu_0(\mathbf{S}_m + \mathbf{I})$ como o tensor permeabilidade magnética \mathbf{P}_m no caso mais geral de um meio contínuo anisotrópico. Para meios contínuos e isotrópicos, tem-se:

$$\mathbf{S}_m = \chi_m \mathbf{I}, \quad (2.14)$$

e portanto

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.15)$$

em que χ_m é a propriedade escalar denominada suscetibilidade magnética do meio, função da intensidade do campo aplicado \mathbf{H} e da temperatura T do meio. Dessa

forma, substituindo (2.14) em (2.13), temos que para um fluido superparamagnético a seguinte relação é estabelecida::

$$\mathbf{B} = \mu_0(\chi_m(H, T)\mathbf{I} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{H} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\chi_m(H, T) + 1)\mathbf{H}, \quad (2.17)$$

sendo $\mu(H, T) = \chi_m(H, T) + 1$ a função permeabilidade magnética do meio. Observe que, como μ_0 é uma constante, o produto $\mu_0 \times \mu_1(H, T) = \mu(H, T)$. Dessa forma:

$$\mathbf{B} = \mu(H, T)\mathbf{H}. \quad (2.18)$$

2.2.3 Potencial Magnético

Matematicamente, qualquer campo vetorial irrotacional pode ser escrito em função do gradiente de uma função escalar [69]. Dessa forma, sendo o campo aplicado \mathbf{H} irrotacional no limite magnetostático, é possível definir \mathbf{H} em função de uma função escalar na forma:

$$\mathbf{H} = \nabla\phi_m, \quad (2.19)$$

em que ϕ_m corresponde ao campo escalar potencial magnético. Inserindo o campo magnético induzido, definido na equação (2.11) na equação (2.5):

$$\nabla \cdot [\mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})] = 0 \quad (2.20)$$

$$\implies \nabla \cdot \mathbf{M} = -\nabla \cdot \mathbf{H}, \quad (2.21)$$

e substituindo (2.19) em (2.21), tem-se uma equação de Laplace para o potencial magnético ϕ_m :

$$\nabla^2\phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (2.22)$$

Conclui-se que, a partir da equação (2.22), é possível determinar o campo aplicado através de um campo potencial magnético ϕ_m , porém a determinação de condições de contorno em termos de ϕ_m que resultem em um campo \mathbf{H} fisicamente consistente é uma tarefa numérica complicada. Estas condições são frequentemente expressas por meio de condições de contorno de Neumann e devem resultar em um campo magnético aplicado irrotacional, para que a Lei de Ampère em regime magnetostático seja satisfeita. Sabendo que no vácuo a magnetização do meio é nula, a partir da equação

(2.11), tem-se:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.23)$$

e substituindo as equações (2.23) e (2.19) em (2.5):

$$\nabla \cdot (\mu_0 \nabla \phi_m) = 0 \quad (2.24)$$

$$\mu_0 (\nabla^2 \phi_m) = 0 \quad (2.25)$$

$$\implies \nabla^2 \phi_m = 0, \quad (2.26)$$

e portando, no limite superparamagnético o potencial magnético ϕ_m é uma solução da Equação de Laplace no contexto de um campo aplicado em um meio não-magnetizável.

2.2.4 Relaxação Magnética

A relaxação magnética é o fenômeno de resposta, associado à direção de magnetização das partículas \mathbf{M} , após uma mudança na direção do campo aplicado \mathbf{H} . Tal fenômeno é regido por dois mecanismos: a rotação das partículas magnéticas da suspensão e pela rotação do vetor magnetização interno à partícula. O mecanismo de rotação das partículas, ausente em meios sólidos, é associado à um tempo de difusão rotacional Browniano τ_B , de origem hidrodinâmica, dado por

$$\tau_B = \frac{3V\mu}{kT}, \quad (2.27)$$

em que V é o volume da partícula e μ é a viscosidade do fluido base. Em contrapartida, o mecanismo de rotação do vetor magnetização interno à partícula está associado à flutuações da magnetização interna da mesma. Tais flutuações são induzidas em situações onde a energia térmica kT , em que k é a constante do Boltzmann e T a temperatura absoluta do fluido associada à partícula, supera um limite energético dado por $I_s V$, em que I_s é a constante de anisotropia magnética do material e V é o volume da partícula. É importante destacar que tal mecanismo de rotação interna à partícula do momento de dipolo é associado à escalas de tempo inferiores às escalas descritas na mecânica dos meios contínuos, além de ser um mecanismo de origem quântica. Desta forma, em um meio polarizado dominado pelo tempo de relaxação de Nèel, a relaxação magnética ocorreria de forma instantânea.

Considerando uma partícula subdomínio uniaxial ferromagnética e livre de um campo magnético aplicado, sua magnetização se dará em uma das direções opostas en-

tre si, sobre o eixo preferencial de magnetização, que consiste em uma direção energeticamente favorável de magnetização interna à partícula. Neste caso, em que $I_s V \ll kT$, o tempo característico de Néel τ_N referente às flutuações da direção de magnetização interna à partícula [70] é dado por:

$$\tau_N = \frac{1}{f_0} \exp\left(\frac{I_s V}{kT}\right), \quad (2.28)$$

em que f_0 é uma frequência característica do material magnético da ordem de 10^9 Hz [71].

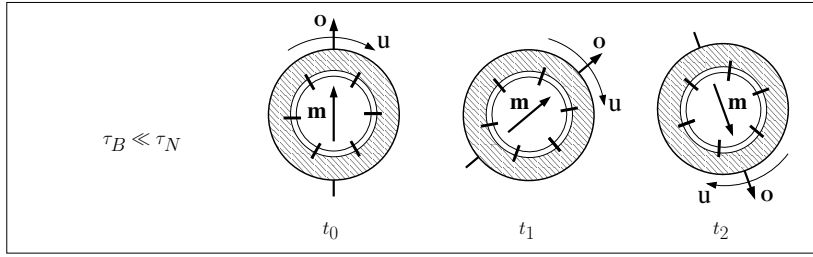
O tempo equivalente de relaxação é uma associação de relaxações de origem Browniana e de Néel que ocorrem independente. A composição e o cálculo destes mecanismos simultâneos, é dada de forma análoga ao cálculo da resistência equivalente obtida a partir associação de resistências elétricas em paralelo. Desta forma o tempo de relaxação equivalente, é dado por [72, 73]:

$$\frac{1}{\tau_{eq}} = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_N} \quad (2.29)$$

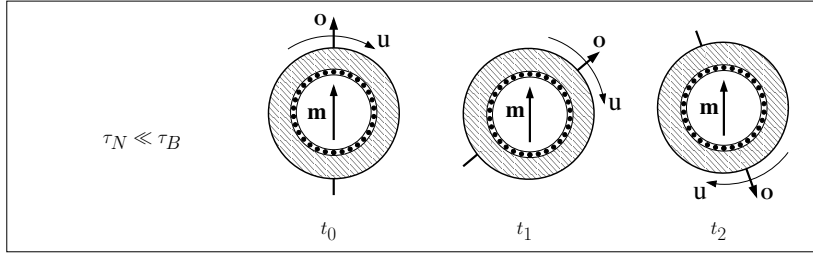
$$\implies \tau_{eq} = \frac{\tau_N \tau_B}{\tau_N + \tau_B}. \quad (2.30)$$

A partir da equação (2.30), pode-se inferir que se $\tau_N \ll \tau_B$, então $\tau_{eq} \rightarrow \tau_N$ e a relaxação magnética é dominada pelo mecanismo de Néel, enquanto se $\tau_B \ll \tau_N$ temos que $\tau_{eq} \rightarrow \tau_B$ e o mecanismo Browniano rege a relaxação magnética. A partir de uma análise de escala das equações (2.27) e (2.28) é possível estabelecer uma relação entre escalas de tempo de relaxação e o volume de uma partícula suspensa. Considerando uma partícula esférica, conclui-se que $\tau_N \sim \exp(d^3)$ e $\tau_B \sim d^3$. Observe que, devido à exponencial do cubo do diâmetro da partícula, o tempo característico de Néel, τ_N , exibe uma forte dependência ao volume da partícula, quando comparado ao tempo característico Browniano, τ_B . Dessa forma, pode-se verificar o mecanismo de relaxação magnética dominante, e seu respectivo tempo característico equivalente, a partir do diâmetro das partículas ferromagnéticas suspensas no líquido base.

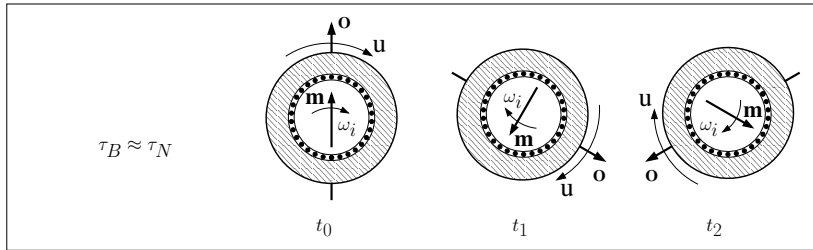
É possível estabelecer uma comparação entre os tempos característicos de relaxação magnética, e suas ordens de grandeza, e uma relação entre suas escalas e perturbações provenientes do escoamento, a partir da representação do comportamento de uma partícula magnética e do seu momento de dipolo em um escoamento, como mostrado na figura 2.3.



(a) Momento de dipolo fixo, característico de partículas micrométricas e sub-micrométricas.



(b) Momento de dipolo desacoplado, característico de partículas nanométricas.



(c) Tempos de relaxação de mesma ordem de grandeza e mecanismos de relaxação sobrepostos.

Figura 2.3: Esquema representativo da relação entre o tempo de relaxação magnética característico e a rotação do momento de dipolo magnético \mathbf{m} de uma partícula de orientação de referência \mathbf{o} . A figura (a) ilustra a condição característica de partículas suspensas de tamanho característico micrométrico, e conseqüentemente dominadas pelo mecanismo de relaxação de origem Browniana ($\tau_B \ll \tau_N$). Nesta situação o momento de dipolo \mathbf{m} é acoplado à partícula; a figura (b) ilustra o comportamento de partículas de tamanho característico nanométrico, dominadas pelo mecanismo de relaxação de Néel ($\tau_N \ll \tau_B$). Nesta situação o momento de dipolo rotaciona livremente internamente à partícula e o estado de equilíbrio não é perturbado pelo escoamento; a figura (c) ilustra a condição na qual ambos mecanismos de relaxação são de mesma ordem e se balanceiam ($\tau_N \approx \tau_B$). Neste caso, tanto uma equação evolutiva para a magnetização quanto uma equação para o spin de momento interno das partículas são necessárias para determinação do estado resultante.

No caso em que o tempo de relaxação magnética equivalente é o tempo de relaxação Browniano, descrito na figura 2.3a, a relaxação sobre a orientação do momento de dipolo magnético ocorre unicamente por mecanismos Brownianos, e tal orientação está acoplada à orientação da própria partícula. Na situação em que a barreira energética, associada à partícula, dada por $I_s V$ seja superada pela energia térmica kT , o

tempo de relaxação de Néel adquire relevância na relaxação magnética do meio e são induzidas flutuações internas na orientação do momento de dipolo da partícula [71]. Sendo o tempo de Néel τ_N muito menor que o tempo de relaxação Browniano τ_B , o tempo de relaxação equivalente τ_{eq} será dominado por τ_N de forma que $\tau_{eq} \approx \tau_N$. Neste limite, característico de suspensões de partículas nanométricas, o tempo de resposta do meio à perturbações induzidas pelo escoamento será infinitesimal e a magnetização global será dada pela magnetização de equilíbrio \mathbf{M}_0 . Desta forma, um escoamento com número de Reynolds associado de ordem moderada, como proposto neste estudo, não será capaz de perturbar a orientação do dipolo magnético e induzir o surgimento de torques internos aos meio, como mostrado na figura 2.3b. Caso os tempos de relaxação de Néel e Browniano sejam de mesma ordem de magnitude e dado pela equação (2.30), o momento de dipolo magnético adquire uma velocidade angular associada ω_i , independente da rotação da partícula, que deverá ser contabilizada na determinação do campo de magnetização do meio, como representado na figura 2.3c.

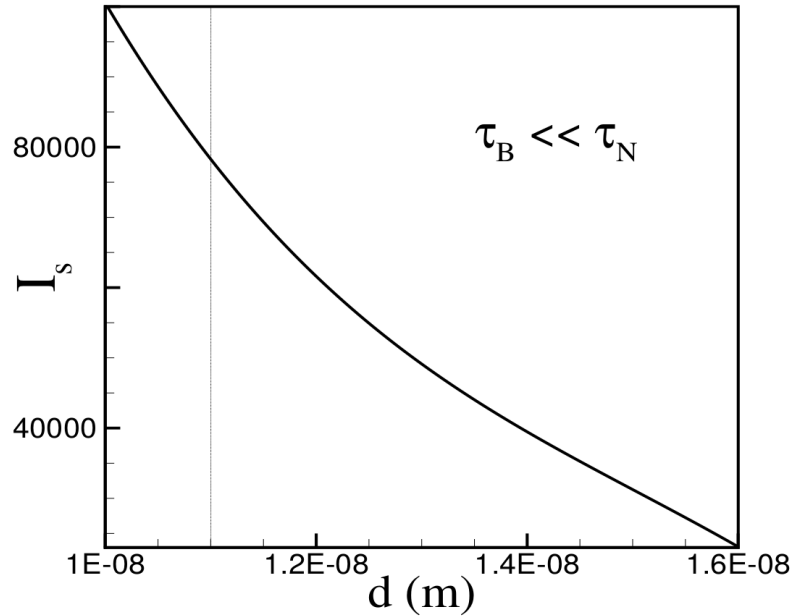


Figura 2.4: A região à direita da linha sólida representa uma região, para combinações de diâmetros médios (d) e de valores para a constante de anisotropia magnética das partículas (I_s), dados em erg/cm^3 , que resultam em $\tau_B \ll \tau_N$. Curva produzida para valores típicos de $\mu = 0.08MPa.s$ e $T = 298K$. A reta vertical representa o diâmetro médio das partículas suspensas em fluidos magnéticos. Esta figura foi gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.

Desta forma, visando contabilizar a influência do surgimento de torques magnéticos resultante da interação entre os campos de vorticidade e magnetização (i.e.: o acoplamento entre escoamento e a aplicação de um campo magnético externo), um

tempo característico de relaxação magnética Browniano será considerado. Assim, será possível computar o surgimento de torques internos, dado o poder do escoamento de perturbar a orientação dos momentos de dipolo das partículas suspensas, e observar o efeito global no padrão de escoamento desejado. Esta consideração é apropriada para suspensões de diâmetro médio das partículas suspensas superiores ao limite ilustrado na figura 2.4, que permitem observar um acoplamento entre o escoamento e a magnetização do fluido polarizável.

2.2.5 Condições de contorno magnéticas

O problema físico proposto neste trabalho tem como objetivo verificar o surgimento de um balanço de torques e, com isso, a possibilidade do controle da zona de recirculação resultante. O desalinhamento entre os campos \mathbf{H} e \mathbf{M} , provocado pela vorticidade do escoamento, resulta no surgimento de torques magnéticos. Com o objetivo de estudar este mecanismo de forma isolada, considera-se um campo aplicado uniforme, de forma que o termo $\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ seja anulado na equação do movimento, e portanto não será um mecanismo gerador de vorticidade. Desta forma é possível analisar o impacto no escoamento provocado pelos torques magnéticos de forma isolada. Por outro lado, deseja-se estudar o problema abordado neste trabalho futuramente em condições reais para um campo aplicado não uniforme. Será conduzida então uma discussão a respeito da formulação e do formalismo matemático de fechamento do problema, que servirá de base para a implementação desta condição em trabalhos futuros.

Nesta seção serão definidas as condições restritivas dos vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} nos contornos entre meios contínuos distintos, que serão utilizadas futuramente na solução numérica do problema abordado neste trabalho. As condições de contorno magnéticas serão especificadas para as interfaces descritas pela figura 2.5.

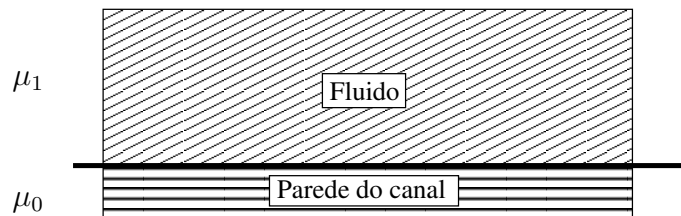


Figura 2.5: Esquema representativo demonstrando a necessidade de relacionar e deduzir propriedades magnéticas através de uma interface entre dois meios distintos. Neste caso, dados pelo material que compõe o canal de escoamento e o fluido de trabalho.

O objetivo desta seção é a definição das condições de contorno magnéticas, determinando a contribuição da magnetização do material que constitui o canal de escoamento sobre o campo indução magnética total no domínio do escoamento. Tal determinação será feita a seguir para os campos magnético aplicado \mathbf{H} e indução magnética \mathbf{B} a partir de uma análise do fluxo de tais campos nos domínios na interface mostrados nas figuras 2.6a e 2.6b.

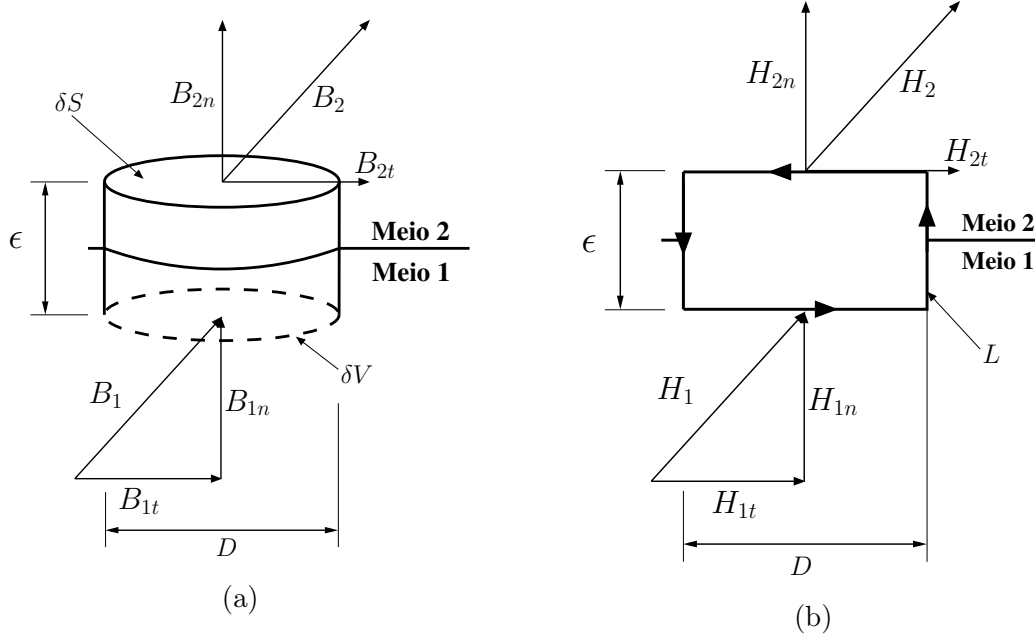


Figura 2.6: Análise da continuidade das condições de contorno em um volume infinitesimal δV e uma curva fechada L , ambos sobre a interface entre os meios em análise.

2.2.5.1 Condição de contorno para \mathbf{B}

Considere a superfície fechada δS mostrada na figura 2.6a, representando um disco de volume δV , diâmetro D e altura ϵ , e situado entre dois meios contínuos 1 e 2. A condição de contorno para o campo indução magnética \mathbf{B} a ser determinada é consequência direta da equação de Gauss para o magnetismo (2.5) no limite magnetostático, em formulação integral dada por:

$$\iiint_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oiint_{\delta S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (2.31)$$

No limite em que a altura ϵ tende a zero (i.e. $\epsilon \ll D$), o fluxo total de linhas de indução sobre a superfície δS do disco tem contribuições somente nas áreas superior A_2 e inferior A_1 , contidas nos meios 2 e 1, respectivamente. Como $\epsilon \ll a$, sendo $a = D/2$

o raio do disco, $|\mathbf{B}|\pi a^2 \gg |\mathbf{B}|2\pi a\epsilon$, e portanto a contribuição do fluxo de indução magnética na superfície lateral do disco pode ser desprezada. Neste caso a integral de superfície na equação (2.31) se reduz a:

$$\int_{A_1} B_{1n} dS = \int_{A_2} B_{2n} dS, \quad (2.32)$$

independente do tamanho das áreas A_1 e A_2 . Como $A_1 = A_2$ a equação (2.32) só é satisfeita se a componente normal de \mathbf{B} for contínua através da interface entre os meios 1 e 2. Neste caso, tem-se:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (2.33)$$

ou

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (2.34)$$

Tal condição deve ser válida na interface mostrada na figura 2.5.

2.2.5.2 Condição de contorno para \mathbf{H}

As condições de contorno para o campo magnético \mathbf{H} podem ser determinadas a partir da condição magnetostática $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ seguindo o esquema mostrado na figura 2.6b e partindo da integração da condição de irrotacionalidade de \mathbf{H} na superfície limitada pelo contorno L [74]:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dL = 0, \quad (2.35)$$

em que \mathbf{t} é o vetor tangente unitário ao caminho L . No caminho descrito na figura 2.6b, tem-se que $D \gg \epsilon$, e portanto as integrais de linha de primeira espécie em D do caminho L são muito maiores que as integrais de linha em D . Desta forma, a integral ao longo do caminho fechado L da equação (3.56), reduz-se a:

$$\oint_{D_1} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dL = \oint_{D_2} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dL, \quad (2.36)$$

que resulta em:

$$\mathbf{H}_y \cdot \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{H}_x \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0 \quad \text{ou} \quad H_{1t} = H_{2t}, \quad (2.37)$$

ou ainda a partir do Teorema de Stokes:

$$\nabla \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (2.38)$$

e portanto é possível concluir que a componente tangencial do vetor \mathbf{H} é contínua entre os meios analisados. Note que é possível reescrever a equação (2.37) em termos do potencial magnético, sendo $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$, tem-se:

$$\nabla\phi_m^1 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \nabla\phi_m^2 \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (2.39)$$

$$\implies \frac{\partial\phi_m^1}{\partial\hat{t}} = \frac{\partial\phi_m^2}{\partial\hat{t}}, \quad (2.40)$$

em que \hat{t} , neste caso, representa a direção tangencial ao caminho L , e não um parâmetro de tempo.

A imposição de condições de contorno em termos do potencial magnético ϕ_m não é uma tarefa trivial, por serem expressas em termos de condições de contorno de Neumann e a condição restritiva de que o campo \mathbf{H} calculado deva ser irrotacional [75]. Desta forma, a imposição das condições de contorno de Neumann será utilizada na transição entre as interfaces mostradas na figura 2.5, enquanto uma formulação alternativa para determinação das condições de contorno para a solução do campo magnético \mathbf{H} será utilizada para solucionar tal campo gerado por um ímã retangular de polaridade uniforme, representado na figura 2.7, e determinar suas componentes na interface com o duto de escoamento.

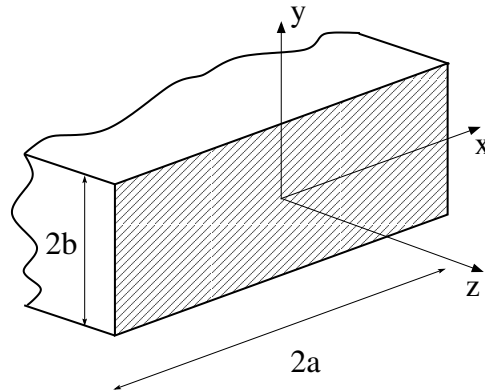


Figura 2.7: Coordenadas referentes à solução do campo magnético gerado por um ímã retangular permanente de polaridade uniforme.

O campo aplicado considerado nas simulações do presente trabalho é uniforme e aplicado verticalmente na forma $\mathbf{H} = H_0\hat{\mathbf{e}}_y$. A investigação da influência de campo magnético aplicado \mathbf{H} não homogêneo sobre o campo de vorticidade será estudada em

trabalhos futuros, e portanto o campo aplicado considerado nas futuras simulações será dado por um ímã permanente retangular situado sob o domínio de escoamento, como mostrado na figura 1.6 e cuja solução [65] é dada na forma adimensional por:

$$H_x = \frac{J}{4\phi\mu_0} \ln \left[\frac{y+b + \{(y+b)^2(x-a)^2\}^{1/2}}{y-b + \{(y-b)^2(x-a)^2\}^{1/2}} \times \frac{y-b + \{(y-b)^2(x+a)^2\}^{1/2}}{y+b + \{(y+b)^2(x+a)^2\}^{1/2}} \right] \quad (2.41)$$

$$H_y = \frac{J}{4\phi\mu_0} \ln \left[\frac{y+a + \{(y-b)^2(x+a)^2\}^{1/2}}{y-a + \{(y-b)^2(x-a)^2\}^{1/2}} \times \frac{y-a + \{(y+b)^2(x-a)^2\}^{1/2}}{y+a + \{(y+b)^2(x+a)^2\}^{1/2}} \right] \quad (2.42)$$

em que H_x e H_y são as componentes do campo \mathbf{H} nas direções tangenciais x e y na superfície do ímã e x e y representam a coordenada de um ponto arbitrário no domínio de cálculo onde se deseja avaliar tais componentes, como implementado no estudo numérico do escoamento de um fluido magnético sobre uma placa plana [75].

Por meio das equações (2.41) e (2.42) será possível estabelecer condições de contorno consistentes para a condução deste estudo numérico a partir da verificação de mecanismos de origem magnética a partir da aplicação do campo de um ímã permanente retangular. O presente estudo consiste na investigação da influência de um campo magnético uniforme, já determinado, sobre o campo de vorticidade do escoamento de um fluido magnético sujeito à uma expansão abrupta. A generalização das condições de contorno para o campo de um ímã permanente será explorada em trabalhos futuros.

A formulação desenvolvida nesta seção tem como objetivo fundamentar o cálculo do campo aplicado \mathbf{H} no interior de um domínio magnético, a partir do campo em torno deste domínio, e postular a continuidade de componentes dos campos \mathbf{B} e \mathbf{H} no interior do domínio a partir de condições de contorno magnéticas [65].

2.3 Uma breve discussão sobre efeitos de assimetria em Fluidos Polares

A colinearidade, entre os campos Magnetização do meio \mathbf{M} e Campo magnético aplicado \mathbf{H} , proporciona uma simplificação considerável na análise de escoamentos de fluidos magnéticos. Em suspensões de partículas subdomínio de tamanho suficientemente reduzido, a direção de \mathbf{m} rotaciona livremente no interior da partícula sólida em suspensão, seja qual for a orientação da partícula, estabelecendo um caso de equilíbrio estático. Entretanto, no caso de partículas de maior escala, o momento magnético \mathbf{m}

acoplado à direção da partícula \mathbf{d} é dado por

$$\mathbf{m} = \rho_s a_d \mathbf{d} = \mu_0 \mathbf{M} a_d \mathbf{d}, \quad (2.43)$$

sendo ρ_s a densidade superficial de polos, a_d a área superficial da partícula e μ_0 a permeabilidade magnética no vácuo. Nesse caso, uma variação na direção do campo aplicado \mathbf{H} perturba a magnetização \mathbf{m} da partícula que, devido a torques viscosos reativos, rotaciona em uma escala de tempo característico superior à de partículas subdomínio. Dessa forma, o desalinhamento entre os campos resulta em um torque magnético $\boldsymbol{\tau}_m$ por unidade de volume de valor finito dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (2.44)$$

De forma análoga, o torque associado à cada partícula magnética $\boldsymbol{\tau}_m^i$ submetida a um campo aplicado, esquematizado na figura 2.8, é dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_m^i = \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad (2.45)$$

em que \mathbf{m} é o momento magnético da partícula e \mathbf{H} o campo magnético aplicado.

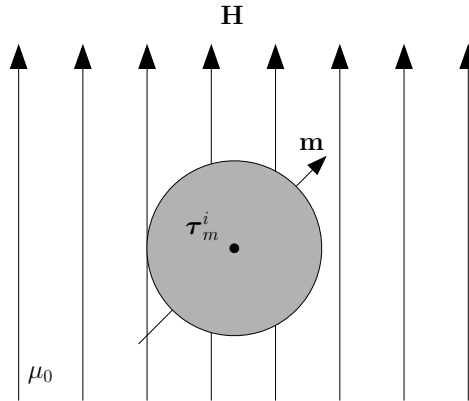


Figura 2.8: Torque atuante em uma partícula magnética devido ao desalinhamento entre a orientação de seu momento de dipolo \mathbf{m} e um campo magnético externo \mathbf{H} .

Localmente, o desalinhamento entre os campos \mathbf{m} e \mathbf{H} é causado pela ação hidrodinâmica do escoamento sobre as partículas magnéticas. Tanto a rotacionalidade do escoamento, quanto a aplicação de um campo magnético em uma direção não colinear com a vorticidade (i.e. a velocidade angular da partícula), provocam o desalinhamento global entre os campos \mathbf{M} e \mathbf{H} . Tal fenômeno ocorre em problemas físicos com um tempo característico de relaxação magnética equivalente ao tempo de relação Browni-

ano τ_B e, portanto, o momento de dipolo magnético \mathbf{m} de cada partícula possui direção fixa.

Escoamentos com tempo de relaxação magnética equivalente ao tempo característico de Néel, com momentos magnéticos de velocidade angular relativa à partícula, serão discutidos na seção 2.8.

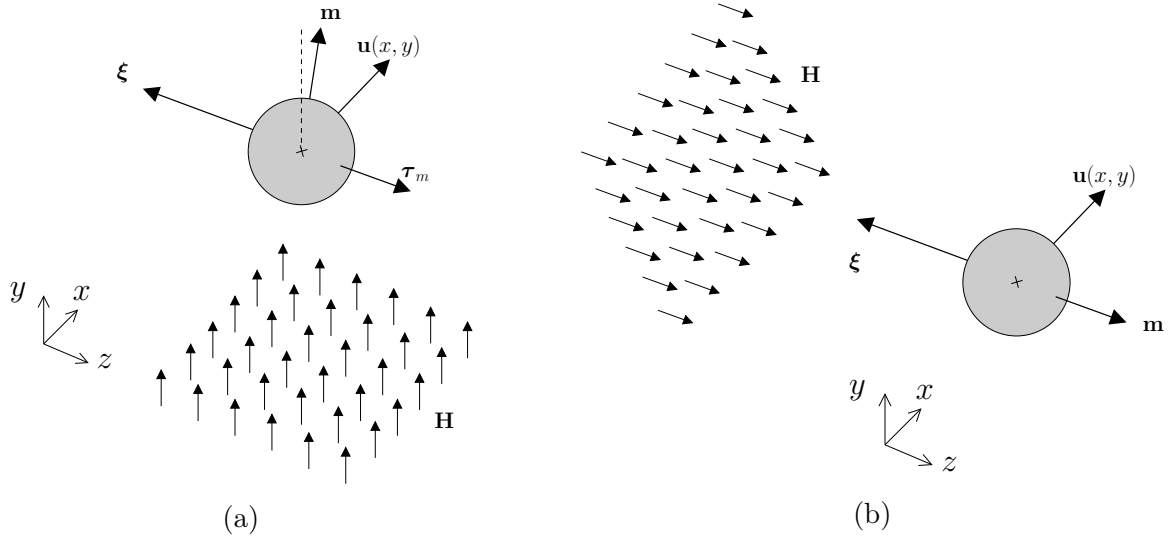


Figura 2.9: Comparativo entre possíveis direções para a aplicação do campo magnético externo e suas implicações no surgimento de um balanço de torques.

A partir da figura 2.9a é possível observar o surgimento de um torque magnético na partícula, causado pelo desalinhamento dos vetores \mathbf{m} e \mathbf{H} devido à vorticidade do escoamento. Entretanto, a aplicação do campo magnético na direção do campo de vorticidade do escoamento não provoca perturbação na orientação do momento de dipolo \mathbf{m} da partícula pela ação da vorticidade, como representado na figura 2.9b, e a partícula rotaciona livremente em torno do eixo z . Feita esta análise a respeito da influência da direção de aplicação do campo magnético \mathbf{H} , é possível concluir que, com o objetivo de se realizar um controle da vorticidade das partículas após uma expansão abrupta no escoamento de um fluido magnético, a direção de aplicação do campo \mathbf{H} deverá ser a representada na figura 2.9a, como havia sido representada inicialmente na figura 1.6. A aplicação de um campo magnético externo em um escoamento de cisalhamento simples de um fluido magnético resulta em um aumento da viscosidade aparente de até quatro vezes, para campos de alta intensidade [76].

A partir da equação integral do balanço de quantidade de movimento angular, é possível demonstrar que a presença de torques internos resulta na quebra de simetria

do tensor de tensões, e que no caso de um fluido magnético apolar tais torques internos são de origem magnética e são dados pela equação (2.44). Tal dedução é apresentada no *Apêndice A*.

2.4 Tensor de tensões de Maxwell

O Tensor de Maxwell - tensor de tensões magnético - fornece uma útil ferramenta na descrição quantitativa de forças de superfície de origem magnética atuando em um ponto material de um fluido magnético na ação de um campo externo. Um fluido magnético consiste em uma suspensão coloidal de nanopartículas magnéticas (domínios magnéticos) em um fluido base. O comportamento resultante da suspensão pode ser quantificado em uma combinação entre o regime Newtoniano e o regime Magnético de tal suspensão da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_m, \quad (2.46)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_n$ é o tensor que incorpora o comportamento Newtoniano do fluido base e $\boldsymbol{\sigma}_m$ é o tensor de Maxwell, que incorpora o comportamento magnético das nanopartículas presentes em tal suspensão coloidal.

2.4.1 Desenvolvimento de uma expressão matemática para o Tensor de Maxwell

Partindo de uma nuvem teste de dipolos magnéticos ao redor de um ponto no espaço, pelo Teorema de Brown, a nuvem de dipolos é equivalente a uma distribuição de densidade de polos ρ_V . De forma análoga ao conceito de campo elétrico, sabendo que \mathbf{H} é a força por unidade de polo, a densidade local de força aparente \mathbf{F} é:

$$\mathbf{F} = \rho_V \mathbf{H} \quad (2.47)$$

e, pelo Teorema de Brown [73]:

$$\rho_V = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (2.48)$$

Deseja-se manipular o lado direito da equação (2.47) para que possa ser escrita em termos do divergente de um tensor de segunda ordem, representando forças superficiais de origem magnética em um volume contínuo material e respeitando assim a homogeneidade de ordem tensorial da equação. Tal desenvolvimento é apresentado no *Apêndice B*, onde é demonstrado que a densidade local de força aparente pode ser dada na forma:

$$\mathbf{F} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{2}\mu_0 H^2 \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} \right). \quad (2.49)$$

Portanto tem-se que o Tensor de Maxwell é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_m = -\frac{1}{2}\mu_0 H^2 \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}, \quad (2.50)$$

em que $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ representa um termo associado à uma pressão magnética p_m . Incorporando os efeitos magnéticos à parcela Newtoniana, referente ao fluido base da suspensão, obtém-se o tensor de tensões do fluido magnético em estudo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_m \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} - p_m\mathbf{I} + \mu_0\mathbf{H}\mathbf{H}, \quad (2.52)$$

em que p_m denota uma pressão magnética e \mathbf{D} é o Tensor Taxa de Deformação definido por:

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T}{2}. \quad (2.53)$$

Observe que o termo $\mu_0\mathbf{H}$ na equação (2.50) corresponde ao campo indução magnética \mathbf{B} em um meio não polarizável. A fim de generalizar a equação (2.50), tem-se que

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad (2.54)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m = -p_m\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}. \quad (2.55)$$

Observe que como μ_0 é um escalar, o seguinte termo na equação (2.52) pode ser

manipulado, de forma que:

$$\mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H} = \mathbf{H} \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.56)$$

$$\implies \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{B}, \quad (2.57)$$

como mostrado na análise numérica do comportamento da camada limite no escoamento de um fluido magnético, submetido à um campo magnético aplicado, sobre uma placa plana [75].

2.4.2 Formulações para a parcela deviatórica do Tensor de Maxwell

Dado um tensor de segunda ordem \mathbf{A} arbitrário, sabe-se que este pode ser representado como a soma de dois tensores: um tensor isotrópico (ou esférico) $\alpha \mathbf{I}$ e um tensor deviatórico \mathbf{A}^D , cujo traço é nulo [77], de forma que:

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}^D. \quad (2.58)$$

Sabendo que por definição a parte isotrópica de um tensor, composta somente por elementos na sua diagonal principal, é simétrica, o tensor \mathbf{A} será simétrico se, e somente se, sua parte deviatórica \mathbf{A}^D for simétrica.

Por outro lado, todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto em uma parte simétrica \mathbf{A}^{sym} , tal que $\mathbf{A}^{sym} = [\mathbf{A}^{sym}]^T$, e uma parte anti-simétrica \mathbf{A}^a , tal que $\mathbf{A}^a = -[\mathbf{A}^a]^T$. Desta forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{sym} + \mathbf{A}^a. \quad (2.59)$$

Tal teorema é demonstrado a partir da dedução de que $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ é um tensor simétrico, e que $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ é um tensor anti-simétrico. Tem-se então que, de forma mais geral, um tensor de segunda ordem pode ser representado da seguinte forma [69, 77]:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (2.60)$$

Como deduzido na seção 2.3, a condição de simetria do tensor de tensões requer que o somatório de torques em um elemento contínuo seja nulo. Como apresentado na equação (2.44), tem-se que torques de origem magnética resultam do desalinhamento entre os campos \mathbf{M} e \mathbf{H} ($\tau_m \sim \mathbf{M} \times \mathbf{H}$). Considerando diferentes proposições para a

parte deviatória do tensor de Maxwell, é possível obter os termos de origem magnética que serão adicionados à equação do momento linear de um fluido Newtoniano e deduzir sua simetria por meio das operações $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m$ e $\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}_m$, respectivamente. Os resultados desta análise são apresentados na tabela 2.1.

$\boldsymbol{\sigma}_m^D$	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m$	$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}_m$	Tipo de estudo	Referências
$\frac{1}{2}(\mathbf{BH} + \mathbf{HB})$	$\mu_0[\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{1}{2}\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})]$	0	Teórico	[78]
\mathbf{BH}	$\mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})$	$\mu_0(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$	Teórico	[79]
\mathbf{HB}	$\mu_0[\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})]$	$\mu_0(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$	Teórico	[44]
$\frac{1}{2}(\mathbf{HB} - \mathbf{BH})$	$\frac{1}{2}\mu_0\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})$	$\mu_0(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$		

Tabela 2.1: Formulações existentes para a parcela deviatória do Tensor de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}_m^D$, com termos resultantes na equação do momento ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m$) e simetria avaliada pela operação $\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}_m$.

A partir da equação (2.60), observa-se que a primeira proposição descrita na tabela 2.1 é composta somente pela parcela simétrica do tensor \mathbf{BH} , e portanto resulta em uma formulação simétrica do tensor de tensões, pois $\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}_m = 0$. Entretanto, tal formulação resulta em um termo $\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ na equação do movimento, que claramente está associado ao desalinhamento entre os campos \mathbf{M} e \mathbf{H} , e portanto proveniente da presença de torques magnéticos, o que estabelece um paradoxo nesta formulação. Assim, a utilização desta formulação demanda a imposição forçada de que, sendo um tensor de tensões simétrico o somatório de torques internos é nulo, o termo $\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ também deve ser nulo [78]. De forma semelhante, a segunda proposição também estabelece um paradoxo, pois a formulação \mathbf{BH} resulta na quebra da simetria do tensor de tensões, pois $\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}_m \neq 0$ (exclusivamente associada à presença de torques internos), entretanto nenhum termo resultante na equação do movimento incorpora o mecanismo proveniente do desalinhamento entre os campos, dado por $\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ [79]. Finalmente, observa-se que a formulação \mathbf{HB} da parte deviatória do tensor de Maxwell resulta tanto em uma formulação assimétrica do tensor de tensões da suspensão, quanto resulta em um termo associado à presença de torques magnéticos na equação do movimento [44].

Dadas as expressões obtidas para a Equação do Movimento de um fluido magnético para diferentes formulações da parte não-isotrópica do Tensor de Maxwell, cuja dedução

é apresentada no *Apêndice C*:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho}\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H} \quad (\text{Formulação } \mathbf{BH})$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho}\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\mu_0}{\rho}\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H} \quad (\text{Formulação } \mathbf{HB})$$

A equação do movimento obtida a partir da formulação \mathbf{HB} obedece o Teorema de Kelvin da Circulação, dada a hipótese de campo gravitacional conservativo, cuja dedução é apresentada no Apêndice D.

Pode-se inferir que em casos onde o campo aplicado \mathbf{H} é uniforme (em pequenos *gaps* de escoamento) e portanto $\nabla\mathbf{H}$ é zero, a influência dos efeitos magnéticos observados experimentalmente não é computada analiticamente na formulação \mathbf{BH} . Sendo assim, neste trabalho será adotada a formulação \mathbf{HB} , por ser uma formulação mais completa, na tentativa de obter uma descrição mais precisa dos fenômenos a serem estudados.

Na próxima seção será deduzida a objetividade das equações constitutivas mencionadas.

2.4.3 Objetividade das Equações Constitutivas

O objetivo desta seção é demonstrar, analiticamente, a objetividade do termo não isotrópico do tensor de tensões das equações constitutivas propostas na seção anterior para as formulações \mathbf{BH} e \mathbf{HB} , garantindo posteriormente uma simulação numérica teoricamente bem fundamentada e sem inconsistências no que tange o formalismo constitutivo descrito em Truesdell e Noll [80].

Na proposição de uma equação constitutiva, além de buscar uma completa descrição das propriedades físicas e termodinâmicas de um material, e suas respectivas relações, é necessário que a descrição proposta seja absoluta e invariante. Dessa forma a resposta do material é observada da mesma forma para qualquer observador, e portanto obedece o Princípio da indiferença material (*Material Frame Indifference - MFI*) [80]. As propriedades descritas por uma equação constitutiva são assumidamente intrínsecas ao material e, portanto, devem ser invariantes à diferentes observadores em diferentes sistemas de referência.

A partir da definição de um tensor cartesiano de segunda ordem \mathbf{A} como uma entidade com nove componentes em uma base cartesiana ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}\} \in \mathbb{R}^3$ ($A_{ij}, i, j = 1, 2, 3$) [69] que, dada uma rotação do sistema de coordenadas \mathbf{Q} para $\{\hat{\mathbf{e}}'\}$ se torna:

$$\bar{A}_{pq} = Q_{ip}Q_{jq}A_{ij}, \quad (2.61)$$

em que as componentes do tensor ortogonal $Q_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j$ são dadas por $Q_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$, sendo $\hat{\mathbf{e}}'_i$ e $\hat{\mathbf{e}}_j$ os vetores unitários que compõem as bases canônicas dos sistemas ortogonais $\bar{\mathbf{A}}$ e \mathbf{A} , respectivamente, como ilustrado na figura 2.10. Desta forma, as componentes Q_{ij} são dadas por cossenos de ângulos relativos a uma transformação de rotação de um observador do sistema \mathbf{A} para o sistema $\bar{\mathbf{A}}$ arbitrário.

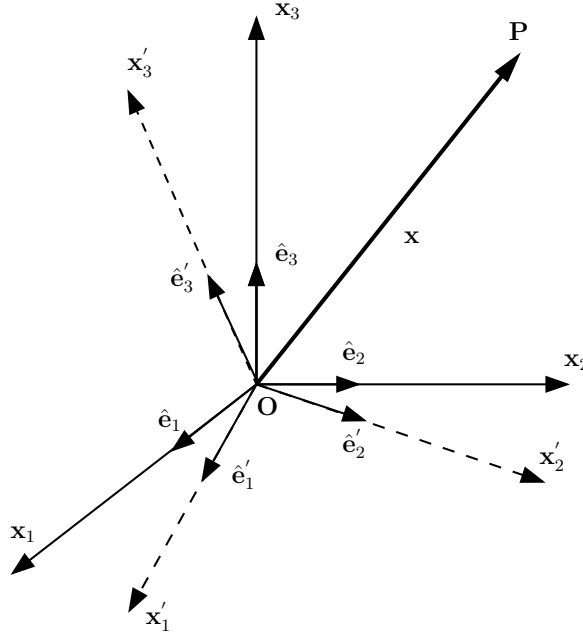


Figura 2.10: Transformação ortogonal \mathbf{Q} de rotação de um sistema de coordenadas de base $\{\hat{\mathbf{e}}\}$ para um outro sistema de base $\{\hat{\mathbf{e}}'\}$ com componentes $Q_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$.

Pela relação de ortogonalidade dada por $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, tem-se que $A_{ij} = Q_{ip}Q_{jq}\bar{A}_{pq}$. Dessa forma, sendo \mathbf{H} e \mathbf{B} dois vetores, o conjunto de nove produtos diáticos H_iB_j representa um tensor de segunda ordem e obedece a transformação dada pela equação (2.61). Sendo $A_{ij} = H_iB_j$:

$$\bar{A}_{pq} = \bar{H}_p\bar{B}_q \quad (2.62)$$

$$= Q_{ip}H_iQ_{jq}B_j \quad (2.63)$$

$$= Q_{ip}Q_{jq}(H_iB_j) \quad (2.64)$$

$$\implies \bar{A}_{pq} = Q_{ip}Q_{jq}A_{ij}. \quad (2.65)$$

Pode-se observar que a demonstração da objetividade do tensor \mathbf{BH} é análoga à demonstração feita para o tensor \mathbf{HB} , e portando ambas formulações da parcela deviatória do Tensor de Maxwell obedecem o Princípio da Indiferença Material (*MFI*).

2.5 Equação da Vorticidade para um Fluido Magnético

Nesta etapa será deduzida uma equação para a vorticidade do escoamento de um fluido magnético, para adequar o problema à formulação vorticidade-função de corrente. Primeiramente será aplicado o rotacional na equação (C.28), dado que a vorticidade $\boldsymbol{\xi}$ é definida pelo rotacional do campo de velocidades euleriano ($\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}$):

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) &= \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) + \nabla \times \mathbf{g} + \\ &+ \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (2.66)$$

considerando então que o campo gravitacional é um campo conservativo e pode ser escrito em termos do gradiente de um potencial escalar na forma $\mathbf{g} = -\nabla \chi$, tem-se que:

$$\nabla \times (\nabla \chi) = 0, \quad (2.67)$$

e a equação (2.66) se reduz a

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) &= \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) + \\ &+ \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Adotando a hipótese de fluido barotrópico, situação na qual não há estratificação de massa específica devido à gradientes de temperatura e o campo de massa específica é função unicamente do campo de pressão [$\rho = \rho(p)$], tem-se que $\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0$. Além do mais, é comum considerar que tal fluido magnético seja incompressível e que o campo de massa específica do meio permanece uniforme (ρ constante), dado que em termos práticos são compostos de um líquido base carreador. Desta forma, a partir da equação da continuidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.69)$$

tem-se que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ para escoamentos incompressíveis e o campo de velocidades \mathbf{u} é

um campo solenoidal. Desta forma a partir de (2.68) tem-se:

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})) + \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})], \quad (2.70)$$

e a partir da identidade vetorial (I.12), tem-se:

$$\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] = \nabla [\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (2.71)$$

Desenvolvendo a expressão entre colchetes do primeiro termo à direita da igualdade na equação (2.71) em notação indicial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \cdot (M_j H_k) \epsilon_{j k p} \hat{e}_p = \frac{\partial}{\partial x_i} (M_j H_k) \epsilon_{i j k} \quad (2.72)$$

$$= \left[M_j \frac{\partial H_k}{\partial x_i} + H_k \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right] \epsilon_{i j k} \quad (2.73)$$

$$= -\mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) \quad (2.74)$$

Como $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, consequência da Lei de Ampère-Maxwell no limite magnetostático, o primeiro termo se anula. Expandindo o segundo termo em notação indicial, tem-se:

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = H_k \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \epsilon_{i j k} \quad (2.75)$$

$$= H_1 \frac{\partial M_3}{\partial x_2} + H_2 \frac{\partial M_1}{\partial x_3} + H_3 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} - \\ - H_1 \frac{\partial M_2}{\partial x_3} - H_2 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} - H_3 \frac{\partial M_1}{\partial x_2} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = 0, \quad (2.77)$$

pois $\mathbf{H} = H_1 \hat{e}_1 + H_2 \hat{e}_2$ e $\mathbf{M} = M_1 \hat{e}_1 + M_2 \hat{e}_2$ no caso bidimensional. Dessa forma tem-se que

$$\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] = -\nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (2.78)$$

$$\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] = \nabla^2 (\mathbf{H} \times \mathbf{M}), \quad (2.79)$$

e a equação da vorticidade do escoamento de um fluido magnético, barotrópico, e

bidimensional é dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \nabla^2 (\mathbf{H} \times \mathbf{M}) \right]. \quad (2.80)$$

Dada a condição de campo aplicado \mathbf{H} uniforme neste estudo, tem-se que $\nabla \mathbf{H} = 0$, e portanto a equação da vorticidade (2.80) se reduz a:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla^2 (\mathbf{H} \times \mathbf{M})]. \quad (2.81)$$

Posteriormente, a equação (2.81) será adimensionalizada e discretizada para que possa ser resolvida numericamente.

2.6 Comentários sobre a equação da vorticidade no limite superparamagnético

Na condição de superparamagnetismo, como representado na figura 2.2c, a magnetização do meio se orienta completamente na direção do campo aplicado instantaneamente e que, como citado na equação (2.12), tal grau de magnetização está associado à suscetibilidade magnética do meio (χ_m), de forma que:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 = \chi_m \mathbf{H}. \quad (2.82)$$

Será deduzida a equação da vorticidade de um fluido superparamagnético, no caso mais geral de um meio com suscetibilidade magnética estratificada. Neste caso, inserindo (2.82) em (2.70), tem-se:

$$\frac{D \boldsymbol{\xi}}{Dt} = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{\rho} \{ \nabla \times [\nabla \times (\chi_m \mathbf{H} \times \mathbf{H})] + \nabla \times [\chi_m \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}] \}. \quad (2.83)$$

Como $\mathbf{H} \times \mathbf{H} = 0$, substituindo a equação (B.10) em (2.83) tem-se:

$$\frac{D \boldsymbol{\xi}}{Dt} = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{2\rho} \nabla \times [\chi_m \nabla H^2]. \quad (2.84)$$

Desenvolvendo o último termo à direita da equação (2.84), tem-se:

$$\nabla \times [\chi_m \nabla H^2] = \nabla \chi_m \times \nabla H^2 + \chi_m \nabla \times \nabla H^2 \quad (2.85)$$

$$\implies \nabla \times [\chi_m \nabla H^2] = \nabla \chi_m \times \nabla H^2, \quad (2.86)$$

pois o rotacional do gradiente do escalar H^2 é igual a zero. Substituindo (2.86) em (2.84), tem-se a equação da vorticidade de um meio magnético com suscetibilidade magnética variável:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{2\rho} \nabla \chi_m \times \nabla H^2. \quad (2.87)$$

Assim, pode-se concluir que até mesmo no limite superparamagnético (i.e. magnetização do meio \mathbf{M} tem a mesma direção do campo magnético aplicado \mathbf{H}), gradientes de suscetibilidade magnética (e.g. devido à gradientes de temperatura) são mecanismos geradores de vorticidade. Tal fenômeno foi estudado experimentalmente por meio da convecção termo-magnética em cavidades, com medição dos campos de temperatura e das taxas de transferência de calor, e com determinação de padrões de escoamento e de instabilidades por meio da visualização direta do escoamento [30]. Observou-se a formação de correntes convectivas secundárias, provenientes da estratificação do campo suscetibilidade magnética induzido, tanto pelos gradientes de temperatura na cavidade, quanto pela aplicação de um campo magnético externo. Estudos teóricos também foram conduzidos acerca da influência de campos magnéticos rotativos sobre fluidos magnéticos e foram observadas taxas de aquecimento e resfriamento com perfis simétricos e sua correlação com o campo de vorticidade associada ao escoamento induzido do fluido [81]. Em meios com suscetibilidade magnética constante ($\nabla \chi_m = 0$), tem-se que

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi \quad (2.88)$$

e, conseqüentemente, não há nenhuma contribuição de fatores magnéticos como mecanismos geradores de vorticidade. De fato o limite superparamagnético com suscetibilidade constante resulta em uma formulação matemática incapaz de capturar a influência de qualquer mecanismo de origem magnética na geração local de vorticidade do escoamento. Visando investigar a interação entre o comportamento hidrodinâmico e magnético deste complexo fluido, o problema será estudado em regimes de relaxação magnética de escala finita, permitindo que o escoamento perturbe o campo de magnetização global. Para isso será desenvolvida uma equação evolutiva da magnetização do meio, a fim de analisar profundamente a relação entre o campo de vorticidade ξ

e a magnetização do fluido \mathbf{M} , com o intuito de obter uma simulação numérica que compute todos os mecanismos incorporados à equação evolutiva para a magnetização que será proposta posteriormente.

2.7 Dedução de uma equação para o potencial magnético em um regime superparamagnético

O problema proposto consiste na investigação do acoplamento do escoamento mais geral de um fluido não superparamagnético, cujo campo de magnetização global é obtido a partir da solução de uma equação evolutiva para \mathbf{M} . Com o objetivo de fundamentar teoricamente estudos futuros mais específicos, será deduzida uma equação do potencial magnético para um meio superparamagnético com suscetibilidade magnética variável, e verificar o acoplamento entre os campos de vorticidade e de magnetização global mesmo em um regime superparamagnetismo de relaxação instantânea. Considere a equação de Laplace para o potencial magnético (2.22):

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (2.89)$$

no limite superparamagnético a magnetização do meio é dada por (2.82):

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.90)$$

e com suscetibilidade variável de acordo com o campo aplicado ($\chi_m = \chi_m(\mathbf{H})$). Inserindo (2.19) em (2.90), tem-se:

$$\mathbf{M} = \chi_m \nabla \phi_m, \quad (2.91)$$

e inserindo (2.91) em (2.89), tem-se:

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot (\chi_m \nabla \phi_m) \quad (2.92)$$

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m - \chi_m \nabla^2 \phi_m \quad (2.93)$$

$$(1 + \chi_m) \nabla^2 \phi_m = -\nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m \quad (2.94)$$

$$\nabla^2 \phi_m = -\left(\frac{1}{1 + \chi_m}\right) \nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m. \quad (2.95)$$

A equação (2.95) é a equação de Laplace para o potencial magnético com suscetibilidade magnética variável. A seguir será desenvolvida uma formulação para a equação

evolutiva da magnetização, que irá compor o sistema de equações governantes estudado neste trabalho do caso mais geral do escoamento de um fluido magnético barotrópico com campos de vorticidade e magnetização acoplados.

2.8 Conexão microscópica-contínua em FHD: modelos de magnetização de equilíbrio

A magnetização é definida, macroscopicamente, como o estado de polarização de um meio contínuo magnetizado. Inicialmente será definida nesta seção o conceito de momento magnético, como propriedade molecular ou nano, e sua direta relação com a magnetização do meio, como propriedade macroscópica, para que seja obtida posteriormente uma descrição para a quantidade de magnetização.

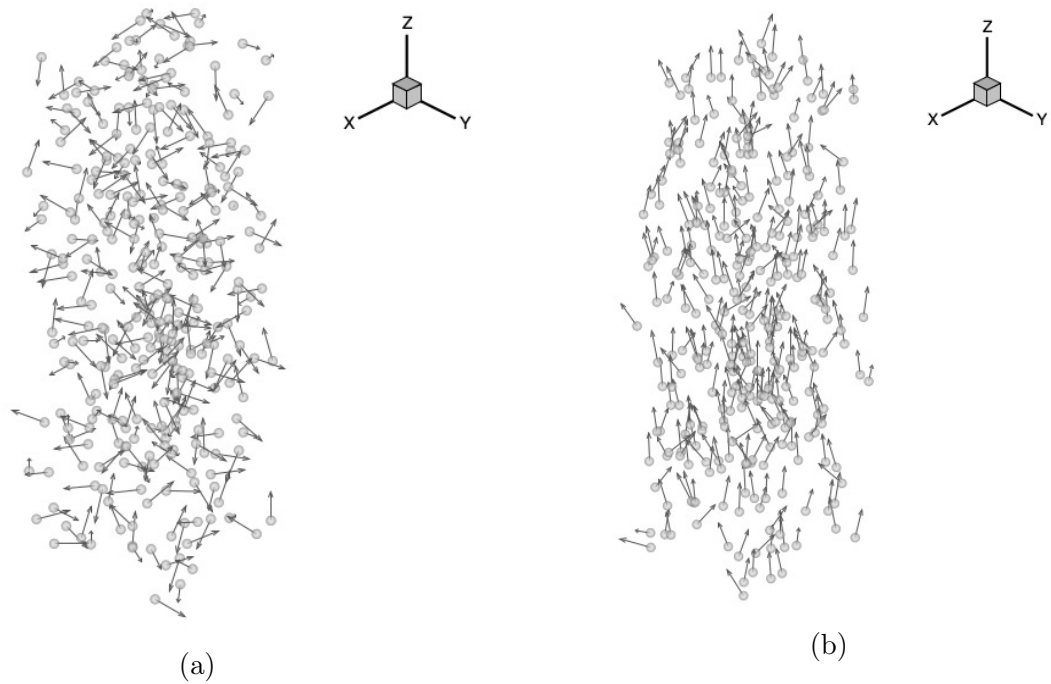


Figura 2.11: Alinhamento parcial de partículas suspensas na direção do campo aplicado, obtido via simulação computacional de muitos corpos [7]. Figura gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.

A definição de momento de dipolo magnético pode ser feita, de forma simples, considerando um circuito fechado de pequena área ΔA conduzindo uma corrente elétrica I constante [74]. O momento de dipolo magnético associado a este circuito, medido

em joules por tesla ou em ampère metro quadrado ($JT^{-1} = Am^2$) é, por definição:

$$\mathbf{m} = I\Delta A\hat{\mathbf{n}}, \quad (2.96)$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ o vetor unitário normal à pequena área ΔA , definido pelo sentido da corrente elétrica.

Seja um elemento contínuo de volume δV formado por um número suficientemente grande de partículas magnéticas, ou momentos magnéticos, distribuídas de forma estatisticamente homogênea e que sejam independentes no volume material δV , pode-se calcular uma média dos momentos de dipolo contidos neste volume contínuo do meio δV de forma que o resultado desta média tenha variações muito pequenas na escala local ΔV . Nestas condições, pela hipótese de ergodicidade, pode-se dizer que a média volumétrica dos momentos de dipolo em um período de tempo e a média da distribuição de probabilidade associada aos momentos de dipolo magnético das partículas contidas no volume material δV são equivalentes. Dessa forma, define-se a média volumétrica dos momentos magnéticos distribuídos em δV como sendo

$$\langle \mathbf{m} \rangle(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V' \rightarrow \delta V} \frac{1}{\delta V'} \int_{\delta V'} \mathbf{m}(\mathbf{y}, t) dV, \quad (2.97)$$

em que \mathbf{x} é uma posição fixa no interior do volume material δV que tende a um volume contínuo mínimo $\delta V'$, em torno da qual é calculado o momento de dipolo médio local, e \mathbf{y} percorre todo o volume δV , podendo estar no domínio das partículas magnéticas suspensas ou no domínio do fluido base contínuo como mostrado na figura 4.14. Considerando um dado instante de tempo fixo, a dependência do tempo será desconsiderada nessa análise.

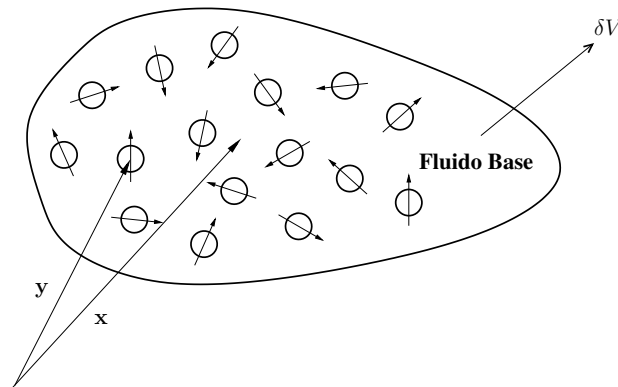


Figura 2.12: Esquema representativo do volume δV da média volumétrica com posição \mathbf{x} fixa e uma coordenada de varredura interna \mathbf{y} em um volume infinitesimal δV de uma suspensão de partículas magnéticas com um momento magnético \mathbf{m} associado.

Para a suspensão em estudo, o volume total δV pode ser escrito em termos da soma do volume de fluido acrescida do volume total das partículas magnéticas suspensas:

$$\delta V = \delta V_m + \sum_k^N v_p^k, \quad (2.98)$$

sendo δV_m o volume de fluido, N o número total de partículas suspensas e v_p o volume de uma partícula. Dessa forma, pode-se escrever a equação (2.97) na forma

$$\langle \mathbf{m} \rangle(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V' \rightarrow \delta V} \frac{1}{\delta V'} \left[\int_{\delta V_m} \mathbf{m}(\mathbf{y}) dV + \int_{\sum_k^N v_p^k} \mathbf{m}(\mathbf{y}) dV \right]. \quad (2.99)$$

Sabendo que o fluido base da suspensão não exibe comportamento magnético, a contribuição da integral no volume do meio base contínuo se anula, pois $\mathbf{m}(\mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{y} \in \delta V_m$. Tem-se então que

$$\langle \mathbf{m} \rangle(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V' \rightarrow \delta V} \frac{1}{\delta V'} \int_{\sum_k^N v_p^k} \mathbf{m}(\mathbf{y}) dV. \quad (2.100)$$

Matematicamente, a equação (2.100) representa uma média volumétrica de todos os momentos de dipolo magnéticos orientados na direção do campo magnético aplicado. Na escala do contínuo, a magnetização representa o efeito médio das componentes dos momentos de dipolo magnéticos na direção do campo magnético aplicado. Para o fluido magnético em estudo, pode-se interpretar a magnetização \mathbf{M} como uma medida global do grau de alinhamento de momentos magnéticos com o campo magnético aplicado. Aproximando a equação (2.100) pela sua representação discreta, considerando uma suspensão com N partículas de mesmo volume v_p e multiplicando e dividindo a somatória por N , tem-se:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \left(\frac{1}{\delta V} \right) \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k v_p^k = v_p \left(\frac{N}{\delta V} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k \right). \quad (2.101)$$

Definindo o número de densidade de partículas $n = N/\delta V$ e a média dos momentos de dipolo magnético $\overline{\mathbf{m}}$:

$$\overline{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k, \quad (2.102)$$

é obtida uma expressão equivalente para a média volumétrica da orientação dos mo-

mentos de dipolo magnético:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = v_p n \overline{\mathbf{m}} = \phi \overline{\mathbf{m}}, \quad (2.103)$$

em que $\phi = nv_p$ é a fração volumétrica de partículas em δV . Finalmente, a partir da equação (2.103) é possível definir a quantidade vetorial local média em δV denominada magnetização \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{v_p} = n \overline{\mathbf{m}}. \quad (2.104)$$

A média de momentos de dipolo $\overline{\mathbf{m}}$ representa uma distribuição estatística associada à orientação média de um conjunto suficientemente grande de partículas para que se possa definir uma magnetização contínua em um ponto material de acordo com a hipótese do contínuo. Tal grau de magnetização é proveniente de uma componente líquida da orientação média na direção do campo, dada na forma de uma soma de cossenos de projeção dos momentos de dipolo locais \mathbf{m} na direção do campo aplicado. Sua determinação a partir da solução da média discreta dada pela equação (2.102) representa uma grande dificuldade no cálculo da magnetização de equilíbrio, devido à origem intrinsecamente microscópica deste fenômeno.

Pode-se inferir da equação (2.104) que no caso onde todos os momentos magnéticos em δV estão alinhados com a direção do campo aplicado \mathbf{H} a média volumétrica corresponde ao valor máximo da magnetização, denominada magnetização de saturação do fluido s , e permanece constante para intensidades superiores do campo magnético aplicado \mathbf{H} . A magnetização \mathbf{M} é, portanto, uma média volumétrica de momentos magnéticos na direção do campo aplicado \mathbf{H} por unidade de volume da partícula. Definida a magnetização \mathbf{M} como propriedade global da suspensão, é conveniente definir possíveis valores que tal propriedade assume como função da intensidade de campo magnético aplicado e do escoamento ao qual o meio é submetido.

A magnetização de equilíbrio \mathbf{M}_0 descreve o estado do meio magnetizável em repouso, onde os momentos de dipolo magnético das partículas suspensas se orientaram parcialmente na direção do campo aplicado. No caso onde os momentos de dipolo magnético da suspensão estão completamente orientados na direção do campo magnético aplicado, a magnetização do meio atinge seu valor máximo, denominado magnetização de saturação \mathbf{M}_s . Dessa forma, a magnetização de equilíbrio é limitada pela magnetização de saturação, ou seja:

$$0 \leq \mathbf{M}_0 \leq \mathbf{M}_s. \quad (2.105)$$

Sendo um fluido magnético uma suspensão de partículas magnéticas, é conveniente definir a magnetização de saturação do meio como uma função, tanto da magnetização do sólido \mathbf{M}_d , quanto da fração volumétrica ϕ de partículas magnéticas suspensas. Dessa forma:

$$\mathbf{M}_s = \phi \mathbf{M}_d, \quad (2.106)$$

e podemos inferir que a magnetização de saturação do meio líquido contínuo corresponde à uma média ponderada em volume da magnetização do sólido magnético em suspensão.

A média dos momentos de dipolo magnético $\langle \mathbf{m} \rangle$ pode ser calculada, teoricamente, a partir da função densidade angular de probabilidade P_θ , tal que para uma coleção de N partículas com momentos de dipolo magnético independentes, a probabilidade dessas N partículas estarem orientadas entre θ e $\theta + d\theta$ é dada por $P_\theta d\theta$, sendo θ o ângulo que um determinado vetor momento magnético \mathbf{m} de uma partícula faz com o campo aplicado \mathbf{H} . Dessa forma, considerando que a média $\overline{\mathbf{m}}$ satisfaz as condições anteriores e a partir da definição discreta de $\overline{\mathbf{m}}$ expressa na equação (2.102), a média de probabilidade padrão na forma integral é dada por [3]:

$$\overline{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{e}}_H \int_0^\theta (m \cos \theta) P_\theta(\theta) d\theta, \quad (2.107)$$

sendo $\hat{\mathbf{e}}_H = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$. Para momentos magnéticos com orientações independentes, uma função de densidade de probabilidade $P(\theta)$ normalizada, com $\int P(\theta) d\theta = 1$ em todo o intervalo θ , é tipicamente uma distribuição com fator exponencial de Boltzmann [82]. Distribuições com fator de Boltzmann são amplamente utilizadas em contextos em que existem grandes flutuações probabilísticas induzidas por agitação térmica (como o movimento Browniano), nos quais tais flutuações competem com um mecanismo determinístico (como a energia ε associada aos torques magnéticos que tendem a alinhar as partículas na direção do campo) [83]. Neste caso, esta função de densidade é dada por:

$$P(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right). \quad (2.108)$$

Neste contexto, ε corresponde à energia necessária para desalinhar o momento de dipolo magnético \mathbf{m} de seu alinhamento paralelo, ou preferencial, com o campo magnético aplicado \mathbf{H} .

Sendo $d\varepsilon = T_m d\theta$ e $T_m = mH \sin \theta$ a intensidade do torque magnético por unidade

de volume de partícula. Considera-se a intensidade dos momentos de dipolo magnético m igual para todas as partículas suspensas, porém, devido às variações de orientação de \mathbf{m} de cada partícula, é necessário que o cálculo da média de probabilidade dado pela equação (2.107) seja realizado para orientações θ arbitrárias. A solução da integral dada em (2.107), para a densidade de probabilidade $P(\theta)$ de momentos de dipolo magnéticos de orientações independentes, resulta em

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = \mathbf{m} \mathcal{L}(\alpha), \quad (2.109)$$

sendo a função Langevin $\mathcal{L}(\alpha)$ o resultado médio, proveniente da condição de que os momentos magnéticos das partículas suspensas não estavam necessariamente orientados na direção do campo aplicado.

O parâmetro adimensional

$$\alpha = \frac{\mu_0 m H}{kT} \quad (2.110)$$

representa a razão entre as forças magnéticas $F_m \sim \mu_0 m H / \ell$ e forças brownianas $F_B \sim kT / l$, sendo l uma escala característica de comprimento da suspensão como, por exemplo, o diâmetro das partículas suspensas. De forma global, a magnetização de equilíbrio de um fluido magnético é bem descrito pela equação de Langevin [84, 85]:

$$\frac{M_0}{M_s} = \left[\coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] = \mathcal{L}(\alpha), \quad (2.111)$$

e substituindo a equação (2.106) em (2.111), tem-se:

$$\frac{M_0}{M_d} = \phi \mathcal{L}(\alpha). \quad (2.112)$$

A partir de uma análise da equação (2.110) é possível inferir que $\alpha \gg 1$ descreve o caso em que o campo externo domina o movimento das partículas, que não apresentam resposta relevante às flutuações térmicas do movimento Browniano e permanecem alinhadas na direção do campo aplicado. Caso $\alpha \ll 1$, a suspensão apresenta uma magnetização muito pequena devido ao domínio das forças brownianas e os momentos magnéticos possuem uma distribuição de orientações aleatórias. Em tal caso, é possível representar a função Langevin por uma série de Mc Laurin ($\alpha \rightarrow 0$) em torno de α na forma

$$\mathcal{L}(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \frac{2\alpha^5}{945} + \dots \quad (2.113)$$

com o limite $\mathcal{L}(\alpha) = \alpha/3$ representando a condição de paramagnetismo do fluido.

Afim de estudar mecanismos hidrodinâmicos e magnéticos de forma acoplada, o estudo numérico do presente trabalho será conduzido para $\alpha = 1$, que descreve um balanço entre perturbações Brownianas e a relaxação magnética das partículas suspensas.

Pode-se observar que a magnetização de equilíbrio, descrita pela equação (2.112), é função da fração volumétrica de partículas magnéticas ϕ e que o modelo de Langevin consiste um modelo de ordem ϕ , desprezando interações magnéticas entre partículas. O modelo de Langevin descreve muito bem o comportamento de suspensões magnéticas diluídas [7] e, conseqüentemente, o problema estudado neste trabalho.

Correções de ordem superiores $\mathcal{O}(\phi^2)$ e $\mathcal{O}(\phi^3)$ foram propostas, com correções do cálculo da magnetização de equilíbrio para interações magnéticas de, pelo menos, três partículas próximas na suspensão [86]. Neste caso, a função Langevin corrigida pode ser estendida para suspensões magnéticas com frações volumétricas de aproximadamente 20%. No caso em que $\alpha \gg 1$, quando as forças magnéticas são muito superiores às forças Brownianas na suspensão (i.e. as interações campo-partícula dominam as interações partícula-partícula), todos os modelos de magnetização convergem para o mesmo valor de magnetização de saturação M_s [8], independente do valor da fração volumétrica.

Em regiões onde $\alpha \sim 1$, a descrição do comportamento de suspensões magnéticas não diluídas demanda correções de ordem superiores a fim de contabilizar os efeitos de interação entre pares de partículas sobre a magnetização de equilíbrio da suspensão devido à discrepância obtida pela análise comparativa entre os modelos [8, 87, 88]. O modelo proposto [86] é expresso por:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_L(\alpha) \left[1 + \frac{4\pi}{3} \frac{d\mathbf{M}_L(\alpha)}{d\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 \mathbf{M}_L(\alpha) \frac{d^2\mathbf{M}_L(\alpha)}{d\alpha^2} + \frac{(4\pi)^2}{144} \left(\frac{d\mathbf{M}_L(\alpha)}{d\alpha} \right)^2 \right], \quad (2.114)$$

em que $\mathbf{M}_L(\alpha)$ representa o modelo de Langevin $\mathcal{O}(\phi)$. A expressão (2.114) foi expandida [7], e pode ser expressa por:

$$\mathbf{M}_0 = [\mathbf{M}_d L(\alpha)] \phi + \left[\frac{4\pi}{3} \mathbf{M}_d g(\alpha) \right] \phi^2 + \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 h(\alpha) + \frac{(4\pi)^2}{144} z(\alpha) \right] \mathbf{M}_d \right\} \phi^3, \quad (2.115)$$

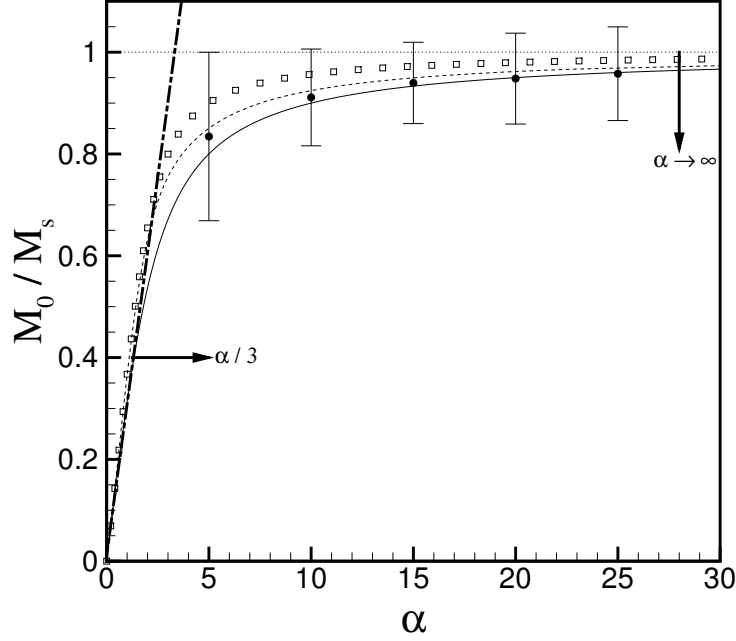


Figura 2.13: A magnetização de equilíbrio em função de α para $\phi = 0.05$: A linha contínua representa o modelo de Langevin $\mathcal{O}(\phi)$, a linha pontilhada e os quadrados representam os modelos $\mathcal{O}(\phi^2)$ e $\mathcal{O}(\phi^3)$ [5], respectivamente. Por último, os pontos pretos representam os resultados numéricos, desconsiderando a periodicidade para interações magnéticas [8]. Em detalhe estão plotados os valores de magnetização de equilíbrio para pequenos valores de α , com a solução assintótica para $\alpha \ll 1$: $M_0/\phi M_d = \alpha/3$ em um regime paramagnético.

em que as funções $L(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$ e $z(\alpha)$ são dadas por:

$$L(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha}; \quad (2.116)$$

$$g(\alpha) = L(\alpha) \left[-\alpha \operatorname{cosech}^2(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \right]; \quad (2.117)$$

$$h(\alpha) = L^2(\alpha) \left[2\alpha^2 \coth(\alpha) \operatorname{cosech}^2(\alpha) - \frac{2}{\alpha} \right]; \quad (2.118)$$

$$z(\alpha) = \frac{g^2(\alpha)}{L(\alpha)}. \quad (2.119)$$

É possível concluir que, apesar de a magnetização de equilíbrio M_0 ser definida para um fluido magnético em repouso, devido ao movimento Browniano tal suspensão sempre possuirá agitação a nível molecular e interações magnéticas de partículas suspensas. Tal fenômeno de interação de longo alcance microestrutural, negligenciado na determinação da magnetização de equilíbrio pelo modelo de Langevin, é o fator que demanda correções no cálculo da magnetização de ordem $\mathcal{O}(\phi)$, em especial para suspensões não diluídas.

Devido à sua constituição microscópica complexa, o comportamento de um fluido magnético está fortemente determinado por suas interações microscópicas. Desta forma, o parâmetro \mathbf{M}_0 irá compor a equação evolutiva para \mathbf{M} , apesar de ser determinado a partir de uma análise microscópica da suspensão no regime de equilíbrio.

2.9 Desenvolvimento de uma equação evolutiva para a magnetização do meio

Estabelecida uma formulação para a magnetização de equilíbrio \mathbf{M}_0 , uma das propriedades mais determinantes da caracterização de um fluido magnético, deve-se obter uma equação evolutiva para que seja determinada a influência hidrodinâmica e de eventuais transientes de origem magnética na determinação da magnetização de um fluido magnético em um escoamento.

Como discutido anteriormente, e mostrado na figura 2.9a, a vorticidade do escoamento de um fluido magnético submetido a um campo magnético provoca o desalinhamento dos momentos de dipolo magnéticos das partículas e, conseqüentemente, o surgimento de torques internos. Sem uma formulação absoluta, equações evolutivas fenomenológicas para a magnetização de um fluido magnético tem sido propostas nas últimas décadas, e algumas dessas formulações serão apresentadas a seguir.

Para baixas magnetizações ou para campos aplicados de baixa intensidade, a evolução da magnetização \mathbf{M} de um meio incompressível com vorticidade $\boldsymbol{\xi}$ [35], é dada por:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}] + \frac{1}{\tau_B}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}). \quad (2.120)$$

A equação (2.120) corresponde a um modelo de Debye com um tempo de relaxação magnética isotrópico τ_B com interações hidrodinâmicas e magnéticas entre partículas negligenciadas e descreve um comportamento puramente magnético em pequenos desvios de equilíbrio (ausência de escoamento).

O sistema convencional de equações referentes a uma análise ferrohídrodinâmica é composto pela equação do movimento de um fluido magnético dada pela equação (C.28), pela equação da continuidade (2.69), pelas equações de Maxwell no limite

magnetostático (2.5) e (2.6) e pela equação de magnetização [13], dada por:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}) + \frac{1}{\tau}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \frac{\mu_0}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}, \quad (2.121)$$

em que o último termo à direita da equação (2.121) incorpora torques magnéticos à proposição de uma equação fenomenológica evolutiva descrita em (2.120) e apresenta um termo de relaxação magnética de segunda ordem [35]. A dependência da magnetização de um fluido magnético em relação à parte simétrica \mathbf{D} do tensor gradiente de velocidade $\nabla\mathbf{u}$, foi demonstrada [74], visualizada experimentalmente [84], e é dada por:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}) + \frac{1}{\tau}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \lambda_2\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.122)$$

em que o último termo à direita da equação (2.122) representa um acoplamento da magnetização do meio com alongamento do escoamento, e tal nível de dependência é dado pelo fator λ_2 . A equação (2.122) foi proposta considerando que o campo magnético aplicado \mathbf{H} é de baixa intensidade e pode ser omitido, entretanto a consideração de um fator λ_2 não unitário ainda demanda maiores estudos. Incorporando os efeitos provenientes do campo aplicado, tem-se

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \lambda_2\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.123)$$

que possui termos capazes de contabilizar a influência do campo aplicado no escoamento de um fluido magnético a ser investigado numericamente neste trabalho.

As proposições de equações evolutivas fenomenológicas para a magnetização descritas pelas equações (2.120) a (2.123) foram elaboradas baseadas em um tempo equivalente de relaxação magnética Browniana τ_B . Caso este escoamento possua um tempo característico de relaxação magnética de Néel τ_N (i.e. partículas cujo momento de dipolo magnético possui um grau de liberdade extra e rotaciona livremente dentro da partícula), a determinação de \mathbf{M} só poderá ser feita, de forma consistente, incorporando termos relativos à velocidade de rotação $\boldsymbol{\omega}$ do momento de dipolo \mathbf{m} interno à partícula. A variação material da velocidade angular das partículas que compõem um fluido magnético, a partir de uma análise do balanço do momento angular de um volume contínuo [7], na forma:

$$\rho J \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}, \quad (2.124)$$

em que ρ representa a massa específica do volume infinitesimal contínuo em análise,

J seu momento de inércia polar, μ' representa um coeficiente de difusão de momento angular interno (spin), \mathbf{M} o campo de magnetização e \mathbf{H} o campo magnético aplicado. Note que a equação (2.124) só possui sentido físico para um fluido magnético com tensor de tensões assimétricos (i.e. com torques internos), cujas partículas magnéticas não giram livremente no sentido da vorticidade, como mostrado na figura 2.9b.

Ao fim desta análise acerca da influência do tempo de relaxação magnética característico sobre a formulação de uma equação evolutiva para a magnetização do meio, é possível generalizar a equação evolutiva de \mathbf{M} na forma:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A} \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}, \quad (2.125)$$

em que o parâmetro \mathbf{A} representa uma generalização, podendo ser um termo de torques magnéticos, dados por $\frac{1}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$, ou uma velocidade interna de spin $\boldsymbol{\omega}$ das partículas magnéticas suspensas na solução, dependendo dos mecanismos de relaxação magnética presentes no problema físico a ser estudado. Um fluxograma de tomada de decisão sobre a formulação a ser utilizada a partir da determinação do tempo de relaxação magnética dominante está presente na figura 2.14.

Um dos objetivos deste trabalho consiste na visualização de alterações macroscópicas no escoamento de um fluido magnético, geradas pela presença de torques magnéticos internos à solução. O acoplamento entre a velocidade angular de spin das partículas magnéticas e variações no campo global de magnetização \mathbf{M} não perturba tal escoamento em escalas de relaxação magnéticas predominantemente Brownianas, e portanto a solução da equação (2.124) não será abordada neste trabalho. Desta forma, a equação evolutiva para a magnetização do meio a ser utilizada na presente análise é dada por:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}. \quad (2.126)$$

É importante ressaltar que o parâmetro λ_2 é postulado para atribuir uma correção à dependência da parte simétrica do tensor gradiente de velocidades (\mathbf{D}) sobre a evolução da magnetização global. Tal grau de acoplamento é relacionado à distorção de aglomerados de partículas, inicialmente esféricos, para uma forma de correntes (*chain-structures*) e ao número de partículas aglomeradas [84]. Postula-se também que a componente anti-simétrica do gradiente de velocidades (\mathbf{W}) é um mecanismo que age sobre tais aglomerados de partículas e perturba sua orientação por meio de uma rota-

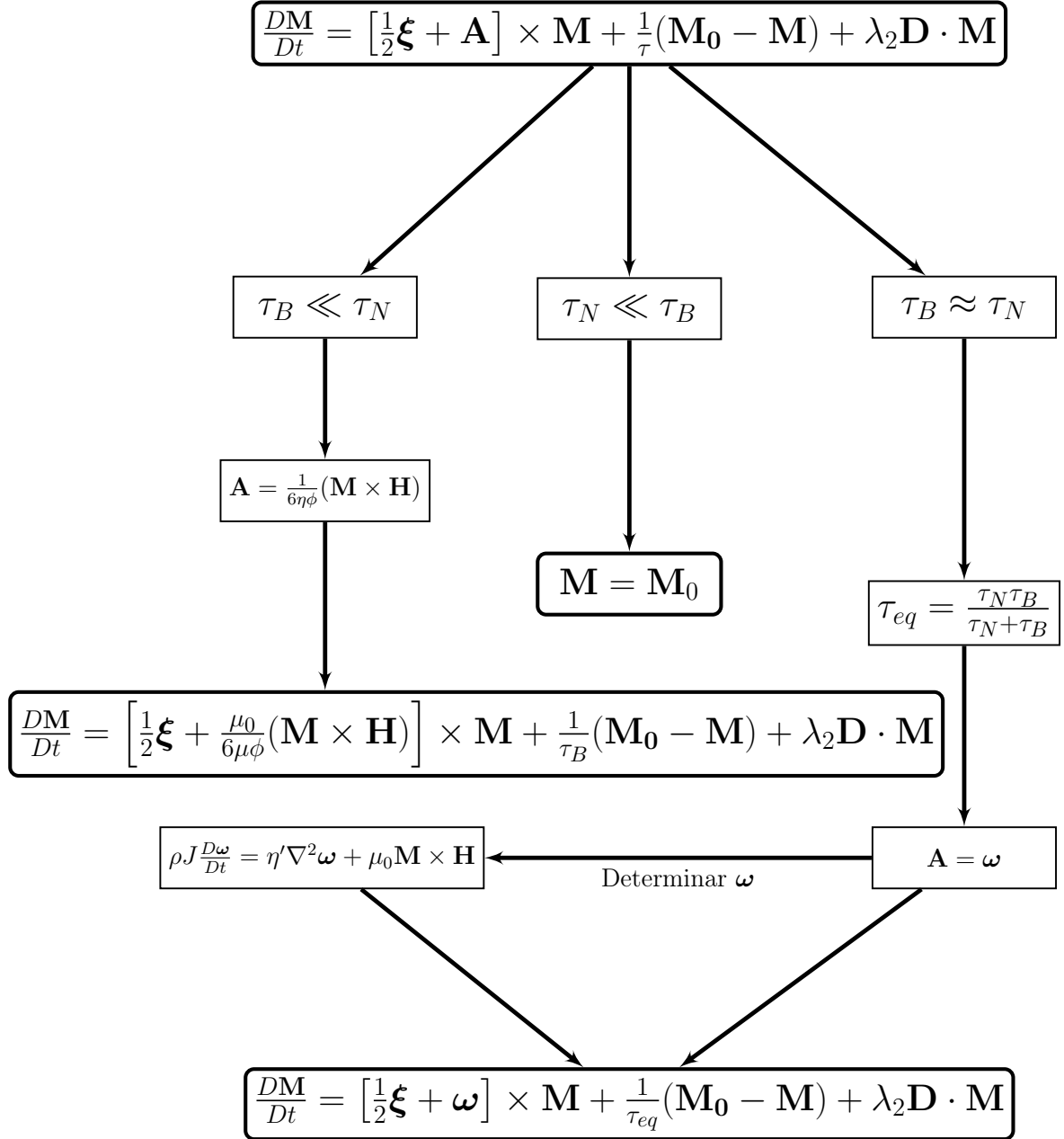


Figura 2.14: Determinação de uma expressão para equação evolutiva fenomenológica do campo de magnetização do escoamento de um fluido magnético, submetido à um campo aplicado, em termos do tempo de relaxação magnética equivalente.

ção induzida [7]. Por outro lado, a determinação de um fator λ_2 experimentalmente, e a atribuição de um coeficiente diferente do valor unitário no termo $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$, conflita com o fator $\frac{1}{2}$ no termo $\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}$, e com um λ_2 unitário, que foram deduzidos formalmente a partir de conceitos da Mecânica dos Meios Contínuos [74].

A solução do problema proposto considera diferentes valores para λ_2 , incluindo o caso em que não há acoplamento entre a magnetização e a parte simétrica do gradiente de velocidades, no qual a evolução da magnetização é dada pela equação (2.121).

Capítulo 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

3.1 Formulação vorticidade-função de corrente: motivação e dedução

A análise numérica do desenvolvimento de escoamentos consiste em, dado um campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ em um dado tempo t , obter a dependência do campo de velocidade dada por $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e então calcular $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ em um passo seguinte de tempo dado por $t + \Delta t$. Considere a equação do movimento, na sua forma adimensional, para um fluido Newtoniano incompressível:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (3.1)$$

Neste caso, dado $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é possível avaliar as contribuições dos termos $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ e $\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}$ à variação temporal do campo de velocidade $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. No caso bidimensional, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.4)$$

Dado o sistema de equações a ser solucionado numericamente, deve ser optada inicialmente o tipo de solução a ser obtida, acoplada ou segregada. A solução acoplada, ou direta, dos sistemas de equações algébricas gera uma matriz de coeficientes e soluciona todas as incógnitas simultaneamente, porém a matriz de coeficientes gerada é muito grande, esparsa e com poucos coeficientes não-nulos mesmo para discretizações moderadamente refinadas [89]. Dessa forma, o custo computacional associado à inversão desta matriz de coeficientes inviabiliza a solução direta do problema, a menos que um robusto método de tratamento de matrizes esparsas seja usado.

A solução segregada dos sistemas de equações através de métodos iterativos, que

descartam as operações referentes aos elementos nulos na matriz de coeficientes, é a alternativa mais viável. Neste caso, o acoplamento pressão-velocidade em escoamentos incompressíveis, ou em escoamentos onde o campo de massa específica não é fortemente dependente do campo de pressão, se destaca e confere alta complexidade na solução do sistema de equações.

Entretanto, o método de solução segregada requer que todas variáveis tenham uma equação evolutiva para ser avançada no decorrer do cálculo. No caso de escoamentos incompressíveis isotérmicos, porém, não há uma equação evolutiva para o campo de pressão e sua influência é descrita somente em termos de seu gradiente nas equações do movimento (3.2) e (3.3). Dessa forma, a dificuldade do problema está associada à determinação do campo de pressão, expresso apenas em termos de seu gradiente nas equações do movimento para o caso bidimensional, de forma que as componentes do campo de velocidades obtidas satisfaçam a conservação da massa [90]. Caso o sistema de equações fosse resolvido de forma acoplada através da inversão da matriz dos coeficientes, o problema do acoplamento pressão-velocidade não existiria.

Outra alternativa é a formulação Vorticidade-Função de corrente, implementada por exemplo em trabalhos recentes como a simulação numérica do escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso [91] e na simulação do escoamento de um fluido biomagnético submetido a um campo magnético externo com o intuito de reduzir a fricção em aneurismas de diversas geometrias [92]. Como demonstrado na seção 2.5, a formulação de um problema a partir da equação da vorticidade, especificamente no caso de um escoamento barotrópico, resulta em uma significativa simplificação do sistema de equações governantes a ser resolvido, devido à ausência do campo de pressão como variável a ser solucionada.

A solução de problemas em variáveis alternativas (não-primitivas) por meio da formulação vorticidade-função de corrente oferece uma alternativa à solução das equações do movimento de um meio contínuo a partir de métodos iterativos, tais como o Método de Compressibilidade artificial [93]; métodos de passo temporal fracionado [94]; SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) [95] e derivados. Apesar de ser um método restrito à problemas bidimensionais, a formulação vorticidade-função de corrente elimina a necessidade de verificar se o campo de velocidades calculado por meio da formulação velocidade-pressão obedece a equação da continuidade, condição satisfeita automaticamente na formulação vorticidade-função de corrente [96]. Por outro lado, a definição de condições de contorno em variáveis não-primitivas é essen-

cialmente mais complexa, quando comparada à formulação da equação do movimento em variáveis primitivas. Quanto às condições de contorno para a equação de Poisson da função de corrente, estas podem ser derivadas diretamente a partir das condições de não-escorregamento e impenetrabilidade, dado que $\mathbf{u} = \nabla \times \psi$. Entretanto, a determinação e tratamento numérico das condições de contorno para a vorticidade são abordadas, discutidas e comparadas em diversos estudos [97, 98].

Um estudo recente [99] foi realizado referente ao escoamento laminar ($10 \leq Re \leq 40$) bidimensional sobre um corpo quadrado e o problema foi solucionado por ambos métodos e comparado, ambos aplicando o Método das Diferenças Finitas de aproximação de derivadas. Observou-se que ambas formulações foram capazes de gerar praticamente a mesma solução e foram consideradas adequadas para a solução de tal problema bidimensional com precisão aceitável. Entretanto, devido à ausência do termo de pressão na formulação vorticidade-função de corrente, tal formulação atinge a solução do problema mais rapidamente, quando comparada ao método pressão-velocidade. A seguir será deduzida brevemente tal formulação.

Da definição do campo de vorticidade de um escoamento, tem-se:

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

e no caso de um escoamento bidimensional $\mathbf{u} = u_1(x_1, x_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + u_2(x_1, x_2)\hat{\mathbf{e}}_2$ se reduz a:

$$\xi_3 = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad (3.6)$$

e adotando a hipótese de incompressibilidade, pela Equação da Continuidade, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.7)$$

e portanto, se \mathbf{u} é um campo solenoidal, ele pode ser escrito como:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (3.8)$$

pois $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$, para qualquer vetor \mathbf{a} . Por fim, para um escoamento bidimensional,

a partir de (3.8), tem-se:

$$u_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \quad (3.9)$$

$$u_2 = -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad (3.10)$$

e substituindo (3.9) e (3.10) em (3.6), tem-se:

$$\xi_3 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \right) \right] \quad (3.11)$$

$$\xi_3 = - \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\implies \boldsymbol{\xi} = -\nabla^2 \boldsymbol{\psi}. \quad (3.13)$$

Dadas as equações governantes (3.8) e (3.13) obtidas na formulação vorticidade-função corrente, juntamente com a equação da vorticidade para um fluido magnético deduzida na seção 2.5, da equação evolutiva da magnetização proposta na seção 2.9 e da definição de condições de contorno apropriadas, tem-se um problema bem posto.

3.2 Sumário do Sistema de equações

O problema em estudo consiste no controle do descolamento de camada limite após uma expansão abrupta unidirecional, por meio da aplicação de um campo magnético. Dada a hipótese considerada de que o campo externo é aplicado somente no domínio após a expansão do canal, o sistema de equações governantes no primeiro domínio de cálculo ilustrado na figura 1.6 se reduz a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \end{array} \right. \quad (3.14a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \end{array} \right\} \quad (3.14b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \end{array} \right\} \quad (3.14c)$$

O sistema de equações governantes a ser adimensionalizado e resolvido numericamente.

mente, obtido a partir da formulação vorticidade-função corrente, é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \psi = -\xi \quad (3.15a) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] \quad (3.15b) \\ \mathbf{u} = \nabla \times \psi \quad (3.15c) \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = \left[\frac{1}{2} \xi + \frac{\mu_0}{6\mu\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \\ \quad + \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \quad (3.15d) \\ \mathbf{M}_0 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_H \quad (3.15e) \\ \mathbf{H} = H_0 \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (3.15f) \end{array} \right.$$

no caso mais geral do escoamento de um fluido magnético barotrópico com magnetização regida por uma equação evolutiva fenomenológica.

3.3 Parâmetros físicos da Ferrohidrodinâmica

Dados os sistemas de equações governantes (3.14) e (3.15), os parâmetros adimensionais associados podem ser obtidos diretamente a partir das equações diferenciais parciais contidas na seção anterior considerando as seguintes escalas típicas:

$$\boxed{\begin{array}{l} u^* = \frac{u}{U_0}; \quad v^* = \frac{v}{U_0}; \quad \xi^* = \frac{D}{U_0} \xi; \\ \psi^* = \frac{1}{U_0 D} \psi; \quad M^* = \frac{M}{H_0}; \quad H^* = \frac{H}{H_0}; \\ t^* = \frac{U_0}{D} t; \quad \nabla^* = D \nabla; \quad \nabla^{2*} = D^2 \nabla^2, \end{array}} \quad (3.16)$$

em que U_0 representa o escoamento permanente e homogêneo $\mathbf{u} = U_0 \hat{\mathbf{e}}_1$ adotado na entrada do sistema pelo domínio A , D representa o diâmetro hidráulico do duto após a expansão, ambos ilustrados na figura 1.6, e H_0 representa a intensidade do campo vertical aplicado $\mathbf{H} = H_0 \hat{\mathbf{e}}_2$. Definindo

$$Re_D = \frac{U_0 D}{\nu} \quad (3.17)$$

e

$$Re_m = \frac{\rho U_0^2}{\mu_0 H_0^2} \quad (3.18)$$

como os parâmetros adimensionais Reynolds e Reynolds magnético, respectivamente, em que o número de Reynolds estabelece uma razão entre forças de inércia e forças viscosas e o número de Reynolds magnético a razão entre forças inerciais e magnéticas que agem sobre o escoamento.

De forma alternativa, é possível interpretar os parâmetros adimensionais Re e Re_m como uma razão entre escalas de tempo características de diferentes mecanismos presentes neste problema. Considere uma escala de tempo associada a fenômenos inerciais, dada por $t_i \sim D/U$, e uma escala difusiva dada por $t_\nu \sim D^2/\nu$, ambas dimensionalmente consistentes:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{D^2 U}{\nu D} \sim \frac{t_\nu}{t_i}. \quad (3.19)$$

Desta forma, é possível associar o número de Reynolds a um balanço de escalas de tempo viscosas e inerciais. De fato, altos números de Reynolds estão associados à predominância de mecanismos inerciais (convectivos) sobre os de origem difusiva (viscosos). Por outro lado, a partir da adimensionalidade de Re_m , apresentado em (3.18), é possível estabelecer uma expressão para escalas de tempo magnéticas, dadas por $t_m \sim (\rho D^2 / \mu_0 H_0^2)^{1/2}$. De forma semelhante, pode-se então representar o número de Reynolds magnético como uma razão entre escalas de tempo magnéticas e inerciais, de forma que:

$$Re_m = \frac{\rho U^2}{\mu_0 H_0^2} = \frac{\rho U^2}{\mu_0 H_0^2} \times \frac{D^2}{D^2} \sim \left(\frac{t_m}{t_i} \right)^2. \quad (3.20)$$

Por outro lado, é conveniente também definir o parâmetro adimensional Péclet:

$$Pe = \tau_B \frac{U_0}{D}, \quad (3.21)$$

de forma que, no contexto da Ferrohidrodinâmica, tal parâmetro represente uma razão de escalas de tempo entre a escala de relaxação Browniana e a escala do escoamento (*flow*). Desta forma, pode-se interpretar o acoplamento do problema, em termo das suas escalas de tempo. O regime $Pe \ll 1$ representa uma escala de relaxação magnética muito inferior à escala do escoamento e consiste em uma relaxação instantâneas das orientações das partículas suspensas na direção do campo aplicado, de forma que $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ (regime superparamagnético). Caso $Pe \gg 1$, o comportamento resultante é dado por uma escala de tempo do escoamento muito inferior à relaxação magnética, re-

sultando em um desacoplamento de mecanismos magnéticos e hidrodinâmicos. Neste caso, a desorientação dos dipolos das partículas suspensas não resulta em nenhum efeito (dada pelo surgimento de um balanço de torques) e o problema adquire propriedades puramente hidrodinâmicas. Por fim, no regime $Pe \sim 1$ ambos mecanismos são fortemente acoplados, permitindo o estabelecimento de um balanço de torques e o controle do escoamento por meio da aplicação de um campo magnético. Desta forma, o estudo numérico no presente trabalho será conduzido para $Pe = 1$.

A interpretação dos parâmetros físicos associados a um problema dinâmico em termos de razões de escalas de tempo é uma valiosa ferramenta interpretativa e auxilia de forma substancial o processo de interpretação física dos resultados obtidos. Esse recurso será utilizado no presente trabalho, sempre que possível, para fornecer uma interpretação física precisa e consistente dos resultados obtidos via simulação numérica.

No âmbito de estudos numéricos de escoamentos sujeitos a expansões abruptas, diversos comprimentos característicos são adotados e resultam em diferentes definições de Re obtidas, o que resulta em uma falta de uniformização de notação [100]. A altura do degrau h , a altura da seção de entrada S e o diâmetro hidráulico D , representados na figura 1.6, poderiam ser adotados como comprimentos característicos na adimensionalização deste problema. Com o objetivo de uniformizar os resultados do presente trabalho (e facilitar a comparação e validação de resultados) com estudos anteriores sobre escoamentos sujeitos a expansões abruptas em números de Reynolds baixos e moderados [100, 101], o diâmetro hidráulico $D = 2h$ será adotado como escala típica do problema na adimensionalização das equações governantes. Desta forma, a partir da equação (3.17), o número de Reynolds calculado a partir do diâmetro hidráulico do canal Re_D será dado como Re , com o objetivo de não densificar a notação das equações. Inserindo as escalas características deste problema dadas em (3.16) nos sistemas de equações governantes (3.14) e (3.15) e omitindo a notação “*” de dimensionalidade, pode-se rescrever os sistemas de equações governantes na forma adimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \psi = -\xi \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \frac{1}{Re} \nabla^2 \xi \\ \mathbf{u} = \nabla \times \psi \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.22a) \\ (3.22b) \\ (3.22c) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \psi = -\xi \quad (3.23a) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \frac{1}{Re} \nabla^2 \xi + \frac{1}{Re_m} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] \quad (3.23b) \\ \mathbf{u} = \nabla \times \psi \quad (3.23c) \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = \left[\frac{1}{2} \xi + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{Pe} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \\ \quad + \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \quad (3.23d) \\ \mathbf{M}_0 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_H \quad (3.23e) \\ \mathbf{H} = 1 \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (3.23f) \end{array} \right.$$

Adotando a notação (x,y) para o sistema de coordenadas, índices numéricos para determinação de componentes vetoriais e de vetores unitários e expandindo o sistema de equações governantes na forma adimensional em termos de suas componentes:

$$\left. \begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} \right) = -\xi_3 \tag{3.24a} \\
& \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + u \frac{\partial \xi_3}{\partial x} + v \frac{\partial \xi_3}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[\frac{\partial M_1}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial x} + M_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial M_1}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} - M_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} - \frac{\partial M_2}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial y} - M_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} + H_1 \frac{\partial^2 M_2}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \right. \\
& \quad \left. + H_1 \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + M_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - M_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} - H_2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - M_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} - H_2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial y^2} \right] \tag{3.24b} \\
& u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{3.24c} \\
& v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{3.24d} \\
& H_1 = 0 \tag{3.24e} \\
& H_2 = 1 \tag{3.24f} \\
& \frac{\partial M_1}{\partial t} + u \frac{\partial M_1}{\partial x} + v \frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{1}{2} \xi_3 M_2 + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (H_1 M_2^2 - M_1 H_2 M_2) + \frac{1}{Pe} (M_{0,1} - M_1) + \frac{1}{2} \left[2M_1 \frac{\partial u}{\partial x} + M_2 \frac{\partial v}{\partial x} + M_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right] \tag{3.24g} \\
& \frac{\partial M_2}{\partial t} + u \frac{\partial M_2}{\partial x} + v \frac{\partial M_2}{\partial y} = \frac{1}{2} \xi_3 M_1 + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (H_2 M_1^2 - M_2 H_1 M_1) + \frac{1}{Pe} (M_{0,2} - M_2) + \frac{1}{2} \left[M_1 \frac{\partial u}{\partial y} + M_1 \frac{\partial v}{\partial x} + 2M_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right] \tag{3.24h}
\end{aligned} \right\}$$

3.4 Discretização das Equações Governantes pelo Método das Diferenças Finitas

O sistema de equações governantes dado por (3.24) será discretizado a partir da metodologia de discretização pelo Método das Diferenças Finitas exemplificada no *Apêndice D*. A aproximação das derivadas parciais será feita pela diferença centrada dos pontos de cálculo, pois o cálculo efetuado a partir da diferença centrada possui um erro menor ($\mathcal{O}(\Delta x)^2$ e $\mathcal{O}(\Delta y)^2$) quando comparado à diferenciação adiantada ou atrasada ($\mathcal{O}(\Delta x)$ e $\mathcal{O}(\Delta y)$) [102].

Considere a primeira equação do sistema (3.24), no caso bidimensional dada por:

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi. \quad (3.26)$$

Aproximando as derivadas de primeira e segunda ordem com diferença centrada por meio da expansão por séries de Taylor da função ψ nos pontos genéricos do domínio de cálculo, descritos na figura 2, tem-se:

$$\psi_{i+1,j} = \psi_{i,j} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2 + \dots \quad (3.27)$$

$$\psi_{i-1,j} = \psi_{i,j} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2 + \dots \quad (3.28)$$

$$\psi_{i,j+1} = \psi_{i,j} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j} \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y)^2 + \dots \quad (3.29)$$

$$\psi_{i,j-1} = \psi_{i,j} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j} \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y)^2 + \dots \quad (3.30)$$

Desprezando termos $\mathcal{O}(\Delta x)^2$ e $\mathcal{O}(\Delta y)^2$ e efetuando a subtração de (3.27) por (3.28) e (3.29) por (3.30), respectivamente, tem-se:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (3.32)$$

Aproximando as derivadas de segunda ordem, também pela expansão em séries de Taylor, tem-se:

$$\psi_{i+1,j} = \psi_{i,j} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 + \dots \quad (3.33)$$

$$\psi_{i-1,j} = \psi_{i,j} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 + \dots \quad (3.34)$$

Efetuando a soma das equações (3.33) e (3.34), tem-se:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.35)$$

e analogamente:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}. \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) e (3.36) em (3.26), tem-se a expressão discretizada da equação governante (3.26):

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\xi. \quad (3.37)$$

Utilizando a mesma metodologia explicitada na discretização da equação (3.26), as demais equações que compõem o sistema (3.24) são discretizadas.

3.4.1 Esquema Upwind

O esquema *Upwind* de primeira ordem implementado, consiste em uma técnica de discretização adaptativa. A partir do sinal das componentes do campo de velocidades (i.e.: direção de propagação de uma propriedade em um escoamento), diferentes *stencils* são gerados e diferentes pontos serão considerados na discretização de u e v . Esta técnica confere estabilidade à solução dos termos convectivos nas equações de transporte [103] cuja discretização adaptativa aplicada ao termo $\mathbf{u} \cdot \nabla \xi$ é dada por:

$$u \frac{\partial \xi}{\partial x} = \begin{cases} u \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x}, & \text{se } u < 0 \\ u \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{\Delta x}, & \text{se } u > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \begin{cases} v \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\Delta y}, & \text{se } v < 0 \\ v \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\Delta y}, & \text{se } v > 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Definindo os parâmetros

$$u^+ = \max(u, 0) \quad (3.40)$$

$$u^- = \min(u, 0) \quad (3.41)$$

$$v^+ = \max(v, 0) \quad (3.42)$$

$$v^- = \min(v, 0), \quad (3.43)$$

e dado o fato de que para uma mesma componente de u e v , entre suas funções \max e \min uma sempre será nula, as equações (3.38) e (3.39) podem ser escritas de forma compacta [104] na forma:

$$u \frac{\partial \xi}{\partial x} = u^+ \xi_x^- + u^- \xi_x^+ \quad (3.44)$$

$$v \frac{\partial \xi}{\partial y} = v^+ \xi_y^- + v^- \xi_y^+, \quad (3.45)$$

em que os termos discretizados adiantados e atrasados de $\partial \xi / \partial x$ e $\partial \xi / \partial y$ são dados por:

$$\xi_x^+ = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x} \quad (3.46)$$

$$\xi_x^- = \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{\Delta x} \quad (3.47)$$

$$\xi_y^+ = \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\Delta y} \quad (3.48)$$

$$\xi_y^- = \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\Delta y}. \quad (3.49)$$

O mesmo procedimento é aplicado ao termo convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M}$ presente nas equações (3.24g) e (3.24h). Afim de evitar complicar a notação das equações discretizadas com a notação da técnica Upwind descrita, o sistema de equações governantes discretizadas será apresentado sem as discretizações adaptativas (3.44) e (3.45). Desta forma,

o sistema de equações governantes discretizadas é dado pelo sistema (3.53).

3.4.2 Esquema de discretização FTCS

A aplicação de diferenciações adiantadas no tempo e centradas no espaço na discretização de equações diferenciais parciais é denominada “FTCS” (*Forward in Time, Centered in Space*). O método resultante, como mostrado pelas expansões das séries de Taylor no início desta seção, apresenta erros de truncamento de primeira ordem no tempo, e de segunda ordem no espaço. Entretanto, a combinação deste método com o esquema *Upwind*, e a consequente discretização não-centrada no termo convectivo das equações governantes, resulta em um método de primeira ordem, tanto no espaço quanto no tempo [105]. A condição de estabilidade do método, referente à parte elíptica da equação governante da vorticidade ($\nabla^2 \xi$), é dada por [106]:

$$\frac{\Delta t}{Re(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.50)$$

Desta forma, a partir do número de Reynolds proposto e do refinamento de malha desejado, o passo de tempo Δt está determinado. No caso de domínios numéricos bidimensionais não regulares, com $\Delta x \neq \Delta y$, tem-se:

$$\frac{\Delta t}{Re \times \min(\Delta x, \Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.51)$$

em que $\min(\Delta x, \Delta y)$ representa o menor passo de discretização espacial entre as adotadas nas direções x e y . Por fim, o passo temporal adotado é calculado a partir dos dados de entrada do problema, de forma que:

$$\Delta t = \frac{1}{4} Re \times \min(\Delta x, \Delta y)^2, \quad (3.52)$$

em que o fator $\frac{1}{4}$ na equação (3.52), quando comparado ao coeficiente $\frac{1}{2}$ na equação (3.51), representa uma forma conservadora de obedecer a condição de estabilidade do método apresentada.

(3.53a)

$$\left\{ \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}}{(\Delta x)^2} \right\} = -\xi_{i,j}$$

$$\left\{ \frac{\xi_{i,j}^{p+1} - \xi_{i,j}^p}{\Delta t} + u_{i,j} \left(\frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j} \left(\frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\xi_{i+1,j} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i-1,j} + \xi_{i,j+1} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\text{Rem}} \left[\left(\frac{(M_1)_{i,j+1} - (M_1)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left(\frac{(H_1)_{i+1,j} - (H_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + (M_1)_{i,j} \left(\frac{(H_1)_{i+1,j+1} - (H_1)_{i-1,j+1} - (H_1)_{i+1,j-1} + (H_1)_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) + \right.$$

$$+ \left. \left. \left(\frac{(M_2)_{i,j+1} - (M_2)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left(\frac{(H_1)_{i,j+1} - (H_1)_{i,j-1}}{2\Delta x} \right) + (M_2)_{i,j} \left(\frac{(H_1)_{i,j+1} - 2(H_1)_{i,j} + (H_1)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - \left(\frac{(M_1)_{i+1,j} - (M_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{(H_2)_{i+1,j} - (H_2)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \right. \right.$$

$$- (M_1)_{i,j} \left(\frac{(H_2)_{i+1,j} - 2(H_2)_{i,j} + (H_2)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - \left(\frac{(M_2)_{i+1,j} - (M_2)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{(H_2)_{i,j+1} - (H_2)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) -$$

$$- (M_2)_{i,j} \left(\frac{(H_2)_{i+1,j+1} - (H_2)_{i+1,j-1} - (H_2)_{i-1,j+1} + H_{i-1,j-1}^2}{4\Delta x \Delta y} \right) + (H_1)_{i,j} \left(\frac{(M_2)_{i+1,j} - 2(M_2)_{i,j} + (M_2)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) +$$

$$+ (M_2)_{i,j} \left(\frac{(H_1)_{i+1,j} - 2(H_1)_{i,j} + (H_1)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + (H_1)_{i,j} \left(\frac{(M_2)_{i,j+1} - 2(M_2)_{i,j} + (M_2)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) +$$

$$+ (M_2)_{i,j} \left(\frac{(H_1)_{i,j+1} - 2(H_1)_{i,j} + (H_1)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - (M_1)_{i,j} \left(\frac{(H_2)_{i+1,j} + (H_2)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - (H_2)_{i,j} \left(\frac{(M_1)_{i+1,j} - 2(M_1)_{i,j} + (M_1)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) -$$

$$- (M_1)_{i,j} \left(\frac{(H_2)_{i,j+1} - 2(H_2)_{i,j} + (H_2)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - (H_2)_{i,j} \left(\frac{(M_1)_{i,j+1} - 2(M_1)_{i,j} + (M_1)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \left. \right\}$$

 $H_1 = 0$ $H_2 = 1$

(3.53b)

$$\left\{ \frac{(M_1)_{i,j}^{p+1} - (M_1)_{i,j}^p}{\Delta t} + u_{i,j} \left(\frac{(M_1)_{i+1,j} - (M_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j} \left(\frac{(M_1)_{i,j+1} - (M_1)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ -\frac{1}{2} \xi_{i,j} (M_2)_{i,j} + \right.$$

(3.53c)

(3.53d)

(3.53e)

$$+ \frac{1}{6\phi} \frac{\text{Re}}{\text{Rem}} \left((H_1)_{i,j} (M_2)_{i,j}^2 - (M_1)_{i,j} (H_2)_{i,j} (M_2)_{i,j} \right) + \frac{1}{P_e} \left((M_1)_{i,j}^0 - (M_1)_{i,j} \right) +$$

$$+ \left[(M_1)_{i,j} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) - \frac{(M_2)_{i,j}}{2} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right]$$

(3.53f)

$$\left\{ \frac{(M_2)_{i,j}^{p+1} - (M_2)_{i,j}^p}{\Delta t} + u_{i,j} \left(\frac{(M_2)_{i+1,j} - (M_2)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j} \left(\frac{(M_2)_{i,j+1} - (M_2)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \xi_{i,j} (M_1)_{i,j} + \right.$$

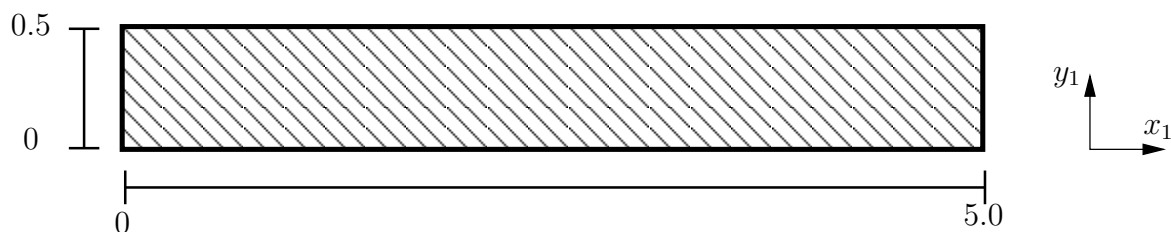
$$+ \frac{1}{6\phi} \frac{\text{Re}}{\text{Rem}} \left((H_2)_{i,j} (M_1)_{i,j}^2 - (M_2)_{i,j} (H_1)_{i,j} (M_1)_{i,j} \right) + \frac{1}{P_e} \left((M_2)_{i,j}^0 - (M_2)_{i,j} \right) +$$

$$+ \left[(M_1)_{i,j} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} - \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - (M_2)_{i,j} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) \right]$$

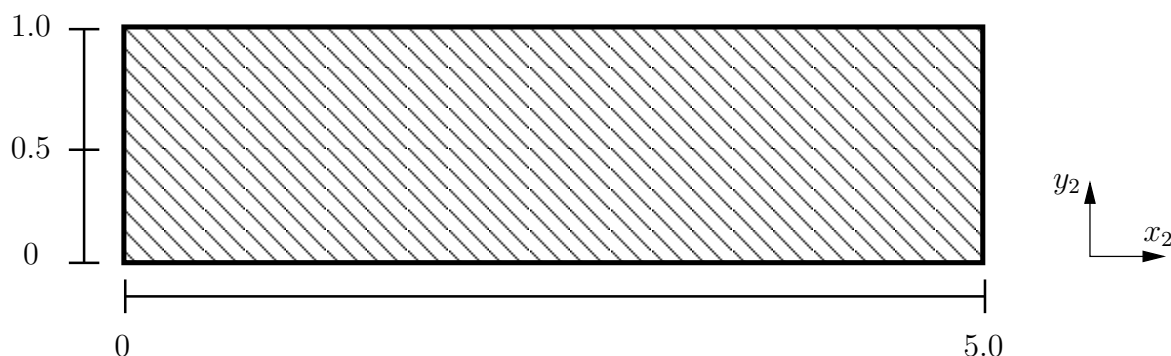
(3.53f)

3.5 Condições de contorno

A partir do sistema de equações governantes adimensionais discretizadas referente ao domínio de cálculo após a expansão, dado pelo sistema (3.53), serão definidas malhas de cálculo para a solução numérica aproximada do sistema. O cálculo das variáveis a serem determinadas nos pontos discretizados do contínuo será expresso na forma de um sistema linear da forma $Ax = b$ a partir da determinação das condições de contorno no domínio de cálculo ilustrado na figura 1.6. A figura 3.1 é uma representação da malha de cálculo computacional usada na discretização do domínios de calculo A e B , e será usada para auxiliar a especificação das condições de contorno das interfaces dos domínios.



(a) Domínio de cálculo referente à seção de entrada do domínio, antes da expansão abrupta - Domínio A .



(b) Domínio de cálculo onde serão implementados os mecanismos magnéticos que se deseja estudar - Domínio B .

Figura 3.1: Representação individual dos domínios de cálculo adimensionalizados a partir da figura 1.6, sobre os quais serão especificadas as condições de contorno.

O domínio de cálculo B representa a discretização espacial do domínio contínuo de escoamento após a expansão unidirecional. Estabelecendo uma análise a partir da parede inferior, a partir da condição de não-escorregamento do escoamento, tem-se que $u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0} = 0$ e pode-se considerar que $\psi|_{i,j} = 0$ representa o valor constante que descreve a linha de corrente adjacente à parede inferior e à face do degrau. A geração de vorticidade na parede é consequência direta da imposição da condição de não-escorregamento do escoamento, que por meio da difusão e da advecção a partir

da parede é transportada ao resto do domínio. Este transporte pode ser analisado expandindo a função $\psi_{i,j}$ em um nó adjacente à parede inferior $\psi_{i,j+1}$ na forma:

$$\psi_{i,j+1} = \psi_{i,j_0} + \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,j_0} \Delta y + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,j_0} (\Delta y)^2 + \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right|_{i,j_0} (\Delta y)^3 + \dots \quad (3.54)$$

em que, pela condição de não-escorregamento

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,j_0} = u_{i,j_0} = 0 \quad (3.55)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,j_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j_0}. \quad (3.56)$$

Sendo a vorticidade dada por

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.57)$$

e sabendo que ao longo da parede $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, pois v é constante e igual a zero, tem-se:

$$\xi_{i,j_0} = - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j_0}. \quad (3.58)$$

Substituindo 3.55, 3.56 e 3.58 em 3.54, tem-se:

$$\xi_{i,j_0} = \frac{2}{(\Delta y)^2} (\psi_{i,j_0} - \psi_{i,j_0+1}) \quad (3.59)$$

A equação 3.59 é conhecida como condição de contorno de Thom, abordada na formulação de escoamentos viscosos em regime transiente usando a formulação vorticidade-função corrente [107], e foi obtida a partir da condição de não-escorregamento imposta na parede inferior. Observe que neste problema $\psi_{i,j_0} = 0$, porém este termo será mantido na expressão visando futuras simulações com paredes não estacionárias.

De forma resumida, as condições de contorno das equações governantes dos sistemas (3.22) e (3.23), referentes aos domínios A e B ilustrados na figura 3.1, são dadas por:

$$\begin{array}{lll}
u_1(x_1, 0) = 0 & v_1(x_1, 0) = 0 & \psi_1(x_1, 0) = 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(5.0, y_1) = 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(5.0, y_1) = 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(5.0, y_1) = 0 \\
u_1(x_1, 0.5) = 0 & v_1(x_1, 0.5) = 0 & \psi_1(x_1, 0.5) = 0.5 \\
u_1(0, y_1) = 1.0 & v_1(0, y_1) = 0 & \psi_1(0, y_1) = \int_0^{0.5} dy_1
\end{array} \tag{3.60}$$

$$\begin{array}{ll}
u_2(x_2, 0) = 0 & v_2(x_2, 0) = 0 \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 \\
u_2(x_2, 1.0) = 0 & v_2(x_2, 1.0) = 0 \\
u_2(0, 0 : 0.5) = 0 & v_2(0, 0 : 0.5) = 0 \\
u_2(0, 0.5 : 1.0) = u_1(5.0, y_1) & v_2(0, 0.5 : 1.0) = v_1(5.0, y_1)
\end{array} \tag{3.61}$$

$$\begin{array}{l}
\psi_2(x_2, 0) = 0 \\
\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 \\
\psi_2(x_2, 1.0) = \psi_1(5.0, h) \\
\psi_2(0, 0 : 0.5) = \psi_1(5.0, 0) \\
\psi_2(0, 0.5 : 1.0) = \psi_1(5.0, 0 : 0.5)
\end{array} \tag{3.62}$$

$$\begin{array}{ll}
M_x(x_2, 0) = M_x 0 & M_y(x_2, 0) = M_y 0 \\
\frac{\partial M_x}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 & \frac{\partial M_y}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 \\
M_x(x_2, 1.0) = M_x 0 & M_y(x_2, 1.0) = M_y 0 \\
M_x(0, 0 : 0.5) = M_x 0 & M_y(0, 0 : 0.5) = M_y 0 \\
M_x(0, 0.5 : 1.0) = M_x 0 & M_y(0, 0.5 : 1.0) = M_y 0
\end{array} \tag{3.63}$$

Como discutido em estudos anteriores, a solução deste problema demanda somente a inicialização do campo de vorticidade, cujas componentes serão calculadas a partir das condições de contorno da função corrente e impostas nas fronteiras Γ dos domínios numéricos A e B , de forma que obedecem a equação governante no contorno $\nabla^2 \psi|_{\Gamma} = -\xi|_{\Gamma}$ [97].

As condições de contorno adotadas para a magnetização descritas em (3.63), da-

das pela magnetização de equilíbrio, foram adotadas baseadas na hipótese de não-eskorregamento e impenetrabilidade do escoamento sobre as superfícies sólidas do canal. Considera-se que os volumes contínuos adjacentes às paredes estão em repouso, o escoamento não será capaz de perturbar sua magnetização, que por fim será dada pela magnetização de equilíbrio do meio nestas condições.

3.6 Proposta de algoritmo sequencial para solução do problema

A metodologia de solução adotada tem como etapa inicial a definição dos parâmetros físicos que regem o escoamento em estudo e a imposição, tanto das condições de contorno do problema, quanto de uma condição inicial para os campos contidos nas equações governantes.

A segunda etapa da solução consiste na solução dos campos ψ , ξ e M de forma iterativa para sucessivos passos de discretização espacial determinados previamente, em uma abordagem pseudo-transiente. Técnicas de solução pseudo-transiente são abordagens iterativas de solução de equações diferenciais parciais transientes, que resultam na solução do problema em regime permanente (i.e.: completamente desenvolvidos) a partir de um valor inicial [108]. A solução da equação de Poisson da função corrente (3.24a) será obtida a partir do método de sobre-relaxação sucessiva SOR (*Successive Over-Relaxation method*), cujo parâmetro de relaxação ótimo foi determinado a partir de uma expressão desenvolvida para sua determinação em um espaço de qualquer dimensão [109].

Ao fim deste processo, todos os campos necessários para a descrição do escoamento já foram solucionados (i.e. os valores de ξ , ψ , M após um passo de tempo numérico foram determinados) e o sistema de equações (3.22) a (3.23) deve ser resolvido de forma iterativa para sucessivos passos de tempo artificiais, para que a solução do escoamento evolua e atinja um regime permanente, dada a abordagem pseudo-transiente adotada. Em seguida está descrito o algoritmo proposto a ser utilizado na simulação de escoamentos bidimensionais de fluidos magnéticos isotérmicos, barotrópicos e assimétricos, que será implementado no domínio B , ilustrado na figura 3.1, por meio da solução do sistema de equações (3.15). A solução do sistema de equações (3.14) sem efeitos magnéticos, referente ao domínio A será dada pelo item 2-(a) do algoritmo a seguir.

Algoritmo Proposto

1. Input de dados

- (a) Parâmetros físicos: Re, Re_m, Pe, λ_2
- (b) Condições de contorno para \mathbf{M}, ψ ;
- (c) Condições iniciais para $\boldsymbol{\xi}$ e \mathbf{H} (campo constante e uniforme)
- (d) Cálculo da condição inicial $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0(\alpha, \phi, \lambda)$

2. Inicializando o cálculo

- (a) Solução da equação de Laplace da função corrente (sem vorticidade) e da Equação da vorticidade na ausência de efeitos magnéticos
 - i. Solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{u} = \nabla \times \psi \end{cases} \quad (3.64)$$

- ii. Está determinado $\boldsymbol{\xi}$ sem os efeitos de magnetização;
 - iii. Determinar ψ , com vorticidade associada, por meio de $\nabla^2 \psi = -\boldsymbol{\xi}$.
- (b) Solução da magnetização \mathbf{M}
 - i. Inicialmente $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$;
 - ii. Solucionar a equação da vorticidade com efeitos magnéticos.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{Re_m} \left\{ \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right\} \quad (3.65)$$

- (c) Início do processo iterativo de solução na discretização espacial
 - i. A partir de $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}$ e \mathbf{H} , solucionar a equação evolutiva da magnetização e determinar \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = & \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \\ & + \frac{1}{Pe} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \end{aligned} \quad (3.66)$$

- ii. Calcular novo $\boldsymbol{\xi}$ a partir da equação (3.65) a partir do último campo de magnetização calculado;

iii. Retornar ao passo (c)-i até convergência.

(d) Fim

3. **Para $t=0 \rightarrow$ início do processo iterativo de solução na discretização temporal**

4. **$t = \{\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t\}$**

5. **Fim**

Capítulo 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Solução do problema puramente hidrodinâmico

Dada a proposta deste projeto, cuja solução do problema proposto é pioneira, a implementação do código computacional desenvolvido na ausência de efeitos magnéticos irá conferir confiabilidade ao algoritmo de solução proposto. Desta forma, o algoritmo computacional desenvolvido é aplicado ao escoamento laminar bidimensional sujeito a uma expansão abrupta, e os resultados obtidos comparados com os resultados numéricos e experimentais presentes na literatura, apresentados na tabela 4.1. Deve-se destacar, entretanto, que o estudo de um escoamento sujeito a uma expansão abrupta é um problema clássico da Mecânica dos Fluidos, porém é abordado majoritariamente em escoamentos com altos números de Reynolds. Desta forma, a quantidade de resultados para os regimes de escoamentos estudados ($Re = 50$ e $Re = 100$) é reduzida, em especial para $Re = 50$.

	$Re = 50$	$Re = 100$
Armaly et al. exp [101]	-	$Xr = 2.44$
Kim and Moin 2D sim [94]	-	$Xr = 2.63$
Kaiktsis et al. 3D sim [110]	$Xr = 1.50$	$Xr = 2.53$

Tabela 4.1: Resultados existentes na literatura para a determinação do ponto de recolamento da camada limite para diversos Re .

Como discutido anteriormente, o presente estudo tem como objetivo identificar o acoplamento entre mecanismos hidrodinâmicos e magnéticos, sendo focado em estabelecer discussões e interpretações físicas dos fenômenos computados e na consolidações de aspectos teóricos referentes à ferrohodinâmica. Desta forma, a implementação numérica do algoritmo proposto foi dada de forma relativamente simples a partir do esquema explícito *FTCS* de discretização das equações governantes. Apesar de ser de fácil implementação, tal método possui condições restritivas de estabilidade. Desta forma, valores apropriados para parâmetros numéricos como comprimento do domínio de cálculo, refinamento de malha e tolerância numérica serão estudados visando a validação do caso hidrodinâmico do problema proposto e serão mantidos após a implementação dos mecanismos magnéticos. A solução do problema no regime puramente

hidrodinâmico é obtida a partir da solução numérica do sistema de equações (3.64) com condições de contorno apropriadas, e parâmetros numéricos apropriados serão estabelecidos a seguir.

4.1.1 Determinação do comprimento adequado do domínio de cálculo

A partir das condições de contorno propostas em (3.60), tem-se que a condição imposta de que o escoamento esteja completamente desenvolvido na saída do domínio de cálculo é dada por:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x_2}(5.0, y_2) = 0, \quad (4.5)$$

em que $(5.0, y_2)$ representa a fronteira direita do domínio computacional no sistema (x_2, y_2) representado na figura 3.1b.

Simulações foram conduzidas para comprimentos variando de 3 a 15 unidades de comprimento adimensionais para $Re = 50$ e os pontos de recolamento de camada limite computados estão apresentados na figura 4.1.

É possível observar um crescimento contínuo e atenuado no ponto de recolamento computado, contudo não foi possível observar um comportamento de saturação, mesmo para valores superiores aos resultados presentes na literatura. Este comportamento é atribuído ao esquema *FTCS* implementado e sua estabilidade condicional discutida na seção 3.4.2. Por outro lado, observou-se que o algoritmo proposto foi capaz de reproduzir, com uma tolerância aceitável, os resultados de estudos anteriores. Por fim, deve-se destacar que os estudos experimentais e numéricos conduzidos anteriormente adotaram comprimentos muito superiores, variando de aproximadamente 30 [110] a 47 [101] unidades de comprimento, ambos adimensionalizados pelo diâmetro manométrico do canal D .

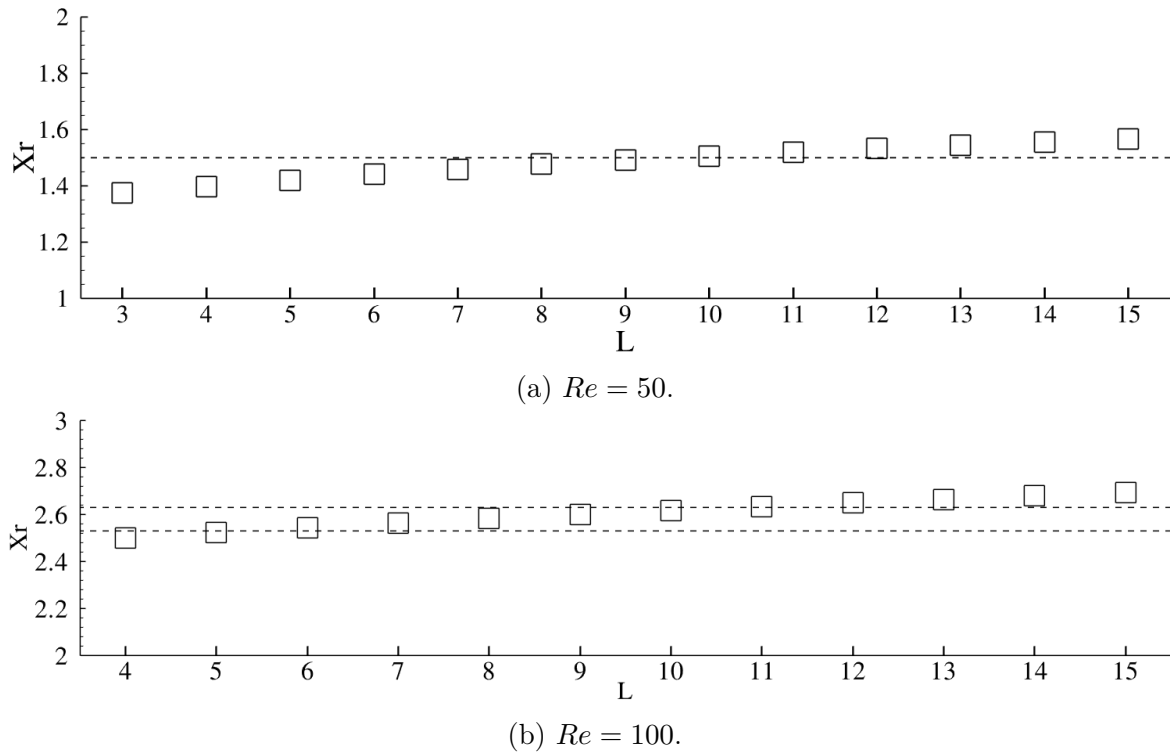


Figura 4.1: Evolução do ponto de recolamento Xr computado para diferentes comprimentos L de domínio de cálculo, obtidos para $Re = 50$ e $Re = 100$. Linhas horizontais tracejadas representam os pontos de recolamento obtidos em estudos anteriores mostrados na tabela 4.1. Simulações foram realizadas para malhas 100×100 e 150×150 , para $Re = 50$ e $Re = 100$, respectivamente, e um resíduo numérico $r = 10^{-5}$.

A extensão do comprimento do domínio computacional confere ao algoritmo versabilidade para a realização de simulações em uma faixa mais extensa de números de Reynolds, demanda a implementação de domínios computacionais não uniformemente espaçados, caso contrário o número de nós seria muito alto, assim como o custo computacional, em uma malha cartesiana uniforme. Estudos anteriores foram realizados para $100 \leq Re \leq 300$ [111] e $100 \leq Re \leq 800$ [112] em domínios numéricos não cartesianos, com uma maior concentração de nós próximos às paredes sólidas dos domínios, devido aos altos gradientes de velocidades esperados. Desta forma, visando a redução do custo computacional para a realização deste estudo numérico, será adotado um comprimento do domínio numérico inferior aos valores para os quais o algoritmo desenvolvido reproduz resultados de estudos anteriores.

4.1.2 Refinamento de malha

Nesta seção, deseja-se determinar os refinamentos de malha apropriados para a realização das simulações para $Re = 50$ e $Re = 100$, e verificar a capacidade do algoritmo

proposto de reproduzir resultados de estudos anteriores. Desta forma, simulações foram realizadas para diferentes refinamentos de malha visando a solução deste problema no caso hidrodinâmico, afim de determinar um refinamento de malha que permita a solução e validação deste algoritmo, por meio da implementação de um domínio de cálculo cartesiano uniformemente espaçado. Avaliou-se a influência do número de nós de uma malha computacional regular $n \times n$, e a evolução do ponto de recolamento de camada limite Xr apresentado na figura 4.2.

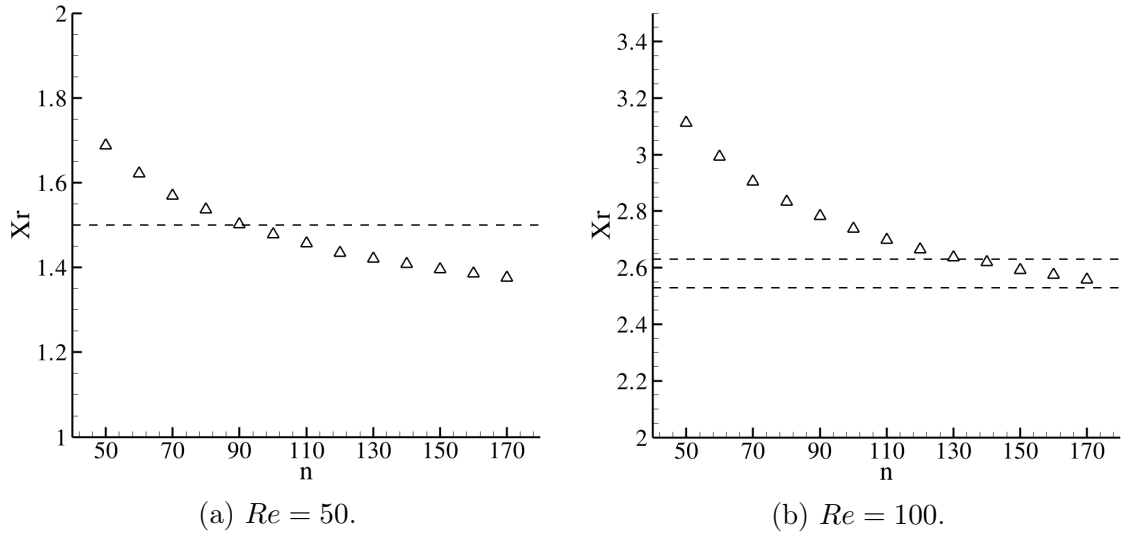


Figura 4.2: Evolução do ponto de recolamento Xr computado para diferentes números de nós computacionais (n^2), para $Re = 50$ e $Re = 100$, com um resíduo de iteração $r = 10^{-5}$ e um comprimento de domínio computacional $L = 5.0$. Linhas horizontais tracejadas representam os pontos de recolamento obtidos em estudos anteriores mostrados na tabela 4.1.

Observa-se que o algoritmo desenvolvido foi capaz de produzir resultados em concordância com estudos anteriores de $Re = 50$ para $n = 100$ e $n = 110$. Por outro lado, para $Re = 100$ observa-se uma tendência de aproximação de valores esperados, mas o intervalo de n estudado não foi suficiente para observar uma saturação ou valores esperados.

Após este estudo numérico foi possível observar que o ponto de recolamento computado se aproxima dos valores esperados, quanto maior for o refinamento de malha. Esta tendência pode ser atribuída à necessidade de maior refinamento em regiões próximas às paredes, onde os gradientes de velocidade são mais intenso e portanto menores espaçamentos entre nós são necessários, com o aumento do número de Reynolds. Com o objetivo de controlar o esforço computacional deste estudo, serão adotadas malhas 100×100 e 150×150 nas simulações realizadas para $Re = 50$ e $Re = 100$, respectivamente. O ponto de recolamento obtido na simulação realizada para $Re = 100$ em uma

malha 150×150 diverge em 4% do resultado esperado.

4.1.3 Tolerância numérica

Afim de avaliar a progressão dos passos de tempo das simulações realizadas, e verificar que a solução obtida tenha convergido totalmente para a solução em regime permanente nesta abordagem pseudo-transiente de solução numérica, a menos de uma tolerância estabelecida, determinou-se a tolerância apropriada.

Diferentes tolerâncias foram adotadas, variando de 10^{-1} a 10^{-9} , e os pontos de recolamento obtidos estão apresentados na figura 4.3. Observa-se que o ponto de recolamento atinge um valor de saturação em $r = 10^{-7}$, e portanto esta será a tolerância adotada para o resíduo numérico.

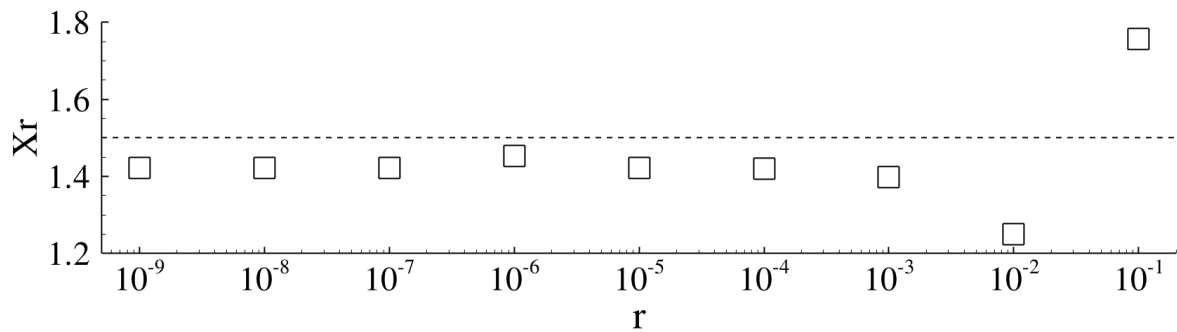


Figura 4.3: Evolução do ponto de recolamento Xr em função da tolerância adotada para o resíduo numérico r entre as iterações. Os resultados apresentados foram obtidos para $Re = 50$, uma malha cartesiana 100×100 e um comprimento de domínio numérico $L = 5.0$. Linhas horizontais tracejadas representam os pontos de recolamento obtidos em estudos anteriores mostrados na tabela 4.1.

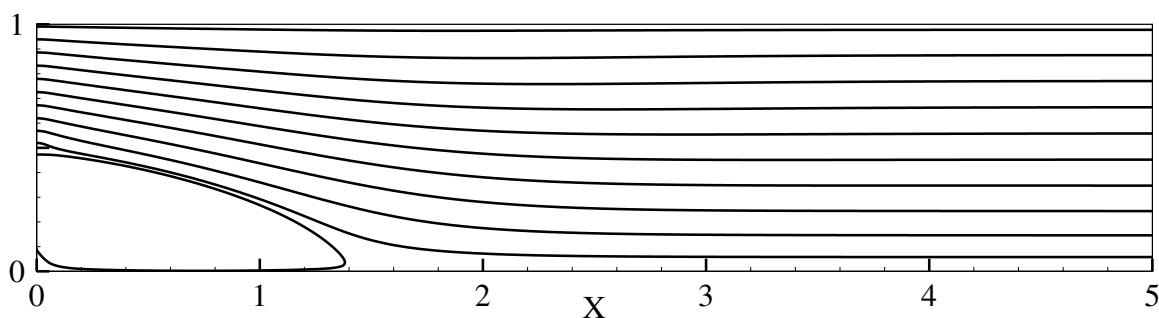
4.1.4 Validação do algoritmo proposto

Após o estudo numérico realizado, foi possível determinar os parâmetros necessários para a reprodução dos resultados apresentados em estudos anteriores, porém visando a redução do esforço computacional para a realização do estudo do acoplamento dos mecanismos magnéticos propostos. Os parâmetros numéricos que serão adotados na realização das simulações do escoamento de um fluido magnético sujeito a uma expansão abrupta, para $Re = 50$ e $Re = 100$ estão apresentados na tabela 4.2.

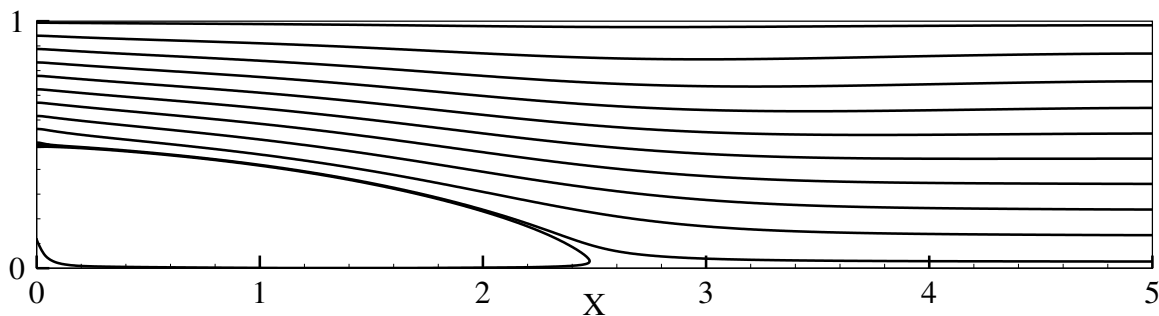
	L	H	h	$n \times n$	r	Xr	Erro (%)
$Re = 50$	5.0	1.0	0.5	100×100	10^{-7}	1.45	3.33
$Re = 100$				150×150		2.56	2.73

Tabela 4.2: Sumário dos parâmetros numéricos adotados para a execução das simulações para $Re = 50$ e $Re = 100$. Os parâmetros L, H e h representam o comprimento do domínio, a altura do domínio e a altura do degrau, respectivamente, e estão ilustrados na figura 1.6. $n \times n$ representa o número de nós de malha, r a tolerância para o resíduo numérico adotado e Xr o ponto de recolamento computado para as simulações realizadas com estes parâmetros numéricos apresentados. Os erros percentuais máximos apresentados foram calculados a partir dos resultados presentes na literatura, referentes ao caso puramente hidrodinâmico, apresentados na tabela 4.1.

A implementação dos parâmetros propostos, sumarizados na tabela 4.2, permitiu a reprodução de valores esperados para o ponto de recolamento de camada limite para o problema puramente hidrodinâmico, apresentados em estudos anteriores, com discrepância de até 4% (obtida para $Re = 50$ em uma malha computacional ortogonal regular 100×100 e com uma tolerância para o resíduo numérico de 10^{-7}). Os resultados obtidos no presente estudo estão ilustrados na figura 4.4.



(a) Linhas de corrente calculadas para $Re = 50$, em uma malha 100×100 , uma tolerância numérica 10^{-7} . O ponto de recolamento computado é $Xr = 1.45$.



(b) Linhas de corrente calculadas para $Re = 100$, em uma malha 150×150 , uma tolerância numérica 10^{-7} . O ponto de recolamento computado é $Xr = 2.56$.

Figura 4.4: Visualização das linhas de corrente associadas ao campo de velocidades obtido na validação do algoritmo desenvolvido para o caso puramente hidrodinâmico.

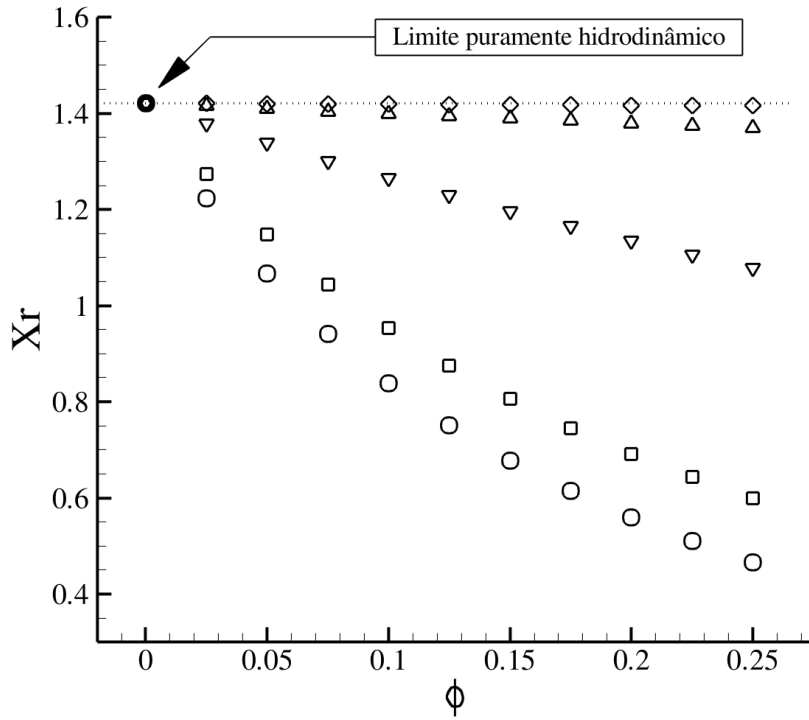
4.2 Implementação de efeitos magnéticos

O controle do ponto de recolamento da camada limite e a magnetização global do meio foram estudadas para diferentes parâmetros magnéticos. Em relação à magnetização de equilíbrio, nenhuma correção de ordem superior [5] para suspensões concentradas foi implementada, porém simulações foram realizadas para frações volumétricas de partículas magnéticas suspensas de até 25%. A análise da magnetização global calculada é dada, quantitativamente, pela avaliação da sua componente na direção y (vertical), por ser a direção do campo externo aplicado. Além disso será avaliada a relevância do termo λ_2 referente ao grau de acoplamento entre o gradiente do campo de velocidades e a magnetização global.

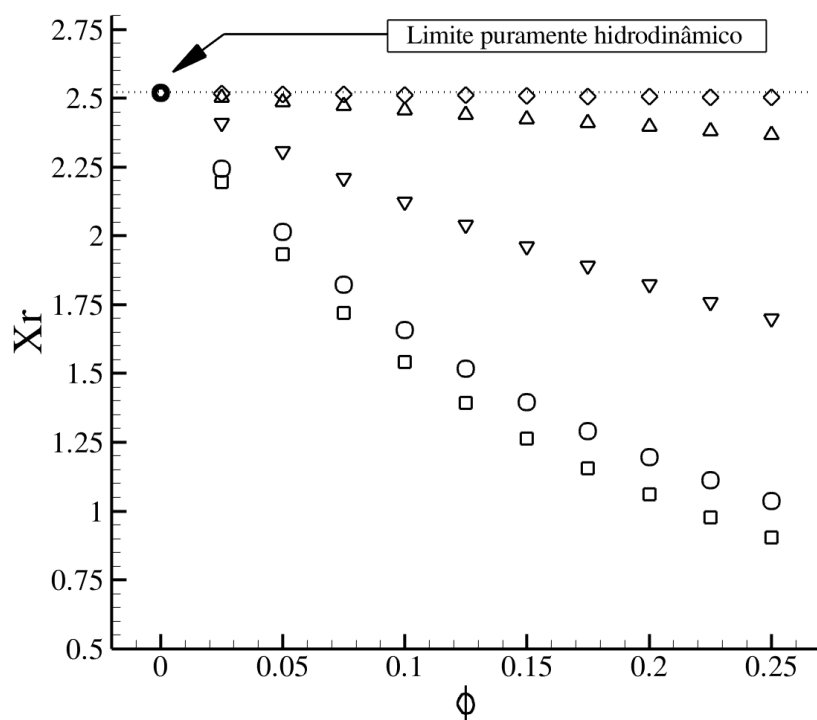
4.2.1 Retração do ponto de recolamento de camada limite

Após a implementação dos mecanismos magnéticos, simulações foram realizadas para observar o comportamento puramente hidrodinâmico em um limite assintótico ($\phi \rightarrow 0$). A fração volumétrica ϕ representa um fator de amplificação ou atenuação do acoplamento entre magnetização e escoamento, devido ao fato de que quanto maior for o número de partículas magnéticas suspensas, maior será a influência do campo externo sobre o meio. Desta forma, o limite $\phi \rightarrow 0$ descreve o comportamento de um fluido Newtoniano, devido à baixa influência do campo aplicado sobre as propriedades do meio.

A partir da figura 4.5 é possível observar que a solução puramente hidrodinâmica do problema é recuperada para os dois regimes de escoamento, quando $\phi = 1E - 5$. Uma fração infinitesimal de partículas suspensas representa o limite assintótico em que as partículas suspensas não serão capazes de perturbar o escoamento, para qualquer valor de Re_m . A partir da equação evolutiva para a magnetização do meio (3.23d), que escala com Re_m^{-1} (e a própria definição do parâmetro Re_m , dada pela equação (3.18)), é possível concluir que quanto maior for o número de Reynolds magnético, mais a solução se aproximará do regime puramente hidrodinâmico, representado pelas linhas pontilhadas na figura 4.5. Por outro lado, baixos valores de Re_m resultam em uma maior retração do ponto de recolamento da camada limite, para uma mesma fração volumétrica ϕ adotada. Este comportamento é observado a partir dos resultados apresentados na figura 4.6.



(a) Evolução do ponto de recolamento calculado para $Re = 50$.



(b) Evolução do ponto de recolamento calculado para $Re = 100$.

Figura 4.5: Resultados obtidos no cálculo do ponto de recolamento da camada limite em função da fração volumétrica ϕ , obtidos para diversos valores de Re_m . As simulações foram realizadas para $0.0 \leq \phi \leq 0.25$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1$, $\lambda_2 = 0.0$, e para os parâmetros numéricos estipulados na seção anterior e apresentados na tabela 4.2. Linhas horizontais pontilhadas representam o ponto de recolamento calculado a partir da solução do sistema de equações (3.22) sem a implementação de efeitos magnéticos. Círculos representam os resultados obtidos para $Re_m = 0.01$, quadrados para $Re_m = 0.1$, gradientes para $Re_m = 1.0$, deltas para $Re_m = 10.0$ e losangos para $Re_m = 100.0$.

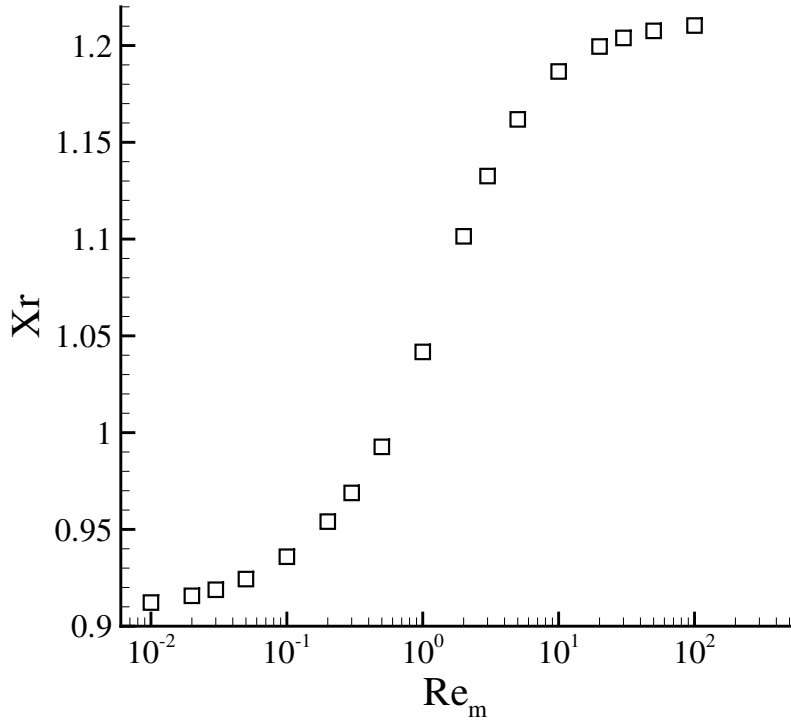


Figura 4.6: Cálculo do ponto de recolamento obtido para diferentes $10^{-2} \leq Re_m \leq 10^2$. Os resultados apresentados foram obtidos para $\phi = 0.05$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1$, $\lambda_2 = 0.0$ e permitem computar a influência do parâmetro magnético Re_m sobre a retração do ponto de recolamento de camada limite para $Re = 50$.

A figura 4.6 mostra um comportamento interessante com a identificação de dois *plateaus* bem definidos nos limites assintóticos $Re_m \ll 1$ e $Re_m \gg 1$. Conforme já discutido anteriormente, podemos interpretar o parâmetro físico conhecido por Reynolds magnético como uma razão entre duas importantes escalas de tempo desse problema físico dinâmico e acoplado. Essas escalas são a escala magnética e a escala inercial do escoamento. Para $Re_m \ll 1$ a escala de tempo magnética (principalmente associadas ao mecanismo de relaxação-orientação de dipolos na escala das partículas) é muito menor que a escala inercial do escoamento (ou o tempo médio que uma partícula com velocidade do escoamento médio de entrada demora para se deslocar por uma distância equivalente ao diâmetro hidráulico do canal). Nesse limite assintótico, ou seja, para $Re_m \ll 1$ as partículas magnéticas rapidamente se alinham na direção do campo aplicado (que neste caso é uniforme). Conseqüentemente qualquer efeito desalinador, induzido por mecanismos hidrodinâmicos, como a vorticidade do escoamento é rapidamente compensado pela tendência restauradora dos torques magnéticos provenientes do paralelismo entre os campos \mathbf{M} e \mathbf{H} . O plateau não-Newtoniano (magnético) observado para $Re_m \ll 1$ indica que a partir de um valor limite inferior para Re_m não existe mais acoplamento entre os mecanismos hidrodinâmicos e magnéticos capazes de reverter ou alterar essa tendência de retração da zona de recirculação. Para o outro

limite assintótico, $Re_m \gg 1$, temos o caso oposto, no qual as partículas demoram muito tempo para responder à ação do campo e não conseguem se alinhar na direção do campo ao longo de uma escala de tempo compatível com as escalas inerciais do escoamento. Esse limite é percebido como um regime quasi-estático do ponto de vista magnético, no qual o escoamento percebe as partículas sempre desalinhadas e sem magnetização *bulk*, ou seja, consiste em um regime Newtoniano (não-magnético). O comportamento mais interessante é observado nesse caso nas faixas intermediárias, $Re_m \sim 1$, nas quais essas escalas encontram-se acopladas e os mecanismos hidrodinâmicos são capazes de interagir com os magnéticos, alterando de forma perceptível os padrões das linhas de corrente do escoamento estudado.

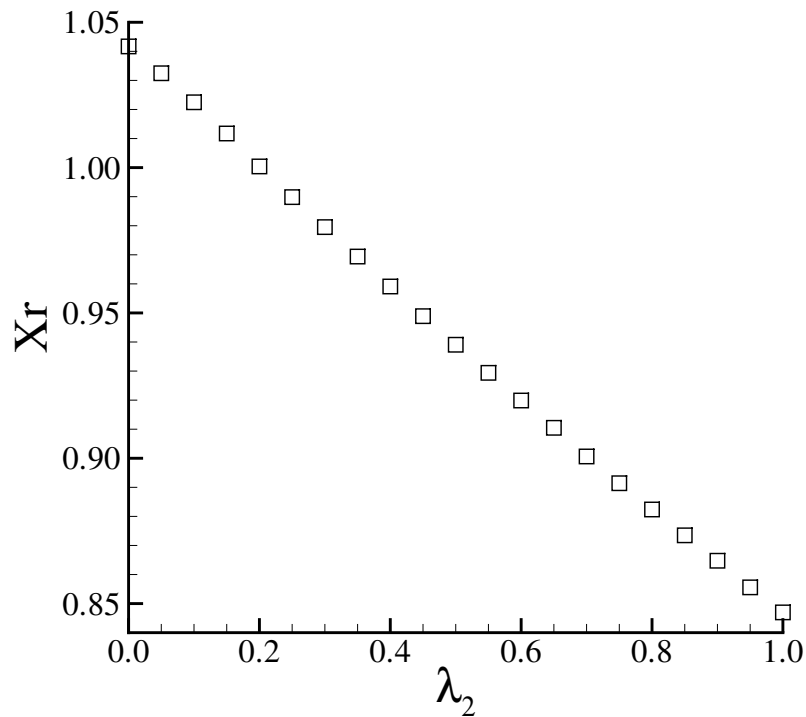
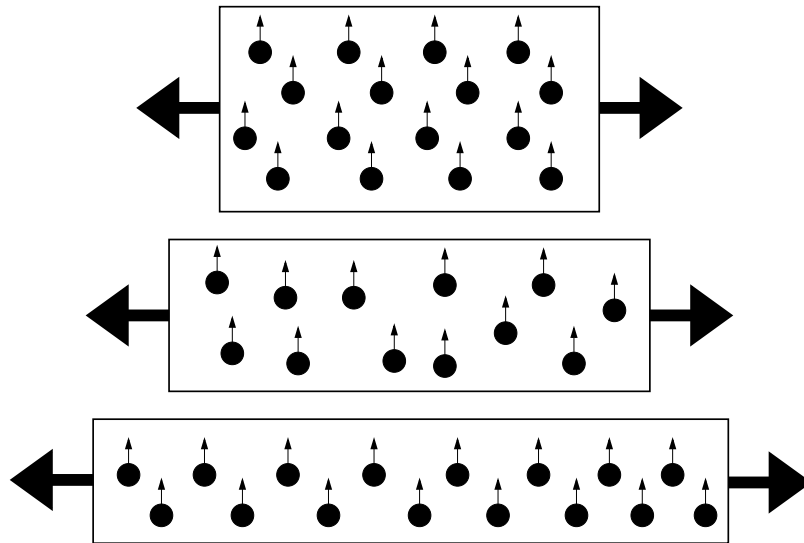


Figura 4.7: Cálculo do ponto de recolamento obtido para diferentes λ_2 . Os resultados apresentados foram obtidos para $\phi = 0.05$, $Pe = 1.0$, $\alpha = 1$, $Re_m = 1.0$ e permitem computar a influência do parâmetro magnético λ_2 sobre a retração do ponto de recolamento de camada limite para $Re = 50$.

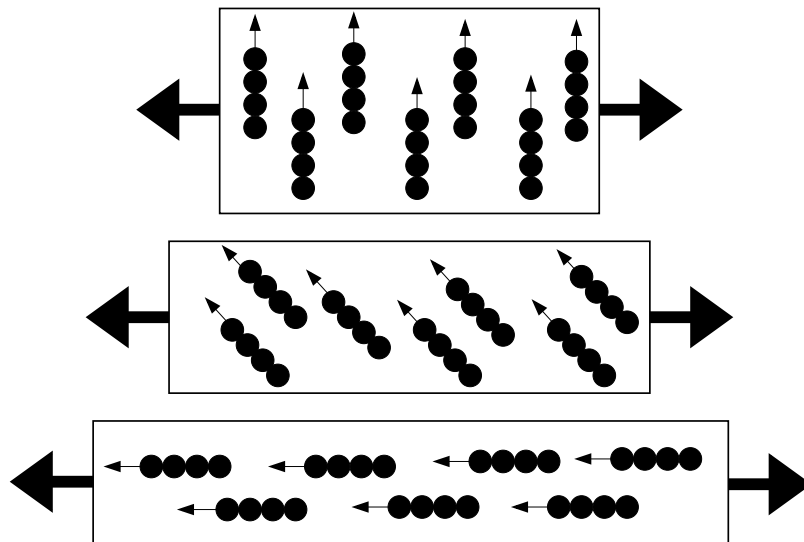
A partir dos estudos numéricos realizados e apresentados na figura 4.7, é possível inferir que o parâmetro λ_2 e o termo $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$ são capazes de provocar fortes alterações do padrão de escoamento resultante neste problema acoplado. Desta forma, o parâmetro λ_2 , que relaciona a formação de estruturas em forma de cadeias [51], como discutido na seção 2.9, e a evolução da magnetização global, foi determinante no cálculo do ponto de recolamento de camada limite.

Uma interpretação do efeito resultante sobre a magnetização global proveniente da

formação de tais estruturas em forma de cadeias pode ser feita a partir da componente elongacional de um cisalhamento simples, como proposto em estudos anteriores [113], e ilustrado na figura 4.8.



(a) Ação da componente elongacional do escoamento sobre partículas perfeitamente esféricas.



(b) Ação da componente elongacional do escoamento sobre aglomerados de partículas em forma de correntes.

Figura 4.8: Representação do efeito da componente elongacional do gradiente de velocidades sobre uma área material discreta, resultando em uma deformação gradual. Observa-se que os momentos de dipolo de partículas perfeitamente esféricas, por serem geometricamente isotrópicas, não são perturbadas pela componente elongacional do gradiente de velocidades, enquanto cadeias de partículas magnéticas são profundamente afetadas devido à forma de sua estrutura.

Nesta abordagem, o grau de acoplamento entre D e M é dado por um parâmetro λ_2 finito, cuja determinação é realizada experimentalmente a partir da razão de aspecto

r (número de partículas) de uma cadeia e a partir de um fator de forma κ , de forma que:

$$\lambda_2 \approx \kappa/5 \quad (4.6)$$

$$\kappa = \frac{2(r^2 - 1)^{5/2}}{3r[(2r^2 - 1)\operatorname{arcosh}(r) - r\sqrt{r^2 - 1}]} \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) determinada experimentalmente [113, 114] apresenta consistência com a discussão teórica estabelecida, de forma que $\lambda_2 = 0$ para partículas esféricas ($r = 1$) e assume valores negligenciáveis para aglomerados de forma levemente irregular. Por outro lado, para suspensões com interações entre partículas não negligenciáveis com formação de cadeias, λ_2 assume valores finitos variando na ordem de 0.1 a 1.0, como mostrado na representação gráfica 4.9.

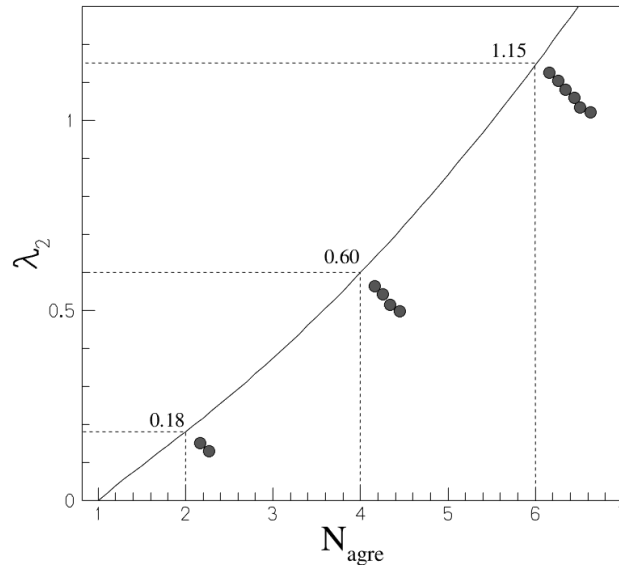


Figura 4.9: Representação gráfica da expressão matemática (4.7) determinada experimentalmente do parâmetro λ_2 em função do número de partículas compondo um microagregado na forma de cadeia [114]. Figura gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.

Por outro lado, o efeito resultante do termo $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$ pode ser interpretado de forma mais completa incorporando a componente rotacional do gradiente de velocidades neste fenômeno [7]. A análise do acoplamento da parcela simétrica do tensor gradiente de velocidades sobre a magnetização do meio realizada sobre partículas suspensas perfeitamente esféricas é fundamentalmente restrita, devido à existência incondicional de aglomerados de partículas, até mesmo em fluidos magnéticos considerados estáveis [3]. Desta forma, pode-se interpretar o papel da parcela elongacional \mathbf{D} como sendo o de

deformar aglomerados esféricos, de forma que o aspecto final do aglomerado se aproxime de uma cadeia, e que a componente rotacional \mathbf{W} seja responsável por perturbar a orientação do momento de dipolo deste grupo de partículas suspensas, como ilustrado na figura 4.10.

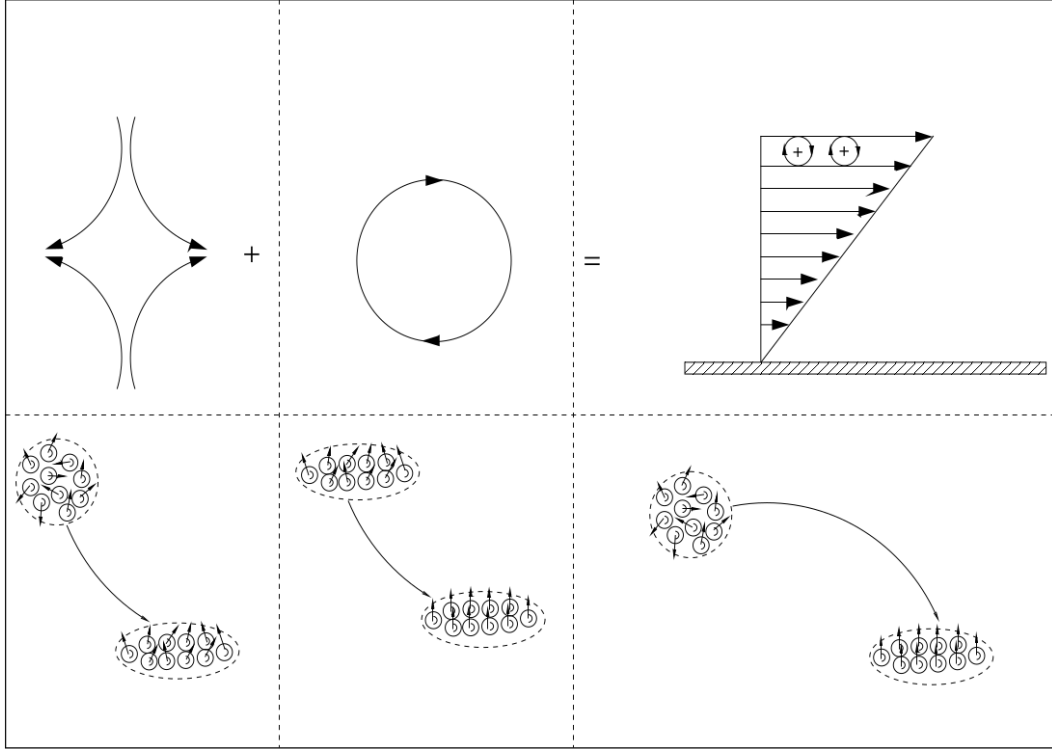


Figura 4.10: Decomposição de um cisalhamento simples em uma componente alongacional e uma rotacional, de forma que a componente alongacional \mathbf{D} seja responsável pela deformação de um microagregado, resultando em uma estrutura em forma de cadeia, e a componente rotacional \mathbf{W} seja responsável por uma perturbação na orientação dos dipolos magnéticos de tal microagregado por meio de um balanço de torques dado globalmente por $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$, cujo desalinhamento é proveniente de efeitos hidrodinâmicos (i.e.: vorticidade). Figura gentilmente cedida pelo Prof. Rafael Gabler Gontijo.

Como discutido na seção 2.8, a dedução da equação fenomenológica para a magnetização (2.126) foi realizada também a partir de conceitos da Mecânica dos Meios Contínuos [74] e implica em um parâmetro de acoplamento λ_2 unitário. A necessidade de um fator de correção λ_2 não unitário para o termo de geração de magnetização $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$ permanece sendo discutida. Deve-se avaliar o caráter unitário de λ_2 , independentemente da fração volumétrica e o grau de interação entre as partículas suspensas, e avaliar a consistência de um valor unitário para este parâmetro em suspensões diluídas (i.e.: caso $\phi \ll 1$ e o impacto dos microagregados possa ser desconsiderado).

A figura 4.11 ilustra a relação entre o ponto de recolamento e o número de Reynolds, relativos ao escoamento de um fluido Newtoniano sujeito a uma expansão abrupta uni-

direcional em domínio bidimensionais e tridimensionais, obtida a partir de estudos numéricos e experimentais. Tal comportamento, juntamente com a retração do ponto de recolamento de camada limite observada nos estudos numéricos apresentados nesta seção, permite que esta retração (resultante do acoplamento entre magnetismo e escoamento, dados por um balanço de torques), seja associada ao efeito magneto-viscoso. O ponto de recolamento resultante da adição de mecanismos magnéticos ao escoamento, pode ser associado a um número de Reynolds menor, a partir dos resultados existentes na literatura. Esta alteração aparente no escoamento pode ser associada ao aumento da viscosidade efetiva do escoamento, provocado pelo surgimento de torques magnéticos contrário ao movimento do escoamento, e caracteriza o efeito magneto-viscoso, fenômeno observado em diversos estudos anteriores [115, 84].

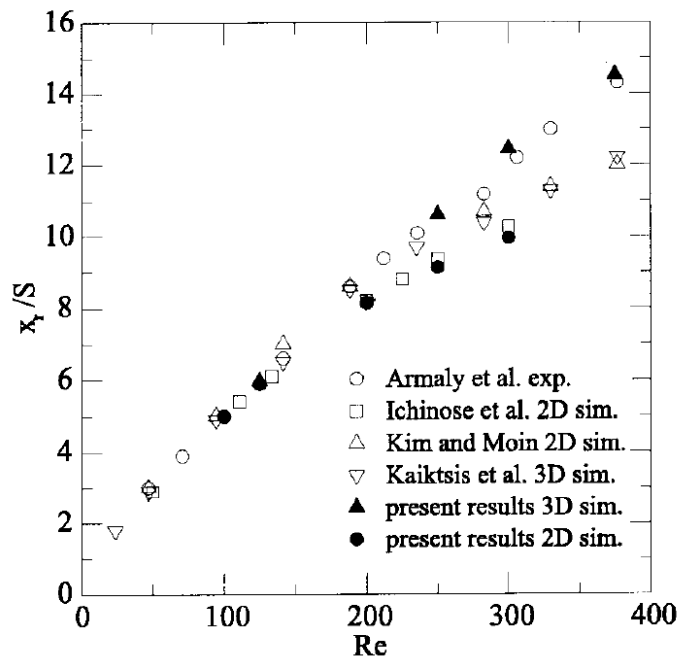
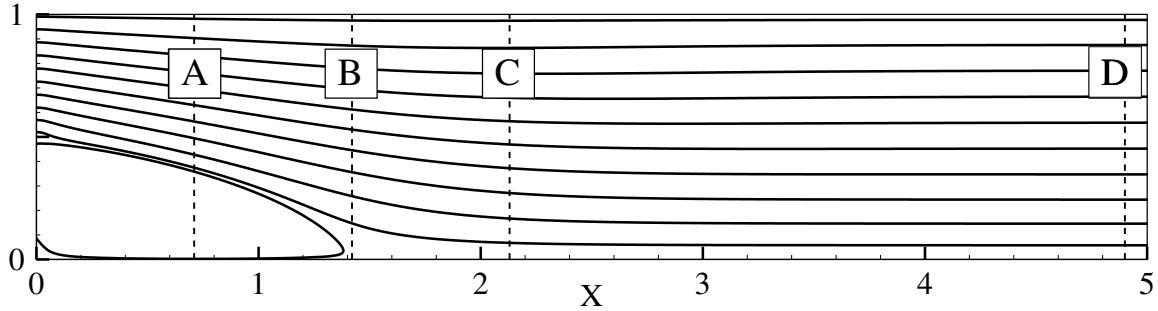


Figura 4.11: O ponto de recolamento de camada limite como função do número de Reynolds [111]. Resultados obtidos, experimental e numericamente, para um escoamento sujeito a uma expansão abrupta unidirecional.

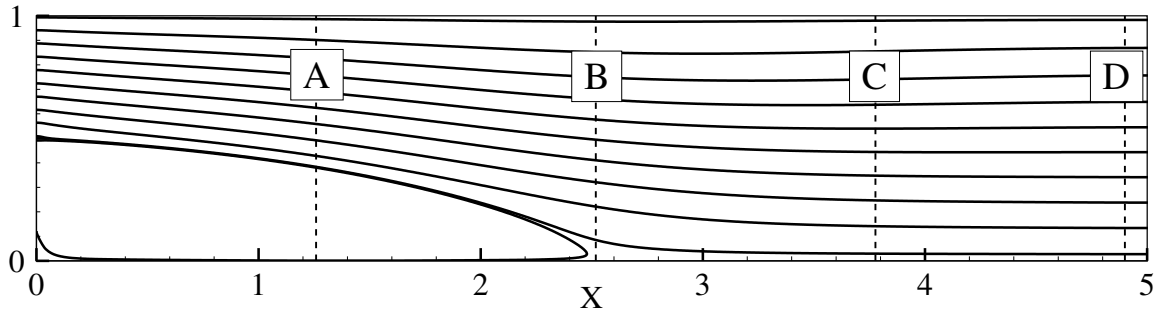
4.2.2 Perfis de magnetização e o parâmetro λ_2

O estudo do campo resultante da magnetização global, após a solução do problema acoplado, será realizado por meio da avaliação da componente vertical da magnetização M_y em seções verticais do domínio numérico implementado. Com o objetivo de relacionar o escoamento resultante com a magnetização calculada, perfis de magnetização são extraídos de quatro seções com componentes de velocidades distintas. Uma seção

A será definida e posicionada no centro da zona de recirculação, uma seção B sobre o ponto de recolamento da camada limite, uma seção C em uma posição 50% maior que o ponto de recolamento, e por fim uma seção D em $X = 4.9$ onde, devido às condições de contorno impostas em (3.61), o escoamento se encontra totalmente desenvolvido. Desta forma, o posicionamento das seções de teste adotadas para avaliação da magnetização global \mathbf{M} nos regimes $Re = 50$ e $Re = 100$ estão apresentadas na figura 4.12.



(a) Posição das seções adotadas para $Re = 50$: $X_A = 0.710$; $X_B = 1.420$; $X_C = 2.130$; $X_D = 4.9$.

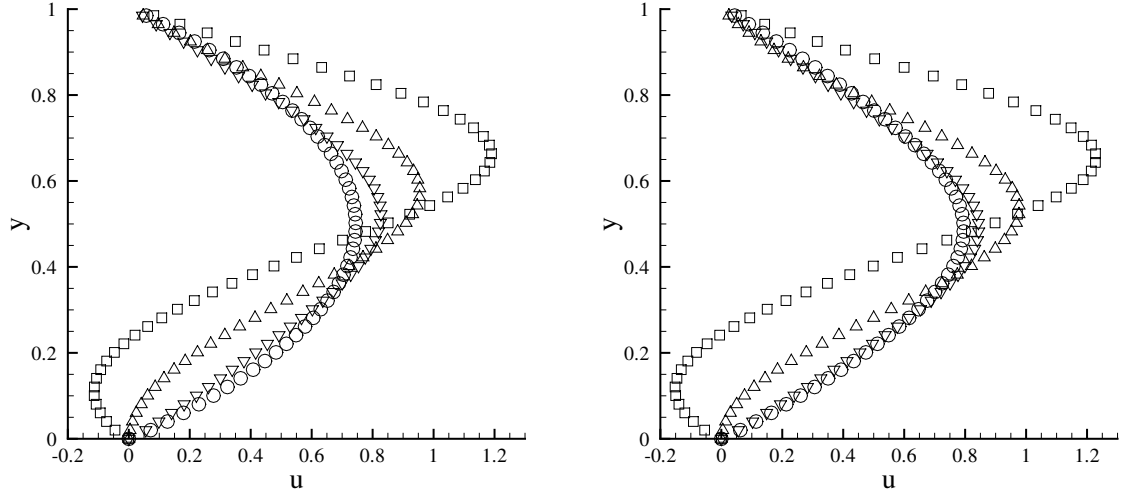


(b) Posição das seções adotadas para $Re = 100$: $X_A = 1.255$; $X_B = 2.518$; $X_C = 3.765$; $X_D = 4.9$.

Figura 4.12: Ilustração da posição das seções de teste para avaliação de perfis de magnetização \mathbf{M}_y . A seção A é posicionada em $0.5Xr$, a seção B em Xr , a seção C em $1.5Xr$ e a seção D em $X = 4.9$, em que Xr é o ponto de recolamento calculado na solução do caso hidrodinâmico do problema e $X = 4.9$ uma posição onde a camada limite está totalmente reestruturada e o escoamento totalmente desenvolvido.

A partir da figura 4.13 é possível observar que a metodologia adotada para a obtenção dos perfis de velocidades, dada pela extração e interpolação do campo de velocidades calculado sobre as seções apresentadas na figura 4.12, resulta em um comportamento qualitativo semelhante, quando as soluções numéricas para $Re = 50$ e $Re = 100$ são comparadas. Pode-se dizer então que, dado o comportamento análogo obtido para o campo de velocidades avaliado sobre as seções propostas, o comportamento do campo de magnetização também será semelhante entre os regimes de escoamento estudados. Desta forma, afim de evitar o custo computacional referente à solução do problema

para $Re = 100$ e visando a investigação qualitativa do acoplamento entre os campos \mathbf{M} e $\boldsymbol{\xi}$, a análise dos perfis de magnetização será conduzida somente para $Re = 50$.



(a) Perfis de velocidade (componente x) extraídos nas seções adotadas para $Re = 50$: $X_A = 0.725$; $X_B = 1.45$; $X_C = 2.17$; $X_D = 4.9$, a partir dos dados obtidos na solução do problema para o regime puramente hidrodinâmico.

(b) Perfis de velocidade (componente x) extraídos nas seções adotadas para $Re = 100$: $X_A = 1.28$; $X_B = 2.56$; $X_C = 3.84$; $X_D = 4.9$, a partir dos dados obtidos na solução do problema para o regime puramente hidrodinâmico.

Figura 4.13: Ilustração dos diferentes perfis de velocidades extraídos dos resultados obtidos para a validação do algoritmo desenvolvido para o caso puramente hidrodinâmico, descritos na tabela 4.2. Quadrados representam os dados obtidos para a seção A, triângulos a seção B, gradientes a seção C e círculos a seção D. A avaliação da magnetização global em seções com perfis de velocidades distintos permitirá relacionar e interpretar os resultados obtidos para o campo de velocidades e a magnetização.

Por meio da metodologia proposta, perfis de magnetização foram extraídos (componente y) das seções apresentadas na figura 4.12 a partir dos resultados obtidos para $0.0 \leq \lambda_2 \leq 1.0$ e os resultados estão apresentados na figura 4.14. Como esperado, a magnetização extraída das seções de teste é totalmente distinta da magnetização de equilíbrio (representada pelas linhas verticais tracejadas na figura 4.14). Este comportamento está de acordo com o estudo teórico realizado, de forma que as orientações dos dipolos magnéticos são fortemente perturbadas na presença de um escoamento, principalmente devido aos termos $\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}$ e $\lambda_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$. Tais termos são responsáveis pelos mecanismos de desalinhamento dos dipolos da direção preferencial do campo devido à vortividade e estiramento das cadeias de partículas magnéticas (alterações microestruturais locais).

Os perfis de magnetização extraídos e apresentados na figura 4.14 exibem a mesma tendência, com diferentes amplitudes, em relação ao parâmetro λ_2 . Para valores baixos,

é possível observar uma tendência da magnetização se aproximar do seu valor de equilíbrio, dado pelas retas verticais em vermelho. Este fenômeno é interpretado como um resultado da ruptura das estruturas em forma de cadeias. A diminuição do tamanho do aglomerado (i.e.: diâmetro efetivo) implica na redução do tempo característico de relaxação magnética. Desta forma, quanto menor for a escala de tempo associada à relaxação magnética, menor será a capacidade do escoamento de desviar a magnetização do seu valor de equilíbrio M_0 .

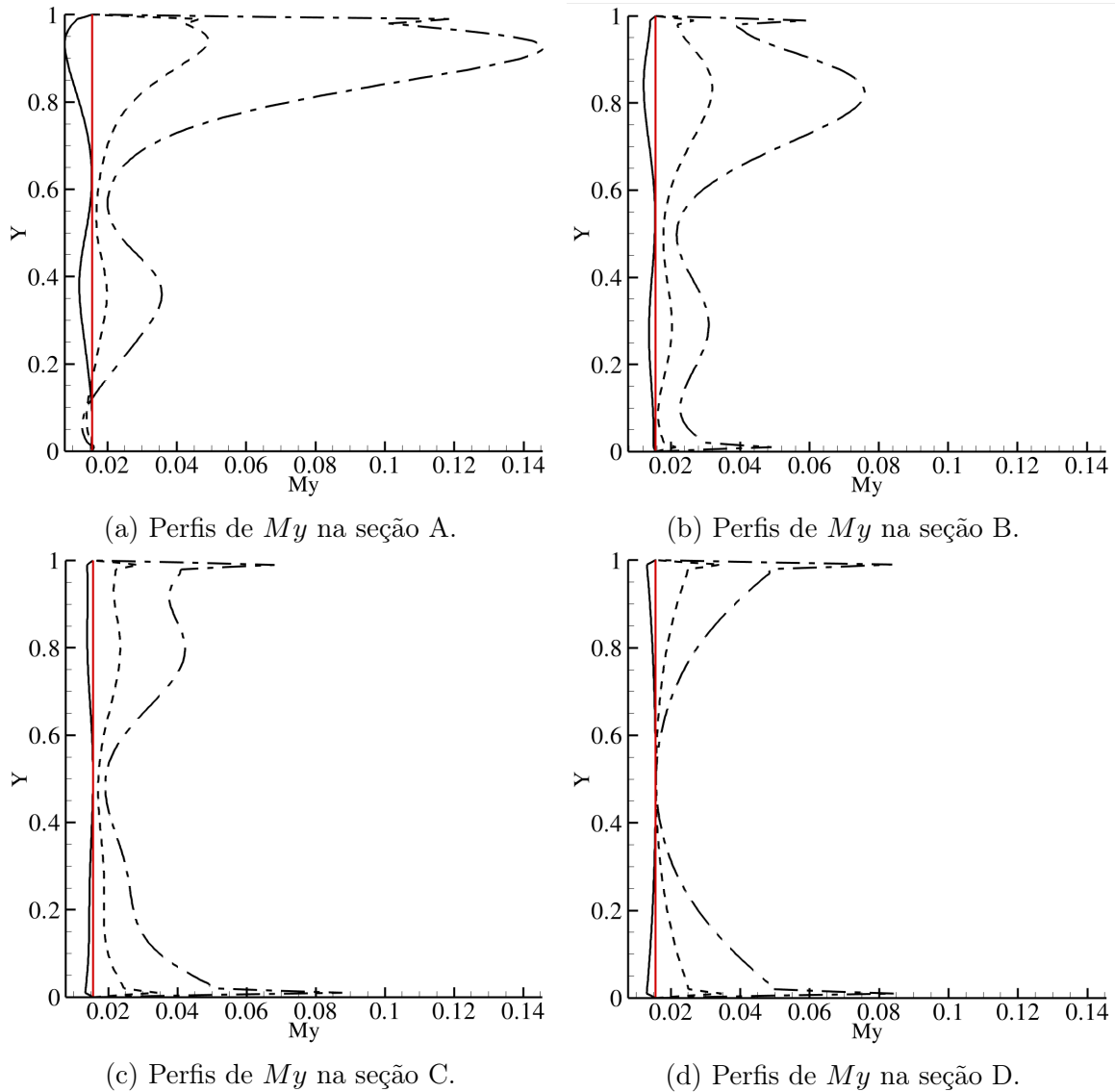


Figura 4.14: Perfis de magnetização extraídos sobre as seções rescritas na figura 4.12. Linhas contínuas representam os perfis obtidos para $\lambda_2 = 0.0$, linhas tracejadas para $\lambda_2 = 0.5$ e linhas traço-ponto para $\lambda_2 = 1.0$. Todas as simulações apresentadas foram realizadas para $Re = 50$, $Re_m = 1.0$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.05$, $\alpha = 1$ e uma magnetização de equilíbrio $M_0 = 0,0156$.

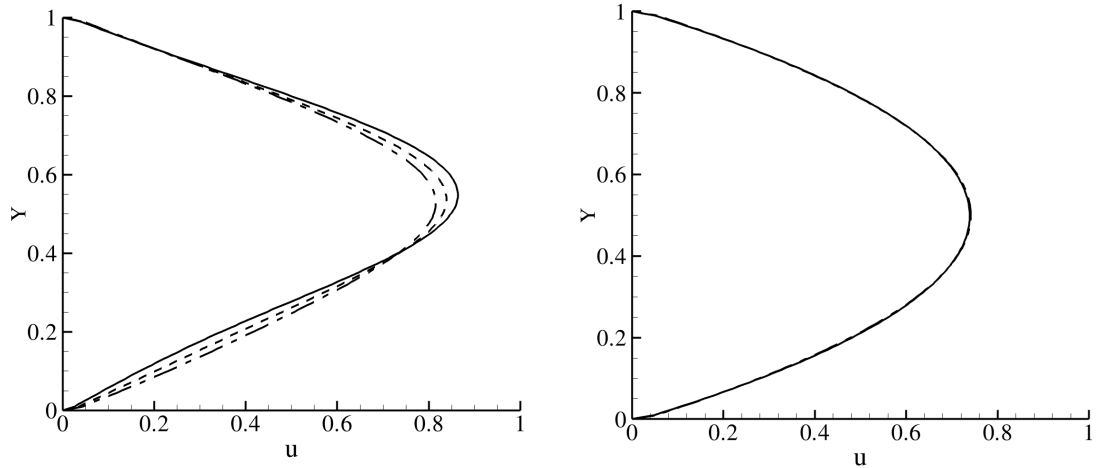
Ainda em relação à figura 4.14, é possível observar um aumento substancial da magnetização em camadas adjacentes às paredes. Este resultado é interpretado com

uma resposta atrasada ao desalinhamento entre os campos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{H} , pois a escala de tempo característica do escoamento é, geralmente, superior à escala de relaxação magnética. O desalinhamento entre \mathbf{M} e \mathbf{H} é provocado pela alta vorticidade em camadas de fluido adjacentes às paredes sólidas e ocorre em uma escala de tempo do escoamento. Tal desalinhamento resulta no surgimento de torques magnéticos associados ao produto $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$, que induz uma resposta magnética abrupta por meio de mecanismos de relaxação, principalmente devido à relaxação magnética de precessão. Pode-se observar que o termo $\mathbf{M} \times \mathbf{H} \times \mathbf{M}$ domina o mecanismo de resposta magnética em regiões de alta vorticidade. Desta forma, a resposta magnética ao surgimento de torques magnéticos ocorre de forma desproporcionalmente forte, devido ao fato de que este processo ocorre em escalas de tempo muito menores que à escala do escoamento. Por fim, a ruptura dos aglomerados de partículas em regiões de alta vorticidade reduz o tempo de relaxação magnética e tende a aproximar a magnetização do seu valor de equilíbrio.

O aumento local da magnetização em regiões de alta vorticidade pode ser interpretado relacionando a zona de recirculação à uma região de concentração não-uniforme de partículas suspensas, pois partículas podem ser ejetadas da zona de recirculação e resultar em concentrações mais altas nas regiões próximas às paredes. Altas concentrações iriam resultar na formação de aglomerados esféricos de partículas, que seriam deformados pela componente \mathbf{D} do tensor gradiente de velocidades e resultariam em estruturas na forma de cadeias, que são relacionadas ao aumento local na magnetização e até a valores superiores à magnetização de equilíbrio [51]. Tal interpretação é compatível com os fenômenos observados em estudos anteriores e a associação deste fenômeno macroscópico com alterações microestruturais locais na suspensão [114, 113]

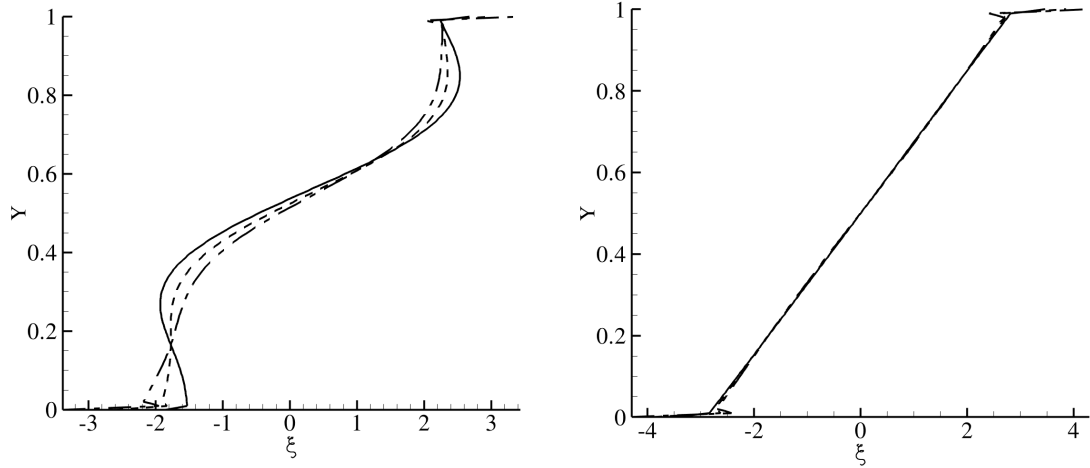
A partir da figura 4.15 e interpretando a influência do parâmetro λ_2 , é possível observar que o termo $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$ tem maior efeito em regiões onde a camada limite se encontra completamente desestruturada devido à intensos gradientes de velocidades (condição característica da seção B ilustrada na figura 4.12). Valores não-nulos de λ_2 resultam em pontos de recolamento de camada limite menores, em concordância com a figura 4.7, porém não provocam nenhum efeito em regiões onde o escoamento se encontra totalmente desenvolvido e a camada limite está reestruturada (condição característica da seção D ilustrada na figura 4.12). Os perfis de magnetização apresentados na figura 4.14b exibem forte dependência a um aumento do parâmetro λ_2 em toda sua extensão, mas por outro lado, exibem alteração nos perfis de magnetização referentes à seção D apresentados na figura 4.14d somente em regiões onde existem gradientes de

velocidades ($\mathbf{D} \neq 0$), e portanto $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$ perturba a magnetização do meio.



(a) Perfis de velocidades (componente x) extraídos sobre a seção B.

(b) Perfis de velocidades (componente x) extraídos sobre a seção D.



(c) Perfis de vorticidade extraídos sobre a seção B.

(d) Perfis de vorticidade extraídos sobre a seção D.

Figura 4.15: Perfis de velocidades e de vorticidade extraídos a partir das seções descritas na figura 4.12. Linhas sólidas representam os resultados obtidos para $\lambda_2 = 0.0$, tracejadas para $\lambda_2 = 0.5$ e traço-ponto para $\lambda_2 = 1.0$. Todas simulações foram realizadas para $Re_m = 1.0$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.05$ e $\alpha = 1$.

De forma qualitativa, o campo de magnetização pode ser analisado para diferentes intensidades de campos externos, dados por diferentes valores de Re_m . Retomando a equação (3.18), tem-se que $Re_m \sim H_0^{-2}$ e portanto, quanto maior for a intensidade do campo aplicado, menor será o parâmetro Re_m . A partir da figura 4.16 é possível analisar o efeito resultante do aumento da intensidade do campo aplicado \mathbf{H} sobre, tanto a magnetização do meio \mathbf{M} , quanto o ponto de recolamento da camada limite Xr . Observa-se que o aumento da intensidade do campo aplicado intensifica os efeitos magnéticos sobre o escoamento, provenientes do surgimento de torques magnéticos, e resulta em uma crescente retração do ponto de recolamento Xr . De forma similar,

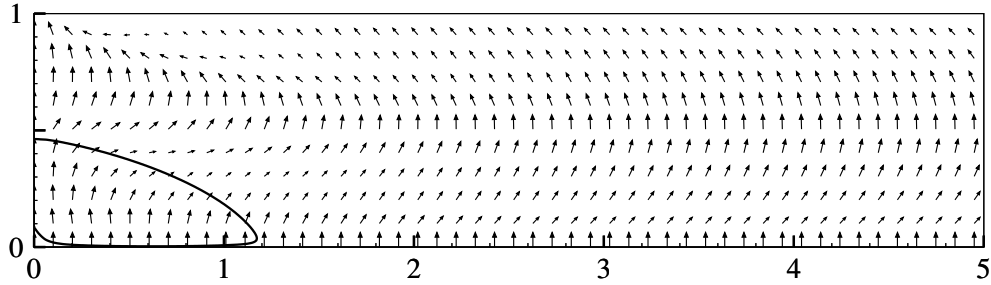
campos externos mais intensos tendem a recuperar um regime superparamagnético, em que a magnetização do meio está completamente alinhada com a direção do campo aplicado, como pode ser observado para baixos valores de Re_m . O comportamento observado pode ser associado também à definição dada pela equação (3.20), que define o parâmetro Re_m como uma razão entre escalas de tempo inerciais e magnéticas. Desta forma, pode-se associar altos valores de Re_m a casos em que as escalas de tempo magnéticas são superiores à escala de tempo do escoamento. Desta forma, o escoamento é capaz de perturbar a orientação dos momentos de dipolo antes que a relaxação magnética possa agir e reorientá-los na direção do campo aplicado. De forma oposta, baixos valores de Re_m representam escalas de tempo magnéticas menores que as escalas inerciais, e portanto tendem a manter os momentos de dipolo suspensos na direção do campo aplicado. Nas simulações conduzidas, cujos resultados estão apresentados na figura 4.16, desconsiderou-se o parâmetro λ_2 e portanto o termo $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$ na equação evolutiva da magnetização.

A mesma análise conduzida e apresentada na figura 4.16 foi reproduzida considerando o acoplamento entre a parcela simétrica do tensor gradiente de velocidades e a magnetização do meio, com um parâmetro $\lambda_2 = 1.0$ associado e uma fração volumétrica de partículas suspensas $\phi = 0.25$, cujos resultados estão apresentados na figura 4.17. Os resultados obtidos para o campo de magnetização apresentaram altas intensidades em regiões específicas do canal, como mostrado na figura 4.17b na parede superior com valores máximos representados pela cor vermelha. A discrepância entre as intensidades dos valores computados demandaram a representação do campo vetorial \mathbf{M} por meio de campos de cores.

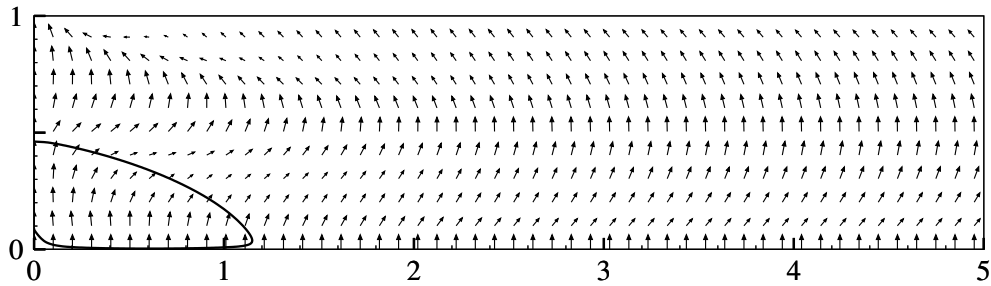
Para ambos os resultados apresentados nas figuras 4.16 e 4.17, é possível observar uma tendência de retração do ponto de recolamento da camada limite que obedece o padrão apresentado na figura 4.6. Observa-se uma variação mais acentuada do ponto de recolamento Xr para $0.1 \leq Re_m \leq 10.0$, enquanto a diferença entre o ponto de recolamento para $Re_m = 100$ e $Re_m = 10.0$ é consideravelmente menor.

Retomando o conceito de magnetização de saturação, discutido na seção 2.8 e apresentado matematicamente pela expressão (2.106), tem-se que a magnetização de saturação para o problema estudado e ilustrado na figura 4.17 é $M_s = 0.25$, dado que a magnetização do material das partículas suspensas adimensionalizada é unitária. Entretanto, valores de magnetização de até 0.5 foram computados localmente no domínio, nas paredes superior e inferior do canal após a expansão. Este aumento exacerbado da

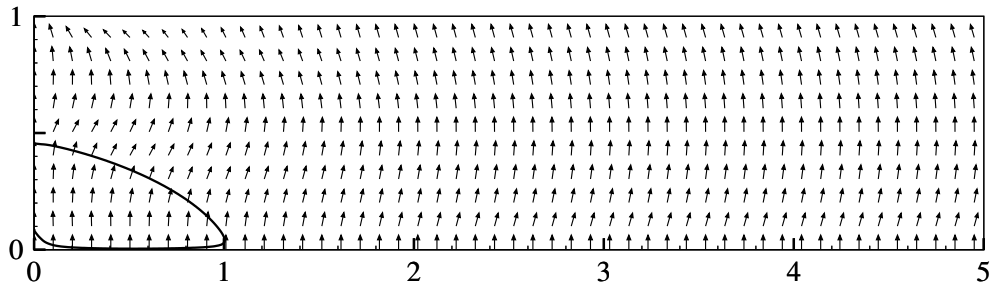
magnetização local pode ser atribuído a um aumento na concentração das partículas sólidas suspensas, de forma que ϕ não mais representaria uma propriedade homogênea do meio contínuo, e portanto a definição de magnetização de saturação baseada na hipótese de que a concentração de partículas suspensas é uniforme em todo o domínio. Tal consideração demanda um estudo experimental afim de confirmar esta hipótese.



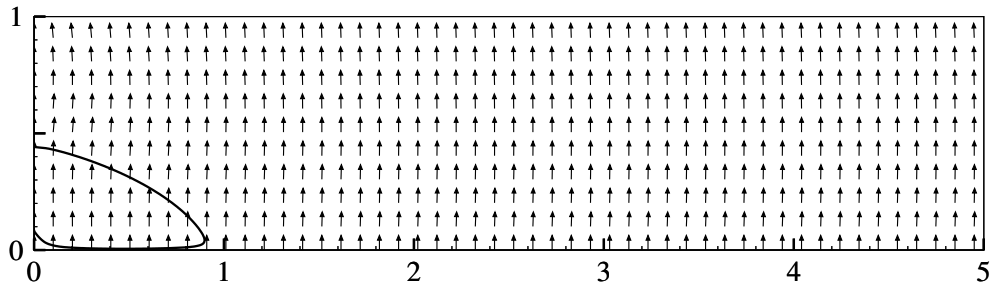
(a) $Re_m = 100$, $Xr = 1.21$.



(b) $Re_m = 10$, $Xr = 1.19$.



(c) $Re_m = 1$, $Xr = 1.04$.



(d) $Re_m = 0.1$, $Xr = 0.93$.

Figura 4.16: O campo de magnetização calculado é representado pelos vetores, com a representação de uma única linha de corrente que define a dimensão da zona de recirculação por meio de uma linha branca. Simulações realizadas para $Re = 50$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.05$, $\alpha = 1$ e $\lambda_2 = 0.0$ para diferentes valores de Re_m .

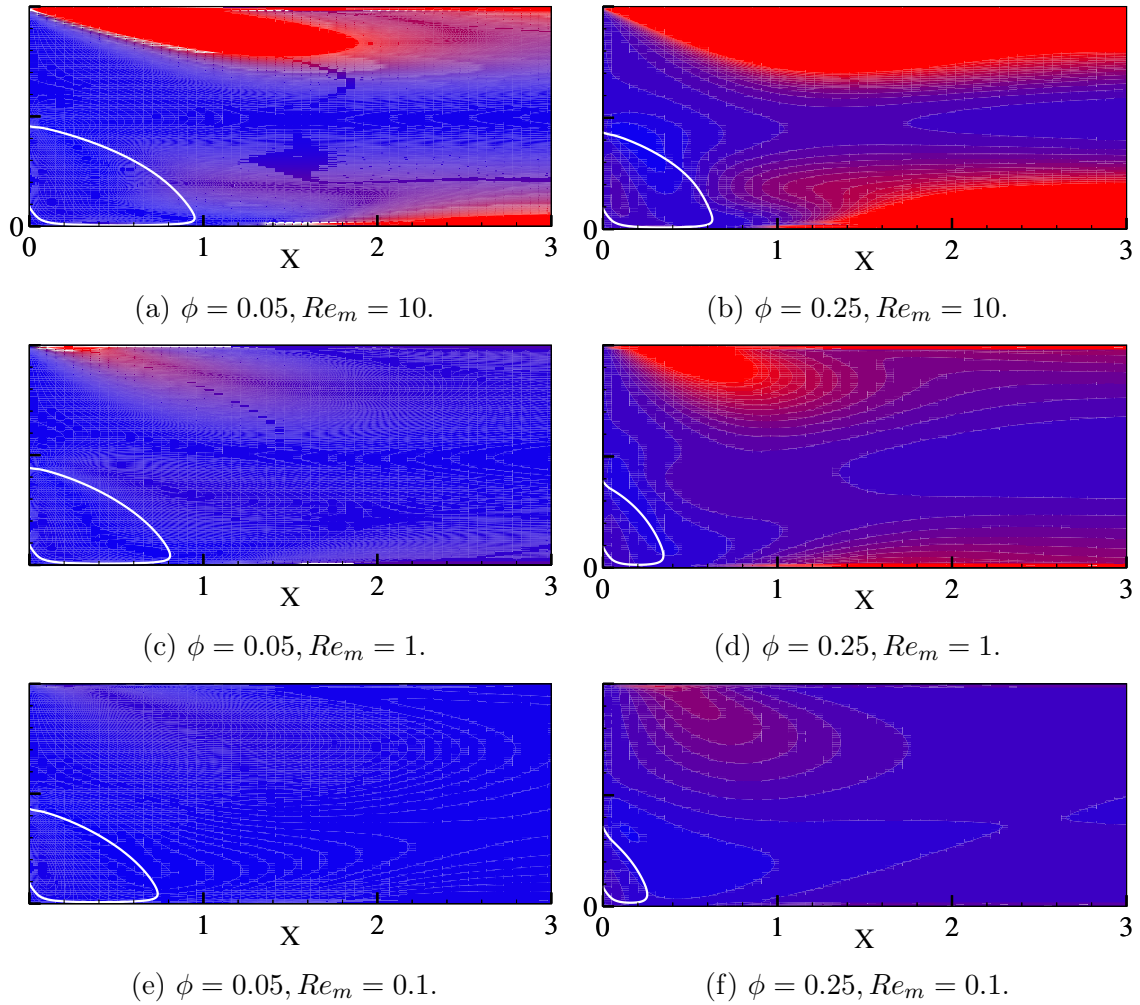


Figura 4.17: O campo de magnetização calculado é representado pelo campo de cores, com a representação de uma única linha de corrente que define a dimensão da zona de recirculação por meio de uma linha branca. Campo de cores gerado para um intervalo fixo de My , em que azul representa o valor mínimo computado ($My = -0.0006$) e vermelho representa o valor máximo ($My = 0.5$). Simulações realizadas para $Re = 50$, $Pe = 1.0$, $\phi = 0.25$, $\alpha = 1$ e $\lambda_2 = 1.0$ para diferentes valores de Re_m .

Especula-se também que essa aparente inconsistência física se deva ao fato de ter sido utilizado um valor unitário do parâmetro λ_2 sem uma correção deste em função da fração volumétrica das partículas. É importante que se destaque que a equação evolutiva de magnetização utilizada por [51, 113] é proposta de forma fenomenológica e que o termo λ_2 , vinculado ao mecanismo de estiramento de cadeias de partículas magnéticas é proposto de forma ad-hoc. Eventualmente, esse aparente paradoxo (valores locais de magnetização maiores que o de saturação para $\lambda_2 = 1$ e independente de ϕ) pode estar associado com o próprio fato de ter sido utilizado um valor desse parâmetro inconsistente com a fração volumétrica de partículas adotadas para fins de simulação.

Capítulo 5 CONCLUSÕES

Ao fim da apresentação dos resultados obtidos e das discussões estabelecidas, foi possível verificar o comportamento físico acoplado do problema estudado, dado pela possibilidade de controle do descolamento de camada limite por meio da aplicação de um campo magnético. Pode-se dizer que a relativa simplicidade (em regimes laminares e bidimensionais) de um escoamento sujeito a uma expansão abrupta permitiu que a complexidade intrínseca de um fluido magnético apolar fosse profundamente investigada, fornecendo resultados que permitam consolidar aspectos teóricos em aberto referentes às equações de fechamento da ferrodinâmica no âmbito da Mecânica dos Meios Contínuos. O estudo numérico realizado neste trabalho e os resultados gerados apresentaram concordância com o comportamento esperado, obtidos a partir de análises de escala das equações governantes em limites assintóticos. Observa-se que o efeito resultante da implementação de efeitos magnéticos, provenientes da sua interação com o escoamento (por meio de um balanço de torques), sobre o padrão do escoamento e a zona de recirculação observada é obtido a partir de um aumento da viscosidade efetiva do meio. Este aumento de viscosidade, amplamente observado em estudos anteriores e denominado efeito magnetoviscoso, resultou na redução do comprimento da zona de recirculação observada na ausência de efeitos magnéticos.

O estudo realizado foi conduzido baseado na hipótese de aplicação de um campo magnético uniforme. Esta consideração, apesar de restringir e conferir baixa aplicabilidade do modelo adotado, foi adotada visando a avaliação da capacidade da formulação \mathbf{HB} da parcela deviatória do Tensor de Maxwell (e do termo adicional resultante na equação do movimento) de captar efeitos magnéticos sobre a dinâmica do escoamento, que seriam negligenciadas em outras formulações cujos termos magnéticos são dados apenas para campos não-uniformes ($\nabla \mathbf{H} \neq 0$). Observou-se que a formulação \mathbf{HB} permitiu o acoplamento entre a hidrodinâmica e o campo externo, resultando em alterações substanciais, tanto na topologia do escoamento, quanto no campo de magnetização resultante.

Os resultados gerados forneceram informações essenciais à avaliação qualitativa do problema abordado, sempre em concordância com os aspectos teóricos da ferrohi-

drodinâmica e permitindo a observação dos mecanismos esperados. Por outro lado, observou-se que a implementação de um valor unitário para o parâmetro λ_2 resultou em valores locais de magnetização, em regiões de alta vorticidade, superiores à magnetização de saturação para tal suspensão. Tal fenômeno deverá ser estudado com maior rigor numérico, de forma que este comportamento possa ser atribuído unicamente à mecanismos físicos. Por fim, a realização de estudos experimentais permitirá avaliar a relevância do termo $\mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$ e de valores não unitários para o parâmetro λ_2 nos regimes abordados neste trabalho.

5.1 Trabalhos futuros

O estudo apresentado foi realizado na condição de um campo magnético uniforme aplicado verticalmente, e sem a utilização de correções propostas para o cálculo da magnetização de equilíbrio em suspensões concentradas ($\phi > 0.15$). Entretanto, os resultados preliminares atestam viabilidade ao controle desta instabilidade no escoamento de um fluido magnético por meio da aplicação de um campo externo controlável. O autor deste projeto tem como objetivo a continuação do estudo numérico realizado como tema de doutorado, visando a implementação e solução das equações governantes em variáveis primitivas deduzidas, a implementação de correções de ordem superior para o cálculo da magnetização de equilíbrio e de um campo magnético não uniforme, e a realização de um estudo experimental a partir da confecção de uma bancada, por meio da utilização de um fluido magnético real diluído, de forma a reduzir sua opacidade e permitir a visualização do padrão de escoamento resultante. Além disso, a realização de um estudo numérico mais rigoroso permitirá a uma associação dos fenômenos observados a mecanismos físicos de forma mais concisa.

De forma mais detalhada, a continuação deste estudo será dada principalmente em uma frente numérica e uma experimental, descritas de forma mais detalhada a seguir:

- **Frente numérica:** Discretização das equações governantes pelo Método dos Volumes Finitos e desenvolvimento de um código próprio para solução do problema após a definição de condições de contorno apropriadas. O objetivo do estudo numérico do problema proposto consiste na solução do sistema de equações governantes em variáveis primitivas, com a implementação de equações do potencial magnético deduzidas na seção 2.2.3, dada a irrotacionalidade do campo

aplicado \mathbf{H} proveniente das Equações de Maxwell no limite magnetostático, para que seja possível investigar efeitos resultantes de campos magnéticos aplicados não-uniformes sobre o domínio numérico tridimensional. A otimização do código a ser desenvolvido será dada pela implementação de técnicas condicionais *Upwind* de ordem superior na aproximação das derivadas espaciais dos termos discretizados, de métodos de solução para a equação de Poisson com melhores ordem de convergência (e.g.: Método dos Gradientes conjugados e Multigrid) visando a redução do custo computacional associado à condução do estudo proposto, e da implementação das equações discretizadas em um esquema implícito de solução, afim de conferir melhor estabilidade na solução do problema (para passos de tempo Δt maiores). Por fim, serão obtidos resultados inéditos na análise contínua do escoamento de um fluido magnético, cuja documentação será dada pela associação de propriedades de origem microscópica, tais como a fração volumétrica de partículas suspensas e o tempo de relaxação magnética do escoamento, com o comportamento macroscópico resultante dado pelo controle do descolamento da camada limite provocado pela geometria do problema.

- **Frente experimental:** Conduzir um estudo para a determinação de razões de aspecto apropriadas para uma investigação experimental do problema físico, em coerência com o estudo numérico. Após a determinação de uma geometria apropriada, levando em conta minimizar a quantidade de material utilizado em sua construção, e conseqüentemente o volume de fluido magnético a ser adquirido, será construída a bancada para a realização dos experimentos. A aquisição de imagens nesta etapa experimental e a instrumentação adequada da seção de testes da bancadas permitirá que seja estabelecida uma correlação e validação dos resultados obtidos numericamente.

Referências Bibliográficas

- 1 WEISS, P. Hypothesis of the molecular field and ferromagnetic properties. *J. phys*, v. 6, n. 4, p. 661–690, 1907.
- 2 HEISENBERG, W. Zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 49, n. 9-10, p. 619–636, 1928.
- 3 ROSENSWEIG, R. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985.
- 4 EINSTEIN, A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. [S.l.]: Courier Corporation, 1956.
- 5 IVANOV, A. O.; KUZNETSOVA, O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 4, p. 041405, 2001.
- 6 LEBEDEV, A. On the calculation of magnetization curve of concentrated magnetic fluids. In: IEEE. *Magnetics Conference, 1989. Digests of INTERMAG'89, International*. [S.l.], 1989. p. GQ6–GQ6.
- 7 GONTIJO, R. G. Micromecânica e microhidrodinâmica de suspensões magnéticas. 2014. Tese de Doutorado em Ciências Mecânica, Universidade de Brasília (UnB).
- 8 GONTIJO, R.; CUNHA, F. Dynamic numerical simulations of magnetically interacting suspensions in creeping flow. *Powder Technology*, Elsevier, v. 279, p. 146–165, 2015.
- 9 MENDELEV, V.; IVANOV, A. Magnetic properties of ferrofluids: an influence of chain aggregates. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 289, p. 211–214, 2005.
- 10 GONTIJO, R.; MALVAR, S.; CUNHA, F. Magnetic particulate suspensions from the perspective of a dynamical system. *Powder Technology*, Elsevier, v. 297, p. 165–182, 2016.
- 11 SHLIOMIS, M. Effective viscosity of magnetic suspensions. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, v. 61, n. 2411, p. s1971d, 1972.
- 12 FELDERHOF, B. Magnetoviscosity and relaxation in ferrofluids. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 3, p. 3848, 2000.
- 13 SHLIOMIS, M. I. Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 6, p. 060501, 2001.

- 14 ROSA, A.; GONTIJO, R.; CUNHA, F. Laminar pipe flow with drag reduction induced by a magnetic field gradient. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 3907–3918, 2016.
- 15 KOSE, A. R. et al. Label-free cellular manipulation and sorting via biocompatible ferrofluids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 106, n. 51, p. 21478–21483, 2009.
- 16 CASULA, M. F. et al. Magnetic resonance imaging contrast agents based on iron oxide superparamagnetic ferrofluids. *Chemistry of Materials*, ACS Publications, v. 22, n. 5, p. 1739–1748, 2010.
- 17 CASULA, M. F. et al. Design of water-based ferrofluids as contrast agents for magnetic resonance imaging. *Journal of colloid and interface science*, Elsevier, v. 357, n. 1, p. 50–55, 2011.
- 18 NOWAK, J.; WOLF, D.; ODENBACH, S. A rheological and microscopical characterization of biocompatible ferrofluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 354, p. 98–104, 2014.
- 19 NOWAK, J. et al. The influence of hydrodynamic diameter and core composition on the magnetoviscous effect of biocompatible ferrofluids. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 26, n. 17, p. 176004, 2014.
- 20 ZEE, J. Van der. Heating the patient: a promising approach? *Annals of oncology*, Eur Soc Med Oncology, v. 13, n. 8, p. 1173–1184, 2002.
- 21 HIERGEIST, R. et al. Application of magnetite ferrofluids for hyperthermia. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 201, n. 1, p. 420–422, 1999.
- 22 CHENG, H.-C. et al. Adaptive mechanical-wetting lens actuated by ferrofluids. *Optics Communications*, Elsevier, v. 284, n. 8, p. 2118–2121, 2011.
- 23 ANDÒ, B. et al. A seismic sensor based on ipmc combined with ferrofluids. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, IEEE, v. 62, n. 5, p. 1292–1298, 2013.
- 24 GHADIRI, M. et al. Experimental investigation of a pvt system performance using nano ferrofluids. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 103, p. 468–476, 2015.
- 25 KE, H.; HUANG, W.; WANG, X. Controlling lubricant migration using ferrofluids. *Tribology International*, Elsevier, v. 93, p. 318–323, 2016.
- 26 CUNHA, F.; SOUSA, A.; MORAIS, P. The dynamic behavior of a collapsing bubble in a magnetic fluid. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 252, p. 271–275, 2002.
- 27 MALVAR S., G. R.; CUNHA, F. Nonlinear motion of an oscillating bubble immersed in a magnetic fluid. *accepted for publication in Journal of Engineering Mathematics*, Springer, 2017.

- 28 CUNHA, F.; SOBRAL, Y.; GONTIJO, R. Stabilization of concentration waves in fluidized beds of magnetic particles. *Powder technology*, Elsevier, v. 241, p. 219–229, 2013.
- 29 CUNHA, F. R.; COUTO, H.; MARCELINO, N. A study on magnetic convection in a narrow rectangular cavity. *Magnetohydrodynamics*, v. 43, n. 4, p. 421–428, 2007.
- 30 GONTIJO, R.; CUNHA, F. Experimental investigation on thermo-magnetic convection inside cavities. *Journal of nanoscience and nanotechnology*, American Scientific Publishers, v. 12, n. 12, p. 9198–9207, 2012.
- 31 SPRENGER, L.; LANGE, A.; ODENBACH, S. Thermodiffusion in ferrofluids regarding thermomagnetic convection. *Comptes Rendus Mécanique*, Elsevier, v. 341, n. 4-5, p. 429–437, 2013.
- 32 CUNHA, F. R.; SOBRAL, Y. D. Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 343, n. 1-4, p. 36–64, 2004. ISSN 03784371.
- 33 SAHOO, B.; SHARMA, H. G. MHD flow and heat transfer from continuous surface in uniform free stream of non-Newtonian fluid. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, v. 28, n. 11, p. 1467–1477, 2007. ISSN 02534827.
- 34 STONE, J. M.; OSTRIKER, E. C.; GAMMIE, C. F. Dissipation in compressible magnetohydrodynamic turbulence. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 508, n. 1, p. L99, 1998.
- 35 FELDERHOF, B.; KROH, H. Hydrodynamics of magnetic and dielectric fluids in interaction with the electromagnetic field. *The Journal of chemical physics*, AIP Publishing, v. 110, n. 15, p. 7403–7411, 1999.
- 36 RINALDI, C.; ZAHN, M. Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields. *Physics of Fluids*, v. 14, n. 8, p. 2847–2870, 2002. ISSN 10706631.
- 37 MISTRANGELO, C. Topological analysis of separation phenomena in liquid metal flow in sudden expansions. part 1. hydrodynamic flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 674, p. 120, 2011.
- 38 MISTRANGELO, C. Topological analysis of separation phenomena in liquid metal flow in sudden expansions. part 2. magnetohydrodynamic flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 674, p. 132–162, 2011.
- 39 NI, M.-J.; LI, J.-F. A consistent and conservative scheme for incompressible mhd flows at a low magnetic reynolds number. part iii: On a staggered mesh. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 231, n. 2, p. 281–298, 2012.
- 40 ALEKSANDROVA, S.; MOLOKOV, S. The structure of parallel layers in steady two-dimensional magnetohydrodynamic flows in sudden duct expansions and contractions. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Springer, v. 26, n. 1, p. 29–35, 2012.

- 41 KIM, C. N. Liquid metal magnetohydrodynamic flows in an electrically conducting rectangular duct with sudden expansion. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 89, p. 232–241, 2014.
- 42 CUNHA, F. R.; SOBRAL, Y. D. Asymptotic solution for pressure-driven flows of magnetic fluids in pipes. *Journal of Magnetism and Magnetic materials*, Elsevier, v. 289, p. 314–317, 2005.
- 43 CUNHA, F.; GONTIJO, R.; SOBRAL, Y. Symmetry breaking of particle trajectories due to magnetic interactions in a dilute suspension. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 326, p. 240–250, 2013.
- 44 GONTIJO, R. et al. The influence of a magnetic field on the mechanical behavior of a fluid interface. *Meccanica*, Springer, p. 1–19, 2016.
- 45 WANG, Z.; HOLM, C.; MÜLLER, H. W. Molecular dynamics study on the equilibrium magnetization properties and structure of ferrofluids. *Physical Review E*, APS, v. 66, n. 2, p. 021405, 2002.
- 46 BERKOV, D.; ISKAKOVA, L. Y.; ZUBAREV, A. Y. Theoretical study of the magnetization dynamics of nondilute ferrofluids. *Physical Review E*, APS, v. 79, n. 2, p. 021407, 2009.
- 47 FINLAYSON, B. A. Spin-up of ferrofluids: The impact of the spin viscosity and the Langevin function. *Physics of Fluids*, v. 25, n. 7, 2013. ISSN 10706631.
- 48 LANDERS, J. et al. Simultaneous study of brownian and néel relaxation phenomena in ferrofluids by mössbauer spectroscopy. *Nano letters*, ACS Publications, v. 16, n. 2, p. 1150–1155, 2016.
- 49 WU, K. et al. Magnetic dynamics of ferrofluids: mathematical models and experimental investigations. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 50, n. 8, p. 085005, 2017.
- 50 MARTSENYUK, M.; RAIKHER, Y. L.; SHLIOMIS, M. On the kinetics of magnetization of suspensions of ferromagnetic particles. *Sov. Phys. JETP*, v. 38, n. 2, p. 413–416, 1974.
- 51 MÜLLER, H. W.; LIU, M. Structure of ferrofluid dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 6, p. 061405, 2001.
- 52 ZOU, Y.; TUO, H.; HRNJAK, P. S. Modeling refrigerant maldistribution in microchannel heat exchangers with vertical headers based on experimentally developed distribution results. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 64, n. 1, p. 172–181, 2014.
- 53 ALAWI, O. et al. Comparative study on heat transfer enhancement and nanofluids flow over backward and forward facing steps. *J. Adv. Res. Fluid Mech. Therm. Sci.*, v. 23, p. 25–49, 2016.
- 54 DYKE, M. V. An album of fluid motion. Parabolic Press Stanford, 1982.

- 55 FLETCHER, D.; MASKELL, S.; PATRICK, M. Heat and mass transfer computations for laminar flow in an axisymmetric sudden expansion. *Computers & fluids*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 207–221, 1985.
- 56 DAĞTEKIN, İ.; ÜNSAL, M. Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 65, n. 9, p. 1133–1144, 2011.
- 57 MACAGNO, E. O.; HUNG, T.-K. Computational and experimental study of a captive annular eddy. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 28, n. 01, p. 43–64, 1967.
- 58 HABIB, M.; WHITELAW, J. The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers. *Numerical heat transfer*, v. 5, p. 145–164, 1982.
- 59 KHEZZAR, L.; WHITELAW, J.; YIANNESKIS, M. An experimental study of round sudden-expansion flows. In: *5th Symposium on Turbulent Shear Flows*. [S.l.: s.n.], 1985. v. 1, p. 5.
- 60 BACK, L.; ROSCHKE, E. Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 39, n. 3, p. 677–681, 1972.
- 61 KAIKTSIS, L.; MONKEWITZ, P. A. Global destabilization of flow over a backward-facing step. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 15, n. 12, p. 3647–3658, 2003.
- 62 MRAMOR, K.; VERTNIK, R.; ŠARLER, B. Simulation of laminar backward facing step flow under magnetic field with explicit local radial basis function collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 49, p. 37–47, 2014.
- 63 MISTRANGELO, C. *Three-dimensional MHD flow in sudden expansions*. Tese (Doutorado) — FZKA, 2005.
- 64 ALEGRETTI, C. F. *Simulação numérica do escoamento de um fluido magnético: uma proposta de algoritmo*. 2016. Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília (UnB).
- 65 MACCAIG, M. *Permanent magnets in theory and practice*. [S.l.]: Pentech Press, 1987.
- 66 GRANT, I. S.; PHILLIPS, W. R. *Electromagnetism*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- 67 LANDAU, L. D. et al. *Electrodynamics of continuous media*. [S.l.]: elsevier, 1984.
- 68 CUNHA, F.; COUTO, H. A new boundary integral formulation to describe three-dimensional motions of interfaces between magnetic fluids. *Applied mathematics and computation*, Elsevier, v. 199, n. 1, p. 70–83, 2008.

- 69 ARIS, R. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. [S.l.]: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486134895.
- 70 LELIAERT, J. et al. Regarding the néel relaxation time constant in magnetorelaxometry. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 116, n. 16, p. 163914, 2014.
- 71 FANNIN, P.; CHARLES, S. On the calculation of the neel relaxation time in uniaxial single-domain ferromagnetic particles. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 27, n. 2, p. 185, 1994.
- 72 RINALDI, C.; ZAHN, M. Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 14, n. 8, p. 2847–2870, 2002.
- 73 ROSENSWEIG, R.; NESTOR, J.; TIMMINS, R. Ferrohydrodynamic fluids for direct conversion of heat energy. In: *Materials associated with direct energy conversion*. [S.l.: s.n.], 1965.
- 74 CUNHA, F. *Fundamentals of Magnetic Fluid Hydrodynamics, in Turbulence (Book Chapter)*. [S.l.]: Poli-USP-ABCM, 2012.
- 75 CAMPOS, A. A.; GONTIJO, R. G.; CUNHA, F. R. Numerical investigation of a ferrofluid boundary layer on a flat plate. 2015.
- 76 ROSENSWEIG, R.; KAISER, R.; MISKOLCZY, G. Viscosity of magnetic fluid in a magnetic field. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 680–686, 1969.
- 77 CHANDRASEKHARAIHAH, D.; DEBNATH, L. *Continuum mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 2014.
- 78 SHLIOMIS, M. I. Comment on "Magnetoviscosity and relaxation in ferrofluids". *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, v. 64, n. November, p. 063501, 063502, 2001. ISSN 1063-651X.
- 79 RINALDI, C.; BRENNER, H. Body versus surface forces in continuum mechanics: Is the Maxwell stress tensor a physically objective Cauchy stress? *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, v. 65, n. 3, p. 1–14, 2002. ISSN 15393755.
- 80 TRUESDELL, C.; NOLL, W. The non-linear field theories of mechanics. In: *The non-linear field theories of mechanics*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 1–579.
- 81 SIQUEIRA, E.; SERIDONIO, A.; FACHINI, F. Heat transfer and magnetovortical antiresonance of a ferrofluid with a rotating magnetic field. *Journal of superconductivity and novel magnetism*, Springer, v. 26, n. 6, p. 2333–2335, 2013.
- 82 MCQUARRIE, D. *Statistical mechanics*, harper &. *New York*, 1976.
- 83 MAXWELL, J. C. V. illustrations of the dynamical theory of gases.—part i. on the motions and collisions of perfectly elastic spheres. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 19, n. 124, p. 19–32, 1860.

- 84 ODENBACH, S.; THURM, S. *Magnetoviscous effects in ferrofluids*. [S.l.]: Springer, 2002.
- 85 BLUMS, E.; CEBERS, A.; MAIOROV, M. M. *Magnetic fluids*. [S.l.]: Walter de Gruyter, 1997.
- 86 IVANOV, A.; KUZNETSOVA, O. Interparticle correlations and magnetic properties of concentrated ferrocolloids. *Colloid Journal*, Springer, v. 63, n. 1, p. 60–67, 2001.
- 87 GONTIJO, R. G. A numerical perspective on the relation between particle rotational inertia and the equilibrium magnetization of a ferrofluid. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 434, p. 91–99, 2017.
- 88 GONTIJO, R. G.; CUNHA, F. R. Numerical simulations of magnetic suspensions with hydrodynamic and dipole-dipole magnetic interactions. *accepted for publication in Physics of Fluids*, 2017.
- 89 MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- 90 ZOGHEIB, B.; BARRON, R. Velocity–pressure coupling in finite difference formulations for the navier–stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 65, n. 9, p. 1096–1114, 2011.
- 91 AGOUZAL, A.; ALLALI, K.; BINNA, S. On the stream function-vorticity finite element formulation for incompressible flow in porous media. *Advances in Numerical Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014.
- 92 TZIRTZILAKIS, E. Biomagnetic fluid flow in an aneurysm using ferrohydrodynamics principles. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 27, n. 6, p. 061902, 2015.
- 93 CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968.
- 94 KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 59, n. 2, p. 308–323, 1985.
- 95 PATANKAR, S.; SPALDING, D. *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers: A General Calculation Procedure*. [S.l.]: Intertext, 1970. ISBN 9780700201549.
- 96 TEZDUYAR, T.; GLOWINSKI, R.; LIOU, J. Petrov-galerkin methods on multiply connected domains for the vorticity-stream function formulation of the incompressible navier-stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 8, n. 10, p. 1269–1290, 1988.
- 97 GRESHO, P. M. Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulation issues. *Annual review of fluid mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 23, n. 1, p. 413–453, 1991.

- 98 SPOTZ, W. F. Accuracy and performance of numerical wall boundary conditions for steady, 2d, incompressible stream-function vorticity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Chichester; New York: Wiley, c1981-, v. 28, n. 4, p. 737–757, 1998.
- 99 ALEMI, M.; MAIA, R. A comparative study between two numerical solutions of the navier-stokes equations. *Journal of Computational & Applied Research in Mechanical Engineering (JCARME)*, v. 6, n. 2, p. 1–12, 2017.
- 100 BISWAS, G.; BREUER, M.; DURST, F. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 126, p. 362–374, 2004.
- 101 ARMALY, B. F. et al. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 127, p. 473–496, 1983.
- 102 CUNHA, M. C. C. *Métodos numéricos*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2003.
- 103 PATANKAR, S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. [S.l.]: CRC press, 1980.
- 104 LEVEQUE, R. J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. [S.l.]: Cambridge university press, 2002.
- 105 PLETCHER, R. H.; TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. [S.l.]: CRC Press, 2012.
- 106 SOD, G. A. *Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary-value problems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985.
- 107 WEINAN, E.; LIU, J.-G. Vorticity boundary condition and related issues for finite difference schemes. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 124, n. 2, p. 368–382, 1996.
- 108 KELLEY, C. T.; KEYES, D. E. Convergence analysis of pseudo-transient continuation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 35, n. 2, p. 508–523, 1998.
- 109 YANG, S.; GOBBERT, M. K. The optimal relaxation parameter for the sor method applied to the poisson equation in any space dimensions. *Applied Mathematics Letters*, Elsevier, v. 22, n. 3, p. 325–331, 2009.
- 110 KAIKTSIS, L.; KARNIADAKIS, G. E.; ORSZAG, S. A. Onset of three-dimensionality, equilibria, and early transition in flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 231, p. 501–528, 1991.
- 111 IWAI, H.; NAKABE, K.; SUZUKI, K. Flow and heat transfer characteristics of backward-facing step laminar flow in a rectangular duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 457–471, 2000.
- 112 KALITA, J. C.; GUPTA, M. M. A streamfunction–velocity approach for 2d transient incompressible viscous flows. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 62, n. 3, p. 237–266, 2010.

- 113 ODENBACH, S.; MÜLLER, H. On the microscopic interpretation of the coupling of the symmetric velocity gradient to the magnetization relaxation. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 289, p. 242–245, 2004.
- 114 ODENBACH, S.; MÜLLER, H. W. Stationary off-equilibrium magnetization in ferrofluids under rotational and elongational flow. *Physical review letters*, APS, v. 89, n. 3, p. 037202, 2002.
- 115 MCTAGUE, J. P. Magnetoviscosity of magnetic colloids. *The Journal of Chemical Physics*, AIP, v. 51, n. 1, p. 133–136, 1969.
- 116 RAMOS, D. et al. Computer simulations of magnetic fluids in laminar pipe flows. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 289, p. 238–241, 2005.
- 117 LAVROVA, O. et al. Finite element methods for coupled problems in ferrohydrodynamics. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer, v. 35, p. 160–183, 2003.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Condição de simetria do tensor de tensões

Será deduzida a influência de torques internos na quebra de simetria do tensor de tensões, e as consequências de um estado de tensão assimétrico do material. Analisando o balanço de quantidade de movimento angular \mathbf{L} de uma partícula:

$$\frac{D\mathbf{L}}{Dt} = \Sigma\mathbf{T}, \quad (\text{A.1})$$

sendo $\Sigma\mathbf{T}$ os torques atuantes em um volume infinitesimal fluido, tem-se:

$$d\mathbf{L} = (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{u})dV \quad (\text{A.2})$$

$$\implies \mathbf{L} = \int_V (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{u})dV, \quad (\text{A.3})$$

e substituindo (A.3) em (A.1) tem-se:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{u})dV = \Sigma\mathbf{T}. \quad (\text{A.4})$$

Observe que, como consequência do Teorema Transporte de Reynolds e da Equação da Continuidade, sendo $\mathbf{G} = (\mathbf{x} \times \mathbf{u})$ é possível manipular o termo à esquerda de (A.4):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho\mathbf{G}dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{G}}{Dt}dV \quad (\text{A.5})$$

$$\implies \int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u})dV = \Sigma\mathbf{T}. \quad (\text{A.6})$$

Considerando que o torque \mathbf{T} tem componentes associadas às forças de campo e de superfície, é possível explicitar tais componentes para desenvolver uma análise

profunda sobre a origem de tais torques:

$$\Sigma \mathbf{T} = \underbrace{\Sigma \mathbf{T}_s}_{\text{superfície}} + \underbrace{\Sigma \mathbf{T}_v}_{\text{volume}} \quad (\text{A.7})$$

$$\Rightarrow \int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \Sigma \mathbf{T}_s + \Sigma \mathbf{T}_v, \quad (\text{A.8})$$

e desenvolvemos os termos, tem-se:

$$\Sigma \mathbf{T}_s = \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) ds \quad ; \quad \mathbf{t} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.9})$$

$$\Sigma \mathbf{T}_v = \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} + \rho \boldsymbol{\tau}_m) dV. \quad (\text{A.10})$$

Observe que em (A.10) o termo $\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}$ é o torque associado à força gravitacional, e o termo $\rho \boldsymbol{\tau}_m$ corresponde aos torques internos presentes em um fluido magnético submetido a um campo magnético externo, ambos por unidade de volume. Dessa forma, substituindo (A.9) e (A.10) em (A.8) tem-se:

$$\underbrace{\int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV}_1 = \underbrace{\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds}_2 + \underbrace{\int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} + \rho \boldsymbol{\tau}_m) dV}_3. \quad (\text{A.11})$$

Desenvolvendo a integral 2 em notação indicial:

$$\int_S \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) ds = \int_S x_i \hat{e}_i \times (n_j \hat{e}_j \cdot \sigma_{kp} \hat{e}_k \hat{e}_p) ds \quad (\text{A.12})$$

$$= \int_S x_i \hat{e}_i \times (n_j \sigma_{jp} \hat{e}_p) ds \quad (\text{A.13})$$

$$= \int_S \epsilon_{ipm} x_i n_j \sigma_{jp} \hat{e}_m ds. \quad (\text{A.14})$$

Observe que $\epsilon_{ipm} x_i \sigma_{jp} = A_{mj}$, sendo A_{mj} as componentes de um tensor de segunda ordem \mathbf{A} . Dessa forma, utilizando o Teorema da Divergência:

$$\int_S A_{mj} n_j ds = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} A_{mj} dV. \quad (\text{A.15})$$

Inserindo A_{mj} e continuando com o desenvolvimento:

$$\int_S \epsilon_{ipm} x_i \sigma_{jp} n_j ds = \int_V \epsilon_{ipm} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i \sigma_{jp}) dV \quad (\text{A.16})$$

$$= \int_V \epsilon_{ipm} \left[\sigma_{jp} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial \sigma_{jp}}{\partial x_j} \right] dV, \quad (\text{A.17})$$

porém, sabendo que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, tem-se:

$$\int_S \epsilon_{ipm} x_i \sigma_{jp} n_j ds = \int_V \left[\epsilon_{ipm} \sigma_{ip} + \epsilon_{ipm} x_i \frac{\partial \sigma_{jp}}{\partial x_j} \right] dV \quad (\text{A.18})$$

$$\implies \int_S \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) ds = \int_V [\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})] dV. \quad (\text{A.19})$$

A equação (A.19) é uma variação do Teorema da Divergência, inicialmente proposto por [69]. Substituindo (A.19) em (A.11) tem-se:

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_V [\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})] dV + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} + \rho \boldsymbol{\tau}_m) dV, \quad (\text{A.20})$$

e agrupando os integrandos em uma única integral de volume:

$$\implies \int_V \left[\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} - \rho \boldsymbol{\tau}_m \right] dV = 0. \quad (\text{A.21})$$

Pelo Teorema da Localização e expandindo o termo $\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u})$:

$$\rho \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \rho \underbrace{\mathbf{u} \times \frac{D\mathbf{x}}{Dt}}_{\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0} - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} - \rho \boldsymbol{\tau}_m = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{x} \times \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \right] - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \rho \boldsymbol{\tau}_m. \quad (\text{A.23})$$

Observe que manipulando a Equação de Cauchy (C.1), tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} = 0, \quad (\text{A.24})$$

que corresponde ao termo entre colchetes em (A.23), que portanto é igual a zero. Dessa forma:

$$- \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \rho \boldsymbol{\tau}_m. \quad (\text{A.25})$$

Expandindo o termo $\epsilon : \sigma$:

$$\epsilon : \sigma = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \hat{e}_i \quad (\text{A.26})$$

$$= \epsilon_{123} \sigma_{23} \hat{e}_1 + \epsilon_{312} \sigma_{12} \hat{e}_3 + \epsilon_{231} \sigma_{31} \hat{e}_2 + \epsilon_{321} \sigma_{21} \hat{e}_3 + \epsilon_{213} \sigma_{13} \hat{e}_2 + \epsilon_{132} \sigma_{32} \hat{e}_1 \quad (\text{A.27})$$

$$= (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \hat{e}_1 + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) \hat{e}_2 + (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \hat{e}_3. \quad (\text{A.28})$$

Se $\tau_m = 0$ então a partir de (A.25), tem-se:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (\text{A.29})$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (\text{A.30})$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (\text{A.31})$$

$$\implies \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (\text{A.32})$$

e assim:

$$\sigma = \sigma^T. \quad (\text{A.33})$$

Se $\tau_m \neq 0$ então a partir de (A.25), tem-se:

$$\sigma \neq \sigma^T. \quad (\text{A.34})$$

Provamos assim como a existência de torques internos magnéticos, gerados pela aplicação de um campo magnético externo, provoca a quebra de simetria do tensor de tensões de um fluido magnético.

APÊNDICE B – Teorema de Brown e dedução do Tensor de Maxwell

Sabendo que \mathbf{H} é uma força por unidade de polo, a densidade local de força aparente \mathbf{F} é:

$$\mathbf{F} = \rho_V \mathbf{H} \quad (\text{B.1})$$

e, pelo Teorema de Brown:

$$\rho_V = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (\text{B.2})$$

Retomando e substituindo (2.21) em B.2, é obtida uma nova expressão para a densidade de polos em termos do campo externo \mathbf{H} :

$$\rho_V = -\mu_0 (-\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (\text{B.3})$$

$$\rho_V = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H}. \quad (\text{B.4})$$

Assim, substituindo (B.3) em (B.1) podemos escrever uma expressão para a densidade de força local aparente em termos do campo externo \mathbf{H} :

$$\mathbf{F} = \mu_0 \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{H}). \quad (\text{B.5})$$

Dada a identidade (I.17) presente no *Anexo A*:

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (\text{B.6})$$

$$\implies \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}, \quad (\text{B.7})$$

podemos reescrever a equação (B.5) na forma:

$$\mathbf{F} = \mu_0 [\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}], \quad (\text{B.8})$$

e utilizando a identidade (I.13) em apêndice:

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \frac{1}{2} \nabla H^2 - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (\text{B.9})$$

e inserindo a equação (2.6) na equação (B.9):

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \frac{1}{2} \nabla H^2 \quad (\text{B.10})$$

$$\implies \mathbf{F} = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H}) - \nabla \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right). \quad (\text{B.11})$$

Utilizando a identidade (I.20) em apêndice, tem-se a equação da força atuante em uma nuvem de dipolos (B.11):

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I} \right)}. \quad (\text{B.12})$$

APÊNDICE C – Equação do movimento de um fluido magnético

Nesta seção, será deduzida uma Equação do Movimento para o fluido em estudo (incompressível, barotrópico e magnético) a partir da Equação de Cauchy:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{C.1})$$

substituindo (2.46) em (C.1), tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^N + \boldsymbol{\sigma}^M) + \rho \mathbf{g} \quad (\text{C.2})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M + \rho \mathbf{g} \quad (\text{C.3})$$

Desenvolvendo o termo $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N = \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \quad (\text{C.4})$$

$$= -\nabla \cdot (p\mathbf{I}) + 2\mu\nabla \cdot \mathbf{D} \quad (\text{C.5})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \cdot (p\delta_{jk}\hat{e}_j\hat{e}_k) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_k \hat{e}_j \hat{e}_k + \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \hat{e}_k \hat{e}_j \right) \quad (\text{C.6})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} p \hat{e}_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \hat{e}_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \hat{e}_j \right) \quad (\text{C.7})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} p \hat{e}_i + \mu \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} \hat{e}_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \hat{e}_j \right) \quad (\text{C.8})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{C.9})$$

Formulação **BH**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M = \nabla \cdot (-p_m \mathbf{I} + \mathbf{BH}) \quad (\text{C.10})$$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{\mu_0 H^2}{2} \mathbf{I} + [\mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \mathbf{H}] \right) \quad (\text{C.11})$$

$$= \mu_0 \left[-\nabla \cdot \left(\frac{H^2}{2} \mathbf{I} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{MH}) + \nabla \cdot (\mathbf{HH}) \right] \quad (\text{C.12})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M = \mu_0 \left[-\nabla \cdot \left(\frac{H^2}{2} \right) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) \right] \quad (\text{C.13})$$

Inserindo (2.21) e utilizando a equação (B.10) em (C.13):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M = \mu_0 \left[-\nabla \cdot \left(\frac{H^2}{2} \right) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \nabla \frac{H^2}{2} - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) \right] \quad (\text{C.14})$$

Assim, simplificando os termos temos:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{BH}^M = \mu_0 [\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}] \quad (\text{C.15})$$

Substituindo (C.9) e (C.15) em (C.3), tem-se a equação do movimento de um fluido magnético utilizando a formulação **BH** do termo não isotrópico do tensor de tensões magnético:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}} \quad (\text{C.16})$$

Formulação HB Desenvolvendo o termo $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M = \nabla \cdot (-p_m \mathbf{I} + \mathbf{HB}) \quad (\text{C.17})$$

$$= \nabla \cdot \left(-\frac{\mu_0 H^2}{2} \mathbf{I} + \mathbf{H}(\mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H})) \right) \quad (\text{C.18})$$

$$= \mu_0 \left[-\nabla \cdot \left(\frac{H^2}{2} \mathbf{I} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{HM}) + \nabla \cdot (\mathbf{HH}) \right] \quad (\text{C.19})$$

$$= \mu_0 \left[-\nabla \cdot \left(\frac{H^2}{2} \right) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} + \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) \right] \quad (\text{C.20})$$

Substituindo (B.10) em (C.20) e simplificando os termos:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M = \mu_0[\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} + \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H})] \quad (\text{C.21})$$

Utilizando a identidade (I.11) contida no *Anexo A*:

$$\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) = \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (\text{C.23})$$

Substituindo (2.21) em (C.23), tem-se:

$$\mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (\text{C.24})$$

E inserindo (C.24) em (C.21) temos:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^M = \mu_0[\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H})] \quad (\text{C.25})$$

$$\implies \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{HB}^M = \mu_0[\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}] \quad (\text{C.26})$$

Substituindo (C.9) e (C.26) em (C.3), tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (\text{C.27})$$

e dividindo a equação (C.27) por ρ , é obtida a equação do movimento de um fluido magnético, através da formulação **HB**:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}} \quad (\text{C.28})$$

APÊNDICE D – Teorema de Kelvin da Circulação

Neste apêndice será deduzido o Teorema de Kelvin da circulação para a equação do movimento resultante da formulação \mathbf{HB} do Tensor de Maxwell:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho}\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\mu_0}{\rho}\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H} \quad (\text{D.1})$$

Partindo da definição de circulação Γ :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{D.2})$$

e to Teorema de Kelvin para a circulação:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (\text{D.3})$$

Substituindo (D.2) em (D.3), tem-se

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{D.4})$$

que a partir do Teorema Transporte de Reynolds é equivalente a

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{D.5})$$

Inserindo a equação do movimento (D.1) em (D.5), tem-se:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \left[-\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho}\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\mu_0}{\rho}\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H} \right] \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{D.6})$$

e partindo do Teorema de Kelvin da circulação, tem-se que as integrais associadas aos termos provenientes da parcela Newtoniana da equação constitutiva de um fluido magnético são nulas [77], serão desenvolvidos os termos associados ao Tensor de Maxwell.

Desta forma:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{D.7})$$

Dada a condição de campo uniforme ($\nabla \mathbf{H} = 0$), a equação (D.7) se reduz a

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{D.8})$$

Desenvolvendo o termo $\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l}$:

$$\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}) \nabla \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}) - \mathbf{M} \cdot \nabla (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) - (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (\text{D.9})$$

e inserindo (2.21) em (D.9) e rearranjando os termos, tem-se:

$$\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l} = [\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{l} - [(\nabla \cdot \mathbf{M})(\mathbf{H} - \mathbf{M})] \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{D.10})$$

Na condição de campo uniforme, tem-se que $\nabla \cdot \mathbf{M} = -\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Considerando a identidade vetorial (I.7), e manipulando os termos resultantes, tem-se:

$$\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{H} \cdot (\nabla \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}), \quad (\text{D.11})$$

e portanto

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C (\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{D.12})$$

Pelo Teorema de Stokes, pode-se reescrever a equação (D.12):

$$\oint_C (\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{l} = \iint_S [\nabla \times (\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M})] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (\text{D.13})$$

Desenvolvendo o termo $\nabla \times (\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M})$:

$$\nabla \times (\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times (\nabla \mathbf{M}) \quad (\text{D.14})$$

$$= \nabla \times \nabla (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}). \quad (\text{D.15})$$

Sendo $\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$ um escalar, a partir da identidade vetorial (I.4), tem-se:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (\text{D.16})$$

Portanto o Teorema da Circulação de Kelvin se aplica do caso do escoamento de um fluido magnético bidimensional, na hipótese de campo gravitacional conservativo e para um campo aplicado uniforme.

APÊNDICE E – Método das Diferenças Finitas

Neste apêndice o Método das Diferenças Finitas será exemplificado e aplicado a um problema físico com equações governantes mais simples, com o objetivo de exemplificar a formulação numérica aplicada ao sistema de equações governantes no problema investigado neste trabalho.

Frequentemente a solução de situações práticas de engenharia é conduzida por meio da solução de problemas físicos relativamente complexos, com a finalidade de determinar o comportamento de campos associados entre si (e.g. pressão, velocidade, temperatura, campo magnético induzido). Os campos destas variáveis, funções de coordenadas espaciais e temporais, são expressos na forma de equações diferenciais deduzidas por meio da aplicação de um princípio físico maior, como o princípio da conservação da massa, segunda lei de Newton, primeira lei da termodinâmica, equações de Maxwell do eletromagnetismo, a um volume infinitesimal do meio a ser estudado.

Com o intuito de exemplificar o Método das Diferenças Finitas, será descrito a seguir o método de solução do problema clássico da equação transiente da difusão de calor, que na ausência de geração interna de energia pode ser expressa por:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T, \quad (\text{E.1})$$

em que ρ é a massa específica do meio contínuo em estudo, C_p é a propriedade material calor específico à pressão constante, k é a condutividade térmica do meio, T o campo de temperatura, t a variável tempo e ∇^2 o operador escalar Laplaciano.

A solução da equação (E.1) resulta na determinação do campo de temperatura $T = T(x, y, z, t)$, em que x , y e z representam as coordenadas do espaço cartesiano tridimensional e t a variável tempo. Por ser uma função de coordenadas espaciais, a equação (E.1) deve ser resolvida em um domínio de cálculo a partir da aplicação tanto das condições de contorno, quanto das condições iniciais associadas ao campo T . En-

tretanto, tal equação não possui solução analítica e demanda técnicas computacionais e numéricas de solução.

A solução por métodos numéricos e computacionais de equações sem solução analítica, em mecânica dos fluidos, é denominada *Computational Fluid Dynamics - CFD* e consiste na proposição de técnicas eficientes de solução das equações diferenciais parciais de forma aproximada através de códigos computacionais de simulação numérica, que é a metodologia adotada para solução do problema proposto neste trabalho. Tal metodologia permite a solução de problemas similares a partir de técnicas como o Método dos Volumes Finitos (*Finite Volume Method - FVM*) e o Método dos Elementos Finitos (*Finite Elements Method - FEM*), utilizadas por [116] e [117] na solução de escoamentos laminares de fluidos magnéticos em dutos e de problemas acoplados da Ferrohodinâmica, respectivamente.

Será introduzida a técnica de solução de equações diferenciais parciais conhecida como Método das Diferenças Finitas na solução da equação (E.1). Um ponto comum entre os métodos citados anteriormente é a necessidade de discretizar o domínio de cálculo da solução. Dessa forma, ao invés da obtenção da solução de todo o domínio que seria obtida por meio de uma solução analítica, a solução será obtida para um número finito de pontos, que será então extrapolado para todo o domínio com erros numéricos associados. Um exemplo de discretização de um domínio de cálculo retangular é mostrado na figura 1.

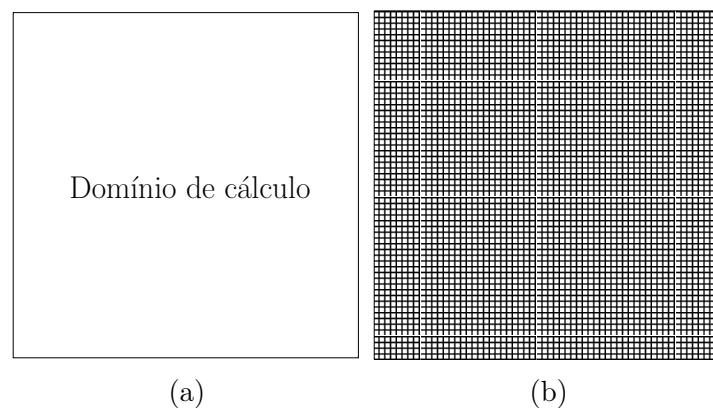


Figura 1: A figura 1a representa o domínio de cálculo neste exemplo da solução da equação do calor sem geração pelo método das diferenças finitas. A figura 1b mostra a discretização do domínio de cálculo em uma malha de 4096 nós.

Considerando uma malha de cálculo bidimensional, em que um nó interno arbitrário possui a numeração ilustrada na figura 2. Uma expansão em série de Taylor para determinar as temperaturas nos nós $[i + 1, j]$, $[i - 1, j]$, $[i, j + 1]$ e $[i, j - 1]$ em termos

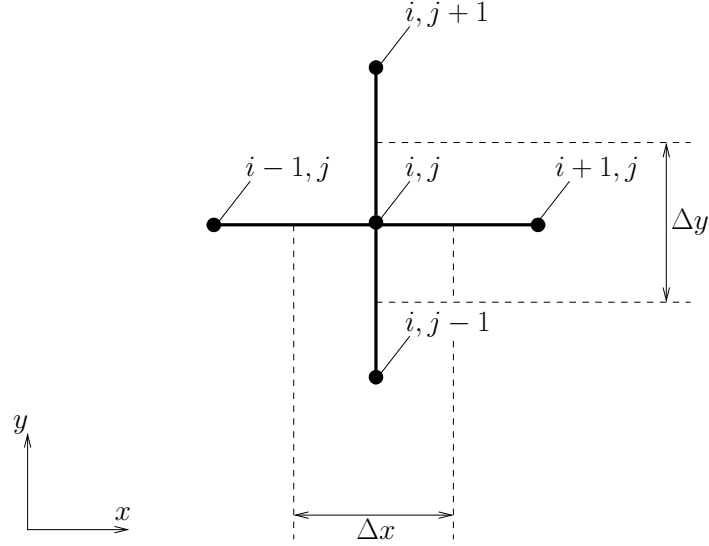


Figura 2: Ampliação de um nó interno em uma malha bidimensional

de seu valor no nó central $[i, j]$ fornece:

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (\text{E.2})$$

$$T_{i-1,j} = T_{i,j} - \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (\text{E.3})$$

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta y^3) \quad (\text{E.4})$$

$$T_{i,j-1} = T_{i,j} - \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta y^3) \quad (\text{E.5})$$

Utilizando o argumento de que os termos ordem Δx^2 e Δy^2 são muito pequenos, dado que as dimensões Δx e Δy já constituem grandezas de pequena ordem, é possível truncar a série finita expressa nas equações (E.2) a (E.5), considerando apenas termos ordem Δx e Δy . Note que este procedimento leva a uma solução aproximada da equação governante do problema. De fato, a medida que mais nós são adicionados à malha de cálculo, a tendência é a obtenção de uma solução aproximada mais próxima

da realidade física que se pretende simular. Procedendo desta forma, tem-se

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{E.6})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2,j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{E.7})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j+1/2} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad (\text{E.8})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j-1/2} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (\text{E.9})$$

A obtenção de termos envolvendo derivadas de segunda ordem depende das derivadas de primeira ordem expressas nas equações (E.6) a (E.9) e pode ser dada por:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2,j}}{\Delta x} \approx \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2} \quad (\text{E.10})$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j+1/2} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,j-1/2}}{\Delta y} \approx \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta y^2}. \quad (\text{E.11})$$

A discretização de termos de derivada temporal segue o mesmo raciocínio, de modo que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} \approx \frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^p}{\Delta t}. \quad (\text{E.12})$$

Neste caso o índice superior p denota o instante de tempo anterior, enquanto o índice $p + 1$ denota o valor da temperatura no instante atual. Determinadas as expressões para os termos associados às derivadas espaciais e temporais que surgem na equação da difusão de calor, é possível escrever esta equação diferencial parcial em sua forma discretizada. Explicitando a equação (E.1) em termos das suas componentes bidimensionais, tem-se:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (\text{E.13})$$

em que α é uma propriedade do meio, conhecida como difusividade térmica, dada por

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}. \quad (\text{E.14})$$

Utilizando as derivadas expressas nas equações (E.10), (E.11) e (E.12), a equação (E.15) é descrita em sua forma discretizada como:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^p}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^r + T_{i-1,j}^r - 2T_{i,j}^r}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^r + T_{i,j-1}^r - 2T_{i,j}^r}{\Delta y^2}. \quad (\text{E.15})$$

Note que o índice superior, referente ao instante de tempo em que os termos do lado direito da equação são considerados, foi definido de forma arbitrária na equação (E.15) como r . Na verdade existem três opções para o instante de tempo em que se deseja avaliar estes termos. Na formulação a ser utilizada no presente contexto, o índice r será feito igual a p , isto implica que a solução do valor da temperatura em cada nó evoluirá no tempo de acordo com os valores das temperaturas dos nós vizinhos em um instante de tempo anterior. Desta forma, para simplificar a equação (E.15) antes de prosseguir, considera-se neste momento uma malha de cálculo na qual $\Delta x = \Delta y$ e isola-se o termo $T_{i,j}^{p+1}$. Procedendo desta maneira, obtém-se:

$$T_{i,j}^{p+1} = F_O(T_{i+1,j}^p + T_{i-1,j}^p + T_{i,j+1}^p + T_{i,j-1}^p) + (1 - 4F_O)T_{i,j}^p, \quad (\text{E.16})$$

em que F_O é definido como número de Fourier, um parâmetro adimensional expresso por $F_O = \alpha \Delta t / \Delta x^2$. O valor do número de Fourier é conhecido a partir do momento em que a malha de cálculo é construída e o passo de tempo é imposto pelo usuário. A equação (E.16) traz a seguinte informação: o valor da temperatura de um nó interno arbitrário no instante de tempo atual em uma malha de cálculo, que possui como objetivo representar um domínio físico espacial onde se deseja conhecer informações sobre o campo de temperatura de um problema físico em que o meio encontra-se estacionário, pode ser determinado através dos valores das temperaturas dos nós vizinhos avaliados em um instante de tempo anterior e de seu próprio valor também avaliados em um instante de tempo anterior.

Desta forma, pode-se propor um algoritmo geral para a determinação dos campos de temperatura (em problemas de condução de calor, ou seja, meio estacionário) em superfícies de forma arbitrária da seguinte forma:

1. Constrói-se uma malha de cálculo que represente o domínio discretizado no qual deseja-se conhecer o campo de temperatura e como o mesmo evolui no tempo a partir de uma condição inicial;
2. Impõe-se uma condição de contorno para o problema, na qual as temperaturas

dos nós de fronteira são conhecidas;

3. Impõe-se também uma condição inicial para o valor de todos os nós internos que compõem a malha de cálculo;
4. A partir da equação (E.16) os valores das temperaturas em todos os nós internos da malha de cálculo no instante de tempo atual são determinados;
5. O processo iterativo de evolução temporal da solução continua até que a maior variação entre a temperatura de um nó interno arbitrário avaliada entre dois instantes consecutivos de tempo seja menor que uma tolerância pré-estabelecida pelo usuário;
6. Após a convergência da solução o processo termina.

ANEXOS

ANEXO A – Identidades Vetoriais e Tensoriais

Este anexo é baseado no livro de matemática de vetores e tensores cartesianos de Aris, 2012 [69], e apresenta identidades vetoriais e tensoriais necessárias à dedução de equações presentes neste trabalho.

Identidades vetoriais

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (\text{I.1})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{I.2})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{I.3})$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{I.4})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$\nabla(\phi_1 \phi_2) = \phi_1 \nabla \phi_2 + \phi_2 \nabla \phi_1 \quad (\text{I.6})$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi \quad (\text{I.7})$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A} \quad (\text{I.8})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{I.9})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{I.10})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (\text{I.11})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{I.12})$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{I.13})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi_1 \times \nabla \phi_2) = 0 \quad (\text{I.14})$$

Identidades tensoriais

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{I.15})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{I.16})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{I.17})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{A} \quad (\text{I.18})$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \quad (\text{I.19})$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{I}) = \nabla \phi \quad (\text{I.20})$$