Cleilton Aparecido Canal

Quadrado Tensorial Não-Abeliano de p-Grupos Finitos com Subgrupo Derivado de Ordem p, p ímpar

Brasília-DF

2017

Cleilton Aparecido Canal

Quadrado Tensorial Não-Abeliano de p-Grupos Finitos com Subgrupo Derivado de Ordem p, p ímpar

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de DOUTOR EM MATEMÁTICA.

Área de Concentração: Álgebra

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Noraí Romeu Rocco

Brasília-DF

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CC212q

Canal, Cleilton Aparecido
Quadrado Tensorial não-Abeliano de p-Grupos Finitos com Subgrupo Derivado de Ordem p, p ímpar / Cleilton Aparecido Canal; orientador Noraí Romeu Rocco. -- Brasília, 2017.
93 p.

Tese (Doutorado - Doutorado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. quadrado tensorial não-abeliano. 2. multiplicador de Schur. 3. p-grupos finitos. I. Rocco, Noraí Romeu, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Quadrado Tensorial Não-Abeliano de p-Grupos Finitos com Subgrupo Derivado de Ordem p, p ímpar.

por

CLEITON APARECIDO CANAL

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Brasília, 15 de fevereiro de 2017.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco – Orientador (MAT-UnB)

Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior (MAT-UnB)

Said Sidki

Prof. Dr. Said Najati Sidki (MAT-UnB)

Irene Naomi Nakaoka

Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka (UEM)

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira – (UFG)

*O autor foi bolsista CAPES e CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer minha mãe Lourdes Thiesen por toda sua dedicação e incentivo para minha formação. Também agradeço minhas irmãs Sharlene e Gabriela e meu irmão Cleverton, por sempre me apoiarem.

A minha esposa Eralcilene que sempre será uma dádiva em minha vida e aos nossos filhos Felipe e Miguel.

Ao meu orientador Noraí Romeu Rocco por sua sabedoria, conhecimento, paciência, compreensão e principalmente por ter aceito me orientar, mesmo nas condições adversas.

Aos membros da banca pelas valiosas sugestões. Em especial, a Irene Naomi Nakaoka que desde a minha graduação tem me orientado e acreditado em mim.

Aos meus professores e aos meus colegas de doutorado.

A CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante um período do doutorado.

Resumo

O objetivo desta tese é computar o quadrado tensorial não-abeliano, o quadrado exterior não-abeliano, o multiplicador de Schur e outros funtores homológicos para cada p-grupo finito com subgrupo derivado de ordem p, p ímpar, usando a apresentação destes grupos como dada por S. Blackburn.

Palavras-chave: Quadrado tensorial não-abeliano. multiplicador de Schur. p-grupos finitos.

Abstract

The objective of this thesis is to compute the non-abelian tensor square, the non-abelian exterior square, the Schur multiplier and other homological functors for each finite p-group with derived subgroup of order p, p odd, using the presentations of these groups, as given by S. Blackburn.

Keywords: Non-abelian tensor square. Schur multiplier. finite p-groups.

Lista de símbolos

$\|X\|$	Cardinalidade ou ordem do conjunto X
$H \leq G$	H é subgrupo de um grupo G
$\langle X \rangle$	Subgrupo gerado pelo conjunto X
X^G	Fecho normal de X em G
$o(x)$	Ordem do elemento x
g^h	$h^{-1}gh$, Conjugado de g por h
$[g, h]$	$g^{-1}h^{-1}gh$, Comutador de g e h
G'	$[G, G]$, Subgrupo derivado do grupo G
G^n	Subgrupo de G gerado por g^n para todo $g \in G$
$Z(G)$	Centro do grupo G
$\exp(G)$	Expoente do grupo G
$d(G)$	Número mínimo de geradores de G
$G \simeq H$	Grupos isomorfos
G^{ab}	G/G', Abelianizado de G
$G \otimes H$	Produto tensorial não-abeliano dos grupos G e H
$G \otimes G$	Quadrado tensorial não-abeliano do grupo G
$G \otimes_{\mathbb{Z}} H$	$G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$, Produto tensorial dos $\mathbb{Z}$-módulos G^{ab} e H^{ab}
$G \times H$	Produto direto dos grupos G e H

$G \oplus H$	Soma direta dos grupos G e H
$\Gamma(A)$	Funtor quadrático de Whitehead do grupo abeliano A
$G \wedge G$	Quadrado exterior não-abeliano do grupo G
$M(G)$	Multiplicador de Schur do grupo G
$\langle X \mid R \rangle$	Apresentação livre de um grupo por geradores e relatores
$\mathbb{F}$	Corpo
$\mathbb{F}_p$	Corpo finito de ordem p
V^*	Espaço dual do espaço vetorial V
$U^\perp$	Complemento ortogonal de U
$Z^{\otimes}(G)$	Centro tensorial não-abeliano do grupo G
C_n	Grupo cíclico de ordem n

Sumário

Introdução

O produto tensorial não-abeliano de grupos foi explicitamente introduzido por Brown e Loday em [10] seguindo os trabalhos de Miller [22] e Dennis [12], que generaliza o produto tensorial de grupos abelianos. Este é definido para qualquer par de grupos G e H, onde cada um deles age (à direita) sobre o outro e sobre si mesmo por conjugação satisfazendo certas condições de compatibilidade. Mais especificamente, se a ação $G \times H \to H$ de G sobre H é denotada por h^g, para todos $g \in G$ e $h \in H$ e, analogamente, a ação $H \times G \to G$ de H sobre G é denotada por g^h, para todos $g \in G$ e $h \in H$, dizemos que G e H agem *compativelmente* um sobre o outro, se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ ocorrer

$$g^{(h^{g_1})} = \left(\left(g^{g_1^{-1}}\right)^h\right)^{g_1} \quad \text{e} \quad h^{(g^{h_1})} = \left(\left(h^{h_1^{-1}}\right)^g\right)^{h_1}.$$

Neste caso, o *produto tensorial não-abeliano* de G e H, denotado por $G \otimes H$, é definido como sendo o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, para todos $g \in G$ e $h \in H$, sujeitos as relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \quad \text{e} \quad g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}),$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Em particular, a ação de G sobre si mesmo por conjugação sempre é compatível e, portanto, fica definido o *quadrado tensorial não-abeliano* $G \otimes G$.

A investigação de $G \otimes G$ do ponto de vista de teoria de grupos começou com Brown, Johnson e Robertson em [11]. Em particular, eles estavam interessados em descrever o quadrado tensorial não-abeliano de certos grupos explicitamente e descrevê-los em termos mais simples. Por exemplo, se denotarmos por D_n o grupo diedral de ordem $2n$ e C_m o grupo cíclico de ordem m, então vale que [11, Proposition 14]

$$D_n \otimes D_n \simeq \begin{cases} C_2 \times C_n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_n, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Outro exemplo, se $G = \langle x, y|\ y^n = 1 = x^m, y^x = y^l\rangle$ é um grupo metacíclico, com $l^m \equiv 1 \pmod n$ e n ímpar, então $G\otimes G$ é o produto direto de quatro grupos cíclicos com geradores $x\otimes x$, $y\otimes y$, $(x\otimes y)(y\otimes x)$ e $(x\otimes y)$, de ordens m, $\mathrm{mdc}(n, l-1)$, $\mathrm{mdc}(n, l-1, 1+l+\cdots+l^{m-1})$ e $\mathrm{mdc}(n, 1+l+\cdots+l^{m-1})$, respectivamente [11, Proposition 15].

Eles também computaram o quadrado tensorial não-abeliano de todos os grupos não-abelianos de ordem até 30 diretamente da apresentação de $G\otimes G$ e aplicando transformações de Tietze para simplificar a apresentação e deduzir sua estrutura. Entretanto, se $|G| = n$, então a apresentação de $G \otimes G$ envolve n^2 geradores e $2n^3$ relações, o que torna este método muito trabalhoso.

Um método para computar o quadrado tensorial não-abeliano de grupos finitos grandes ou infinitos é a construção de uma *biderivação*, ou seja, construir uma função $\phi : G \times G \to L$, onde L é um grupo, tal que para todo $g, g_1, h, h_1 \in G$ valem

$$(gg_1, h)\phi = (g^{g_1}, h^{g_1})\phi\ (g_1, h)\phi \quad \text{e} \quad (g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi\ (g^{h_1}, h^{h_1})\phi.$$

Não é difícil ver que esta função se estende a um único homomorfismo $\phi^* : G \otimes G \to L$ tal que $(g \otimes h)\phi^* = (g, h)\phi$, para todo $g, h \in G$. Então, o método consiste em conjecturar um grupo L e construir uma biderivação tal que o homomorfismo induzido seja um isomorfismo. Em geral, a conjectura para o grupo L vem de exemplos particulares. Entretanto, este processo de determinar um candidato L pode ser muito difícil. Outra dificuldade se encontra em provar que a função ϕ é de fato uma biderivação, principalmente no caso em que $G \otimes G$ é não-abeliano.

Este processo foi utilizado para calcular o quadrado tensorial não-abeliano de grupos livre nilpotentes de classe 2 e posto finito [2], para grupos livres 2-engelianos de posto finito [4, 7] e também tentaram utilizá-lo para os p-grupos finitos 2-gerados de classe de nilpotência 2 [3, 18].

Em [25], Rocco introduziu o grupo $\nu(G)$, uma construção relacionada ao quadrado tensorial não-abeliano. Se G é um grupo e G^φ é uma cópia isomorfa de G, ele definiu

$$\nu(G) = \langle G, G^\varphi|\ [g_1, g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^\varphi},\ \text{para todo } g_1, g_2, g_3 \in G\rangle.$$

Os grupos G e G^φ estão isomorficamente imersos em $\nu(G)$. Uma motivação para o estudo de $\nu(G)$ é que o subgrupo $[G, G^\varphi]$ de $\nu(G)$ é isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$ [25, Proposition 2.6]. Com isso, todos os cálculos em $G \otimes G$ podem ser feitos dentro do subgrupo $[G, G^\varphi]$ em $\nu(G)$ e, consequentemente, podemos usar cálculo de comutadores para estudar a estrutura de $G \otimes G$. Por exemplo, foi utilizado por Blyth, Fumagalli e Morigi em [9] para obter resultados estruturais de $G \otimes G$. Em [8] foi utilizado para definir um algoritmo efetivo para a classe dos grupos policíclicos, que permite o uso de ferramentas computacionais, como o GAP [14], no cálculo do quadrado tensorial não-abeliano.

Como já dissemos acima, o cálculo do quadrado tensorial não-abeliano dos p-grupos finitos 2-gerados de classe de nilpotência 2 já foi abordado em [3, 18]. Entretanto, a classificação destes grupos utilizada naqueles artigos estava incompleta. Isto só foi percebido mais tarde quando Ahmad, Magidin e Morse [1] estavam interessados em estudar as classes de conjugação destes grupos. Então eles fornecem uma nova classificação para esta classe de grupos que corrige e simplifica a classificação anterior. Com base nesta nova classificação, Magidin e Morse em [20] forneceram uma descrição completa do quadrado tensorial não-abeliano, do quadrado exterior não-abeliano, do multiplicador de Schur e de outros funtores homológicos para cada p-grupo 2-gerado de classe de nilpotência 2.

Dado G um p-grupo 2-gerado de classe de nilpotência 2, temos que $G \otimes G$ é abeliano. Então, a ideia utilizada por Magidin e Morse [20] consiste em determinar um conjunto gerador independente para $G \otimes G$ e calcular a ordem deste geradores. Como G é policíclico, podemos utilizar os resultados de [8] para determinar um conjunto gerador de $G \otimes G$. Dado um gerador de $G \otimes G$, digamos $a \otimes b$, podemos utilizar os cálculos com comutadores em $\nu(G)$ e verificar que $(a \otimes b)^{p^k} = 1$, para algum k. Isto nos fornece um limitante superior para a ordem de $a \otimes b$. Efetuando cálculos com GAP [14], podemos conjecturar que a ordem de $a \otimes b$ é exatamente p^k. Uma forma de se verificar que isto de fato ocorre é construir um homomorfismo de $G \otimes G$ sobre um grupo qualquer L de modo que a imagem do elemento $a \otimes b$ tenha ordem p^k. Isto pode ser feito, por exemplo, utilizando biderivação ou o Teste da Substituição.

O que pretendemos neste trabalho é fornecer uma descrição completa do quadrado tensorial não-abeliano, do quadrado exterior não-abeliano, do multiplicador de Schur e de outros funtores homológicos para cada p-grupo finito com subgrupo derivado de ordem p, p ímpar.

A classe $\mathscr{P}$ dos p-grupos finitos com subgrupo derivado de ordem p foi classificada por Simon Blackburn em [6]. Isto foi feito no sentido de fornecer uma bijeção entre o conjunto das classes de isomorfismo de grupos de ordem p^n em $\mathscr{P}$ e um conjunto $\mathscr{S}_n$, cujos elementos são triplas ordenadas com certas propriedades e dependem apenas de n (o conjunto $\mathscr{S}_n$ será definido no Capítulo 2). Mais ainda, é fornecida uma apresentação para cada grupo de ordem p^n em $\mathscr{P}$ em termos do elemento de $\mathscr{S}_n$ ao qual o grupo corresponde através da bijeção mencionada. Nossa descrição do quadrado tensorial não-abeliano e os demais funtores homológicos que estudaremos serão feitas em termos desta apresentação.

Esta tese esta organizada como segue. No Capítulo 1 forneceremos alguns conceitos, definições e resultados usuais em teoria de grupos, bem como do estudo de quadrado tensorial não-abeliano, os quais serão necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos. O Capítulo 2 é destinado a exibir os resultados de Simon Blackburn [6] sobre a classificação dos p-grupos finitos com subgrupo derivado de ordem p. Por fim, o Capítulo 3 é onde desenvolvemos nossos resultados.

Também incluímos o Apêndice A que fornece a construção do conjunto $\mathscr{S}_n$ definido por Simon Blackburn em [6], para $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, bem como a apresentação de cada grupo em $\mathscr{P}$ correspondente aos elementos de $\mathscr{S}_n$ e tabelas contendo os grupos $G \otimes G$, $G \wedge G$, $\Gamma(G^{ab})$, $M(G)$ e $J_2(G)$ para cada grupo $G \in \mathscr{P}$ com $|G| = p^n$ e $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo visa fornecer notações usuais de teoria de grupos, bem como introduzir conceitos e resultados sobre o quadrado tensorial não-abeliano de grupos e outros funtores homológicos. Os resultados apresentados nesse capítulo não serão demonstrados, mas serão indicadas as referências em que tais resultados e suas respectivas demonstrações podem ser encontrados.

Ao longo de todo o texto, os grupos serão considerados com a notação multiplicativa e denotaremos o elemento neutro, bem como o subgrupo trivial formado por apenas este elemento, por 1. Em alguns momentos, quando estivermos trabalhando com grupos abelianos, será utilizada a notação aditiva e o elemento neutro passará a ser denotado por 0. Funções $f : G \to H$ serão aplicadas à direita, em particular, quando f for um homomorfismo de grupos utilizaremos, também, a notação exponencial $(x)f = x^f$.

Dados G um grupo e H um subconjunto não vazio de G, convencionaremos utilizar as seguintes notações: $|G|$ é a ordem (cardinalidade) de G; $H \leq G$ diz que H é subgrupo de G; $H \lhd G$ diz que H é subgrupo normal de G; $\langle H \rangle$ é o subgrupo de G gerado por H; $d(G)$ é o número mínimo de geradores de G; H^G é o *fecho normal* de H em G, o qual é definido como sendo a interseção de todos os subgrupos normais de G que contém H e pode ser obtido como $H^G = \langle g^{-1}hg;\ h \in H, g \in G \rangle$.

Se x pertence a um grupo G, então a *ordem* de x é dada pelo menor inteiro positivo n tal que $x^n = 1$ e é denotada por $o(x)$. Um grupo G é dito ser de *torção* ou *periódico* quando todos os seus elementos têm ordem finita e é dito ser *livre de torção* quando o único elemento de ordem finita é o elemento neutro. Se as ordens dos elementos de um grupo G são finitas e limitadas, dizemos que G possui *expoente finito*. Neste caso, utilizamos a notação $\exp(G)$ para denotar o *expoente* de G, o qual é definido como sendo o menor inteiro positivo n tal que $g^n = 1$, para todo $g \in G$.

Dado p um número primo, dizemos que G é um *p-grupo abeliano elementar* quando G é um p-grupo abeliano e todo elemento não trivial de G tem ordem p. Quando G é um p-grupo abeliano elementar finito, então G é isomorfo a um produto direto de um número finito de grupos cíclicos de ordem p. Neste caso, podemos munir G com uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, com a multiplicação por escalar dada por: para cada $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e cada $g \in G$, definimos $\overline{\alpha} g = g^{\alpha}$. Notamos que esta operação está bem definida, pois se $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, então p divide $(\alpha - \beta)$ e, assim, $1 = g^{\alpha-\beta} = g^{\alpha} g^{-\beta}$, ou seja, $g^{\alpha} = g^{\beta}$.

1.1 Cálculo com comutadores

Sejam G um grupo e $g, h \in G$. Definimos o *conjugado* de g por h como sendo $g^h := h^{-1}gh$ e o *comutador* de g e h como sendo $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}g^h$. Nossos comutadores serão normados à esquerda, ou seja, $[x, y, z] = [[x, y], z]$ e, indutivamente, $[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n]$. Na proposição a seguir, listamos algumas propriedades dos comutadores que utilizaremos, as quais são de fácil verificação e sua demonstração pode ser encontrada em [24, página 123].

Proposição 1.1. *Sejam x, y, z elementos de um grupo. Então:*

1. $[x, y]^{-1} = [y, x]$;
2. $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ *e* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;
3. $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$;
4. *Se x comuta com $[x, y]$, então $[x^m, y] = [x, y]^m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$. Analogamente, se y comuta com $[x, y]$, então $[x, y^m] = [x, y]^m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

Dados X e Y subconjuntos não vazios de um grupo G, denotamos por $[X, Y]$ o subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x, y]$, com $x \in X$ e $y \in Y$. Em particular, $[G, G]$ é chamado subgrupo *derivado* de G e denotamos por G'. Este subgrupo tem a propriedade que G/G' é o maior grupo quociente de G que é abeliano, ou seja, se H é um subgrupo normal de G e G/H é abeliano, então $G' \leq H$. Por sua importância, o grupo G/G' é chamado de *abelianizado* de G e será denotado por G^{ab}.

1.2 Grupos nilpotentes

Um grupo G é *nilpotente* se existe uma série normal

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

tal que $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$, para todo $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Uma série normal com esta propriedade recebe o nome de *série central*. O comprimento da menor série central de um grupo nilpotente G é chamado de *classe de nilpotência* de G.

É fácil ver que todo grupo abeliano não trivial é nilpotente de classe 1. Um outro tipo importante de grupos nilpotentes são os p-grupos finitos, com p um número primo (Ver [24, página 122]).

Dado um grupo G, definimos indutivamente os seguintes subgrupos

$$\gamma_1(G) = G; \quad \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G].$$

Por indução, podemos demonstrar que cada um dos subgrupos definidos acima são característicos em G e, consequentemente, eles são subgrupos normais de G. Observamos que se $K \lhd G$ e $K \leq H \leq G$, então $[H, G] \leq K$ se, e somente se, $H/K \leq Z(G/K)$. Com isso, $[\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G)$ implica que $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \leq Z(G/\gamma_{n+1}(G))$, para todo $n \geq 1$. Portanto, a série

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$$

é uma série central de G, a qual chamamos de *série central inferior* de G.

Embora a série central inferior não termina necessariamente em 1, temos a seguinte

Proposição 1.2. [24, página 125] *Seja $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ uma série central de um grupo nilpotente G. Então,*

(i) $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$ *e, assim,* $\gamma_{n+1}(G) = 1$*;*

(ii) A classe de nilpotência de G é o menor inteiro n tal que $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

A próxima proposição lista algumas propriedades básicas dos grupos nilpotentes e suas demonstrações podem ser encontradas em [24, Capítulo 5].

Proposição 1.3. *1. Subgrupos e imagens homomórficas de grupos nilpotentes são nilpotentes;*

2. Produto direto de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente;

3. Todo p-grupo finito é nilpotente.

O *subgrupo de Frattini* de um grupo qualquer G é definido como sendo a interseção de todos os subgrupos maximais de G, e deve ser igual ao próprio grupo G no caso em que G não possui subgrupo maximal. Denotaremos o subgrupo de Frattini de G por $\Phi(G)$.

Teorema 1.4. [27, Theorem 5.48] *Seja G um grupo finito. Então,*

1. $\Phi(G)$ *é nilpotente;*

2. *Se G é um p-grupo, então $\Phi(G) = G'G^p$, onde G^p é o subgrupo de G gerado por todas as p-ésima potências;*

3. *Se G é um p-grupo, então $G/\Phi(G)$ é um p-grupo abeliano elementar e, portanto, um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$.*

1.3 Grupos Livres

Nesta seção iremos definir grupos livres, isto nos será útil para descrevermos grupos através de seus geradores e relações sobre estes. Para mais detalhes veja [17], [21] e [24].

Definição 1.5. Um grupo F é dito *livre* sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \longrightarrow G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \longrightarrow G$ tal que $x^{\theta'} = x^{\theta}$, para todo $x \in X$, ou seja, θ' estende θ.

Em outra palavras, podemos dizer que θ' estende θ ou, denotando por $i : X \to F$ a inclusão, podemos dizer que θ' torna o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "\theta'"] & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & G \end{tikzcd}$$

comutativo, isto é, $i\theta' = \theta$.

Se F_1 é um grupo livre sobre um conjunto X_1 e F_2 é um grupo livre sobre um conjunto X_2, então F_1 é isomorfo a F_2 se, e somente se, os conjuntos X_1 e X_2 têm a mesma cardinalidade (Ver [17, página 3]). Isto nos permite definir o *posto* de um grupo livre F sobre X como sendo a cardinalidade de X. Além disso, dado qualquer conjunto não vazio X, é possível construir um grupo livre F sobre X e, assim, podemos obter grupos livres de qualquer posto (Ver [17, página 4]). Um resultado que torna importante o estudo de grupos livres é a

Proposição 1.6. [17, página 7] *Todo grupo é uma imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Sejam G um grupo e $\varphi : F \longrightarrow G$ um epimorfismo de um grupo livre $F = F(X)$ sobre G. Temos que $G \simeq F/N$, onde N é o núcleo de φ. Agora, seja R um subconjunto de F que gera N como subgrupo normal de F, isto é, $\langle R \rangle^F = N$. Observamos que X e R determinam G a menos de isomorfismo. Assim, escrevemos $G = \langle X | \, R \rangle$ e chamamos este par de uma *apresentação livre* do grupo G. Os elementos de X são chamados de *geradores* e os de R de *relatores*. Dizemos que G é *finitamente apresentado* se existe uma apresentação $G = \langle X | \, R \rangle$, onde X e R são finitos. Quando $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ e $R = \{r_1, \cdots, r_m\}$, é comum escrevermos $G = \langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1 = 1, \cdots, r_m = 1\rangle$. Neste caso, chamamos $r_i = 1$, $1 \leq i \leq m$, de *relações definidoras* para G.

Exemplo 1.7. Se $G = \langle x \rangle$ é um grupo cíclico de ordem n, então é fácil ver que uma apresentação livre de G é $\langle x \,|\, x^n = 1\rangle$. Dado $n \geq 2$, o *grupo diedral* de ordem $2n$ possui uma apresentação livre dada por

$$D_n = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, x^y = x^{-1}\rangle.$$

Os seguintes resultados são importantes na construção de homomorfismos entre grupos.

Lema 1.8. [17, página 42] *Sejam F, G e H grupos e $\alpha : F \to G$ e $\beta : F \to H$ homomorfismos tais que α é sobrejetora e $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta)$. Então, existe um homomorfismo $\gamma : G \to H$ tal que $\alpha\gamma = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
\ker(\beta) \arrow[dr] & & G \arrow[dd, dashed, "\gamma"] \\
& F \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\
\ker(\alpha) \arrow[uu, hook] \arrow[ur] & & H
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.9 (Teste da Substituição)**.** [17, página 44] *Sejam G um grupo com apresentação $G = \langle X \mid R\rangle$, H um grupo e $\theta : X \to H$ uma função. Então, θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e somente se, θ é consistente com as relações definidoras para G, isto é, se para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $(x)\theta$ em r resulta a identidade de H.*

Um grupo G pode ter muitas apresentações, como por exemplo, o grupo diedral D_n pode ser apresentado por $D_n = \langle x, y \,|\, x^n = y^2 = 1, x^y = x^{-1}\rangle$ ou por $D_n = \langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = (xy)^n = 1\rangle$, entre outras. Assim, surge a pergunta: é possível a partir de uma apresentação de G obter qualquer outra? A resposta afirmativa para esta pergunta é dada por H. Tietze em 1908, quando mostrou que a partir de uma apresentação de um grupo G, qualquer outra apresentação pode ser obtida através de repetidas transformações, que definimos abaixo. Um demonstração disto pode ser encontrado em [21, Theorem 1.5].

Definição 1.10 (Transformações de Tietze)**.** Consideramos um grupo G dado pela apresentação $G = \langle a, b, c, \cdots | P, Q, R, \cdots\rangle$. As seguintes operações com os geradores e relatores de G são chamadas de *Transformações de Tietze*:

1. Se as palavras $S, T, \cdots$ são deriváveis de $P, Q, R, \cdots$, então adicione $S, T, \cdots$ nas relações definidoras;

2. Se alguns dos relatores, digamos $S, T, \cdots$, listados nas definições relatoras $P, Q, R, \cdots$ são deriváveis de outras, então delete $S, T, \cdots$ das relações definidoras;

3. Se $K, M, \cdots$ são quaisquer palavras em $a, b, c, \cdots$, então adicione os símbolos $x, y, \cdots$ aos geradores de G e adicione as relações $x = K$, $y = M$, $\cdots$, as relações definidoras;

4. Se alguma das relações de G é da forma $p = V$, $q = W$, $\cdots$, onde $p, q, \cdots$ são geradores de G e $V, W, \cdots$ são palavras nos geradores diferentes de $p, q, \cdots$, então delete os geradores $p, q, \cdots$, troque estes elementos por $V, W, \cdots$ nas demais relações e delete $p = V$, $q = W$, $\cdots$, das relações definidoras.

Finalizaremos esta seção abordando os conceitos de variedades de grupos, que serão necessários para a demonstração da Proposição 2.19 no Capítulo 2. Mais detalhes podem ser encontrados em [24, Capítulo 2].

Sejam F um grupo livre sobre um conjunto enumerável infinito $\{x_1, x_2, \cdots\}$ e W um subconjunto não vazio de F. Se $w = x_{i_1}^{l_1} \cdots x_{i_r}^{l_r} \in W$ e $g_1, \cdots, g_r$ são elementos de um grupo G, definimos o *valor* da palavra w em $(g_1, \cdots, g_r)$ como sendo $w(g_1, \cdots, g_r) = g_1^{l_1} \cdots g_r^{l_r}$. O subgrupo de G gerado por todos os valores em G das palavras em W é chamado de *subgrupo verbal* de G determinado por W, que denotamos por

$$W(G) = \langle w(g_1, \cdots, g_r) |\ g_i \in G,\ w \in W \rangle.$$

Por exemplo, se $W = \{[x_1, x_2]\}$, então $W(G) = \langle [g_1, g_2] |$ para todo $g_1, g_2 \in G \rangle = G'$.

Definição 1.11. Seja W um subconjunto do grupo livre $F = F(\{x_1, x_2, \cdots\})$. A classe de todos os grupos G tais que $W(G) = 1$ é chamada a *variedade* $\mathfrak{B}(W)$ determinada por W. Dizemos que W é um conjunto de *leis* para a variedade $\mathfrak{B}(W)$.

Por exemplo, se $W = \{[x_1, x_2]\}$, então $\mathfrak{B}(W)$ é a classe dos grupos G tais que $[g_1, g_1] = 1$ para todo $g_1, g_2 \in G$, ou seja, $\mathfrak{B}(W)$ é a classe dos grupos abelianos. Se $W = \{[x_1, x_2], x_1^n\}$, onde n é um inteiro positivo, então $\mathfrak{B}(W)$ é a classe dos grupos G tais que $[g_1, g_1] = 1$ e $g_1^n = 1$, para todo $g_1, g_2 \in G$, ou seja, $\mathfrak{B}(W)$ é a classe dos grupos abelianos de expoente n.

Definição 1.12. Sejam $\mathfrak{B}$ uma variedade, F um grupo em $\mathfrak{B}$, X um conjunto não vazio e $\sigma : X \to F$ uma função. Dizemos que F é *relativamente livre* sobre o conjunto X na variedade $\mathfrak{B}$ se para cada função $\theta : X \longrightarrow G$, com G pertencente a variedade $\mathfrak{B}$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \longrightarrow G$ tal que $\sigma\theta' = \theta$.

Se F é um grupo relativamente livre sobre X na variedade $\mathfrak{B}$, então a função $\sigma : X \to F$ é injetora e, assim, podemos considerar que X é um subconjunto de F e que θ' estende θ. Notamos que se $\mathfrak{B}$ é a variedade de todos os grupos, então a definição de grupo relativamente livre sobre o conjunto X na variedade $\mathfrak{B}$ coincide com a definição de grupo livre sobre X.

O próximo exemplo descreve alguns resultados necessários para a demonstração da Proposição 2.19 no Capítulo 2.

Exemplo 1.13. Seja U um conjunto finito. Definimos e fixamos uma ordem linear qualquer sobre U. Seja $F(U)$ o grupo relativamente livre sobre o conjunto U na variedade $\mathscr{V}$ definida pelas leis

$$[x^p, y],\ [x, y, z],\ [x, y]^p.$$

Consideramos L o subgrupo central de $F(U)$ gerado pelos elementos $\{u^p;\ u \in U\}$. Definamos $T = F(U)'$. Desde que as leis $[x, y]^p$ e $[x, y, z]$ ocorrem em $\mathscr{V}$, então T é abeliano elementar e é gerado pelo conjunto $\{[u, v];\ u, v \in U,\ u < v\}$. Definamos $Z = TL$.

Afirmamos que $F(U)/Z$ é um grupo relativamente livre sobre o conjunto U na variedade dos grupos abelianos de expoente p, definida pelas leis $[x, y]$ e x^p. De fato, sejam G um grupo qualquer na variedade dos grupos abelianos de expoente p e $\theta : U \to G$ uma função qualquer. Podemos verificar que G está na variedade $\mathscr{V}$ definida no parágrafo acima. Desde que $F(U)$ é relativamente livre sobre o conjunto U na variedade $\mathscr{V}$, então existe um único homomorfismo $\theta' : F(U) \to G$ tal que θ' estende θ. Consideramos $\sigma : U \to F(U)/Z$ definida por $\sigma = \iota\pi$, onde $\iota : U \to F(U)$ é a inclusão e $\pi : F(U) \to F(U)/Z$ é a projeção canônica. Definamos $\theta'' : F(U)/Z \to G$ por $(xZ)\theta'' = (x)\theta'$, para todo $xZ \in F(U)/Z$. Esta função está bem definida, pois Z está contido em $\ker(\theta')$. Mais ainda, é o único homomorfismo tal que $\sigma\theta'' = \theta$, o que prova o desejado.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, hook, "\iota"'] \arrow[dr, "\theta"] \arrow[dd, bend right, "\sigma"'] & \\
F(U) \arrow[r, dashed, "\theta'"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\
F(U)/Z \arrow[ur, dashed, "\theta''"'] &
\end{tikzcd}$$

Dado p um número primo ímpar, seja $W = \{[x^p, y], [x, y, z], [x, y]^p, x^{p^2}\}$. Então, a variedade $\mathfrak{B}(W)$ é conhecida como variedade de Higman de p-grupos e denotada por $\mathscr{H}$. Com um argumento análogo ao do parágrafo anterior, obtemos que $F(U)/Z^p$ é o grupo relativamente livre sobre o conjunto U na variedade de Higman $\mathscr{H}$ de p-grupos. $\square$

1.4 Multiplicador de Schur

O multiplicador de Schur foi introduzido por Schur com propósito de estudar representações projetivas (Ver [27, páginas 201 e 358]). Nesta seção daremos uma definição do multiplicador de Schur e alguns resultados. Um estudo mais detalhado pode ser encontrado em [19].

Definição 1.14. Seja G um grupo com apresentação $G = \langle X|\ R\rangle$ e consideramos $F = F(X)$ o grupo livre sobre o conjunto X. O *multiplicador de Schur* é definido por

$$M(G) = \frac{F' \cap \overline{R}}{[F, \overline{R}]},$$

onde $\overline{R}$ denota o fecho normal de R em $F = F(X)$.

Proposição 1.15. 1. [27, Corollary 11.18] Se $G = \langle X|\ R\rangle$ é um grupo finito, então $M(G)$ indenpende da apresentação de G;

2. [27, Theorem 7.60] Se G é um grupo finito, então $M(G)$ é um grupo abeliano finito.

Abaixo, exibiremos dois resultados que serão utilizados no Capítilo 3.

Lema 1.16. [19, Proposition 2.1.7] *Seja Z um subgrupo central de um grupo G. Então $G' \cap Z$ é isomorfo a um subgrupo do multiplicador de Schur $M(G/Z)$.*

Lema 1.17. [19, Corollary 3.4.13] *Seja G um p-grupo finito e denotamos por $d(G)$ o número mínimo de geradores de G. Então,*

$$d(M(G)) \geq \frac{d(G)^2}{4} - d(G).$$

Em particular, se $d(G) \geq 4$, então $M(G) \neq 1$.

1.5 O Produto Tensorial não-Abeliano

O produto tensorial não-abeliano foi explicitamente introduzido por Brown e Loday em [10] seguindo os trabalhos de Miller [22] e Dennis [12], que generaliza o produto tensorial ordinário de grupos abelianos. Sua investigação do ponto de vista de teoria de grupos começou com Brown, Johnson e Robertson em [11]. A seguir, apresentaremos a definição de produto tensorial não-abeliano e alguns resultados relacionados, os quais podem ser encontrados em [11].

Sejam G e H grupos. Uma *ação (à direita)* de G sobre H é um homomorfismo $\theta : G \to \mathrm{Aut}\ (H)$, em que para cada $g \in G$ e $h \in H$ denotamos $(h)g^{\theta} = h^g$. Em particular, G age sobre si mesmo por conjugação, ou seja, $g^x = x^{-1}gx$ para todo $g, x \in G$. Caso θ

seja o homomorfismo trivial, ou seja, se $h^g = h$ para todos $g \in G$ e $h \in H$, dizemos que G age *trivialmente* sobre H ou que H é G-*trivial*.

Agora, consideramos que G age sobre H, que H age sobre G e que eles agem sobre si mesmos por conjugação. Se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ ocorrer

$$g^{(h^{g_1})} = \left(\left(g^{g_1^{-1}}\right)^h\right)^{g_1} \quad \text{e} \quad h^{(g^{h_1})} = \left(\left(h^{h_1^{-1}}\right)^g\right)^{h_1},$$

então dizemos que G e H agem *compativelmente* um sobre o outro. Neste caso, o *produto tensorial não-abeliano* de G e H, denotado por $G \otimes H$, é definido como sendo o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, para todos $g \in G$ e $h \in H$, sujeitos às relações

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \quad \text{e} \quad g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}),$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Em particular, a ação de G sobre si mesmo por conjugação sempre é compatível e, portanto, sempre fica bem definido o *quadrado tensorial não-abeliano* $G \otimes G$.

No caso em que G e H agem um sobre o outro trivialmente, o produto tensorial não-abeliano $G \otimes H$ coincide com o produto tensorial dos $\mathbb{Z}$-módulos G^{ab} e H^{ab}, ou seja, $G \otimes H \simeq G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$ (Ver [11, Remark 2] ou [23, Proposição 8.8]).

Definição 1.18. Sejam G, H e L grupos. Uma função $\phi : G \times H \to L$ é chamada de *biderivação* se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$ valem

$$(gg_1, h)\phi = (g^{g_1}, h^{g_1})\phi\ (g_1, h)\phi,$$

$$(g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi\ (g^{h_1}, h^{h_1})\phi.$$

Aplicando o Teste da Substituição é fácil ver que uma biderivação $\phi : G \times H \to L$ determina um único homomorfismo $\phi^* : G \otimes H \to L$ tal que $(g \otimes h)\phi^* = (g, h)\phi$, para todos $g \in G$ e $h \in H$.

Exemplo 1.19. Seja G um grupo e consideremos a função comutador $G \times G \to G'$ dada por $(g, h) \mapsto [g, h]$, para todo $(g, h) \in G \times G$. Pela Proposição 1.1, vemos que ϕ é uma biderivação. Portanto, ϕ induz um único homomorfismo $k : G \otimes G \to G'$ tal que $(g \otimes h)k = [g, h]$, para todo $g, h \in G$.

A seguir, listamos os principais resultados obtidos por R. Brown e J. L. Loday:

Proposição 1.20. [11, Proposition 1] *Os grupos G e H atuam sobre $G \otimes H$ de modo que*

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g \quad e \quad (g \otimes h_1)^h = g^h \otimes h_1^h,$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$.

Proposição 1.21. [11, Proposition 1] *Existe um único isomorfismo $\tau : G \otimes H \to H \otimes G$ tal que $(g \otimes h)\tau = (h \otimes g)^{-1}$, para todos $g \in G$ e $h \in H$.*

Proposição 1.22. [11, Proposition 3] *Para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos:*

(a) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$;

(b) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$;

(c) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$;

(d) $g_1 \otimes h^{-g}h = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$;

(e) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1$.

Por fim, temos um importante resultado sobre o quadrado tensorial de um grupo que é dado como produto direto de dois subgrupos, com cada um deles agindo trivialmente sobre o outro.

Proposição 1.23. [11, Proposition 11] *Sejam G e H grupos tais que G é H-trivial e H é G-trivial. Então,*

$$(G \times H) \otimes (G \times H) \simeq (G \otimes G) \times (G \otimes H) \times (H \otimes G) \times (H \otimes H),$$

onde os termos mistos do lado direito são produtos tensoriais usuais e os extremos são quadrados tensoriais não-abelianos.

1.6 O Quadrado Tensorial não-Abeliano e Alguns Funtores Homológicos

Como dito na seção anterior, o quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$ de um grupo G é um caso particular de produto tensorial não-abeliano considerando G agindo sobre si mesmo por conjugação. Esta seção é dedicada a apresentar alguns resultados sobre $G \otimes G$.

Dado um grupo abeliano (aditivo) A, definimos $\Gamma(A)$ o grupo gerado por todos os elementos γa, com $a \in A$, sujeito às relações

$$\gamma(-a) = \gamma a,$$

$$\gamma(a + b + c) + \gamma a + \gamma b + \gamma c = \gamma(a + b) + \gamma(b + c) + \gamma(c + a).$$

Este é conhecido como *functor quadrático de Whitehead* (Ver [30]). Um estudo de suas propriedades pode ser encontrado na dissertação de mestrado de I. N. Nakaoka [23].

Abaixo, apresentamos um resultado que conecta o functor quadrático de Whitehead do abelianizado de um grupo G com o estudo do quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$.

Proposição 1.24. [11, página 181] *Existe um homomorfismo bem definido $\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G \otimes G$ tal que $(\gamma\bar{g})\psi = g \otimes g$, onde $\bar{g}$ denota a classe lateral de g módulo G'.*

Consideramos o homomorfismo derivado $k : G \otimes G \to G'$ dado pelo Exemplo 1.19, tal que $(g \otimes h)k = [g, h]$, para todo $g, h \in G$. Denotamos por $J_2(G)$ o núcleo deste homomorfismo. Claramente Im $\psi \subseteq J_2(G)$ e, como $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G \otimes G$, obtemos Im ψ normal em $G \otimes G$. Notamos que Im $\psi = \nabla(G)$, onde $\nabla(G)$ é o subgrupo normal de $G \otimes G$ gerado por $\{g \otimes g;\ g \in G\}$. Assim, podemos pensar no grupo $(G \otimes G)/\nabla(G)$, que chamamos de *quadrado exterior não-abeliano* de G e denotamos por $G \wedge G$. Como Im $\psi \subseteq J_2(G)$, o Lema 1.8 implica que existe um homomorfismo $k' : G \wedge G \to G'$ tal que $\rho k' = k$, onde $\rho : G \otimes G \to (G \otimes G)/\nabla(G)$ é a projeção natural. Os resultados de [22] mostram que o núcleo de k' é isomorfo ao multiplicador de Schur $M(G)$.

$$\begin{tikzcd}
J_2(G) \arrow[dr] & & (G \otimes G)/\mathrm{Im}\ \psi \simeq G \wedge G \arrow[dd, dashed, "k'"] \\
& G \otimes G \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "k"'] & \\
\mathrm{Im}\ \psi \arrow[uu, hook] \arrow[ur] & & G'
\end{tikzcd}$$

Com isso, de acordo com [11], obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas e extensões centrais como colunas:

$$\begin{tikzcd}
& & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
& \Gamma(G^{ab}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & J_2(G) \arrow[r] \arrow[d] & M(G) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \nabla(G) \arrow[r] \arrow[d] & G \otimes G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "k"'] & G \wedge G \arrow[r] \arrow[d, "k'"'] & 1 \\
& 1 & G' \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
& & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Figura 1 – Diagrama 1

1.7 O Grupo $\nu(G)$

A seguir, vamos considerar uma construção relacionada ao quadrado tensorial não-abeliano, a saber, o grupo $\nu(G)$ estudado por N. Rocco [25, 26].

Definição 1.25. Sejam G um grupo e G^{φ} uma cópia isomorfa de G via o isomorfismo $\varphi : G \to G^{\varphi}$, onde $g \mapsto g^{\varphi}$, para todo $g \in G$. Definimos o grupo $\nu(G)$ como sendo

$$\nu(G) = \langle G, G^{\varphi} | \ [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}}, \text{ para todo } g_1, g_2, g_3 \in G\rangle.$$

Os grupos G e G^{φ} estão isomorficamente imersos em $\nu(G)$. Uma motivação para o estudo de $\nu(G)$ é a conexão do comutador com o quadrado tensorial, conforme a

Proposição 1.26. [25, Proposition 2.6] *A aplicação $\Omega : G \otimes G \to [G, G^{\varphi}]$, definida por $g \otimes h \mapsto [g, h^{\varphi}]$, para todo $g, h \in G$, é um isomorfismo.*

Com este resultado, todos os cálculos em $G \otimes G$ podem ser feitos dentro do subgrupo $[G, G^{\varphi}]$ em $\nu(G)$. Portanto, em vista da identificação, nós usamos $G \otimes G$ e $[G, G^{\varphi}]$ de modo indistinto, bem como $g \otimes h$ e $[g, h^{\varphi}]$, para todo $g, h \in G$, identificando essas duas descrições via o isomorfismo da Proposição 1.26.

Muitos dos cálculos em $\nu(G)$ podem ser encontrados em [25, 26]. Listaremos alguns deles abaixo, de modo a facilitar a consulta quando citados no texto.

Lema 1.27. *Seja G um grupo. As seguintes relações ocorrem em $\nu(G)$:*

(i) $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]] = [[g, h], [x, y]^{\varphi}]$, *para todo* $g, h, x, y \in G$;

(ii) $[g_1^{\varphi}, g_2, g_3] = [g_1, g_2^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1^{\varphi}, g_2^{\varphi}, g_3] = [g_1^{\varphi}, g_2, g_3^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}, g_3^{\varphi}]$, *para todo* $g_1, g_2, g_3 \in G$;

(iii) $[g_1, [g_2, g_3]^{\varphi}] = [g_2, g_3, g_1^{\varphi}]^{-1}$, *para todo* $g_1, g_2, g_3 \in G$;

(iv) $[g, g^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$, *para todo* $g \in G$;

(v) $[g_1, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$, *para todo* $g_1, g_2 \in G$;

(vi) $[g, g^{\varphi}] = 1$, *para todo* $g \in G'$.

Lema 1.28. *Sejam x, y elementos de G tais que $[x, y] = 1$. Então, em $\nu(G)$ ocorrem:*

(i) $[x^n, y^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}]^n = [x, (y^n)^{\varphi}]$, *para todo inteiro* n;

(ii) Se x e y são elementos de torção de ordem $o(x)$ e $o(y)$, respectivamente, então $o([x, y^{\varphi}])$ divide o máximo divisor comum de $o(x)$ e $o(y)$.

Lema 1.29. *Sejam a, b, x elementos em G tais que $[x, a] = 1 = [x, b]$. Então em $\nu(G)$, $[a, b, x^{\varphi}] = 1 = [[a, b]^{\varphi}, x]$.*

Lema 1.30. *Sejam g_1 e g_2 elementos em G. Então em $\nu(G)$,*

$$[g_1^n, g_2^{\varphi}][g_2, (g_1^n)^{\varphi}] = [g_1, (g_2^n)^{\varphi}][g_2^n, g_1^{\varphi}] = ([g_1, g_2^{\varphi}][g_2, g_1^{\varphi}])^n.$$

No caso em que G é um grupo nilpotente de classe 2, vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 1.31. [2, Lemma 2.6] *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Para quaisquer x e y em G e quaisquer inteiros n e m, em $\nu(G)$ vale que*

$$[x^n, (y^m)^\varphi] = [x, y^\varphi]^{mn}[y, [x, y]^\varphi]^{n\binom{m}{2}}[x, [x, y]^\varphi]^{m\binom{n}{2}}.$$

Como consequência imediata, obtemos que

Corolário 1.32. *Sejam G um grupo nilpotente de classe 2 e $p > 2$ um número primo. Se $|G'| = p$ e $G' \leq Z(G)$, então*

$$[x^{p^n}, y^\varphi] = [x, y^\varphi]^{p^n} = [x, (y^{p^n})^\varphi],$$

para todo inteiro positivo n.

Alguns resultados estruturais dos grupos que aparecem no Diagrama 1 da página 23 foram investigados por Blyth, Fumagalli e Morigi em [9], cujos resultados resumimos abaixo.

Teorema 1.33. 1. *Se A é qualquer grupo abeliano finitamente gerado com conjunto de geradores independentes $\{a_1, \cdots, a_n\}$, então $A \otimes A \simeq \nabla(A) \times (A \wedge A)$, onde os geradores independentes de $\nabla(A)$ são imagens de $a_i \otimes a_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$ e de $(a_i \otimes a_j)(a_j \otimes a_i)$ para todo $1 \leq i < j \leq n$ e os geradores independentes de $A \wedge A$ são imagens de $a_i \otimes a_j$, para todo $1 \leq i < j \leq n$.*

2. *Seja G um grupo tal que G/G' seja finitamente gerado e que não contenha elementos de ordem 2. Então*

   a) $\nabla(G) \simeq \nabla(G/G')$ e $\Gamma(G/G') \simeq \nabla(G/G')$;

   b) $G \otimes G \simeq \nabla(G) \times (G \wedge G)$;

   c) $J_2(G) \simeq \nabla(G) \times M(G)$;

Um grupo G é chamado *policíclico* se exite uma série de subgrupos $G = G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_n \geq G_{n+1} = 1$ tal que cada G_{i+1} é normal em G_i e G_i/G_{i+1} é cíclico, para cada $1 \leq i \leq n$. Desde que cada G_i/G_{i+1} é cíclico, existem elementos $g_i \in G$, tais que $G_i/G_{i+1} = \langle g_i G_{i+1} \rangle$, para cada $1 \leq i \leq n$. A sequência de elementos $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ é chamada uma *sequência geradora policíclica* para G e o conjunto $X = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ é chamado de *conjunto gerador policíclico* para G. Para maiores detalhes sobre grupos policíclicos ver [29, Capítulo 9].

O quadrado tensorial não-abeliano de grupos policíclicos foram investigados por Blyth e Morse em [8], seguindo os estudos de Rocco em [26] sobre grupos solúveis finitos.

Mais especificamente, um dos principais resultados obtidos foi dar uma completa descrição dos geradores do quadrado tensorial $G \otimes G$ de um grupo policíclico G em termos de um conjunto gerador policíclico de G.

O grupo $\tau(G)$ é definido como sendo o grupo fator $\nu(G)/\Omega(\nabla(G))$, onde Ω é o isomorfismo da Proposição 1.26. Denotaremos o subgrupo $[G, G^{\varphi}]/\Omega(\nabla(G))$ de $\tau(G)$ por $[G, G^{\varphi}]_{\tau(G)}$. Este grupo é isomorfo a $G \wedge G$. Com estas definições, temos a seguinte

Proposição 1.34. [8, Proposition 20] *Seja G um grupo finito policíclico com uma sequência geradora policíclica $g_1, \cdots, g_k$. Então $[G, G^{\varphi}]$, um subgrupo de $\nu(G)$ isomorfo a $G \otimes G$, é gerado por*

$$[G, G^{\varphi}] = \langle [g_i, g_i^{\varphi}], [g_i, g_j^{\varphi}], [g_i, g_j^{\varphi}][g_j, g_i^{\varphi}] \rangle$$

e $[G, G^{\varphi}]_{\tau(G)}$, um subgrupo de $\tau(G)$ isomorfo a $G \wedge G$, é gerado por

$$[G, G^{\varphi}]_{\tau(G)} = \langle [g_i, g_j^{\varphi}] \rangle,$$

para $1 \leq i < j \leq k$.

1.8 Os p-grupos 2-gerados finitos de classe 2

A computação do quadrado tensorial não-abeliano de p-grupos 2-gerados de classe de nilpotência 2 iniciou-se com Bacon e Kappe em [3] para o caso p ímpar e foi completado por Kappe, Visscher e Sarmin em [18] para o caso $p = 2$. Entretanto, a classificação dos p-grupos 2-gerados de classe de nilpotência 2 utilizada nestes artigos estava incompleta. Isto só foi percebido mais tarde quando Ahmad, Magidin e Morse [1] estavam interessados em estudar as classes de conjugação destes grupos. A nova classificação fornecida por eles corrige e simplifica a classificação anterior, a qual apresentamos abaixo:

Teorema 1.35. [1, Theorem 1.1] *Sejam p um número primo e $n > 2$ um inteiro positivo. Todo p-grupo 2-gerado de classe de nilpotência exatamente 2 e ordem p^n tem um apresentação da forma*

$$G_p(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \sigma) = \langle a, b |\ [a, b]^{p^{\gamma}} = [a, b, a] = [a, b, b] = 1, a^{p^{\alpha}} = [a, b]^{p^{\rho}}, b^{p^{\beta}} = [a, b]^{p^{\sigma}} \rangle,$$

onde $(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \sigma)$ satisfaz

1. $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 1$;
2. $\alpha + \beta + \gamma = n$;
3. $0 \leq \rho, \sigma \leq \gamma$.

Os grupos no teorema acima podem ser divididos em três famílias, como segue: FAMÍLIA 1. Se $\alpha > \beta$, então G corresponde a:

(a) $(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \gamma)$, quando $\rho \leq \sigma$.

(b) $(\alpha, \beta, \gamma; \gamma, \sigma)$, quando $0 \leq \sigma < \sigma + \alpha - \beta \leq \rho$ ou $\sigma < \rho = \gamma$.

(c) $(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \sigma)$, quando $0 \leq \sigma < \rho < \min(\gamma, \sigma + \alpha - \beta)$.

FAMÍLIA 2. Se $\alpha = \beta > \gamma$ ou $\alpha = \beta = \gamma$ e $p > 2$, então G corresponde a $(\alpha, \beta, \gamma; \min(\rho, \sigma), \gamma)$.
FAMÍLIA 3. Se $\alpha = \beta = \gamma$ e $p = 2$, então G corresponde a

(a) $(\alpha, \beta, \gamma; \min(\rho, \sigma), \gamma)$, quando $0 \leq \min(\rho, \sigma) < \gamma - 1$.

(b) $(\alpha, \beta, \gamma; \gamma - 1, \gamma - 1)$, quando $\rho = \sigma = \gamma - 1$.

(c) $(\alpha, \beta, \gamma; \gamma, \gamma)$, quando $\min(\rho, \sigma) \geq \gamma - 1$ e $\max(\rho, \sigma) = \gamma$.

Os grupos listados na Família 1(a) até a Família 3(c) são dois a dois não isomorfos.

Com esta nova classificação, Magidin e Morse em [20] forneceram uma descrição completa dos grupos que aparecem no Diagrama 1 da página 23 para cada p-grupo 2-gerado de classe 2 em termos desta classificação.

Nosso objetivo no Capítulo 3 é proceder de modo análogo para fornecer uma descrição completa dos grupos que aparecem no Diagrama 1 da página 23 para cada p-grupo finito com subgrupo derivado de ordem p, com p ímpar, em termos da apresentação fornecida por Simon Blackburn em [6].

Tendo isto em vista, vamos descrever brevemente as técnicas utilizadas e apresentar alguns resultados obtidos por Magidin e Morse em [20].

Seja $G = G_p(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \sigma)$ qualquer p-grupo 2-gerado de classe de nilpotência 2 com apresentação como no Teorema 1.35. Temos que o quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$ é abeliano; de fato, como G é nilpotente de classe 2, então $G' \leq Z(G)$. Sejam $[g, h^{\varphi}]$ e $[x, y^{\varphi}]$ elementos de $[G, G^{\varphi}]$. Aplicando o item (i) do Lema 1.27 e depois o Lema 1.29, obtemos que $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]] = [[g, h], [x, y]^{\varphi}] = 1$, de onde $G \otimes G$ é abeliano, como desejado.

Agora, a ideia é fornecer um conjunto de geradores independentes para $[G, G^{\varphi}]$ e calcular suas ordens. Desde que a, b e $[a, b]$ formam um conjunto gerador policíclico para G, a Proposição 1.34 nos diz que $[G, G^{\varphi}]$ é gerado por

$$[a, a^{\varphi}],\ [b, b^{\varphi}],\ [a, b^{\varphi}][b, a^{\varphi}],\ [a, b^{\varphi}],$$
$$[a, [a, b]^{\varphi}],\ [b, [a, b]^{\varphi}],\ [[a, b], a^{\varphi}],\ [[a, b], b^{\varphi}].$$

Pelo item (iii) do Lema 1.27, vemos que os dois últimos geradores desta lista são supérfluos e, portanto, podemos descartá-los como geradores. Logo, os seis primeiro elementos formam um conjunto gerador para $[G, G^{\varphi}]$.

Com isso em mãos, Magidin e Morse em [20] passam a investigar a ordem destes geradores e a independência entre eles. Para determinar a ordem, eles utilizam os cálculos com comutadores a partir da construção e dos resultados sobre o grupo $\nu(G)$ para determinar um limitante inferior da ordem. Para o limitante superior é utilizada a técnica de construir uma biderivação $G \times G \to L$, de modo que a ordem da imagem do gerador em L seja conhecida. Se estes limitantes coincidem, então fica determinda a ordem do gerador. O próximo resultado fornece a ordem de alguns geradores.

Lema 1.36. [20, Lemmas 31 and 32] *Seja $G = G_p(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \sigma)$ um p-grupo 2-gerado de classe exatamente 2 com apresentação como no Teorema 1.35 e consideramos $p > 2$. Então*

1. *$[b, [a, b]^\varphi]$ tem ordem $p^{\min\{\rho,\sigma\}}$;*
2. *se $\rho \leq \sigma$, então $[a, [a, b]^\varphi]$ tem ordem p^ρ;*
3. *se $\rho > \sigma$, então $[a, [a, b]^\varphi]$ tem ordem $p^{\sigma+\tau}$, onde $\tau = \min\{\alpha - \beta, \rho - \sigma\}$.*

Por fim, no caso em que p é ímpar, o quadrado tensorial não-abeliano é computado conforme o

Teorema 1.37. [20, Theorem 36] *Seja $G = G_p(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \sigma)$ um p-grupo 2-gerado de classe exatamente 2 com apresentação como no Teorema 1.35 e consideramos $p > 2$. Então*

$$G \otimes G \simeq \begin{cases} C_{p^\alpha} \times C_{p^\beta} \times C_{p^\beta} \times C_{p^\beta} \times C_{p^\rho} \times C_{p^\rho}, & se\ \rho \leq \sigma \\ C_{p^\alpha} \times C_{p^\beta} \times C_{p^\beta} \times C_{p^{\beta+\tau}} \times C_{p^\sigma} \times C_{p^\sigma}, & se\ \rho > \sigma, \end{cases}$$

onde $\tau = \min(\alpha - \beta, \rho - \sigma)$.

No teorema acima, os fatores cíclicos invariantes podem ser tomados como sendo

1. $[a, a^\varphi]$, $[b, b^\varphi]$, $[a, b^\varphi][b, a^\varphi]$, $[a, b^\varphi]$, $[a, [a, b]^\varphi]$ e $[b, [a, b]^\varphi]$, respectivamente, quando $\rho \leq \sigma$;
2. $[a, a^\varphi]$, $[b, b^\varphi]$, $[a, b^\varphi][b, a^\varphi]$, $[a, b^\varphi], [a, b^\varphi]^{p^{\beta-\sigma}}[a, [a, b]^\varphi]$ e $[b, [a, b]^\varphi]$, respectivamente, quando $\rho > \sigma$.

Capítulo 2

Os Grupos de Blackburn

A classificação dos p-grupos finitos com subgrupo derivado de ordem p, p ímpar, foi fornecida por Simon Blackburn em [6] e este capítulo é destinado a apresentar este resultado.

Neste capítulo, iremos manter a notação utilizada em [6] e iremos aplicar as funções pela esquerda.

2.1 Formas alternadas

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados da teoria de formas bilineares. Mais detalhes podem ser encontrados em [28, Capítulo 8].

Aqui, iremos sempre considerar $\mathbb{F}$ um corpo e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$.

Uma *forma bilinear* sobre um $\mathbb{F}$-espaço vetorial V é uma função bilinear $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$. Dizemos que uma forma bilinear é uma *forma alternada* se $\phi(x, x) = 0$, para todo $x \in V$. Se ϕ é uma forma alternada, então dados $x, y \in V$, temos

$$0 = \phi(x + y, x + y) = \phi(x, x) + \phi(x, y) + \phi(y, x) + \phi(y, y) = \phi(x, y) + \phi(y, x),$$

de onde $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$ para todo $x, y \in V$, ou seja, a forma ϕ é antissimétrica. Se o corpo $\mathbb{F}$ tem característica diferente de 2, então vale a recíproca. De fato, suponhamos que ϕ é antissimétrica, logo $\phi(x, x) = -\phi(x, x)$ e, portanto, $2\phi(x, x) = 0$, de onde $\phi(x, x) = 0$, para todo $x \in V$.

O *radical* de ϕ é o subespaço de V definido por

$$R = \{v \in V;\ \phi(v, x) = 0, \text{ para todo } x \in V\}.$$

Caso $R = 0$, dizemos que ϕ é não-degenerada. Dado um subespaço U de V, definimos o *complemento ortogonal* de U com respeito a forma bilinear ϕ por

$$U^{\perp} = \{v \in V;\ \phi(v, u) = 0, \text{ para todo } u \in U\}.$$

Caso $U \subset U^{\perp}$, dizemos que U é *totalmente isotrópico.*

Um funcional linear de V é qualquer transformação linear $f : V \to \mathbb{F}$. O conjunto de todos os funcionais lineares de V forma um espaço vetorial, que chamamos de *espaço dual* de V e denotamos por V^*.

O próximo resultado irá fornecer uma caracterização de formas bilineares não-degeneradas em termos da base do espaço dual V^*. Primeiramente, lembramos que dado ϕ uma forma bilinear de V, para cada vetor $u \in V$ fixado, a aplicação $u^* : V \to \mathbb{F}$ definida por $u^*(v) = \phi(v, u)$, para todo $v \in V$, claramente é um funcional linear.

Teorema 2.1. *Seja ϕ uma forma bilinear de V e consideramos $e_1, \cdots, e_n$ uma base de V. Então ϕ é não-degenerada se, e somente se, os funcionais lineares $e_1^*, \cdots, e_n^*$ formam uma base do espaço dual V^*.*

Demonstração. Suponhamos que ϕ é uma forma não-degenerada. Desde que $\dim(V^*) = n$, basta provar que $e_1^*, \cdots, e_n^*$ formam um conjunto linearmente independente. Sejam, pois, $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$ tais que $a_1e_1^* + \cdots a_ne_n^* = 0$, ou seja,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(v, e_i), \text{ para todo } v \in V.$$

Neste caso, se considerarmos $u = a_1e_1 + \cdots a_ne_n$, então $\phi(v, u) = 0$ para todo $v \in V$ e, portanto, u está no radical de ϕ. Como ϕ é não-degenerada, segue que $u = 0$. Desde que $e_1, \cdots, e_n$ formam um conjunto linearmente independente, obtemos que $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e, consequentemente, $e_1^*, \cdots, e_n^*$ formam um conjunto linearmente independente, como queríamos.

Reciprocamente, suponhamos que os funcionais $e_1^*, \cdots, e_n^*$ formam uma base de V^*. Seja u um elemento do radical de V, ou seja, $\phi(v, u) = 0$ para todo $v \in V$. Escrevendo $u = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, temos que

$$0 = \phi(v, u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(v, e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(v),$$

para todo $v \in V$, de onde $a_1e_1^* + \cdots a_ne_n^* = 0$. Como $e_1^*, \cdots, e_n^*$ são linearmente independentes, segue que $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e, portanto, $u = 0$. Logo, o radical de ϕ é nulo e, então, ϕ é não-degenerada. $\square$

Corolário 2.2. *Se ϕ é uma forma bilinear não-degenerada sobre V, então dado um funcional linear $f \in V^*$, existe um único $u \in V$ tal que $f = u^*$.*

O próximo resultado nos fornece condições para que o espaço vetorial V seja soma direta de um subespaço U e seu complemento ortogonal $U^\perp$.

Proposição 2.3. *Sejam ϕ uma forma bilinear sobre V e U um subespaço de V. Se ϕ restrita a $U \times U$ é não-degenerada, então $V = U \oplus U^\perp$.*

Demonstração. Seja $u \in U \cap U^\perp$, então $\phi(x, u) = 0$ para todo $x \in U$. Assim, u pertence ao radical de ϕ quando restrito a $U \times U$. Desde que ϕ restrito a $U \times U$ é não-degenerado, obtemos $u = 0$ e, consequentemente, $U \cap U^\perp = 0$. Agora, dado $v \in V$, então v^* restrito a U é um funcional de U e, pelo Corolário 2.2, existe um único $u_0 \in U$ tal que $\phi(x, v) = \phi(x, u_0)$ para todo $x \in U$. Portanto, $v = u_0 + (v - u_0)$, onde $u_0 \in U$ e $v - u_0 \in U^\perp$. □

Definição 2.4. Seja ϕ uma forma bilinear sobre V. Então a soma direta $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ é uma *soma direta ortogonal* se para todo $i \neq j$ temos $\phi(u_i, u_j) = 0$, quaisquer que sejam $u_i \in U_i$ e $u_j \in U_j$.

Um *plano hiperbólico* sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial de dimensão dois sobre $\mathbb{F}$ junto com uma forma alternada não nula.

Teorema 2.5. *Se ϕ é uma forma alternada não-degenerada sobre V, então existe uma soma direta ortogonal $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$, onde cada H_i é um plano hiperbólico.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre $\dim(V) \geq 1$. Se $\dim(V) = 1$, então uma forma alternada sobre V deve ser nula e, então, degenerada. Assim, nosso passo inicial deve ser feito para $\dim(V) = 2$. Neste caso, V é um plano hiperbólico e a conclusão é clara. Para o passo de indução, vamos provar que $V = H_1 \oplus H_1^\perp$, com H_1 um plano hiperbólico e que ϕ restrita a $H_1^\perp \times H_1^\perp$ é uma forma alternada não-degenerada.

De fato, como ϕ é não-degenerada, então ϕ é não-nula e, então, existem $e_1, e_2 \in V$ tais que $\phi(e_1, e_2) \neq 0$. Podemos supor que $\phi(e_1, e_2) = 1$, pois caso $\phi(e_1, e_2) = c$, trocamos e_2 por $c^{-1}e_2$. O subespaço $H_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ é um plano hiperbólico e ϕ restrita a $H_1 \times H_1$ é não-degenerada. De fato, se $u = a_1e_1 + a_2e_2 \in H_1$ pertence ao radical de ϕ restrita a $H_1 \times H_1$, então $0 = \phi(u, e_1) = a_2$ e $0 = \phi(u, e_2) = a_1$ e, portanto, $u = 0$. Pela Proposição 2.3, temos que $V = H_1 \oplus H_1^\perp$. Afirmamos que ϕ restrita a $H_1^\perp \times H_1^\perp$ é não-degenerada. Com efeito, o radical de ϕ restrita a $H_1^\perp \times H_1^\perp$ é dado por $\{u \in H_1^\perp;\ \phi(u, x) = 0,\ \text{para todo } x \in H_1^\perp\}$. Mas $H_1^\perp = \{u \in V;\ \phi(u, x) = 0,\ \text{para todo } x \in H_1\}$. Como $V = H_1 \oplus H_1^\perp$, se u está no radical de ϕ restrita a $H_1^\perp \times H_1^\perp$, então u está no radical de ϕ. Desde que ϕ é não-degenerada, segue que $u = 0$ e, portanto, ϕ restrita a $H_1^\perp \times H_1^\perp$ é não-degenerada.

Com isso, podemos aplicar indução e concluir que existe uma soma direta ortogonal $H_1^\perp = H_2 \oplus \cdots \oplus H_m$, onde cada H_i é um plano hiperbólico. Isto conclui a demonstração. □

Corolário 2.6. *Se ϕ é uma forma alternada não-degenerada sobre V, então* $\dim(V)$ *é par.*

Definição 2.7. Seja V um espaço vetorial junto com uma forma alternada não-degenerada. Uma base $e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots, e_r, f_r$ de V é chamada de *base simplética* de V se os subespaços $\langle e_1, \cdots, e_r \rangle$ e $\langle f_1, \cdots, f_r \rangle$ são totalmente isotrópicos e para todo $i, j \in \{1, 2, \cdots, r\}$ temos $\phi(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é a função de Kronecker.

Definição 2.8. Seja V um espaço vetorial junto com uma forma bilinear ϕ não-degenerada. Dizemos que uma transformação linear $T : V \to V$ é uma *isometria* se para todo $u, v \in V$ temos $\phi(Tu, Tv) = \phi(u, v)$.

O conjunto de todas as isometrias de V forma um subgrupo de $GL(V)$. No caso particular em que ϕ é uma forma alternada não-degenerada, este subgrupo é chamado de *grupo simplético* e é denotado por $Sp(V, \phi)$.

No que segue apresentaremos alguns resultados sobre os subgrupos totalmente isotrópicos.

Lema 2.9. [6, Lemma 1] *Sejam V um espaço vetorial de dimensão $2r$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ e ϕ uma forma não-degenerada sobre V. Então, todo subespaço totalmente isotrópico maximal de V tem dimensão r.*

Demonstração. Seja U um subespaço totalmente isotrópico maximal de V. Consideramos $\lambda : V \to U^*$ a transformação linear tal que para cada $v \in V$ associa o funcional linear $\lambda(v)$ de U definido por $\lambda(v)(x) = \phi(x, v)$, para todo $x \in U$. Afirmamos que λ é sobrejetor. De fato, seja $f \in U^*$. Como V tem dimensão finita, existe W tal que $V = U \oplus W$. Assim, definimos $g \in V^*$ por $g(u + w) = f(u)$, para todo $u \in U$ e $w \in W$. Desde de que ϕ é não-degenerada, pelo Corolário 2.2, existe $v_0 \in V$ tal que $g(x) = \phi(x, v_0)$ para todo $x \in V$. Em particular, $f(x) = g(x) = \phi(x, v_0)$ para todo $x \in U$, ou seja, $f = \lambda(v_0)$ e, portanto, λ é sobrejetor.

Desde que U é totalmente isotrópico, $U \subseteq \ker(\lambda)$. Se existe $v \in \ker(\lambda) \backslash U$, então $\langle U, v \rangle$ deve ser totalmente isotrópico e contém estritamente U, o que contradiz a maximalidade de U. Portanto $U = \ker(\lambda)$ e

$$\dim U = \dim U^* = \dim(\text{Im } \lambda) = \dim V - \dim(\ker \lambda) = 2r - \dim U,$$

de onde $\dim U = r$, como desejado. □

Lema 2.10. [6, Lemma 2] *Sejam V um espaço vetorial de dimensão $2r$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ e ϕ uma forma não-degenerada sobre V. Se U é um subespaço totalmente isotrópico maximal, então existe um subespaço totalmente isotrópico maximal W tal que $V = U \oplus W$.*

Demonstração. Seja U um subespaço totalmente isotrópico maximal de V. Sabemos que $\dim U = r$. Agora, seja W um subespaço de V que é maximal com respeito a ser totalmente isotrópico e tem interseção trivial com U. A demonstração do lema se reduz a mostrar que $\dim W = r$.

Seja $\lambda : V \to U^*$ como no Lema 2.9. Vimos que λ é sobrejetora e $\ker \lambda = U$. Desde que $W \cap U = 0$, segue que λ é um isomorfismo quando restrito a W e, portanto, $\dim(\text{Im } \lambda) = \dim W$. Agora, vemos que $u \in U \cap W^{\perp}$ se, e somente se, $\phi(u, w) = 0$ para todo $w \in W$, ou seja, $w^*(u) = 0$ para todo $w^* \in \lambda(W)$. Logo, $U \cap W^{\perp} = \lambda(W)^{\circ}$, onde $\lambda(W)^{\circ}$ denota o anulador de $\lambda(W)$. Desde que $\dim U^* = \dim(\lambda(W)) + \dim(\lambda(W)^{\circ})$, então $\dim U = \dim W + \dim(U \cap W^{\perp})$ e, assim, $U \cap W^{\perp}$ tem codimensão $\dim W$ em U. Por outro lado, $W^{\perp}$ tem codimensão no máximo $\dim W$ em V e, consequentemente, $U + W^{\perp} = V$.

Suponhamos, por absurdo, que $\dim W < r$. Portanto, existe um elemento $v \in V \backslash (U \oplus W)$. Desde que $V = U + W^{\perp}$, podemos escrever $v = u + w'$, para algum $u \in U$ e $w' \in W^{\perp}$. Vemos que $w' \notin W$. Definimos $\overline{W} = \langle W, w' \rangle$. Como $w' \in W^{\perp}$, segue que $\overline{W}$ é totalmente isotrópico. Suponhamos $u_i \in U \cap \overline{W}$. Então $u_1 = \gamma w' + w$ para algum $\gamma \in \mathbb{F}$ e algum $w \in W$. Se $\gamma \neq 0$, temos que $w' = \frac{1}{\gamma}(u_1 - w) \in U \oplus W$, o que contradiz a escolha de v. Portanto $u_1 = w$ e, assim, $u \in U \cap W = 0$. Logo $u = 0$ e, consequentemente, $U \cap \overline{W} = 0$. Pela maximalidade de W, vem que $\overline{W} = W$. Mas $\overline{W}$ contém estritamente W, o que é absurdo. Portanto, $\dim W = r$, como queríamos. □

Lema 2.11. [6, Lemma 3] *Sejam V um espaço vetorial de dimensão $2r$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ e ϕ uma forma não-degenerada sobre V. Suponhamos que $V = U \oplus W$, onde U e W são subespaços totalmente isotrópicos de V. Se $e_1, \cdots, e_r$ é uma base de U, então existe uma base $f_1, \cdots, f_r$ de W tal que $e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots, e_r, f_r$ é uma base simplética de V.*

Demonstração. Seja $\psi_1, \cdots, \psi_r \in U^*$ a base dual de $e_1, \cdots, e_r$. Assim, para todo $i, j \in \{1, 2, \cdots, r\}$ temos $\psi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Agora, consideramos $\lambda : V \to U^*$ como no Lema 2.9. Vimos que λ restrita a W é um isomorfismo. Definimos os elementos $f_1, \cdots, f_r$ como sendo os únicos elementos de W tais que $\lambda(f_i) = \psi_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, r\}$. Então $e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots, e_r, f_r$ é uma base simplética de V. □

Corolário 2.12. [6, Corollary 4] *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e ϕ uma forma alternada sobre V. Seja R o radical de ϕ. Seja E um subespaço totalmente isotrópico de V tal que $E \cap R = 0$ e suponhamos que $E = \bigoplus_{i=1}^{k-1} E_i$ para alguns subespaços E_i de V. Então, existem subespaços $F_1, F_2, \cdots, F_k$ e E_k de V tais que todas as seguintes propriedades ocorram:*

(i) $V = R \oplus E \oplus E_k \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus E_k$;

(ii) *Os subespaços $E \oplus E_k$ e $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus E_k$ são totalmente isotrópicos;*

(iii) Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, a forma ϕ é não-degenerada quando restrita a $E_i \oplus F_i$;

(iv) Para todo $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, temos que $E_i \subset F_j^{\perp}$ quando $i \neq j$.

Demonstração. Passando para o complemento de R, se necessário, podemos assumir que $R = 0$ e, portanto, ϕ é não-degenerada.

Seja r tal que $\dim V = 2r$. Consideramos U um subespaço totalmente isotrópico maximal contendo E. Pelo Lema 2.9, temos $\dim U = r$. Seja W um subespaço totalmente isotrópico de V que é um complemento para U, que existe pelo Lema 2.10.

Definimos os inteiros $d_0, d_1, \cdots, d_{k-1}, d_k$ por $d_i = \dim(E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_i)$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$ e $d_k = r$. Escolha uma base $e_1, \cdots, e_r$ de U tal que para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$, o conjunto $e_{d_{i-1}+1}, \cdots, e_{d_i}$ é uma base de E_i.

Pelo lema anterior, existem vetores $f_1, \cdots, f_r \in W$ com a propriedade que $e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots, e_r, f_r$ é uma base simplética de V. Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ defina $F_i = \langle f_{d_{i-1}+1}, \cdots, f_{d_i} \rangle$. Definimos $E_k = \langle e_{d_{k-1}+1}, \cdots, e_{d_k} \rangle$. Usando que $e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots, e_r, f_r$ é uma base simplética de V, podemos verificar que F_i e E_k assim definidos satisfazem as condições do corolário. □

2.2 Classificação de flags

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Definimos o conjunto $\mathscr{F}_t$ de t-flags de V, cujos elementos são flags de V da forma

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_t \subseteq V_{t+1} = V,$$

onde cada V_i é um subespaço vetorial de V, para $i \in \{0, 1, 2, \cdots, t+1\}$.

Seja ϕ uma forma alternada não-degenerada sobre V e consideramos $Sp(V, \phi)$ o grupo simplético sobre V. Então, $Sp(V, \phi)$ age naturalmente sobre V e induz uma ação sobre o conjunto $\mathscr{F}_t$. O objetivo desta seção é fornecer um conjunto de invariantes para uma t-flag de modo que duas t-flags estão associadas ao mesmo conjunto invariante se, e somente se, elas estão numa mesma órbita sobre a ação de $Sp(V, \phi)$.

Seja $V_0, \cdots, V_t, V_{t+1}$ uma t-flag. Denotamos

$$J_t = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2;\ 1 \leq i \leq j \leq t+1\}.$$

Definimos o *tipo* da flag $V_0, \cdots, V_t, V_{t+1}$ como sendo o conjunto $A = \{\alpha_{i,j};\ (i, j) \in J_t\}$ de números reais indexados pelos elementos de J_t, onde os elementos $\alpha_{i,j}$ são definidos como segue. Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, t+1\}$, denotamos R_i como sendo o radical da forma ϕ quando restrita ao subespaço V_i, ou seja,

$$R_i = \{v \in V_i;\ \phi(v, x) = 0 \text{ para todo } x \in V_i\}.$$

Para cada $(i,j) \in J_t$, definimos

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \dim((R_i \cap R_{j-1}) + V_{i-1}) - \dim((R_i \cap R_j) + V_{i-1}), & \text{se } i < j \\ \dfrac{1}{2}\left(\dim V_i - \dim V_{i-1} - \displaystyle\sum_{1 \le k \le i-1} \alpha_{k,i} - \sum_{i+1 \le k \le t+1} \alpha_{i,k}\right), & \text{se } i = j. \end{cases}$$

O próximo resultado irá provar que os elementos $\alpha_{i,j}$ do conjunto A acima são todos inteiros não negativos e que a soma de todos eles é igual a $(\dim V)/2$.

Proposição 2.13. [6, Proposition 5] *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e suponhamos que ϕ é uma forma alternada não-degenerada sobre V. Sejam $V_0, \cdots, V_t, V_{t+1}$ uma t-flag e $A = \{\alpha_{i,j};\ (i,j) \in J_t\}$ um conjunto fixado. Então, $V_0, V_1, \cdots, V_t, V_{t+1}$ é do tipo A se, e somente se, existem subespaços $E_{i,j}$ e $F_{i,j}$ de V, para todo $(i,j) \in J_t$, tendo as seguintes propriedades:*

(i) Para todo $(i,j) \in J_t$, $\dim E_{i,j} = \dim F_{i,j} = \alpha_{i,j}$;

(ii) Para todo $l \in \{1, 2, \cdots, t+1\}$, $V_l = \left(\bigoplus_{\{(i,j) \in J_t;\ i \le l\}} E_{i,j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\{(i,j) \in J_t;\ j \le l\}} F_{i,j}\right)$;

(iii) Para todo $(i,j) \in J_t$, a forma ϕ é não-degenerada quando restrita a $E_{i,j} \oplus F_{i,j}$;

(iv) Para quaisquer $(i,j), (i',j') \in J_t$ tais que $(i,j) \neq (i',j')$, vale que $E_{i,j} \subset F_{i',j'}^{\perp}$;

(v) Os subespaços $\bigoplus_{(i,j) \in J_t} E_{i,j}$ e $\bigoplus_{(i,j) \in J_t} F_{i,j}$ são totalmente isotrópicos;

(vi) Seja R_i o radical da forma ϕ quando restrito a V_i. Para quaisquer $l, l' \in \{1, 2, \cdots, t+1\}$ tais que $l \le l'$, temos que

$$R_l \cap R_{l'} = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{j=l'+1}^{t+1} E_{i,j}.$$

Demonstração. Suponhamos que existam subespaços $E_{i,j}$ e $F_{i,j}$ de V satisfazendo as condições (i) até (vi). Seja $(r,s) \in J_t$. Se $r < s$, então pelo item (i) temos $\alpha_{r,s} = \dim E_{r,s}$. Desde que os subespaços $E_{i,j}$ e $F_{i,j}$ formam somas diretas, podemos escrever $\dim E_{r,s}$ como

$$\begin{aligned} \dim E_{r,s} \quad = \quad & \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{t+1} E_{i,j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s}^{t+1} E_{r,j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{r-1} F_{i,j}\right)\right) - \\ & \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{t+1} E_{i,j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=s+1}^{t+1} E_{r,j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{r-1} F_{i,j}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim E_{r,s} &= \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=s}^{t+1}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{s-1}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{r-1}F_{i,j}\right)\right)-\\
&\quad \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=s+1}^{t+1}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{s}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{r-1}F_{i,j}\right)\right)\\
&= \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=s}^{t+1}E_{i,j}\right)+\left[\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{t+1}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{r-1}F_{i,j}\right)\right]\right)-\\
&\quad \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=s+1}^{t+1}E_{i,j}\right)+\left[\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{t+1}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{r-1}F_{i,j}\right)\right]\right)\\
&= \dim((R_r\cap R_{s-1})+V_{r-1})-\dim((R_r\cap R_s)+V_{r-1}),
\end{aligned}$$

em que a última igualdade ocorre devido aos itens (ii) e (vi). Se $r=s$, então

$$\begin{aligned}
2\alpha_{r,r} &= \dim(E_{r,r}\oplus F_{r,r})\\
&= \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=i}^{t+1}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=i}^{r}F_{i,j}\right)\right)-\dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{t+1}E_{i,j}\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1}\bigoplus_{j=i}^{r-1}F_{i,j}\right)\right)\\
&\quad -\sum_{j=r+1}^{t+1}\dim E_{r,j}-\sum_{i=1}^{r-1}\dim F_{i,r}\\
&= \dim V_r-\dim V_{r-1}-\sum_{j=r+1}^{t+1}\alpha_{r,j}-\sum_{i=1}^{r-1}\alpha_{i,r}.
\end{aligned}$$

Logo $V_0, V_1, \cdots, V_t, V_{t+1}$ é uma t-flag do tipo A.

Reciprocamente, suponhamos que $V_0, V_1, \cdots, V_t, V_{t+1}$ seja uma t-flag do tipo A. Escolheremos os subespaços $E_{i,j}$ por indução sobre i e os subespaços $F_{i,j}$ por indução sobre j. Nossa hipótese de indução será tomada do seguinte modo. Seja $k \in \{0,1,2,\cdots,t+1\}$. Definimos $\mathscr{H}_k$ como sendo o passo em que as seguintes condições ocorram:

(a) Para todos inteiros i e j, tais que $1 \leq i \leq j \leq k$, vale que $\dim E_{i,j} = \dim F_{i,j}$. Para todo $(i,j) \in J_t$, tal que $i \leq k$, vale que $\dim E_{i,j} = \alpha_{i,j}$;

(b) Para todo $l \in \{1,2,\cdots,k\}$, vale que $V_l = \left(\bigoplus_{\{(i,j)\in J_t;\ i\leq l\}} E_{i,j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\{(i,j)\in J_t;\ j\leq l\}} F_{i,j}\right)$;

(c) Para todos os inteiros i e j, tais que $1 \leq i \leq j \leq k$, a forma ϕ é não-degenerada quando restrita a $E_{i,j} \oplus F_{i,j}$;

(d) Para quaisquer $(i,j),(i',j') \in J_t$, tais que $(i,j) \neq (i',j')$ e tais que $i, j' \leq k$, vale que $E_{i,j} \subset F_{i',j'}^{\perp}$;

(e) Os subespaços $\bigoplus_{(i,j)\in J_t, i\leq k} E_{i,j}$ e $\bigoplus_{(i,j)\in J_t, j\leq k} F_{i,j}$ são totalmente isotrópicos;

(f) Seja R_i o radical da forma ϕ quando restrito a V_i. Para quaisquer $l, l' \in \{1, 2, \cdots, t+1\}$, tais que $l \leq l'$ e $l \leq k$, temos que

$$R_l \cap R_{l'} = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{j=l'+1}^{t+1} E_{i,j}.$$

Seja $k \in \{1, 2, \cdots, t+1\}$. Suponhamos que tenhamos escolhido subespaços $E_{i,j}$ com $i \leq k-1$ e $F_{i,j}$ com $j \leq k-1$ tais que $\mathscr{H}_{k-1}$ ocorra. Queremos mostrar que podemos escolher subespaços $E_{k,k}, E_{k,k+1}, \cdots, E_{k,t+1}$ e $F_{1,k}, F_{2,k}, \cdots, F_{k,k}$ tais que $\mathscr{H}_k$ ocorra.

Para cada $j \in \{k+1, k+2, \cdots, t+1\}$, definimos $E_{k,j}$ como sendo o complemento de $((R_k \cap R_j) + V_{k-1}) \cap (R_k \cap R_{j-1})$ em $R_k \cap R_{j-1}$.

A aplicação natural de $R_k \cap R_{j-1}$ sobre o espaço $\dfrac{(R_k \cap R_{j-1}) + V_{k-1}}{(R_k \cap R_j) + V_{k-1}}$ é bijetiva quando restrita a $E_{k,j}$ e, portanto,

$$\dim E_{k,j} = \dim((R_k \cap R_{j-1}) + V_{k-1}) - \dim((R_k \cap R_j) + V_{k-1}) = \alpha_{k,j}, \tag{2.1}$$

para todo $j \in \{k+1, k+2, \cdots, t+1\}$.

Agora, o subespaço

$$E_{k,k+1} + E_{k,k+2} + \cdots + E_{k,t+1} + \left(\bigoplus_{(i,j) \in J_t, i \leq k-1} E_{i,j} \right)$$

é totalmente isotrópico. De fato, denotamos por W este subespaço de V_k e consideramos $w \in W$. Como $E_{k,j} \subseteq R_k$, segue $\phi(w, x) = 0$ para todo $x \in E_{k,j}$, com $k+1 \leq j \leq t+1$. Além disso, seja $x \in \bigoplus_{(i,j) \in J_t, i \leq k-1} E_{i,j}$. Se $w \in \bigoplus_{(i,j) \in J_t, i \leq k-1} E_{i,j}$, pelo item (e) este subespaço é totalmente isotrópico e, então, $\phi(w, x) = 0$. Por outro lado, se w possui alguma parcela que pertence a $E_{k,j}$, com $k+1 \leq j \leq t+1$, digamos $w = w_j + w'$, onde $w_j \in E_{k,j}$, então $\phi(w, x) = \phi(w_j, x) + \phi(w', x) = \phi(w', x)$, pois $\phi(w_j, x) = 0$ uma vez que $w_j \in R_k$ e $x \in V_k$. Deste modo $\phi(w, x) = 0$. Logo $w \in W^{\perp}$.

Além disso,

$$E_{k,j} \subset F_{r,s}^{\perp} \text{ para } k+1 \leq j \leq t+1,\ 1 \leq r \leq s \leq k-1, \tag{2.2}$$

pois $F_{r,s} \subseteq V_k$.

Afirmamos que a seguinte soma é direta:

$$\left(\sum_{(i,j) \in J_t \setminus \{(k,k)\}, i \leq k} E_{i,j} \right) + \left(\sum_{(i,j) \in J_t, j \leq k-1} F_{i,j} \right). \tag{2.3}$$

Pelo item (b) da hipótese de indução $\mathscr{H}_{k-1}$, é suficiente provar que a soma

$$\left(\sum_{j=k+1}^{t+1} E_{k,j} \right) + V_{k-1}$$

é direta. Para cada $j \in \{k+1, k+2, \cdots, t+1\}$, seja $u_{k,j} \in E_{k,j}$ e suponhamos que estes elementos não sejam todos nulos. Suponhamos que exista $u \in V_{k-1}$ tal que

$$\left(\sum_{j=k+1}^{t+1} u_{k,j}\right) + u = 0.$$

Seja l o menor índice j tal que $u_{k,l} \neq 0$. Pela escolha de $E_{k,l}$, temos que $u_{k,l} \notin (R_k \cap R_l) + V_{k-1}$. Agora, para todo j tal que $l+1 \leq j \leq t+1$, temos que $u_{k,j} \in E_{k,l} \subseteq R_k \cap R_{j-1} \subseteq R_k \cap R_l$. Desde que $u \in V_{k-1}$, então

$$u_{k,l} = -u - \sum_{j=l+1}^{t+1} u_{k,j} \in (R_k \cap R_l) + V_{k-1},$$

o que é absurdo. Portanto, a soma é direta.

Com isso, podemos provar que o item (f) da afirmação $\mathscr{H}_k$ é verdadeira. Pela hipótese de indução $\mathscr{H}_{k-1}$, é suficiente provar que para todo $l' \in \{k, k+1, \cdots, t+1\}$ ocorre

$$R_k \cap R_{l'} = \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=l'+1}^{t+1} E_{i,j}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
(R_k \cap R_{l'}) \cap V_{k-1} &= R_k \cap (V_{k-1} \cap R_{l'}) \\
&= R_k \cap (R_{k-1} \cap R_{l'}) \\
&= (R_{k-1} \cap R_k) \cap (R_{k-1} \cap R_{l'}) \\
&= R_{k-1} \cap R_{l'} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{k-1} \bigoplus_{j=l'+1}^{t+1} E_{i,j}.
\end{aligned}$$

Como $E_{k,j} \subseteq R_k \cap R_{j-1} \subseteq R_k \cap R_{l'}$ para todo j tal que $l'+1 \leq j \leq t+1$, para estabelecer o item (f) de $\mathscr{H}_k$ é suficiente provar que $\bigoplus_{j=l'+1}^{t+1} E_{k,j}$ gera $R_k \cap R_{l'}$ módulo V_{k-1}. Isto é trivial se $l' = t+1$, pois $R_{t+1} = 0$. Por outro lado, se $\bigoplus_{j=l'+2}^{t+1} E_{k,j}$ gera $R_k \cap R_{l'+1}$ módulo V_{k-1}, então $\bigoplus_{j=l'+1}^{t+1} E_{k,j}$ gera $R_k \cap R_{l'}$ módulo V_{k-1}, pela nossa escolha de $E_{k,l'+1}$. Logo, por indução sobre $t+1-l'$ a afirmação (f) de $\mathscr{H}_k$ segue.

O próximo passo será escolher os subespaços $F_{i,k}$, onde $1 \leq i \leq k$, e o subespaço $E_{k,k}$. Primeiramente, definimos o subespaço M de V_k por

$$M = \bigoplus_{(i,j) \in J_t, j<k} (E_{i,j} \oplus F_{i,j}).$$

Seja N o subespaço de V_k definido por

$$N = M^{\perp} \cap V_k.$$

Pela hipótese $\mathscr{H}_{k-1}$, temos que a forma ϕ é não-degenerada quando restrita a M. Portanto, a Proposição 2.3 implica em $V_k = M \oplus N$. Notamos também que

$$\bigoplus_{i=1}^{k-1} \bigoplus_{j=k+1}^{t+1} E_{i,j} = R_k \subseteq N$$

e o radical da forma ϕ quando restrita a N é R_k. Além disso,

$$\bigoplus_{i=1}^{k-1} E_{i,k} \subseteq N$$

e é disjunto de R_k, visto que a soma (2.3) é direta e pelo item (f) de $\mathscr{H}_k$ que já provamos. Mais ainda, o item (e) de $\mathscr{H}_{k-1}$ implica que esta soma direta é um subespaço totalmente isotrópico. Pelo Corolário 2.12, podemos escolher subespaços $E_{k,k}$ e $F_{i,k}$ de N, com $1 \leq i \leq k$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(A) $N = R_k \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{i,k}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} F_{i,k}\right)$;

(B) os subespaços $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{i,k}$ e $\bigoplus_{i=1}^{k} F_{i,k}$ são totalmente isotrópicos;

(C) para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ a forma ϕ é não-degenerada quando restrita a $E_{i,k} \oplus F_{i,k}$;

(D) para todo $i, i' \in \{1, 2, \cdots, k\}$, tais que $i \neq i'$, temos que $E_{i,k} \subseteq F_{i',k}^{\perp}$.

Vejamos que $\mathscr{H}_k$ se verifica. Temos

$$\begin{aligned} V_k &= M \oplus N \\ &= \left(\bigoplus_{(i,j)\in J_t, j<k} (E_{i,j} \oplus F_{i,j})\right) \oplus R_k \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{i,k}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} F_{i,k}\right) \\ &= \left(\bigoplus_{(i,j)\in J_t, i\leq k} E_{i,j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{(i,j)\in J_t, j\leq k} F_{i,j}\right), \end{aligned}$$

de onde o item (b) de $\mathscr{H}_K$ ocorre.

Para provar o item (a) de $\mathscr{H}_k$, é suficiente provar que $\dim E_{i,k} = \dim F_{i,k}$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ e $\dim E_{k,j} = \alpha_{k,j}$, para todo $j \in \{k, k+1, \cdots, t+1\}$. Pelo item (B) vemos que cada um dos subespaços $E_{i,k}$ e $F_{i,k}$ são totalmente isotrópicos. Agora, o item (C) nos diz que ϕ é não-degenerada quando restrita a $E_{i,k} \oplus F_{i,k}$. Com isso, $E_{i,k}$ é um subespaço totalmente isotrópico maximal de $E_{i,k} \oplus F_{i,k}$. Com efeito, caso contrário existiria $f \in F_{i,k}$ não nulo tal que $W = \langle E_{i,k}, f \rangle$ seria totalmente isotrópico contendo $E_{i,k}$ e isto implicaria que f estaria no radical de ϕ, o que contradiz ϕ ser não-degenerada. Do mesmo modo $F_{i,k}$ também é subespaço totalmente isotrópico maximal. Portanto, o Lema 2.9 implica que $\dim E_{i,k} = \dim F_{i,k}$. Já vimos em (2.1) que $\dim E_{k,j} = \alpha_{k,j}$ para todo $j \in \{k+1, k+2, \cdots, t+1\}$. Para o caso $\dim E_{k,k}$, utilizamos o item (b) de $\mathscr{H}_k$ para descrever V_k e as informações deste parágrafo sobre $\dim E_{i,j}$ e obtemos que

$$\begin{aligned}
2\alpha_{k,k} &= \dim V_k - \dim V_{k-1} - \sum_{1 \leq s \leq k-1} \alpha_{s,k} - \sum_{k+1 \leq s \leq t+1} \alpha_{k,s} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{t+1} \dim E_{i,j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{k} \dim F_{i,j} \right) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^{t+1} \dim E_{i,j} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} \dim F_{i,j} \right) \\
&\quad - \sum_{1 \leq s \leq k-1} \alpha_{s,k} - \sum_{k+1 \leq s \leq t+1} \alpha_{k,s} \\
&= \sum_{j=k}^{t+1} \dim E_{k,j} + \sum_{i=1}^{k} \dim F_{i,k} - \sum_{1 \leq s \leq k-1} \alpha_{s,k} - \sum_{k+1 \leq s \leq t+1} \alpha_{k,s} \\
&= 2 \dim E_{k,k},
\end{aligned}$$

de onde $\dim E_{k,k} = \alpha_{k,k}$, como queríamos. Portanto, o item (a) de $\mathscr{H}_k$ ocorre.

O item (c) de $\mathscr{H}_k$ é imediato do item (c) de $\mathscr{H}_{k-1}$ e do item (C) acima.

Para estabelecer o item (d) de $\mathscr{H}_k$, é suficiente provar que $E_{i,j} \subseteq F_{i',j'}^{\perp}$, para todo $(i,j), (i',j') \in J_t$ tais que $(i,j) \neq (i',j')$, $i, j' \leq k$ e que pelo menos um dos índices i ou j' seja igual a k. Se $j' = k$, então o resultado segue do item (D) e do fato que $N \subseteq M^{\perp}$. Portanto, podemos supor que $j' \leq k-1$. O resultado segue quando $i = k$ e $j = k$, novamente por (D) e pelo fato que $N \subseteq M^{\perp}$. Quando $i = k$ e $j \geq k+1$, o resultado segue de (2.2). Portanto, o item (d) de $\mathscr{H}_k$ ocorre.

Finalmente, o item (e) de $\mathscr{H}_k$ segue de $\mathscr{H}_{k-1}$, de (B) e do fato que $N \subseteq M^{\perp}$.

Logo $\mathscr{H}_k$ segue de $\mathscr{H}_{k-1}$ e o resultado segue por indução sobre k. □

Corolário 2.14. [6, Corollary 6] *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e ϕ uma forma alternada não-degenerada sobre V. Seja $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ uma t-flag em V e seja $A = \{\alpha_{i,j};\ (i,j) \in J_t\}$ um conjunto de inteiros tal que a soma de seus elementos seja* $(\dim V)/2$. *Seja $I_A = \{(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3;\ (i,j) \in J_t \text{ e } 1 \leq k \leq \alpha_{i,j}\}$. Então, a flag $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ é do tipo A se, e somente se, existem conjuntos $\{e_a;\ a \in I_A\}$ e $\{f_a;\ a \in I_A\}$ contidos em V tais que*

(i) para todo $l \in \{1, 2, \cdots, t+1\}$ o conjunto $\{e_{(i,j,k)};\ (i,j,k) \in I_A, i \leq l\} \cup \{f_{(i,j,k)};\ (i,j,k) \in I_A, j \leq l\}$ é uma base para V_l;

(ii) para todos $a, a' \in I_A$ temos que

$$\phi(e_a, f_{a'}) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = a' \\ 0, & \text{se } a \neq a' \end{cases}$$

(iii) para todos $a, a' \in I_A$ temos que $\phi(e_a, e_{a'}) = \phi(f_a, f_{a'}) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que existam conjuntos $\{e_a;\ a \in I_A\}$ e $\{f_a;\ a \in I_A\}$ tendo as propriedades (i) até (iii) acima. Para todo $(i,j) \in J_t$, definimos os subespaços $E_{i,j}$ e $F_{i,j}$ por

$$E_{i,j} = \langle e_{(i,j,k)};\ 1 \leq k \leq \alpha_{i,j} \rangle \text{ e } F_{i,j} = \langle f_{(i,j,k)};\ 1 \leq k \leq \alpha_{i,j} \rangle.$$

É fácil verificar que que os conjuntos assim definidos satisfazem as condições da proposição anterior e, portanto, a flag $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ é do tipo A.

Reciprocamente, suponhamos que $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ é uma flag do tipo A. Sejam $E_{i,j}$ e $F_{i,j}$, para todo $(i,j) \in J_t$, subespaços de V que satisfazem as condições da proposição anterior. Para cada $(i,j) \in J_t$, seja $e_{(i,j,1)}, \cdots, e_{(i,j,\alpha_{i,j})}$ uma base de $E_{i,j}$. Agora, consideramos $f_{(i,j,1)}, \cdots, f_{(i,j,\alpha_{i,j})}$ uma base de $F_{i,j}$ tal que $e_{(i,j,1)}, f_{(i,j,1)}, \cdots, e_{(i,j,\alpha_{i,j})}, f_{(i,j,\alpha_{i,j})}$ é uma base simplética de $E_{i,j} \oplus F_{i,j}$, que existe pelo Lema 2.11. Afirmamos que $\{e_a; a \in I_a\}$ e $\{f_a; a \in I_a\}$ escolhidos deste modo satisfazem as condições (i) até (iii) acima.

De fato, o item (i) do corolário segue do item (ii) da Proposição 2.13. O item (ii) do corolário segue do fato que os elementos $e_{(i,j,1)}, f_{(i,j,1)}, \cdots, e_{(i,j,\alpha_{i,j})}, f_{(i,j,\alpha_{i,j})}$ formam uma base simplética de $E_{i,j} \oplus F_{i,j}$. Por fim, o item (iii) do corolário segue do item (v) da Proposição 2.13. □

Dada uma flag $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$, dizemos que uma base $\{e_a;\ a \in I_A\} \cup \{f_a;\ a \in I_A\}$ satisfazendo as condições do corolário acima é uma *base canônica* para a t-flag.

Com estes resultados, é possível fornecer uma classificação das flags de um espaço vetorial V sobre a ação do grupo simplético $Sp(V, \phi)$. Para isso, consideramos Ψ a aplicação entre o conjunto das órbitas das t-flags de V sobre a ação de $Sp(V, \phi)$ e o conjunto dos conjuntos A de inteiros não-negativos indexados por J_t com soma de seus elementos igual a $(\dim V)/2$, definida por levando uma órbita de flags para o tipo de qualquer um de seus representantes. Assim, obtemos o

Teorema 2.15. [6, Theorem 7] *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e ϕ uma forma alternada não-degenerada sobre V. Consideramos $Sp(V, \phi)$ o grupo simplético agindo sobre V. Então a função Ψ definida acima é bijetora.*

Demonstração. Da definição do tipo da flag, é claro que o tipo da flag é preservado sobre a ação de $Sp(V, \phi)$. Portanto, a aplicação Ψ está bem definida.

Vamos provar que Ψ é sobrejetora. Suponhamos que $A = \{\alpha_{i,j};\ (i,j) \in J_t\}$ um conjunto de inteiros cuja soma dos elementos é $(\dim V)/2$. Definimos o conjunto I_A como no corolário anterior. Indexando os elementos de uma base simplética de modo adequado, podemos formar os conjuntos $\{e_a; a \in I_a\}$ e $\{f_a; a \in I_a\}$ que satisfazem as condições do corolário anterior. Para todo $l \in \{0, 1, 2, \cdots, t+1\}$, definimos os subespaços

$$V_l = \langle \{e_{(i,j,k)};\ (i,j,k) \in I_A \text{ e } i \leq l\} \cup \{f_{(i,j,k)};\ (i,j,k) \in I_A \text{ e } j \leq l\} \rangle.$$

Claramente $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ é uma t-flag em V e, pelo corolário anterior, esta t-flag é do tipo A. Logo, Ψ é sobrejetora.

Agora, provaremos que Ψ é injetora. Para isso, provaremos que quaisquer duas t-flags em V do mesmo tipo estão na mesma órbita da ação de $Sp(V, \phi)$ sobre as t-flags de V.

Sejam $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ e $V'_0, V'_1, \cdots, V'_{t+1}$ duas t-flags de V do tipo A, onde $A = \{\alpha_{i,j};\ (i,j) \in J_t\}$. Definimos I_A como no corolário acima. Sejam $\{e_a;\ a \in I_A\} \cup \{f_a;\ a \in I_A\}$ uma base canônica da flag $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ e $\{e'_a;\ a \in I_A\} \cup \{f'_a;\ a \in I_A\}$ uma base canônica da flag $V'_0, V'_1, \cdots, V'_{t+1}$. Consideramos T a transformação linear que leva e_a em e'_a e leva f_a em f'_a, para todo $a \in I_A$. Pelos itens (ii) e (iii) do corolário anterior, temos que $T \in Sp(V, \phi)$. Além disso, pelo item (i) do corolário anterior, temos que T leva V_i em V'_i para todo $i \in \{0, 1, 2, \cdots, t+1\}$. Portanto, as flags $V_0, V_1, \cdots, V_{t+1}$ e $V'_0, V'_1, \cdots, V'_{t+1}$ estão em uma mesma órbita sobre a ação de $Sp(V, \phi)$. Logo, Ψ é injetiva e, consequentemente, bijetora. $\square$

2.3 Classificação de Blackburn

Seja $\mathscr{P}$ a classe dos p-grupos finitos com subgrupo derivado de ordem p, p ímpar. Nesta seção iremos apresentar uma classificação destes grupos no seguinte sentido: para todo inteiro positivo n, a classe de isomorfismo dos grupos $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^n$, está em correspondência bijetora com um conjunto $\mathscr{S}_n$, cujos elementos são triplas ordenadas com certas propriedades que dependem apenas de n. Mais ainda, para cada elemento de $\mathscr{S}_n$ será fornecida uma apresentação para o grupo $G \in \mathscr{P}$ correspondente.

Começamos apresentado a definição do conjunto $\mathscr{S}_n$.

Seja n um inteiro positivo. Definimos $\mathscr{S}_n$ o conjunto de todas as triplas ordenadas (ρ, e, A) que satisfazem as seguintes condições:

(i) $\rho = (k_1, k_2, \cdots, k_r)$ é uma partição de algum inteiro c, onde $c < n$ e $n - c$ é par;

(ii) e é um inteiro tal que ρ tem no mínimo uma parte de valor e, ou seja, $e = k_i$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$;

(iii) Seja J_t definido por $J_t = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 |\ 1 \leq i \leq j \leq t+1\}$. Então, $A = \{\alpha_{i,j} |\ (i,j) \in J_{c+1}\}$ onde os elementos $\alpha_{i,j}$ são inteiros não negativos tais que

a) $\displaystyle\sum_{(i,j) \in J_{c+1}} \alpha_{i,j} = \frac{n-c}{2}$;

b) Para todo inteiro i, defina m_i como sendo o número de partes de ρ com valor i. Então, para todo $k \in \{2, 3, \cdots, c+2\}$,

$$\sum_{1 \le i \le k} \alpha_{i,k} + \sum_{k \le j \le c+2} \alpha_{k,j} \le \begin{cases} m_{k-1}, & k \le e \\ 1, & k = e+1 \\ m_e - 1, & k = e+2 \\ m_{k-2}, & k > e+2 \end{cases}$$

Vamos exibir a construção do conjunto $\mathscr{S}_3$, de modo a tornar um pouco mais claro como construir o conjunto $\mathscr{S}_n$. Os conjuntos $\mathscr{S}_n$, para $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, são apresentados no Apêndice A.

Para $n = 3$ a única possibilidade para o valor de c é $c = 1$. Consequentemente, a única possibilidade para partição de $c = 1$ é $\rho = (1)$ e, assim, $e = 1$. Agora, os elementos do conjunto $A = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}\}$ devem satisfazer que

- $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} = 1$;
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} \le 1$;
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} \le 0$.

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_1 = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = 0\}$$

$$A_2 = \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{1,1} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = 0\}.$$

Portanto, o conjunto $\mathscr{S}_3$ possui apenas dois elementos, a saber,

$$\mathscr{S}_3 = \{((1), 1, A_1), ((1), 1, A_2)\}.$$

O principal resultado desse capítulo é dado por

Teorema 2.16. [6, Theorem 8] *Sejam p um primo ímpar e n um inteiro positivo. Então, existe uma bijeção Θ entre o conjunto das classes de isomorfismos dos grupos $G \in \mathscr{P}$ de ordem p^n e o conjunto $\mathscr{S}_n$ definido anteriormente.*

A seguir, iremos apresentar como a função Θ do teorema acima é construída.

Seja $G \in \mathscr{P}$ um grupo com ordem p^n. Desde que G é nilpotente, o subgrupo $[G', G]$ está estritamente contido em G'. Mas $|G'| = p$ implica que $[G', G] = 1$ e, portanto, G é nilpotente de classe 2 e $G' \subseteq Z(G)$. Assim, para todo $x, y \in G$, vale que $[x^p, y] = [x, y]^p = 1$, sendo que a última igualdade ocorre pois $|G'| = p$. Portanto, G^p está contido em $Z(G)$ e, pelo Teorema 1.4, o subgrupo de Frattini satisfaz $\Phi(G) = G'G^p \subseteq Z(G)$.

Definimos $V = G/Z(G)$. Desde que $\Phi(G) \subseteq Z(G)$, então o Teorema 1.4 implica que V é um p-grupo abeliano elementar e, assim, V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_p$. Seja $h \in G'$ um elemento não trivial de G'. Identificamos G' com $\mathbb{F}_p$ através da correspondência do elemento $h^i \in G'$ com o elemento $i \in \mathbb{F}_p$. Com isso, a multiplicação por escalar é definida como $(h^i, xZ(G)) \in G' \times V \mapsto h^i \cdot xZ(G) = x^i Z(G)$.

Usando esta identificação, podemos definir uma aplicação $\phi : V \times V \to \mathbb{F}_p$ por $\phi(xZ(G), yZ(G)) = [x, y]$, para todo $x, y \in G$. Vamos verificar que ϕ está bem definida e é uma forma altenada não-degenerada sobre V.

Sejam $(x_1Z(G), y_1Z(G)), (x_2Z(G), y_2Z(G)) \in V \times V$ e suponhamos que $(x_1Z(G), y_1Z(G)) = (x_2Z(G), y_2Z(G))$. Logo, $x_1x_2^{-1}$ e $y_1y_2^{-1}$ pertencem a $Z(G)$. Portanto,

$$\begin{aligned} [x_1, y_1] &= x_1^{-1}y_1^{-1}x_1y_1 = x_1^{-1}y_2^{-1}(y_2y_1^{-1})(x_1x_2^{-1})x_2y_1 \\ &= x_1^{-1}(x_1x_2^{-1})y_2^{-1}x_2(y_2y_1^{-1})y_1 = x_2^{-1}y_2^{-1}x_2y_2 \\ &= [x_2, y_2], \end{aligned}$$

de onde $\phi(x_1Z(G), y_1Z(G)) = \phi(x_2Z(G), y_2Z(G))$, ou seja, ϕ está bem definida.

Vamos verificar a linearidade de ϕ com relação a primeira coordenada. Sejam $x_1Z(G)$, $x_2Z(G)$, $yZ(G) \in V$ e $h^i \in G'$. Pela Proposição 1.1 e pelo fato de $G' \leq Z(G)$ obtemos

$$\begin{aligned} \phi(x_1(h^i \cdot x_2)Z(G), yZ(G)) &= [x_1x_2^i, y] = [x_1, y]^{x_2^i}[x_2^i, y] = [x_1, y][x_2, y]^i \\ &= \phi(x_1Z(G), yZ(G))\ h^i\phi(x_2Z(G), yZ(G)). \end{aligned}$$

A linearidade na segunda coordenada é verificada de modo análogo. Portanto ϕ é uma forma bilinear.

A forma ϕ é alternada, pois para todo $xZ(G) \in V$ temos $\phi(xZ(G), xZ(G)) = [x, x] = 1$. Agora, seja $gZ(G)$ um elemento do radical de ϕ, ou seja, $\phi(gZ(G), xZ(G)) = [g, x] = 1$, para todo $xZ(G) \in V$. Logo, $g \in Z(G)$ e, assim, $gZ(G) = 1Z(g)$. Portanto, o radical de ϕ é trivial e, consequentemente, ϕ é não-degenerada, como queríamos.

Seja $G \in \mathscr{P}$ um grupo com ordem p^n. Definiremos $\Theta(G)$ como sendo uma certa tripla $(\rho, e, A) \in \mathscr{S}_n$ (chamamos esta tripla de *tipo* de G). Seja

$$Z(G) \simeq C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}} \times \cdots \times C_{p^{k_r}},$$

onde $0 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r$. Definimos

$$\rho = (k_1, k_2, \cdots, k_r).$$

Assim, ρ é uma partição de c, onde $|Z(G)| = p^c$. Notamos que $c < n$, desde que G é não-abeliano. Além disso, como $V = G/Z(G)$ é um espaço vetorial de dimensão $n - c$ e existe uma forma alternada não-degenerada sobre V, então o Corolário 2.6 implica que $n - c$ é par. Portanto, ρ satisfaz a condição (i) da definição de $\mathscr{S}_n$.

Definimos e como sendo o maior inteiro tal que

$$G' \subset Z(G)^{p^{e-1}}.$$

Para verificar que e satisfaz a condição (ii) da definição de $\mathscr{S}_n$, basta verificar que $Z(G)$ possui pelo menos um fator ciclíco isomorfo a C_{p^e}. Com efeito, suponhamos que $Z(G)$ não possui tal fator ciclíco. Se definirmos $Z = \{z \in Z(G);\ z^p = 1\}$, então

$$G' \subseteq Z \cap Z(G)^{p^{e-1}} = Z \cap Z(G)^{p^e} \subseteq Z(G)^{p^e},$$

o que contradiz a escolha de e.

Resta construirmos o conjunto A. Dado $i \in \{0, 1, 2, \cdots, c+1\}$, definimos $Z_i \leq Z(G)$ por

$$Z_i = \begin{cases} \{z \in Z(G);\ z^{p^i} = 1\}, & \text{se } i < e \\ \{z \in Z(G);\ z^{p^{e-1}} \in G'\}, & \text{se } i = e \\ \{z \in Z(G);\ z^{p^{i-1}} = 1\}, & \text{se } i > e \end{cases}$$

Notamos que $Z_e \subseteq Z_{e+1}$. De fato, seja $z \in Z_e$, logo $z^{p^{e-1}} \in G'$. Assim, $z^{p^e} = (z^{p^{e-1}})^p \in (Z(G))^p = 1$ e, portanto, $z \in Z_{e+1}$. Além disso, vemos que $Z_{e-1} \subsetneq Z_e$. De fato, consideramos o homomorfismo de Z_e em G' dado por $x \mapsto x^{p^{e-1}}$. Então Z_{e-1} é o núcleo deste homomorfismo. Mais ainda, este homomorfismo é sobrejetor, pois $G' \subset Z(G)^{p^{e-1}}$. Assim, Z_{e-1} tem índice p em Z_e. Com isso, segue que

$$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_{c+1}.$$

Definimos os subespaços Y_i de $Z(G)/Z(G)^p$ por

$$Y_i = \frac{Z_i Z(G)^p}{Z(G)^p},$$

para cada $i \in \{0, 1, 2, \cdots, c+1\}$. Afirmamos que o subespaço Y_e/Y_{e-1} tem dimensão 1. Desde que Z_{e-1} tem índice p em Z_e, então Y_e/Y_{e-1} tem dimensão no máximo 1. Suponhamos, por absurdo, que $Y_e = Y_{e-1}$. Seja $z \in Z_e \backslash Z_{e-1}$. Visto que $Z_e Z(G)^p = Z_{e-1} Z(G)^p$, temos que $z = xy^p$, para algum $x \in Z_{e-1}$ e algum $y \in Z(G)$. Assim, $y^{p^e} = z^{p^{e-1}} \in G' \backslash \{1\}$ e, consequentemente, $G' \subseteq Z(G)^{p^e}$, contradizendo a escolha de e. Portanto, Y_e/Y_{e-1} tem dimensão 1, como afirmado.

Seja $\pi : V \to Z(G)/Z(G)^p$ a aplicação induzida por $x \mapsto x^p$, para todo $x \in G$. Agora, $(xy)^p = x^p y^p [y, x]^{p(p-1)/2}$ para todo $x, y \in G$. Desde que p é ímpar, temos que p divide $p(p-1)/2$ e, assim, $[y, x]^{p(p-1)/2} = 1$. Portanto, π é um homomorfismo.

Dado $i \in \{0, 1, 2, \cdots, c+2\}$, definimos $V_i \leq V$ por

$$V_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 0 \\ \pi^{-1}(Y_{i-1}), & \text{se } i > 0 \end{cases}$$

Como vimos, π é um homomorfismo e, assim, $V_0, V_1, \cdots, V_{c+2}$ são subespaços de V. Definimos $A = \{\alpha_{i,j};\ (i,j) \in J_{c+1}\}$ como sendo o tipo da flag $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{c+2}$ com respeito a forma $\phi : V \times V \to \mathbb{F}_p$, como definido anteriormente. Desde que $|G/Z(G)| = p^{n-c}$, temos $\displaystyle\sum_{(i,j)\in J_{c+1}} \alpha_{i,j} = \frac{n-c}{2}$. Logo, A satisfaz a condição (iii)(a) da definição de $\mathscr{S}_n$.

Agora, para todo $i \in \{2, 3, \cdots, c+2\}$, temos

$$\sum_{1\le j\le i} \alpha_{i,j} + \sum_{i\le j\le c+2} \alpha_{i,j} = \dim V_i - \dim V_{i-1} \le \dim Y_{i-1} - \dim Y_{i-2},$$

de onde A satisfaz a condição (iii)(b) da definição de $\mathscr{S}_n$. Portanto $(\rho, e, A) \in \mathscr{S}_n$.

Desde que a definição do tipo (ρ, e, A) de G depende somente da classe de isomorfismo de G, a aplicação que leva $G \in \mathscr{P}$ no tipo de G induz uma aplicação bem definida Θ do conjunto de todas as classes de isomorfismo dos grupos $G \in \mathscr{P}$ de ordem p^n no conjunto $\mathscr{S}_n$.

Nosso objetivo é apresentar uma demonstração de que Θ é bijetora.

2.3.1 Θ é injetiva

Nesta seção, exibiremos um resultado que estabelece a injetividade da função Θ definida acima. Mais ainda, este resultado fornece uma apresentação de um p-grupo $G \in \mathscr{P}$ de ordem p^n correspondente ao elemento $x \in \mathscr{S}_n$. Para este fim, estabeleceremos algumas notações.

Seja (ρ, e, A) um elemento de $\mathscr{S}_n$, onde ρ é uma partição de c e seja m_i como definido anteriormente. Definimos para $i \in \{2, 3, \cdots, c+2\}$,o inteiro r_i por

$$r_i = \begin{cases} m_{i-1}, & \text{se } i \le e \\ 1, & \text{se } i = e+1 \\ m_e - 1, & \text{se } i = e+2 \\ m_{i-2}, & \text{se } i > e+2. \end{cases}$$

Dado $A = \{\alpha_{i,j} |\ (i,j) \in J_{c+1}\}$, para todo $i \in \{2, 3, \cdots, c+2\}$, definimos o inteiro não negativo d_i por

$$d_i = r_i - \sum_{1\le j\le i} \alpha_{j,i} - \sum_{i\le j\le c+2} \alpha_{i,j}.$$

Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, c+2\}$, definimos

$$s_i = \begin{cases} i-1, & \text{if } i \le e+1 \\ i-2, & \text{if } i \ge e+2. \end{cases}$$

Notamos que

$$\sum_{i=2}^{c+2} r_i s_i = \sum_{i=2}^{e} m_{i-1}(i-1) + 1 \cdot e + m_{e-1}(e-1) + \sum_{i=e+3}^{c+2} m_{i-2}(i-2) = \sum_{k=1}^{c} m_k k = c.$$

Suponhamos que $G \in \mathscr{P}$ tem tipo (ρ, e, A). Então para todo $i \in \{2, 3, \cdots, c+2\}$ todo elemento $z \in Z_{i-1}$ tem ordem no máxmo p^{s_i} e se z tem ordem estritamente menor do que p^{s_i}, então $z \in Z_{i-2}$. Notamos também que

$$r_i = \dim Y_{i-1} - \dim Y_{i-2}$$

e

$$d_i = \dim Y_{i-1} - \dim(Y_{i-2} + (\mathrm{Im}\ \pi \cap Y_{i-1})).$$

Agora, estamos em condições de provar a seguinte

Proposição 2.17. [6, Proposition 9] *Sejam p um primo ímpar e n um inteiro positivo. Sejam $G \in \mathscr{P}$ com ordem p^n e $(\rho, e, A) \in \mathscr{S}_n$. Definamos $c, \alpha_{i,j}, d_i$ e s_i como acima e o conjunto I_A como no Corolário 2.14. Então G tem o tipo (ρ, e, A) se, e somente se, existe um conjunto gerador X para G, onde X é o conjunto*

$$X = \{x_a |\ a \in I_A\} \cup \{y_a |\ a \in I_A\} \cup \{z_{(i,k)} |\ (i,k) \in I\},$$

onde $I = \{(i,k) \in \mathbb{Z}^2 |\ 2 \leq i \leq c+2,\ 1 \leq k \leq d_i\}$, com a propriedade que X junto com as seguintes relações fornecem uma apresentação para G,

$$x_{(i,j,k)}^{p^{s_i+1}} = 1 \qquad \textit{para todo } (i,j,k) \in I_A \tag{2.4}$$

$$y_{(i,j,k)}^{p^{s_j+1}} = 1 \qquad \textit{para todo } (i,j,k) \in I_A \tag{2.5}$$

$$z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1 \qquad \textit{para todo } (i,k) \in I \tag{2.6}$$

$$[x_a^p, x] = 1 \qquad \textit{para todo } x \in X \textit{ e para todo } a \in I_A \tag{2.7}$$

$$[y_a^p, x] = 1 \qquad \textit{para todo } x \in X \textit{ e para todo } a \in I_A \tag{2.8}$$

$$[z_{(i,k)}, x] = 1 \qquad \textit{para todo } x \in X \textit{ e para todo } (i,k) \in I \tag{2.9}$$

$$[x_a, x_{a'}] = 1 \qquad \textit{para todo } a, a' \in I_A \tag{2.10}$$

$$[y_a, y_{a'}] = 1 \qquad \textit{para todo } a, a' \in I_A \tag{2.11}$$

$$[x_a, y_{a'}] = 1 \qquad \textit{para todo } a, a' \in I_A,\ \textit{onde } a \neq a' \tag{2.12}$$

$$[x_a, y_a] = b^{p^{e-1}} \qquad \textit{para todo } a \in I_A, \tag{2.13}$$

onde

$$b = \begin{cases} z_{(e+1,1)}, & \textit{se } d_{e+1} = 1 \\ x^p_{(e+1,\bar{j},1)}, & \textit{se } \alpha_{e+1,\bar{j}} = 1,\ \textit{onde } \bar{j} > e+1 \\ y^p_{(\bar{j},e+1,1)}, & \textit{se } \alpha_{\bar{j},e+1} = 1,\ \textit{onde } \bar{j} < e+1 \end{cases}$$

Observação 2.18. Notamos que

$$d_{e+1} + \sum_{j=1}^{e+1} \alpha_{j,e+1} + \sum_{j=e+1}^{c+2} \alpha_{e+1,j} = r_{e+1} = 1,$$

e, portanto, $d_{e+1} = 1$ ou $\sum_{j=1}^{e+1} \alpha_{j,e+1} = 1$ ou $\sum_{j=e+1}^{c+2} \alpha_{e+1,j} = 1$. Nos dois últimos casos, existe um único $\bar{j} \neq e+1$ tal que $\alpha_{\bar{j},e+1} = 1$ ou $\alpha_{e+1,\bar{j}} = 1$, respectivamente. Consequentemente, apenas uma alternativa ocorre na definição de b acima.

Demonstração. (Proposição 2.17). Suponhamos que G tem o tipo (ρ, e, A). Primeiro mostraremos que o grupo G tem uma coleção de geradores que satisfazem as relações (2.4)–(2.13) acima. Então mostraremos que esta coleção de geradores e relações é uma apresentação de G.

Seja $h \in G \backslash \{1\}$. Definimos os subgrupos $Z_0, Z_1, \cdots, Z_{c+1}$ de $Z(G)$, os subespaços $Y_0, Y_1, \cdots, Y_{c+1}$ de $Z(G)/Z(G)^p$, o grupo quociente V, a forma alternada ϕ e os subespaços $V_0, V_1, \cdots, V_{c+2}$ de V como na definição do tipo de G acima.

Seja $\{e_a;\ a \in I_A\} \cup \{f_a;\ a \in I_A\}$ uma base canônica para a flag $V_0, V_1, \cdots, V_{c+2}$. Para cada $i \in \{2, 3, \cdots, c+2\}$, temos que $Y_{i-1}/(Y_{i-2} + (\mathrm{Im}\ \pi \cap Y_{i-1}))$ tem dimensão d_i. Sejam $g_{(i,1)}, \cdots, g_{(i,d_i)}$ elementos de Y_{i-1} cujas imagens em $Y_{i-1}/(Y_{i-2} + (\mathrm{Im}\ \pi \cap Y_{i-1}))$ formam uma base.

A propriedade (i) do Corolário 2.14 implica que

$$\{e_{(1,j,k)};\ (1, j, k) \in I_A\} \cup \{f_{(1,1,k)};\ (1, 1, k) \in I_A\}$$

é uma base de $\ker \pi = V_1$. Além disso, para todo $l \in \{2, 3, \cdots, c+2\}$, a propriedade (i) do Corolário 2.14 implica que

$$\{\pi(e_{(l,j,k)});\ (l, j, k) \in I_A\} \cup \{\pi(f_{(i,l,k)});\ (i, l, k) \in I_A\}$$

é uma base para $((Y_{l-1} \cap \mathrm{Im}\ \pi) + Y_{l-2})/Y_{l-2}$. Portanto, para todo $l \in \{1, 2, \cdots\}$, o conjunto

$$\begin{aligned}\{\pi(e_{(i,j,k)});\ (i, j, k) \in I_A,\ 2 \le i \le l\} \cup \{\pi(f_{(i,j,k)});\ (i, j, k) \in I_A,\ 2 \le i \le l\}\\ \cup\ \{g_{i,k};\ 2 \le i \le l,\ 1 \le k \le d_i\}\end{aligned}$$

é uma base de Y_{l-1}.

Escolheremos o conjunto de geradores X de G como segue. Seja $(i, j, k) \in I_A$. Desde que $\pi(e_{(i,j,k)}) \in Y_{i-1}$, existe um representante x para $\pi(e_{(i,j,k)})$ em Z_{i-1}. Definimos $x_{(i,j,k)}$ em G como sendo um representante para $e_{(i,j,k)}$ tal que $x_{(i,j,k)}^p = x$. Este elemento existe, pois quando percorremos sobre todos os representantes $y \in G$ de $e_{(i,j,k)}$, temos que y^p percorre todos os representantes em $Z(G)$ de $\pi(e_{(i,j,k)})$.

Para todo $(i, j, k) \in I_A$, definimos $y_{(i,j,k)} \in G$ como sendo o representante de $f_{(i,j,k)}$ tal que $y_{(i,j,k)}^p \in Z_{j-1}$. Um argumento análogo que fizemos acima prova que existe tal representante.

Finalmente, para todo i e k tais que $2 \le i \le c+2$ e $1 \le k \le d_i$, seja $z_{(i,k)} \in G$ um representante para $g_{(i,k)}$ tal que $z_{(i,k)} \in Z_{i-1}$. Este representante existe pois $g_{(i,k)} \in Y_{i-1}$.

Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, c+2\}$ e todo $y \in Z_{i-1}$ temos que $y^{p^{s_i}} = 1$. Portanto, desde que os elementos $x_{(i,j,k)}, y_{(i,j,k)}$ e $z_{(i,k)}$ foram escolhidos de modo que $x^p_{(i,j,k)}, y^p_{(i,j,k)}, z_{(i,k)} \in Z_{i-1}$, temos que as relações (2.4), (2.5) e (2.6) ocorrem. Visto que $G^p \subset Z(G)$, temos que as relações (2.7) e (2.8) ocorrem. A relação (2.9) ocorre pois $z_{(i,k)} \in Z_{i-1} \subseteq Z(G)$. Desde que os elementos x_a e y_a são representantes dos elementos e_a e f_a, segue da definição da forma ϕ que as relações (2.10), (2.11) e (2.12) ocorrem. Mais ainda,

$$[x_a, y_a] = h, \text{ para todo } a \in I_A.$$

Suponhamos que $d_{e+1} = 1$ e coloquemos $b = z_{(e+1,1)}$. Então $bZ(G)^p$ gera $Z_eZ(G)^p$ módulo $Z_{e-1}Z(G)^p$. Em particular, $b \notin Z_{e-1}$, assim b tem ordem exatamente p^e. Logo, $b^{p^{e-1}}$ não é trivial. Mas, pela definição de Z_e, $b^{p^{e-1}} \in G'$. Portanto $b = h^t$, para algum $t \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$. Seja $w \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tal que $tw \equiv 1 \mod p$. Trocando $z_{(e+1,1)}$ com $z^w_{(e+1,1)}$, se necessário, encontramos que as relações (2.4)–(2.12) ainda ocorrem, com a adição que

$$b^{p^{e-1}} = z^{p^{e-1}}_{(e+1,1)} = h = [x_a, y_a], \text{ para todo } a \in I_A.$$

Portanto, a relação (2.13) também ocorre neste caso.

Agora, consideramos que $d_{e+1} = 0$. Suponhamos que exista um único inteiro $\bar{j}$ tal que $e+1 < \bar{j} \leq c+2$ e tal que $\alpha_{e+1,\bar{j}} = 1$. Coloquemos $b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)}$. Como antes, argumentamos que $bZ(G)^p$ gera Z_e módulo Z_{e-1} e, portanto, que $b^{p^{e-1}} = h_t$ para algum $t \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$. Seja $w \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ tal que $tw \equiv 1 \mod p$. Trocando $x_{(e+1,\bar{j},1)}$ por $x^w_{(e+1,\bar{j},1)}$ e trocando $y_{(e+1,\bar{j},1)}$ por $y^t_{(e+1,\bar{j},1)}$, encontramos que as relações (2.4)–(2.12) ainda são satisfeitas, mas agora a relação (2.13) é satisfeita. Um argumento análogo prova que podemos encontrar um conjunto X de elementos satisfazendo as relações (2.4)–(2.13) no caso em que existe um único inteiro $\bar{j}$ tal que $1 \leq j < e+1$ e tal que $\alpha_{(j,e+1)} = 1$.

Agora, mostraremos que o conjunto X e as relações (2.4)–(2.13) formam uma apresentação para o grupo G. O conjunto

$$\{x^p_a;\ a \in I_a\} \cup \{y^p_a;\ a \in I_A\} \cup \{z_{(i,k)};\ 2 \leq i \leq c+2,\ 1 \leq k \leq d_i\}$$

gera $Z(G)$, visto que o conjunto

$$\{\pi(e_a);\ a \in I_a\} \cup \{\pi(f_a);\ a \in I_A\} \cup \{g_{(i,k)};\ 2 \leq i \leq c+2,\ 1 \leq k \leq d_i\}$$

é uma base para $Z(G)/Z(G)^p$. Também, o conjunto $\{x^p_a;\ a \in I_a\} \cup \{y^p_a;\ a \in I_A\}$ gera G módulo $Z(G)$, desde que $\{e^p_a;\ a \in I_a\} \cup \{f^p_a;\ a \in I_A\}$ é uma base para V. Portanto, X gera o grupo G.

Suponhamos que G_2 seja um grupo gerado por um conjunto X satisfazendo as relações (2.4)–(2.13). Mostraremos que G_2 tem ordem no máximo p^n. Consideramos o subgrupo H de G_2 gerado pelo conjunto

$$\{x^p_{(i,j,k)};\ (i,j,k) \in I_A,\ i \geq 2\} \cup \{y^p_{(i,j,k)};\ (i,j,k) \in I_A,\ i \geq 2\} \cup \{z_{(i,k)};\ 2 \leq i \leq c+2,\ 1 \leq k \leq d_i\}. \tag{2.14}$$

As relações (2.7), (2.8) e (2.9) implicam que H é central em G_2 e, assim, H é normal e abeliano. Pelas relações (2.4), (2.5) e (2.6), os elementos $x^p_{(i,j,k)}$ têm ordem no máximo p^{s_i}, os elementos $y^p_{(i,j,k)}$ têm ordem no máximo p^{s_j} e os elementos $z_{(i,k)}$ têm ordem no máximo p^{s_i}, assim a ordem de H é no máximo p elevado à potência dada por

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,k)\in I_A} s_i + \sum_{(i,j,k)\in I_A} s_j + \sum_{i=2}^{c+2}\sum_{k=1}^{d_i} s_i &= \sum_{i=2}^{c+2} s_i\left(\sum_{i=1}^{c+2}\alpha_{i,j} + \sum_{j=1}^{i}\alpha_{j,i} + d_i\right)\\ &= \sum_{i=2}^{c+2} s_i r_i\\ &= c\end{aligned}$$

Agora, consideramos o quociente G_2/H. Este grupo é gerado pelo conjunto $\{x^p_a;\ a \in I_a\} \cup \{y^p_a;\ a \in I_A\}$. As relações (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13) implicam que G_2/H é abeliano. Desde que $x^p_a, y^p_a \in H$ para todo $a \in I_A$, temos que G_2/H é abeliano elementar. Portanto $|G_2/H| \leq p^{2|I_a|} = p^{n-c}$. Logo,

$$|G_2| = |G_2/H||H| \leq p^{n-c+c} = p^n.$$

Consequentemente, o conjunto gerador X junto com as relações (2.4)–(2.13) formam um apresentação para G, como desejado.

Reciprocamente, suponhamos que G é um grupo de ordem p^n possuindo uma apresentação como no enunciado da proposição. Provaremos que $G \in \mathscr{P}$ e que G é do tipo (ρ, e, A).

Consideramos o grupo $H \leq Z(G)$ gerado pelo conjunto $\overline{X}$ definido por (2.14). Desde que P tem ordem p^n e G/H tem ordem no máximo p^{n-c}, então H tem ordem p^c. Isto implica que H é produto direto de subgrupos cíclicos gerados por elementos em $\overline{X}$, que os elementos $x^p_{(i,j,k)}$ têm ordem p^{s_i}, que os elementos $y^p_{(i,j,k)}$ têm ordem p^{s_j} e que os elementos $z_{(i,k)}$ têm ordem p^{s_i}. Uma consequência é que $H \simeq C_{p^{k_1}} \times C_{p^{k_2}} \times \cdots \times C_{p^{k_r}}$, onde $\rho = (k_1, k_2, \cdots, k_r)$. Outra consequência é que o elemento $b^{p^{e-1}}$ tem ordem p. As relações de comutadores implicam que $G' = \langle b^{p^{e-1}} \rangle$ e, assim, $|G'| = p$. Portanto $G \in \mathscr{P}$. Seja (ρ', e', A') o tipo de G. Precisamos provar que $(\rho', e', A') = (\rho, e, A)$.

Notamos que, as relações (2.10)–(2.13) implicam que a forma alternada ϕ sobre G/H induzida pelos comutadores é não-degenerada. Portanto $H = Z(G)$ e, consequentemente, $\rho' = \rho$.

Vemos que

$$G' = \langle b^{p^{e-1}} \rangle \subseteq Z(G)^{p^{e-1}}.$$

Além disso, como b gera um fator direto de $Z(G)$ de ordem p^e, temos que $b^{p^{e-1}} \notin Z(G)^{p^e}$ e, então, $G' \nsubseteq Z(G)^{p^e}$. Logo $e = e'$.

Definamos os subgrupos Z_i, os subespaços Y_i e os subespaços V_i como na definição do tipo de um grupo em $\mathscr{P}$. Não é difícil checar que para todo $l \in \{1, 2, \cdots, c+1\}$, o subespaço Y_{l-1} tem o conjunto

$$\{x^p_{(i,j,k)}Z(G)^p;\ (i,j,k) \in I_A,\ 2 \leq i \leq l\} \cup \{y^p_{(i,j,k)}Z(G)^p;\ (i,j,k) \in I_A,\ 2 \leq j \leq l\}$$
$$\cup\{z_{(i,k)}Z(G)^p;\ 2 \leq i \leq c+2,\ 1 \leq k \leq d_i\}$$

como uma base e para todo $l \in \{0, 1, 2, \cdots, c+2\}$ o conjunto

$$\{x_{(i,j,k)}Z(G);\ (i,j,k) \in I_A,\ 1 \leq i \leq l\} \cup \{y_{(i,j,k)}Z(G);\ (i,j,k) \in I_A,\ 1 \leq j \leq l\}$$

é uma base para V. Mas as relações (2.10)–(2.13) implicam que a flag $V_0, V_1, \cdots, V_{c+2}$ é do tipo A, pelo Corolário 2.14. Portanto $A' = A$ e, assim, G é do tipo (ρ, e, A), como desejado. □

No Apêndice A será construído o conjunto $\mathscr{S}_n$ para cada $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ e, então, exibiremos a apresentação do grupo G do tipo (ρ, e, A), para cada $(\rho, e, A) \in \mathscr{S}_n$.

2.3.2 Θ é sobrejetiva

Por fim, iremos apresentar o resultado que nos permitirá provar que a função Θ é sobrejetora.

Proposição 2.19. [6, Proposition 10] *Sejam p um primo ímpar e n um inteiro positivo. Seja (ρ, e, A) um elemento fixado de $\mathscr{S}_n$. Definamos $c, \alpha_{i,j}, d_i$ e s_i como antes. Então existe um grupo G de ordem p^n que é gerado pelo conjunto X da Proposição 2.17 e tem a propriedade de que as relações (2.4)–(2.13) são satisfeitas.*

Demonstração. Construiremos o grupo G como segue. Seja $U \subseteq X$ definido por

$$U = \{x_a|\ a \in I_A\} \cup \{y_a|\ a \in I_A\}.$$

Definimos e fixamos uma ordem linear qualquer sobre U. Seja $F(U)$ o grupo relativamente livre sobre o conjunto U na variedade $\mathscr{V}$ definida pelas leis

$$[x^p, y],\ [x, y, z],\ [x, y]^p.$$

Consideramos L o subgrupo central de $F(U)$ gerado pelos elementos $\{u^p;\ u \in U\}$. Definamos $T = F(U)'$. Desde que as leis $[x, y]^p$ e $[x, y, z]$ ocorrem em $\mathscr{V}$, então T é abeliano elementar e é gerado pelo conjunto $\{[u, v];\ u, v \in U,\ u < v\}$. Definamos $Z = TL$.

Pelo Exemplo 1.13, $F(U)/Z$ é um grupo relativamente livre sobre o conjunto U na variedade dos grupos abelianos de expoente p. Portanto, $F(U)/Z$ é um p-grupo abeliano elementar de posto $|U|$.

Temos que $F(U)/T$ é um grupo abeliano livre sobre o conjunto U. A imagem do conjunto $\{u^p;\ u \in U\}$ gera um grupo abeliano livre de posto $|U|$ no seu quociente.

Portanto, L é livre de torção e L é um grupo abeliano livre de posto $|U|$. Desde que todos os elementos de T têm ordem finita, então $T \cap L = 1$ e, assim, $Z = T \times L$.

Agora, $F(U)/Z^p$ é o grupo relativamente livre sobre o conjunto U na variedade de Higman $\mathscr{H}$ de p-grupos, definida pelas leis $[x^p, y], [x, y, z], [x, y]^p$ e x^{p^2}, como no Exemplo 1.13. Em [15], Higman mostra que o subgrupo D de $F(U)/Z^p$ que é relativamente livre na variedade $\mathscr{H}$ e é gerado pelo conjunto

$$\{u^p;\ u \in U\} \cup \{[u, v];\ u, v \in U,\ u < v\},$$

é abeliano elementar de posto $\frac{1}{2}|U|(|U|+1)$. Mas $D \simeq Z/Z^p$, portanto, Z tem posto $\frac{1}{2}|U|(|U|+1)$. Isto implica que T tem posto $\frac{1}{2}|U|(|U|-1)$ e que o conjunto $\{[u, v];\ u, v \in U,\ u < v\}$ é um conjunto gerador de T de tamanho minimal.

Seja $i \in I_A$ fixado. Seja M_1 o subgrupo de T gerado pelo conjunto

$$\begin{aligned} &\{[x_i, y_i]([x_a, y_a])^{-1};\ a \in I_A \backslash \{i\}\} \cup \{[x_a, y_{a'}];\ a, a' \in I_A,\ a \neq a'\} \cup \\ &\{[x_a, x_{a'}];\ a, a' \in I_A,\ x_a < x_{a'}\} \cup \{[y_a, y_{a'}];\ a, a' \in I_A,\ y_a < y_{a'}\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Desde que o conjunto

$$\{[x_a, y_{a'}];\ a, a' \in I_A\} \cup \{[x_a, x_{a'}];\ a, a' \in I_A,\ x_a < x_{a'}\} \cup \{[y_a, y_{a'}];\ a, a' \in I_A,\ y_a < y_{a'}\}$$

forma um conjunto gerador minimal para T, temos que o conjunto gerador (2.15) para M_1 tem tamanho minimal e, portanto, M_1 tem índice p em T.

Seja M_2 o subgrupo de L gerado pelo conjunto

$$\{x_{(i,j,k)}^{p^{s_i+1}};\ (i, j, k) \in I_A\} \cup \{y_{(i,j,k)}^{p^{s_j+1}};\ (i, j, k) \in I_A\}.$$

Desde que L é um grupo abeliano livre livremente gerado pelo conjunto $\{u^p;\ u \in U\}$, temos que M_2 tem índice p elevado a potência

$$\sum_{(i,j,k) \in I_A} (s_i + s_j) = \sum_{i=1}^{c+2} s_i \left(\sum_{j=i}^{c+2} \alpha_{i,j} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_{j,i} \right) = \sum_{i=2}^{c+2} s_i (r_i - d_i) \tag{2.16}$$

em L.

Seja D o grupo dado pela apresentação consistindo do conjunto

$$\{z_{(i,k)};\ 2 \leq i \leq c+2.\ 1 \leq k \leq d_i\}$$

de geradores junto com as relações

$$[z_{(i,k)}, z_{(i',k')}] = 1 \qquad \text{para } 2 \leq i, i' \leq c+2,\ 1 \leq k \leq d_i,\ 1 \leq k' \leq d_{i'} \tag{2.17}$$

$$z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1 \qquad \text{para } 2 \leq i \leq c+2,\ 1 \leq k \leq d_i. \tag{2.18}$$

Então D é abeliano e tem ordem igual a p elevado a potência

$$\sum_{i=2}^{c+1} d_i s_i. \tag{2.19}$$

Definimos $b \in F(U) \times D$ por

$$b = \begin{cases} z_{(e+1,1)}, & \text{se } d_{e+1} = 1 \\ x^p_{(e+1,\bar{j},1)}, & \text{se } \alpha_{e+1,\bar{j}} = 1, \text{ onde } \bar{j} > e+1 \\ y^p_{(\bar{j},e+1,1)}, & \text{se } \alpha_{\bar{j},e+1} = 1, \text{ onde } \bar{j} < e+1 \end{cases}$$

Temos

$$(b^{p^{e-1}}[x_i, y_i]^{-1})^p = b^{p^e} \in M_1 \times M_2,$$

mas que $b^{p^{e-1}}[x_i, y_i]^{-1} \in Z(F(U) \times D) \backslash M_1 \times M_2$. Portanto o subgrupo N gerado por $M_1 \times M_2$ e $b^{p^{e-1}}[x_i, y_i]^{-1}$ é normal em $F(U) \times D$ e $M_1 \times M_2$ tem índice p em N.

Seja G o grupo definido por $(F(U) \times D)/N$. Identificamos os elementos $x_{(i,j,k)}, y_{(i,j,k)}, z_{(i,k)}$ e D com suas imagens no quociente por N.

É claro que G é gerado pelo conjunto X da Proposição anterior. As relações (2.4) e (2.5) são satisfeitas pela definição de M_2. A relação (2.6) é satisfeita por (2.17). Desde que $F(U)$ está na variedade $\mathscr{V}$, então as relações (2.7) e (2.8) são satisfeitas. A relação (2.9) ocorre pois D é abeliano e P é um quociente de $F(U) \times D$. As relações (2.10), (2.11) e (2.12) ocorrem pela definição de M_1. A relação (2.13) segue da definição de M_1 e N.

Finalmente, precisamos provar que G tem ordem p^n. Desde que $F(U)/Z$ é abeliano elementar de posto $|U|$, então

$$|F(U)/Z| = p^{|U|} = p^{2|I_A|} = p^{n-c}.$$

Também temos que o índice de $M_1 \times M_2$ em Z é p elevado a potência

$$1 + \sum_{i=2}^{c+2} s_i(r_i - d_i),$$

por (2.16) e o fato que M_1 tem índice p em T. Portanto, por (2.19), a ordem de $(F(U)/(M_1 \times M_2)) \times D$ é p elevado a potência

$$n - c + 1 + \sum_{i=2}^{c+2} s_i(r_i - d_i) + \sum_{i=2}^{c+1} d_i s_i = n + 1.$$

Como $M_1 \times M_2$ tem índice p em N, então G tem ordem p^n, como desejado. $\square$

E, finalmente, podemos demonstrar o teorema principal desse capítulo.

Demonstração do Teorema 2.16. Seja Θ a função definida do conjunto de todas as classes de isomorfismos dos grupos de $\mathscr{P}$ de ordem p^n para o conjunto $\mathscr{S}_n$, como definida no início da seção.

Pela Proposição 2.17, quaisquer dois grupos em $\mathscr{P}$ de ordem p^n do mesmo tipo têm uma apresentação idêntica e, portanto, são isomorfos. Logo Θ é injetora. Por outro lado, seja $(\rho, e, A) \in \mathscr{S}_n$. Pela Proposição 2.19, existe um grupo G de ordem p^n com apresentação como na Proposição 2.17, esta mesma proposição implica que G tem o tipo (ρ, e, A). Portanto, Θ é sobrejetora. Isto prova o Teorema 2.16. $\square$

Observação 2.20. O Teorema 2.16 também é válido para $p = 2$ e sua demonstração pode ser encontrada em [6].

Nossos resultados se concentrarão no caso p ímpar por dois motivos: o cálculo da ordem de alguns elementos em $\nu(G)$ são mais simples e podemos aplicar o Teorema 1.33 para o cálculo de alguns funtores homológicos de um grupo $G \in \mathscr{P}$, como por exemplo $\nabla(G)$, $G \wedge G$ e $J_2(G)$.

Capítulo 3

Resultados

Seja G um p-grupo finito com subgrupo derivado de ordem p. Vimos no capítulo anterior que se p é ímpar, então G possui uma apresentação dada pela Proposição 2.17. Nosso objetivo neste capítulo é fornecer uma completa descrição dos grupos que aparecem no Diagrama 1 da página 23 em termos da apresentação dada em [6].

Consideramos $G \in \mathscr{P}$ com apresentação como na Proposição 2.17. Então, pelo que vimos no capítulo anterior, G é nilpotente de classe 2 e, portanto, o quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$ é abeliano. Não é difícil verificar que o conjunto X dado pela Proposição 2.17 é um conjunto gerador policíclico para G. Pela Proposição 1.34 podemos formar um conjunto gerador para $[G, G^{\varphi}]$, o qual é exibido na Seção 3.2.1. Seguindo a ideia de Magidin e Morse em [20], deveríamos calcular a ordem de cada um destes geradores e verificar a independência entre eles. Naturalmente, a apresentação de G sugere que devemos separar em três casos, de acordo com o valor assumido por b que aparece na Proposição 2.17.

Ao fazermos os cálculos das ordens, notamos que a ordem de cada gerador coincidia com a ordem de sua imagem em $G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$, pelo menos no caso em que $|I_A| \geq 2$ ou quando $|I_A| = 1$ e $b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)}$. Isto nos sugeriu que nestes casos o quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$ é isomorfo a $G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$, o que de fato se confirmou ao utilizarmos um resultado de Ellis [13] que permite caracterizar quando o isomofismo ocorre em termos do centro tensorial $Z^{\otimes}(G)$.

Entretanto, se $|I_A| = 1$ e $b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)}$ ou $b = z_{(e+1,1)}$, então enfrentamos problemas em calcular a ordem de alguns geradores. Nestes casos, notamos que G podia ser fatorado como produto direto $G \simeq H \times N$, onde H e N são subgrupos de G, com N um subgrupo central de G. Consequentemente, estes subgrupos agem trivialmente por conjugação um sobre o outro. Pela Proposição 1.23, obtemos

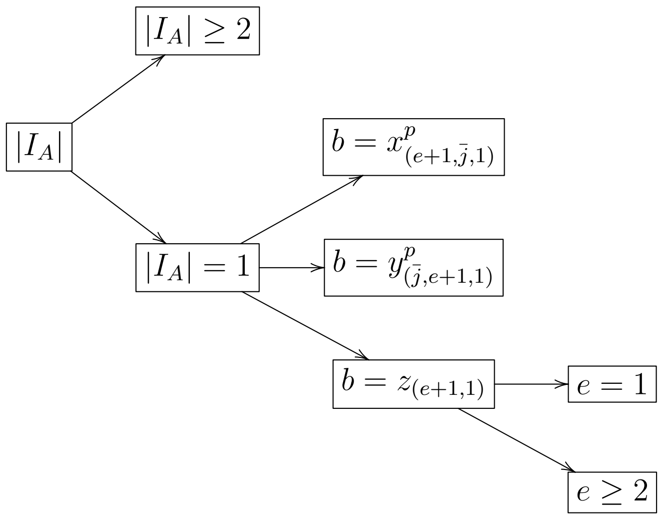
$$G \otimes G \simeq (H \otimes H) \times (H \otimes N) \times (N \otimes H) \times (N \otimes N).$$

Visto que os três últimos fatores acima são produtos tensoriais usuais, estes são facilmente calculados. Assim, resta determinar $H \otimes H$ em cada caso.

Para os demais grupos do Diagrama 1, utilizaremos a Proposição 1.34 para determinar $G \wedge G$ e, junto com os resultados estruturais dados pelo Teorema 1.33, determinaremos $\Gamma(G^{ab})$ e $J_2(G) \simeq \nabla(G) \times M(G)$, onde $M(G)$ será obtido como núcleo do homomorfismo derivado $k' : G \wedge G \to G'$.

3.1 O Quadrado Tensorial não-Abeliano

Vamos separar os cálculos do quadrado tensorial em alguns casos, conforme o diagrama abaixo.



Comecemos tratando o caso em que $|I_A| \geq 2$ ou $|I_A| = 1$ e $b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)}$. Como citado acima, vamos precisar de um resultado de Ellis [13]. Lembramos que o *centro tensorial não-abeliano* é definido como sendo o subgrupo de G dado por

$$Z^{\otimes}(G) = \{g \in G;\ x \otimes g = 1_{G \otimes G},\ \text{para todo } x \in G\}.$$

Com isso, podemos enunciar o seguinte

Lema 3.1. ([13, Proposition 16]) *Seja G um grupo e consideramos $N \lhd G$. Então $G \otimes G \simeq G/N \otimes G/N$ se, e somente se, $N \leqslant Z^{\otimes}(G)$.*

Com este resultado, obtemos o

Teorema 3.2. *Seja $G \in \mathscr{P}$ um p-grupo de ordem p^n, p primo ímpar, com apresentação dada como na Proposição 2.17. Se $|I_A| \geq 2$ ou $|I_A| = 1$ e $b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)}$, então $G \otimes G \simeq G^{ab} \otimes G^{ab}$.*

Demonstração. Seja G nas condições do teorema. Pela Proposição 2.17, temos que o subgrupo derivado é dado por

$$G' = \langle [x_a, y_a] \mid a \in I_A \rangle = \langle b^{p^{e-1}} \rangle,$$

uma vez que $b^{p^{e-1}} = [x_a, y_a]$, para todo $a \in I_A$. Se provarmos que $b^{p^{e-1}} \in Z^{\otimes}(G)$, então $G' \leqslant Z^{\otimes}(G)$ e, pelo Lema 3.1, obtemos que $G \otimes G \simeq G^{ab} \otimes G^{ab}$, como desejado. Para isso, mostraremos que

$$x \otimes b^{p^{e-1}} = 1_{G \otimes G},$$

para todo gerador x de G.

Desde que $|I_A| \geq 2$, dado $a \in I_A$, escolhemos $a' \neq a$ e, pelo Lema 1.29 e relação (2.13) da Proposição 2.17, temos

$$\begin{aligned}
[x_a, (b^{p^{e-1}})^{\varphi}] &= [x_a, [x_{a'}, y_{a'}]^{\varphi}] = 1 \\
[y_a, (b^{p^{e-1}})^{\varphi}] &= [y_a, [x_{a'}, y_{a'}]^{\varphi}] = 1 \\
[z_{(i,k)}, (b^{p^{e-1}})^{\varphi}] &= [z_{(i,k)}, [x_{a'}, y_{a'}]^{\varphi}] = 1
\end{aligned}$$

Portanto $b^{p^{e-1}} \in Z^{\otimes}(G)$ e, consequentemente, $G' \leqslant Z^{\otimes}(G)$, como queríamos.

Agora, suponhamos que $|I_A| = 1$, $b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)}$ e $I_A = \{a\}$, onde $a = (\bar{j}, e+1, 1)$. Neste caso, $G' = \langle [x_a, y_a] \rangle = \langle y_a^{p^e} \rangle$. É fácil ver que $[z_{(i,k)}, (y_a^{p^e})^{\varphi}] = 1$ para todo $(i,k) \in I$. Pelo Corolário 1.32, temos que $o([x_a, y_a^{\varphi}])$ divide $p^{\bar{j}}$ e, desde que $\bar{j} \leq e$, vem que $[x_a, (y_a^{p^e})^{\varphi}] = [x_a, y_a^{\varphi}]^{p^e} = 1$. Finalmente, pelo Lema 1.28 e pelo item (iii) do Lema 1.27,

$$[y_a, [x_a, y_a]^{\varphi}] = [y_a, (y_a^{p^e})^{\varphi}] = [(y_a)^{p^e}, y_a^{\varphi}] = [[x_a, y_a], y_a^{\varphi}] = [y_a, [x_a, y_a]^{\varphi}]^{-1}.$$

Como $p > 2$, segue $[y_a, (y_a^{p^e})^{\varphi}] = 1$ e, então, $G' \leqslant Z^{\otimes}(G)$, como queríamos. □

O próximo resultado aborda o caso em que $|I_A| = 1$ e $b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)}$.

Teorema 3.3. *Seja $G \in \mathscr{P}$ um p-grupo de ordem p^n, p primo ímpar, com apresentação dada como na Proposição 2.17. Se $|I_A| = 1$ e $b = x_{(e+1,\bar{j},1)}$, então*

$$\begin{aligned}
G \otimes G \simeq & (C_{p^{\bar{j}-1}} \times (C_{p^e})^2 \times C_{p^{e+1}}) \times \left((C_{p^e} \oplus C_{p^{\bar{j}-1}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k)\in I} C_{p^{s_i}} \right)^2 \\
& \times \left(\bigoplus_{(i,k)\in I} C_{p^{s_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k)\in I} C_{p^{s_i}} \right).
\end{aligned}$$

Demonstração. Desde que $|I_A| = 1$ e $b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)}$, então podemos escrever $I_A = \{a\}$, com $a = (e+1, \bar{j}, 1)$. Neste caso, G tem a seguinte apresentação

$$\begin{aligned}
G = \langle x_a, y_a, z_{(i,k)} \mid \quad & x_a^{p^{e+1}} = y_a^{p^{\bar{j}-1}} = z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1,\ [x_a^p, y_a] = [y_a^p, x_a] = 1, \\
& [z_{(i,k)}, x_a] = [z_{(i,k)}, y_a] = [z_{(i,k)}, z_{(i',k')}] = 1,\ [x_a, y_a] = x_a^{p^e} \rangle,
\end{aligned}$$

onde $(i,j),(i',k')\in I$. Notamos que $G\simeq H\times N$, em que

$$H=\langle x,y|\ x^{p^{e+1}}=y^{p^{\bar{j}-1}}=1,[x^p,y]=[y^p,x]=1,[x,y]=x^{p^e}\rangle$$
$$N=\langle z_{(i,k)}|\ z_{(i,k)}^{p^{s_i}}=1,[z_{(i,k)},z_{(i',k')}]=1\rangle,\ \text{onde } (i,k),(i',k')\in I$$

Desde que $N\leqslant Z(G)$, então H é N-trivial e N é H-trivial, onde as ações são dadas pela conjugação. Portanto, podemos aplicar a Proposição 1.23 e, assim,

$$G\otimes G\simeq(H\otimes H)\times(H^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}N)\times(N\otimes_{\mathbb{Z}}H^{ab})\times(N\otimes_{\mathbb{Z}}N).$$

Agora, $H^{ab}\simeq C_{p^e}\oplus C_{p^{\bar{j}-1}}$ e $N\simeq\bigoplus_{(i,k)\in I}C_{p^{s_i}}$. Logo

$$H^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}N\simeq(C_{p^e}\oplus C_{p^{\bar{j}-1}})\otimes_{\mathbb{Z}}\bigoplus_{(i,k)\in I}C_{p^{s_i}}$$
$$N\otimes N\simeq\bigoplus_{(i,k)\in I}C_{p^{s_i}}\otimes_{\mathbb{Z}}\bigoplus_{(i,k)\in I}C_{p^{s_i}}$$

e $N\otimes_{\mathbb{Z}}H^{ab}\simeq H^{ab}\otimes_{\mathbb{Z}}N$.

Usando transformações de Tietze, obtemos que H é isomorfo ao grupo

$$G_p(\bar{j}-1,e,1;1,0)=\langle a,b|\ [a,b]^p=[a,b,a]=[a,b,b]=1,a^{p^{\bar{j}-1}}=[a,b]^p,b^{p^e}=[a,b]\rangle,$$

como no Teorema 1.35. Pelo Teorema 1.37 temos

$$H\otimes H\simeq C_{p^{\bar{j}-1}}\times C_{p^e}\times C_{p^e}\times C_{p^{e+1}},$$

o que prova o desejado.

Observamos que $H\otimes H\not\simeq H^{ab}\otimes H^{ab}$ e, portanto, $G\otimes G\not\simeq G^{ab}\otimes G^{ab}$. □

Observação 3.4. Sejam G e H dois grupos finitos e suponhamos que $G^{ab}\simeq C_{m_1}\oplus C_{m_2}\oplus\cdots\oplus C_{m_r}$ e $H^{ab}\simeq C_{n_1}\oplus C_{n_2}\oplus\cdots\oplus C_{n_s}$. Então, é conhecido que

$$G\otimes_{\mathbb{Z}}H\simeq\bigoplus_{i,j}C_{(m_i,n_j)},\ \ 1\leq i\leq r,\ \ 1\leq j\leq s,$$

onde (m_i,n_j) é o máximo divisor comum entre m_i e n_j. A demonstração deste resultado pode ser encontrado em [19, Lemma 2.2.9] e ele nos permite calcular os tensoriais usuais que aparecem no teorema anterior, bem como os demais que aparecerão.

O caso em que $|I_A|=1$ e $b=z_{(e+1,1)}$, se faz necessário considerar separadamente quando $e=1$ e quando $e>1$. O próximo resultado aborda o caso $e=1$, o qual é análogo ao teorema anterior.

Teorema 3.5. *Seja $G\in\mathscr{P}$ um p-grupo de ordem p^n, p primo ímpar, com apresentação dada como na Proposição 2.17. Se $|I_A|=1$ e $b=z_{(2,1)}$, então*

$$G\otimes G\simeq(C_{p^{s_{\bar{j}}+1}}\times(C_{p^{s_{\bar{i}}+1}})^3\times(C_p)^2)\times\left((C_{p^{s_{\bar{i}}+1}}\oplus C_{p^{s_{\bar{j}}+1}})\otimes_{\mathbb{Z}}\bigoplus_{(i,k)\in I^*}C_{p^{s_i}}\right)^2$$
$$\times\left(\bigoplus_{(i,k)\in I^*}C_{p^{s_i}}\otimes_{\mathbb{Z}}\bigoplus_{(i,k)\in I^*}C_{p^{s_i}}\right),$$

onde $I^* = I \backslash \{(2,1)\}$ *e* $I_A = \{a = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})\}$.

Demonstração. Sendo $|I_A| = 1$, vamos denotar $I_A = \{a\}$, com $a = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. Neste caso, o grupo G tem a seguinte apresentação

$$\begin{aligned} G = \langle x_a, y_a, z_{(i,k)}| \quad & x_a^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = y_a^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1, [x_a^p, y_a] = [y_a^p, x_a] = 1, \\ & [z_{(i,k)}, x_a] = [z_{(i,k)}, y_a] = [z_{(i,k)}, z_{(i',k')}] = 1, [x_a, y_a] = z_{(2,1)} \rangle \end{aligned}$$

Notamos que $G \simeq H \times N$, onde

$$\begin{aligned} H &= \langle x, y, z| \; x^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = y^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = 1, [x^p, y] = [y^p, x] = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z \rangle \\ N &= \langle z_{(i,k)}| \; z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1, [z_{(i,k)}, z_{(i',k')}] = 1 \rangle, \; \text{onde } (i,k), (i',k') \in I^*. \end{aligned}$$

Como $N \leqslant Z(G)$, então H é N-trivial e N é H-trivial. Pela Proposição 1.23,

$$G \otimes G \simeq (H \otimes H) \times (H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} N) \times (N \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}) \times (N \otimes_{\mathbb{Z}} N).$$

Agora $H^{ab} \simeq C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \oplus C_{p^{s_{\bar{j}}+1}}$ e $N \simeq \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}}$. Logo

$$\begin{aligned} H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} N &\simeq (C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \oplus C_{p^{s_{\bar{j}}+1}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}} \\ N \otimes N &\simeq \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}} \end{aligned}$$

e $N \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab} \simeq H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

Aplicando transformações de Tietze, o grupo H é isomorfo ao grupo

$$\begin{aligned} G_p(s_{\bar{j}} + 1, s_{\bar{i}} + 1, 1; 1, 1) = \langle a, b| \; [a, b]^p = [a, b, a] = [a, b, b] = 1, a^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = [a, b]^p, \\ b^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = [a, b]^p \rangle, \end{aligned}$$

como no Teorema 1.35. Pelo Teorema 1.37,

$$H \otimes H \simeq C_{p^{s_{\bar{j}}+1}} \times C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \times C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \times C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \times C_p \times C_p,$$

o que prova nosso resultado.

Observamos que $H \otimes H \not\simeq H^{ab} \otimes H^{ab}$ e, portanto, $G \otimes G \not\simeq G^{ab} \otimes G^{ab}$. $\square$

Agora, suponhamos que $e > 1$ e consideramos $b = z_{(e+1,1)}$. Neste caso, o grupo G tem a seguinte apresentação:

$$\begin{aligned} G = \langle x_a, y_a, z_{(i,k)}| \quad & x_a^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = y_a^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1, [x_a^p, y_a] = [y_a^p, x_a] = 1, \\ & [z_{(i,k)}, x_a] = [z_{(i,k)}, y_a] = [z_{(i,k)}, z_{(i',k')}] = 1, [x_a, y_a] = z_{(e+1,1)}^{p^{e-1}} \rangle, \end{aligned}$$

onde $a = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ e $(i,k), (i',k') \in I$.

Primeiramente, vamos considerar o grupo particular

$$H = \langle x, y, z |\ x^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = y^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = z^{p^e} = 1, [x^p, y] = [y^p, x] = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^{p^{e-1}} \rangle,$$

obtido quando $I = \{(e + 1, 1)\}$.

Diferentemente dos dois teoremas anteriores, o grupo H não é 2-gerado e, consequentemente, não podemos utilizar o Teorema 1.37. Neste caso, seguiremos as ideias de Magidin e Morse em [20]. Ou seja, determinaremos um conjunto gerador independente para $[H, H^{\varphi}]$ e calcularemos a ordem de cada gerador.

Se considerarmos a sequência $G = \langle x, y, z\rangle \geq \langle y, z\rangle \geq \langle z\rangle \geq 1$, vemos que os elementos x, y e z formam um conjunto gerador policíclico de H. Pela Proposição 1.34, $[H, H^{\varphi}]$ é gerado por

$$\begin{gathered}[x, x^{\varphi}], [y, y^{\varphi}], [z, z^{\varphi}], [x, y^{\varphi}], [x, z^{\varphi}], [y, z^{\varphi}],\\ [x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}], [x, z^{\varphi}][z, x^{\varphi}] \text{ e } [y, z^{\varphi}][z, y^{\varphi}].\end{gathered}$$

Esses geradores são independentes, pois suas imagens em $H^{ab} \otimes H^{ab}$ formam um conjunto gerador independente para $H^{ab} \otimes H^{ab}$, conforme Teorema 1.33.

Com exceção dos geradores $[x, z^{\varphi}]$ e $[y, z^{\varphi}]$, as ordens dos demais geradores são fornecidas pelo

Lema 3.6. *Seja H o grupo como apresentado acima. Então em $\nu(H)$, vale que*

$$\begin{gathered}o([x, x^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{i}}+1},\ o([y, y^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{j}}+1},\ o([z, z^{\varphi}]) = p^{e-1},\ o([x, y^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{i}}+1},\\ o([x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{i}}+1},\ o([x, z^{\varphi}][z, x^{\varphi}]) = p^{\alpha},\ o([y, z^{\varphi}][z, y^{\varphi}]) = p^{\beta},\end{gathered}$$

onde $\alpha = \min\{s_{\bar{i}} + 1, e - 1\}$ and $\beta = \min\{s_{\bar{j}} + 1, e - 1\}$.

Demonstração. Seja $\pi : H \to H^{ab}$ o homomorfismo natural. Denotamos $(x)\pi = \overline{x}$ para todo $x \in H$ e seja $f : [H, H^{\varphi}] \to H^{ab} \otimes H^{ab}$ o epimorfismo induzido por π, isto é, $([x, y^{\varphi}])f = \overline{x} \otimes \overline{y}$ para todo $x, y \in H$. Este epimorfismo f nos permite limitar inferiormente a ordem dos geradores de $[H, H^{\varphi}]$. Mais precisamente, se $[x, y^{\varphi}] \in [H, H^{\varphi}]$, então $o(([x, y^{\varphi}])f) = o(\overline{x} \otimes \overline{y}) = \min\{o(\overline{x}), o(\overline{y})\}$, ou seja, $\min\{o(\overline{x}), o(\overline{y})\}$ divide a ordem de $[x, y^{\varphi}]$.

Vamos analisar a ordem de cada gerador.

(Gerador $[x, x^{\varphi}]$): Notamos que $o(\overline{x} \otimes \overline{x}) = p^{s_{\bar{i}}+1}$, então pela observação acima, temos que $p^{s_{\bar{i}}+1}$ divide $o([x, x^{\varphi}])$. Por outro lado, pelo Lema 1.28, $[x, x^{\varphi}]^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = [x^{p^{s_{\bar{i}}+1}}, x^{\varphi}] = 1$ e, portanto, $o([x, x^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{i}}+1}$.

(Geradores $[y, y^{\varphi}]$ e $[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}]$): São análogos.

(Gerador $[x, y^\varphi]$): Notamos que $o(\overline{x} \otimes \overline{y}) = p^{s_{\overline{i}}+1}$, então pela observação acima, temos que $p^{s_{\overline{i}}+1}$ divide $o([x, y^\varphi])$. Por outro lado, pelo Corolário 1.32, $[x, y^\varphi]^{p^{s_{\overline{i}}+1}} = [x^{p^{s_{\overline{i}}+1}}, y^\varphi] = 1$ e, portanto, $o([x, y^\varphi]) = p^{s_{\overline{i}}+1}$.

(Gerador $[z, z^\varphi]$): Pela observação acima, p^{e-1} divide $o([z, z^\varphi])$. Por outro lado, pelo Lema 1.28

$$[z, z^\varphi]^{p^{e-1}} = [z^{p^{e-1}}, z^\varphi] = [[x, y], z^\varphi] = 1,$$

em que a última igualdade segue do Lema 1.29. Logo $o([z, z^\varphi]) = p^{e-1}$.

(Geradores $[x, z^\varphi][z, x^\varphi]$ e $[y, z^\varphi][z, y^\varphi]$): Como $H^{ab} \otimes H^{ab}$ é um grupo abeliano, pela observação acima p^α divide $o([x, z^\varphi][z, x^\varphi])$. Por outro lado, o Lema 1.30 implica que

$$[x^{p^\alpha}, z^\varphi][z, (x^{p^\alpha})^\varphi] = ([x, z^\varphi][z, x^\varphi])^{p^\alpha} = ([x, (z^{p^\alpha})^\varphi][z^{p^\alpha}, x^\varphi]).$$

Portanto, $([x, z^\varphi][z, x^\varphi])^{p^\alpha} = 1$ e, consequentemente, $o([x, z^\varphi][z, x^\varphi]) = p^\alpha$. A análise da ordem do outro gerador é análoga.

Isto completa a demonstração do lema. $\square$

Para os geradores $[x, z^\varphi]$ e $[y, z^\varphi]$ precisaremos do seguinte lema sobre multiplicador de Schur.

Lema 3.7. *Seja H_1 o grupo definido pela apresentação*

$$H_1 = \langle x, y, z |\ x^p = y^{p^e} = z^{p^e} = 1, [x^p, y] = [y^p, x] = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^{p^{e-1}} \rangle.$$

Então, o multiplicador de Schur $M(H_1)$ é isomorfo a $C_p \times C_{p^e}$ e, consequentemente, o elemento $[y, z^\varphi]$ tem ordem p^e em $\nu(H_1)$.

Demonstração. O multiplicador de Schur de H_1 pode ser determinado como sendo o núcleo do homomorfismo derivado $\kappa' : H_1 \wedge H_1 \to H_1$. Pelo Lema 1.34, $H_1 \wedge H_1$ é isomorfo ao subgrupo de $\nu(H_1)$ gerado por $\langle [x, y^\varphi], [x, z^\varphi], [y, z^\varphi] \rangle$. Assim, $\ker(\kappa')$ é isomorfo a $\langle [x, z^\varphi], [y, z^\varphi] \rangle$. Sabemos que $o([x, z^\varphi]) = p$ e a ordem de $[y, z^\varphi]$ é p^{e-1} ou p^e. Para provar que $o([y, z^\varphi]) = p^e$, mostraremos que $M(H_1)$ contem um subgrupo isomorfo a C_{p^e}.

Para isto, consideramos o grupo

$$G = \langle x, y, z |\ x^p = y^{p^e} = z^{p^{2e}} = 1, [x^p, y] = [y^p, x] = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^{p^{e-1}} \rangle.$$

Seja $Z = \langle z^{p^e} \rangle$, um subgrupo central de G. Pelo Lema 1.16, temos que $Z = Z \cap G'$ é isomorfo a um subgrupo de $M(G/Z) \simeq M(H_1)$. Desde que $Z \simeq C_{p^e}$, o resultado segue. $\square$

Com isso, podemos calcular as ordens de $[x, z^\varphi]$ e $[y, z^\varphi]$, que apresentamos abaixo.

Lema 3.8. *Seja H o grupo como no Lema 3.6 acima. Então, em $\nu(H)$ ocorrem:*

(1) Se $\bar{i} < e$*, então* $o([x, z^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{i}}+1}$*. Se* $\bar{j} < e$*, então* $o([y, z^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{j}}+1}$*;*

(2) Se $\bar{i} \leq e$ e $\bar{j} \geq e$*, então* $o([y, z^{\varphi}]) = p^{e}$*;*

(3) Se $\bar{i} = \bar{j} = e$*, então* $o([x, z^{\varphi}]) = p^{e}$*;*

(4) Se $\bar{i} \geq e$*, então* $o([x, z^{\varphi}]) = p^{e}$ *e* $o([y, z^{\varphi}]) = p^{e}$*.*

Demonstração. (1) Se $\bar{i} < e$, então $\min\{o(x), o(z)\} = p^{s_{\bar{i}}+1} = \min\{o(\overline{x}), o(\overline{z})\}$. Portanto, $o([x, z^{\varphi}]) = p^{s_{\bar{i}}+1}$. O outro caso é análogo.

(2) Neste caso,

$$H = \langle x, y, z |\ x^{p^{\bar{i}}} = y^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = z^{p^{e}} = 1, [x^p, y] = [y^p, x] = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^{p^{e-1}} \rangle.$$

Notamos que para $\bar{i} = 1$ e $\bar{j} = e$ temos o grupo H_1 como no Lema 3.7. Agora, é suficiente considerar a função $\theta : \{x, y, z\} \to H_1$ definida por $(x)\theta = x$, $(y)\theta = y$ e $(z)\theta = z$. Esta função pode ser estendida a um homomorfismo Θ de $\nu(H)$ sobre $\nu(H_1)$ tal que $([y, z^{\varphi}])\Theta = [y, z^{\varphi}]$.

(3) Aqui, consideramos o automorfismo $\theta' : H \to H$ tal que $(x)\theta' = y^{-1}$, $(y)\theta' = x$ e $(z)\theta' = z$. Este automorfismo se estende a um automorfismo $\Theta : \nu(H) \to \nu(H)$ tal que $([x, z^{\varphi}])\Theta = [y, z^{\varphi}]^{-1}$ e este elemento tem ordem p^e.

(4) Sabemos que a ordem dos elementos $[x, z^{\varphi}]$ e $[y, z^{\varphi}]$ é p^{e-1} ou p^e. Para mostrar que eles têm ordem exatamente p^e, vamos verificar que esses elementos possuem imagem homomórficas com ordem p^e.

Consideramos o grupo

$$G = \langle a, b, c |\ a^{p^{e}} = b^{p^{e}} = c^{p^{e}} = 1, [a^p, b] = [b^p, a] = 1, [c, a] = [c, b] = 1, [a, b] = c^{p^{e-1}} \rangle.$$

Pelos itens anteriores, temos que $o([a, c^{\varphi}]) = p^e$ e $o([b, c^{\varphi}]) = p^e$.

Seja $\theta : \{x, y, z\} \longrightarrow G$ a função definida por $(x)\theta = a$, $(y)\theta = b$ e $(z)\theta = c$. Então,

$$\begin{aligned}
&(x)\theta^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = a^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = 1, \text{ desde que } \bar{i} \geq e \text{ implica que } s_{\bar{i}} + 1 \geq e \text{ e } a^{p^{e}} = 1;\\
&(y)\theta^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = b^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = 1, \text{ desde que } \bar{j} \geq \bar{i} \geq e \text{ implica que } s_{\bar{j}} + 1 \geq e \text{ e } b^{p^{e}} = 1;\\
&(z)\theta^{p^{e}} = c^{p^{e}} = 1;\\
&[(x)\theta^{p}, (y)\theta] = [a^p, b] = 1;\\
&[(y)\theta^{p}, (x)\theta] = [b^p, a] = 1;\\
&[(z)\theta, (x)\theta] = [c, a] = 1;\\
&[(z)\theta, (y)\theta] = [c, b] = 1;\\
&[(x)\theta, (y)\theta] = [a, b] = c^{p^{e-1}} = [(z)\theta]^{p^{e-1}}.
\end{aligned}$$

Pelo Teste da Substituição, θ se estende a um homomorfismo $\theta' : H \longrightarrow G$ tal que $(x)\theta' = a$, $(y)\theta' = b$ e $(z)\theta' = c$. Agora θ' induz um homomorfismo $\Theta : \nu(H) \longrightarrow \nu(G)$ tal que $(h)\Theta = (h)\theta'$ e $(h^\varphi)\Theta = ((h)\theta')^\varphi$, para todo $h \in H$ e todo $h^\varphi \in H^\varphi$. Assim,

$$([x, z^\varphi])\Theta = [a, c^\varphi]$$

$$([y, z^\varphi])\Theta = [b, c^\varphi]$$

têm ordem p^e, como desejado.

Isto completa a demonstração do lema. □

Assim, para o grupo H considerado, podemos estabelecer $H \otimes H$ conforme a

Proposição 3.9. *Se* $H = \langle x, y, z |\ x^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = y^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = z^{p^e} = 1, [x^p, y] = [y^p, x] = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^{p^{e-1}} \rangle$, *então*

$$H \otimes H \simeq C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \oplus C_{p^{s_{\bar{j}}+1}} \oplus C_{p^{e-1}} \oplus C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \oplus C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \oplus C_{p^\alpha} \oplus C_{p^\beta} \oplus C_{p^\gamma} \oplus C_{p^\delta},$$

onde $\alpha = \min\{s_{\bar{i}} + 1, e - 1\}$, $\beta = \min\{s_{\bar{j}} + 1, e - 1\}$, $\gamma = \begin{cases} s_{\bar{i}} + 1, & \bar{i} < e \\ e, & \bar{i} \geq e \end{cases}$ *e* $\delta = \begin{cases} s_{\bar{j}} + 1, & \bar{j} < e \\ e, & \bar{j} \geq e \end{cases}$. *Os fatores cíclicos invariantes podem ser tomados como sendo o subgrupo gerado por* $[x, x^\varphi]$, $[y, y^\varphi]$, $[z, z^\varphi]$, $[x, y^\varphi]$, $[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$, $[x, z^\varphi][z, x^\varphi]$, $[y, z^\varphi][z, y^\varphi]$, $[x, z^\varphi]$ *e* $[y, z^\varphi]$, *respectivamente.*

Demonstração. Como vimos, estes geradores são independentes pois suas imagens em $H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$ formam um conjunto gerador independente. Além disso, as ordens destes geradores são fornecidas pelo Lema 3.6 e pelo Lema 3.8. □

Observação 3.10. Notamos que para o grupo H da proposição acima pode ocorrer que $H \otimes H \simeq H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$. Por exemplo, seja

$$H = \langle x, y, z | x^p = y^p = z^{p^4} = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^{p^3} \rangle,$$

associado ao conjunto A_8 da Tabela 9 do Apêndice A. Então, pela proposição anterior temos $H \otimes H \simeq C_{p^3} \times C_p^8$. Por outro lado, $H^{ab} \simeq C_{p^3} \times C_p \times C_p$ e, pela Observação 3.4, temos $H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab} \simeq C_{p^3} \times C_p^8$.

Também pode ocorrer que $H \otimes H \not\simeq H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$, como por exemplo para o grupo

$$H = \langle x, y, z | x^p = y^{p^2} = z^{p^2} = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^p \rangle,$$

associado ao conjunto A_{13} da Tabela 7 do Apêndice A. Neste caso, temos $H \otimes H \simeq C_{p^2}^2 \times C_p^7$ e $H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab} \simeq C_{p^2} \times C_p^8$. Isto ocorre devido ao fato de que o gerador $[y, z^\varphi]$ tem ordem p^2 em $H \otimes H$ e ordem p em $H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$.

Por fim, podemos calcular $G \otimes G$ para o caso $|I_A| = 1$ e $b = z_{(e+1,1)}$, com $e > 1$, conforme o

Teorema 3.11. *Seja $G \in \mathscr{P}$ um p-grupo de ordem p^n, p primo ímpar, com apresentação dada como na Proposição 2.17. Se $|I_A| = 1$, $b = z_{(e+1,1)}$ e $e > 1$, então*

$$\begin{aligned} G \otimes G \simeq & ((C_{p^{s_{\bar{i}}+1}})^3 \oplus C_{p^{s_{\bar{j}}+1}} \oplus C_{p^{e-1}} \oplus C_{p^\alpha} \oplus C_{p^\beta} \oplus C_{p^\gamma} \oplus C_{p^\delta}) \times \\ & \left((C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \oplus C_{p^{s_{\bar{j}}+1}} \oplus C_{p^{e-1}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}} \right)^2 \times \\ & \left(\bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}} \right), \end{aligned}$$

onde $I^* = I \backslash \{(e+1,1)\}$, $I_A = \{a = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})\}$, $\alpha = \min\{s_{\bar{i}}+1, e-1\}$, $\beta = \min\{s_{\bar{j}}+1, e-1\}$, $\gamma = \begin{cases} s_{\bar{i}}+1, & \bar{i} < e \\ e, & \bar{i} \geq e \end{cases}$ e $\delta = \begin{cases} s_{\bar{j}}+1, & \bar{j} < e \\ e, & \bar{j} \geq e \end{cases}$.

Demonstração. Sendo $|I_A| = 1$, vamos denotar $I_A = \{a\}$, com $a = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. Neste caso, o grupo G tem a seguinte apresentação:

$$\begin{aligned} G = \langle x_a, y_a, z_{(i,k)} | \quad & x_a^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = y_a^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1, [x_a^p, y_a] = [y_a^p, x_a] = 1, \\ & [z_{(i,k)}, x_a] = [z_{(i,k)}, y_a] = [z_{(i,k)}, z_{(i',k')}] = 1, [x_a, y_a] = z_{(e+1,1)}^{p^{e-1}} \rangle \end{aligned}$$

Notamos que $G \simeq H \times N$, onde

$$H = \langle x, y, z | \; x^{p^{s_{\bar{i}}+1}} = y^{p^{s_{\bar{j}}+1}} = z^{p^e} = 1, [x^p, y] = [y^p, x] = 1, [z, x] = [z, y] = 1, [x, y] = z^{p^{e-1}} \rangle$$
$$N = \langle z_{(i,k)} | \; z_{(i,k)}^{p^{s_i}} = 1, [z_{(i,k)}, z_{(i',k')}] = 1 \rangle, \text{ onde } (i,k), (i',k') \in I^*.$$

Desde que $N \leqslant Z(G)$, então H é N-trivial e N é H-trivial. Assim, a Proposição 1.23 pode ser aplicada e obtemos

$$G \otimes G \simeq (H \otimes H) \times (H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} N) \times (N \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}) \times (N \otimes_{\mathbb{Z}} N).$$

Agora, $H^{ab} \simeq C_{p^{s_i+1}} \oplus C_{p^{s_j+1}} \oplus C_{p^{e-1}}$ e $N \simeq \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}}$. Logo

$$H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} N \simeq (C_{p^{s_{\bar{i}}+1}} \oplus C_{p^{s_{\bar{j}}+1}} \oplus C_{p^{e-1}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}}$$
$$N \otimes N \simeq \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,k) \in I^*} C_{p^{s_i}}$$

e $N \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab} \simeq H^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

Pela Proposição 3.9, conhecemos $H \otimes H$ e, portanto, o resultado segue. □

Portanto os resultados desta seção nos fornecem o quadrado tensorial não-abeliano para todo $G \in \mathscr{P}$, quando $p > 2$.

3.2 Os Grupos $G \wedge G$, $M(G)$, $\Gamma(G^{ab})$ e $J_2(G)$

Nesta seção, calcularemos os grupos $G \wedge G$, $M(G)$, $\Gamma(G^{ab})$ e $J_2(G)$ do Diagrama 1 da página 23, onde $G \in \mathscr{P}$ e p é um primo ímpar. Para isso, trataremos separadamente os casos em que $|I_A| \geq 2$ e $|I_A| = 1$.

3.2.1 O caso $|I_A| \geq 2$

Seja $G \in \mathscr{P}$ um grupo com apresentação como na Proposição 2.17. Suponhamos que $|I_A| \geq 2$. Podemos verificar que o conjunto X é um conjunto gerador policíclico para G. Se equiparmos os conjuntos I_A e I com a ordem lexicográfica, então X tem uma ordem natural e pelo Lema 1.34 o grupo $[G, G^{\varphi}]$ é gerado pelos elementos

$$[x_a, x_a^{\varphi}], \qquad a \in I_A \tag{3.1}$$
$$[y_a, y_a^{\varphi}], \qquad a \in I_A \tag{3.2}$$
$$[z_{(i,k)}, z_{(i,k)}^{\varphi}], \qquad (i,k) \in I \tag{3.3}$$
$$[x_a, x_{a'}^{\varphi}], \qquad a, a' \in I_A, a < a' \tag{3.4}$$
$$[x_a, y_{a'}^{\varphi}], \qquad a, a' \in I_A \tag{3.5}$$
$$[x_a, z_{(i',k')}^{\varphi}], \qquad a \in I_A, (i',k') \in I \tag{3.6}$$
$$[y_a, y_{a'}^{\varphi}], \qquad a, a' \in I_A, a < a' \tag{3.7}$$
$$[y_a, z_{(i',k')}^{\varphi}], \qquad a \in I_A, (i',k') \in I \tag{3.8}$$
$$[z_{(i,k)}, z_{(i',k')}^{\varphi}], \qquad (i,k), (i',k') \in I, (i,k) < (i',k') \tag{3.9}$$
$$[x_a, x_{a'}^{\varphi}][x_{a'}, x_a^{\varphi}], \qquad a, a' \in I_A, a < a' \tag{3.10}$$
$$[x_a, y_{a'}^{\varphi}][y_{a'}, x_a^{\varphi}] \qquad a, a' \in I_A \tag{3.11}$$
$$[x_a, z_{(i',k')}^{\varphi}][z_{(i',k')}, x_a^{\varphi}], \qquad a \in I_A, (i',k') \in I \tag{3.12}$$
$$[y_a, y_{a'}^{\varphi}][y_{a'}, y_a^{\varphi}], \qquad a, a' \in I_A, a < a' \tag{3.13}$$
$$[y_a, z_{(i',k')}^{\varphi}][z_{(i',k')}, y_a^{\varphi}], \qquad a \in I_A, (i',k') \in I \tag{3.14}$$
$$[z_{(i,k)}, z_{(i',k')}^{\varphi}][z_{(i',k')}, z_{(i,k)}^{\varphi}], \qquad (i,k), (i',k') \in I, (i,k) < (i',k') \tag{3.15}$$

Pelo Teorema 3.2, temos que $G \otimes G \simeq G^{ab} \otimes G^{ab}$. Além disso, o Teorema 1.33 nos diz que um conjunto de geradores independentes de $G^{ab} \otimes G^{ab}$ é obtido pelas imagens dos geradores (3.1)–(3.15) acima, pelo homomorfismo $f : G \otimes G \to G^{ab} \otimes G^{ab}$ que é induzido pelo epimorfismo natural $\pi : G \to G^{ab}$. Portanto, f é um isomorfismo e, assim, as ordens dos geradores de $[G, G^{\varphi}]$ são iguais às ordens dos respectivos geradores de $G^{ab} \otimes G^{ab}$ obtidos pela imagem de f.

A tabela abaixo fornece as ordens dos geradores (3.1) –(3.15) de $[G, G^{\varphi}]$ de acordo com cada possibilidade para o elemento b na apresentação de G como na Proposição 2.17. Primeiramente, algumas notações:

$$\omega_1(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = (e+1, \bar{j}, 1) \\ 0, & \text{se } a \neq (e+1, \bar{j}, 1) \end{cases}, \quad \omega_2(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = (\bar{j}, e+1, 1) \\ 0, & \text{se } a \neq (\bar{j}, e+1, 1) \end{cases},$$

$$\omega_3(i,k) = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,k) = (e+1, 1) \\ 0, & \text{se } (i,k) \neq (e+1, 1) \end{cases}.$$

A seguir, exibimos uma tabela contendo a ordem de cada um dos geradores de $[G, G^\varphi]$.

gerador	$b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)}$	$b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)}$	$b = z_{(e+1,1)}$ e $e > 1$
(3.1)	$p^{s_i+1-\omega_1(a)}$	p^{s_i+1}	p^{s_i+1}
(3.2)	p^{s_j+1}	$p^{s_j+1-\omega_2(a)}$	p^{s_j+1}
(3.3)	p^{s_i}	p^{s_i}	$p^{s_i-\omega_3(i,k)}$
(3.4)	$p^{s_i+1-\omega_1(a)}$	p^{s_i+1}	p^{s_i+1}
(3.5)	p^α	p^α	p^α
(3.6)	p^β	p^β	p^β
(3.7)	p^γ	p^γ	p^γ
(3.8)	p^ε	p^ε	p^ε
(3.9)	p^{s_i}	p^{s_i}	$p^{s_i-\omega_3(i,k)}$
(3.10)	$p^{s_i+1-\omega_1(a)}$	p^{s_i+1}	p^{s_i+1}
(3.11)	p^α	p^α	p^α
(3.12)	p^β	p^β	p^β
(3.13)	p^γ	p^γ	p^γ
(3.14)	p^ε	p^ε	p^ε
(3.15)	p^{s_i}	p^{s_i}	$p^{s_i-\omega_3(i,k)}$

Tabela 1 – Ordem dos geradores de $[G, G^\varphi]$, com $|I_A| \geq 2$

onde os expoentes α, β, γ e ε são dados por:

$$\alpha(a, a') = \begin{cases} \min\{s_i - \omega_1(a), s_{j'}\} + 1, & \text{se } b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)} \\ \min\{s_i, s_{j'} - \omega_2(a')\} + 1, & \text{se } b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)} \\ \min\{s_i, s_{j'}\} + 1, & \text{se } b = z_{(e+1,1)} \text{ e } e > 1 \end{cases}$$

$$\beta(a, (i', k')) = \begin{cases} \min\{s_i + 1 - \omega_1(a), s_{i'}\}, & \text{se } b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)} \\ \min\{s_i + 1, s_{i'}\}, & \text{se } b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)} \\ \min\{s_i + 1, s_{i'} - \omega_3(i', k')\}, & \text{se } b = z_{(e+1,1)} \text{ e } e > 1; \end{cases}$$

$$\gamma(a,a') = \begin{cases} \min\{s_j, s_{j'}\} + 1, & \text{se } b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)} \\ \min\{s_j - \omega_2(a), s_{j'} - \omega_2(a')\} + 1, & \text{se } b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)} \\ \min\{s_j, s_{j'}\} + 1, & \text{se } b = z_{(e+1,1)} \text{ e } e > 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon(a,(i',k')) = \begin{cases} \min\{s_j + 1, s_{i'}\}, & \text{se } b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)} \\ \min\{s_j + 1 - \omega_2(a), s_{i'}\}, & \text{se } b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)} \\ \min\{s_j + 1, s_{i'} - \omega_3(i',k')\}, & \text{se } b = z_{(e+1,1)} \text{ e } e > 1 \end{cases}$$

No caso em que $b = z_{(2,1)}$, podemos aplicar o Lema 1.29 para eliminar os geradores de $[G, G^\varphi]$ da forma $[w, z^\varphi_{(2,1)}]$, para todo $w \in X$. As ordens dos geradores restantes são as mesmas que aquelas obtida no caso $b = z_{(e+1,1)}$ e $e > 1$.

Agora, pela Proposição 1.34 e pelo Teorema 1.33 temos que $G \wedge G$ é isomorfo ao grupo gerado pelos geradores (3.4) – (3.9) e o grupo $\Gamma(G^{ab})$ é isomorfo ao grupo gerado pelos geradores restantes.

Se determinarmos o multiplicador de Schur $M(G)$, então pelo Teorema 1.33 o grupo $J_2(G)$ é isomorfo a $M(G) \times \Gamma(G^{ab})$. Mas o multiplicador de Schur pode ser determinado calculando o núcleo de κ', onde $\kappa' : G \wedge G \to G'$ é aplicação derivada.

Seja $[G, G^\varphi]_{\tau(G)}$ o grupo gerado pelos elementos (3.4) – (3.9), que é isomorfo a $G \wedge G$. É fácil verificar que quase todos os geradores deste grupo estão em $\ker(\kappa')$, exceto os geradores da forma $[x_a, y^\varphi_a]$, para todo $a \in I_A$. Observamos que $([x_a, y^\varphi_a])\kappa' = b^{p^{e-1}}$ e, portanto, os elementos da forma $[x_a, y^\varphi_a]^p$ e $[x_a, y^\varphi_a][x_{a'}, y^\varphi_{a'}]^{-1}$ pertencem a $\ker(\kappa')$, para todo $a, a' \in I_A$. Consideremos o subgrupo L de $\ker(k')$ gerado pelos mesmos geradores de $[G, G^\varphi]_{\tau(G)}$, exceto pelos geradores da forma $[x_a, y^\varphi_a]$, para todo $a \in I_A$, os quais são substituídos pelos elementos $[x_{\bar{a}}, y^\varphi_{\bar{a}}]^p$ e $[x_{\bar{a}}, y^\varphi_{\bar{a}}][x_a, y^\varphi_a]^{-1}$, para todo $a \in I_A$ e $\bar{a} < a$, onde $\bar{a}$ denota o menor elemento de I_A, na ordem lexicográfica. Afirmamos que o subgrupo L é igual ao grupo $\ker(k')$. Com efeito, como $\ker(k') \simeq M(G)$ é abeliano, então $o([x_{\bar{a}}, y^\varphi_{\bar{a}}][x_a, y^\varphi_a]^{-1}) = o([x_a, y^\varphi_a])$, para todo $a \in I_A$ e $\bar{a} < a$. Além disso, se $o([x_{\bar{a}}, y^\varphi_{\bar{a}}]) = p^t$, então $o([x_{\bar{a}}, y^\varphi_{\bar{a}}]^p) = p^{t-1}$. Logo, se $|G \wedge G| = p^r$, então o sugrupo L tem ordem p^{r-1}. Desde que $|G \wedge G| = |M(G)||G'|$ e $|G'| = p$, então $|M(G)| = p^{r-1}$ e, consequentemente, $|\ker(k')| = p^{r-1}$. Portanto, $L = \ker(k')$, como desejado.

Portanto, $\ker(\kappa')$ é gerado pelos mesmos geradores de $[G, G^\varphi]_{\tau(G)}$, exceto pelos geradores da forma $[x_a, y^\varphi_a]$, para todo $a \in I_A$. Estes geradores são substituídos pelos elementos $[x_{\bar{a}}, y^\varphi_{\bar{a}}]^p$ e $[x_{\bar{a}}, y^\varphi_{\bar{a}}][x_a, y^\varphi_a]^{-1}$, para todo $a \in I_A$ e $\bar{a} < a$. Isto determina $M(G)$ e, consequentemente, $J_2(G)$.

Exemplo 3.12. Consideramos o grupo

$$G = \langle x_1, x_2, y_1, y_2, z \mid \quad x_1^p = x_2^p = y_1^p = y_2^{p^2} = z^p = 1, [y_2^p, w] = [z, w] = [x_1, y_2] = [x_2, y_1] = 1, [x_1, y_1] = [x_2, y_2] = z\rangle,$$

onde w percorre todos os geradores. Fazendo $x_1 = x_{(1,1,1)}$, $x_2 = x_{(1,3,1)}$, $y_1 = y_{(1,1,1)}$, $y_2 = y_{(1,3,1)}$ e $z = z_{(2,1)}$, vemos que $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^6$, o qual está associado ao conjunto A_6, conforme a Tabela 9 no Apêndice A. Esta apresentação é dada como na Proposição 2.17, com $b = z_{(2,1)}$. No Apêndice A, podemos ver que G é do tipo (e, ρ, A), onde $e = 1$, $\rho = (1,1)$ e $A = A_6$. Para calcular a ordem de cada gerador de $[G, G^{\varphi}]$ podemos utilizar a terceira coluna da Tabela 1, com $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ e $s_3 = 1$.

Abaixo, listamos a ordem de cada gerador de $[G, G^{\varphi}]$

$o([x_1, x_1^{\varphi}]) = p$
$o([x_2, x_2^{\varphi}]) = p$
$o([y_1, y_1^{\varphi}]) = p$
$o([y_2, y_2^{\varphi}]) = p^2$
$o([z, z^{\varphi}]) = 1$
$o([x_1, x_2^{\varphi}]) = p$
$o([x_1, y_1^{\varphi}]) = p$
$o([x_1, y_2^{\varphi}]) = p$
$o([x_2, y_1^{\varphi}]) = p$
$o([x_2, y_2^{\varphi}]) = p$
$o([x_1, z^{\varphi}]) = 1$
$o([x_2, z^{\varphi}]) = 1$
$o([y_1, y_2^{\varphi}]) = p$
$o([y_1, z^{\varphi}]) = 1$
$o([y_2, z^{\varphi}]) = 1$
$o([x_1, x_2^{\varphi}][x_2, x_1^{\varphi}]) = p$
$o([x_1, y_1^{\varphi}][y_1, x_1^{\varphi}]) = p$
$o([x_1, y_2^{\varphi}][y_2, x_1^{\varphi}]) = p$
$o([x_2, y_1^{\varphi}][y_1, x_2^{\varphi}]) = p$
$o([x_2, y_2^{\varphi}][y_2, x_2^{\varphi}]) = p$
$o([x_1, z^{\varphi}][z, x_1^{\varphi}]) = 1$
$o([x_2, z^{\varphi}][z, x_2^{\varphi}]) = 1$
$o([y_1, y_2^{\varphi}][y_2, y_1^{\varphi}]) = p$
$o([y_1, z^{\varphi}][z, y_1^{\varphi}]) = 1$
$o([y_2, z^{\varphi}][z, y_2^{\varphi}]) = 1$

Vejamos o cálculo da ordem de alguns geradores. Por exemplo, o gerador $[x_1, x_1^{\varphi}]$ é do tipo (3.1) e, então, $o([x_1, x_1\varphi]) = p^{s_1+1} = p$. O gerador $[y_2, y_2^{\varphi}]$ é do tipo (3.2) e, então, $o([y_2, y_2^{\varphi}]) = p^{s_3+1} = p^2$. O gerador $[z, z^{\varphi}]$ é do tipo (3.3) e, então, $o([z, z^{\varphi}]) = p^{s_2 - \omega_3(2,1)} = p^{1-1} = 1$. O gerador $[y_2, z^{\varphi}]$ é do tipo (3.8) e, assim, $o([y_2, z^{\varphi}]) = p^{\varepsilon}$, onde $\varepsilon = \varepsilon((1,3,1),(2,1)) = \min\{s_3 + 1, s_2 - \omega_3(2,1)\} = \min\{2, 0\} = 0$. Logo, $o([y_2, z^{\varphi}]) = p^0 = 1$.

Agora, desconsiderando os geradores triviais, obtemos

$$G \wedge G \simeq C_p^6, \ \Gamma(G^{ab}) \simeq C_{p^2} \times C_p^9, \ G \otimes G \simeq C_{p^2} \otimes C_p^{15}$$
$$M(G) \simeq C_p^5, \ J_2(G) \simeq C_{p^2} \times C_p^{14}.$$

3.2.2 O caso $|I_A| = 1$

Seja $G \in \mathscr{P}$ um grupo com apresentação como na Proposição 2.17. Suponhamos que $|I_A| = 1$. Podemos escrever $I_A = \{a\}$, onde $a = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. É possível verificar que o conjunto X é um conjunto gerador policíclico para G. Se equiparmos o conjunto I com a ordem lexicográfica, então X tem uma relação de ordem natural e, pela Proposição 1.34, o grupo $[G, G^{\varphi}]$ é gerado pelos seguintes elementos:

$$[x_a, x_a^{\varphi}], \tag{3.16}$$
$$[y_a, y_a^{\varphi}], \tag{3.17}$$
$$[z_{(i,k)}, z_{(i,k)}^{\varphi}], \qquad (i,k) \in I \tag{3.18}$$
$$[x_a, y_a^{\varphi}], \tag{3.19}$$
$$[x_a, z_{(i',k')}^{\varphi}], \qquad (i',k') \in I \tag{3.20}$$
$$[y_a, z_{(i',k')}^{\varphi}], \qquad (i',k') \in I \tag{3.21}$$
$$[z_{(i,k)}, z_{(i',k')}^{\varphi}], \qquad (i,k),(i',k') \in I, (i,k) < (i',k') \tag{3.22}$$
$$[x_a, y_a^{\varphi}][y_a, x_a^{\varphi}] \tag{3.23}$$
$$[x_a, z_{(i',k')}^{\varphi}][z_{(i',k')}, x_a^{\varphi}], \qquad (i',k') \in I \tag{3.24}$$
$$[y_a, z_{(i',k')}^{\varphi}][z_{(i',k')}, y_a^{\varphi}], \qquad (i',k') \in I \tag{3.25}$$
$$[z_{(i,k)}, z_{(i',k')}^{\varphi}][z_{(i',k')}, z_{(i,k)}^{\varphi}], \qquad (i,k),(i',k') \in I, (i,k) < (i',k'). \tag{3.26}$$

Denotando $\omega(e+1,1) = 1$ e $\omega(i,k) = 0$ se $(i,k) \neq (e+1,1)$, a ordem de cada um desses elementos é mostrada na tabela abaixo.

gerador	$b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)}$	$b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)}$	$b = z_{(e+1,1)}$ e $e > 1$
(3.16)	p^e	$p^{s_{\bar{j}}+1}$	$p^{s_{\bar{i}}+1}$
(3.17)	$p^{s_{\bar{j}}+1}$	p^e	$p^{s_{\bar{j}}+1}$
(3.18)	p^{s_i}	p^{s_i}	$p^{s_{\bar{i}}-\omega(i,k)}$
(3.19)	p^{e+1}	$p^{s_{\bar{j}}+1}$	$p^{s_{\bar{i}}+1}$
(3.20)	p^{α}	p^{α}	p^{γ}
(3.21)	p^{β}	p^{β}	p^{δ}
(3.22)	p^{s_i}	p^{s_i}	$p^{s_{\bar{i}}-\omega(i,k)}$
(3.23)	p^e	$p^{s_{\bar{j}}+1}$	$p^{s_{\bar{i}}+1}$
(3.24)	p^{α}	p^{α}	p^{α}
(3.25)	p^{β}	p^{β}	p^{β}
(3.26)	p^{s_i}	p^{s_i}	$p^{s_{\bar{i}}-\omega(i,k)}$

Tabela 2 – Ordem dos geradores de $[G, G^{\varphi}]$, com $|I_A| = 1$

onde,

$$\alpha((i',k')) = \begin{cases} \min\{e, s_{i'}\}, & \text{se } b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)} \\ \min\{\bar{j}, s_{i'}\}, & \text{se } b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)} \\ \min\{s_{\bar{i}}+1, s_{i'} - \omega(i',k')\}, & \text{se } b = z_{(e+1,1)} \end{cases}$$

$$\beta((i',k')) = \begin{cases} \min\{\bar{j}-1, s_{i'}\}, & \text{se } b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)} \\ \min\{e, s_{i'}\}, & \text{se } b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)} \\ \min\{s_{\bar{j}}+1, s_{i'} - \omega(i',k')\}, & \text{se } b = z_{(e+1,1)} \end{cases}$$

$$\gamma((i',k')) = \min\{s_{\bar{i}}+1, s_{i'}\},\ (i',k') \neq (e+1,1) \ \text{ e } \ \gamma((e+1,1)) = \begin{cases} s_{\bar{i}}+1, & \bar{i} < e \\ e, & \bar{i} \geq e \end{cases}$$

$$\delta((i',k')) = \min\{s_{\bar{j}}+1, s_{i'}\},\ (i',k') \neq (e+1,1) \ \text{ e } \ \delta((e+1,1)) = \begin{cases} s_{\bar{j}}+1, & \bar{j} < e \\ e, & \bar{j} \geq e \end{cases}$$

Notamos que se $b = z_{(e+1,1)}$ e $e = 1$, então ao calcularmos as ordens dos geradores na terceira coluna da tabela acima, alguns desses elementos são triviais. Neste caso, eliminando os geradores triviais obtemos um conjunto gerador independente de $[G, G^{\varphi}]$ e as ordens destes geradores são obtidas na terceira coluna da tabela acima.

Agora, pela Proposição 1.34 e pelo Teorema 1.33 temos que $G \wedge G$ é isomorfo ao subgrupo gerado pelos elementos (3.19) – (3.22) e o grupo $\Gamma(G^{ab})$ é isomorfo ao subgrupo gerado pelos demais elementos.

Como antes, se pudermos determinar o multiplicador de Schur $M(G)$ como o núcleo da aplicação derivada $\kappa' : G \wedge G \to G'$, então pelo Teorema 1.33 o grupo $J_2(G) \simeq M(G) \times \Gamma(G^{ab})$ também pode ser determinado.

É fácil verificar que $[x_a, y_a^{\varphi}]^p$ junto com os geradores (3.20) – (3.22) estão em $\ker(\kappa')$. Além disso, esses elementos formam um conjunto gerador independente para $\ker(\kappa')$. Isto determina $M(G)$ e, consequentemente, $J_2(G)$. Abaixo exibimos o multiplicador de Schur em cada caso.

$$M(G) \simeq C_{p^e} \oplus \bigoplus_{(i',k')\in I} C_{p^\alpha} \oplus \bigoplus_{(i',k')\in I} C_{p^\beta} \oplus \bigoplus_{(i,j)<(i',k')\in I} C_{p^{s_i}},\ \text{se } b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)} \tag{3.27}$$

$$M(G) \simeq C_{p^{s_{\bar{j}}}} \oplus \bigoplus_{(i',k')\in I} C_{p^\alpha} \oplus \bigoplus_{(i',k')\in I} C_{p^\beta} \oplus \bigoplus_{(i,k)<(i',k')\in I} C_{p^{s_i}},\ \text{se } b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)} \tag{3.28}$$

$$M(G) \simeq C_{p^{s_{\bar{i}}}} \oplus \bigoplus_{(i',k')\in I} C_{p^\gamma} \oplus \bigoplus_{(i',k')\in I} C_{p^\delta} \oplus \bigoplus_{(i,k)<(i',k')\in I} C_{p^{s_i - \omega(i,k)}},\ \text{se } b = z_{(e+1,1)} \tag{3.29}$$

onde α, β, γ e δ dependem de (i',k') e são dados como acima.

Exemplo 3.13. Consideramos o grupo

$$G = \langle x, y, z_1, z_2 |\ x^p = y^{p^2} = z_1^p = z_2^p = 1, [y^p, w] = [z_1, w] = [z_2, w] = 1, [x, y] = z_1 \rangle,$$

onde w percorre todos os geradores. Fazendo $x = x_{(1,3,1)}$, $y = y_{(1,3,1)}$, $z_1 = z_{(2,1)}$ e $z_2 = z_{(3,1)}$, vemos que $G \in \mathscr{P}$ tem ordem p^5 e corresponde ao grupo associado ao conjunto A_5, conforme a Tabela 7. Alguns parâmetros importantes deste grupo são $b = z_{(2,1)}$ e $e = 1$. Com isso, $s_1 = 0, s_2 = 1$ e $s_3 = 1$. Os geradores de $[G, G^\varphi]$ são

$[x, x^\varphi]$	$[x, y^\varphi]$	$[y, z_2^\varphi]$	$[x, z_2^\varphi][z_2, x^\varphi]$
$[y, y^\varphi]$	$[x, z_1^\varphi]$	$[z_1, z_2^\varphi]$	$[y, z_1^\varphi][z_1, y^\varphi]$
$[z_1, z_1^\varphi]$	$[x, z_2^\varphi]$	$[x, y^\varphi][y, x^\varphi]$	$[y, z_2^\varphi][z_2, y^\varphi]$
$[z_2, z_2^\varphi]$	$[y, z_1^\varphi]$	$[x, z_1^\varphi][z_1, x^\varphi]$	$[z_1, z_2^\varphi][z_2, z_1^\varphi]$

Agora, podemos utilizar a terceira coluna da Tabela 2 para determinar a ordem deste geradores. Por exemplo, a ordem do elemento $[y, y^\varphi]$ é dada por $p^{s_3+1} = p^2$. A ordem do elemento $[z_1, z_2^\varphi]$ é dada por $p^{s_2-\omega(2,1)} = p^0 = 1$. Logo, este gerador é trivial e, assim, podemos eliminá-lo. O mesmo ocorre com os geradores $[z_1, z_1^\varphi]$, $[x, z_1^\varphi][z_1, x^\varphi]$, $[y, z_1^\varphi][z_1, y^\varphi]$ e $[z_1, z_2^\varphi][z_2, z_1^\varphi]$. Prosseguindo os cálculos, obtemos

$o([x, x^\varphi]) = p$	$o([x, y^\varphi]) = p$	$o([y, z_2^\varphi]) = p$	$o([x, z_2^\varphi][z_2, x^\varphi]) = p$
$o([y, y^\varphi]) = p^2$	$o([x, z_1^\varphi]) = p$	$o([z_1, z_2^\varphi]) = 1$	$o([y, z_1^\varphi][z_1, y^\varphi]) = 1$
$o([z_1, z_1^\varphi]) = 1$	$o([x, z_2^\varphi]) = p$	$o([x, y^\varphi][y, x^\varphi]) = p$	$o([y, z_2^\varphi][z_2, y^\varphi]) = p$
$o([z_2, z_2^\varphi]) = p$	$o([y, z_1^\varphi]) = p$	$o([x, z_1^\varphi][z_1, x^\varphi]) = 1$	$o([z_1, z_2^\varphi][z_2, z_1^\varphi]) = 1$

Conhecidas as ordens e desconsiderando os geradores triviais, vem que

$$G \wedge G \simeq C_p^5, \ \Gamma(G^{ab}) \simeq C_{p^2} \times C_p^5, \ G \otimes G \simeq C_{p^2} \times C_p^{10},$$

$$M(G) \simeq C_p^4 \text{ e } J_2(G) \simeq C_{p^2} \times C_p^9.$$

Encerramos esta seção caracterizando quando o multiplicador de Schur de $G \in \mathscr{P}$ é trivial em termos da apresentação.

Proposição 3.14. *Seja $G \in \mathscr{P}$ um p-grupo de ordem p^n, p primo ímpar, com apresentação dada como na Proposição 2.17. Então $M(G) = 1$ se, somente se, $|I_A| = 1$, $b = y^p_{(1,e+1,1)}$ e o subconjunto $\{z_{(i,k)};\ (i,k) \in I\}$ de X é vazio.*

Demonstração. Se $|I_A| = 1$, $b = y^p_{(1,e+1,1)}$ e o subconjunto $\{z_{(i,k)};\ (i,k) \in I\}$ de X é vazio, então podemos aplicar (3.28) e obter $M(G) = 1$. Por outro lado, mostraremos que o multiplicador de Schur é não trivial nos demais casos. Se $|I_A| \geq 2$, então é fácil ver que $d(G) \geq 4$ e, pelo Lema 1.17, temos que $M(G) \neq 1$. Suponhamos que $|I_A| = 1$. Se $b = x^p_{(e+1,\bar{j},1)}$, então por (3.27) vemos que $M(G)$ possui um fator isomórfico a C_{p^e} e, assim, $M(G) \neq 1$. Analogamente para o caso $b = y^p_{(\bar{j},e+1,1)}$ e $\bar{j} > 1$. Para os casos restantes, ou seja, se $b = y^p_{(1,e+1,1)}$ e $\{z_{(i,k)};\ (i,k) \in I\}$ não vazio ou $b = z_{(e+1,1)}$, observamos que o gerador (3.20) é não trivial e, assim, $M(G) \neq 1$. □

3.3 Os p-grupos Extraespeciais

Nesta seção, nós aplicaremos nossos resultados para fornecer uma prova alternativa dos resultados de Jafari et al [16] e de Beyl-Tappe [5] sobre o quadrado tensorial não-abeliano e o multiplicador de Schur de um p-grupo extraespecial.

Um p-grupo finito G é chamado *extraespecial* se G' e $Z(G)$ coincidem e têm ordem p. Em [24, Seção 5.3] podemos encontrar os seguintes resultados:

1. Um p-grupo extraespecial é um produto central de m subgrupos não-abelianos de ordem p^3 e, consequentemente, tem ordem p^{2m+1};

2. Seja G um p-grupo extraespecial de ordem p^{2m+1}. Se p é ímpar, então G é um produto central de m cópias de grupos não-abelianos de ordem p^3 e expoente p ou G é um produto central de $(m-1)$ cópias de grupos não-abelianos de odem p^3 e expoente p e um único grupo não-abeliano de ordem p^3 e expoente p^2.

Portanto, existem apenas dois p-grupos extraespeciais não isomorfos de ordem p^{2m+1}. Abaixo iremos exibir uma apresentação de cada um deles dada como na Proposição 2.17.

Seja G um p-grupo extraespecial de ordem p^{2m+1}, com p ímpar. Desde que $G' \simeq C_p$, então $G \in \mathscr{P}$ e podemos exibir uma apresentação de G como na Proposição 2.17. Abaixo exibimos as possibilidades para as triplas (ρ, e, A), de acordo com a ordem de G.

Desde que $Z(G) \simeq C_p$, então $c = 1$ e, consequentemente, a única possibilidade é $\rho = (1)$ e $e = 1$. Agora, o conjunto $A = \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{33}\}$ deve satisfazer as seguintes condições:

- $\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{33} = m$;
- $\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{22} + \alpha_{23} \leq 1$;
- $\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} + \alpha_{33} \leq 0$.

Estas condições implicam que $\alpha_{13} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$, $\alpha_{12} \leq 1$ e $\alpha_{11} + \alpha_{12} = m$. Logo, as únicas possibilidades para o conjunto A são

$$A = \{\alpha_{11} = m, \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0\}$$
$$A = \{\alpha_{11} = m-1, \alpha_{12} = 1, \alpha_{13} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0\}.$$

Assim $I_A = \{(1,1,k)|\ 1 \leq k \leq m\}$ ou $I_A = \{(1,1,k), (1,2,1)|\ 1 \leq k \leq m-1\}$.

Se $I_A = \{(1,1,k)|\ 1 \leq k \leq m\}$, então G tem a apresentação $G_1 = \langle X|\ R\rangle$, onde $X = \{x_a|\ a \in I_A\} \cup \{y_a|\ a \in I_A\} \cup \{z_{(2,1)}\}$ e as relações R são

$$\begin{array}{ll} x_a^p = 1,\ a \in I_A & [x_a, x_{a'}] = 1,\ a, a' \in I_A \\ y_a^p = 1,\ a \in I_A & [y_a, y_{a'}] = 1,\ a, a' \in I_A \\ z_{(2,1)}^p = 1 & [x_a, y_{a'}] = 1,\ a, a' \in I_A\ a \neq a' \\ [z_{(1,2)}, x] = 1,\ x \in X & [x_a, y_a] = z_{(2,1)}, a \in I_A. \end{array}$$

Se $I_A = \{(1,1,k),(1,2,1)|\ 1 \leq k \leq m-1\}$, então G tem a apresentação $G_2 = \langle X|\ R\rangle$, onde $X = \{x_a|\ a \in I_A\} \cup \{y_a|\ a \in I_A\}$ e as relações R são

$$\begin{array}{ll} x_a^p = 1,\ a \in I_A & [x_a, x_{a'}] = 1,\ a, a' \in I_A \\ y_a^p = 1,\ a \in I_A \backslash \{(1,2,1)\} & [y_a, y_{a'}] = 1,\ a, a' \in I_A \\ y_{(1,2,1)}^{p^2} = 1 & [x_a, y_{a'}] = 1,\ a, a' \in I_A\ a \neq a' \\ [y_{(1,2,1)}^p, x] = 1,\ x \in X & [x_a, y_a] = y_{(1,2,1)}^p, a \in I_A \end{array}$$

Com as apresentações dos p-grupos extraespeciais dadas acima, obtemos os seguintes resultados.

Corolário 3.15. ([16, Corollary 2.4]) *Seja G um p-grupo extraespecial de ordem p^{2m+1}, com p ímpar.*

(i) Se $m = 1$ e $\exp(G) = p$, então $G \otimes G$ é um p-grupo abeliano elementar de posto 6;

(ii) Se $m = 1$ e $\exp(G) = p^2$, então $G \otimes G$ é um p-grupo abeliano elementar de posto 4;

(iii) Se $m > 1$, então $G \otimes G$ é um p-grupo abeliano elementar de posto $4m^2$.

Demonstração. (i) Suponhamos $m = 1$. Se $\exp(G) = p$, então G tem apresentação dada por G_1 acima e podemos aplicar o Teorema 3.5 para obter que $G \otimes G \simeq (C_p)^6$.

(ii) Suponhamos $m = 1$. Se $\exp(G) = p^2$, então G tem apresentação dada por G_2 acima e podemos aplicar o Teorema 3.2 para obter que $G \otimes G \simeq (C_p)^4$, pois $G^{ab} \simeq C_p \times C_p$.

(iii) Agora, suponhamos que $m \geq 2$. Pelo Teorema 3.2, temos que $G \otimes G \simeq G^{ab} \otimes G^{ab}$. Desde que $G^{ab} \simeq (C_p)^{2m}$, em qualquer dos casos G_1 ou G_2 dados acima, segue que $G^{ab} \otimes G^{ab} \simeq (C_p)^{4m^2}$. $\square$

Corolário 3.16. ([19, Theorem 3.3.6]) *Seja G um p-grupo extraespecial de ordem p^{2m+1}, com p ímpar.*

(i) Se $m = 1$ e $\exp(G) = p$, então $M(G) \simeq C_p \times C_p$;

(ii) Se $m = 1$ e $\exp(G) = p^2$, então $M(G) = 1$;

(iii) Se $m > 1$, então $M(G)$ é um p-grupo abeliano elementar de posto $2m^2 - m - 1$.

Demonstração. (i) Suponhamos que $m = 1$. Se $\exp(G) = p$, então G tem apresentação dada por G_1 acima e, portanto, a (3.29) implica que $M(G) \simeq C_p \times C_p$.

(ii) Suponhamos que $m = 1$. Se $\exp(G) = p^2$, então G tem apresentação dada por G_2 acima e, portanto, a (3.28) implica que $M(G) = 1$.

(iii) Para $m \geq 2$, cada gerador de $M(G)$ tem ordem p e, como $M(G)$ é abeliano, então o multiplicador de Schur é um p-grupo abeliano elementar. Para determinar seu posto, faremos uma contagem dos geradores de $M(G)$. Os geradores de $G \wedge G$ são fornecidos por (3.4) – (3.9). Notamos que no caso em que $b = z_{(2,1)}$, então os geradores (3.6), (3.8) e (3.9) são supérfluos. Logo, basta contar o número de geradores dados por (3.4), (3.5) e (3.7). Desde que $|I_A| = m$ em ambas as apresentações acima, obtemos $m(m-1)/2$ geradores dados por (3.4), m^2 geradores dados por (3.5) e $m(m-1)/2$ geradores dados por (3.7). Ou seja, temos $m^2 - 2m$ geradores de $G \wedge G$. Como $M(G)$ é obtido como núcleo do homomorfismo $k' : G \wedge G \to G'$, temos que $M(G)$ perde um gerador quando consideramos os geradores da forma $[x_{\bar{a}}, y_{\bar{a}}^{\varphi}]^p$ e $[x_{\bar{a}}, y_{\bar{a}}^{\varphi}][x_a, y_a^{\varphi}]^{-1}$, para todo $a \in I_A$ e $\bar{a} < a$. Logo, $M(G)$ possui $m^2 - 2m - 1$ geradores, como desejado. $\square$

APÊNDICE A

O conjunto $\mathscr{S}_n$ e as apresentações correspondentes

Neste apêndice iremos construir o conjunto $\mathscr{S}_n$ para $n \in \{3,4,5,6\}$ e forneceremos as apresentaçoes dos grupos correspondentes. Também exibiremos tabelas contendo a descrição de alguns funtores homológicos para cada grupo $G \in \mathscr{P}$ com $|G| = p^n$ e $n \in \{3,4,5,6\}$.

Vale observar que para $p > 2$ o Teorema 1.33 nos diz que $\nabla(G) \simeq \nabla(G/G')$ e $\Gamma(G/G') \simeq \nabla(G/G')$. Portanto, nas tabelas aparecem apenas $\Gamma(G^{ab})$, mas fica implícito que $\nabla(G)$ também está determinado.

As notações aqui utilizadas são as mesmas definidas na Seção 2.3 em que é exibida definição do conjunto $\mathscr{S}_n$ e a classificação dos grupos em $\mathscr{P}$.

A.1 $n = 3$

Para $n = 3$ a única possibilidade para o valor de c é $c = 1$. Consequentemente, a única possibilidade para partição de $c = 1$ é $\rho = (1)$ e, assim, $e = 1$. Agora, os elementos do conjunto $A = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}\}$ devem satisfazer que

- $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} = 1;$
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} \leq 1;$
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} \leq 0.$

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_1 = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = 0\}$$

$$A_2 = \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{1,1} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = 0\}.$$

Portanto, o conjunto $\mathscr{S}_3$ possui apenas dois elementos, a saber,

$$\mathscr{S}_3 = \{((1), 1, A_1), ((1), 1, A_2)\}$$

No que segue exibimos tabelas contendo as apresentações dos grupos $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^3$, e o quadrado tensorial não-abeliano, o quadrado exterior não-abeliano, o multiplicador de Schur e outros funtores homológicos.

Tabela 3 – Apresentação de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^3$

A	X	Relações
A_1	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}$	$x^p_{(1,1,1)}$, $y^p_{(1,1,1)}$, $z^p_{(2,1)}$, $[z_{(2,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_2	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}$	$x^p_{(1,2,1)}$, $y^{p^2}_{(1,2,1)}$, $[y^p_{(1,2,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$

Tabela 4 – Alguns funtores homológicos de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^3$

A	$G \otimes G$	$G \wedge G$	$M(G)$	$\Gamma(G^{ab})$	$J_2(G)$
A_1	C_p^6	C_p^3	C_p^2	C_p^3	C_p^5
A_2	C_p^4	C_p	1	C_p^3	C_p^3

A.2 $n = 4$

Para $n = 4$ a única possibilidade para o valor de c é $c = 2$. Agora, temos duas partições de 2, a saber, $\rho = (1, 1)$ e $\rho = (2)$.

Para $\rho = (1, 1)$ a única possibilidade é $e = 1$. Neste caso, os elementos do conjunto $A = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}\}$ devem satisfazer

- $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \alpha_{1,4} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} = 1;$
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} \leq 1;$
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} \leq 1;$
- $\alpha_{1,4} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,4} \leq 0.$

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_1 = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i, j) \neq (1, 1)\}$$

$$A_2 = \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2)\}$$

$$A_3 = \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,3)\}$$

$$A_4 = \{\alpha_{2,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,3)\}$$

Agora, para $\rho = (2)$, a única possibilidade é $e = 2$. Neste caso, os elementos de A devem satisfazer

- $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \alpha_{1,4} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} = 1$;
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} \leq 0$;
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} \leq 1$;
- $\alpha_{1,4} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,4} \leq 0$.

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_5 = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\}$$

$$A_6 = \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,3)\}$$

Portanto, o conjunto $\mathscr{S}_4$ possui 6 elementos, a saber,

$$\mathscr{S}_4 = \{((1,1),1,A_1),((1,1),1,A_2),((1,1),1,A_3),((1,1),1,A_4),((2),2,A_5),((2),2,A_6)\}.$$

No que segue exibimos tabelas contendo as apresentações dos grupos de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^4$, e o quadrado tensorial não-abeliano, o quadrado exterior não-abeliano, o multiplicador de Schur e outros funtores homológicos.

Tabela 5 – Apresentação de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^4$

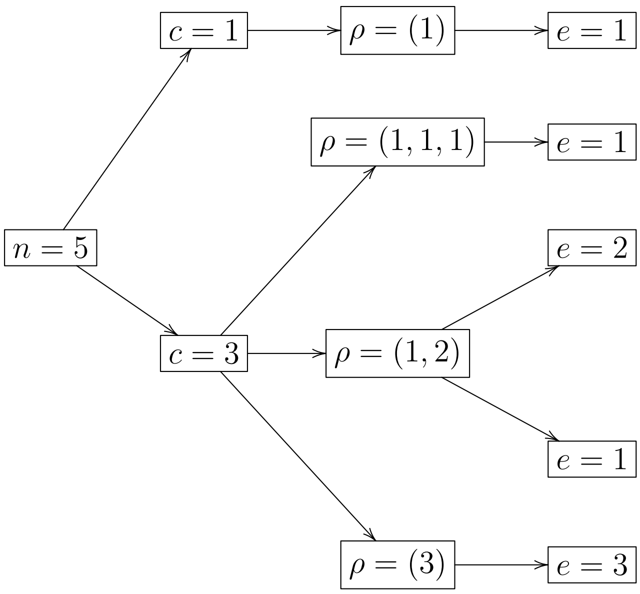
A	X	Relações
A_1	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)}$, $y^p_{(1,1,1)}$, $z^p_{(2,1)}$, $z^p_{(3,1)}$, $[z_{(2,1)}, x]$, $[z_{(3,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_2	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,2,1)}$, $y^{p^2}_{(1,2,1)}$, $z^p_{(3,1)}$, $[y^p_{(1,2,1)}, x]$, $[z_{(3,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$
A_3	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(2,1)}$	$x^p_{(1,3,1)}$, $y^{p^2}_{(1,3,1)}$, $z^p_{(2,1)}$, $[y^p_{(1,3,1)}, x]$, $[z_{(2,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_4	$x_{(2,3,1)}, y_{(2,3,1)}$	$x^{p^2}_{(2,3,1)}$, $y^{p^2}_{(2,3,1)}$, $[y^p_{(2,3,1)}, x]$, $[x_{(2,3,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = x^p_{(2,3,1)}$
A_5	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)}$, $y^p_{(1,1,1)}$, $z^{p^2}_{(3,1)}$, $[z_{(3,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = z^p_{(3,1)}$
A_6	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}$	$x^p_{(1,3,1)}$, $y^{p^3}_{(1,3,1)}$, $[y^p_{(1,3,1)}, x]$, $[x_a, y_a] = y^{p^2}_{(1,3,1)}$

Tabela 6 – Alguns funtores homológicos de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^4$

A	$G \otimes G$	$G \wedge G$	$M(G)$	$\Gamma(G^{ab})$	$J_2(G)$
A_1	C_p^{11}	C_p^5	C_p^4	C_p^6	C_p^{10}
A_2	C_p^9	C_p^3	C_p^2	C_p^6	C_p^8
A_3	$C_{p^2} \times C_p^5$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p^4$
A_4	$C_{p^2}^2 \times C_p^2$	C_{p^2}	C_p	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p^3$
A_5	C_p^9	C_p^3	C_p^2	C_p^6	C_p^8
A_6	$C_{p^2} \times C_p^3$	C_p	1	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p^2$

A.3 $n = 5$

Para $n = 5$, podemos montar o seguinte diagrama de possibilidades para os valores de c, ρ e e.



Em cada um destes casos, nos resta determinar as possibilidades de construir o conjunto A.

Consideramos $c = 1$, $\rho = (1)$ e $e = 1$. Neste caso, o conjunto A é da forma $A = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}\}$ e seus elementos devem satisfazer

- $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} = 2$;
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} \leq 1$;
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} \leq 0$.

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_1 = \{\alpha_{1,1} = 1 = \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3} = \alpha_{2,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = 0\}$$

$$A_2 = \{\alpha_{1,1} = 2, \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,3} = 0\}.$$

Para $c = 3$, o conjunto A é da forma $A = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,5}, \alpha_{5,5}\}$. Vamos determinar as possibilidades de A, conforme abaixo.

Se $\rho = (1, 1, 1)$ e $e = 1$, então os elementos de A devem satisfazer

- $\sum\limits_{(i,j)\in J_4} \alpha_{i,j} = 1$;
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} + \alpha_{2,5} \leq 1$;
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{3,5} \leq 2$;
- $\alpha_{1,4} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,5} \leq 0$;
- $\alpha_{1,5} + \alpha_{2,5} + \alpha_{3,5} + \alpha_{4,5} + \alpha_{5,5} + \alpha_{5,5} \leq 0$.

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_3 = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (1, 1)\}$$
$$A_4 = \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (1, 2)\}$$
$$A_5 = \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (1, 3)\}$$
$$A_6 = \{\alpha_{2,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (2, 3)\}$$
$$A_7 = \{\alpha_{3,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (3, 3)\}$$

Se $\rho = (1, 2)$ e $e = 1$, então os elementos de A devem satisfazer

- $\sum\limits_{(i,j)\in J_4} \alpha_{i,j} = 1$;
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} + \alpha_{2,5} \leq 1$;
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{3,5} \leq 0$;
- $\alpha_{1,4} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,5} \leq 1$;
- $\alpha_{1,5} + \alpha_{2,5} + \alpha_{3,5} + \alpha_{4,5} + \alpha_{5,5} + \alpha_{5,5} \leq 0$.

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_8 = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (1, 1)\}$$
$$A_9 = \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (1, 2)\}$$
$$A_{10} = \{\alpha_{1,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (1, 4)\}$$
$$A_{11} = \{\alpha_{2,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0 |\text{ para todo } (i, j) \neq (2, 4)\}$$

Se $\rho = (1, 2)$ e $e = 2$, então os elementos de A devem satisfazer

- $\sum_{(i,j)\in J_4} \alpha_{i,j} = 1;$
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} + \alpha_{2,5} \leq 1;$
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{3,5} \leq 1;$
- $\alpha_{1,4} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,5} \leq 0;$
- $\alpha_{1,5} + \alpha_{2,5} + \alpha_{3,5} + \alpha_{4,5} + \alpha_{5,5} + \alpha_{5,5} \leq 0.$

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_{12} = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\}$$
$$A_{13} = \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2)\}$$
$$A_{14} = \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (1,3)\}$$
$$A_{15} = \{\alpha_{2,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (2,3)\}$$

Por fim, se $\rho = (3)$ e $e = 3$, então os elementos de A devem satisfazer

- $\sum_{(i,j)\in J_4} \alpha_{i,j} = 1;$
- $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2} + \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4} + \alpha_{2,5} \leq 0;$
- $\alpha_{1,3} + \alpha_{2,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,3} + \alpha_{3,4} + \alpha_{3,5} \leq 0;$
- $\alpha_{1,4} + \alpha_{2,4} + \alpha_{3,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,4} + \alpha_{4,5} \leq 1;$
- $\alpha_{1,5} + \alpha_{2,5} + \alpha_{3,5} + \alpha_{4,5} + \alpha_{5,5} + \alpha_{5,5} \leq 0.$

Disto, as únicas possibilidades para A são

$$A_{16} = \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\}$$
$$A_{17} = \{\alpha_{1,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (1,4)\}$$

Portanto, o conjunto $\mathscr{S}_5$ possui 17 elementos, a saber,

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_5 \;=\; & \{((1),1,A_1),((1),1,A_2),((1,1,1),1,A_3),((1,1,1),1,A_5),((1,1,1),1,A_6), \\ & ((1,1,1),1,A_7),((1,2),1,A_8),((1,2),1,A_9),((1,2),1,A_{10}),((1,2),1,A_{11}), \\ & ((1,2),2,A_{12}),((1,2),2,A_{13}),((1,2),2,A_{14}),((1,2),2,A_{15}),((3),3,A_{16}), \\ & ((3),3,A_{17})\}. \end{aligned}$$

No que segue exibimos tabelas contendo as apresentações dos grupos de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^5$, e o quadrado tensorial não-abeliano, o quadrado exterior não-abeliano, o multiplicador de Schur e outros funtores homológicos.

Tabela 7 – Apresentação de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^5$

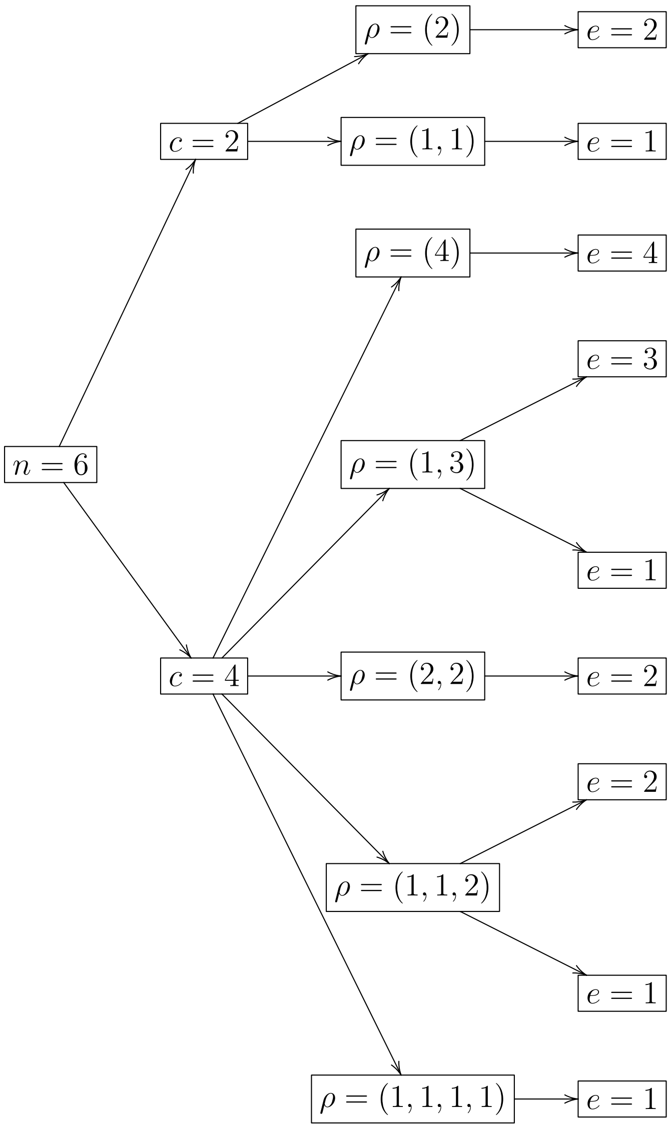
A	X	Relações
A_1	$x_{(1,1,1)}, x_{(1,2,1)}, y_{(1,1,1)}, y_{(1,2,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ x^p_{(1,2,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$
A_2	$x_{(1,1,1)}, x_{(1,1,2)}, y_{(1,1,1)}, y_{(1,1,2)}, z_{(2,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ x^p_{(1,1,2)},\ y^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,2)},\ z^p_{(2,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_3	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}, z_{(3,2)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^p_{(3,1)},\ z^p_{(3,2)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(3,2)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_4	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(3,1)}, z_{(3,2)}$	$x^p_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^p_{(3,1)},\ z^p_{(3,2)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(3,2)}, x],\ [x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$
A_5	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,3,1)},\ y^{p^2}_{(1,3,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^p_{(3,1)},\ [y^p_{(1,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_6	$x_{(2,3,1)}, y_{(2,3,1)}, z_{(3,1)}$	$x^{p^2}_{(2,3,1)},\ y^{p^2}_{(2,3,1)},\ z^p_{(3,1)}\ [x^p_{(2,3,1)}, x],\ [y^p_{(2,3,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = x^p_{(2,3,1)}$
A_7	$x_{(3,3,1)}, y_{(3,3,1)}, z_{(2,1)}$	$x^{p^2}_{(3,3,1)},\ y^{p^2}_{(3,3,1)},\ z^p_{(2,1)},\ [x^p_{(3,3,1)}, x],\ [y^p_{(3,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_8	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(4,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_9	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(4,1)}$	$x^p_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$
A_{10}	$x_{(1,4,1)}, y_{(1,4,1)}, z_{(2,1)}$	$x^p_{(1,4,1)},\ y^{p^3}_{(1,4,1)},\ z^p_{(2,1)},\ [y^p_{(1,4,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{11}	$x_{(2,4,1)}, y_{(2,4,1)}$	$x^{p^2}_{(2,4,1)},\ y^{p^3}_{(2,4,1)},\ [x^p_{(2,4,1)}, x],\ [y^p_{(2,4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = x^p_{(2,4,1)}$
A_{12}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^p_{(3,1)}$
A_{13}	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^p_{(3,1)}$
A_{14}	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(2,1)}$	$x^p_{(1,3,1)},\ y^{p^3}_{(1,3,1)},\ z^p_{(2,1)},\ [y^p_{(1,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^2}_{(1,3,1)}$
A_{15}	$x_{(2,3,1)}, y_{(2,3,1)}$	$x^{p^2}_{(2,3,1)},\ y^{p^3}_{(2,3,1)},\ [x^p_{(2,3,1)}, x],\ [y^p_{(2,3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^2}_{(2,3,1)}$
A_{16}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(4,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ z^{p^3}_{(4,1)},\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p^2}_{(4,1)}$
A_{17}	$x_{(1,4,1)}, y_{(1,4,1)}$	$x^p_{(1,4,1)},\ y^{p^4}_{(1,4,1)},\ [y^p_{(1,4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^3}_{(1,4,1)}$

Tabela 8 – Alguns funtores homológicos de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^5$

A	$G \otimes G$	$G \wedge G$	$M(G)$	$\Gamma(G^{ab})$	$J_2(G)$
A_1	C_p^{16}	C_p^6	C_p^5	C_p^{10}	C_p^{15}
A_2	C_p^{16}	C_p^6	C_p^5	C_p^{10}	C_p^{15}
A_3	C_p^{18}	C_p^8	C_p^7	C_p^{10}	C_p^{17}
A_4	C_p^{16}	C_p^6	C_p^5	C_p^{10}	C_p^{15}
A_5	$C_{p^2} \times C_p^{10}$	C_p^5	C_p^4	$C_{p^2} \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^9$
A_6	$C_{p^2}^2 \times C_p^7$	$C_{p^2} \times C_p^2$	C_p^3	$C_{p^2} \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^8$
A_7	$C_{p^2}^4 \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p^2$	C_p^3	$C_{p^2}^3$	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$
A_8	$C_{p^2} \times C_p^{10}$	C_p^5	C_p^4	$C_{p^2} \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^9$
A_9	$C_{p^2} \times C_p^8$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^2} \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^7$
A_{10}	$C_{p^3} \times C_p^5$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^3} \times C_p^2$	$C_{p^3} \times C_p^4$
A_{11}	$C_{p^3} \times C_{p^2} \times C_p^2$	C_{p^2}	C_p	$C_{p^3} \times C_p^2$	$C_{p^3} \times C_p^3$
A_{12}	C_p^{16}	C_p^6	C_p^5	C_p^{10}	C_p^{15}
A_{13}	$C_{p^2}^2 \times C_p^7$	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p$	$C_{p^2} \times C_p^5$	$C_{p^2}^2 \times C_p^6$
A_{14}	$C_{p^2} \times C_p^8$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^2} \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^7$
A_{15}	$C_{p^2}^4$	C_{p^2}	C_p	$C_{p^2}^3$	$C_{p^2}^3 \times C_p$
A_{16}	$C_{p^2} \times C_p^8$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^2} \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^7$
A_{17}	$C_{p^3} \times C_p^3$	C_p^3	1	$C_{p^3} \times C_p^2$	$C_{p^3} \times C_p^2$

A.4 $n = 6$

Para $n = 6$, podemos montar o seguinte diagrama de possibilidades para os valores de c, ρ e e.



No que segue apresentaremos as possibilidades para o conjunto A em cada caso.

Quando $c = 2$, então A é da forma $A = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}\}$.

Se $c = 2$, $\rho = (2)$ e $e = 2$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\alpha_{1,1} = \alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1) \text{ e } (i,j) \neq (1,3)\} \\ A_2 &= \{\alpha_{1,1} = 2, \alpha_{i,j} = 0 | \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\}. \end{aligned}$$

Se $c = 2$, $\rho = (1,1)$ e $e = 1$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \{\alpha_{1,1} = 2, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_4 &= \{\alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2) \text{ e } (i,j) \neq (1,3)\} \\
A_5 &= \{\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1) \text{ e } (i,j) \neq (1,2)\} \\
A_6 &= \{\alpha_{1,1} = \alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1) \text{ e } (i,j) \neq (1,3)\} \\
A_7 &= \{\alpha_{1,1} = \alpha_{2,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1) \text{ e } (i,j) \neq (2,3)\}
\end{aligned}
$$

Quando $c = 4$, então A é da forma $A = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,6}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}, \alpha_{5,5}, \alpha_{5,6}, \alpha_{6,6}\}$.

Se $c = 4$, $\rho = (4)$ e $e = 4$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_8 &= \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_9 &= \{\alpha_{1,5} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,5)\}
\end{aligned}
$$

Se $c = 4$, $\rho = (1,3)$ e $e = 3$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_{10} &= \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_{11} &= \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2)\} \\
A_{12} &= \{\alpha_{1,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,4)\} \\
A_{13} &= \{\alpha_{2,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,4)\}
\end{aligned}
$$

Se $c = 4$, $\rho = (1,3)$ e $e = 1$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_{14} &= \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_{15} &= \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2)\} \\
A_{16} &= \{\alpha_{1,5} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,5)\} \\
A_{17} &= \{\alpha_{2,5} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,5)\}
\end{aligned}
$$

Se $c = 4$, $\rho = (2,2)$ e $e = 2$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_{18} &= \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_{19} &= \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,3)\} \\
A_{20} &= \{\alpha_{1,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,4)\} \\
A_{21} &= \{\alpha_{3,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (3,4)\}
\end{aligned}
$$

Se $c = 4$, $\rho = (1, 1, 2)$ e $e = 2$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_{22} &= \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_{23} &= \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2)\} \\
A_{24} &= \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,3)\} \\
A_{25} &= \{\alpha_{2,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,2)\} \\
A_{26} &= \{\alpha_{2,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,3)\}
\end{aligned}
$$

Se $c = 4$, $\rho = (1, 1, 2)$ e $e = 1$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_{27} &= \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_{28} &= \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2)\} \\
A_{29} &= \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,3)\} \\
A_{30} &= \{\alpha_{1,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,4)\} \\
A_{31} &= \{\alpha_{2,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,3)\} \\
A_{32} &= \{\alpha_{2,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,4)\} \\
A_{33} &= \{\alpha_{3,4} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (3,4)\}
\end{aligned}
$$

Se $c = 4$, $\rho = (1, 1, 1, 1)$ e $e = 1$, temos as seguintes possibilidades para A são:

$$
\begin{aligned}
A_{34} &= \{\alpha_{1,1} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,1)\} \\
A_{35} &= \{\alpha_{1,2} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,2)\} \\
A_{36} &= \{\alpha_{1,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (1,3)\} \\
A_{37} &= \{\alpha_{2,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (2,3)\} \\
A_{38} &= \{\alpha_{3,3} = 1, \alpha_{i,j} = 0| \text{ para todo } (i,j) \neq (3,3)\}
\end{aligned}
$$

No que segue exibimos tabelas contendo as apresentações dos grupos de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^6$, e o quadrado tensorial não-abeliano, o quadrado exterior não-abeliano, o multiplicador de Schur e outros funtores homológicos.

Tabela 9 – Apresentação de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^6$

A	X	Relações
A_1	$x_{(1,1,1)}, x_{(1,3,1)}, y_{(1,1,1)}, y_{(1,3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ x^p_{(1,2,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ y^{p^3}_{(1,3,1)}, [y^p_{(1,3,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = y^{p^2}_{(1,3,1)}$
A_2	$x_{(1,1,1)}, x_{(1,1,2)}, y_{(1,1,1)}, y_{(1,1,2)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)}, x^p_{(1,1,2)}, y^p_{(1,1,1)}, y^p_{(1,1,2)}, z^{p^2}_{(3,1)}, [z_{(3,1)}, x], [x_a, x_{a'}], [y_a, y_{a'}], [x_a, y_{a'}], [x_a, y_a] = z^p_{(3,1)}$
A_3	$x_{(1,1,1)}, x_{(1,1,2)}, y_{(1,1,1)}, y_{(1,1,2)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ x^p_{(1,1,2)},\ y^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,2)},\ z^p_{(2,1)},\ z^p_{(3,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_4	$x_{(1,2,1)}, x_{(1,3,1)}, y_{(1,2,1)}, y_{(1,3,1)}$	$x^p_{(1,2,1)},\ x^p_{(1,3,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,3,1)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [y^p_{(1,3,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$
A_5	$x_{(1,1,1)}, x_{(1,2,1)}, y_{(1,1,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ x^p_{(1,2,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^p_{(3,1)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$
A_6	$x_{(1,1,1)}, x_{(1,3,1)}, y_{(1,1,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(2,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ x^p_{(1,3,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ y^{p^2}_{(1,3,1)},\ z^p_{(2,1)},\ [y^p_{(1,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_7	$x_{(1,1,1)}, x_{(2,3,1)}, y_{(1,1,1)}, y_{(2,3,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ x^{p^2}_{(2,3,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ y^{p^2}_{(2,3,1)},\ [x^p_{(2,3,1)}, x],\ [y^p_{(2,3,1)}, x],\ [x_a, x_{a'}],\ [y_a, y_{a'}],\ [x_a, y_{a'}],\ [x_a, y_a] = x^p_{(2,3,1)}$
A_8	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(5,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ z^{p^4}_{(5,1)},\ [z_{(5,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p^3}_{(5,1)}$
A_9	$x_{(1,5,1)}, y_{(1,5,1)}$	$x^p_{(1,5,1)},\ y^{p^5}_{(1,5,1)},\ [y^p_{(1,5,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^4}_{(1,5,1)}$
A_{10}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(4,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^{p^3}_{(4,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p^2}_{(4,1)}$
A_{11}	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(4,1)}$	$x^p_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^{p^3}_{(4,1)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p^2}_{(4,1)}$
A_{12}	$x_{(1,4,1)}, y_{(1,4,1)}, z_{(2,1)}$	$x^p_{(1,4,1)},\ y^{p^4}_{(1,4,1)},\ z^p_{(2,1)},\ [y^p_{(1,4,1)}, x],\ [z_{(1,2)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^3}_{(1,4,1)}$
A_{13}	$x_{(2,4,1)}, y_{(2,4,1)}$	$x^{p^2}_{(2,4,1)},\ y^{p^4}_{(2,4,1)},\ [x^p_{(2,4,1)}, x],\ [y^p_{(2,4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^3}_{(2,4,1)}$
A_{14}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(5,1)}$	$x^p_{(1,1,1)},\ y^p_{(1,1,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^{p^3}_{(5,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(5,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{15}	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(5,1)}$	$x^p_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^{p^3}_{(5,1)},\ [y^p_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(5,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^p_{(1,2,1)}$

A	X	Relações
A_{16}	$x_{(1,5,1)}, y_{(1,5,1)}, z_{(2,1)}$	$x^{p}_{(1,5,1)},\ y^{p^4}_{(1,5,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ [y^{p}_{(1,5,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{17}	$x_{(2,5,1)}, y_{(2,5,1)}$	$x^{p^2}_{(2,5,1)},\ y^{p^4}_{(1,5,1)},\ [x^{p}_{(2,5,1)}, x],\ [y^{p}_{(2,5,1)}, x],\ [x_a, y_a] = x^{p}_{(2,5,1)}$
A_{18}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(3,1)}, z_{(4,1)}$	$x^{p}_{(1,1,1)},\ y^{p}_{(1,1,1)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p}_{(3,1)}$
A_{19}	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(4,1)}$	$x^{p}_{(1,3,1)},\ y^{p^3}_{(1,3,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [y^{p}_{(1,3,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^2}_{(1,3,1)}$
A_{20}	$x_{(1,4,1)}, y_{(1,4,1)}, z_{(3,1)}$	$x^{p}_{(1,4,1)},\ y^{p^3}_{(1,4,1)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ [y^{p}_{(1,4,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p}_{(3,1)}$
A_{21}	$x_{(3,4,1)}, y_{(3,4,1)}$	$x^{p^3}_{(3,4,1)},\ y^{p^3}_{(3,4,1)},\ [x^{p}_{(3,4,1)}, x],\ [y^{p}_{(3,4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = x^{p^2}_{(3,4,1)}$
A_{22}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(2,2)}, z_{(3,1)}$	$x^{p}_{(1,1,1)},\ y^{p}_{(1,1,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ z^{p}_{(2,2)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(2,2)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p}_{(3,1)}$
A_{23}	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^{p}_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ [y^{p}_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p}_{(3,1)}$
A_{24}	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(2,1)}, z_{(2,2)}$	$x^{p}_{(1,3,1)},\ y^{p^3}_{(1,3,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ z^{p}_{(2,2)},\ [y^{p}_{(1,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(2,2)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^2}_{(1,3,1)}$
A_{25}	$x_{(2,2,1)}, y_{(2,2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^{p^2}_{(2,2,1)},\ y^{p^2}_{(2,2,1)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ [x^{p}_{(2,2,1)}, x],\ [y^{p}_{(2,2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z^{p}_{(3,1)}$
A_{26}	$x_{(2,3,1)}, y_{(2,3,1)}, z_{(2,1)}$	$x^{p^2}_{(2,3,1)},\ y^{p^3}_{(2,3,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ [x^{p}_{(2,3,1)}, x],\ [y^{p}_{(2,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p^2}_{(2,3,1)}$
A_{27}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}, z_{(4,1)}$	$x^{p}_{(1,1,1)},\ y^{p}_{(1,1,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ z^{p^2}_{(3,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{28}	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(3,1)}, z_{(4,1)}$	$x^{p}_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^{p}_{(3,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [y^{p}_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = y^{p}_{(1,2,1)}$
A_{29}	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(2,1)}, z_{(4,1)}$	$x^{p}_{(1,3,1)},\ y^{p^2}_{(1,3,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [y^{p}_{(1,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{30}	$x_{(1,4,1)}, y_{(1,4,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^{p}_{(1,4,1)},\ y^{p^3}_{(1,4,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ z^{p}_{(3,1)},\ [y^{p}_{(1,4,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{31}	$x_{(2,3,1)}, y_{(2,3,1)}, z_{(4,1)}$	$x^{p^2}_{(2,3,1)},\ y^{p^2}_{(2,3,1)},\ z^{p^2}_{(4,1)},\ [x^{p}_{(2,3,1)}, x],\ [y^{p}_{(2,3,1)}, x],\ [z_{(4,1)}, x],\ [x_a, y_a] = x^{p}_{(2,3,1)}$
A_{32}	$x_{(2,4,1)}, y_{(2,4,1)}, z_{(3,1)}$	$x^{p^2}_{(2,4,1)},\ y^{p^3}_{(2,4,1)},\ z^{p}_{(3,1)},\ [x^{p}_{(2,4,1)}, x],\ [y^{p}_{(2,4,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = x^{p}_{(2,4,1)}$
A_{33}	$x_{(3,4,1)}, y_{(3,4,1)}, z_{(2,1)}$	$x^{p^2}_{(3,4,1)},\ y^{p^3}_{(3,4,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ [x^{p}_{(3,4,1)}, x],\ [y^{p}_{(3,4,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{34}	$x_{(1,1,1)}, y_{(1,1,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}, z_{(3,2)}, z_{(3,3)}$	$x^{p}_{(1,1,1)},\ y^{p}_{(1,1,1)},\ z^{p}_{(2,1)},\ z^{p}_{(3,1)},\ z^{p}_{(3,2)},\ z^{p}_{(3,3)},\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(3,2)}, x],\ [z_{(3,3)}, x],$ $[x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{35}	$x_{(1,2,1)}, y_{(1,2,1)}, z_{(3,1)}, z_{(3,2)}, z_{(3,3)}$	$x^{p}_{(1,2,1)},\ y^{p^2}_{(1,2,1)},\ z^{p}_{(3,1)},\ z^{p}_{(3,2)},\ z^{p}_{(3,3)},\ [y^{p}_{(1,2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(3,2)}, x],\ [z_{(3,3)}, x],$ $[x_a, y_a] = y^{p}_{(1,2,1)}$

A	X	Relações
A_{36}	$x_{(1,3,1)}, y_{(1,3,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}, z_{(3,2)}$	$x^p_{(1,3,1)},\ y^{p^2}_{(1,3,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^p_{(3,1)},\ z^p_{(3,2)},\ [y^p_{(1,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(3,2)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$
A_{37}	$x_{(2,3,1)}, y_{(2,3,1)}, z_{(3,1)}, z_{(3,2)}$	$x^{p^2}_{(2,3,1)},\ y^{p^2}_{(2,3,1)},\ z^p_{(3,1)},\ z^p_{(3,2)},\ [x^p_{(2,3,1)}, x],\ [y^p_{(2,3,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [z_{(3,2)}, x],\ [x_a, y_a] = y^p_{(2,3,1)}$
A_{38}	$x_{(3,3,1)}, y_{(3,3,1)}, z_{(2,1)}, z_{(3,1)}$	$x^{p^2}_{(3,3,1)},\ y^{p^2}_{(3,3,1)},\ z^p_{(2,1)},\ z^p_{(3,1)},\ [x^p_{(3,3,1)}, x],\ [y^p_{(3,3,1)}, x],\ [z_{(2,1)}, x],\ [z_{(3,1)}, x],\ [x_a, y_a] = z_{(2,1)}$

Tabela 10 – Alguns funtores homológicos de $G \in \mathscr{P}$, com $|G| = p^6$

A	$G \otimes G$	$G \wedge G$	$M(G)$	$\Gamma(G^{ab})$	$J_2(G)$
A_1	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_2	C_p^{25}	C_p^{10}	C_p^9	C_p^{15}	C_p^{24}
A_3	C_p^{25}	C_p^{10}	C_p^9	C_p^{15}	C_p^{24}
A_4	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_5	C_p^{25}	C_p^{10}	C_p^9	C_p^{15}	C_p^{24}
A_6	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_7	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_8	$C_{p^3} \times C_p^8$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^3} \times C_p^5$	$C_{p^3} \times C_p^7$
A_9	$C_{p^4} \times C_p^3$	C_p	1	$C_{p^4} \times C_p^2$	$C_{p^4} \times C_p^2$
A_{10}	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_{11}	$C_{p^2}^4 \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p$	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$	$C_{p^2}^4 \times C_p^4$
A_{12}	$C_{p^3} \times C_p^8$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^3} \times C_p^5$	$C_{p^3} \times C_p^7$
A_{13}	$C_{p^3} \times C_{p^2}^3$	C_{p^2}	C_p	$C_{p^3} \times C_{p^2}^2$	$C_{p^3} \times C_{p^2}^2 \times C_p$
A_{14}	$C_{p^3} \times C_p^{10}$	C_p^5	C_p^4	$C_{p^3} \times C_p^5$	$C_{p^3} \times C_p^9$
A_{15}	$C_{p^3} \times C_p^8$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^3} \times C_p^5$	$C_{p^3} \times C_p^7$
A_{16}	$C_{p^4} \times C_p^5$	C_p^3	C_p^2	$C_{p^4} \times C_p^2$	$C_{p^4} \times C_p^4$
A_{17}	$C_{p^4} \times C_{p^2}^2 \times C_p$	C_p^2	C_p	$C_{p^4} \times C_{p^2} \times C_p$	$C_{p^4} \times C_{p^2} \times C_p^2$
A_{18}	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_{19}	$C_{p^2}^4 \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p$	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$	$C_{p^2}^4 \times C_p^4$
A_{20}	$C_{p^3} \times C_{p^2} \times C_p^7$	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p$	$C_{p^3} \times C_p^5$	$C_{p^3} \times C_{p^2} \times C_p^6$
A_{21}	$C_{p^3} \times C_{p^2}^3$	C_{p^3}	C_{p^2}	$C_{p^2}^3$	$C_{p^2}^4$
A_{22}	C_p^{25}	C_p^{10}	C_p^9	C_p^{15}	C_p^{24}
A_{23}	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_{24}	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_{25}	$C_{p^2}^6 \times C_p^3$	$C_{p^2}^3$	$C_{p^2}^2 \times C_p$	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$	$C_{p^2}^5 \times C_p^4$
A_{26}	$C_{p^2}^4 \times C_p^5$	$C_{p^2} \times C_p^2$	C_p^3	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$	$C_{p^2}^3 \times C_p^6$
A_{27}	$C_{p^2} \times C_p^{17}$	C_p^8	C_p^7	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{16}$
A_{28}	$C_{p^2} \times C_p^{15}$	C_p^6	C_p^5	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{14}$
A_{29}	$C_{p^2}^4 \times C_p^7$	$C_{p^2} \times C_p^4$	$C_{p^2} \times C_p^3$	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$	$C_{p^2}^4 \times C_p^6$
A_{30}	$C_{p^3} \times C_p^{10}$	C_p^5	C_p^4	$C_{p^3} \times C_p^5$	$C_{p^3} \times C_p^9$
A_{31}	$C_{p^2}^5 \times C_p^4$	$C_{p^2}^2 \times C_p$	$C_{p^2} \times C_p^2$	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$	$C_{p^2}^4 \times C_p^5$
A_{32}	$C_{p^3} \times C_{p^2} \times C_p^7$	$C_{p^2} \times C_p^2$	C_p^3	$C_{p^3} \times C_p^5$	$C_{p^3} \times C_p^8$
A_{33}	$C_{p^3} \times C_{p^2}^3 \times C_p^2$	$C_{p^2} \times C_p^2$	C_p^3	$C_{p^3} \times C_{p^2}^2$	$C_{p^3} \times C_{p^2}^2 \times C_p^3$
A_{34}	C_p^{27}	C_p^{12}	C_p^{11}	C_p^{15}	C_p^{26}
A_{35}	C_p^{25}	C_p^{10}	C_p^9	C_p^{15}	C_p^{24}

A	$G \otimes G$	$G \wedge G$	$M(G)$	$\Gamma(G^{ab})$	$J_2(G)$
A_{36}	$C_{p^2} \times C_p^{17}$	C_p^8	C_p^7	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{16}$
A_{37}	$C_{p^2}^2 \times C_p^{14}$	$C_{p^2} \times C_p^5$	C_p^6	$C_{p^2} \times C_p^9$	$C_{p^2} \times C_p^{15}$
A_{38}	$C_{p^2}^4 \times C_p^8$	$C_{p^2} \times C_p^5$	C_p^6	$C_{p^2}^3 \times C_p^3$	$C_{p^2}^3 \times C_p^9$

Referências

[1] A. Ahmad, A. Magidin and R. F. Morse, Two-generator p-groups of nilpotency class two and their conjugacy classes, *Publ. Math. Debrecen*, **81** (2012), 145–166.

[2] M. R. Bacon, On the nonabelian tensor square of a nilpotent group of class two, *Glasgow Math. J.* **36** (1994), 291–296.

[3] M. R. Bacon and L. C. Kappe, The nonabelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2, *Arch. Math.* **61** (1993), 508–516.

[4] M. R. Bacon, L. C. Kappe and R. F. Morse, On the nonabelian tensor square of a 2-Engel group, *Arch. Math.* **69** (1997), no. 5, 353–364.

[5] Beyl, F. R. and Tappe, J., *Group Extensions, Representatios and the Schur multiplicator*, Lecture Notes in Maths, n. 958, Springer-Verlag, 1982

[6] S. R. Blackburn, Groups of prime power order with derived subgroup of prime order, *J. Algebra* **219** (1999), 625–657.

[7] R. D. Blyth, R. F. Morse and J. L. Redden, On computing the nonabelian tensor square of the free 2-Engel groups, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **47** (2004), no. 2, 305–323.

[8] R. D. Blyth and R. F. Morse, Computing the nonabelian tensor square of polycyclic groups, *J. Algebra* **321** (2009), 2139–2148.

[9] R. D. Blyth, F. Fumagalli and M. Morigi, Some structural results on the non-abelian tensor square of groups, *J. Group Theory* **13** (2010), 83–94.

[10] R. Brown and J. L. Loday, Van Kampen theorems for diagram of spaces, *Topology* **26** (1987), 311–335.

[11] R. Brown, D. L. Johnson and E. F. Robertson, Some computations of non-abelian tensor product of groups, *J. Algebra* **111** (1987), 177–202.

[12] R. K. Dennis, In search of new homology functors having a close relationship to K-theory, Preprint, Cornell University, (1976).

[13] G. J. Ellis, Tensor products and q-crossed modules, *J. London Math. Soc.* **51** (1995), 243–258.

[14] The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.5; 2014 (http://www.gap- system.org).

[15] G. Higman, Enumerating p-groups. I: Inequalities, *Proc. London Math.*, **10** (1960), 24–30.

[16] S. H. Jafari, F. Saeedi and E. Khamseh, Characterization of finite p-groups by their non-abelian tensor square, *Comm. Algebra* **41**(5) (2013), 1945–1963.

[17] D. L. Johnson, *Presentation of Group.* Cambridge University Press, 2nd ed., 1997.

[18] L. C. Kappe, M. P. Visscher and N. H. Sarmin, Two-generator two-groups of class two and their nonabelian tensor squares, *Glasg. Math. J.* **41** (1999), 417–430.

[19] G. Karpilovsky, *The Schur multiplier*, LMS Monographs New Series 2, New York, Springer- Verlage, 1996.

[20] A. Magidin and R. F. Morse, Certain homological functors of 2-generator p-group of class 2, *Contemporary Mathematics* **511** (2010), 127–166.

[21] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations*, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1976.

[22] C. Miller, The second homology group of a group; relations among commutators, Proceedings AMS **3**, (1952), 588–595.

[23] I. N. Nakaoka, *Sobre o produto tensorial não abelianos de grupos*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1994.

[24] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1995.

[25] N. R. Rocco, On a construction related to the nonabelian tensor square of a group, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **22** (1991), 63–79.

[26] N. R. Rocco, A presentation for a crossed embedding of finite solvable groups, *Comm. Algebra* **22**(6) (1994), 1975–1998.

[27] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, 4nd ed., Springer-Verlag, New York, 1994.

[28] J. J. Rotman, *Advanced modern algebra*, 2nd ed., AMS - Graduate Studies in Mathematics, Vol 114, New York, 2010.

[29] C. C. Sims, *Computation with finitely presented groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[30] J. H. C. Whitehead, *A certain exact sequence*, Ann. of Math. **52** (1950), 51–110.