

**UNB – UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FGA – FACULDADE GAMA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

**RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA COM  
BASE EM *compressive sensing* USANDO INFORMAÇÃO A PRIORI  
ESTRUTURAL EM ABORDAGEM ESTOCÁSTICA**

**DANIEL LUCAS FERREIRA E ALMEIDA**

**ORIENTADOR: PROF. DR. CRISTIANO JACQUES MIOSSO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM  
ENGENHARIA BIOMÉDICA**

**PUBLICAÇÃO: 061A/2017**

**BRASÍLIA/DF, 15 DE FEVEREIRO DE 2017**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE UNB GAMA  
ENGENHARIA BIOMÉDICA

RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA  
COM BASE EM *COMPRESSIVE SENSING* USANDO INFORMAÇÃO A  
*PRIORI* ESTRUTURAL EM ABORDAGEM ESTOCÁSTICA

DANIEL LUCAS FERREIRA E ALMEIDA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À FACULDADE UNB GAMA DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA BIOMÉDICA.

APROVADA POR:

  
\_\_\_\_\_  
CRISTIANO JACQUES MIOSSO RODRIGUES MENDES, DR. - FGA / UNB  
(ORIENTADOR)

  
\_\_\_\_\_  
VINÍCIUS CARVALHO RISPOLI, DR. - FGA / UNB  
(EXAMINADOR EXTERNO)

  
\_\_\_\_\_  
MYLÈNE CHRISTINE QUEIROZ DE FARIAS, DRA. - ENE / UNB  
(EXAMINADORA EXTERNA)

BRASÍLIA, 15 DE FEVEREIRO DE 2017

**FICHA CATALOGRÁFICA**

FERREIRA E ALMEIDA, DANIEL LUCAS

Reconstrução de imagens de ressonância magnética com base em *compressive sensing* usando informação a priori estrutural em abordagem estocástica

[Distrito Federal], 2017.

83p., 210 × 297 mm (FGA/UnB Gama, mestrado em engenharia biomédica, 2017).

Dissertação de mestrado em engenharia biomédica, Faculdade UnB Gama, programa de pós-graduação em engenharia biomédica.

- |                          |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|
| 1. Imageamento médico    | 2. Processamento digital de sinais |
| 3. Ressonância magnética | 4. Inferência estocástica          |
| I. FGA UnB/UnB.          | II. Título (série)                 |

**REFERÊNCIA**

FERREIRA E ALMEIDA, DANIEL LUCAS (2017). Reconstrução de imagens de ressonância magnética com base em *compressive sensing* usando informação a priori estrutural em abordagem estocástica. Dissertação de mestrado em engenharia biomédica, Publicação 061A/2017, Programa de Pós-Graduação, Faculdade UnB Gama, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 83p.

**CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Daniel Lucas Ferreira e Almeida

TÍTULO: Reconstrução de imagens de ressonância magnética com base em *compressive sensing* usando informação a priori estrutural em abordagem estocástica

GRAU: Mestre

ANO: 2017

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.



## RESUMO

A utilização de imagens obtidas por meio da ressonância magnética (do inglês *magnetic resonance*, ou *MR*) auxilia no diagnóstico e no acompanhamento das mais diversas patologias que afetam o corpo humano. Ela apresenta, contudo, um custo mais elevado do que outras técnicas de imageamento que não são capazes de gerar imagens com a mesma qualidade objetiva, e isso pode dificultar o trabalho dos profissionais de saúde. Esse custo mais elevado se deve ao alto valor do equipamento e de sua manutenção, bem como ao baixo número de exames que podem ser realizados por dia, quando comparados com os de técnicas como a tomografia computadorizada. Além de seu processo de aquisição ser inerentemente mais lento, uma vez que sua duração depende da alta quantidade de medidas extraídas pelo *scanner*.

De modo a diminuir a quantidade de medidas necessária, técnicas de reconstrução alternativas às tradicionais vêm sendo estudadas, como as que se baseiam em *compressive sensing* (*CS*). O *CS* permite reconstruir um sinal a partir de uma quantidade de medidas muito inferior à estabelecida pelo critério de Nyquist. Além disso, o imageamento por ressonância magnética atende aos requisitos mínimos para a aplicação dessa técnica: o sinal possui uma representação esparsa num domínio transformado e as medidas adquiridas pelo *scanner* já são naturalmente codificadas. Essas técnicas têm sido eficientes ao diminuir a quantidade de medidas e garantir uma boa qualidade objetiva da imagem reconstruída, mas ainda há potencial para que essa diminuição seja maior. Uma das alternativas é encontrar uma transformada esparsificante que torne o sinal o mais esparsivo possível, como a transformada de Fourier bidimensional, transformadas baseadas em *wavelets* e a pré-filtragem.

Além disso, a utilização de informação a priori aliada aos algoritmos de reconstrução que se baseiam em *compressive sensing* também é utilizada para diminuir a quantidade de medidas. Essa informação pode ser caracterizada por dados estatísticos prévios da imagem ou com base em informações determinísticas sobre ela.

Neste trabalho, propomos uma modelagem estocástica da informação a priori a ser utilizada em algoritmos de reconstrução de imagens de ressonância magnéticas baseados em *compressive sensing* com pré-filtragem. Nossa abordagem gera um espalhamento probabilístico em torno de um ponto que apresenta o potencial de pertencer ao suporte da versão esparsa da imagem a ser reconstruída. Esse espalhamento proposto tem o objetivo de garantir que a imagem possa ser reconstruída, mesmo em situações nas quais o ponto do suporte pode mudar de posição – quando um paciente se movimenta dentro do *scanner*, por exemplo.

De modo a validar essa técnica, nós a aplicamos a sinais de domínio unidimensional, bidimensional, imagens de fantasmas de Shepp-Logan e imagens reais de RM. Os resultados dos testes sistemáticos em sinais de domínio unidimensional mostram que essa abordagem

estocástica apresenta melhores resultados de reconstrução do que aquele que não utiliza informação a priori, apresentando um  $\overline{SER}$  superior em cerca de  $100dB$  para alguns valores de medidas  $\ell$ . Em sinais de domínio bidimensional e de fantasmas, apresentamos os resultados de um estudo de caso envolvendo a reconstrução de um sinal de cada tipo. Os resultados corroboram o que foi encontrado com os sinais de domínio unidimensional, com a abordagem estocástica apresentando valores de SER superiores em cerca de  $10dB$  quando comparada com a abordagem determinística, apesar da pouca significância estatística .

Os testes em imagens de *MR* incluíram a reconstrução de imagens deslocadas para simular uma possível situação de movimento do paciente durante a aquisição do exame. Além disso, foi analisada a influência do número de linhas radiais na reconstrução, bem como da matriz de covariância usada para gerar a função de espalhamento. Os resultados mostram que a abordagem estocástica apresenta sempre um bom desempenho quando comparada com as demais e, muitas vezes, esse desempenho é superior ao das outras técnicas. Em alguns pontos críticos, por exemplo, o valor do SER para a abordagem estocástica chega a ser superior em  $6dB$  com relação ao caso ideal e em mais de  $10dB$  para o caso não-ideal. Algo importante de se destacar é o fato de a abordagem estocástica apresentar um bom desempenho constantemente (um valor médio de *SER* de  $21dB$  e do índice *SSIM* de  $0,7$ ), inclusive em casos em que as demais falham.

Os resultados encontrados permitem agora que outras formas de explorar essa informação a priori possam ser investigados, para diminuir ainda mais a quantidade de medidas necessária para a reconstrução. Mas é também importante realizar um estudo teórico para quantificar a probabilidade de reconstrução em função da representação estocástica da informação a priori e da quantidade de medidas disponível.

## ABSTRACT

The use of images obtained through MRI helps in the diagnosis and follow-up of the most diverse pathologies that affect the human body. However, it presents a higher cost than other imaging techniques that are not capable of generating images with the same objective quality, and this may hinder the work of health professionals. This higher cost is due to the high value of the equipment and its maintenance, as well as to the low number of tests that can be carried out per day, when compared to techniques such as the computed tomography. Besides its acquisition process is inherently slower, since its duration depends on the high amount of measurements extracted by the scanner.

In order to reduce the amount of measurements required, alternatives to traditional reconstruction techniques have been studied, such as those based on compressive sensing. The *CS* allows you to reconstruct a signal from a quantity of measures much lower than the one established by the Nyquist theorem. In addition, magnetic resonance imaging meets the minimum requirements for the application of this technique: the signal has a sparse representation in a transformed domain and the measurements acquired by the scanner are already encoded naturally. These techniques have been effective in decreasing the number of measurements and ensuring a good objective quality of the reconstructed image, but there is still potential for such a decrease. One of the alternatives is to find a sparsifying transform that makes the signal as sparse as possible, such as the two-dimensional Fourier transform, wavelet-based transforms, and pre-filtering.

Besides, the use of a prior information coupled with reconstruction algorithms based on *compressive sensing* is also used to decrease the number of measurements. This information may be characterized by prior statistical data of the image or based on deterministic information about it.

In this work, we propose a stochastic modeling of the prior information to be used in reconstruction algorithms of magnetic resonance images based on *compressive sensing* with pre-filtering. Our approach generates a probabilistic spreading around a point that has the potential to belong to the support of the sparse version of the image to be reconstructed. This proposed spread is intended to ensure that the image can be reconstructed, even in situations when the position of the support point may change - when a patient moves within the scanner, for example.

In order to validate this technique, we apply it to one-dimensional, two-dimensional domain signals, Shepp-Logan phantom images, and real *MRI* images. The results of the systematic tests on one-dimensional domain signals show that this stochastic approach

presents better reconstruction results than those that do not use the prior information, with a  $\overline{SER}$  100dB greater for some number of measures  $\ell$ . In two-dimensional domain signals and phantoms, we present the results of a case study involving the reconstruction of a signal of each type. The results corroborate what was found with one-dimensional domain signals, with the  $SER$  for the stochastic approach being 10dB higher than when the deterministic approach was used, despite the low statistical significance.

The MR imaging tests included the reconstruction of shifted images to simulate a possible patient movement situation during the acquisition of the examination. In addition, the influence of the number of radial lines in the reconstruction was analyzed, as well as the covariance matrix used to generate the spreading function. The results show that the stochastic approach always performs well when compared to the others, and this performance is often superior to other techniques. When considering some critic points, for instance, the  $SER$  value for the stochastic approach is 6dB higher than the ideal prior approach, and more than 10dB higher than the non-ideal. Something important to emphasize is that the stochastic approach performs consistently well (a  $SER$  mean value of around 21dB and a SSIM index of around 0,7), even when the others fail.

Those results will now allow the investigation of other ways to explore this prior information in order to further reduce the amount of measures required for reconstruction. But it is also important to carry out a theoretical study to quantify the reconstruction probability as a function of the stochastic representation of the prior information and of the quantity of measures available.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Contextualização e definição do problema . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	5
1.2.1	Objetivo geral . . . . .	5
1.2.2	Objetivos específicos . . . . .	5
1.3	Justificativa . . . . .	6
1.4	Estrutura da dissertação . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Fundamentação teórica</b>	<b>8</b>
2.1	Imageamento por Ressonância Magnética . . . . .	8
2.1.1	Codificação espacial . . . . .	11
2.2	<i>Compressive Sensing</i> . . . . .	14
2.2.1	Algoritmos de Otimização Numérica para Resolver Sistemas Lineares Subdeterminados . . . . .	16
2.2.2	Pré-filtragem . . . . .	20
2.3	<i>Compressive Sensing e Informação a Priori</i> . . . . .	21
2.3.1	Informação a priori aplicada ao algoritmo de minimização da $\ell_p$ . . . . .	22
2.3.2	Informação a priori e pré-filtragem . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>28</b>

3.1	<b>Metodologia de Implementação</b>	28
3.1.1	Modelagem estatística da informação a priori	28
3.2	<b>Metodologia Experimental</b>	35
3.2.1	Sinais de Domínio Unidimensional	35
3.2.2	Sinais de Domínio Bidimensional	39
3.2.3	Imagens de Fantomas	41
3.2.4	Imagens Reais de <i>MRI</i>	41
3.3	<b>Metodologia de Validação</b>	43
3.3.1	Sinais de Domínio Unidimensional	43
3.3.2	Sinais de Domínio Bidimensional	44
3.3.3	Imagens de Fantomas	44
3.3.4	Imagens Reais de <i>MRI</i>	45
4	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>47</b>
4.1	<b>Sinais de Domínio Unidimensional</b>	47
4.2	<b>Sinais de Domínio Bidimensional</b>	49
4.3	<b>Imagens de Fantomas</b>	50
4.4	<b>Imagens Reais de <i>MRI</i></b>	51
4.4.1	Análises Quantitativas	51
4.4.2	Análises Qualitativas	67
5	<b>Conclusão</b>	<b>75</b>
A	<b>Publicações</b>	<b>83</b>

## LISTA DE TABELAS

4.1	Relação sinal-erro média ( $\overline{SER}$ ) e desvio padrão ( $\sigma$ ) para os sinais de domínio unidimensional reconstruídos. . . . .	49
4.2	Relação sinal-erro ( $SER$ ) para o sinal de domínio bidimensional reconstruído.	50
4.3	Relação sinal-erro para as reconstruções do fantoma de Shepp-Logan deslocado. . . . .	50

## LISTA DE FIGURAS

2.1	(a) Scanner de <i>MRI</i> encontrado comercialmente e, ao lado, (b) um esquema interno com algumas de suas estruturas. . . . .	9
2.2	Comparação entre o decaimento do valor do módulo da componente transversal $M_{xy}$ com o crescimento do valor do módulo da componente longitudinal $M_z$ após uma excitação no plano $xy$ . . . . .	10
2.3	Variação do módulo de $\mathbf{B}$ e de $\omega_0$ ao se aplicar o gradiente variando linearmente ao longo de algum dos eixos. . . . .	12
2.4	Diagrama que apresenta a sequência de gradientes aplicados para uma sequência $\frac{\pi}{2} - \tau - \pi - \tau$ . . . . .	12
2.5	Em (a), fantoma de Shepp-Logan usado nas reconstruções e, em (b), as $\ell = 15$ linhas extraídas do espaço- $k$ para reconstruí-lo. . . . .	19
2.6	Fantomas de Shepp-Logan reconstruídos a partir das medidas obtidas do espectro em frequência da imagem original indicada na Fig. 2.5. . . . .	26
2.7	Diagrama que esquematiza o procedimento de pré-filtragem utilizando os três filtros mostrados em 2.14, seguido da minimização da $\ell_p$ de $x_{fn}$ e a composição da imagem final. . . . .	27
2.8	Diagrama que esquematiza o procedimento de pré-filtragem utilizando $n$ filtros com informação a priori, seguido da minimização da $\ell_p$ de $x_{fn}$ e a composição da imagem final. . . . .	27
3.1	Funções de probabilidade $\mathbf{p}_i$ a partir dos pontos $\hat{x}_i$ que pertencem ao suporte $\Phi$ . . . . .	30
3.2	Função de probabilidade $\mathbf{P}$ obtida ao se utilizar a equação 3.2 às funções mostradas na Fig. 3.1(b). . . . .	31
3.3	Função de probabilidade $\mathbf{P}$ para uma imagem de tamanho $64 \times 64$ . . . . .	33

3.4	Função de probabilidade $\mathbf{P}$ para as versões filtradas de um fantoma de Shepp-Logan de tamanho $256 \times 256$ . . . . .	35
3.5	Corte transversal do crânio obtido do bando de dados <i>BIRN</i> . A imagem possui dimensão $512 \times 512$ . . . . .	36
3.6	Função de probabilidade $\mathbf{P}$ para as versões filtradas de um corte transversal real do crânio humano, de dimensão $512 \times 512$ . . . . .	37
3.7	Construção de um sinal esparso $\hat{\mathbf{x}}$ a partir de suas posições de suporte. . . . .	38
3.8	Construção de um sinal esparso $\hat{\mathbf{x}}$ de domínio bidimensional a partir de suas posições de suporte. . . . .	40
3.9	Representação do sinal $\hat{\mathbf{x}}$ e de sua representação deslocada, com as componentes filtradas a serem utilizadas como informação a priori. . . . .	42
3.10	Representação do sinal $\hat{\mathbf{x}}$ e de sua representação deslocada, com as componentes filtradas a serem utilizadas como informação a priori. . . . .	43
4.1	Histogramas que apresentam o valor médio da <i>SER</i> e sua distribuição em torno da $\overline{SER}$ . . . . .	48
4.2	$\overline{SER}$ para diferentes valores de medidas $\ell$ variando no intervalo $\ell = [\eta + 1, 5\eta]$ . . . . .	49
4.3	Comparação do valor da <i>SER</i> obtido ao se reconstruir a imagem do crânio utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor de <i>SER</i> de 20,87dB e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de <i>SER</i> de 16,02dB. . . . .	52
4.4	Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor para o índice <i>SSIM</i> de 0,638 e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de 0,526. . . . .	53

4.5	Regiões de suporte para as diferentes versões filtradas do corte transversal do crânio original, considerando diferentes porcentagens de informação a priori. . . . .	54
4.6	Comparação do valor da <i>SER</i> obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $2 \times 2$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor de <i>SER</i> de 20,85dB e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de <i>SER</i> de 16,03dB. . . . .	56
4.7	Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $2 \times 2$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor para o índice <i>SSIM</i> de 0,638 e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de 0,526. . . . .	57
4.8	Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em $2 \times 2$ pixels, compara-se os valores de <i>SER</i> obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho. . . . .	58
4.9	Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em $2 \times 2$ pixels, compara-se os valores do índice SSIM obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho. . . . .	59
4.10	Comparação do valor da <i>SER</i> obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $2 \times 2$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento $\mathbf{P}$ foi gerada utilizando a matriz de covariância $\Sigma_2$ . . . . .	60
4.11	Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $2 \times 2$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento $\mathbf{P}$ foi gerada utilizando a matriz de covariância $\Sigma_2$ . . . . .	61

4.12	Comparação do valor da <i>SER</i> obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $7 \times 8$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor de <i>SER</i> de 20,86dB e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de <i>SER</i> de 16,02dB. . . . .	62
4.13	Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $7 \times 8$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística ideal: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor para o índice <i>SSIM</i> de 0,637 e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de 0,524. . . . .	63
4.14	Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em $7 \times 8$ pixels, compara-se os valores de <i>SER</i> obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho. . . . .	64
4.15	Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em $7 \times 8$ pixels, compara-se os valores do índice SSIM obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho. . . . .	64
4.16	Comparação do valor da <i>SER</i> obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $7 \times 8$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento $\mathbf{P}$ foi gerada utilizando a matriz de covariância $\Sigma_2$ . . . . .	65
4.17	Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em $7 \times 8$ pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento $\mathbf{P}$ foi gerada utilizando a matriz de covariância $\Sigma_2$ . . . . .	66
4.18	Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 5% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento $2 \times 2$ e $\Sigma_1$ . . . . .	69

4.19	Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 15% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento $2 \times 2$ e $\Sigma_1$ . . . . .	70
4.20	Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 40% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento $2 \times 2$ e $\Sigma_1$ . . . . .	71
4.21	Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 5% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento $7 \times 8$ e $\Sigma_2$ . . . . .	72
4.22	Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 15% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento $7 \times 8$ e $\Sigma_2$ . . . . .	73
4.23	Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 35% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento $7 \times 8$ e $\Sigma_2$ . . . . .	74

## LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

- $CT$  – Tomografia Computadorizada (do inglês, *Computed Tomography*)  
 $MR$  – Ressonância Magnética (do inglês, *Magnetic Resonance*)  
 $MRI$  – Imageamento por Ressonância Magnética (do inglês, *Magnetic Resonance Imaging*)  
 $CS$  – *Compressive Sensing*  
 $DCT$  – Transformada Discreta de Cossenos (do inglês, *Discrete Cosine Transform*)  
 $RPCA$  – Análise de Componentes Principais Robusta (do inglês, *Robust Principal Components Analysis*)  
 $RVM$  – Máquina de Vetores de Relevância (do inglês, *Relevance Vector Machine*)  
 $MCMC$  – Monte Carlo via Cadeia de Markov (do inglês, *Markov chain Monte Carlo*)  
 $VB$  – Bayesiano Variacional (do inglês, *Variational Bayesian*)  
 $BEPA$  – Algoritmo Bayesiano de Busca Evolutiva (do inglês, *Bayesian Evolutionary Pursuit Algorithm*)  
 $NP$  – Produto Normal (do inglês, *Normal Product*)  
 $fMRI$  – Imageamento Funcional por Ressonância Magnética (do inglês, *Functional Magnetic Resonance Imaging*)  
 $RF$  – Radiofrequência (do inglês, *Radio Frequency*)  
 $2DFT$  – Transforma de Fourier Bidimensional (do inglês, *Two-Dimensional Fourier Transform*)  
 $TV$  – Variação Total (do inglês, *Total Variation*)  
 $IRLS$  – Mínimos Quadrados Iterativos Reponderados (do inglês, *Iterative Reweighted Least Squares*)  
 $BIRN$  – *Biomedics Informatics Research Network*  
 $\overline{SER}$  – Relação Sinal-Erro Média (do inglês, *Mean Signal-to-Error Ratio*)  
 $SER$  – Relação Sinal-Erro (do inglês, *Signal-to-Error Ratio*)  
 $SSIM$  – Índice de Similaridade Estrutural (do inglês, *Structural Similarity Index*)  
**B** – Campo Magnético Uniforme  
**M** – Vetor Magnetização  
 $\gamma$  – Constante Giromagnética  
 $M_{xy}$  – Componente Transversal do Vetor Magnetização  
 $M_z$  – Componente Longitudinal do Vetor Magnetização  
 $\omega_0$  – Frequência de Larmor  
 $T_1$  – Tempo de relaxação da Componente  $M_z$   
 $T_2$  – Tempo de relaxação da Componente  $M_{xy}$

- $\mathbf{x}$  – Sinal Vetorizado
- $\hat{\mathbf{x}}$  – Representação de  $\mathbf{x}$  em Domínio Esparso
- $\mathbf{T}$  – Transformada Esparsificante
- $\mathbf{T}^{-1}$  – Transformada Esparsificante Inversa
- $\eta$  – Esparsidade
- $\mathbf{M}$  – Matriz de Medidas
- $\mathbf{b}$  – Vetor de Medidas
- $\Phi$  – Região de Suporte
- $\Phi_o$  – Região de Suporte Não-Ideal
- $\Phi_n$  – Região de Suporte Ideao
- $\mathbf{P}$  – Função de Espalhamento

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Técnicas de imageamento médico têm permitido, ao longo das últimas décadas, uma maior eficiência no diagnóstico de patologias, e no acompanhamento de pacientes durante tratamento ou após a realização dos mais diversos procedimentos médicos [1]. Ao gerar uma representação estática ou dinâmica do corpo humano, ou de parte dele, o profissional de saúde possui uma importante ferramenta para realizar o seu trabalho de forma adequada. A radiografia [2, 3], a tomografia computadorizada (*CT*, do inglês *computed tomography*) [4, 5], a cintilografia [6, 7], a ultrassonografia [8, 9] e a ressonância magnética (*MR*, do inglês *magnetic resonance*) [10, 11] são exemplos de técnicas que se tornaram mais populares e acessíveis à população nos últimos anos. A formação da imagem nas três primeiras técnicas, porém, depende de um estímulo físico inicial que pode trazer riscos à saúde não só do paciente, mas também de quem opera o equipamento. Os raios-X que incidem sobre o paciente, no caso da radiografia e *CT*, por exemplo, têm sido relacionados ao desenvolvimento de alguns tipos de câncer; assim como as substâncias utilizadas na medicina nuclear como contraste, uma vez que elas emitem radiação ionizante ao interagir com os tecidos do organismo [12–14]. A ultrassonografia não oferece riscos à saúde, mas possui limitações quanto à qualidade da imagem produzida, o que impede análises que necessitam de um certo nível de detalhamento [1].

O imageamento por ressonância magnética (*MRI*, do inglês *magnetic resonance imaging*) permite gerar imagens com boa qualidade sem que haja riscos para a saúde dos indivíduos, uma vez que ele utiliza apenas sinais na faixa de rádio-frequência para estimular as áreas a serem escaneadas [1, 10, 11, 15]. Além de gerar imagens com um melhor contraste do que o que é encontrado nas outras técnicas, o *MRI* pode também produzir imagens funcionais e dinâmicas, que consistem em sequências de imagens que mostram o movimento de um órgão ou a circulação do sangue em vasos sanguíneos, por exemplo; e, até mesmo, as áreas do cérebro que são ativadas durante uma certa atividade [16–19].

O custo de um exame de *MRI*, porém, é mais alto que o das técnicas anteriormente

mencionadas, o que é explicado, em parte, pelas altas despesas em manutenção do equipamento. Outro fator que eleva esse custo é a duração desse exame [1]. Para a formação da imagem por *MR*, é necessário que o *scanner* obtenha uma quantidade mínima de medidas após excitar o tecido analisado. Porém, o processo de excitação do tecido e de posterior aquisição das medidas deve obedecer trajetórias predeterminadas que, em geral, não são de fácil implementação. Dessa forma, são necessárias várias excitações intercaladas para se adquirir a quantidade mínima de amostras para a reconstrução de uma imagem com uma boa qualidade. Isso impede, por exemplo, que uma quantidade mínima de pessoas seja atendida de modo a tornar os custos operacionais menos relevantes para o custo final do exame. Além disso, o paciente deve se manter praticamente imóvel por um longo período de tempo, o que aumenta seu desconforto durante o procedimento e aumenta os riscos de ele se mexer e formar uma imagem incoerente, em decorrência de aquisições incorretas [10, 11, 20, 21].

Por esses motivos, é de extrema relevância que os algoritmos de reconstrução levem em consideração a limitada quantidade de medidas que podem ser extraídas pelo *scanner* de *MRI*. Os algoritmos tradicionais, que são encontrados em máquinas comerciais, são a interpolação espectral e a retroprojeção filtrada, que necessitam de uma grande quantidade de medidas para reconstruir uma imagem com qualidade aceitável. Mais recentemente, técnicas de reconstrução de imagens que baseiam-se em *compressive sensing* (*CS*) têm obtido imagens reconstruídas com qualidade equivalente e, às vezes, superior às das técnicas tradicionais mencionadas, com uma quantidade de medidas consideravelmente menor [20, 21]. A teoria que sustenta o *CS* baseia-se no fato de que sinais possuem alguma representação em um domínio esparsa e, assim, apenas alguns coeficientes – um número bem inferior ao proposto por Nyquist – já seriam suficientes para representá-los de forma satisfatória [22–24]. Ainda de acordo com essa teoria, quanto mais esparsa for a representação do sinal, menor a quantidade de medidas necessária para reconstruí-lo. Dessa forma, diferentes transformadas esparsificantes vêm sendo testadas para tornar essa representação cada vez mais esparsa, como transformadas no domínio de *wavelets*, a transformada discreta de cossenos (*DCT*, do inglês *discrete cosine transform*) e técnicas de pré-filtragem [25, 26].

Uma extensão da teoria de *CS*, aplicada ao problema de reconstrução de imagens de *MRI*, propõe a utilização de informações sobre a imagem que já são conhecidas para que uma menor quantidade de medidas seja utilizada pelo algoritmo de reconstrução. Essa informação de suporte poderia vir, por exemplo, devido à redundância estrutural do que é escaneado pela máquina: quando a cabeça de um paciente é analisada, espera-se encontrar algo que assemelha-se à estrutura de um crânio. Esse tipo de informação também poderia ser utilizada ao se reconstruir imagens de *MRI* dinâmicas ou funcionais,

nas quais apenas algumas estruturas se alteram ao longo do tempo. Uma das primeiras referências à utilização de informação a priori foi feita em [27]. Nesse artigo, Lauterbur *et al.* descrevem não só as vantagens que poderiam ser obtidas ao se utilizar informações já conhecidas da imagem a ser reconstruída, como o ganho em velocidade de reconstrução e qualidade da imagem, mas também destaca o fato de que essas informações poderiam trazer um erro associado e, dessa forma, prejudicar a qualidade da imagem reconstruída.

Desde então, diferentes abordagens que exploram a utilização de informação a priori na reconstrução de sinais a partir de um limitado número de medidas têm sido implementadas, inclusive em outros contextos além do imageamento médico. Algumas dessas abordagens manipulam o sinal esparsificado para gerar informações a priori adequadas, como em [28] e em [29]. Este utiliza o algoritmo de análise de componentes principais robusto (*RPCA*, do inglês *robust principal components analysis*) para decompor o *frame* obtido de um exame de *MR* dinâmico numa matriz de baixo posto (*low-rank matrix*) e em suas componentes esparsas, que é usado como informação a priori. Já o trabalho [28] utiliza a representação no espaço de *wavelets* da informação de borda da imagem combinada com as medidas obtidas para reconstruir a imagem final. Em [30], por outro lado, a descrição estatística da fonte que gera os sinais estocásticos é utilizada como informação a priori para reconstruí-los utilizando o algoritmo de *CS*.

O método Bayesiano é outra abordagem baseada em conceitos estatísticos para a modelagem da informação a priori a ser utilizada nos algoritmos de *CS*. Nesse método, todos os sinais desconhecidos são tratados como variáveis estocásticas às quais são atribuídas distribuições de probabilidade. A informação a priori é modelada de acordo com uma função probabilística que represente a esparsidade do sinal esparsificado a ser reconstruído como a função de densidade de Laplace usada em [31], no qual o problema de otimização é resolvido usando o algoritmo de máquina de vetores de relevância (*RVM*, do inglês *relevance vector machine*). Em [32] e em [33], a informação a priori é explorada utilizando a estrutura em árvore dos sinais esparsificados através de *wavelets* apropriadas que são inseridas na estrutura do *compressive sensing* Bayesiano; o problema de otimização é então resolvido utilizando os métodos de Monte Carlo via cadeia de Markov (*MCMC*, do inglês *Markov chain Monte Carlo*) [32] e a análise Bayesiana variacional (*VB* do inglês, *Variational Bayesian*) [33]. Os trabalhos [34] e [35] seguem uma linha parecida sendo que, no primeiro, a função que representa a esparsidade do sinal utilizada foi a distribuição Gaussiana generalizada com um algoritmo Bayesiano de busca evolutiva (*BEPA*, do inglês *Bayesian evolutionary pursuit algorithm*); e em [35], a função utilizada é um produto normal (*NP*, do inglês *normal product*), onde cada variável corresponde ao produto entre duas variáveis independentes com distribuição normal, e o algoritmo para resolução do problema de otimização foi o *VB*. Por outro lado, trabalhos como [36] e [37]

utilizam a estrutura do *compressive sensing* Bayesiano de uma forma diferente: em [36], apresenta-se um algoritmo adaptativo que permite calcular um índice capaz de indicar a quantidade mínima de medidas necessárias para reconstruir o sinal sem informação a priori com uma possível aplicação para sinais de radar; já em [37], utiliza-se um dicionário no processo de reconstrução de imagens de *MR* que é construído com base em imagens esparsas para gerar o melhor modelo para a informação a priori a ser usada pelo algoritmo de reconstrução.

Uma outra forma de explorar esse tipo de informação é investigar a localização da mesma. Como proposto em [38], onde a localização dos pontos de suporte (aqueles que são não-nulos na representação esparsa) é indicada, e um algoritmo modificado do *compressive sensing* é utilizado para reconstruir a imagem. Em [39], considera-se que essas informações surgem, em geral, em blocos na representação esparsa, o que permitiria identificá-las mais facilmente. Já Miosso *et al.* propôs em [26,40] um algoritmo de reconstrução utilizando *CS* com pré-filtragem no qual uma das entradas é a posição dos coeficientes de suporte da representação esparsa da imagem, obtidas de forma determinística. Essas abordagens, porém, não levam em consideração que a posição do suporte pode se alterar ao longo da aquisição das medidas, seja por um movimento voluntário do paciente (após minutos esperando pelo término do exame) ou dada a natureza involuntária do que está sendo analisado (o batimento de um coração, *MRI* funcional do cérebro). Por esse motivo, é interessante pensar sobre as posições de suporte de uma forma estatística, onde uma probabilidade é associada às chances de a posição pertencer ou não ao suporte da imagem a ser reconstruída.

Porém, essas implementações não se preocupam, por exemplo, em como a natureza da informação no domínio esparsa influencia o desempenho final da reconstrução. Uma avaliação mais minuciosa dessa informação pode ser importante, por exemplo, para desenvolver modelos que permitam diminuir a quantidade de medidas necessárias para reconstruir a imagem. Esses modelos poderiam ser inseridos, por exemplo, pelo técnico responsável pelo exame antes da reconstrução da imagem, de modo a diminuir efeitos de artefatos causados por movimentos de pacientes. Ao modelar estatisticamente a informação que vai ser utilizada ao se reconstruir uma imagem ou o próximo frame de um *MRI* funcional (*fMRI*, do inglês *functional MRI*), é possível acrescentar aspectos que caracterizem situações anormais, como os movimentos mencionados anteriormente que gerariam artefatos na imagem final reconstruída. Dessa forma, é possível incorporar aos algoritmos já existentes esses novos modelos e, posteriormente, quantificar e avaliar as diferenças encontradas.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é desenvolver e aprimorar técnicas de reconstrução de imagens de ressonância magnética baseadas em *compressive sensing*, que utilizam informação a priori. Essas técnicas podem ser utilizadas para a reconstrução de imagens estáticas, dinâmicas e funcionais. Serão desenvolvidas novas abordagens que modelam estatisticamente essas informações ao avaliar a informação do sinal no domínio esparsa em que é representado, substituindo o método de modelagem determinística do suporte por um método estocástico. Dessa forma, espera-se quantificar – através de métricas objetivas de qualidade de imagem – as diferenças nos resultados obtidos utilizando os métodos propostos, quando comparado com técnicas que são consideradas o estado da arte em reconstrução de imagens.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Os algoritmos desenvolvidos realizam a reconstrução da imagem a partir de parâmetros de entrada, como o tamanho do sinal e a quantidade de medidas. Para a implementação, testes e validação dos métodos, são considerados os seguintes objetivos específicos:

- elaboração de algoritmos que irão modelar estatisticamente a informação a priori, com base em sinais gerados artificialmente de forma aleatória, e também utilizando imagens de fantasmas e de imagens reais de *MRI* retiradas de banco de dados apropriados;
- elaboração de algoritmos que incorporem aos algoritmos de *compressive sensing* existentes as alterações propostas de forma adequada, para alterar a modelagem determinística da informação a priori por uma modelagem probabilística;
- elaboração de algoritmos de testes que permitam avaliar a qualidade objetiva da imagem reconstruída e o tempo de reconstrução utilizando os métodos propostos;
- avaliar e comparar os resultados obtidos utilizando métricas apropriadas e testes estatísticos, quando convenientes.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Este trabalho propõe novas técnicas de utilização dos algoritmos baseados em *compressive sensing* de modo a diminuir a quantidade de medidas necessárias para reconstruir adequadamente imagens de ressonância magnética. Uma vez que ocorre a redução na quantidade de medidas, garantindo a qualidade da imagem reconstruída, é possível diminuir o tempo de aquisição das mesmas e, conseqüentemente, o tempo total de realização de um exame de *MRI*. Isso pode diminuir os custos para os pacientes que necessitam desse recurso e diminuir o desconforto para o paciente.

Contudo, essa é apenas uma aplicação para as técnicas desenvolvidas e aqui apresentadas. O *compressive sensing* vem sendo utilizado em outros contextos, como tecnologias de radar e processamento de sinais multimídia, o que permite que este trabalho seja utilizado para o desenvolvimento de técnicas similares que se adequem à realidade desses contextos.

### 1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O restante da dissertação está organizado da seguinte forma.

O Capítulo 2 aborda aspectos teóricos relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. A primeira seção trata exclusivamente da técnica de imageamento por ressonância magnética. Os aspectos matemáticos que regem o fenômeno de ressonância magnética são apresentados, assim como o processo de codificação espacial que permite a reconstrução da imagem a partir de algoritmos específicos. A seção seguinte trata da técnica de *compressive sensing*. Ela apresenta não só a teoria que valida essa técnica, mas também aspectos de otimização numérica cruciais para que a mesma possa ser realizada. Em uma subseção, é apresentada a técnica de pré-filtragem associada ao *compressive sensing*, desenvolvida por Miosso *et al.*, que foi utilizada em grande parte dos experimentos aqui propostos. A última seção deste capítulo traz uma revisão dos principais métodos de reconstrução de imagens de *MRI* que fazem uso de algum tipo de informação previamente conhecida sobre a imagem a ser reconstruída.

O Capítulo 3 apresenta detalhes do desenvolvimento dos sistemas propostos e da avaliação dos mesmos. Em uma seção, descreve-se o desenvolvimento dos algoritmos propostos que utilizam os diferentes tipos de informação a priori, assim como outras rotinas que são relevantes nesses sistemas de reconstrução. Na seção seguinte, os experimentos utilizados para validar essas ferramentas são descritos. Descrevem-se os bancos de dados de imagens utilizados, os parâmetros para a realização dos experimentos e os al-

goritmos desenvolvidos para realizá-los. A última seção do capítulo dedica-se a explicar os métodos de avaliação dos resultados obtidos a partir desses experimentos propostos. Além disso, destacam-se as comparações feitas com técnicas de reconstrução de imagens de *MRI* consagradas.

O Capítulo 4 apresenta e descreve os resultados dos testes realizados sob a forma de tabelas, gráficos e imagens, conforme a relevância dos mesmos. As análises desses resultados também são apresentadas de modo a explicitar as vantagens e desvantagens dos métodos propostos, quando comparados a outros existentes.

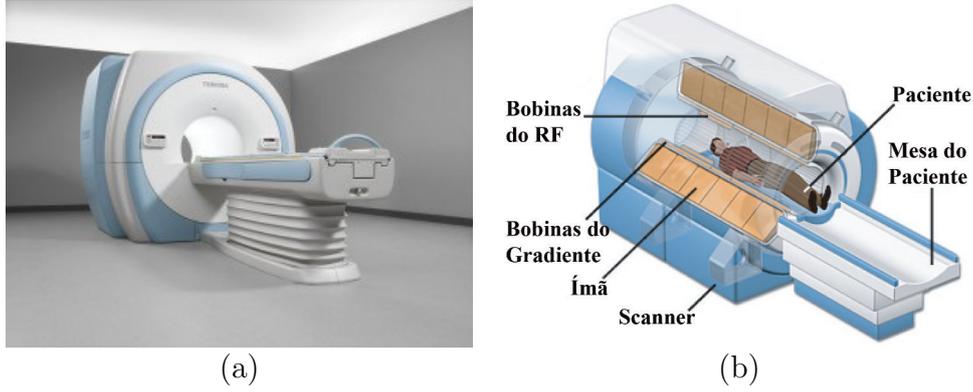
O Capítulo 5 retoma os objetivos do trabalho de modo a descrever quais conclusões foram obtidas a partir deles. Além disso, realiza-se uma breve síntese de toda a pesquisa realizada e do seu impacto científico e social. Finalmente, uma breve descrição de possíveis trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir do que foi apresentado.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 IMAGEAMENTO POR RESSONÂNCIA MAGNÉTICA

O imageamento por ressonância magnética se destaca, quando comparada às outras técnicas de imageamento amplamente utilizadas, devido à superior qualidade – subjetiva e objetiva – das imagens formadas [1]. Isso se deve, principalmente, ao método de contraste utilizado ao adquirir as medidas que são utilizadas para a formação da imagem: a excitação de prótons de hidrogênio presentes nos tecidos a serem escaneados. Como os diferentes tecidos do corpo humano possuem diferentes densidades desses prótons (ou densidade de *spins*), o contraste que se obtém entre diferentes tecidos ao se utilizar o *scanner* de *MRI* é muito bom quando comparado à outras técnicas [15]. É possível, por exemplo, diferenciar claramente as estruturas do crânio (cuja constituição é cerca de 20% de água) e do cérebro (constituído por cerca de 80% de água).

Essa excitação é provocada por campos eletromagnéticos que atuam sobre o corpo que será analisado. Inicialmente, esse volume está sob a atuação apenas de um forte campo magnético uniforme ( $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ ), com magnitude típica em torno de  $B_0 = 30000$  gauss (ou 3 tesla), gerado a partir de ímãs ou eletroímãs no *scanner* (Figura 2.1). Sob influência desse campo, alguns momentos magnéticos dos núcleos dos átomos de hidrogênio se alinham a ele, o que gera um momento magnético mensurável ( $M_0$ ), chamado magnetização. O vetor de magnetização ( $\mathbf{M}$ ) sofre, então, uma perturbação provocada por sinais de radiofrequência (RF) circularmente polarizados enquanto precessa em torno do plano longitudinal a uma frequência chamada frequência de Larmor –  $\omega_0 = \gamma B_0$ , onde  $\gamma$  é a constante giromagnética, cujo valor para átomos de hidrogênio é  $\gamma(\text{H}) = 42,6$  MHz/Tesla [1, 41]. Como consequência,  $\mathbf{M}$  alinha-se ao plano perpendicular ao plano do campo estático até que suas componentes transversais,  $M_{xy}$ , comecem a decair. Após certo tempo, o vetor de magnetização  $\mathbf{M}$  retorna à sua orientação original, ou seja, paralelo ao plano longitudinal. Essas perturbações no vetor  $\mathbf{M}$  irão induzir tensões em bobinas posicionadas ao longo do plano transversal e ressonantes em  $\omega_0$ . As medidas obtidas através dessas bobinas serão utilizadas posteriormente para a reconstrução da imagem final.



**Figura 2.1.** (a) Scanner de *MRI* encontrado comercialmente e, ao lado, (b) um esquema interno com algumas de suas estruturas. Apresentam-se também os eixos dos campos magnéticos gerados. Figuras obtidas de [42] e modificada de [43], respectivamente. Último acesso em 11/04/2016.

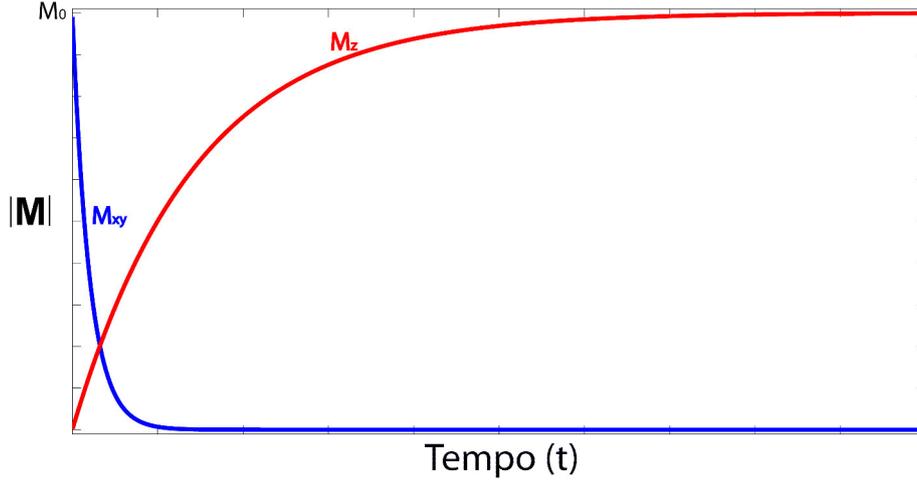
Além disso, o movimento de decaimento do vetor  $\mathbf{M}$  ao longo do tempo e do espaço é modelado teoricamente pelas equações fenomenológicas de Bloch, descritas a seguir [10, 41].

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} - \frac{M_x(\mathbf{r}, t)}{T_2(\mathbf{r})} \hat{x} - \frac{M_y(\mathbf{r}, t)}{T_2(\mathbf{r})} \hat{y} - \frac{M_z(\mathbf{r}, t) - M_0}{T_1(\mathbf{r})} \hat{z}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{r}$  é um vetor posição.

A Eq. 2.1 relaciona os campos magnéticos ( $\mathbf{B}$ ) aos momentos magnéticos ( $\mathbf{M}$ ) ao longo do objeto analisado e ao longo do tempo. Sob determinadas condições de contorno, essa equação pode ser resolvida analiticamente de modo a caracterizar adequadamente os decaimentos das componentes transversal ( $M_{xy}$ ) e longitudinal ( $M_z$ ). Após a aplicação de um pulso no plano  $xy$ , por exemplo, a componente  $M_{xy}$  começa a decair exponencialmente –  $|M_{xy}| = M_0 e^{-\frac{t}{T_2}}$  – enquanto a componente  $M_z$  cresce até atingir o seu valor inicial –  $|M_z| = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$ , para um determinado ponto analisado.  $T_1$  e  $T_2$  são os tempos de relaxação das componentes  $M_z$  e  $M_{xy}$ , respectivamente [1, 15, 41]. O gráfico da figura 2.2 ilustra o comportamento das componentes de  $\mathbf{M}$  ao longo do tempo para uma excitação genérica ao longo do plano  $xy$ : o tempo de decaimento de  $M_{xy}$  é bem menor que o tempo que  $M_z$  leva para retornar a seu valor original –  $T_2 < T_1$  –, o que pode ser explicado por uma incoerência de fase entre os spins dos prótons após o fim do pulso aplicado, devido à interação entre *spins* e à possíveis não uniformidades de  $B_0$  ao longo de  $z$ . Além disso, as diferenças nos valores de  $T_1$  e  $T_2$  dependem também das características intrínsecas ao tecido analisado. Quando excitado, cada tecido do corpo humano apresenta diferentes valores para essas constantes de tempo, de modo que a combinação desses tempos permite controlar o contraste entre diferentes estruturas na imagem a ser formada [1, 11, 15].

A mensuração de  $T_1$ , contudo, não pode ser feita apenas a partir de um estímulo



**Figura 2.2.** Comparação entre o decaimento do valor do módulo da componente transversal  $M_{xy}$  com o crescimento do valor do módulo da componente longitudinal  $M_z$  após uma excitação no plano  $xy$ .

que anule a componente longitudinal de  $\mathbf{M}$  por causa do posicionamento das bobinas medidoras. Dessa forma, diferentes sequências de pulsos são utilizadas para que a medida final obtida na bobina não seja apenas função de  $T_2$ . Uma dessas sequências de pulsos é a  $\frac{\pi}{2} - \tau - \pi - \tau$ , que consiste de uma perturbação no plano  $xy$ , seguida de uma perturbação na direção  $-\hat{z}$ , com intervalos  $\tau$  de mesma duração entre os pulsos, e entre o último pulso e a medição. Essa mesma sequência de pulsos deve, então, ser repetida até que uma quantidade suficiente de medidas tenha sido adquirida. Para essa sequência de pulsos, uma aproximação da contribuição  $M_{xy}$  de cada ponto excitado para o sinal obtido na bobina – desde que o tempo entre as repetições ( $T_R$ ) seja maior que o tempo de eco ( $T_E = 2\tau$ ) – é dada por:

$$|M_{xy}(\mathbf{r}, t_E)| \approx k\gamma^2 B_0^2 (1 - e^{-\frac{T_R}{T_1}}) e^{-\frac{T_E}{T_2}}, \quad (2.2)$$

onde  $k$  é uma constante.

A partir da análise da Eq. 2.2, percebe-se que é possível controlar os valores obtidos na bobina (e, conseqüentemente, o contraste final da imagem) ao se escolher adequadamente os valores dos tempos de eco e de repetição durante o processo de aquisição das medidas. Quando o operador do *scanner* escolhe um valor alto para  $T_R$ , por exemplo, a influência de  $T_1$  diminui, e dá-se uma maior importância a  $T_2$  no contraste final da imagem. Essa abordagem poderia ser utilizada ao se avaliar dois tecidos com valores muito diferentes de  $T_2$ , de modo a garantir a correta diferenciação entre eles na imagem final. O mesmo procedimento pode ser utilizado para diferenciar tecidos através de  $T_1$  ao se escolher valores adequados para  $T_R$  [11, 15].

A Eq. 2.2 traz a informação sobre a influência dos diferentes pontos sobre o valor total

do sinal recebido na bobina. Porém, não há ainda a informação precisa sobre a posição desses pontos, de modo a permitir localizá-los na imagem. O mecanismo que permite codificar espacialmente esses pontos e, posteriormente, formar a imagem será explicado na próxima seção.

### 2.1.1 Codificação espacial

A excitação dos tecidos através de um simples sinal de RF não consegue discriminar a contribuição dos diferentes pontos excitados, uma vez que a informação colhida na bobina refere-se a todo o volume excitado. Para localizar as contribuições de cada ponto, utilizam-se bobinas que irão distorcer o campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) ao longo da orientação desejada. Essa distorção é conhecida como gradiente ( $\mathbf{G}$ ) e as bobinas do gradiente são responsáveis por emitirem esse sinal que se soma a  $\mathbf{B}$ , cujo módulo em uma posição  $\mathbf{r}$  pode ser dado por:

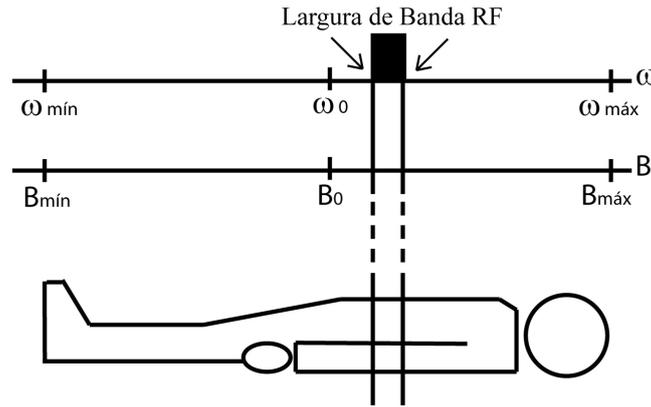
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}. \quad (2.3)$$

Consequentemente, o gradiente também altera a frequência na qual os prótons precessam e, dessa forma, prótons em diferentes posições irão precessar a uma diferente taxa dada por:

$$\omega(\mathbf{r}) = -\gamma(B_0 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}). \quad (2.4)$$

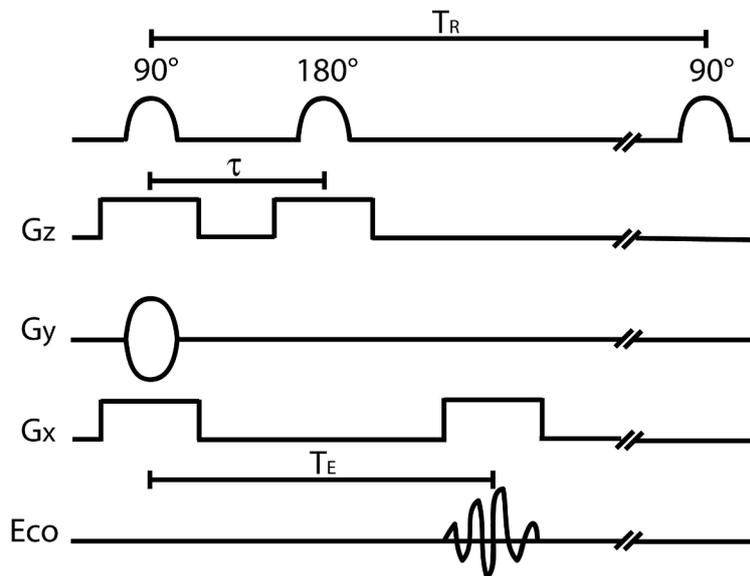
Suponha que inicialmente aplica-se uma perturbação que varie linearmente ao longo do eixo  $z$  ( $\mathbf{G} = G_z \hat{z}$ ), de modo que a componente  $B_z$  de  $\mathbf{B}$  varie ao longo do corpo do paciente, apresentando um valor ligeiramente menor que  $B_0$  na região do pé do paciente, e maior na região da cabeça, por exemplo. Se, após a aplicação do gradiente, for emitido um sinal RF com um comprimento de banda que se encaixe dentro desse intervalo de valores, apenas a região que precessa nessa faixa de frequências será excitada (Eq. 2.4), como pode se ver na Fig. 2.3. Ou seja, apenas uma fatia do volume sob efeito de  $B_0$  é selecionada e, para alterar essa região (seja em tamanho, ou para uma região diferente), basta alterar a faixa de frequências do sinal RF emitido pelas bobinas.

Contudo, apenas uma componente de  $\mathbf{G}$  não é suficiente para que a informação no interior da região excitada seja descrita precisamente. Para que a informação de cada pixel possa ser diferenciada, é necessário fazer uso das componentes  $G_x$  e  $G_y$ . Uma vez que a fatia a ser analisada é selecionada, aplica-se um gradiente variando linearmente na direção  $y$  por alguns instantes, de modo que os prótons excitados por um campo magnético mais forte precessem a uma frequência maior. Após a retirada desse gradiente, os prótons que encontram-se numa mesma linha irão precessar com uma mesma fase, enquanto



**Figura 2.3.** Variação do módulo de  $B$  e de  $\omega_0$  ao se aplicar o gradiente variando linearmente ao longo de algum dos eixos. Destaca-se também a região excitada após aplicar o sinal de RF limitado em banda.

que prótons de linhas diferentes estarão defasados, devido à diferença na frequência de precessão imposta por  $G_y$ . Uma vez defasados, aplica-se o gradiente  $G_x$  que também varia linearmente ao longo da direção  $x$ . Seguindo o raciocínio anterior, os prótons em uma mesma coluna irão precessar na mesma frequência, porém com diferentes fases. Simultaneamente à aplicação do gradiente ao longo da direção  $x$ , realiza-se a leitura das medidas nas bobinas, uma vez que cada próton apresenta diferentes fases e frequências de precessão [10, 11, 15]. A figura 2.4 apresenta um diagrama com a sequência dos gradientes aplicados, relacionando-os aos intervalos em que ocorrem.



**Figura 2.4.** Diagrama que apresenta a sequência de gradientes aplicados para uma sequência  $\frac{\pi}{2} - \tau - \pi - \tau$ .

A informação coletada nas bobinas corresponde, portanto, à amostras de  $M_{xy}$  codificadas por frequência e fase, ou seja, são amostras da transformada espacial de Fourier (2DFT, do inglês *Two-Dimensional Fourier Transform*). Cada vez que a sequência de

pulsos explicada anteriormente é aplicada, um conjunto dessas amostras é recebido pela bobina. A posição dessas amostras no domínio da frequência (espaço- $k$  para sinais bidimensionais) é dado pela expressão

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{2\gamma} \int_0^t \mathbf{G}(\lambda) d\lambda, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{k}(t)$  é definido como a frequência espacial da amostra coletada no instante de tempo  $t$ .

E os valores das amostras da transformada bidimensional de Fourier de  $M_{xy}$  para uma determinada trajetória são dados por

$$\hat{M}_{xy}(\mathbf{k}) = \int_{\text{volume}} |M_{xy}(\mathbf{r})| e^{-2\pi i \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Contudo, o processo de aquisição dessas medidas para preencher a informação do espaço- $k$  da imagem não depende apenas da emissão de uma única sequência de pulsos. Ao amostrar em um *grid* retangular, por exemplo, utilizando trajetórias cartesianas, cada linha corresponde às informações geradas após uma sequência, e cada sequência tem  $T_R$  segundos de duração, em média. Para uma imagem com 256 linhas, por exemplo, o tempo total seria em torno de  $256T_R$ . Além disso, existem limitações físicas e técnicas que impedem que o procedimento aconteça mais rapidamente, como limitações do hardware para emitir e receber os pulsos [1, 10].

Após a coleta das medidas de  $M_{xy}$  no espaço- $k$ , é necessário representar essa informação no domínio de imagem, ou seja, reconstruir a imagem. A reconstrução da imagem, porém, não pode ser feita apenas utilizando a transformada inversa de Fourier bidimensional porque, além da quantidade restrita de medidas que podem ser obtidas, a trajetória utilizada ao se amostrar no espaço- $k$  pode tornar esse método inviável. Em contrapartida, técnicas de reconstrução tradicionais – como a interpolação espectral e a retroprojeção filtrada – podem ser utilizadas para reconstruir a partir de diferentes trajetórias (cartesiana, radial, espiral), mas também necessitam de uma quantidade mínima de medidas para garantir a qualidade final da imagem reconstruída [20].

A retroprojeção filtrada é uma técnica de reconstrução de imagens muito utilizada na tomografia computadorizada. Nessa técnica de imageamento, feixes de raio-X incidem sobre o corpo analisado em diferentes angulações. No lado oposto, os feixes são recebidos e descrevem um somatório das diferentes densidades do corpo naquele segmento, descrito por um ângulo. Diversas incidências são realizadas de modo a obter projeções do objeto para diferentes ângulos, e correspondem à transformada de Radon do objeto [4, 5]. A

técnica de retroprojeção consiste em projetar cada uma das projeções, na direção originalmente adquirida, sobre uma superfície e somá-las até que o objeto original possa ser reconstruído. Quanto maior o número de projeções obtidas em diferentes angulações, mais eficiente é a reconstrução do objeto. Contudo, o resultado final ainda será diferente do original, pois dá-se muita importância às componentes de baixa frequência ao se realizar a retroprojeção. Dessa forma, aplica-se um filtro passa-altas antes de se realizar a retroprojeção de modo a obter um resultado mais próximo ao original. Ainda assim, para que haja uma reconstrução satisfatória, a quantidade de projeções é alta [5].

Com base na quantidade mínima de medidas que as técnicas anteriores demandam, viu-se a necessidade de se utilizar uma técnica que permitisse reconstruir a imagem de *MRI* com uma boa qualidade a partir de um número significativamente menor de medidas. Técnicas baseadas na correlação entre as informações nos domínios do espaço e do tempo, e também na redundância da informação extraída da imagem surgiram nos últimos anos. Contudo, neste trabalho, iremos utilizar a técnica conhecida como *compressive sensing* que foi baseada nos trabalhos de [22, 23].

## 2.2 *Compressive Sensing*

Com o aumento no tamanho dos dados nas últimas décadas, viu-se a necessidade de criar técnicas que permitissem a compressão dos mesmos para que eles pudessem ser transmitidos e armazenados mais eficientemente. Em geral, essas técnicas utilizam-se do fato de que um sinal  $\mathbf{x}$  pode ser representado em domínios apropriados com uma quantidade menor de coeficientes, de modo a diminuir o tamanho dos dados a serem manipulados. Contudo, essas técnicas necessitam que os  $N$  coeficientes do sinal original sejam completamente conhecidos, de modo a se aplicar uma transformação  $\mathbf{T}$  que permita obter uma representação de  $\mathbf{x}$  com uma menor quantidade de coeficientes  $\eta \ll N$  relevantes para sua representação no domínio escolhido. Mesmo assim, uma quantidade  $2\eta$  de coeficientes deve ser localizada e codificada antes de ser transmitida ou armazenada, para que seja possível reconstruir  $\mathbf{x}$ , de acordo com os critérios de Nyquist [20, 23, 24, 26].

No caso específico de *MRI*, contudo, as  $\ell$  medidas que são obtidas pelo *scanner* correspondem a alguns coeficientes de  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ . Essas medidas são, em geral, em número muito inferior ao que é necessário para reconstruir o sinal  $\mathbf{x}$  com uma qualidade aceitável ( $\ell < 2\eta$ ), já que obter uma quantidade  $2\eta$  de medidas é extremamente custoso [20, 21, 26]. O *compressive sensing* foi desenvolvido para ser utilizado nesse tipo de contexto: uma vez que o sinal pode ser comprimido, reconstruir esse sinal a partir de  $\ell < 2\eta$  coeficientes, onde  $\ell$  são medidas de  $\hat{\mathbf{x}}$  [22]. Ou seja, essa não é uma técnica de compressão como as

mencionadas no parágrafo anterior, mas uma técnica que permite a reconstrução de  $\mathbf{x}$  a partir de  $\ell$  medidas obtidas do domínio transformado.

Todas essas técnicas, porém, partem do princípio de que o sinal  $\mathbf{x}$  possui uma representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$  em algum domínio, ou seja,  $\hat{\mathbf{x}}$  é também um sinal de tamanho  $N$ , mas cujos coeficientes são, em sua maioria, nulos. O grau de esparsidade  $\eta$  de  $\hat{\mathbf{x}}$  corresponde à quantidade de elementos não-nulos que ele possui. Como mencionado, essa representação esparsa é obtida após aplicar uma transformação (representada pela matriz de transformação  $\mathbf{T}$ ) que deve ser inversível:  $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}}$ . A teoria de *compressive sensing* garante, porém, que é possível reconstruir com grande precisão sinais que possuem representação esparsa em algum domínio utilizando apenas uma quantidade limitada  $\ell$  de medidas [20, 22–24]:

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}}, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{b}_{\ell \times 1}$  é o vetor de medidas e  $\mathbf{M}_{\ell \times N}$  é a matriz de medidas. Duas questões devem ser consideradas ao se resolver o problema exposto pela equação 2.7: o primeiro é a construção de uma matriz de medidas  $\mathbf{M}$  que não prejudique a informação do sinal devido à redução nas dimensões ( $N \rightarrow \ell$ ); o segundo consiste em elaborar algoritmos que permitam resolver o sistema linear subdeterminado indicado por 2.7.

Uma condição necessária e suficiente que a matriz de medidas deve satisfazer para que exista uma solução estável ao se resolver o sistema linear da Eq. 2.7 é a propriedade de isometria restrita [22, 24, 26]. Suponha um vetor  $\mathbf{v}$  de dimensão  $N$  com  $3\eta$  coeficientes não-nulos e uma tolerância  $\epsilon > 0$ . A matriz  $\mathbf{M}$  de medidas satisfaz essa propriedade com respeito a  $\mathbf{T}$  se, e somente se,

$$1 - \epsilon \leq \frac{\|\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} \leq 1 + \epsilon. \quad (2.8)$$

Nota-se que a relação descrita por 2.8 impõe que a matriz  $\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$  mantenha, com uma tolerância  $\epsilon$ , a norma do vetor  $\mathbf{v}$  com esparsidade  $3\eta$ . Se essa relação é válida para o vetor  $\mathbf{v}$ , então é possível reconstruir um vetor  $\mathbf{x}$  com esparsidade  $\eta$  a partir das medidas obtidas utilizando  $\mathbf{M}$ . Além disso, quanto menor o valor da tolerância  $\epsilon$ , mais estável é a solução encontrada.

Uma outra condição necessária para uma reconstrução estável de  $\mathbf{x}$  é a incoerência entre as linhas de  $\mathbf{M}$  e as colunas da matriz de transformação  $\mathbf{T}$  [22, 24, 26]. A propriedade de incoerência diz que o produto Hermitiano das linhas de  $\mathbf{M}$  não podem ser esparsas no domínio definido por  $\mathbf{T}$ . Essa condição, porém, não é suficiente para a reconstrução; sendo que a condição suficiente para uma reconstrução estável é a propriedade de isometria restrita.

Apesar de essas duas condições condicionarem a construção da matriz  $\mathbf{M}$  à transformada esparsificante utilizada, Candès e Tao [22] mostraram que uma matriz de medidas construída aleatoriamente com entradas independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição Gaussiana satisfaz a propriedade de isometria restrita com uma probabilidade muito alta, independentemente da transformada  $\mathbf{T}$  escolhida. Dessa forma, uma quantidade de medidas  $\ell > k\eta \log\left(\frac{N}{\eta}\right)$ , onde  $k$  é uma constante, permite construir uma matriz  $\mathbf{M}_{\ell \times N}$  com uma grande probabilidade de se encontrar uma solução estável para o sistema linear 2.7 [24].

### 2.2.1 Algoritmos de Otimização Numérica para Resolver Sistemas Lineares Subdeterminados

Como mencionado na seção anterior, um outro fator complicador de se resolver o problema de reconstrução a partir da teoria de *compressive sensing* é a resolução do sistema linear indicado por 2.7. Esse sistema é subdeterminado ( $\ell \ll N$ ) e, por isso, apresenta infinitas soluções possíveis. Uma vez obtidas as medidas  $\mathbf{b}$ , a solução para o problema consiste em encontrar o  $\hat{\mathbf{x}}$  mais esparsa de modo a calcular a transformada inversa para, então, obter  $\mathbf{x}$ . Esse é um típico problema de minimização de  $\ell_0$ , onde a  $\ell_0$  corresponde à quantidade de coeficientes não-nulos de um sinal [22–24, 26, 40]. No caso do sinal  $\mathbf{x}$  com esparsidade  $\eta$ , a  $\ell_0(\mathbf{x}) = \eta$ . Para a resolução de 2.7, podemos modelar esse problema como um problema de otimização numérica do tipo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \operatorname{argmin} \|\hat{\mathbf{x}}\|_0 \\ \text{s. a } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

O problema de otimização numérica mostrado em 2.9 possui uma grande probabilidade de reconstruir o sinal com a menor quantidade de medidas necessárias, se sua resolução fosse viável. Contudo, a resolução desse problema de otimização é extremamente instável, uma vez que ele deve tentar exaustivamente todas as combinações  $C(N, \ell)$  para as posições dos coeficientes não-nulos. Entre as classificações possíveis dentro de complexidade computacional, esse problema é classificado como NP-completo, de modo que não se sabe se o mesmo pode ser resolvido em tempo polinomial. Uma alternativa à esse método de resolução, é a minimização da norma  $\ell_2$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \operatorname{argmin} \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 \\ \text{s. a } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

que é um problema de otimização convexa e possui solução fechada da forma  $\hat{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{MT}^{-1})^T(\mathbf{MT}^{-1}(\mathbf{MT}^{-1})^T)^{-1}\mathbf{b}$  [44]. Essa abordagem, contudo, encontra a solução de

energia mínima o que força alguns coeficientes não-nulos a se tornarem nulos no domínio esparso. Essas descontinuidades no domínio esparso se refletem no espaço do sinal como artefatos [24, 26, 40]. Apesar dessa abordagem apresentar uma solução fechada, essa solução não é a mais esparsa que procuramos.

Por outro lado, a minimização da  $\ell_1$  apresenta bons resultados quando aplicada à resolução de problemas de *compressive sensing*:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \operatorname{argmin} \|\hat{\mathbf{x}}\|_1 \\ \text{s. a } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Apesar de não apresentar uma solução fechada como 2.10, a minimização da  $\ell_1$  é também um problema de otimização convexa e pode ser resolvido por métodos iterativos, como o de pontos interiores. Esses métodos, em geral, apresentam complexidade computacional polinomial, diferentemente da minimização da  $\ell_0$ , o que torna a sua resolução factível. Além disso, é possível reconstruir o sinal a partir de uma quantidade pequena de medidas  $\ell$  com uma alta probabilidade utilizando a minimização da  $\ell_1$  [22–24, 26, 40]. Porém, a reconstrução a partir da quantidade ótima de medidas, ou seja, da menor quantidade de medidas, só é possível quando utiliza-se a minimização por  $\ell_0$ .

Uma outra abordagem que visa aproximar a quantidade de medidas utilizadas da que é obtida através da minimização da  $\ell_0$  é a minimização da  $\ell_p$ . A  $\ell_p$  é uma generalização de  $\ell_1$  e pode ser definida para um sinal  $\mathbf{y}$  qualquer, de tamanho  $M$ , como sendo:  $\|\mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^M |y_i|^p$  [25, 26, 40]. Dessa forma, a reconstrução de  $\mathbf{x}$  utilizando *compressive sensing* com minimização da  $\ell_p$  pode ser modelada como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{x}}\|_p^p \\ \text{s. a } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ao se utilizar a minimização da  $\ell_p$ , é possível diminuir a quantidade de medidas  $\ell$  para a reconstrução do sinal conforme se diminui o valor de  $p$ , que deve estar entre  $0 < p \leq 1$ , sendo que  $p = 1$  corresponde ao problema 2.11 já mencionado. Além disso, assim como no problema 2.11, algoritmos iterativos são utilizados na resolução e os mesmos garantem que a complexidade computacional seja polinomial. Contudo, conforme o valor de  $p$  aproxima-se de zero, a resolução desses sistemas torna-se cada vez mais instável [26].

Como o problema de reconstrução de imagens de ressonância magnética é tipicamente subdeterminado, por causa da dificuldade em se obter uma quantidade suficiente de medidas, a utilização de *compressive sensing* nesse contexto torna-se uma alternativa. Isso se deve também às características das medidas que são obtidas: elas já são espacialmente

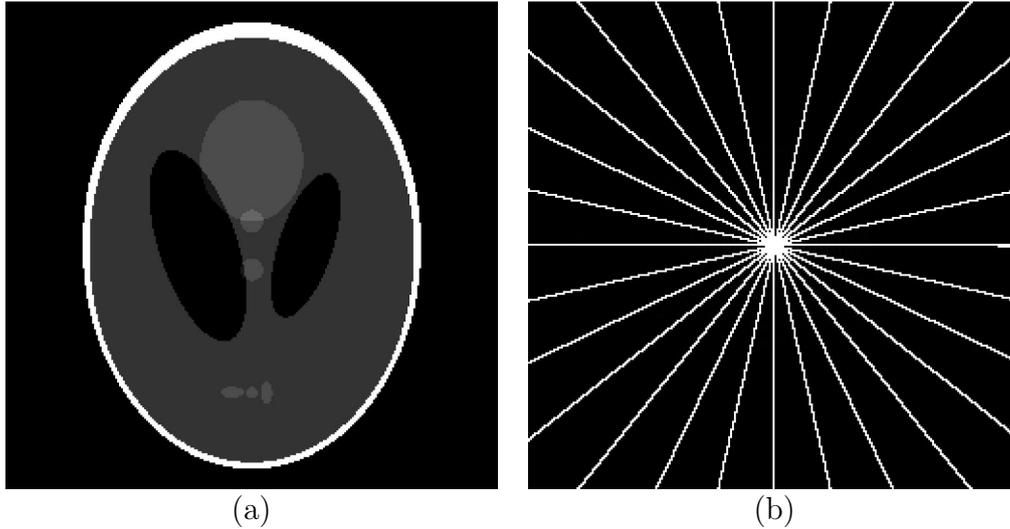
codificadas no domínio da frequência, e possuem uma representação esparsa em algum domínio adequado [20, 21, 24, 26]. Dessa forma, ao se aplicar o *compressive sensing* na resolução do problema de reconstrução, utilizam-se as técnicas de otimização numérica mencionadas anteriormente para a resolução do problema 2.7, onde  $\mathbf{x}$  corresponde à imagem a ser reconstruída num formato empilhado,  $\mathbf{b}$  são as medidas obtidas pelo *scanner* e  $\mathbf{T}$  é a transformada de Fourier. Para o caso específico de a transformada esparsificante  $\mathbf{T}$  ser a transformada de Fourier, a matriz de medidas  $\mathbf{M}$  a ser utilizada não precisa ser uma matriz aleatória. Nesse caso, a matriz  $\mathbf{M}$  pode corresponder a linhas da matriz identidade de tamanho  $N \times N$  [26].

Como mencionado, os problemas de otimização utilizados nos algoritmos de *compressive sensing* devem ser solucionados a partir de métodos iterativos que baseiam-se em métodos diretos (como o método de eliminação de Gauss) ou em métodos indiretos. Os métodos diretos são extremamente rápidos ao se resolver sistemas de pequeno porte, mas tornam-se inviáveis quando o sistema a ser resolvido apresenta muitas variáveis, por causa da grande quantidade de memória exigida para armazenar as matrizes utilizadas. Como a reconstrução de imagens de ressonância magnética envolve a resolução de sistemas de grande porte, é necessário utilizar métodos indiretos ao resolvê-los [26, 45].

Uma forma de mostrar a superioridade das técnicas que baseiam-se em *compressive sensing* com relação à qualidade da imagem final obtida, quando aplicadas ao problema de reconstrução de imagens é comparar o resultado final obtido com aqueles obtidos por técnicas tradicionais, como a retroprojeção filtrada. Realizando a reconstrução de um fantoma de Shepp-Logan (Fig. 2.5), por exemplo, é possível comparar o desempenho dessas técnicas dado uma quantidade  $\ell$  de medidas. Na Fig. 2.5b, as  $\ell = 15$  linhas radiais, que foram retiradas a partir do espectro em frequência do fantoma, também são mostradas. Essas linhas simulam as medidas obtidas pelo *scanner* através de uma trajetória radial e, a partir delas, o fantoma original vai ser reconstruído.

Com base nas medidas extraídas da Fig. 2.5b, foi possível reconstruir o fantoma original utilizando algumas técnicas diferentes. Os resultados são mostrados na Fig. 2.6. A Fig. 2.6a corresponde à reconstrução utilizando a transformada de Radon que é utilizada na retroprojeção filtrada ao se reconstruir imagens de tomografia ou de ressonância magnética, quando a trajetória de obtenção das medidas é a radial. As imagens em 2.6b, 2.6c e 2.6d são o resultado da reconstrução utilizando *compressive sensing* a partir da minimização da  $\ell_2$ ,  $\ell_1$  e  $\ell_p$  ( $p = 0, 1$ ), respectivamente.

Percebe-se uma grande melhora na qualidade subjetiva das imagens geradas ao se utilizar o *compressive sensing* quando a quantidade de medidas disponíveis é pequena. Mesmo utilizando a minimização da norma  $\ell_2$  (Fig. 2.6b), já percebe-se uma qualidade



**Figura 2.5.** Em (a), fantoma de Shepp-Logan usado nas reconstruções e, em (b), as  $\ell = 15$  linhas extraídas do espaço- $k$  para reconstruí-lo.

superior quando comparada com a retroprojeção filtrada (Fig. 2.6a), apesar de ambas as imagens apresentarem. Contudo, a maior semelhança com o fantoma original é percebido nas imagens 2.6c e 2.6d, com a utilização da minimização da  $\ell_1$  e da  $\ell_p$ , respectivamente. Entre elas, talvez não se perceba a olho nu uma grande diferença na qualidade. Porém, a relação sinal-erro (*SER*, do inglês *signal-to-error ratio*) mostra que a reconstrução utilizando o  $p = 0, 1$  é superior ( $SER_{p=0,1} = 21, 3 \text{ dB}$ ) à que utiliza o  $p = 1$  ( $SER_{p=1} = 20, 2 \text{ dB}$ ). Para as reconstruções utilizando a transformada de Radon (retroprojeção filtrada) e a minimização da  $\ell_2$ , o valor da relação sinal-erro encontrado foi de  $SER_{Radon} = 1, 7 \text{ dB}$  e  $SER_{\ell_2} = 4, 5 \text{ dB}$ , respectivamente. Esses valores corroboram a avaliação subjetiva ao se analisar as imagens reconstruídas da Fig. 2.6, onde essas duas técnicas apresentam um desempenho bastante inferior às que utilizam o *CS*.

Portanto, dentre as técnicas apresentadas para resolver o problema da equação 2.7, o *compressive sensing* utilizando a minimização da  $\ell_p$ , com  $p$  próximo de zero, mostrou-se a mais eficiente com relação à qualidade – tanto subjetiva quanto objetiva – da imagem reconstruída, conforme previsto pela literatura. Há, porém, uma desvantagem ao se utilizar o *compressive sensing* na reconstrução de imagens. Como é um método que se baseia na resolução de um problema inverso subdeterminado, as técnicas de otimização numérica apresentadas anteriormente dependem de métodos iterativos para encontrar a solução mais esparsa. Por esse motivo, leva-se mais tempo para reconstruir uma imagem utilizando *compressive sensing* a partir da minimização da  $\ell_p$  quando comparado com as técnicas que utilizam alguma forma de interpolação ou com a retroprojeção filtrada. Apesar dessa imperfeição, ao se utilizar o *compressive sensing* é possível reconstruir imagens com qualidade igual ou superior à obtida pelas técnicas mais rápidas computacionalmente

com uma quantidade muito inferior de medidas. Ou seja, ao se utilizar o *compressive sensing* perde-se, em geral, no tempo de processamento (uma vez que este é maior quando comparado aos outros casos), mas ganha-se no tempo necessário para adquirir as medidas (já que elas são necessárias em menor quantidade).

### 2.2.2 Pré-filtragem

Conforme mencionado nas seções anteriores, a transformada esparsificante  $\mathbf{T}$  pode ser arbitrária, desde que seja inversível e que satisfaça a propriedade da incoerência com relação à matriz de medidas  $\mathbf{M}$  [22, 24, 26]. No caso de imagens de ressonância magnética, alguns domínios transformados já são amplamente utilizados, como a transformada de Fourier bidimensional, a transformada discreta do cosseno, representações no espaço de *wavelets*, dentre outras. Uma outra opção é esparsificar a imagem através de operações de diferenças finitas, ou seja, subtrair linhas consecutivas  $((i + 1) - i)$  e, posteriormente, as colunas, de modo a obter duas representações esparsas (uma para o resultado das subtrações das linhas e outra para a das colunas), ou uma representação que possua as duas informações (como um par ordenado complexo, por exemplo:  $A + jB$ , onde  $A$  corresponde à subtração na vertical, e  $B$  na horizontal). O método de reconstrução tradicional para resolver esse problema é a minimização da *total variation* (TV) [25, 26]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \operatorname{argmin} \|\mathbf{T}\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \\ \text{s. a } &\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Considerando a operação de diferenças finitas mencionada anteriormente, a TV de uma imagem  $\mathbf{Y}$  é definida como  $\|\mathbf{Y}\|_{\text{TV}} = \sum_{i,j} \sqrt{A(i,j)^2 + B(i,j)^2}$ . Portanto, a resolução através da Eq. 2.13 baseia-se no fato de que  $A(i,j)^2 + B(i,j)^2$  resulta em uma representação esparsa de  $\mathbf{x}$ .

Miosso *et al.* [25, 26] mostraram que, ao se aplicar filtros adequados às medidas que compõem o vetor  $\mathbf{b}$  antes de se realizar a reconstrução utilizando *compressive sensing*, é possível melhorar a relação sinal-ruído e o tempo de processamento quando comparado com a minimização da TV. Nessa abordagem, os filtros atuam apenas sobre as trajetórias  $\gamma$  a partir das quais as medidas foram retiradas. Logo, a versão filtrada de  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}_{fn}$ , é obtida como  $\mathbf{b}_{fn} = \mathbf{H}_n \bullet \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{H}_n$  é a representação na frequência do filtro  $\mathbf{h}_n$ , e  $\bullet$  corresponde a uma multiplicação ponto a ponto dos vetores ao longo da trajetória mencionada (pontos  $k \in \gamma$ ). Os filtros que foram utilizados são descritos a seguir:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Os filtros  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$  correspondem aos filtros usados na decomposição da *wavelet* de Haar. Eles realizam a operação de diferenças finitas na vertical e na horizontal, respectivamente; enquanto que o filtro  $\mathbf{h}_3$  realiza a mesma operação na diagonal. Na implementação proposta em [25], realiza-se a filtragem do vetor de medidas  $\mathbf{b}$  utilizando cada um dos filtros apresentados. A partir de cada versão  $\mathbf{b}_{fn}$  filtrada, realiza-se a minimização da  $\ell_p$  de  $x_{fn}$ , conforme explicado na seção anterior. Obtém-se, então, uma versão reconstruída para cada operação envolvendo um dos filtros de 2.14. Essa informação, contudo, não é suficiente para se obter a imagem original correta, uma vez que a informação de baixa frequência do espectro foi desprezada ao se realizar a filtragem utilizando tais filtros. Dessa forma, é necessário adicionar informações provenientes do vetor de medidas  $\mathbf{b}$  para se realizar a composição da imagem e, posteriormente, aplicar a transformada inversa sobre essa composição para se obter  $\mathbf{x}$ . O esquema que elucida essa descrição para uma quantidade  $n = 3$  de filtros é apresentado na Fig. 2.7.

A combinação de filtros mostradas em 2.7 é, contudo, apenas uma das combinações possíveis a ser aplicada aos sinais a serem reconstruídos [45]. O objetivo ao se filtrar o vetor de medidas  $\mathbf{b}$  é esparsificar o sinal, uma vez que a técnica de *compressive sensing* é tanto mais eficiente quanto mais esparsa é o sinal a ser reconstruído [22, 26]. Por esse motivo, é possível que diferentes combinações de filtros aplicados ao sinal tornem o método de pré-filtragem ainda mais eficiente. Uma outra vantagem dessa técnica, é o fato de ser extremamente paralelizável, ou seja, não é necessário realizar todas as filtrações serialmente. Assim, a quantidade de filtros utilizada torna-se irrelevante, desde que seja viável realizar as operações referentes a cada um de forma paralela.

### 2.3 *Compressive Sensing e Informação a Priori*

Conforme apresentado na seção 2.2, a técnica de *compressive sensing* permite a reconstrução de um sinal  $\mathbf{x}$  que possua uma representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$ , a partir de uma quantidade de medidas  $\ell$  que depende da esparsidade  $\eta$  de  $\hat{\mathbf{x}}$ . De modo a resolver esse problema de reconstrução, técnicas de otimização, como as apresentadas na seção 2.2.1, são utilizadas, sendo que a minimização da  $\ell_p$  é a que apresenta melhores resultados com relação à qualidade objetiva e subjetiva da imagem. Como o grau de esparsidade  $\eta$  influencia diretamente no desempenho dos algoritmos baseados na teoria de *CS*, a técnica de pré-filtragem foi apresentada na seção 2.2.2, uma vez que ela permite a reconstrução de sinais filtrados e, conseqüentemente, mais esparsos de  $\mathbf{x}$ .

Uma outra abordagem que permite melhorar os resultados das técnicas que se baseiam em *CS* é a utilização de informação a priori, ou seja, de um conjunto de informações a

respeito da representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$  que permita melhorar tanto a qualidade do sinal reconstruído, quanto diminuir a quantidade de medidas  $\ell$  necessárias para realizar a reconstrução [26,27]. Essa informação pode vir em diversas formas, como em formulações estatísticas sobre o sinal esparsa [30–37], ou até mesmo a indicação da localização dos pontos não-nulos de  $\hat{\mathbf{x}}$  [26,28,29,38–40]. Dessa forma, irei explicar melhor como funciona a abordagem proposta por Miosso *et al.* em [26,40] para a utilização de informação a priori na reconstrução de sinais nesta seção.

### 2.3.1 Informação a priori aplicada ao algoritmo de minimização da $\ell_p$

Em seu trabalho, Miosso *et al.* apresentam um algoritmo que minimiza a  $\ell_p$  de  $\hat{\mathbf{x}}$ , mas com uma formulação diferente daquela mostrada na Eq. 2.12, de modo a incluir a informação que pertence ao suporte do sinal esparsa no processo iterativo. O suporte  $\Phi$  do sinal esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$  são os pontos  $\hat{x}_k$  não-nulos, ou seja,

$$\hat{x}_k \neq 0 \quad \forall \quad k \in \Phi. \quad (2.15)$$

O problema de minimização da  $\ell_p$  apresentado em 2.12 é então reformulado como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \Phi}}^N |\hat{x}_k|^p \\ \text{s. a } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

O problema descrito pela Eq. 2.12 é uma extensão da minimização da  $\ell_1$ , descrito na equação 2.11, cujo objetivo é encontrar o vetor  $\hat{\mathbf{x}}$  com o maior número de componentes nulos. Por esse motivo, a descrição do problema com informação a priori na Eq. 2.16 é possível: ao invés de encontrar o vetor mais esparsa analisando todo o comprimento  $N$ , o algoritmo agora minimiza apenas as posições que não pertencem ao suporte  $\Phi$ . Dessa forma, a solução da Eq. 2.16 tenta encontrar a solução mais esparsa fora de  $\Phi$ , uma vez que a informação nessa região é, a princípio, não-nula.

O método utilizado por Miosso *et al.* para a resolução do problema de reconstrução indicado pela Eq. 2.16 foi o algoritmo de mínimos quadrados iterativos reponderados (*IRLS*, do inglês *iterative reweighted least squares*) [26,40,46]. Esse é um método iterativo para a resolução de problemas de otimização numérica, como o descrito pela Eq. 2.16, onde a função objetiva a ser otimizada é alterada a cada iteração de modo a atingir a função objetiva que vai ser, de fato, solucionada. Ao utilizar esse método para solucionar a Eq. 2.16, portanto, iremos gerar um problema de otimização de modo que a função se

aproxime de  $\sum_{k=1}^N |\hat{x}_k|^p$  a cada iteração, como mostrado na Eq. 2.18.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k^{p-2} \hat{x}_k^2 \\ \text{s. a } \mathbf{MT}^{-1} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $w_k$  é um peso que deve alterar de valor a cada iteração de modo a garantir que a função objetiva  $\sum_{k=1}^N w_k^{p-2} \hat{x}_k^2$  de 2.17 se aproxime da função  $\sum_{k=1}^N |\hat{x}_k|^p$  do problema 2.16, o que é possível ao se fazer com que  $w_k$  se aproxime do valor de  $x_k$  a cada iteração, ou seja,  $\mathbf{w}^{(m)} = |\hat{\mathbf{x}}^{(m-1)}|$ , onde  $\mathbf{w}^{(m)}$  é o vetor de pesos na  $m$ -ésima iteração. Conforme o algoritmo converge para o resultado da otimização, o valor de  $\hat{\mathbf{x}}^{(m-1)}$  será suficientemente próximo ao de  $\hat{\mathbf{x}}^{(m)}$  e, conseqüentemente, as duas funções objetivas também o serão, dada uma certa tolerância.

Ao incluir a informação de suporte da imagem no problema de otimização descrito pela Eq. 2.17, o mesmo se torna:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \Phi}}^N w_k^{p-2} \hat{x}_k^2 \\ \text{s. a } \mathbf{MT}^{-1} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

ou seja, deve-se resolver o problema iterativamente até que, ao convergir,  $w_k^{p-2} \hat{x}_k^2$  seja suficientemente próximo de  $|x_k|^p \forall k \notin \Phi$ . Para que isso ocorra, é necessário alocar valores adequados para o vetor de pesos  $\mathbf{w}$  a cada iteração  $m$ :

$$\mathbf{w}^{(m)} = \begin{cases} |\hat{x}_k^{(m-1)}|, & \text{se } k \notin \Phi \\ \tau |\hat{x}_k^{(m-1)}|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Como o que nos interessa é que os coeficientes que não pertencem ao suporte  $\Phi$  sejam minimizados, o ideal é que o termo  $\tau^{p-2} |\hat{x}_k^{(m-1)}|$  seja o mais próximo de zero. Portanto, o valor de  $\tau^{p-2}$  deve ser pequeno de modo a fazer com que esse termo se anule no procedimento iterativo, de modo a encontrar a solução mais esparsa fora de  $\Phi$ . Ao utilizar os valores para  $\mathbf{w}$  indicados em 2.19 no problema descrito pela Eq. 2.18, percebe-se que ele se resume à minimização de uma função quadrática, cuja solução possui uma forma fechada do tipo:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(m)} = \mathbf{Q}^{(m)} (\mathbf{MT}^{-1})^T (\mathbf{MT}^{-1} \mathbf{Q}^{(m)} (\mathbf{MT}^{-1})^T)^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz diagonal contendo os valores da iteração  $(m-1)$  a serem utilizados

na iteração ( $m$ ):

$$q_k^{(m)} = \begin{cases} |\hat{x}_k^{(m-1)}|^{2-p}, & \text{se } k \notin \Phi \\ \tau^{p-2} |\hat{x}_k^{(m-1)}|^{2-p}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.21)$$

Para garantir que o termo  $\tau^{p-2} |\hat{x}_k^{(m-1)}|^{2-p}$  não se anule, o algoritmo proposto por Miosso *et al.* soma a ele um termo de regularização  $\mu \neq 0$ . Além disso, apresenta-se um estudo da variação do valor de  $\tau^{p-2}$  na qualidade e no tempo de reconstrução final.

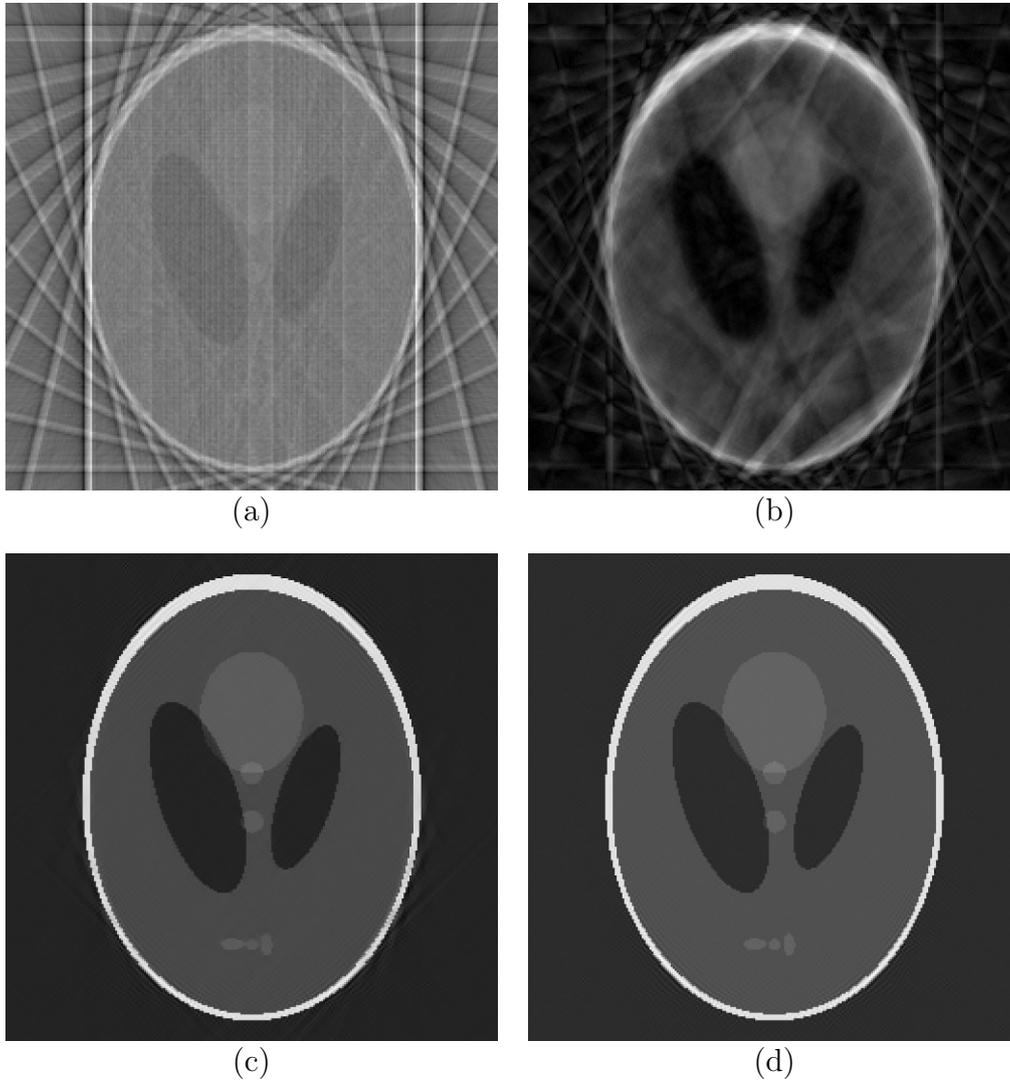
Miosso *et al.* comprovaram em [26, 40], através de testes sistemáticos, que a utilização da informação a priori na reconstrução de sinais melhora a qualidade objetiva dos sinais reconstruídos ao fazer uso de uma menor quantidade de medidas  $\ell$  e de um menor tempo computacional, quando comparado à não utilização de nenhum tipo de informação sobre a região de suporte de  $\hat{x}$ . Além disso, também foi mostrado que, mesmo que parte dessa informação esteja incorreta, o algoritmo de reconstrução supera as técnicas que utilizam apenas o *compressive sensing*; desde que se forneça mais informação correta do que incorreta. Apesar de ser um avanço, esse modelo não permite indicar a possibilidade do ponto pertencer ou não a  $\Phi$ , deixando para o algoritmo iterativo a responsabilidade de avaliar se o ponto  $\hat{x}_k$  – que supostamente pertence a  $\Phi$  – é, de fato, não-nulo.

### 2.3.2 Informação a priori e pré-filtragem

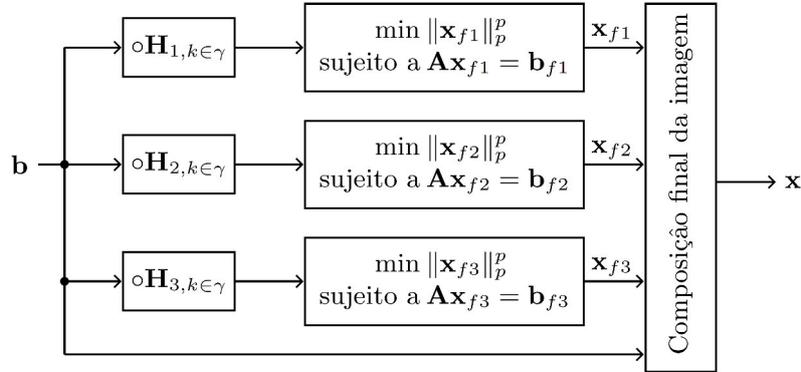
Uma vez formulado o algoritmo para a utilização de informação a priori que utilizaremos neste trabalho, apresento agora a incorporação desse método à pré-filtragem apresentada na seção 2.2.2. Como mencionado anteriormente, a pré-filtragem proposta em [25] tem como objetivo esparsificar o sinal a ser reconstruído e, dessa forma, tornar o método de *compressive sensing* ainda mais efetivo, com a necessidade de um número menor de medidas. Dessa forma, para diminuir ainda mais a quantidade de medidas necessárias, basta incluir a informação sobre o suporte de  $\hat{x}$  ao algoritmo de pré-filtragem, uma vez que o mesmo também usa o método *IRLS* para resolver os problemas de otimização inerentes.

Alguns cuidados, porém, devem ser tomados ao utilizar ambas as abordagens mencionadas. Ao se filtrar o sinal a ser reconstruído utilizando  $n$  filtros esparsificantes, são criadas  $n$  versões filtradas e esparsificadas desse sinal que serão individualmente reconstruídas. A região de suporte  $\Phi_n$  de cada um desses sinais não é, necessariamente, a mesma e, de fato, não deve ser; pois o objetivo de se aplicar diferentes filtros esparsificantes é que cada sinal esparsificado seja uma representação esparsa diferente do sinal a ser reconstruído. Portanto, para cada filtragem realizada deve-se fornecer os pontos do suporte  $\Phi_n$  correspondentes, como esquematizado na Fig. 2.8.

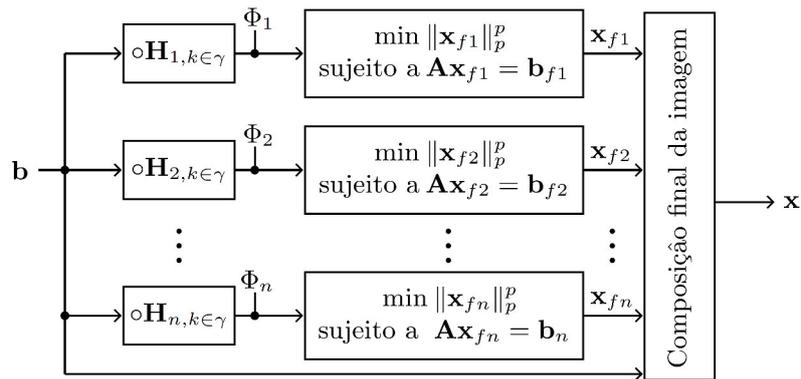
Miosso *et al.* mostram em [26] a aplicação desse método em imagens de ressonância magnética funcionais utilizando os três filtros descritos na Fig. 2.14 e informação a priori obtidas por *frames* prévios ao reconstruído; além de implementar a reconstrução de imagens comuns de *MR*. Ao se reconstruir *frames* de *fMRI*, constatou-se que a maior quantidade de medidas usadas como informação a priori garantia a pertinência dos pontos à região de suporte, ou seja, uma menor quantidade de informação incorreta era utilizada na reconstrução do *frame*. Esse aspecto talvez possa ser melhorado ao se modelar a informação a priori estatisticamente, conforme será proposto neste trabalho.



**Figura 2.6.** Fantasmas de Shepp-Logan reconstruídos a partir das medidas obtidas do espectro em frequência da imagem original indicada na Fig. 2.5. Em a), mostra-se a imagem obtida utilizando retroprojeção filtrada ( $SER_{Radon} = 1,7 \text{ dB}$ ). Em b), c) e d), são mostradas as imagens obtidas utilizando *compressive sensing* a partir da minimização da  $\ell_2$ ,  $\ell_1$  e  $\ell_p$  ( $p = 0, 1$ ), respectivamente, cujos respectivos valores de  $SER$  são  $SER_{\ell_2} = 4,5 \text{ dB}$ ,  $SER_{p=1} = 20,2 \text{ dB}$  e  $SER_{p=0,1} = 21,3 \text{ dB}$ .



**Figura 2.7.** Diagrama que esquematiza o procedimento de pré-filtragem utilizando os três filtros mostrados em 2.14, seguido da minimização da  $\ell_p$  de  $x_{fn}$  e a composição da imagem final. O diagrama foi modificado de [25].



**Figura 2.8.** Diagrama que esquematiza o procedimento de pré-filtragem utilizando  $n$  filtros com informação a priori, seguido da minimização da  $\ell_p$  de  $x_{fn}$  e a composição da imagem final. O diagrama foi modificado de [25].

## 3 METODOLOGIA

### 3.1 METODOLOGIA DE IMPLEMENTAÇÃO

Nesta seção, irei apresentar uma descrição dos algoritmos que até agora foram implementados. Tais algoritmos utilizam como base os códigos já existentes que realizam a reconstrução de sinais utilizando *compressive sensing* com minimização da  $\ell_p$ . Quando esses sinais eram imagens, o método de pré-filtragem descrito na seção 2.2.2 foi aplicado como transformada esparsificante. O que é proposto a seguir, é uma forma de alterar os pesos que representavam a informação a priori nos algoritmos anteriormente propostos. Ao invés de fornecer aos algoritmos pesos baseados apenas na localização da informação de suporte da imagem esparsificada, forneceremos pesos baseados em possíveis posições que essa informação pode apresentar. Uma explicação mais detalhada é dada nas seções a seguir.

Além disso, os experimentos realizados com os diferentes tipos de sinais serão detalhados de forma a deixar claro os mecanismos de validação dos resultados que foram utilizados. Apresentam-se as métricas que foram utilizadas para avaliar o desempenho dos sistemas propostos, e as comparações com os sistemas já existentes que foram considerados relevantes.

#### 3.1.1 Modelagem estatística da informação a priori

A abordagem proposta por Miosso *et al.* em [40] propõe que o algoritmo de reconstrução utilize informações sobre a localização de pontos não-nulos na representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$ . Foi mostrado que isso permite não só aumentar a qualidade objetiva do sinal reconstruído, como também diminuir a quantidade de medidas  $\ell$  necessárias para a reconstrução. Nessa proposta, esses pontos  $\hat{x}_k \neq 0 \in \Phi$ , onde  $\Phi$  é a região de suporte da imagem, são divididos por uma constante  $\tau$  durante o processo iterativo que resolve o sistema linear proposto. O valor de  $\tau$  não pode ser nulo, mas deve ser menor que um para que o ponto a ser analisado seja diferenciado dos demais que não pertencem a  $\Phi$ .

Contudo, a informação da localização de um  $\hat{x}_k \in \Phi$  nem sempre é correta, sendo que essa localização pode estar equivocada. Nesse mesmo trabalho, Miosso mostrou que, mesmo que existam algumas informações incorretas, o algoritmo reconstrói o sinal satisfatoriamente desde que sejam fornecidas mais informações corretas do que incorretas. Dessa forma, propomos que os valores de  $\tau$  sejam calculados com base na probabilidade da informação em uma determinada posição pertencer à região de suporte  $\Phi$ . Inicialmente, o problema foi formulado para sinais de uma dimensão e, em seguida, estendido para sinais de duas dimensões.

### 3.1.1.1 Sinais Unidimensionais

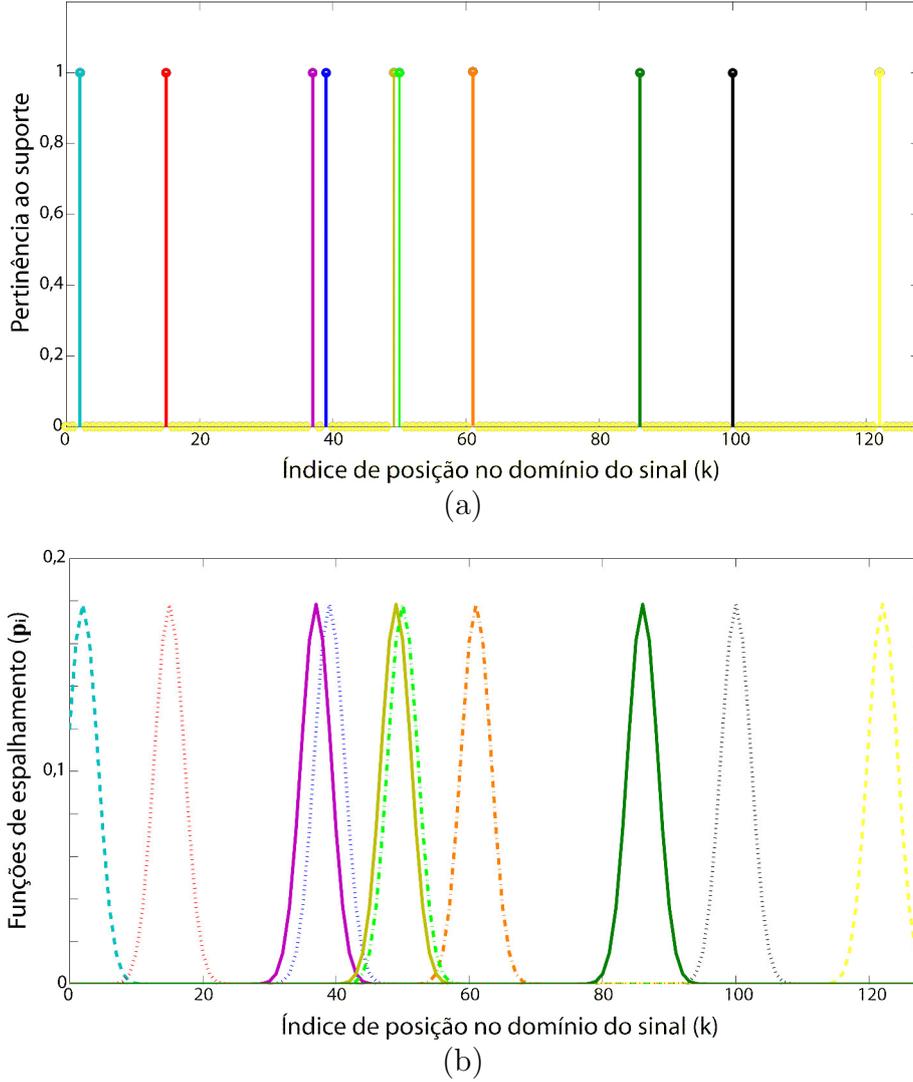
Antes de realizar a implementação da abordagem proposta em sinais de domínio bidimensional, aplicamos a mesma em sinais de domínio unidimensional devido à menor complexidade ao se trabalhar com esses sinais. Como mencionado anteriormente, o objetivo inicial é modelar estatisticamente os pontos de  $\hat{\mathbf{x}}$  nos quais existe uma probabilidade de a informação ser não-nula. Ou seja, devemos construir uma função de densidade de probabilidade em torno de um ponto  $\hat{x}_i$ , que apresenta uma probabilidade  $p$  de pertencer a  $\Phi$ .

Inicialmente, de modo a avaliar esse sistema proposto em comparação aos já existentes, geramos  $\eta$  pontos não-nulos dentro de um intervalo de tamanho  $N$  (Fig. 3.1a), que irá depois ser usado para gerar um sinal esparso  $\hat{\mathbf{x}}$ . De modo a simplificar esse primeiro modelo, a função de densidade de probabilidades da distribuição Normal (Eq. 3.1) foi utilizada para descrever o possível comportamento em torno de  $\hat{x}_i$ . Para cada  $\hat{x}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, \eta$ , calcula-se uma dessas curvas sobre o comprimento de  $\hat{\mathbf{x}}$  – ou seja, sobre um vetor  $\mathbf{z} = 1, 2, \dots, N$  –, centrada em cada um desses pontos ( $\mu_i = \hat{x}_i$ ) e com um valor de variância ( $\sigma^2$ ) inicialmente arbitrário. Um exemplo dessas curvas pode ser visto na Fig. 3.1b.

$$\mathbf{p}_i = f(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_n - \mu_i}{\sigma}\right)^2}, \quad (3.1)$$

onde  $n = 1, 2, \dots, N$  e  $i = 1, 2, \dots, \eta$ .

Esses  $\eta$  sinais precisam, então, ser combinados de forma a gerar um único sinal  $\mathbf{P}$  que descreva o comportamento de todos os pontos de suporte  $\hat{x}_i$ . É necessário levar em consideração, contudo, que agora não existem apenas  $\eta$  pontos não-nulos, mas um espalhamento em torno de cada  $\hat{x}_i$  que gera uma quantidade maior de pontos não-nulos. Esses pontos representam a probabilidade de  $\hat{x}_i$  se deslocar em torno de seu ponto central, o que pode ser visto na Fig. 3.1b. Logo, caso existam dois pontos  $\hat{x}_i$  e  $\hat{x}_{i+1}$  muito próximos, essas regiões de espalhamento podem se sobrepor. Nesse caso, para cada ponto



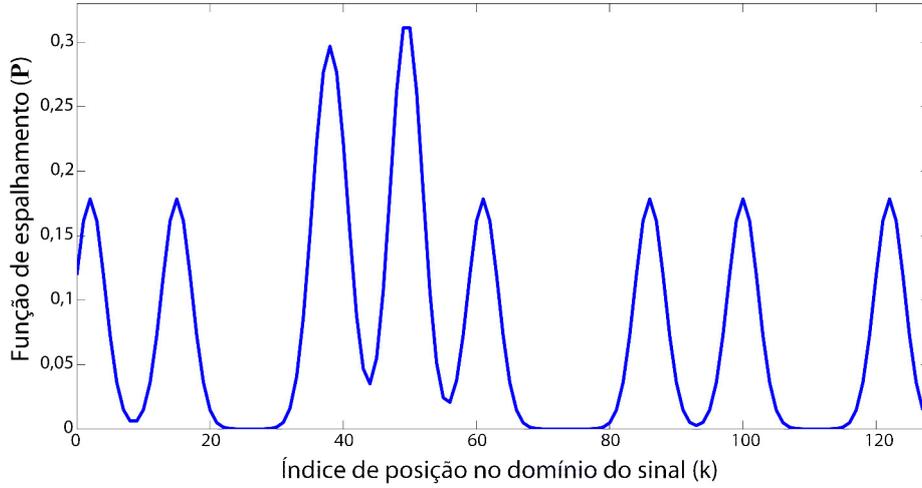
**Figura 3.1.** Funções de probabilidade  $\mathbf{p}_i$  a partir dos pontos  $\hat{x}_i$  que pertencem ao suporte  $\Phi$ . Em (a), as posições no suporte da representação esparsa de um sinal de dimensão  $N = 128$ , com esparsidade  $\eta = 10$ ; (b) espalhamentos gerados em torno de cada posição  $k$  ao se utilizar a função de densidade de probabilidade da distribuição normal, com variância  $\sigma^2 = 5$  e segundo 3.1.

de sobreposição  $k$  do sinal  $\mathbf{P}$ , a probabilidade resultante de que  $k$  seja não-nulo é dada por:  $\mathbf{p}_r(k) = 1 - (1 - \mathbf{p}_i(k))(1 - \mathbf{p}_{i+1}(k))$ . Ao estender esse cálculo de probabilidades para todos os  $\mathbf{p}_i$  sinais, é possível encontrar todos os elementos que compõem o sinal  $\mathbf{P}$ , levando em consideração as sobreposições que podem ocorrer:

$$\mathbf{P}(k) = 1 - \prod_{\lambda=1}^{\eta} [1 - \mathbf{p}_{\lambda}(k)]. \quad (3.2)$$

A Eq. 3.2, portanto, calcula a probabilidade de cada ponto  $k$  ser um ponto da região de suporte do sinal a ser reconstruído. Um exemplo dessa função  $\mathbf{P}$  pode ser visto na Fig. 3.2. Nessa figura, a função  $\mathbf{P}$  para os pontos de suporte apresentados na Fig. 3.1 é

calculada e apresentada. É possível perceber que as sobreposições interferem nos valores de probabilidade calculados, o que também irá interferir no sinal esparsos  $\hat{x}$  gerado.



**Figura 3.2.** Função de probabilidade  $\mathbf{P}$  obtida ao se utilizar a equação 3.2 às funções mostradas na Fig. 3.1(b).

Uma vez que a função de probabilidades  $\mathbf{P}$  é calculada, é possível utilizá-la como informação a priori ao se reconstruir o sinal  $\mathbf{x}$ . Para tanto, utilizei o algoritmo proposto por Miosso *et al.* em [40] com algumas alterações. Em sua abordagem original, Miosso *et al.* utiliza o algoritmo *IRLS* para resolver os problemas de otimização inerentes à técnica de *compressive sensing*. Conforme explicado anteriormente, esse algoritmo permite a utilização de pesos na função objetiva a ser minimizada, que podem ser modificados a cada iteração (como o problema da Eq. 2.18). Nesse algoritmo, o peso aplicado a uma certa posição depende da pertinência desse ponto à região de suporte  $\Phi$ . Dessa forma, a constante  $\tau^{p-2}$  pode assumir apenas dois valores:

$$\tau^{p-2} = \begin{cases} 1, & \text{se } k \notin \Phi \\ 0, 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

De acordo com os possíveis valores apresentados na Eq. 3.3, o algoritmo recebe um vetor de tamanho  $N$  onde a maioria de seus coeficientes é unitária, enquanto que as posições indicadas pelo usuário como pertencentes ao suporte  $\Phi$  apresentam um valor menor que 1 nesse mesmo vetor.

Se considerarmos que a função  $\mathbf{P}$  calculada pela Eq. 3.2 representa a probabilidade de uma certa posição pertencer ou não à região de suporte, é possível utilizar um vetor que possua mais informações a respeito das possíveis posições de suporte. Com base nesse raciocínio, utilizamos como ponderação o mapeamento de  $\tau^{p-2}$  com base na função de

probabilidade calculada  $\mathbf{P}$ , da seguinte forma:

$$\tau^{p-2}(k) = m(\mathbf{P}(k) - \mathbf{P}_{min}) + 1, \quad (3.4)$$

onde  $m = \frac{0,1-1}{\mathbf{P}_{max}-\mathbf{P}_{min}}$ . Dessa forma, o vetor de pesos a ser aplicado no algoritmo iterativo abrange maiores possibilidades com relação à posição dos pontos de suporte da imagem esparsa. O mapeamento escolhido para os testes iniciais foi o linearmente proporcional descrito na Eq. 3.4. Como não havia estudos que relacionassem o valor de  $\tau$  ao tipo de distribuição probabilística adequada, decidimos utilizar um cálculo de proporcionalidade mais simples e que se aplica a diversos outros contextos.

Uma observação interessante a ser realizada é o fato de que o valor mínimo de  $\tau^{p-2}$  não precisa ser, necessariamente, 0, 1. Desde que esse valor esteja no intervalo entre 0 e 1, o algoritmo funciona corretamente. Contudo, em [40], Miosso *et al.* apresentam um estudo da alteração desse valor mínimo no qual o melhor desempenho – tanto com relação à relação sinal-erro quanto com relação a tempo de processamento – é atingido quando  $\tau^{p-2}$  está na faixa de 0, 1 e 0, 2.

Outra observação a ser feita é o fato de a função  $\mathbf{P}$  manter uma certa esparsidade ao avaliar a possibilidade da pertinência dos pontos do sinal à região de suporte. Como mencionado anteriormente, o *compressive sensing* apresenta maior eficiência quando o sinal a ser reconstruído possui uma alta esparsidade. Isso justifica a utilização, para essa modelagem em sinais de domínio unidimensional, de valores pequenos para a entrada de variância  $\sigma^2$ , uma vez que isso garante um menor espalhamento em torno do ponto  $\hat{x}_i$ .

### 3.1.1.2 Sinais de Domínio Bidimensional

Antes de aplicar o algoritmo proposto em imagens de fantasmas e em imagens reais de *MR*, o mesmo foi testado em imagens com esparsidade obtida artificialmente e de forma aleatória. Como no caso de sinais de domínio unidimensional, devemos gerar um sinal com esparsidade  $\eta$  que apresente espalhamentos em torno dos pontos  $\hat{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \eta$ ), pertencentes à região de suporte  $\Phi$ . Nesse caso, contudo, devemos levar em consideração que o espalhamento não ocorre apenas em uma direção, como mostrado na Fig. 3.2, mas o mesmo pode ocorrer em qualquer direção centrado em  $\hat{x}_i$ . Para tanto, é necessário que sejam definidas dois valores de variância, uma para o eixo vertical e outro para o eixo horizontal. Supomos que as variáveis horizontais e verticais são independentes e, portanto, a covariância entre os eixos foi considerada nula.

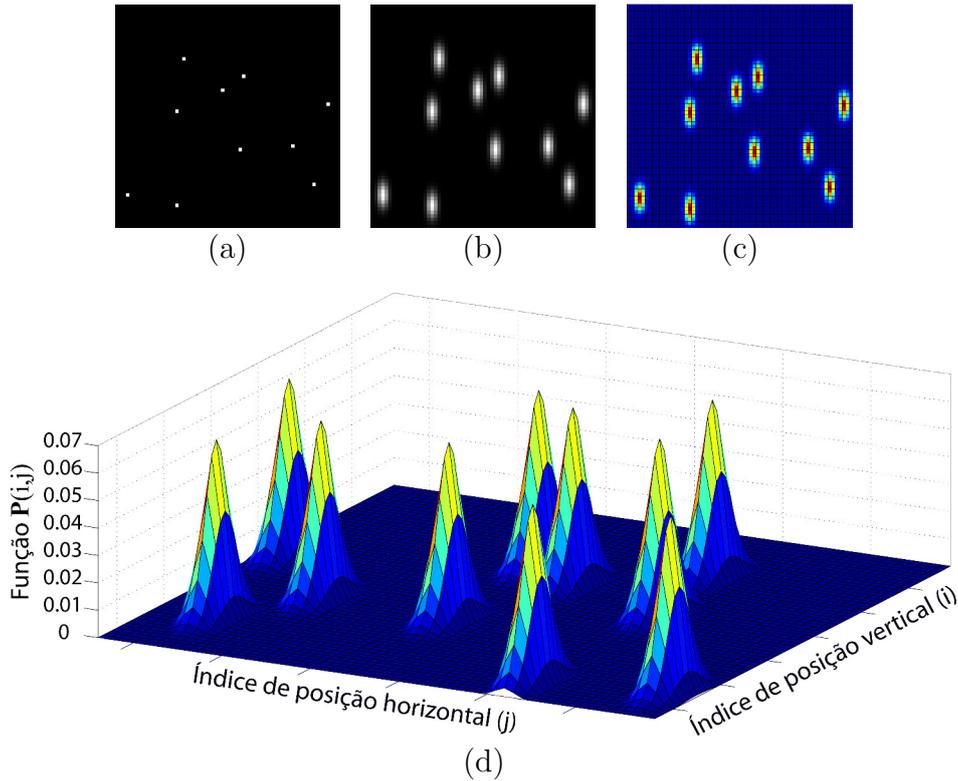
De modo análogo ao procedimento descrito na seção anterior, um sinal de domínio

bidimensional  $t \times t$  foi gerado, com um tamanho vetorizado  $N = t^2$ , que apresenta  $\eta$  posições não-nulas. O espalhamento em torno de cada ponto  $\hat{x}_i$  foi calculado utilizando uma distribuição Normal bivariada a partir da Eq. 3.5, que utiliza os comprimentos de cada eixo como as duas variáveis de entrada, ou seja,  $\mathbf{s} = [(1, 2, \dots, t) (1, 2, \dots, t)]$ .

$$\mathbf{p}_i = f(\mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|(2\pi)^2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{s}-\boldsymbol{\mu}_i)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{s}-\boldsymbol{\mu}_i)}, \quad (3.5)$$

onde a matriz  $\boldsymbol{\mu}_i$  corresponde às coordenadas da posição  $\hat{x}_i$ , e a matriz  $\Sigma$  é a matriz de covariância, onde a diagonal principal corresponde à variância de cada variável, e os demais elementos correspondem aos valores de covariância que aqui são considerados nulos.

Um espalhamento  $\mathbf{p}_i$  é calculado para cada posição  $\hat{x}_i$  e, a partir de 3.2, a distribuição  $\mathbf{P}$  da imagem é calculada. Um exemplo para uma imagem de tamanho  $64 \times 64$  ( $N = 4096$ ) é apresentado na figura 3.3.



**Figura 3.3.** Função de probabilidade  $\mathbf{P}$  para uma imagem de tamanho  $64 \times 64$ . Em (a), os  $\hat{x}_i$  pontos de suporte ( $\eta = 10$ ); em (b), a função de probabilidade  $\mathbf{P}$  calculada a partir dos pontos mostrados em (a); já em (c), é possível ver a função  $\mathbf{P}$  em um esquema de cores, que também pode ser visto por uma visão tridimensional em (d), calculada usando uma matriz de covariância  $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ .

### 3.1.1.3 Imagens de Fantomas

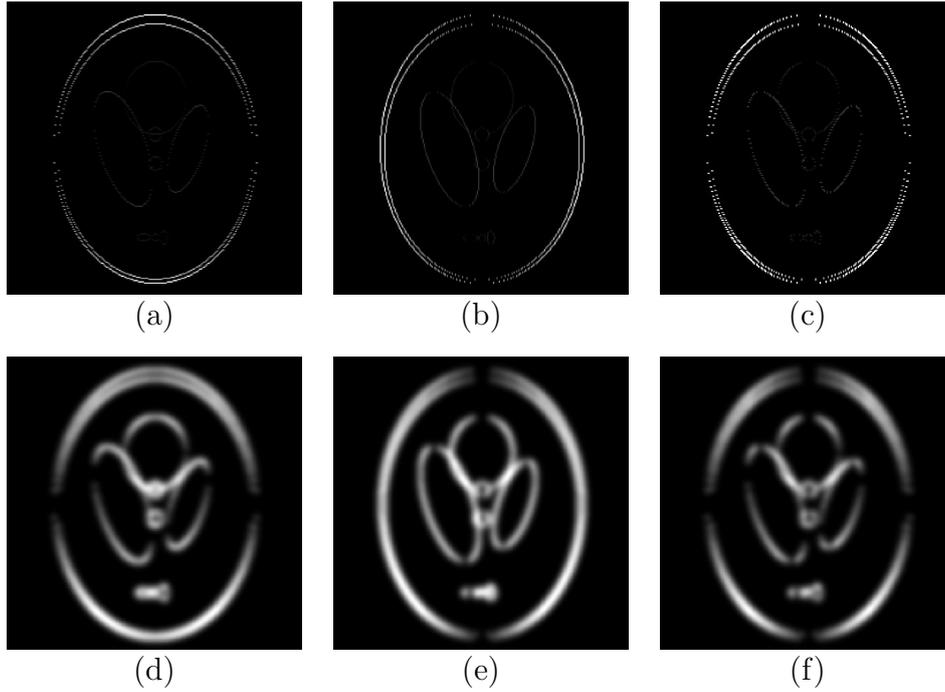
Imagens de fantasmas de Shepp-Logan (Fig. 2.5(a)) são geralmente utilizadas em testes para verificar o desempenho de algoritmos de reconstrução de imagens de *MR* pois eles se assemelham à algumas estruturas encontradas em imagens de *MR* do crânio. Iremos, portanto, aplicar o que foi desenvolvido para imagens nesses fantasmas de modo a avaliar as imagens reconstruídas e compará-las com outros métodos.

Dessa forma, iremos aplicar à representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$  do fantoma  $\mathbf{x}$  os algoritmos mencionados na seção anterior, de modo a calcular a distribuição de probabilidade  $\mathbf{P}$  referente a  $\hat{\mathbf{x}}$ , com uma variância inicialmente arbitrária. Para esparsificar a imagem, o método de pré-filtragem – com os três filtros definidos pela Eq. 2.14 – será aplicado à imagem, ou seja, teremos três representações esparsas de  $\hat{\mathbf{x}}$ . Assim sendo, para cada representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}_n$ , iremos encontrar uma função de probabilidade  $\mathbf{P}_n$  que será utilizada como informação a priori no método de reconstrução. A função  $\mathbf{P}_n$  é calculada como no caso de sinais de domínio bidimensional: uma distribuição normal bivariada ( $\mathbf{p}_i$ , calculada com base na Eq. 3.5) é associada a cada ponto não-nulo  $\hat{x}_i$ ; a função  $\mathbf{P}_n$  é então calculada com base na Eq. 3.2. A função  $\mathbf{P}_n$  após a aplicação de cada um dos filtros sobre o fantoma de Shepp-Logan é mostrado na Fig. 3.4, assim como cada representação esparsa após a filtragem.

### 3.1.1.4 Imagens Reais de MRI

No caso de imagens reais de *MRI*, o procedimento para a obtenção da função de espalhamento  $\mathbf{P}$  é similar ao utilizado para as imagens de fantasmas de Shepp-Logan. Ou seja, utiliza-se a pré-filtragem (cujos filtros estão esquematizados na Eq. 2.14) para obter três representações esparsas da imagem original  $\hat{\mathbf{x}}$ . Para cada representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}_n$ , calcula-se uma função de espalhamento  $\mathbf{P}_n$  utilizando a função Normal bivariada centrada nos pontos não-nulos  $\hat{x}_i$  da representação esparsa correspondente.

A imagem utilizada nas simulações e mostrada em 3.5 corresponde a um corte transversal da região craniana de um ser humano. Ela possui uma dimensão de  $512 \times 512$  e foi obtida do banco de dados *BIRN* (*Biomedics Informatics Research Network*) [47]. As versões filtradas dessa imagem e as funções de espalhamento  $\mathbf{P}_n$  calculadas correspondentes são mostradas em 3.6. Vale ressaltar que na Fig. 3.6, mostra-se o equivalente a 5% da informação a priori obtida através da imagem original 3.5.



**Figura 3.4.** Função de probabilidade  $\mathbf{P}$  para as versões filtradas de um fantoma de Shepp-Logan de tamanho  $256 \times 256$ . De (a) – (c), são mostradas as versões filtradas do fantoma após a aplicação dos filtros descritos pela Eq. 2.14; a partir dessas versões esparsas, calculam-se as funções  $\mathbf{P}$  correspondentes mostradas de (d) – (f)

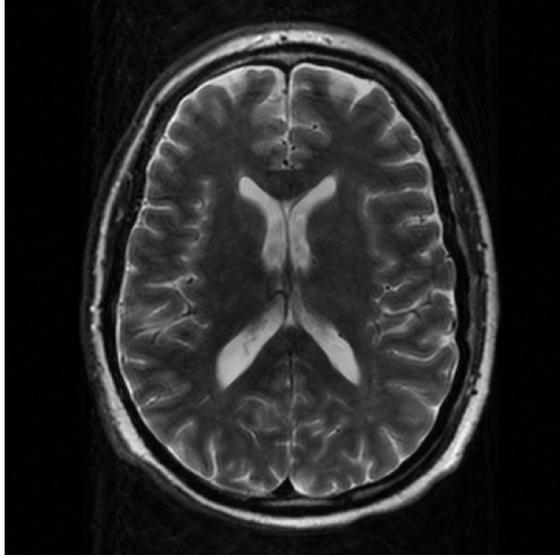
utilizando uma matriz de covariância  $\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ .

## 3.2 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

### 3.2.1 Sinais de Domínio Unidimensional

De modo a avaliar o desempenho do algoritmo que gera o espalhamento da região de suporte em sinais de domínio unidimensional, conforme descrito na subseção 3.1.1.1, alguns experimentos foram realizados. O objetivo desse experimento é comparar os resultados de reconstrução obtidos utilizando a abordagem estocástica com os métodos de reconstrução utilizando *compressive sensing* propostos por Miosso *et al.* em [25] e [40], quando aplicados a sinais de domínio unidimensional para, em seguida, avaliar a aplicação do mesmo método a sinais de domínio bidimensional e imagens de *MR*. Nesse primeiro experimento, a pré-filtragem proposta em [25] não foi utilizada, mas a minimização por  $\ell_p$  foi a escolhida em ambos os casos (com e sem informação a priori).

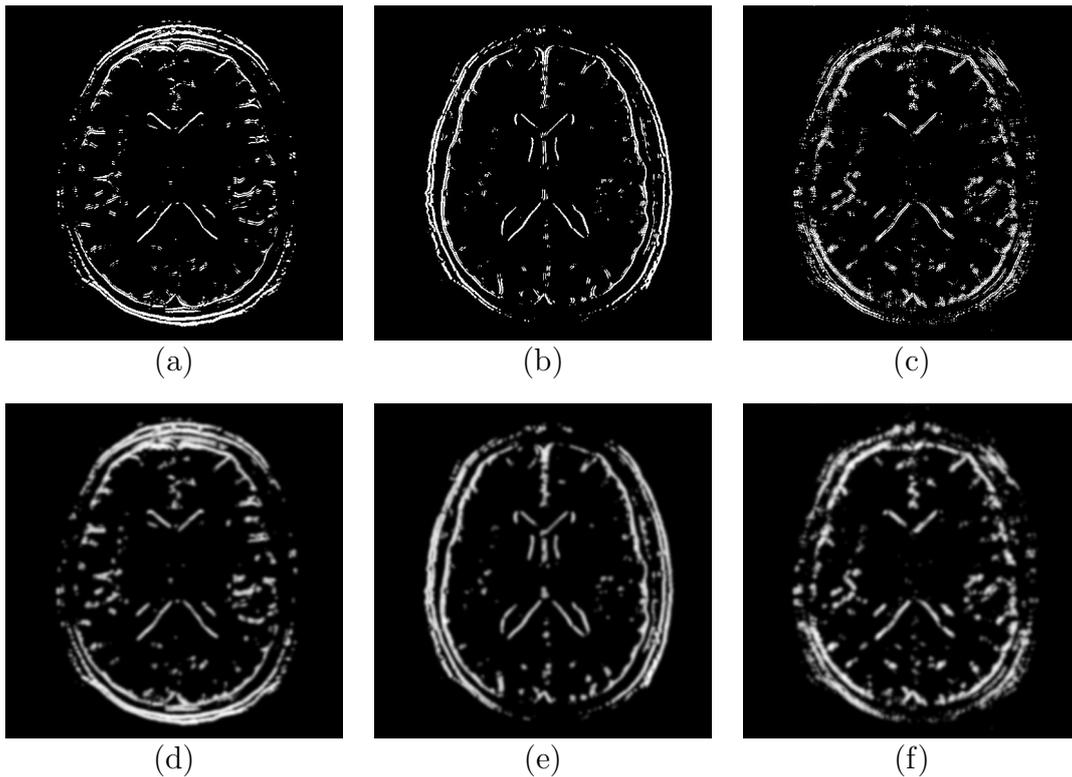
O experimento consiste em gerar sinais esparsos  $\hat{\mathbf{x}}$  de tamanho  $N = 1024$  com  $\eta = 50$  posições não-nulas ( $\Phi_o$ ). Inicialmente, gera-se um sinal de tamanho  $N$  no qual são alocados os  $\eta$  pontos aleatoriamente. Com base nessas posições, gera-se o espalhamento



**Figura 3.5.** Corte transversal do crânio obtido do bando de dados *BIRN*. A imagem possui dimensão  $512 \times 512$ .

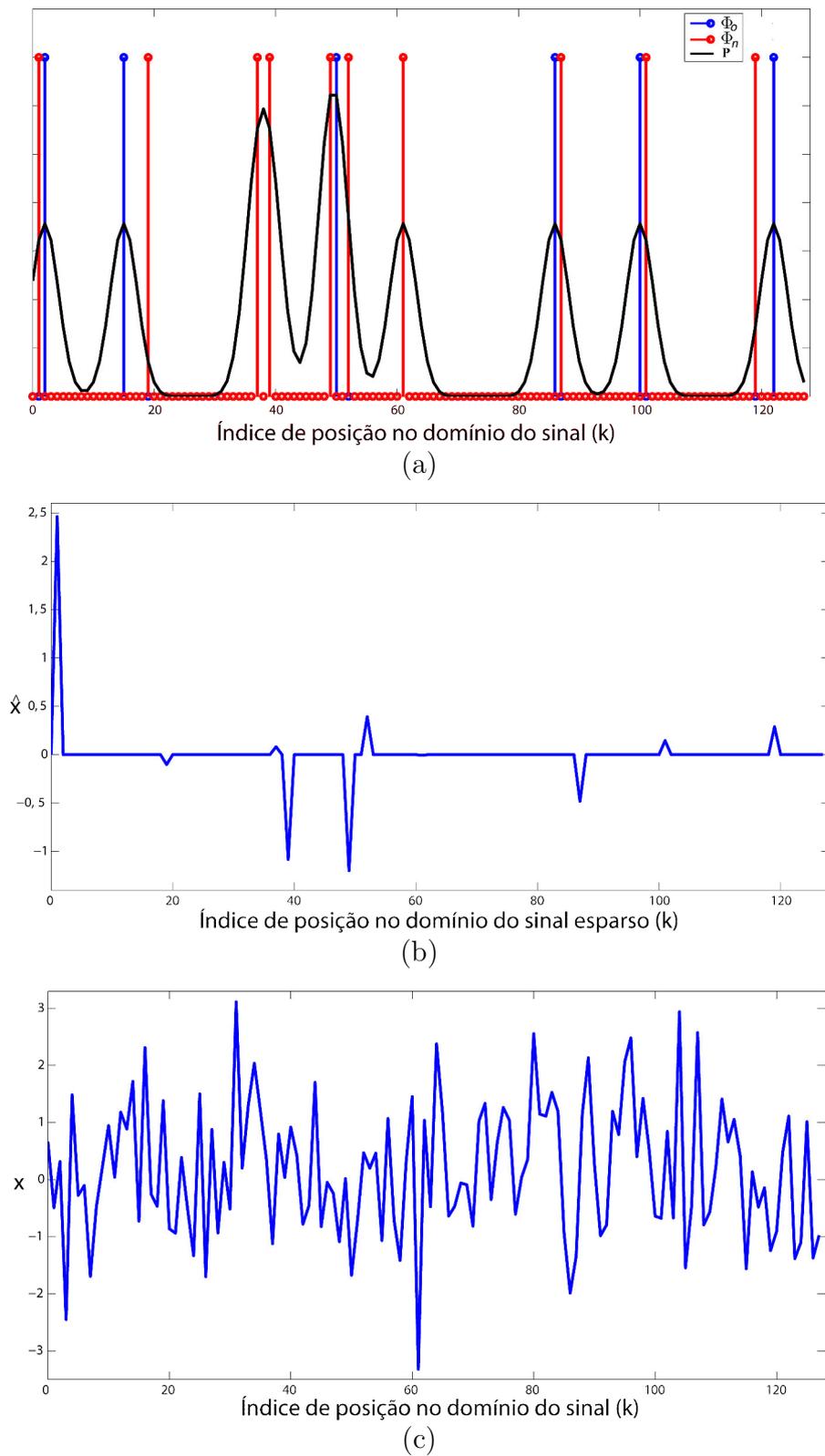
centrado em cada um desses pontos como explicado na seção 3.1.1.1 e mostrado nas Fig. 3.1 e 3.2. Com base na função de probabilidade  $\mathbf{P}$  encontrada, calcula-se o sinal esparso  $\hat{\mathbf{x}}$  da seguinte forma: gera-se um valor aleatório  $\rho_k$  entre 0 e 1;  $\rho_k$  é comparado ao valor que a função  $\mathbf{P}$  apresenta na posição  $k$ ; se  $\rho_k < \mathbf{P}(k)$ , então  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  apresenta um valor aleatório; caso contrário,  $\hat{\mathbf{x}}(k) = 0$ . No ponto  $k + 1$ , um novo valor aleatório  $\rho_{k+1}$  é gerado e comparado ao valor de  $\mathbf{P}(k + 1)$ , de modo a atribuir a  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  um valor nulo ou não-nulo. Isso se repete ao longo de todo o comprimento do sinal e até que  $\hat{\mathbf{x}}$  apresente  $\eta$  pontos não-esparso ( $\Phi_n$ ). A partir do sinal  $\hat{\mathbf{x}}$  contruído, encontra-se um sinal  $\mathbf{x}$  utilizando um par de matrizes de transformação  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^{-1}$  aleatórias.

A Fig. 3.7 ilustra esse experimento para o sinal de tamanho  $N = 128$  com o suporte  $\Phi_o$  mostrado anteriormente na Fig. 3.1. No gráfico 3.7(a), são mostrados os pontos de suporte  $\Phi_o$ , a curva  $\mathbf{P}$  correspondente e os pontos de suporte reais  $\Phi_n$  obtidos a partir da representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$  (Fig. 3.7(b)). Os gráficos 3.7(b) e 3.7(c) apresentam o sinal esparso  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{x}$ , respectivamente, que foram calculados através de uma matriz de transformada  $\mathbf{T}$  aleatória. É possível perceber pelas posições nos suportes  $\Phi_o$  e  $\Phi_m$ , na Fig. 3.7(a), que nem todas as posições de  $\Phi_m$  coincidiram com as posições de  $\Phi_o$ . Esse comportamento é esperado uma vez que as posições de  $\Phi_m$  foram obtidas diretamente de  $\hat{\mathbf{x}}$  que, por sua vez, foi gerado levando em consideração o espalhamento modelado pela função  $\mathbf{P}$ .



**Figura 3.6.** Função de probabilidade  $\mathbf{P}$  para as versões filtradas de um corte transversal real do crânio humano, de dimensão  $512 \times 512$ . De (a) – (c), são mostradas as versões filtradas da imagem após a aplicação dos filtros descritos pela Eq. 2.14; a partir dessas versões esparsas, calculam-se as funções  $\mathbf{P}$  correspondentes mostradas de (d) – (f)

utilizando uma matriz de covariância  $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ .



**Figura 3.7.** Construção de um sinal esparso  $\hat{x}$  a partir de suas posições de suporte. Em (a), as posições no suporte  $\Phi_o$ , a curva  $\mathbf{P}$  e as posições no suporte  $\Phi_n$ ; Em (b), o sinal esparso  $\hat{x}$  obtido a partir da curva  $\mathbf{P}$  e, em (c), o sinal  $\mathbf{x}$  obtido após aplicar a matriz  $\mathbf{T}^{-1}$  correspondente.

Uma vez que  $\mathbf{x}$  e sua representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$  foram calculados, é possível realizar a reconstrução de  $\mathbf{x}$  usando técnicas de *compressive sensing*, a partir de  $\ell$  medidas tomadas utilizando uma matriz de medidas  $\mathbf{M}_{\ell \times N}$  que seja i.i.d. com distribuição Gaussiana, conforme mostrado anteriormente. Inicialmente, o sinal foi reconstruído utilizando *compressive sensing* sem informação a priori, a partir da minimização da  $\ell_p$  com  $p = 0, 1$ . Esse foi o método de otimização utilizado nas demais reconstruções realizadas. Em seguida, calculamos os sinais reconstruídos utilizando o algoritmo de *compressive sensing* com informação a priori proposto por Miosso *et al.* em [40] e descrito na seção 2.3. Contudo, a informação a priori utilizada em cada reconstrução é fornecida de formas diferentes: (i) a informação de suporte do sinal  $\Phi_o$  é fornecida ao algoritmo, ou seja, as posições originais de suporte que foram utilizadas para gerar  $\mathbf{P}$  e  $\hat{\mathbf{x}}$  são fornecidas, de forma a alterar o valor de  $\tau^{p-2}$  apenas nessas posições; (ii) a informação de suporte de  $\hat{\mathbf{x}}$  ( $\Phi_n$ ) é fornecida ao algoritmo, ou seja, as posições fornecidas são, de fato, não nulas e, como no caso (i), irão alterar o peso  $\tau^{p-2}$  apenas nos locais indicados; (iii) ao invés de fornecer a posição na qual a informação é não-nula, foi fornecido ao algoritmo a função  $\mathbf{P}$  calculada e, desse modo, o valor de  $\tau^{p-2}$  apresenta  $N$  valores dentro de uma faixa (entre 0, 1 e 1) de acordo com a probabilidade do ponto de pertencer ou não à região de suporte. Em (iii), portanto, é fornecido ao algoritmo um vetor  $\tau^{p-2}$  de tamanho  $N$  que apresenta valores entre 0, 1 e 1, que foram mapeados, ponto a ponto, com relação aos valores de  $\mathbf{P}$ , como mostrado anteriormente na Eq. 3.3. Esse mapeamento é feito de forma inversamente proporcional, uma vez que as posições que apresentam maior probabilidade de pertencerem ao suporte são atribuídas ao menor valor de  $\tau^{p-2}$  ( $\tau^{p-2} = 0, 1$ ).

Espera-se, dessa forma, que o desempenho de (ii) seja melhor que o de (i) e (iii), pois, em (iii), a posição real dos pontos não-nulos de  $\hat{\mathbf{x}}$  é fornecida; diferentemente de  $\Phi_o$  que pode apresentar posições erradas. Uma vez que a função  $\mathbf{P}$  contém a probabilidade de um ponto pertencer ou não à região de suporte, é esperado que o desempenho de (iii) seja superior ao de (i), pois a função de probabilidade já apresenta um erro associado à alocação de um determinado ponto à região de suporte do sinal; enquanto que a abordagem em (i) consiste em considerar que os pontos que pertencem a  $\Phi_o$  são pontos do suporte, o que não é necessariamente verdade.

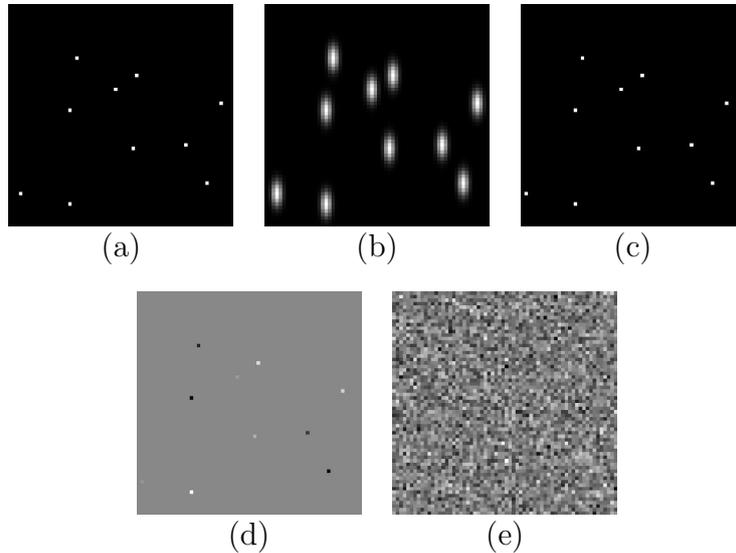
### 3.2.2 Sinais de Domínio Bidimensional

O experimento realizado utilizando sinais de domínio bidimensional é muito similar ao descrito na seção 3.2.1. A principal diferença é que, neste caso, iremos apresentar o sinal como uma matriz  $t \times t$ . Ou seja, iremos gerar sinais esparsos  $\hat{\mathbf{x}}$  de tamanho  $N = 4096$  ( $64 \times 64$ ), com uma certa quantidade  $\eta$  de posições não-nulas ( $\Phi_o$ ). No sinal de dimensão

$64 \times 64$  são alocadas as  $\eta$  posições do suporte e, ao redor dessas posições, o espalhamento é calculado como descrito na seção 3.1.1.2 e mostrado na Fig. 3.3. Uma vez localizados os pontos de suporte e calculado o espalhamento ao redor dos mesmos, é necessário encontrar o sinal esparso  $\hat{\mathbf{x}}$  correspondente. O procedimento para o cálculo é idêntico ao caso de domínio unidimensional: ao longo de todo o comprimento do sinal e até que existam  $\eta$  pontos não-nulos, compara-se o valor aleatório  $\rho_k$  (entre 0 e 1) com o valor da função  $\mathbf{P}$  na posição  $k$ ; o valor atribuído ao sinal esparso na posição  $k$  é, então, como definido na Eq. 3.6. A partir do sinal  $\hat{\mathbf{x}}$  encontra-se o sinal  $\mathbf{x}$  usando um par de matrizes  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^{-1}$  aleatórias.

$$\hat{x}_k = \begin{cases} \text{valor aleatório,} & \text{se } \rho_k < \mathbf{P}(k) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.6)$$

A Fig. 3.8 mostra o experimento para uma imagem de dimensão  $64 \times 64$  ( $N = 4096$ ) como a mostrada na Fig. 3.3, com  $\eta = 10$ . São apresentados os pontos de suporte originais  $\Phi_o$  (Fig. 3.8(a)), a partir dos quais calcula-se a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  (Fig. 3.8(b)) e, em seguida, o sinal esparso  $\hat{x}$  (Fig. 3.8(d)) com o novo suporte  $\Phi_n$  (Fig. 3.8(c)). Novamente, como no caso de sinais de domínio unidimensional, nem todas as posições não-nulas de  $\hat{\mathbf{x}}$  coincidem com as posições originais de  $\Phi_o$ , uma vez que a representação esparsa é obtida do sinal  $\mathbf{P}$ .



**Figura 3.8.** Construção de um sinal esparso  $\hat{\mathbf{x}}$  de domínio bidimensional a partir de suas posições de suporte. Em (a), as posições no suporte  $\Phi_o$ ; Em (b), o sinal  $\mathbf{P}$ , onde é mostrado o espalhamento em torno de cada ponto  $\hat{x}_i$ ; e em (c), as posições no suporte  $\Phi_n$ . A partir do espalhamento da função  $\mathbf{P}$ , constrói-se o sinal esparso mostrado em (d) e, em (e), o sinal  $\mathbf{x}$  obtido após aplicar a matriz  $\mathbf{T}^{-1}$  correspondente.

De forma análoga ao que foi descrito em 3.2.1, iremos reconstruir o sinal  $\mathbf{x}$  a partir de medidas  $\ell$  tomadas usando uma matriz i.i.d.  $\mathbf{M}_{\ell \times N}$  usando um método direto de reconstrução. O sinal é, então, reconstruído utilizando *CS* sem informação a priori com  $p = 0, 1$ ; em seguida, utilizamos informação a priori das três formas descritas anteriormente: (i) a informação de suporte do sinal  $\Phi_o$  é fornecida ao algoritmo; (ii) a informação de suporte de  $\hat{\mathbf{x}}$  ( $\Phi_n$ ) é fornecida ao algoritmo; (iii) ao invés de fornecer a posição na qual a informação é não-nula, foi fornecido ao algoritmo a função  $\mathbf{P}$  calculada, sendo que neste último caso, o vetor  $\tau^{p-2}$  apresenta valores mapeados entre 0 e 1 que são proporcionais aos valores de  $\mathbf{P}$ , como calculado na Eq. 3.4. Esperamos que os resultados obtidos por (ii) sejam melhores que os apresentados por (i) e (iii), já que em (ii) são fornecidas as posições exatas de cada ponto pertencente ao suporte. Além disso, é esperado que (iii) apresente um desempenho melhor que (i), já que o espalhamento descrito por  $\mathbf{P}$  compreende uma tolerância caso um ponto do suporte se mova.

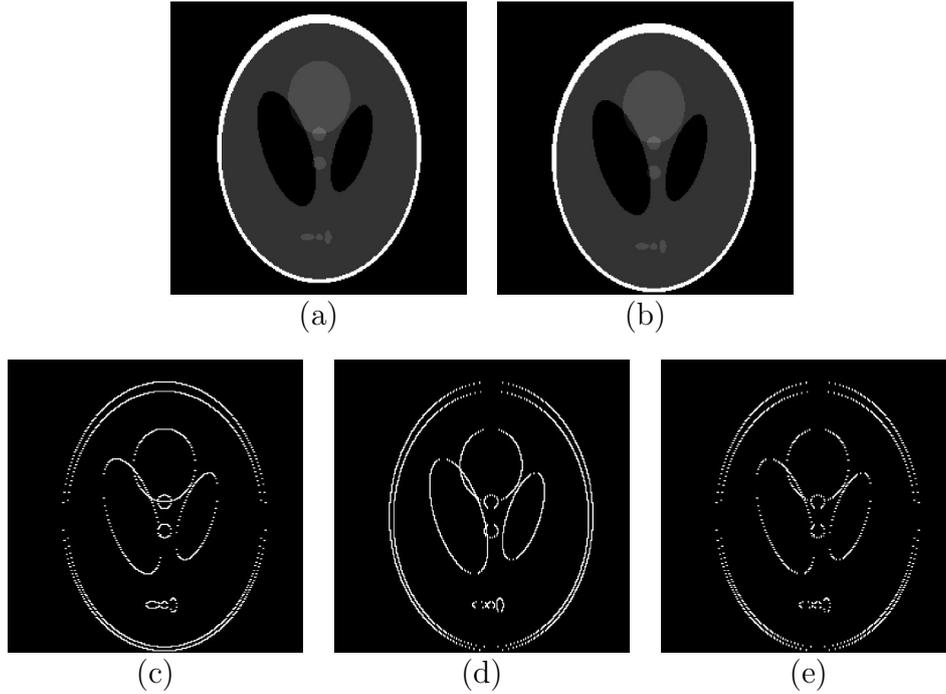
### 3.2.3 Imagens de Fantomas

Para analisar o desempenho do algoritmo em imagens de fantomas de Shepp-Logan, um experimento de reconstrução foi proposto: a partir de um fantoma de tamanho  $256 \times 256$  como na Fig. 3.9(a), iremos reconstruir uma versão desse fantoma que apresenta um deslocamento (vertical e/ou horizontal) 3.9(b). Ou seja, iremos deslocar o fantoma original e reconstruí-lo utilizando as técnicas mencionadas até então para que possamos comparar os diferentes desempenhos apresentados por elas.

Inicialmente iremos, portanto, gerar um fantoma deslocado. Esse fantoma deve, então, ser reconstruído a partir das informações a priori da representação esparsa do fantoma original (Fig. 3.4(a), (b) e (c)), que aqui representam  $\Phi_o$ , e a partir do espalhamento  $\mathbf{P}$  calculado (Fig. 3.4(d), (e) e (f)). Além disso, as informações da representação esparsa do fantoma deslocado ( $\Phi_n$ ) também serão utilizadas para comparação (Fig. 3.9(c), (d) e (e)).

### 3.2.4 Imagens Reais de MRI

Para que possamos avaliar a eficácia da informação a priori estocástica desenvolvida na reconstrução de imagens reais de *MRI*, propomos um experimento inicial que consiste na reconstrução da imagem 3.5 em quatro situações: (i) sem informação a priori; (ii) com informação a priori não-exata ( $\Phi_o$ ); (iii) com informação a priori ideal ( $\Phi_n$ ); e (iv) com a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ . Nesse experimento, variamos a quantidade de informação

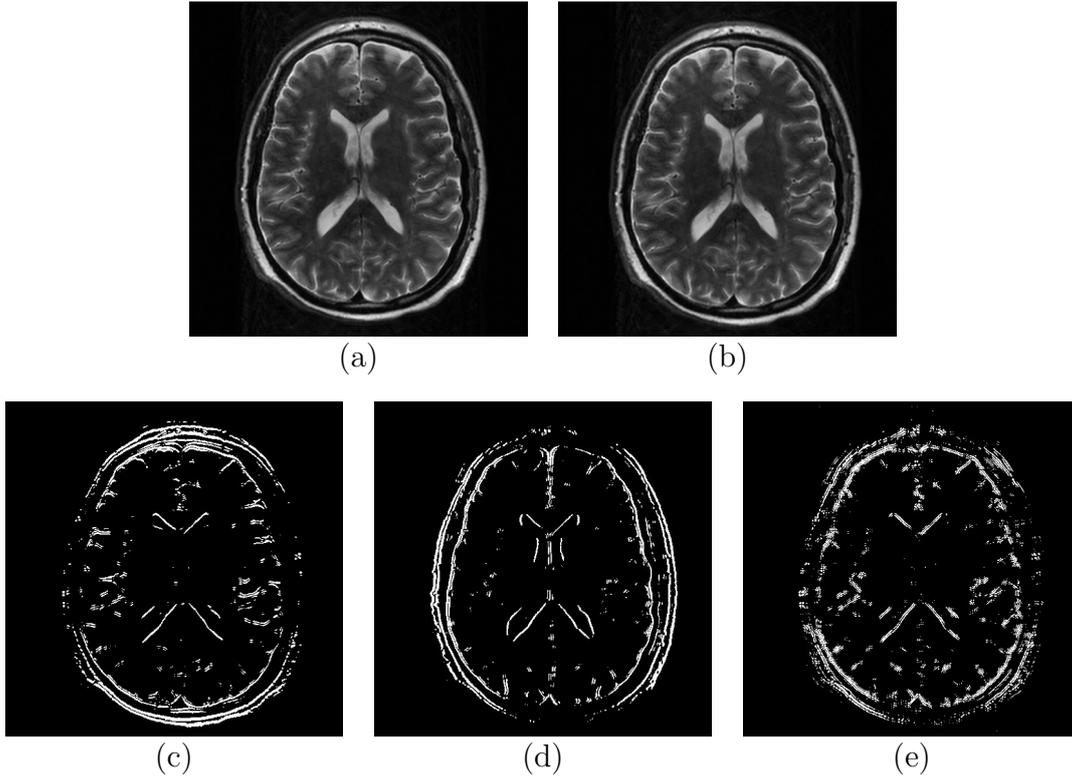


**Figura 3.9.** Representação do sinal  $\hat{x}$  e de sua representação deslocada, com as componentes filtradas a serem utilizadas como informação a priori. Em (a), o fantoma de Shepp-Logan original; em (b), o fantoma deslocado; e de (c – e), o novo conjunto de pontos  $\Phi_n$  a ser utilizado como informação a priori.

a priori utilizada na reconstrução. Esse é um aspecto importante uma vez que, ao fornecer muita informação proveniente da imagem original, podemos fornecer ao algoritmo informação não-relevante para a reconstrução e até mesmo que inviabilize a reconstrução correta da imagem, como pontos de ruído.

Em seguida, iremos reconstruir uma versão deslocada da imagem inicial. Ou seja, realizaremos um deslocamento em 3.10(a), resultando em 3.10(b), e iremos reconstruir 3.10(a) utilizando os quatro conjuntos de informação a priori mencionados anteriormente para diferentes porcentagens de informação a priori.

Finalmente, iremos identificar o ponto no qual a quantidade de informação a priori a ser utilizada para a reconstrução é adequada, para avaliarmos o impacto da quantidade de medidas na reconstrução. Para tanto, iremos reconstruir a imagem original a partir das informações obtidas de sua versão deslocada, variando a quantidade de medidas de  $\ell = 25$  linhas radiais até  $\ell = 150$  linhas radiais.



**Figura 3.10.** Representação do sinal  $\hat{\mathbf{x}}$  e de sua representação deslocada, com as componentes filtradas a serem utilizadas como informação a priori. Em (a), o corte transversal craniano original; em (b), a imagem deslocada; e de (c – e), o novo conjunto de pontos  $\Phi_n$  a ser utilizado como informação a priori.

### 3.3 METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO

#### 3.3.1 Sinais de Domínio Unidimensional

Para validar as comparações descritas em 3.2.1, foram realizados dois experimentos.

No primeiro experimento, foram gerados 10000 sinais de tamanho  $N = 1024$ . Cada um desses sinais, foi reconstruído a partir de uma das três abordagens que utilizam informação a priori mencionadas: com informação a priori determinística fornecida por  $\Phi_o$ , com informação a priori determinística fornecida por  $\Phi_n$  e com informação a priori estocástica fornecida por  $\mathbf{P}$ . Além disso, foram utilizadas cinco quantidades de medidas diferentes para a reconstrução:  $\ell_1 = \eta + 1$ ,  $\ell_2 = 2\eta$ ,  $\ell_3 = 3\eta$ ,  $\ell_4 = 4\eta$  e  $\ell_5 = 5\eta$ . Para cada sinal reconstruído, foi calculada a relação sinal-erro (*SER*, do inglês *signal-to-error ratio*) entre o sinal reconstruído ( $\mathbf{x}^*$ ) e o sinal original ( $\mathbf{x}$ ) da seguinte forma:

$$SER = 20 \log \frac{x_{RMS}}{e_{RMS}} \quad (3.7)$$

onde  $e_{RMS} = \sqrt{\sum_{k=1}^N (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k))^2}$  e  $x_{RMS}^*$  é o valor RMS do sinal reconstruído  $\mathbf{x}^*$ . Com base nos valores de  $SEER$  de cada sinal, calculou-se a  $SEER$  média ( $\overline{SEER}$ ) para cada abordagem de reconstrução e para cada valor de medidas utilizado. Dessa forma, para cada valor de medidas  $\ell$ , foram levantadas três curvas que permitem analisar a variação da  $SEER$  com base na abordagem de reconstrução utilizada.

Um outro experimento realizado constituiu na reconstrução de 1000 sinais de tamanho  $N = 1024$  utilizando algumas das abordagens de reconstrução mencionadas: sem informação a priori, com informação a priori correta e com informação estocástica. Para esse experimento, os valores das medidas utilizados variaram em um intervalo de  $\ell = [\eta + 1, 5\eta]$ . Assim como no experimento anterior, calculou-se a  $\overline{SEER}$  para cada ponto, ou seja, para cada valor de  $\ell$ , utilizando cada uma das abordagens de reconstrução. Dessa forma, quatro curvas que descrevem o comportamento da  $\overline{SEER}$  em função da quantidade de medidas foram levantadas.

### 3.3.2 Sinais de Domínio Bidimensional

Neste primeiro momento, foi realizado um estudo de caso que consiste no seguinte: gerou-se um sinal de dimensão  $64 \times 64$  com esparsidade  $\eta = 50$  aleatoriamente. A partir desse sinal, calcula-se o espalhamento  $\mathbf{P}$  e a representação esparsa  $\hat{\mathbf{x}}$  a ser reconstruída. Esse sinal é, então, reconstruído utilizando *compressive sensing* com  $p = 0, 1$  e três diferentes tipos de informação a priori: a informação determinística parcialmente correta ( $\Phi_o$ ), a informação determinística correta ( $\Phi_n$ ), e a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ . Essa reconstrução foi realizada utilizando quantidades variadas de medidas:  $\ell_1 = \eta + 1$ ,  $\ell_2 = 2\eta$ ,  $\ell_3 = 3\eta$ ,  $\ell_4 = 4\eta$  e  $\ell_5 = 5\eta$ . Para cada sinal reconstruído, foi calculada a relação sinal-erro ( $SEER$ ) entre o sinal reconstruído ( $\mathbf{x}^*$ ) e o sinal original ( $\mathbf{x}$ ), conforme Eq. 3.7.

### 3.3.3 Imagens de Fantomas

Realizamos um estudo de caso que permita analisar o potencial desempenho do algoritmo aqui proposto, quando aplicado em imagens de fantomas de Shepp-Logan. Nesse experimento, realizamos a reconstrução de um fantoma de tamanho  $256 \times 256$  deslocada a partir de informações obtidas de diferentes regiões de suporte. O deslocamento realizado foi de 8 linhas (vertical) e 7 colunas (horizontal), como o mostrado na Fig. 3.9(b). A reconstrução dessa imagem deslocada foi realizado a partir de  $\ell = 15$  linhas de medidas obtidas das representações esparsas em três diferentes cenários: (i) a informação a priori utilizada é

a obtida através da pré-filtragem do fantoma original ( $\Phi_o$ , mostrado nas Fig. 3.4(a), (b) e (c)) – utilizando os filtros descritos em 2.14; (ii) utilizando a informação de  $\Phi_n$ , ou seja, os pontos de suporte da versão deslocada e filtrada do fantoma (Fig. 3.9(c), (d) e (e)); e (iii) utilizando o espalhamento  $\mathbf{P}$  calculado para cada versão filtrada do fantoma original (Fig. 3.4(d), (e) e (f)).

Para cada imagem reconstruída ( $\mathbf{x}^*$ ), calculou-se a relação sinal-erro (*SER*) com relação ao fantoma original ( $\mathbf{x}$ ), conforme a equação 3.7.

### 3.3.4 Imagens Reais de MRI

O primeiro experimento realizado utilizando o corte transversal do crânio 3.5 consiste em reconstruir a imagem sem nenhum deslocamento, mas variando a porcentagem de informação a priori utilizada. A reconstrução foi realizada utilizando  $\ell = 50$  linhas de radiais, com uma matriz de covariância de  $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ , e com a porcentagem de informação a priori variando de 0% a 100%. A reconstrução foi feita para quatro cenários distintos: (i) sem a utilização de informação a priori; (ii) com informação a priori não exata ( $\Phi_o$ , Fig. 3.6(a–c)); (iii) com informação a priori ideal ( $\Phi_n$ , Fig. 3.10(c–e)); e (iv) utilizando a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ , Fig. 3.6(d–f).

Em seguida, deslocamos a imagem da Fig. 3.5 em duas linhas e duas colunas e a reconstruímos variando a porcentagem de informação a priori utilizada. A reconstrução foi realizada utilizando  $\ell = 50$  linhas de radiais, com uma matriz de covariância de  $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ , e com a porcentagem de informação a priori variando de 0% a 100%. Além disso, fizemos as reconstruções considerando também os quatro cenários mencionados anteriormente. Após esse experimento, identificamos o percentual de prior information a ser utilizado para avaliar a influência da quantidade de medidas  $\ell$  na reconstrução: reconstruímos, para os quatro cenários, a imagem deslocada variando o número de linhas radiais de  $\ell = 25$  a  $\ell = 150$  linhas radiais.

O mesmo procedimento anterior foi repetido mas, dessa vez, considerando um deslocamento maior de 8 linhas (vertical) e 7 colunas (horizontal). Além disso, também realizamos a reconstrução das duas imagens deslocadas (deslocamento  $2 \times 2$  e  $7 \times 8$ ) utilizando uma matriz de covariância de  $\Sigma = \begin{bmatrix} 55 & 0 \\ 0 & 55 \end{bmatrix}$ , para avaliarmos a influência desse parâmetro na qualidade da reconstrução.

Para cada imagem reconstruída ( $\mathbf{x}^*$ ), calculou-se a relação sinal-erro (*SER*) com

relação à imagem original ( $\mathbf{x}$ ), conforme a Eq. 3.7, e o índice *SSIM* (*Structural Similarity index*) correspondente [48, 49].

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

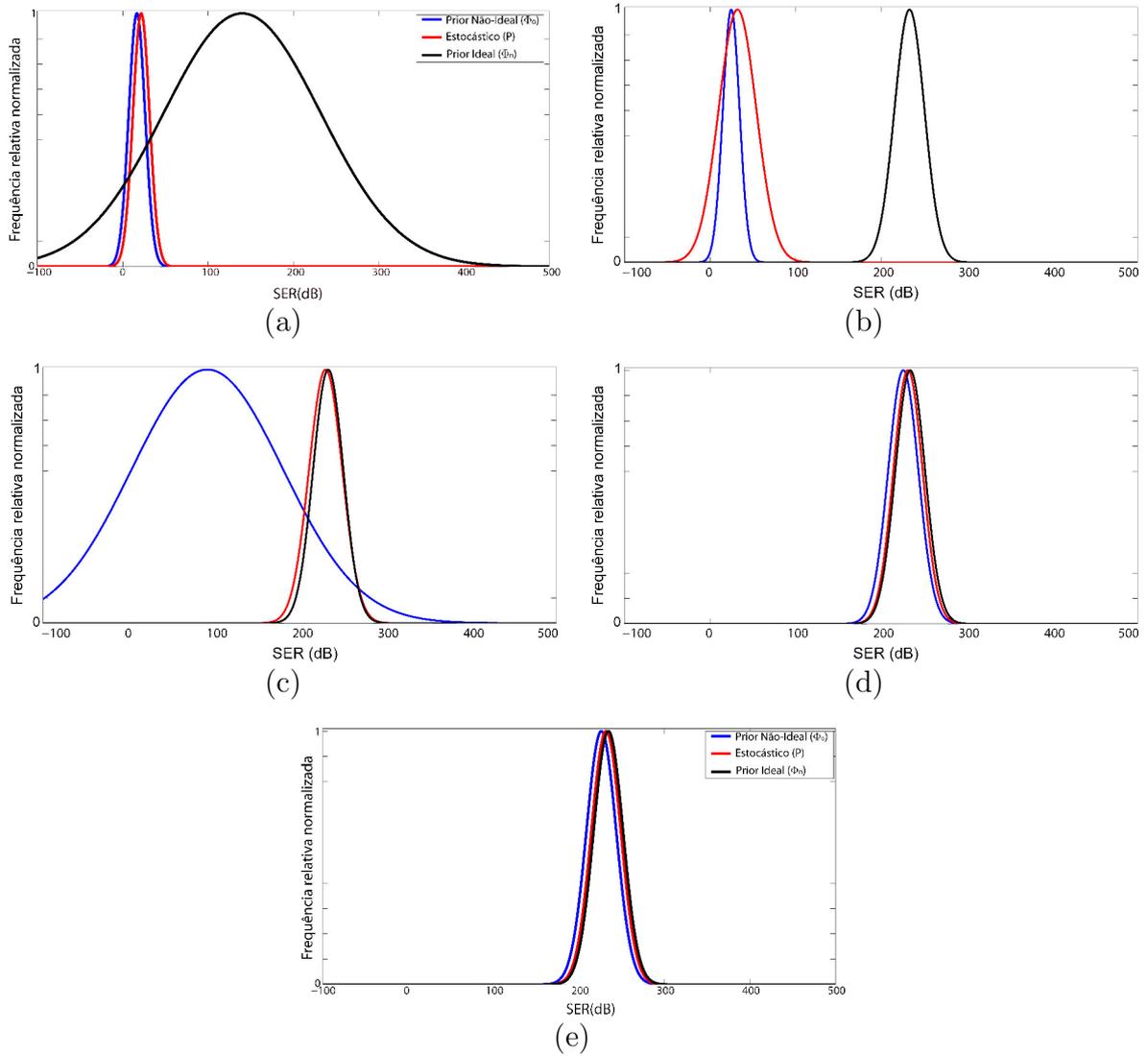
Nesta seção, apresentamos os resultados dos experimentos realizados. Serão mostrados e discutidos os resultados dos experimentos envolvendo os sinais de domínio unidimensional, bidimensional, com imagens de fantasmas e com as imagens reais de *MRI*.

### 4.1 SINAIS DE DOMÍNIO UNIDIMENSIONAL

Os resultados dos experimentos descritos na seção anterior utilizando sinais de domínio unidimensional são aqui apresentados. No primeiro experimento, foram gerados 10000 sinais de tamanho  $N = 1024$  com esparsidade  $\eta = 50$ . A partir desses sinais, foram gerados o sinal de espalhamento  $\mathbf{P}$  e as regiões de suporte  $\Phi_o$  e  $\Phi_n$ , que são as informações utilizadas no processo de reconstrução. A partir dos sinais reconstruídos, então, são calculadas as relações sinal-erro médias ( $\overline{SER}$ ) para cada uma das abordagens de reconstrução: utilizando a informação a priori original ( $\Phi_o$ ), a informação a priori correta ( $\Phi_n$ ) e a função de espalhamento ( $\mathbf{P}$ ).

Na Fig. 4.1 são apresentados histogramas que mostram o valor da relação sinal-erro média encontrada ao se reconstruir os sinais utilizando diferentes quantidades de medidas:  $\eta + 1$  (a),  $2\eta$  (b),  $3\eta$  (c),  $4\eta$  (d) e  $5\eta$  (e). Esse valor médio  $\overline{SER}$  corresponde ao valor no eixo x do pico da curva e, ao seu redor, as curvas mostram como os valores da  $\overline{SER}$  variam em torno dessa média. Uma outra forma de se analisar esses valores, é através de seus desvios padrões que são também apresentados na Tab.4.1.

Pela análise dos histogramas na Fig. 4.1 e dos dados da Tab. 4.1, é possível perceber que a abordagem que utiliza a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  apresentou uma relação sinal-erro média maior do que a abordagem que utilizou como informação a priori  $\Phi_o$ , ou seja, as posições que não são totalmente corretas. A abordagem que apresenta todos os pontos de suporte correto apresenta um valor de  $\overline{SER}$  maior em todos os casos, como esperado. O fato de a função de espalhamento obter melhores resultados pode ser explicado pelo fato de ela contemplar, com pesos diferentes, as posições nas quais o ponto pode ou não ser nulo, ao se atribuir uma probabilidade à pertinência de vários pontos à região



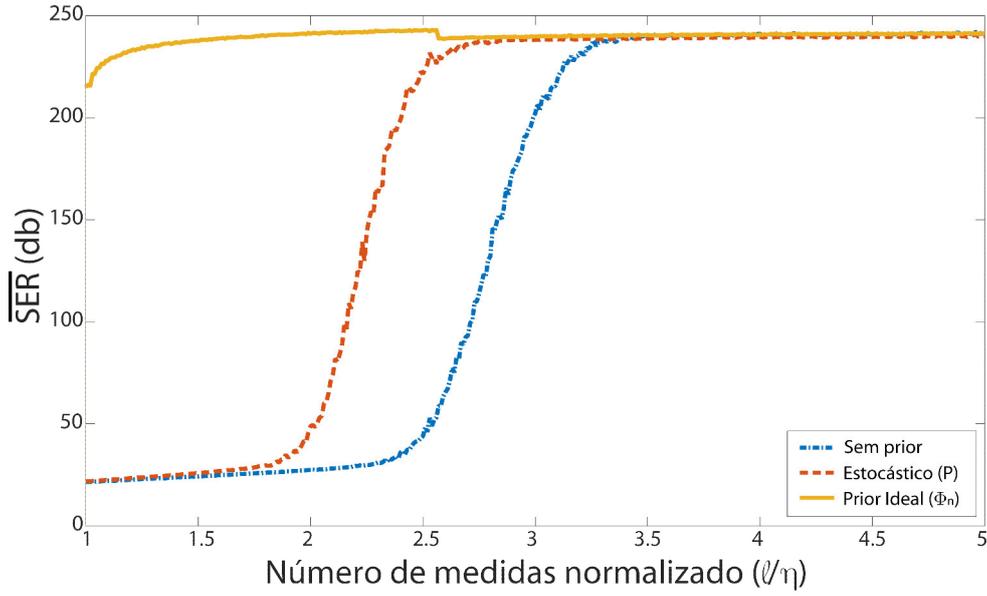
**Figura 4.1.** Histogramas que apresentam o valor médio da  $SE\bar{R}$  e sua distribuição em torno da  $\overline{SE\bar{R}}$ . Cada histograma corresponde ao desempenho do algoritmo de reconstrução ao se utilizar diferentes quantidades de medidas  $\ell$ : (a)  $\eta + 1$ , (b)  $2\eta$ , (c)  $3\eta$ , (d)  $4\eta$  e (e)  $5\eta$ .

de suporte do sinal esparsos; enquanto que, ao se utilizar as informações do suporte  $\Phi_o$ , a utilização da informação a priori determinística determina essas posições como sendo pertencentes ao suporte.

O outro experimento que foi realizado utilizando sinais de domínio unidimensional utilizou 1000 sinais de tamanho  $N = 1024$  que foram reconstruídos utilizando diferentes valores de medidas  $\ell$  em um intervalo que vai de  $\eta + 1$  a  $5\eta$ . Os valores da relação sinal-erro média calculados para esse experimento são apresentados no gráfico da Fig. 4.2. A partir desse gráfico é possível ver como variam os valores de relação sinal-erro média em função da quantidade de medidas utilizadas na reconstrução utilizando a informação a priori de três formas distintas: sem informação a priori, informação determinística

**Tabela 4.1.** Relação sinal-erro média ( $\overline{SER}$ ) e desvio padrão ( $\sigma$ ) para os sinais de domínio unidimensional reconstruídos.

Medidas	$\overline{SER} \pm \sigma$ (dB)		
	$\Phi_o$	$\Phi_n$	$\mathbf{P}$
$1\eta + 1$	$16,62 \pm 9,57$	$139,98 \pm 92,10$	$21,71 \pm 9,72$
$2\eta$	$24,82 \pm 9,76$	$233,18 \pm 17,50$	$32,16 \pm 22,03$
$3\eta$	$92,22 \pm 88,52$	$233,45 \pm 17,66$	$230,42 \pm 19,42$
$4\eta$	$226,04 \pm 17,62$	$234,16 \pm 17,35$	$231,52 \pm 17,04$
$5\eta$	$226,01 \pm 17,42$	$234,27 \pm 17,21$	$231,58 \pm 17,18$



**Figura 4.2.**  $\overline{SER}$  para diferentes valores de medidas  $\ell$  variando no intervalo  $\ell = [1\eta + 1, 5\eta]$ .

e completamente correta ( $\Phi_n$ ) e estocástica (função de espalhamento  $\mathbf{P}$ ). Percebe-se novamente que quando a informação a priori é correta ( $\Phi_n$ ), a qualidade objetiva do sinal reconstruído é sempre superior às demais técnicas, mesmo que elas se aproximem conforme a quantidade de medidas utilizadas aumenta. É interessante, contudo, perceber que a abordagem estocástica ( $\mathbf{P}$ ) apresenta um desempenho superior àquele sem informação a priori mesmo quando a quantidade de medidas é alta. Ou seja, a informação que o espalhamento fornece sobre a pertinência de um certo ponto ao suporte já é suficiente para melhorar a qualidade do sinal reconstruído.

## 4.2 SINAIS DE DOMÍNIO BIDIMENSIONAL

Os resultados obtidos a partir do estudo de caso descrito na seção 3.3.2 são apresentados na Tab. 4.2. É possível ver que, assim como no caso unidimensional, a utilização da

função de espalhamento como informação a priori leva a uma melhor relação sinal-erro quando compara-se a utilização da informação parcialmente correta ( $\Phi_o$ ). Enquanto que os melhores resultados, independentemente da quantidade de medidas, são encontrados ao se utilizar toda a informação a priori correta ( $\Phi_n$ ). Entretanto, nem sempre essa informação estará correta, fato que pode ser corrigido ao se utilizar a função de espalhamento. Uma ressalva deve ser levantada uma vez que, nesse experimento, foi reconstruído apenas um sinal e, portanto, não há relevância estatística, apesar de ser um indício de que os resultados obtidos com sinais de domínio unidimensional serão replicados nas outras situações.

**Tabela 4.2.** Relação sinal-erro (*SER*) para o sinal de domínio bidimensional reconstruído. Foram utilizados diferentes valores de medidas baseadas na esparsidade  $\eta = 50$  do sinal.

Medidas	<i>SER</i> (dB)		
	$\Phi_o$	$\Phi_n$	$\mathbf{P}$
$1\eta + 1$	12,85	192,96	25,42
$2\eta$	23,63	226,90	30,07
$3\eta$	30,94	219,62	40,38
$4\eta$	35,60	222,76	179,78
$5\eta$	216,45	225,27	235,83

### 4.3 IMAGENS DE FANTOMAS

Como explicado anteriormente, foi realizado um estudo de caso para a utilização dos algoritmos na reconstrução de imagens de fantasmas de Shepp-Logan que apresentam um certo deslocamento com relação ao fantoma original (Fig. 3.9(a) e (b)). A reconstrução do fantoma deslocado foi feita a partir de  $\ell = 15$  linhas radiais utilizando três tipos de informação a priori diferentes: provenientes da pré-filtragem do fantoma original (Fig. 3.4(a) – (c)) e do fantoma deslocado (Fig. 3.9(c) – (e)), e a partir do espalhamento modelado em cada versão filtrada do fantoma original (Fig. 3.4(d) – (f)). Os valores da relação sinal-erro para cada uma dessas reconstruções é apresentado na tabela 4.3.

**Tabela 4.3.** Relação sinal-erro para as reconstruções do fantoma de Shepp-Logan deslocado.

Abordagem	<i>SER</i> (dB)
$\Phi_o$	1,57
$\Phi_n$	70,41
$\mathbf{P}$	13,42

É possível perceber pela análise da tabela que os resultados obtidos ao se reconstruir os sinais de domínio unidimensional também são encontrados na reconstrução do fantoma de Shepp-Logan deslocado que foi proposto no experimento. Mas, mesmo assim, percebe-se que a informação fornecida pela função de espalhamento  $\mathbf{P}$  já apresenta uma melhora significativa na relação sinal-erro da imagem reconstruída quando comparada com a utilização de informação a priori determinística parcialmente correta ( $\Phi_o$ ). Como nos experimentos envolvendo os sinais de domínio unidimensional, o melhor resultado é obtido ao se utilizar a informação correta sobre os pontos pertencentes à região de suporte. Suposição que, num contexto real, pode não ser garantido devido à movimentação voluntária de um paciente ou involuntária de um órgão, por exemplo.

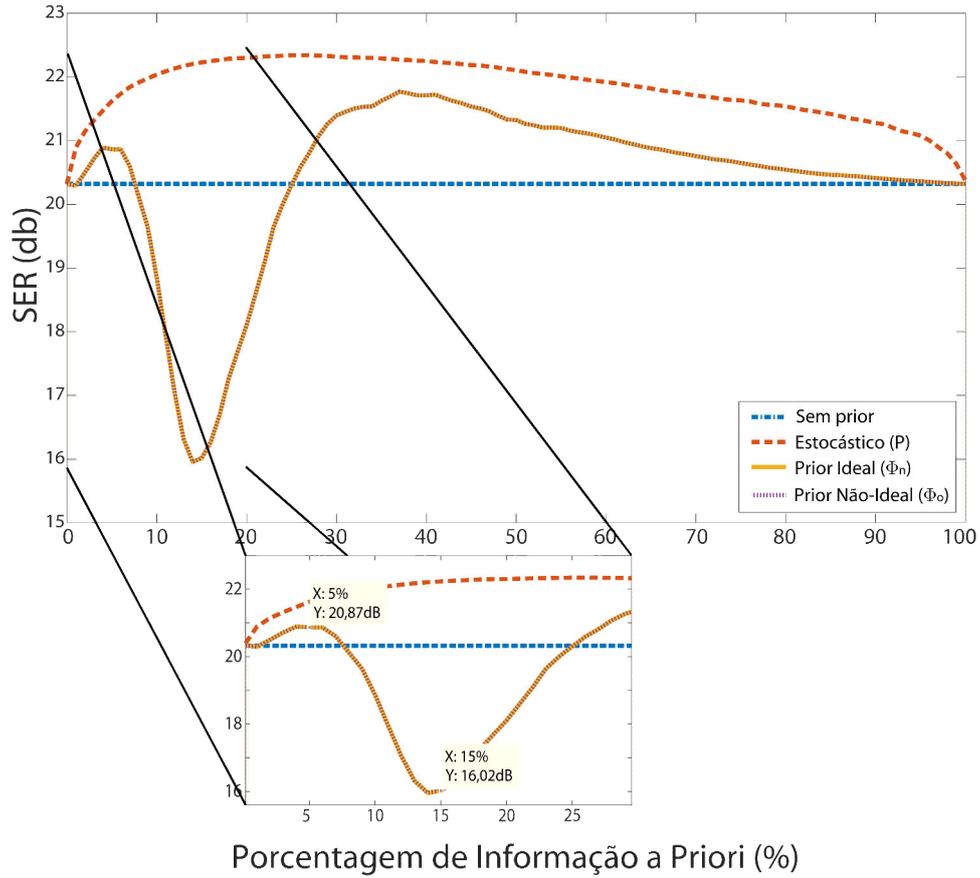
## 4.4 IMAGENS REAIS DE *MRI*

Nesta seção, apresentamos os experimentos realizados utilizando a imagem de ressonância magnética real obtida do banco de dados BIRN [47] e mostrada na Fig. 3.5. Nesses experimentos, realizamos a reconstrução da imagem real utilizando o método de pré-filtragem – com os três filtros descritos pela Eq. 2.14 – com *compressive sensing* baseado na minimização da  $\ell_1$ . Em todos os experimentos, iremos comparar o desempenho das quatro abordagens descritas até aqui: (i) sem informação a priori; (ii) com informação a priori determinística e parcialmente correta ( $\Phi_o$ ); com (iii) informação a priori determinística e correta ( $\Phi_n$ ); e (iv) com a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ . Os resultados das métricas utilizadas nas avaliações são apresentadas, assim como uma comparação qualitativa das imagens reconstruídas.

### 4.4.1 Análises Quantitativas

#### 4.4.1.1 Sem Deslocamento

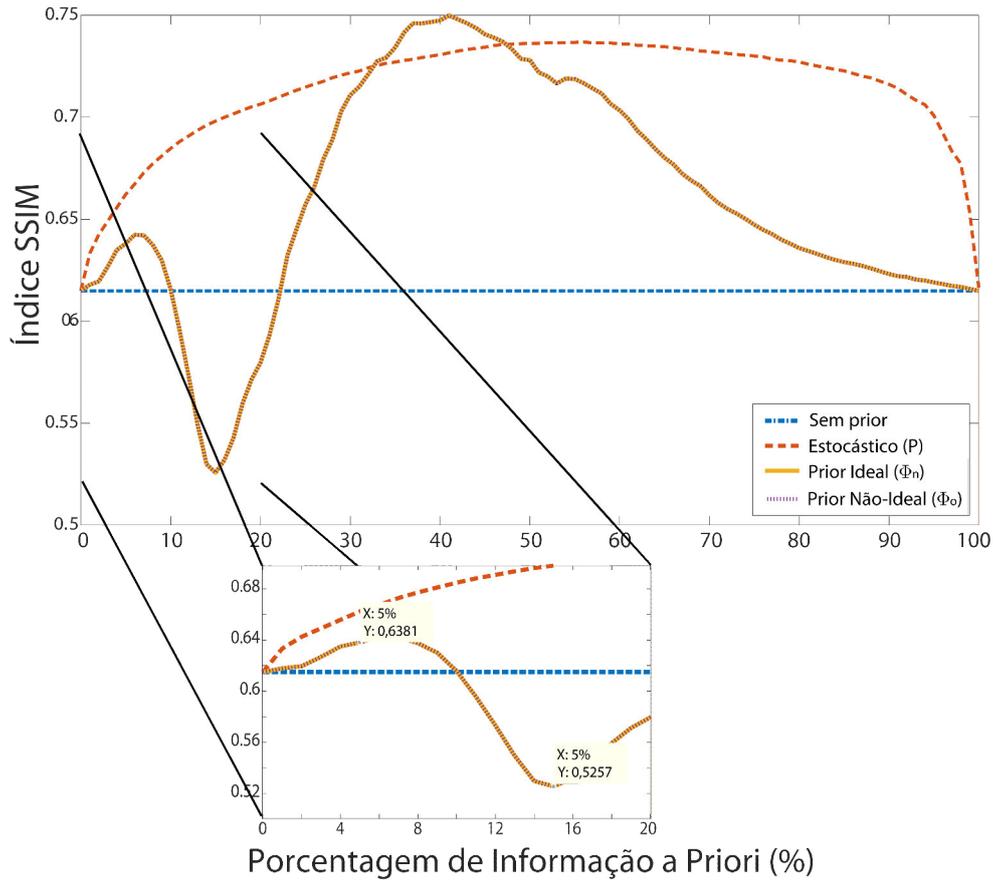
O primeiro experimento realizado consistiu em reconstruir a imagem real de ressonância magnética do crânio, mostrada em 3.5, a partir de  $\ell = 50$  linhas radiais obtidas do espectro de frequência da imagem, variando a porcentagem de informação a priori na reconstrução. Foram realizadas as quatro reconstruções, utilizando cada conjunto de informação a priori sendo que, para gerar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  foi utilizada uma matriz de covariância  $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ . Os resultados de *SER* e do índice *SSIM* obtidos nesse experimento são apresentados nas Fig. 4.3 e 4.4, respectivamente.



**Figura 4.3.** Comparação do valor da  $SER$  obtido ao se reconstruir a imagem do crânio utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor de  $SER$  de 20,87dB e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de  $SER$  de 16,02dB.

Pela análise dos gráficos das Fig. 4.3 e 4.4, é possível perceber que a abordagem estocástica se destaca por apresentar um bom desempenho, independentemente da quantidade de informação a priori utilizada na reconstrução. No caso do valor da  $SER$ , a abordagem estocástica apresentou melhores resultados do que o caso determinístico ideal em todo o intervalo analisado. Já na análise pelo índice  $SSIM$ , houve alguns intervalos (entre 30% e 50% de informação a priori) no qual o caso determinístico ideal foi melhor.

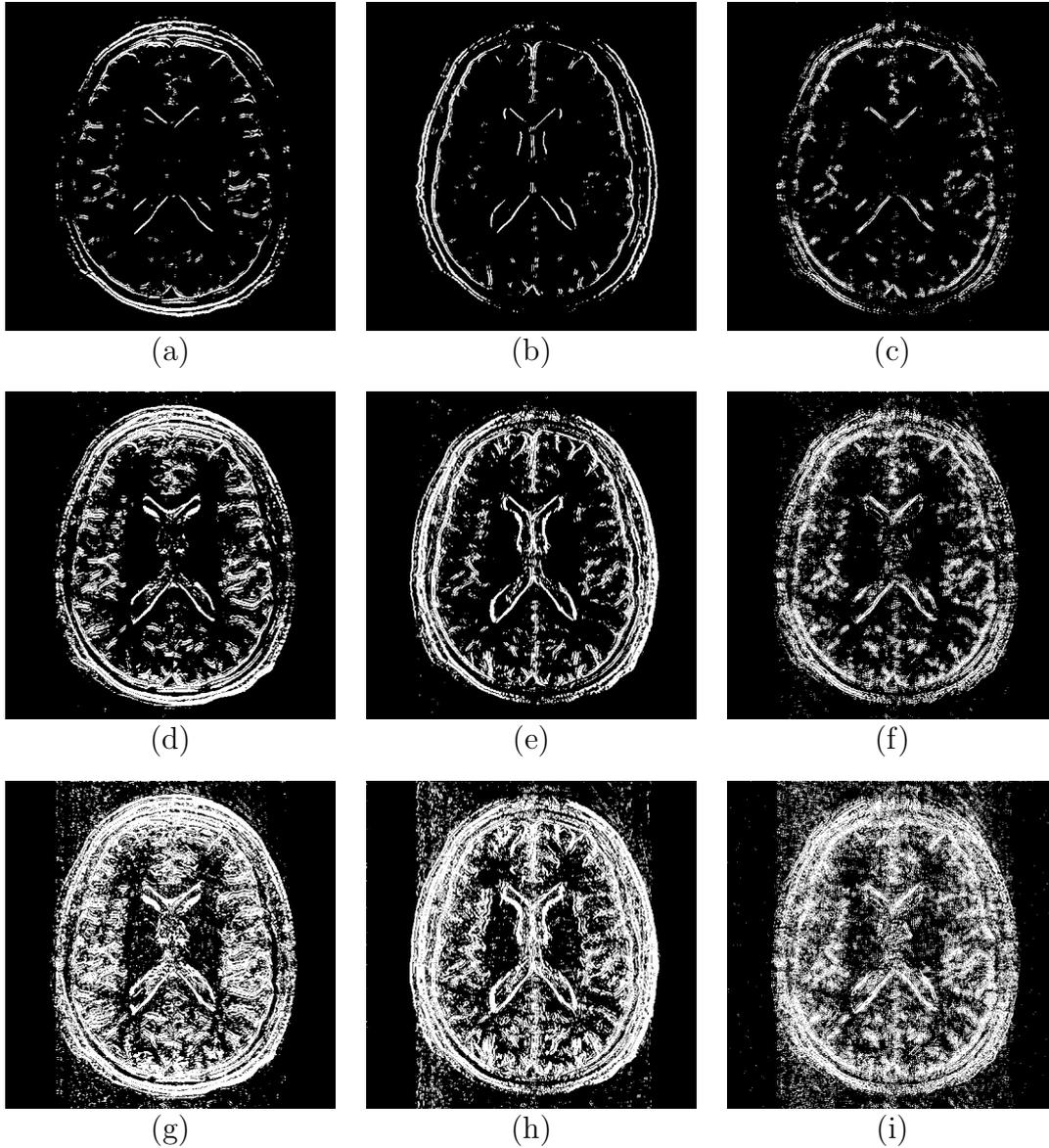
Como esperado nesse experimento, onde a imagem não foi deslocada, o desempenho das abordagens com informação a priori determinística é idêntico. Isso se deve ao fato de não existir diferenças entre as regiões de suporte nesses dois casos ( $\Phi_o = \Phi_n$ ). Contudo, no intervalo entre 5% e 15% de informação a priori, o desempenho das abordagens utilizando a informação a priori determinística apresenta uma queda considerável (de 20,87dB para 16,02dB, no caso da  $SER$ , e de 0,638 para 0,526, no caso do índice  $SSIM$ ), enquanto que o desempenho da abordagem que utiliza a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  continua em ascensão. Uma explicação para essa queda no desempenho pode ser a quantidade de



**Figura 4.4.** Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor para o índice *SSIM* de 0,638 e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de 0,526.

informação a priori que, de fato, está sendo utilizada para se reconstruir a imagem. Ao se analisar as imagens em 4.5, esse aspecto fica mais claro: ao se utilizar 5% (4.5(a) – (c)) das informações presentes na imagem original como informação a priori, é possível obter um contorno das bordas da imagem, e isso é utilizado como informação a priori na reconstrução. Quando aumentamos essa porcentagem, muita informação é fornecida para o algoritmo, desde pontos de pouca relevância até pontos de ruído que possam existir na imagem original. Ao se aumentar muito os pontos de suporte da imagem utilizados na reconstrução (4.5(g) – (i)), já não se vê muita diferença entre os desempenhos, exatamente por causa do excesso de informação fornecida.

Apesar de apresentar esse intervalo de mau desempenho, as abordagens determinísticas ainda superam o algoritmo que não utiliza nenhum tipo de informação a priori, fato que já havia sido demonstrado por Miosso *et al.* [26,40]. Além disso, a abordagem estocástica, que utiliza a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  como informação a priori, apresentou um comportamento constantemente superior ao das demais abordagens.



**Figura 4.5.** Regiões de suporte para as diferentes versões filtradas do corte transversal do crânio original, considerando diferentes porcentagens de informação a priori. De (a) – (c), são mostradas as versões filtradas da imagem após a aplicação dos filtros descritos em 2.14, respectivamente, considerando 5% de informação a priori; de (d) – (f), são mostradas as versões filtradas, considerando 15% de informação a priori; e de (g) – (i), são mostradas as versões filtradas, considerando 30% de informação a priori.

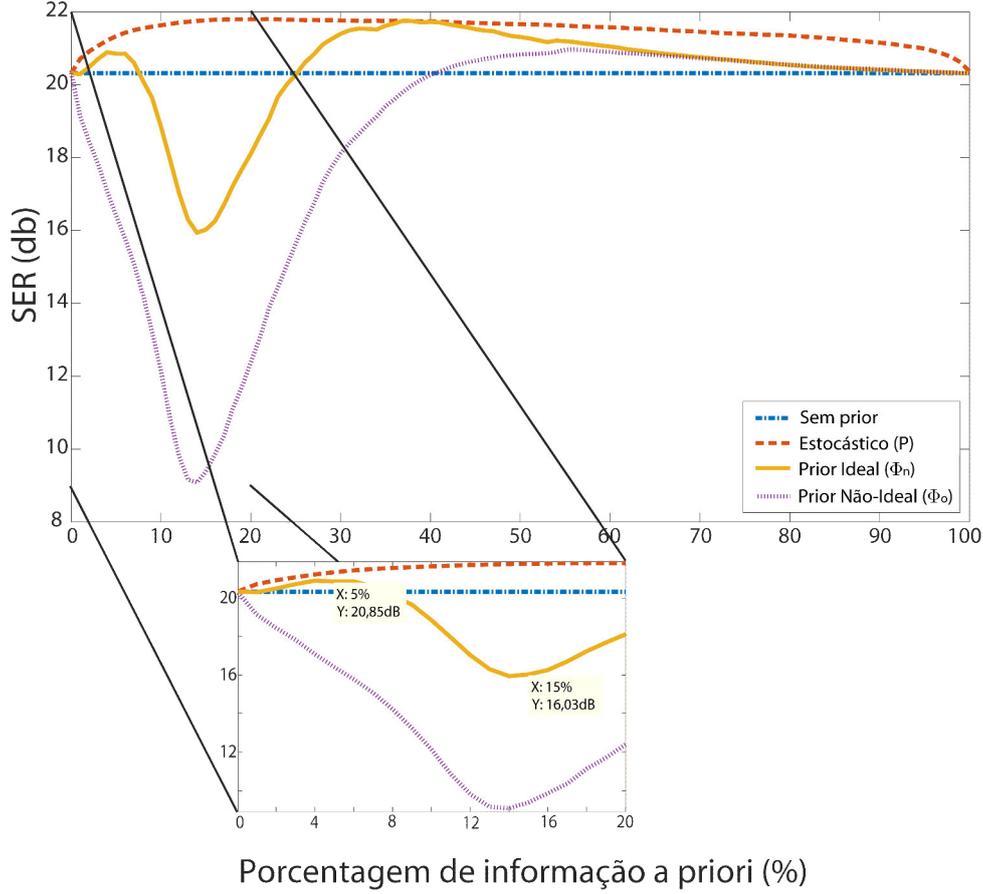
#### 4.4.1.2 Deslocamento $2 \times 2$

Com o intuito de simular situações que podem ocorrer durante a aquisição das medidas no scanner de *MRI* (a movimentação do paciente, por exemplo), iremos deslocar a imagem original 3.5 e tentaremos reconstruí-la utilizando *compressive sensing* com minimização da  $\ell_1$  e informação a priori, a partir das quatro abordagens mencionadas anteriormente. O primeiro teste envolve deslocar em duas linhas e duas colunas e, a partir disso, reconstruir a imagem original, não-deslocada. Logo,  $\Phi_o$  irá consistir daqueles pontos do suporte da imagem não-deslocada, e  $\Phi_n$  compreenderá os pontos de suporte da imagem deslocada. Além disso, a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  é calculada com base nos pontos de  $\Phi_o$  e também será utilizada na reconstrução. Nesse primeiro momento, utilizamos  $\ell = 50$  linhas radiais para a reconstrução e uma matriz de covariância  $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  para gerar o espalhamento  $\mathbf{P}$ . Os valores de *SER* e do índice *SSIM* são apresentados nas Fig. 4.6 e 4.7, respectivamente.

Quando analisamos o comportamento da *SER* e do índice *SSIM* para esse experimento, notamos novamente o bom desempenho do algoritmo que utiliza a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  como informação a priori na reconstrução, independentemente da porcentagem de informação utilizada para gerar o espalhamento. Quando a informação a priori determinística ideal é utilizada, o desempenho também é bom e superior ao do método que não utiliza nenhum tipo de informação a priori. Contudo, ao se utilizar a informação a priori não-ideal, o desempenho torna-se pior que nesse caso. Isso se explica pelo fato de a informação fornecida estar muito errada e distoante da imagem original, o que piora o desempenho do algoritmo ao reconstruir a imagem nessa situação.

Além disso, também notamos o vale no intervalo entre 5% e 15% de informação a priori utilizada na reconstrução para ambos os casos em que a informação determinística foi fornecida, o que fortalece a ideia de que há um excesso de informação sendo utilizada pelo algoritmo. Por esse motivo, escolhemos o ponto de pico ao se utilizar 5% da informação a priori para analisar como a quantidade de linhas radiais interfere nas métricas *SER* e índice *SSIM*. Para tanto, variamos a quantidade de linhas radiais  $\ell$  de 25 a 150 e calculamos os valores das métricas para as quatro abordagens. Os resultados são mostrados nas Fig. 4.8 e 4.9.

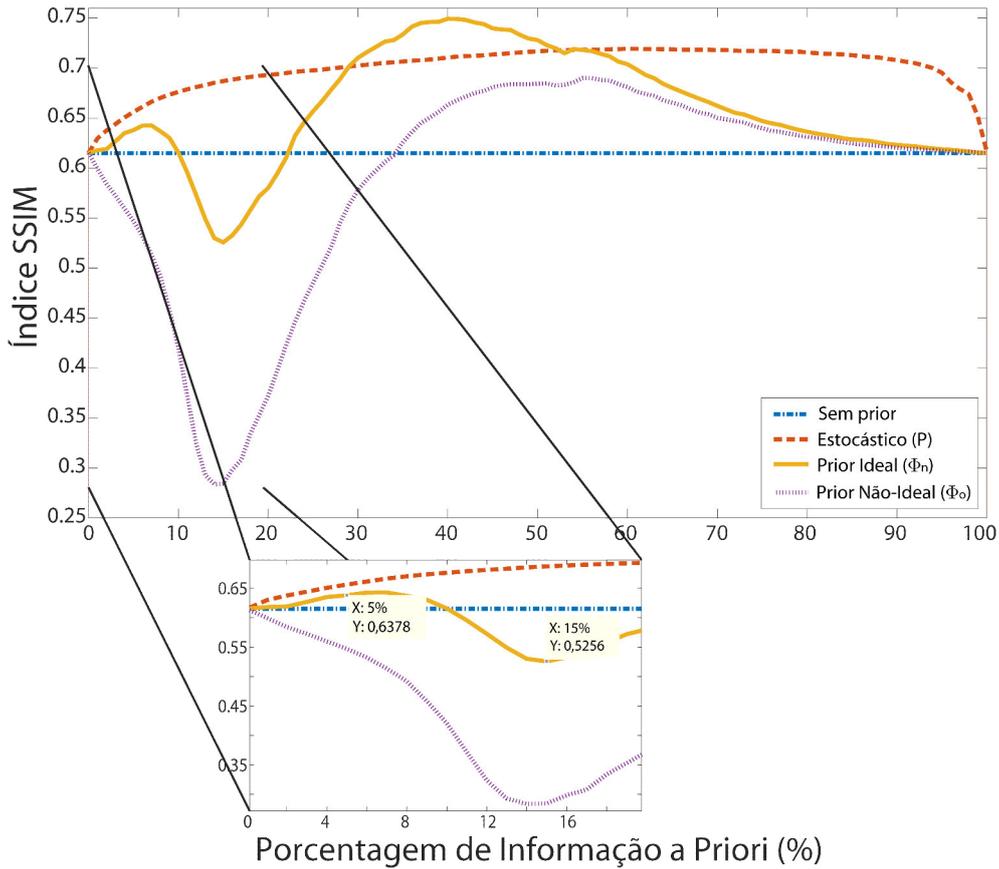
É possível vermos pelas curvas das Fig. 4.8 e 4.9 que, como esperado, conforme aumentamos a quantidade de linhas radiais na reconstrução, os valores de *SER* e do índice *SSIM* aumentam para todas as abordagens utilizadas, ou seja, quanto maior a quantidade de linhas, maior é a qualidade da imagem reconstruída. Outro aspecto interessante a se notar, é o fato de a abordagem estocástica apresentar um desempenho



**Figura 4.6.** Comparação do valor da  $SER$  obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $2 \times 2$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor de  $SER$  de 20,85dB e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de  $SER$  de 16,03dB.

um pouco superior à abordagem determinística ideal (que já havia sido notado nas curvas das Fig. 4.6 e em 4.7).

Portanto, quando utilizamos a matriz de variância  $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  para modelar o espalhamento  $\mathbf{P}$  nesse experimento, a abordagem estocástica apresentou melhores resultados até mesmo do que a abordagem determinística ideal. Isso talvez se explique pelo fato de o desvio padrão nesse caso ser muito próximo do deslocamento fornecido ( $\sigma = \sqrt{5} \approx 2,24$ ). Para testarmos essa hipótese, realizamos a reconstrução utilizando as quatro abordagens,  $\ell = 50$  linhas radiais e uma nova matriz de covariância  $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 55 & 0 \\ 0 & 55 \end{bmatrix}$ , onde o desvio padrão  $\sigma_2 = \sqrt{55} \approx 7,42$ . Os resultados são apresentados nas Fig. 4.10 e 4.11.

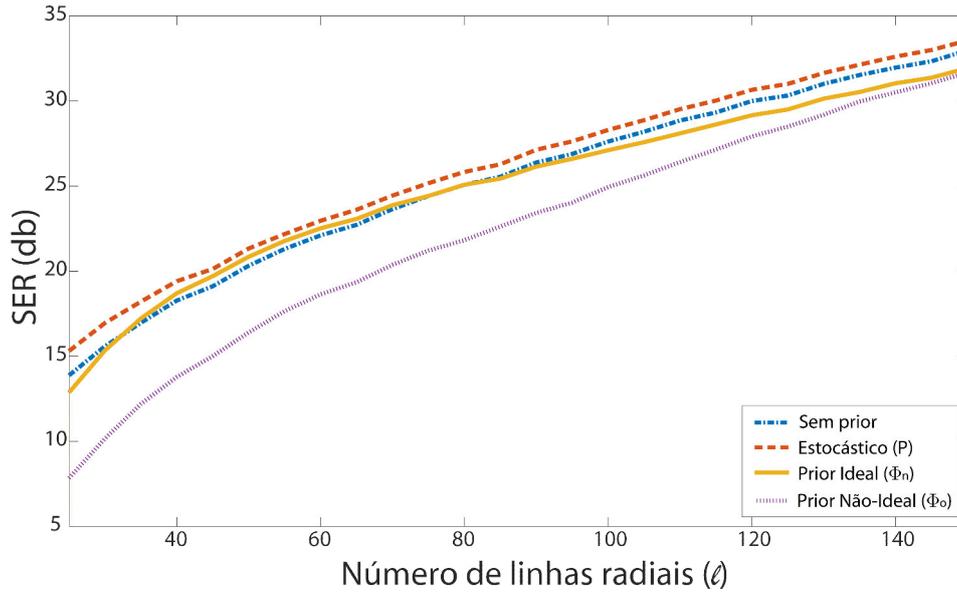


**Figura 4.7.** Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $2 \times 2$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor para o índice *SSIM* de 0,638 e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de 0,526.

Quando comparamos esses resultados com aqueles obtidos ao se utilizar a matriz de covariância  $\Sigma_1$ , nota-se que há uma pequena diferença na qualidade da reconstrução. Essa diferença é mais visivelmente notada ao se comparar os valores da *SER* de 4.6 com os de 4.10. Há, portanto, alguma interferência da matriz de covariância ao se gerar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ . Essa diferença talvez seja pequena para este caso porque o deslocamento realizado se inclui no desvio padrão correspondente tanto a  $\Sigma_1$  quanto a  $\Sigma_2$ .

#### 4.4.1.3 Deslocamento $7 \times 8$

O experimento seguinte é parecido com o anterior, porém agora aplicamos um deslocamento maior na imagem original 3.10(a). Como no caso anterior, iremos comparar o desempenho do algoritmo de reconstrução que utiliza *compressive sensing* com mini-

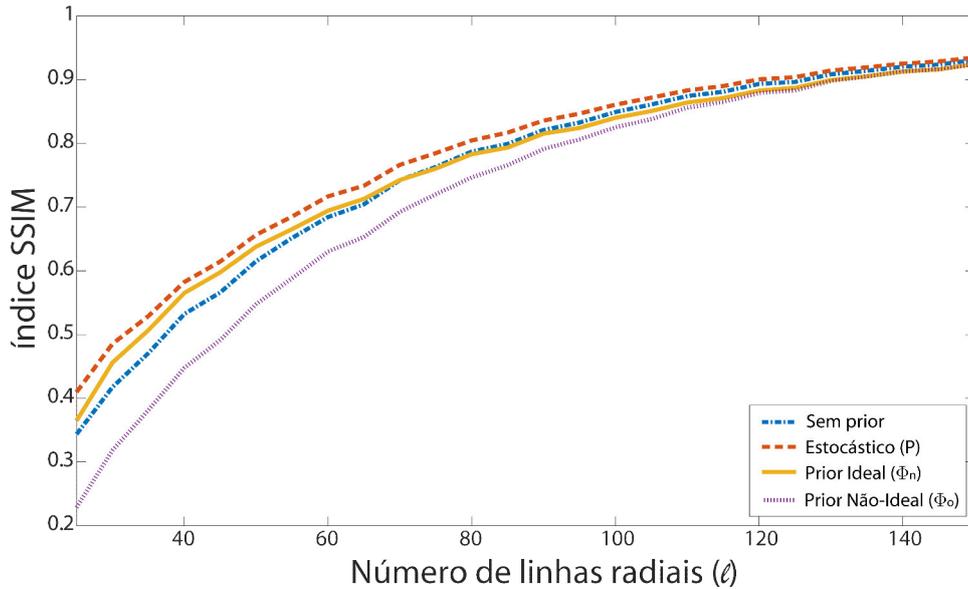


**Figura 4.8.** Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em  $2 \times 2$  pixels, compara-se os valores de  $SE_R$  obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho.

mização da  $\ell_1$  e informação a priori em quatro situações: (i) sem informação a priori; (ii) com informação a priori obtida da região de suporte com base na imagem original, não-deslocada ( $\Phi_o$ , Fig. 3.6(a)–(c)); (iii) com informação a priori obtida da região de suporte com base na imagem original deslocada ( $\Phi_n$ , Fig. 3.10(c)–(e)), com um deslocamento de 7 colunas e 8 linhas 3.10(b); e (iv) ao se utilizar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  mostrada na Fig. 3.6(d)–(f)) como informação a priori.

De forma similar ao experimento anterior, a primeira simulação que realizamos consistiu em comparar as métricas  $SE_R$  e índice  $SSIM$  ao se variar a quantidade de informação a priori utilizada na reconstrução: de 0% de informação a priori, ou seja, sem nenhuma informação fornecida; até 100%, ou seja, com toda a imagem sendo utilizada como informação prévia para sua reconstrução. Além disso, utilizamos  $\ell = 50$  linhas radiais e a função de espalhamento foi calculada utilizando uma matriz de covariância igual a  $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ . Dessa forma, o desvio padrão – que corresponde a  $\sigma_1 = \sqrt{5} \approx 2,24$  – é inferior ao deslocamento imposto à imagem original. Os valores de  $SE_R$  e do índice  $SSIM$  encontrados nesse experimento são mostrados nas Fig. 4.12 e 4.13.

Quando analisamos as Fig. 4.12 e 4.13, podemos perceber que o comportamento dos valores das métricas ao se variar a porcentagem de informação a priori fornecida é similar ao encontrado nas curvas das Fig. 4.6 e 4.7. É possível identificar a região de vale (entre 5% e 15% de informação utilizada) para os casos em que a informação determinística é utilizada pelo algoritmo e os valores das métricas ao se utilizar a informação determinística



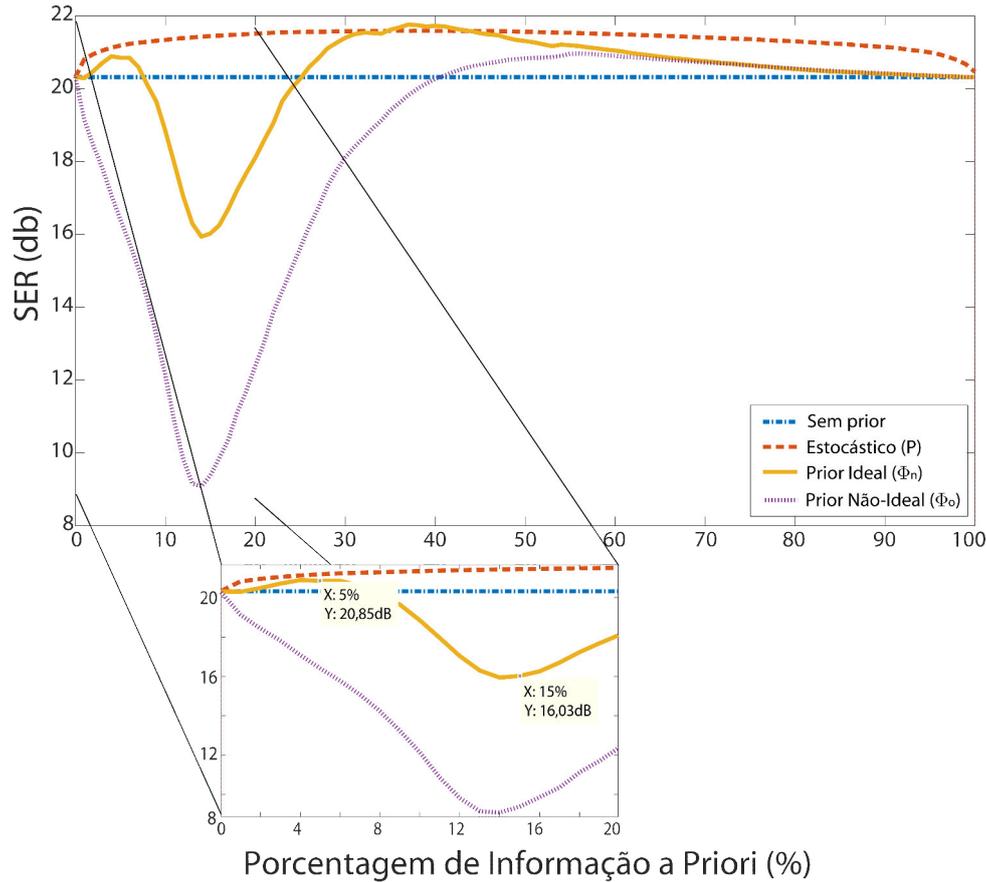
**Figura 4.9.** Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em  $2 \times 2$  pixels, compara-se os valores do índice SSIM obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho.

ideal e a estocástica apresentam valores superiores ao caso em que não se utiliza nenhuma informação (com exceção da região de vale). Mais uma vez, esse resultado vai de encontro com o que propusemos anteriormente e com os resultados dos demais experimentos realizados.

Uma outra simulação que realizamos foi investigar o comportamento das métricas com relação ao número de linhas radiais utilizadas na reconstrução da imagem de ressonância magnética do crânio original. Variamos o número de medidas  $\ell$  de 15 a 150 linhas radiais, utilizando os mesmos parâmetros da simulação anterior. Os valores de  $SER$  e do índice  $SSIM$  são mostrados nas Fig. 4.14 e 4.15, respectivamente.

De forma similar ao experimento realizado ao se aumentar a quantidade de linhas radiais para o deslocamento  $2 \times 2$ , os valores das métricas  $SER$  e do índice  $SSIM$  também aumentam para qualquer uma das abordagens utilizadas. Algo interessante de se notar, contudo, é o fato de o desempenho do algoritmo que utiliza a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  não ser melhor que os demais para todo o intervalo. Isso ocorreu quando analisamos os resultados mostrados nas curvas das Fig. 4.8 e 4.9. Mais uma vez isso mostra a interferência que a matriz de covariância utilizada para gerar  $\mathbf{P}$  exerce sobre a qualidade da imagem reconstruída. Com o aumento do número de linhas radiais utilizado na reconstrução, o desempenho da abordagem estocástica volta a superar o das demais.

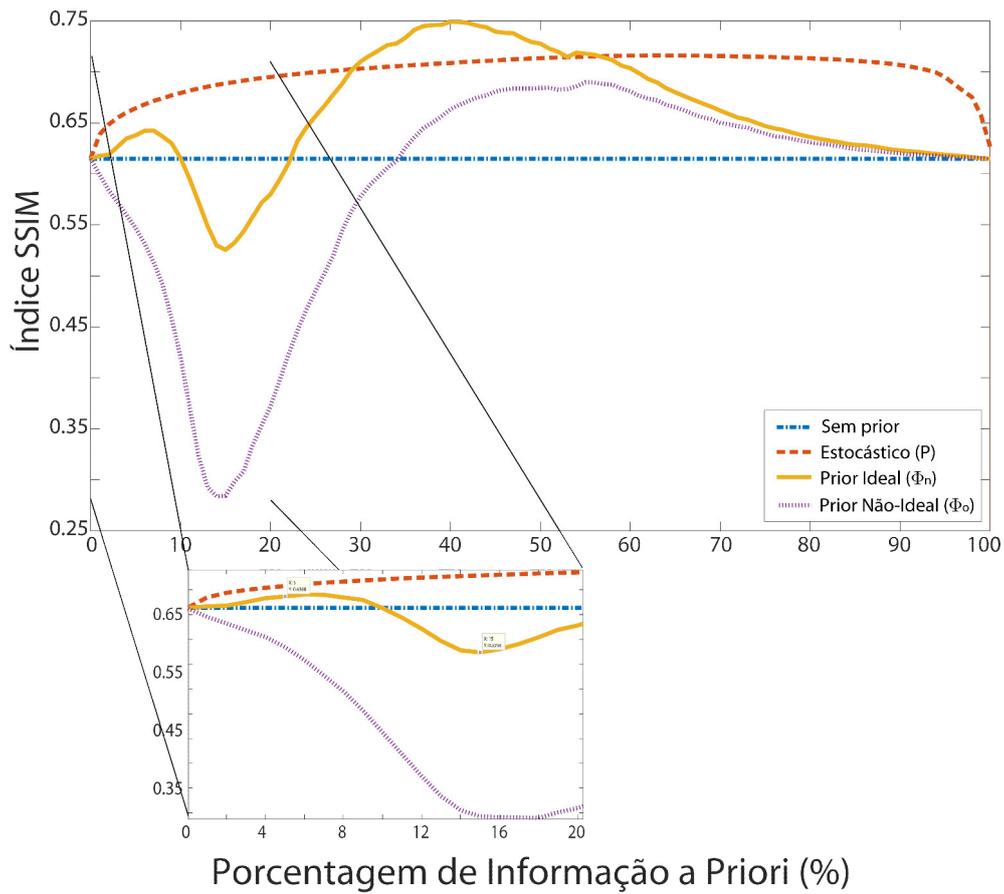
Apesar dos bons resultados apresentados até aqui, o desempenho do algoritmo que utiliza a função de espalhamento não apresenta resultados tão superiores aos demais ao se



**Figura 4.10.** Comparação do valor da  $SER$  obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $2 \times 2$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  foi gerada utilizando a matriz de covariância  $\Sigma_2$ .

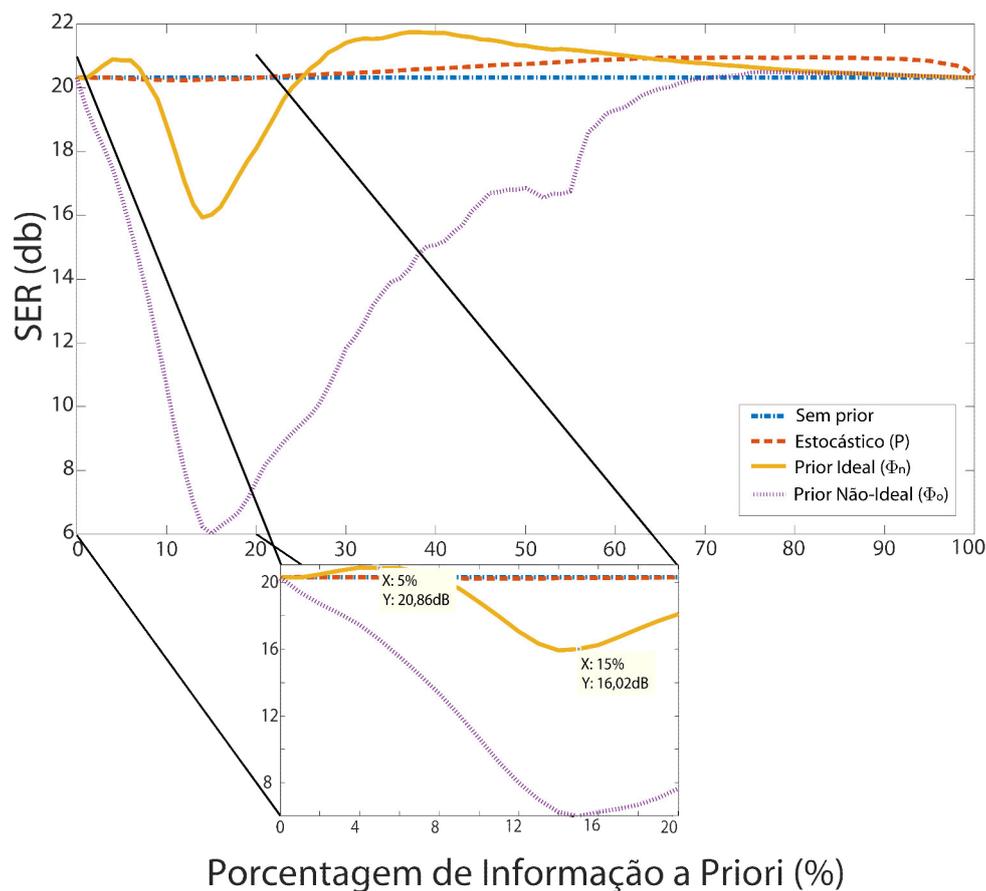
utilizar a matriz de covariância  $\Sigma_1$  para se reconstruir a imagem original a partir de sua versão deslocada em  $7 \times 8$ , como se verificou no caso anterior (com o deslocamento  $2 \times 2$ ). Como mencionado anteriormente, a matriz de covariância exerceu certa influência no caso do deslocamento  $2 \times 2$ , mas ela não foi tão significativa. Ao se utilizar a matriz  $\Sigma_1$ , porém, o desvio padrão associado talvez seja muito menor que o deslocamento  $e$ , dessa forma, influenciou mais negativamente nessa reconstrução. Para avaliar tal hipótese, fizemos um novo experimento no qual a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  é gerada utilizando a matriz de covariância  $\Sigma_2$ . Os resultados da  $SER$  e do índice  $SSIM$  para as quatro abordagens são mostrados nas Fig. 4.16 e 4.17.

Pela análise dos valores de  $SER$  e do índice  $SSIM$  mostrados nas curvas das Fig. 4.16 e 4.17, percebemos um salto nos valores associados à abordagem estocástica ao se utilizar a matriz de covariância  $\Sigma_2$ , quando comparados com os valores obtidos quando a matriz  $\Sigma_1$  foi utilizada (Fig. 4.12 e 4.13). Pelos resultados obtidos, percebemos que o desempenho da abordagem estocástica possui o potencial de ser melhor que o de todas as outras desde que o deslocamento realizado esteja incluído no valor do desvio padrão associado à matriz

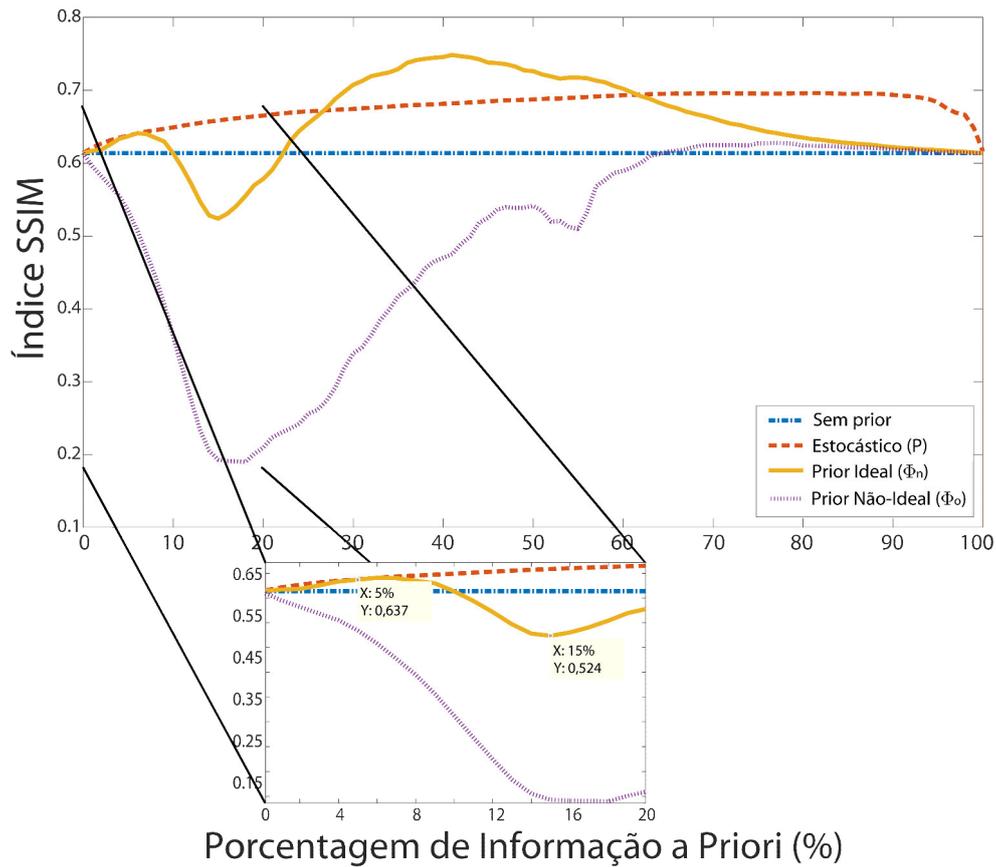


**Figura 4.11.** Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $2 \times 2$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  foi gerada utilizando a matriz de covariância  $\Sigma_2$ .

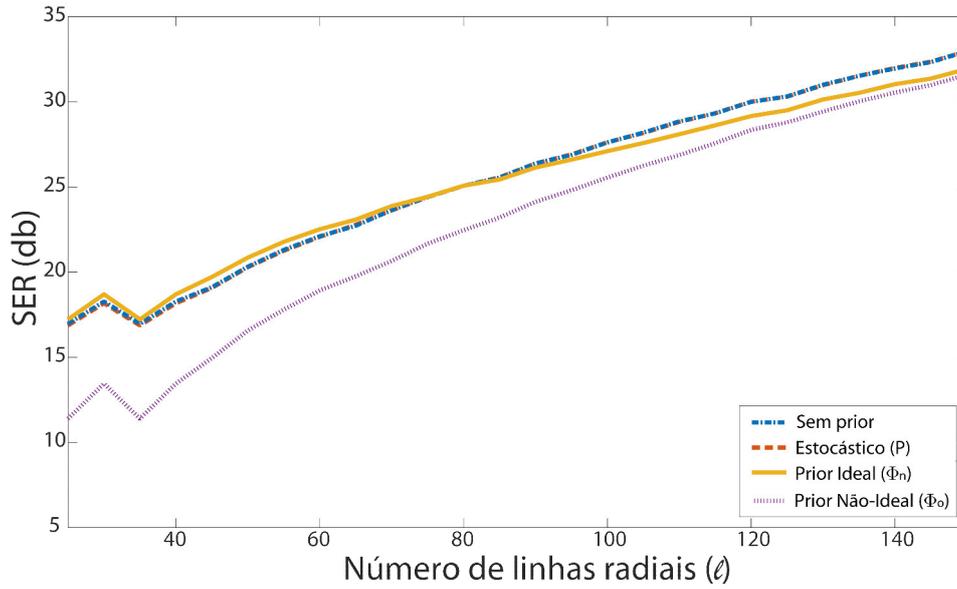
de covariância.



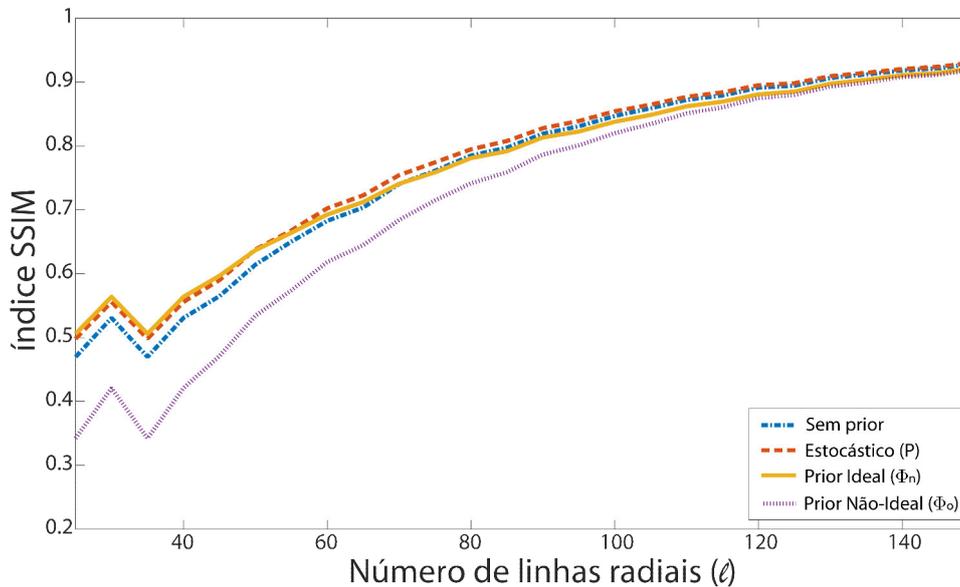
**Figura 4.12.** Comparação do valor da  $SER$  obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $7 \times 8$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor de  $SER$  de 20,86dB e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de  $SER$  de 16,02dB.



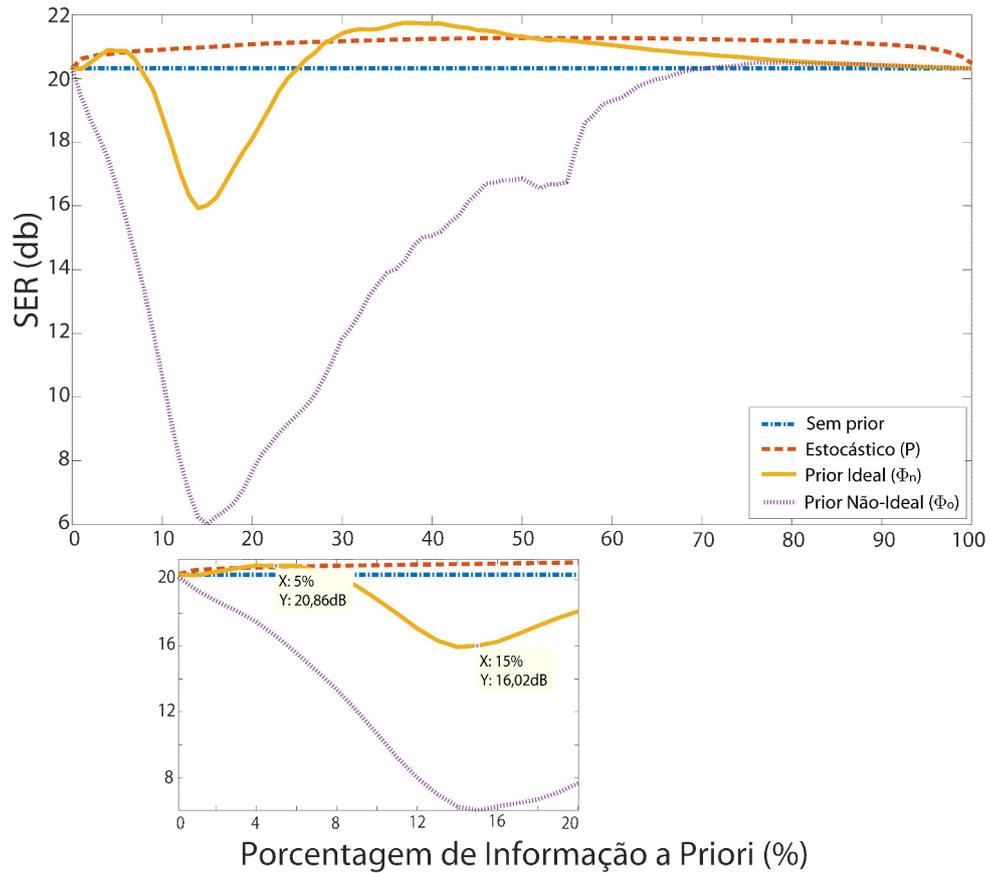
**Figura 4.13.** Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $7 \times 8$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Destaca-se a região de queda na qualidade de reconstrução utilizando a abordagem com a informação a priori determinística ideal: com 5% de informação a priori, obteve-se um valor para o índice *SSIM* de 0,637 e, com 15% de informação a priori, obteve-se um valor de 0,524.



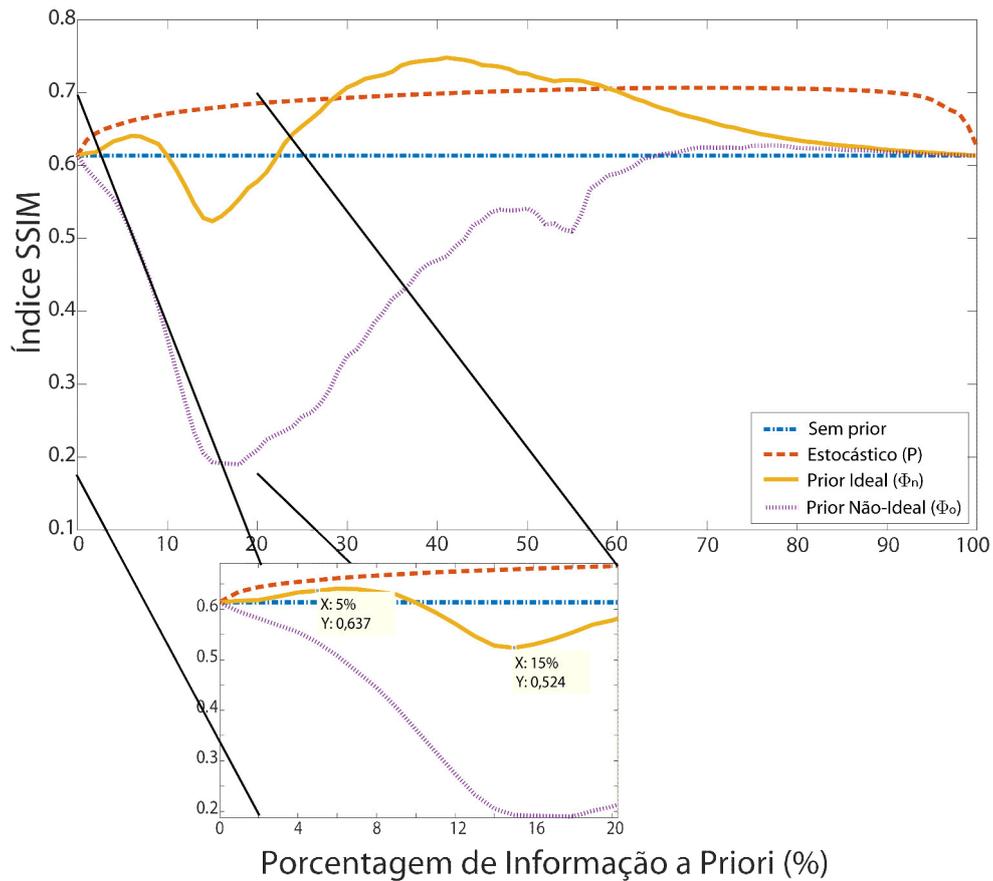
**Figura 4.14.** Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em  $7 \times 8$  pixels, compara-se os valores de  $SER$  obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho.



**Figura 4.15.** Considerando 5% de informação a priori na reconstrução da imagem de crânio deslocada em  $7 \times 8$  pixels, compara-se os valores do índice SSIM obtidos ao se variar o número de linhas radiais utilizadas na sua reconstrução para as diferentes abordagens apresentadas no trabalho.



**Figura 4.16.** Comparação do valor da  $SER$  obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $7 \times 8$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  foi gerada utilizando a matriz de covariância  $\Sigma_2$ .



**Figura 4.17.** Comparação do valor do índice SSIM obtido ao se reconstruir a imagem do crânio deslocada em  $7 \times 8$  pixels utilizando as diferentes abordagens de reconstrução, variando a quantidade de informação a priori utilizada. Nesse caso, a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  foi gerada utilizando a matriz de covariância  $\Sigma_2$ .

## 4.4.2 Análises Qualitativas

Nesta seção serão mostramos algumas das imagens reconstruídas para que uma análise qualitativa da reconstrução seja realizada. Selecionamos alguns pontos críticos das curvas apresentadas na seção anterior dos resultados de reconstrução quando realizamos deslocamentos  $2 \times 2$  e  $7 \times 8$ .

### 4.4.2.1 Deslocamento $2 \times 2$

As imagens resultantes ao se utilizar as diferentes abordagens para a reconstrução da imagem do corte do crânio deslocada em  $2 \times 2$  píxeis, utilizando três porcentagens de informação a priori (5%, 15% e 40%), são aqui apresentadas. Escolhemos esses percentuais com base nos resultados mostrados nas Fig. 4.6 e 4.7, ou seja, consideramos três pontos críticos: o pico ao se utilizar por volta de 5% de informação a priori; o vale que se obteve quando utilizamos 15%; e o pico em 40%. Apresentamos as imagens reconstruídas nas Fig. 4.18, 4.19 e 4.20, respectivamente.

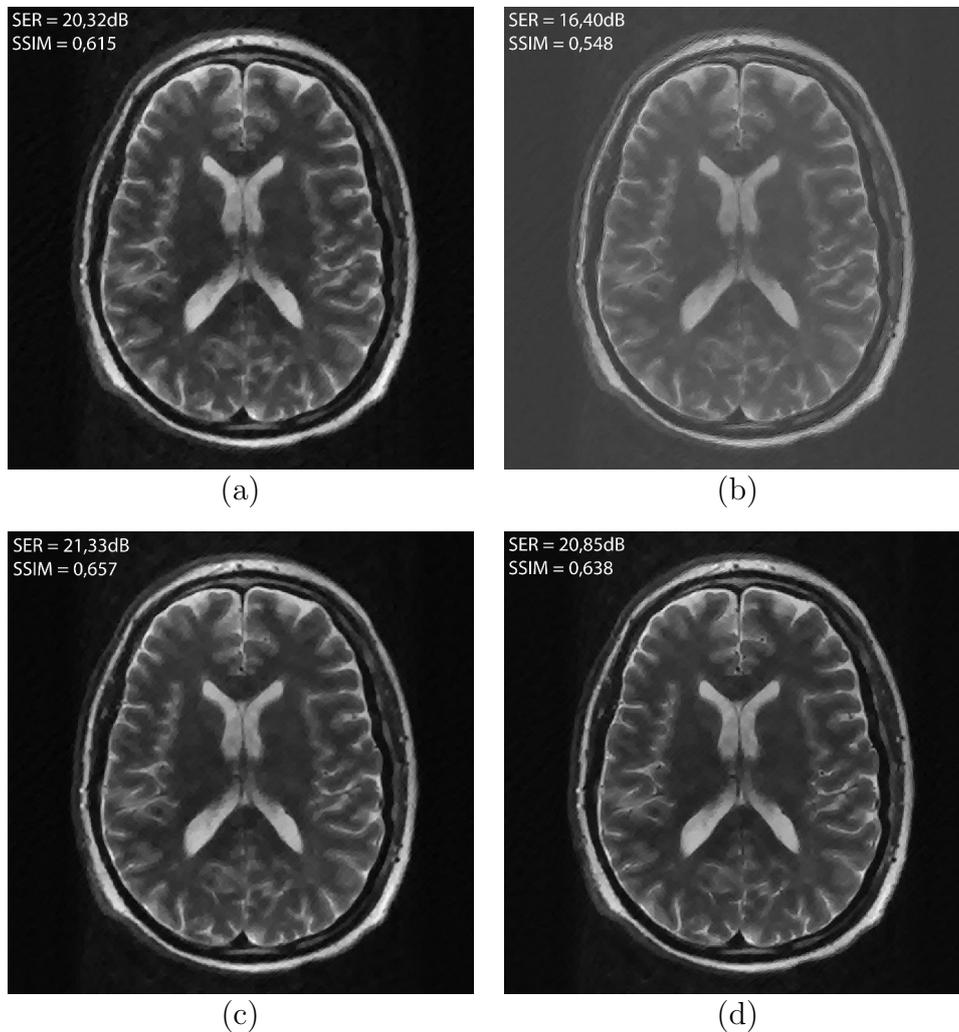
Quando analisamos as imagens reconstruídas mostradas nas Fig. 4.18, 4.19 e 4.20, é possível perceber que elas corroboram os resultados quantitativos mostrados anteriormente. De fato, quando analisamos, por exemplo, as imagens obtidas ao se utilizar 15% (Fig. 4.19) de informação a priori, percebemos o quão superior é a qualidade da imagem reconstruída ao se utilizar a função de espalhamento em detrimento dos outros tipos de informação a priori. Já quando utilizamos 40% de informação a priori (Fig. 4.20), já quase não percebemos diferenças entre as imagens reconstruídas.

### 4.4.2.2 Deslocamento $7 \times 8$

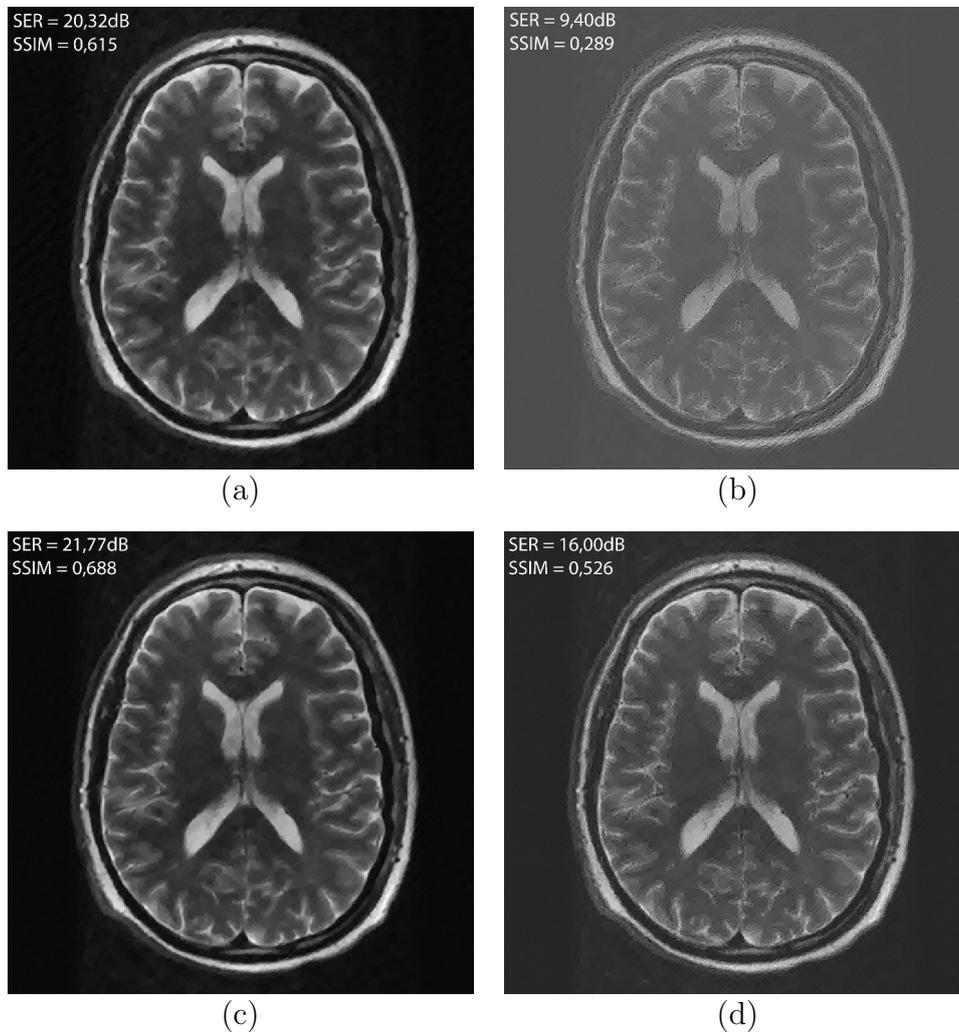
As imagens resultantes ao se utilizar as diferentes abordagens para a reconstrução da imagem do corte do crânio deslocada em  $7 \times 8$  píxeis, utilizando três porcentagens de informação a priori (5%, 15% e 35%), são aqui apresentadas. Escolhemos esses percentuais com base nos resultados mostrados nas Fig. 4.16 e 4.17, ou seja, consideramos três pontos críticos: o pico ao se utilizar por volta de 5% de informação a priori; o vale que se obteve quando utilizamos 15%; e o pico em 35% de informação utilizada. Apresentamos as imagens reconstruídas nas Fig. 4.21, 4.22 e 4.20, respectivamente.

De forma similar ao analisado no caso anterior, também pudemos ver pela análise das Fig. 4.21, 4.22 e 4.23 que os resultados das métricas se refletem na qualidade das imagens reconstruídas, como no caso em que se utilizou 15% de informação a priori. Também,

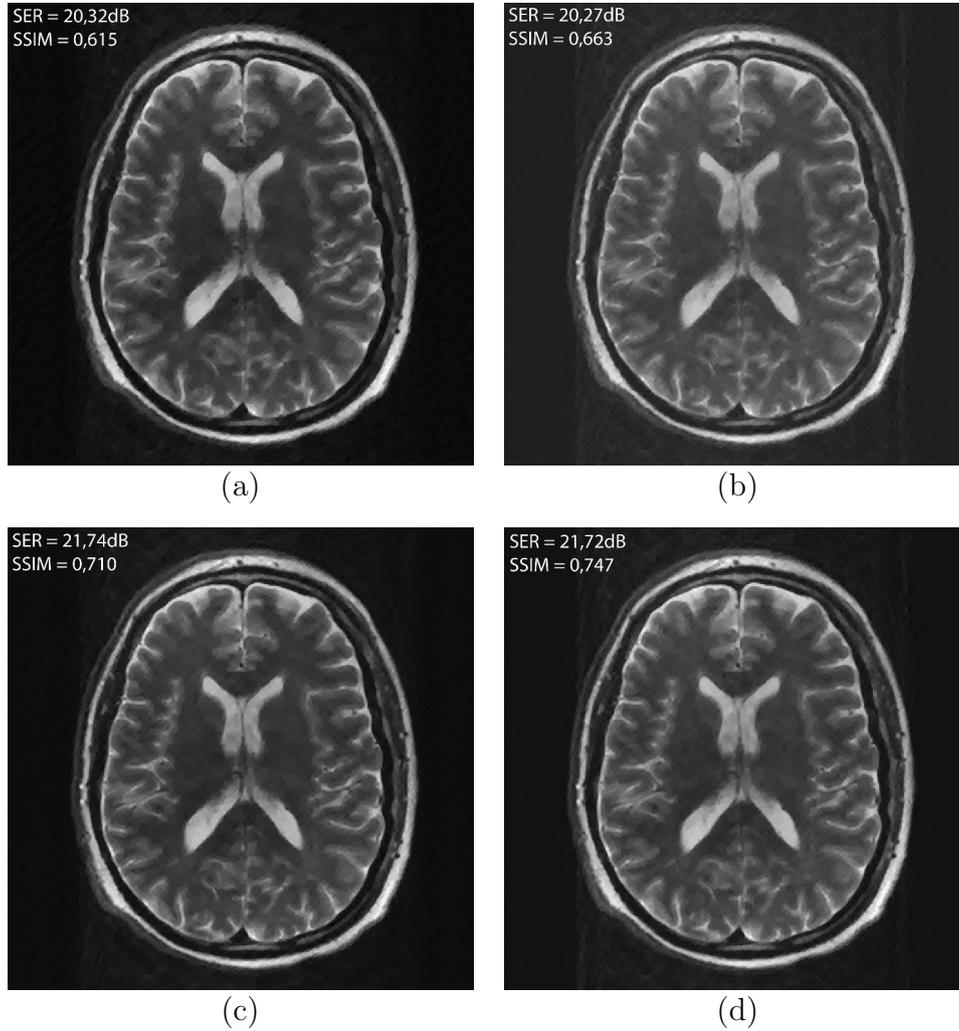
quando utilizamos 35%, pudemos ver que qualitativamente quase não há diferença entre as imagens reconstruídas.



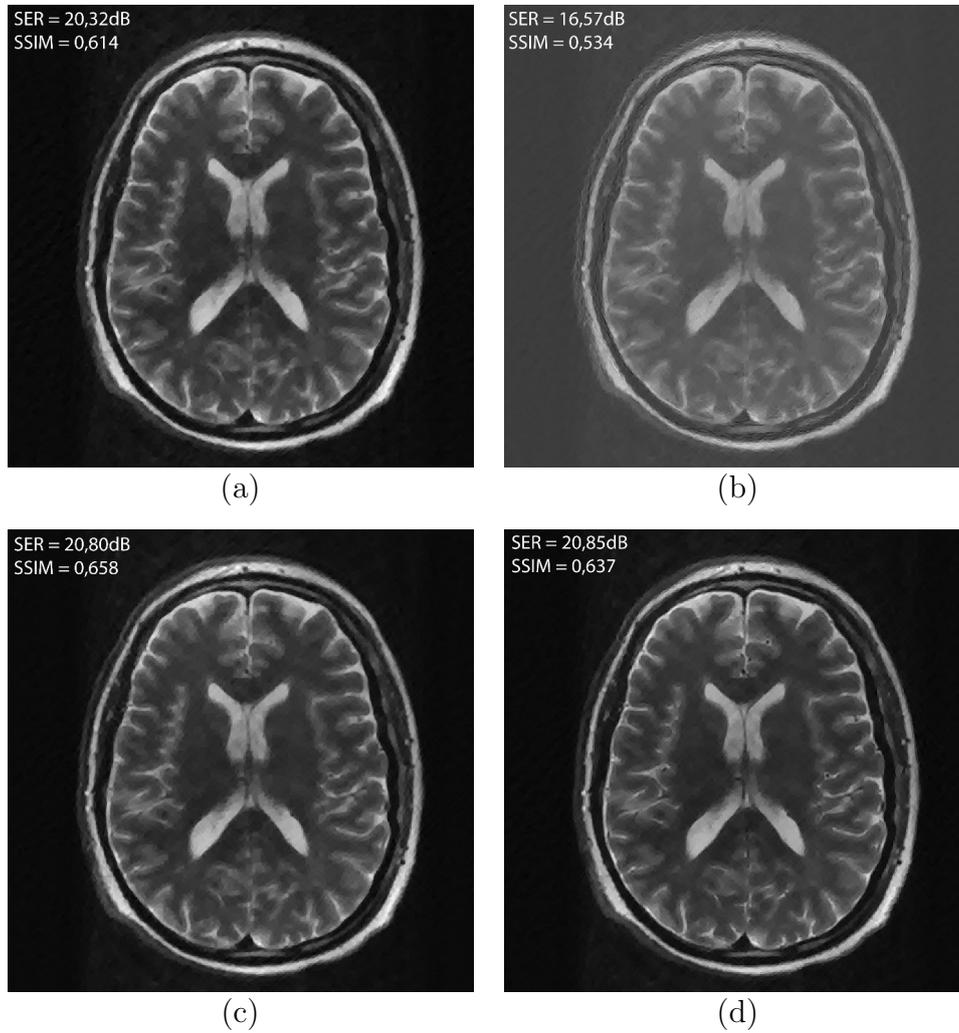
**Figura 4.18.** Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 5% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento  $2 \times 2$  e  $\Sigma_1$ . Em (a), é mostrada a imagem final reconstruída sem a utilização de informação a priori; em (b), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori não-ideal ( $\Phi_o$ ); em (c), a imagem reconstruída ao se utilizar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ , gerada utilizando  $\Sigma_1$ , como informação a priori; e em (d), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori ideal ( $\Phi_n$ ).



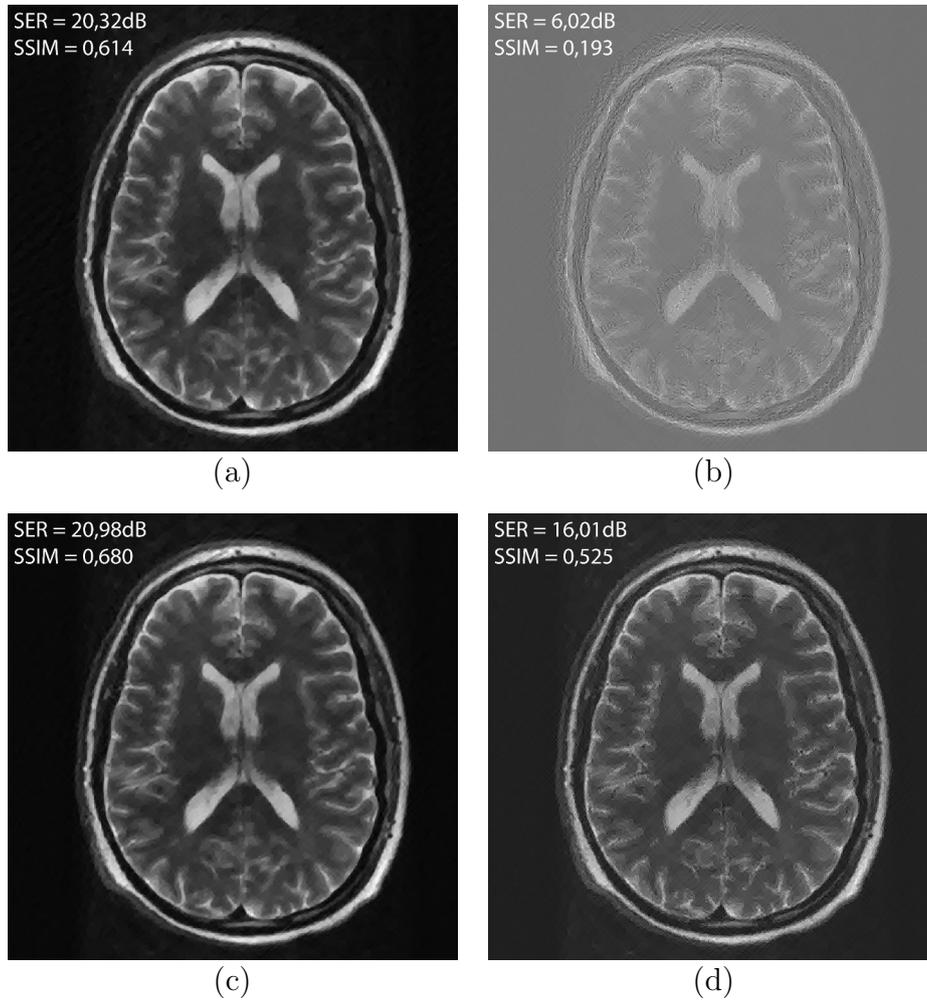
**Figura 4.19.** Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 15% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento  $2 \times 2$  e  $\Sigma_1$ . Em (a), é mostrada a imagem final reconstruída sem a utilização de informação a priori; em (b), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori não-ideal ( $\Phi_o$ ); em (c), a imagem reconstruída ao se utilizar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ , gerada utilizando  $\Sigma_1$ , como informação a priori; e em (d), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori ideal ( $\Phi_n$ ).



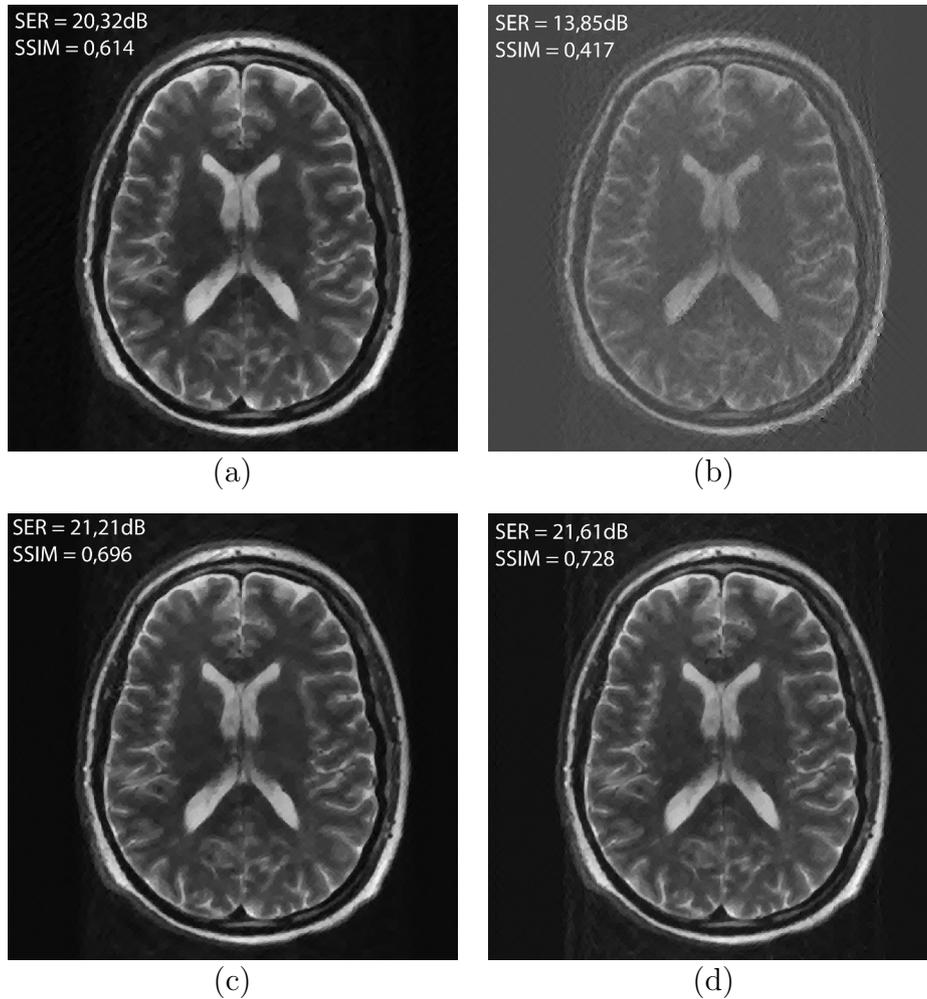
**Figura 4.20.** Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 40% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento  $2 \times 2$  e  $\Sigma_1$ . Em (a), é mostrada a imagem final reconstruída sem a utilização de informação a priori; em (b), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori não-ideal ( $\Phi_o$ ); em (c), a imagem reconstruída ao se utilizar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ , gerada utilizando  $\Sigma_1$ , como informação a priori; e em (d), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori ideal ( $\Phi_n$ ).



**Figura 4.21.** Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 5% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento  $7 \times 8$  e  $\Sigma_2$ . Em (a), é mostrada a imagem final reconstruída sem a utilização de informação a priori; em (b), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori não-ideal ( $\Phi_o$ ); em (c), a imagem reconstruída ao se utilizar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ , gerada utilizando  $\Sigma_2$ , como informação a priori; e em (d), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori ideal ( $\Phi_n$ ).



**Figura 4.22.** Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 15% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento  $7 \times 8$  e  $\Sigma_2$ . Em (a), é mostrada a imagem final reconstruída sem a utilização de informação a priori; em (b), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori não-ideal ( $\Phi_o$ ); em (c), a imagem reconstruída ao se utilizar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ , gerada utilizando  $\Sigma_2$ , como informação a priori; e em (d), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori ideal ( $\Phi_n$ ).



**Figura 4.23.** Imagens do corte transversal do crânio reconstruídas a partir de 35% de informação a priori para diferentes abordagens, considerando o deslocamento  $7 \times 8$  e  $\Sigma_2$ . Em (a), é mostrada a imagem final reconstruída sem a utilização de informação a priori; em (b), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori não-ideal ( $\Phi_o$ ); em (c), a imagem reconstruída ao se utilizar a função de espalhamento  $\mathbf{P}$ , gerada utilizando  $\Sigma_2$ , como informação a priori; e em (d), a imagem reconstruída ao se utilizar a informação a priori ideal ( $\Phi_n$ ).

## 5 CONCLUSÃO

O imageamento por ressonância magnética tem se tornado uma ferramenta essencial para o diagnóstico, acompanhamento e tratamento de diversas patologias. O fato de não ser tão acessível e de ser extremamente incômodo ao paciente, contudo, ainda limitam o seu uso mais amplo. Por esse motivo, é importante que os algoritmos de reconstrução dependam de uma quantidade menor de medidas extraída pelo *scanner* e, dessa forma, diminua o desconforto para o paciente a ser examinado. O *compressive sensing* é uma das técnicas que vem sendo estudada com esse intuito, uma vez que ela permite obter a imagem com qualidade a partir de uma quantidade menor de medidas. Aliado ao *CS*, nós utilizamos também a pré-filtragem que permite aumentar a esparsidade da imagem antes de ser reconstruída, assim como a informação a priori que permite reduzir a quantidade de medidas necessárias para a reconstrução.

Ao considerar a técnica de *CS* como uma possível solução para a reconstrução das imagens a partir de poucas medidas, também consideramos neste trabalho a possibilidade de modelar a informação a priori fornecida ao algoritmo para que ela contemplasse possíveis artefatos provenientes de movimentos voluntários e/ou involuntários dos pacientes. A modelagem proposta é estatística e consiste em modelar um espalhamento centrado em pontos não-nulos da representação esparsa da imagem. Esses pontos não-nulos são aqueles resultantes da operação de pré-filtragem e, sobre cada um desses pontos e para cada uma das versões filtradas, foram calculadas curvas de distribuição Normal (uni ou bidimensional) com uma certa variância.

De modo a avaliar esse algoritmo, foram realizados testes em sinais de domínios unidimensional e bidimensional, em sinais de fantasmas de Shepp-Logan e em imagens reais de *MR* obtidas do banco de dados *BIRN*. Nesses testes, comparamos o desempenho dos algoritmos de reconstrução sem a utilização de informação a priori e com a utilização de informação a priori determinística, com o algoritmo que propusemos que utiliza a função de espalhamento  $\mathbf{P}$  como informação a priori.

Os testes em sinais unidimensionais mostraram que o desempenho do algoritmo que utiliza a função  $\mathbf{P}$  é superior ao algoritmo que não utiliza nenhum tipo de informação a

priori, mas é inferior àquele que utiliza a informação a priori ideal. Contudo, ao se obter as medidas do *scanner* quando o objeto escaneado se move, não é possível ter essa informação ideal, sendo esta uma situação inalcançável. Portanto, o fato da abordagem estocástica ser inferior a ela já era esperado e o comportamento da curva 4.2 comprova essa situação. Além disso, é possível perceber que, com o aumento do número de medidas, aumenta-se a qualidade da reconstrução, independentemente da abordagem analisada. Sendo que a abordagem estocástica atinge a região ótima de desempenho com uma quantidade menor de medidas do que a abordagem sem informação a priori.

Os testes de casos realizados com sinais de domínio bidimensionais gerados aleatoriamente e com as imagens de fantoma de Shepp-Logan apresentaram resultados similares com relação à qualidade de reconstrução quando se utilizou a função de espalhamento como informação a priori. Esta mostrou-se superior às demais, exceto quando se utilizou a informação determinística ideal.

Finalmente, os testes com imagens reais de ressonância magnética foram realizados com o intuito de analisar diferentes variáveis que influenciariam a qualidade da imagem reconstruída. Inicialmente, fizemos testes deslocando a imagem original 3.5 e realizando a reconstrução utilizando diferentes porcentagens de informação a priori. Também utilizamos dois valores de variância distintos, de modo que cada desvio padrão correspondente estivesse mais próximo de um dos deslocamentos impostos à imagem original. A partir desses testes pudemos avaliar que o desempenho quantitativo das abordagens (baseado nos valores das métricas *SER* e índice *SSIM*) que utilizam a informação a priori determinística é muito dependente da quantidade de informação fornecida ao algoritmo. Isso fez com que, em alguns casos, o desempenho dessas abordagens fosse inferior ao da abordagem sem nenhuma informação a priori. Contudo, esse fato não influencia tanto a abordagem estatística, que se manteve com bom desempenho independentemente da quantidade de informação fornecida.

A abordagem estocástica apresenta uma dependência com relação à matriz de covariância utilizada. Pudemos perceber que, para obter o desempenho ótimo do algoritmo, é necessário que os valores de variância fornecidos pela matriz integrem, pelo menos, o valor do deslocamento realizado. Quando deslocamos a imagem em 2 pixels em cada direção, não obtivemos uma grande diferença de desempenho (Fig. 4.6, 4.10, 4.7, 4.11), pois as duas matrizes utilizadas englobavam esse deslocamento nos seus valores de desvio padrão ( $\sigma_1 \geq 2$  e  $\sigma_2 \geq 2$ ). Porém, quando o deslocamento  $7 \times 8$  foi aplicado, a diferença de desempenho foi mais evidente (Fig. 4.12, 4.16, 4.13, 4.17). Isso ocorreu porque, ao se utilizar a matriz  $\Sigma_1$ , o valor do desvio padrão correspondente era bem inferior aos dois valores de deslocamento ( $\sigma_1 < 7$  e  $\sigma_1 < 8$ ) e, dessa forma, não englobavam todo o deslocamento que a imagem sofreu. Ao se utilizar a segunda matriz  $\Sigma_2$ , o desempenho

do método estocástico melhorou quando comparado com o caso anterior.

Além disso, também realizamos uma avaliação dos desempenhos da *SER* e do índice *SSIM* ao se variar a quantidade de linhas radiais utilizadas na reconstrução. Como esperado, ao se aumentar esse número, o desempenho também aumentou. Sendo que a abordagem estocástica se manteve com o desempenho superior em boa parte da análise realizada.

Apesar dos diversos testes realizados neste trabalho, ainda há muito a se avaliar com relação ao método proposto. Devido ao grande peso computacional das simulações realizadas, não foi possível realizar testes sistemáticos para comprovar, de fato, a influência da matriz de covariância no desempenho do método estocástico e a sua relação com os deslocamentos da imagem. Seria interessante também analisar o desempenho do algoritmo quando aplicado em imagens de ressonância magnética funcional (*fMRI*), onde as informações de um *frame* possam ser modeladas na reconstrução do próximo *frame*.

Além disso, seria interessante explorar outras formas de manipular a informação a priori fornecida para a reconstrução e utilizada no cálculo da função de espalhamento como, por exemplo, usar técnicas mais aprimoradas para detecção de bordas nas direções dos filtros e operações morfológicas nas imagens a priori para eliminar possíveis ruídos ou informações desnecessárias. Uma análise da influência da informação a priori incorreta no desempenho dos algoritmos também é necessária até mesmo para entender melhor o comportamento de vale que identificamos nas curvas de desempenho.

Outra análise que deve ser realizada no futuro é a utilização de interpolações diferentes ao se mapear o valor da constante  $\tau$ , além da linear descrita na Eq. 3.4. Existe a possibilidade de uma outra interpolação, como a quadrática, descrever de forma mais precisa a pertinência dos pontos de suporte da imagem. Dessa forma, a utilização de outra distribuição probabilística ao se construir as curvas de distribuição  $\mathbf{P}$ , como a distribuição Gamma, pode trazer melhorias aos resultados e deve ser investigado futuramente.

Finalmente, a abordagem estocástica apresentou um desempenho superior ao esperado inicialmente e, portanto, faz-se necessário realizar um estudo teórico aprofundado sobre a utilização dessa informação a priori modelada estatisticamente, como a realizada por Miosso *et al.* [50] para informações determinísticas, a fim de validar teoricamente todo o estudo realizado neste trabalho.

# Referências

- [1] R. N. Bryan. *Introduction to the Science of Medical Imaging*. Cambridge University Press, New York, USA, 1st edition, 2010.
- [2] H. E. Johns e J. R. Cunningham. *Physics of Radiology*. Charles C. Thomas Pub. Ltd., Springfield, USA, 4th edition, 1983.
- [3] W. J. Niessen, E. B. van de Kraats, S. A. M. Baert, e Th. van Walsum. 3D X-Ray Image Guidance in Interventional Radiology. *4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*, pages 1000–1003, 2007.
- [4] A. C. Kak e M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, New York, USA, 1988.
- [5] A. Markoe. *Analytic Tomography*, volume 106. Cambridge University Press, New York, USA, 2006.
- [6] J. M. Mukherjee, K. L. Johnson, J. E. McNamara, e M. A. King. Quantitative study of rigid-body and respiratory motion of patients undergoing stress and rest cardiac SPECT imaging. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 57(3):1105–1115, 2010.
- [7] J. S. Huber, Q. Peng, W. W. Moses, B. W. Reutter, J. Pouliot, e I. C. Hsu. Development of a PET-transrectal ultrasound prostate imaging system. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 58(3):674–681, 2011.
- [8] J. A. Jensen. Medical ultrasound imaging. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 93(1-3):153–165, 2007.
- [9] M. Yang, R. Sampson, S. Wei, T. F. Wenisch, e C. Chakrabarti. Separable beamforming for 3D medical ultrasound imaging. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(2):279–290, 2015.
- [10] G. A. Wright. Magnetic Resonance Imaging. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 14(1):56–66, 1997.
- [11] C. Westbrook. *MRI at a glance*. Wiley-Blackwell, 2nd edition.

- [12] F. G. Meinel, J. W. Nance, B. S. Harris, C. N. De Cecco, P. Costello, e U. J. Schoepf. Radiation risks from cardiovascular imaging tests. *Circulation*, 130(5):442–445, 2014.
- [13] R. Fresco, G. Spera, C. Meyer, P. Cabral, e J. R. Mackey. Imaging radiation doses and associated risks and benefits in subjects participating in breast cancer clinical trials. *Oncologist*, 20(7):702–712, 2015.
- [14] W. R. Hendee e M. K. O’Connor. Radiation Risks of Medical Imaging: Separating Fact from Fantasy. *Radiology*, 264(2):312–321, 2012.
- [15] R. H. Hashemi, W. G. Bradley, e C. J. Lisanti. *MRI: The Basics*. Lippincott Williams & Wilkins, Philadelphia, USA, 3rd edition, 2010.
- [16] A. K. Kono, P. Croisille, T. Nishii, K. Nishiyama, K. Kyotani, M. Shigeru, S. Takamine, S. Fujiwara, e K. Sugimura. Cardiovascular magnetic resonance tagging imaging correlates with myocardial dysfunction and T2 mapping in idiopathic dilated cardiomyopathy. *The International Journal of Cardiovascular Imaging*, 30(2):145–152, 2014.
- [17] D. Hirjak, R. C. Wolf, E. P. Wilder-Smith, K. M. Kubera, e P. A. Thomann. Motor Abnormalities and Basal Ganglia in Schizophrenia: Evidence from Structural Magnetic Resonance Imaging. *Brain Topography*, 28(1):135–152, 2014.
- [18] G. Gan, C. Büchel, e F. Isel. Effect of language task demands on the neural response during lexical access: a functional magnetic resonance imaging study. *Brain and Behavior*, 3(4):402–416, 2013.
- [19] S. Harris, J. T. Kaplan, A. Curiel, S. Y. Bookheimer, M. Iacoboni, e M. S. Cohen. The Neural Correlates of Religious and Nonreligious Belief. *PLoS ONE*, 4(10):1–9, 2009.
- [20] M. Lustig, D. L. Donoho, J. M. Santos, e J. M. Pauly. Compressed sensing MRI [a look at how cs can improve on current imaging techniques]. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 25(2):72–82, 2008.
- [21] J. Edwards. Focus on Compressive Sensing [Special Reports]. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 28(2):11–13, 2011.
- [22] E. J. Candès, J. Romberg, e T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2):489–509, 2006.
- [23] D. L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4):1289–1306, 2006.

- [24] R. G. Baraniuk. Compressive Sensing [Lecture Notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(July):118–121, 2007.
- [25] C. J. Miosso, R. von Borries, e J. H. Pierluissi. Compressive sensing method for improved reconstruction of gradient-sparse magnetic resonance images. In *Conference Record of the Forty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 799–806, 2009.
- [26] C. J. Miosso e R. von Borries. *Compressive Sensing with Prior Information Applied to Magnetic Resonance Imaging*. PhD thesis, University of Texas at El Paso, 2010.
- [27] P. C. Lauterbur e Z. Liang. Magnetic Resonance Imaging with a priori Constraints: Possibilities and Limitations. In *18th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 2170–2171, Amsterdam, 1996.
- [28] J. Wu, F. Liu, L. Jiao, e X. Wang. Multivariate pursuit image reconstruction using prior information beyond sparsity. *Signal Processing*, 93(6):1662–1672, 2013.
- [29] B. Tremoulheac, N. Dikaios, D. Atkinson, e S. R. Arridge. Dynamic MR Image Reconstruction - Separation From Undersampled (k,t)-Space via Low-Rank Plus Sparse Prior. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 33(8):1689–1701, 2014.
- [30] J. Garcia-Frias e I. Esnaola. Exploiting prior knowledge in the recovery of signals from noisy random projections. In *Data Compression Conference Proceedings*, pages 333–342, Snowbird, USA, 2007.
- [31] S. Ji, Y. Xue, e L. Carin. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(6):2346–2356, 2008.
- [32] L. He e L. Carin. Exploiting structure in wavelet-based bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(9):3488–3497, 2009.
- [33] L. He, H. Chen, e L. Carin. Tree-Structured Compressive Sensing With Variational Bayesian Analysis. *IEEE Signal Processing Letters*, 17(3):233–236, 2010.
- [34] J. Wu, F. Liu, L. C. Jiao, e X. Wang. Compressive sensing SAR image reconstruction based on Bayesian framework and evolutionary computation. *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society*, 20(7):1904–1911, 2011.
- [35] Z. Zhou, K. Liu, e J. Fang. Bayesian compressive sensing using normal product priors. *IEEE Signal Processing Letters*, 22(5):583–587, 2015.

- [36] W. Wang e B. Zhang. Adaptive sampling with Bayesian compressive sensing in radar sensor networks and image. *Eurasip Journal on Wireless Communications and Networking*, 2012:1–7, 2012.
- [37] Y. Huang, J. Paisley, Q. Lin, X. Ding, X. Fu, e X. Zhang. Bayesian Nonparametric Dictionary Learning for Compressed Sensing MRI. *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, 23(12):5007–5019, 2013.
- [38] N. Vaswani e W. Lu. Modified-CS: Modifying compressive sensing for problems with partially known support. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(9):4595–4607, 2010.
- [39] X. Rao e V. K. N. Lau. Compressive Sensing with Prior Support Quality Information and Application to Massive MIMO Channel Estimation with Temporal Correlation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(18):4914–4924, 2015.
- [40] C. J. Miosso, R. von Borries, M. Argàez, L. Velazquez, C. Quintero, e C. M. Potes. Compressive Sensing Reconstruction With Prior Information by Iteratively Reweighted Least-Squares. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(6):2424–2431, 2009.
- [41] C. L. Epstein. *Introduction to the mathematics of medical imaging*. Society for Industrial and Applied Mathematic (SIAM), Philadelphia, USA, 2nd edition, 2008.
- [42] Toshiba introduces ultrashort echo time. <http://www.axisimagingnews.com/2015/11/toshiba-introduces-ultrashort-echo-time/>. Accessed: 2016-04-11.
- [43] Mri: A guided tour. <https://nationalmaglab.org/education/magnet-academy/learn-the-basics/stories/mri-a-guided-tour>. Accessed: 2016-04-11.
- [44] S. Boyd e L. Vandenberghe. *Convex Optimization*, volume 25. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1st edition, 2004.
- [45] F. G. Costa, D. L. F. Almeida, e C. J. Miosso. Reconstrução de Imagens de Ressonância Magnética com base em Compressive Sensing com Pré-Filtragem no Domínio de Medidas usando Computação Paralela. In *XXV Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica (CBEB)*, 2016.
- [46] R. Chartrand e W. Yin. Iteratively Reweighted Algorithms for Compressive Sensing. In *2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 3869 – 3872, Las Vegas, USA, 2008. IEEE.
- [47] Biomedics informatics research network. <http://www.birncommunity.org/>.

- [48] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, e E. P. Simoncelli. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4):600–612, 2004.
- [49] Zhou Wang e Alan C Bovik. Error : Love It or Leave It ? *IEEE Signal Processing Magazine*, 26(1):98–117, 2009.
- [50] C J Miosso, R Von Borries, J H Pierluissi, e Life Senior Member. Compressive Sensing With Prior Information: Requirements and Probabilities of Reconstruction in  $l_1$ -Minimization. *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, 61(9):2150–2164, 2013.