



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HIPERSUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO

EM $S^n \times \mathbb{R}$ E $H^n \times \mathbb{R}$

RAFAEL MARLON DE NOVAIS

Brasília

2017



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Hipersuperfícies de Rotação

em $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

por

Rafael Marlon de Novais

Orientador: João Paulo dos Santos

Brasília

2017

Rafael Marlon de Novais

Hipersuperfícies de Rotação

em $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UnB, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: João Paulo dos Santos

Brasília

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

NN935h Novais, Rafael Marlon de
Hipersuperfícies de Rotação em $S^n \times R$ e $H^n \times R$. /
Rafael Marlon de Novais; orientador João Paulo dos
Santos. -- Brasília, 2017.
107 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --
Universidade de Brasília, 2017.

1. Hipersuperfícies de Rotação. I. Paulo dos
Santos, João , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Hipersuperfícies de Rotação em $S^n \times \mathbb{R}$ e $H^n \times \mathbb{R}$

por

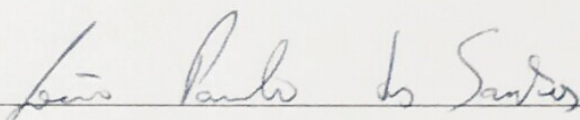
Rafael Marlon de Novais *

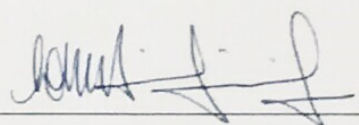
*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

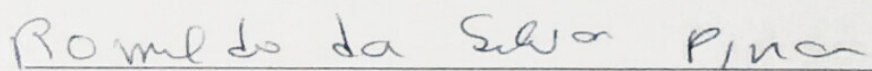
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 07 de março de 2017.

Comissão Examinadora:


Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB (Orientador)


Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues - MAT/UnB
(Membro)


Prof. Dr. Romildo da Silva Pina - UFG (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

*Aos meus pais, Baiano e Fia, à meu
irmão Heitor e ao meu pãozinho de
queijo, Nathália.*

Agradecimentos

Agradeço à minha família, meu pai Hélio Novais, minha mãe Maria das Graças, meu irmão Heitor Novais e minha companheira de todas as horas Nathália, o amor de vocês é que me dá força todos os dias.

Agradeço aos meus professores da UFOP, em especial aos professores Jamil e Wender-son que me inspiraram confiança para essa conquista.

Agradeço aos meus colegas de curso pelos momentos de estudo e pelas risadas.

Agradeço ao meu professor João Paulo dos Santos por toda orientação e ajuda que me foram dados.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que viabilizou esse mestrado.

*"Trabalho duro supera o talento,
quando o talento não trabalha duro"*

Resumo

Nesta dissertação, estudamos hipersuperfícies de rotação nos espaços produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Apresentamos parametrizações explícitas para tais hipersuperfícies, que por sua vez são utilizadas para o cálculo das curvaturas principais. Apresentamos também um critério para verificar quando uma hipersuperfície nos espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é uma hipersuperfície de rotação. Como aplicações, classificamos dentre as hipersuperfícies de rotação, as hipersuperfícies mínimas, as intrinsecamente planas, as hipersuperfícies em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ normalmente planas no espaço Euclidiano \mathbb{E}^{n+2} e as hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ normalmente planas no espaço Lorentziano \mathbb{L}^{n+2} .

Abstract

In this dissertation, we study rotation hypersurfaces in the product spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. We present explicit parametrizations for such hypersurfaces, which are used for the calculation of the principal curvatures. We also present a criterion to verify when a hypersurface in the spaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ is a rotation hypersurface. As applications, we classify among the rotational hypersurfaces, the minimal hypersurfaces, the intrinsically flat hypersurfaces, the hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ that are normally flat in the Euclidean space \mathbb{E}^{n+2} and the hypersurfaces in $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ that are normally flat in the Lorentzian space \mathbb{L}^{n+2} .

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	14
1.1 Curvatura	14
1.2 Imersões Isométricas	15
1.3 Imersões Isométricas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	18
1.4 Distribuições e Variedades Integrais	26
2 Hipersuperfícies de Rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	28
2.1 Hipersuperfície de Rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$	31
2.2 Hipersuperfície de Rotação em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	44
2.2.1 Plano de rotação Lorentziano	44
2.2.2 Plano de rotação Riemanniano	51
2.2.3 Plano de rotação degenerado	61
2.3 Critério	72
3 Aplicações	80
3.1 Hipersuperfícies de Rotação intrinsecamente planas	80
3.2 Hipersuperfícies de Rotação normalmente planas	93
3.3 Hipersuperfícies de Rotação mínimas	97
Apêndice	104
Conclusão	108
Referências Bibliográficas	111

Introdução

Neste trabalho, iremos estudar hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Estudaremos uma extensão da noção clássica de superfícies de rotação, no espaço Euclidiano 3-dimensional \mathbb{R}^3 , para hipersuperfícies nos espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{S}^n é a esfera unitária e \mathbb{H}^n é o espaço hiperbólico. Em \mathbb{R}^3 , definimos uma superfície de rotação pelo conjunto obtido ao girar uma curva regular plana e conexa C em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. Como dito em [4] por Carmo e Dajczer, superfícies de rotação com uma propriedade adicional, como curvatura média constante, curvatura Gaussiana constante, mínima, etc., são provavelmente as superfícies mais simples que possuem tal propriedade, logo fornecem uma rica fonte de exemplos e um bom campo de testes para várias conjecturas. O mesmo podemos dizer das hipersuperfícies de rotação que abordaremos neste trabalho.

Em [4], a noção clássica de superfícies de rotação em \mathbb{R}^3 foi estendida, por Carmo e Dajczer, para hipersuperfícies dos espaços $(n+1)$ -dimensionais \mathbb{H}^{n+1} , \mathbb{S}^{n+1} e \mathbb{R}^{n+1} , isto é, os espaços de curvatura constante. Em [8], nossa principal referência, nos foi apresentada por Dillen, Fastenakels e Veken uma adaptação de tal extensão para os espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Os espaços produto tem sido bastante estudados recentemente, podemos citar por exemplo [6], [7], [9], [12], [13] e [16]. Dentre estes destacamos, o artigo [6] em que Daniel fornece condições necessárias e suficientes para que uma variedade Riemanniana n -dimensional seja isometricamente imersa em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Em [12], Manfio e Tojeiro fazem uma classificação completa das hipersuperfícies de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curvatura seccional constante e $n \geq 3$. Em [9], Espinar faz um estudo mais geral nesses espaços, focado na dimensão 3, como superfícies com curvatura média constante, superfícies com curvatura Gaussiana constante, superfícies com curvatura extrínseca positiva, superfí-

cies com curvatura extrínseca constante, além de apresentar teoremas do tipo Hopf, tipo Liebmann, tipo Hilbert e do tipo Hadamard-Stoker.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 vamos abordar definições e resultados gerais de geometria Riemanniana necessários para o desenvolvimento do trabalho. Abordaremos conceitos de imersões isométricas, conceitos básicos de espaços produto e apresentaremos resultados de imersões isométricas adaptados aos espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Citaremos também algumas definições e resultados a respeito de distribuições e variedades integrais que serão fundamentais para a demonstração de um critério para verificar se uma hipersuperfície em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é de rotação, segundo a definição que será apresentada.

No Capítulo 2, apresentaremos a definição de Hipersuperfície de Rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Veremos como a escolha do plano de rotação afeta a geometria dos paralelos. Numa superfície de rotação em \mathbb{R}^3 , quando fazemos a intersecção com um plano ortogonal ao eixo de rotação e que passa por um ponto p da curva geratriz C , obtemos um paralelo dessa superfície. A fim de obter parametrizações dos paralelos de uma hipersuperfície de rotação, vamos nos inspirar no que conhecemos de superfícies de rotação e de hipersuperfícies de rotação dadas em [4]. A partir daí, vamos obter uma parametrização para hipersuperfícies de rotação e de posse dessa parametrização, iremos determinar o normal unitário, exibir o operador forma e conseqüentemente determinar as curvaturas principais. Finalizando o capítulo, temos uma demonstração do critério mencionado acima.

O Capítulo 3 é reservado para aplicações. Começaremos com uma classificação das hipersuperfícies de rotação intrinsecamente planas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Na sequência veremos que as hipersuperfícies de rotação são normalmente planas no espaço ambiente e finalizamos determinando todas hipersuperfícies de rotação mínimas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Em que o espaço ambiente ao longo do texto é o espaço Euclidiano \mathbb{E}^{n+2} , no caso em que estamos considerando hipersuperfícies de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, e o espaço Lorentziano \mathbb{L}^{n+2} , quando estivermos considerando hipersuperfícies de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar alguns teoremas, definições e resultados gerais que serão utilizados ao longo do texto, além de fixar a notação que será adotada.

1.1 Curvatura

Definição 1.1. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

O tensor curvatura $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

Seja $\Delta \subset T_p M$ um subespaço 2-dimensional do espaço tangente $T_p M$. Associada ao tensor de curvatura, está a curvatura seccional de Δ em p , definida por

$$K(\Delta)(p) = \frac{R(X, Y, X, Y)(p)}{\|X(p) \wedge Y(p)\|^2},$$

onde $X(p), Y(p) \in \Delta$ são linearmente independentes e

$$\|X(p) \wedge Y(p)\| = \sqrt{\|X(p)\|^2 \|Y(p)\|^2 - \langle X, Y \rangle^2(p)}.$$

Pode-se mostrar, como feito em [3], que $K(\Delta)(p)$ não depende das escolhas de $X(p), Y(p)$, mas apenas do ponto $p \in M$.

Teorema 1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente, se*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = K_0(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle).$$

Demonstração: Ver [3], Capítulo 4, Lema 3.4.

Corolário 1.3. *M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente, se*

$$R(X, Y)Z = K_0(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle W).$$

Definição 1.4. *Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$. Considere uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x . Então,*

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

é chamada curvatura de Ricci na direção x .

1.2 Imersões Isométricas

As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [3] no Capítulo 6.

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana \overline{M} de dimensão igual a $n + m$. A fim de que f seja uma imersão isométrica, considere em M a métrica induzida pela imersão. Isto é, dados $u, v \in T_p M$ definimos $\langle u, v \rangle_p = \langle d_p f(u), d_p f(v) \rangle_{f(p)}$.

Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança Ω de p tal que $f : \Omega \rightarrow \overline{M}$ é um mergulho e assim $f(\Omega)$ é uma subvariedade de \overline{M} .

No que segue, $f(\Omega)$ será visto como subvariedade de \overline{M} . Além disso, para $p \in \Omega$, iremos identificar p com $f(p)$, Ω com $f(\Omega)$ e $v \in T_p M$ com $d_p f(v) \in T_{f(p)} \overline{M}$ de forma que o estudo se restringe a uma subvariedade $M \subset \overline{M}$, já que iremos tratar de aspectos locais.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p M$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta $T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$, onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Dado $v \in T_p \overline{M}$ vamos escrever $v = v^T + v^N$ de modo que $v^T \in T_p M$ é chamado de *componente tangencial* de v e $v^N \in (T_p M)^\perp$ é chamado de *componente normal* de v .

A conexão Riemanniana de \overline{M} será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a \overline{M} , definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Verifica-se que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M .

Se X, Y são campos locais em M ,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em \overline{M} normal a M . $B(X, Y)$ é uma aplicação bilinear, simétrica e não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$ (ver [3], capítulo 6, seção 2). Além disso, expressando B em um sistema de coordenadas, pode-se verificar, por sua bilinearidade, que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é uma aplicação bilinear simétrica.

Definição 1.5. *A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo η .

A aplicação bilinear H_η fica associada a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \longrightarrow T_p M$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Proposição 1.6. *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Definição 1.7. *A imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é dita mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se que o traço de S_η é igual a zero.*

No que se segue, usaremos as letras latinas X, Y, Z , etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas ξ, η, ζ , etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Dados X e η , já vimos que a componente tangente de $\bar{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\bar{\nabla}_X \eta)^T = -S_\eta(X)$. Passemos agora a componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$, que será denominada *conexão normal* ∇^\perp da imersão. Explicitamente,

$$\nabla_X^\perp \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^N = \bar{\nabla}_X \eta - (\bar{\nabla}_X \eta)^T = \bar{\nabla}_X \eta + S_\eta(X).$$

Verifica-se que a conexão normal ∇^\perp possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X , aditiva em η e

$$\nabla_X^\perp(f\eta) = f\nabla_X^\perp \eta + X(f)\eta, \quad f \in C^\infty(M).$$

A *curvatura normal* R^\perp da imersão é definida por

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

Se $R = 0$ dizemos que $M \subset \bar{M}$ é *intrinsecamente plana*, no caso em que $R^\perp = 0$ dizemos que $M \subset \bar{M}$ é *normalmente plana*.

Proposição 1.8. *As seguintes equações se verificam:*

(a) *Equação de Gauss*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(Y, W), B(X, Z) \rangle;$$

(b) *Equação de Ricci*

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle + \langle S_\eta(S_\xi X), Y \rangle - \langle S_\xi(S_\eta X), Y \rangle.$$

Seja $\mathcal{X}(M)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M . A segunda forma fundamental da imersão pode ser considerada como um tensor

$$B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^\perp \longrightarrow C^\infty(M)$$

definido por $B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$. Defina

$$(\bar{\nabla}_X B)(X, Y, \eta) = X(B(X, Y, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta).$$

Proposição 1.9 (Equação de Codazzi). *Com a notação acima*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Definição 1.10. *Se a codimensão da imersão é 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, então $f(M) \subset \bar{M}$ é denominada Hipersuperfície.*

Considere a imersão $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$. Seja $p \in M^n$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$ unitário. Como $S_\eta : T_p M^n \rightarrow T_p M^n$ é simétrica existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_p M^n$ com valores próprios reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é, $S_\eta v_i = \lambda_i v_i$ para $1 \leq i \leq n$. Se M^n e \bar{M}^{n+1} são orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base na orientação de M^n , $\{v_1, \dots, v_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de \bar{M}^{n+1} . Neste caso denominamos os v_i *direções principais* e os λ_i *curvaturas principais* da imersão.

Definição 1.11. *Seja $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica. Dizemos que $f : M \rightarrow \bar{M}$ é totalmente umbílica se para todo $p \in M$, a segunda forma fundamental em p satisfaz*

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle(p) = \lambda_\eta(p) \langle X, Y \rangle, \quad \lambda_\eta(p) \in \mathbb{R},$$

para todo par X, Y tangente a M e todo campo unitário η normal a M .

Observe que a definição acima é equivalente a dizer que $S_\eta X = \lambda_\eta X$ para todo $X \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$.

1.3 Imersões Isométricas em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

As definições e resultados desta seção, bem como as demonstrações omitidas tem como referência [6], [9] e [15].

Considere a variedade $(n+1)$ -dimensional $Q^n \times \mathbb{R}$ dada pelo produto de uma variedade Riemanniana Q^n , que será denominada *base*, e a reta real \mathbb{R} , denominada *fibra*. Sejam g , a métrica de Q^n , e dt^2 , a métrica padrão em \mathbb{R} . Se π e σ são as projeções sobre base e fibra, respectivamente, então a métrica em $Q^n \times \mathbb{R}$ é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi^*(g) + \sigma^*(dt^2).$$

Dado $X \in \mathcal{X}(Q^n \times \mathbb{R})$, vamos considerar $X = X_{Q^n} + X_{\mathbb{R}}$ de modo que $X_{Q^n} \in \mathcal{X}(Q^n)$ é projeção de X por π e $X_{\mathbb{R}} \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ é a projeção de X por σ . Dizemos que X é um *campo horizontal* se $X_{\mathbb{R}} \equiv 0$ e que X é um *campo vertical* se $X_{Q^n} \equiv 0$.

Denotaremos por ∇^1 , ∇^2 e $\tilde{\nabla}$ as conexões, por R_1 , R_2 e \tilde{R} as curvaturas, de Q^n , \mathbb{R} e $Q^n \times \mathbb{R}$ respectivamente. Logo, para todo $(q, t) \in Q^n \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_{(q,t)} &= \langle d\pi X, d\pi Y \rangle_q + \langle d\sigma X, d\sigma Y \rangle_t \\ &= \langle X_{Q^n}, Y_{Q^n} \rangle_q + \langle X_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}} \rangle_t. \end{aligned}$$

Proposição 1.12. *Sejam X, Y campos horizontais e V, W campos verticais, então*

- (i) $\tilde{\nabla}_X Y$ é um campo horizontal e $(\tilde{\nabla}_X Y)_{Q^n} = \nabla_{X_{Q^n}}^1 Y_{Q^n}$;
- (ii) $\tilde{\nabla}_V W$ é um campo vertical e $(\tilde{\nabla}_V W)_{\mathbb{R}} = \nabla_{V_{\mathbb{R}}}^2 W_{\mathbb{R}}$;
- (iii) $\tilde{\nabla}_V X = \tilde{\nabla}_X V = 0$.

Corolário 1.13. *A conexão Riemanniana $\tilde{\nabla}$ de $Q^n \times \mathbb{R}$ é dada por*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_{X_{Q^n}}^1 Y_{Q^n} + \nabla_{X_{\mathbb{R}}}^2 Y_{\mathbb{R}}.$$

Proposição 1.14. *Sejam X, Y, Z campos horizontais e U, V, W campos verticais, então*

- (i) $\tilde{R}(X, Y)Z$ é um campo horizontal e $(\tilde{R}(X, Y)Z)_{Q^n} = R_1(X_{Q^n}, Y_{Q^n})Z_{Q^n}$;
- (ii) $\tilde{R}(U, V)W$ é um campo vertical e $(\tilde{R}(U, V)W)_{\mathbb{R}} = R_2(U_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})W_{\mathbb{R}}$;
- (iii) \tilde{R} é zero para qualquer outra escolha de X, \dots, W .

Corolário 1.15. *O tensor curvatura \tilde{R} de $Q^n \times \mathbb{R}$ é dada por*

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R_1(X_{Q^n}, Y_{Q^n})Z_{Q^n} + R_2(X_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}})Z_{\mathbb{R}}.$$

Denotamos por *seção horizontal* a imagem inversa $\sigma^{-1}(t) = Q^n \times \{t\}$, de um ponto t da fibra, por σ , e por *seção vertical* a imagem inversa $\pi^{-1}(q) = \{q\} \times \mathbb{R}$, de um ponto q da base, por π .

A partir da métrica produto, para cada $(q, t) \in Q^n \times \mathbb{R}$, pode-se verificar que $\pi|_{Q^n \times \{t\}}$ e $\sigma|_{\{q\} \times \mathbb{R}}$ são isometrias. Além disso, a seção horizontal, $Q^n \times \{t\}$, e a seção vertical, $\{q\} \times \mathbb{R}$, são ortogonais em (q, t) .

A seguir vamos estabelecer as notações que utilizaremos ao longo do texto. Os espaços Euclidiano de dimensão $n + 2$ e Lorentziano de dimensão $n + 2$ serão denotados por \mathbb{E}^{n+2} e \mathbb{L}^{n+2} respectivamente. O espaço Lorentziano estará equipado com a métrica $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+2}^2$. Para os espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ iremos considerar os seguintes modelos

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^n \times \mathbb{R} &= \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{E}^{n+2} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}, \\ \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} &= \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{L}^{n+2} \mid -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1, x_1 > 0\}.\end{aligned}$$

Para facilitar a notação iremos utilizar $Q(\varepsilon)^n$ para denotar \mathbb{S}^n ou \mathbb{H}^n . Vamos definir $Q(\varepsilon)^n = \mathbb{S}^n$ se $\varepsilon = 1$ (curvatura seccional de \mathbb{S}^n) e $Q(\varepsilon)^n = \mathbb{H}^n$ se $\varepsilon = -1$ (curvatura seccional de \mathbb{H}^n).

Utilizaremos $\partial_1, \dots, \partial_{n+2}$ para representar a base canônica do espaço ambiente.

Observe que $\xi = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$ é um campo de vetores normal sobre $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ com $\langle \xi, \xi \rangle = \varepsilon$.

As conexões de *Levi-Civita* de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e do espaço ambiente (\mathbb{E}^{n+2} ou \mathbb{L}^{n+2}) serão denotadas por $\tilde{\nabla}$ e D respectivamente. A partir daí temos o seguinte resultado.

Lema 1.16. *Sejam X e Y , campos tangentes sobre $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, então*

$$\tilde{\nabla}_X Y = D_X Y + \varepsilon \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \xi. \quad (1.1)$$

Onde $X_{Q^n(\varepsilon)}$ e $Y_{Q^n(\varepsilon)}$ são as projeções de X e Y tangentes a $Q^n(\varepsilon)$.

Demonstração: Temos $D_X Y - \tilde{\nabla}_X Y = c\xi$, onde c é um real não nulo. Então,

$$\langle D_X Y, \xi \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle + \langle c\xi, \xi \rangle = 0 + c\langle \xi, \xi \rangle = c\varepsilon.$$

Por outro lado $\langle Y, \xi \rangle = 0$, daí $\langle D_X Y, \xi \rangle + \langle Y, D_X \xi \rangle = 0$, logo $c = -\varepsilon \langle Y, D_X \xi \rangle$. Sendo assim, $D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \varepsilon \langle Y, D_X \xi \rangle \xi$.

Considere

$$X = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \partial_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^{n+2} b_j \partial_j$$

de modo que

$$X_{Q^n(\varepsilon)} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \partial_i \quad \text{e} \quad Y_{Q^n(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \partial_j$$

com $a_{n+2}\partial_{n+2}$ e $b_{n+2}\partial_{n+2}$ tangentes a \mathbb{R} . Então,

$$\begin{aligned} D_X\xi &= (X(x_1), X(x_2), \dots, X(x_{n+1}), X(0)) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, 0) \\ &= X_{Q^n(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Segue daí, que

$$\begin{aligned} c &= -\varepsilon\langle Y, D_X\xi \rangle \\ &= -\varepsilon\langle Y_{Q^n(\varepsilon)} + b_{n+2}\partial_{n+2}, X_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \\ &= -\varepsilon\langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, X_{Q^n(\varepsilon)} \rangle - \langle b_{n+2}\partial_{n+2}, X_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \\ &= -\varepsilon\langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, X_{Q^n(\varepsilon)} \rangle - 0 \\ &= -\varepsilon\langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, X_{Q^n(\varepsilon)} \rangle. \end{aligned}$$

■

Em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, vamos denotar a curvatura por \tilde{R} . Sendo $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ um espaço produto, sua curvatura é dada por

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R_1(X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)})Z_{Q^n(\varepsilon)} + R_2(X_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}})Z_{\mathbb{R}},$$

onde R_1, R_2 são respectivamente, as curvaturas de $Q^n(\varepsilon), \mathbb{R}$ e $X_{\mathbb{R}}, Y_{\mathbb{R}}, Z_{\mathbb{R}}$ são as projeções de X, Y, Z tangentes a \mathbb{R} . Uma vez que \mathbb{R} possui curvatura nula, segue-se que $\tilde{R}(X, Y)Z = R_1(X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)})Z_{Q^n(\varepsilon)}$.

Como a curvatura seccional de $Q^n(\varepsilon)$ é constante igual a ε segue-se que

$$\begin{aligned} \langle R_1(X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)})Z_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \varepsilon(\langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \\ &\quad - \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle). \end{aligned}$$

Sendo assim, o tensor de curvatura de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R_1(X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)})Z_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \\ &\quad + \langle R_1(X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)})Z_{Q^n(\varepsilon)}, W_{\mathbb{R}} \rangle \\ &= \langle R_1(X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)})Z_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle + 0 \\ &= \varepsilon(\langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \\ &\quad - \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle) \end{aligned}$$

Seja $f : M^n \rightarrow Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície com normal unitário N . A projeção do vetor vertical ∂_{n+2} sobre o espaço tangente de M^n será denotada por T . Denotaremos por θ a função ângulo dada por $\cos \theta = \langle N, \partial_{n+2} \rangle$. Logo,

$$\partial_{n+2} = T + \cos \theta N.$$

Em M^n , a conexão de *Levi-Civita* será denotada por ∇ , a curvatura por R e o operador forma S_N apenas por S . Nestas condições, podemos agora determinar as equações de Gauss e Codazzi. Começemos pela equação de Gauss. Sabemos que

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle.$$

Note que $B(Y, W) = cN$, onde c é um real não nulo. Daí

$$c = \langle B(Y, W), N \rangle = \langle SY, W \rangle,$$

logo $B(Y, W) = \langle SY, W \rangle N$. De maneira análoga obtemos que $B(X, Z) = \langle SX, Z \rangle N$, $B(X, W) = \langle SX, W \rangle N$ e $B(Y, Z) = \langle SY, Z \rangle N$. Assim,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle + \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \\ \varepsilon(\langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle - \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle) \\ - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle + \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle. \end{aligned}$$

Sendo $X = X_{Q^n(\varepsilon)} + a\partial_{n+2}$, temos que

$$a = \langle X, \partial_{n+2} \rangle = \langle X, T + \cos \theta N \rangle = \langle X, T \rangle.$$

Logo,

$$X_{Q^n(\varepsilon)} = X - \langle X, T \rangle \partial_{n+2}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} Y_{Q^n(\varepsilon)} &= Y - \langle Y, T \rangle \partial_{n+2}, \\ Z_{Q^n(\varepsilon)} &= Z - \langle Z, T \rangle \partial_{n+2}, \\ W_{Q^n(\varepsilon)} &= W - \langle W, T \rangle \partial_{n+2}. \end{aligned}$$

A partir daí, segue-se que

$$\begin{aligned}\langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \langle X, Z \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle, \\ \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \langle Y, W \rangle - \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle, \\ \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \langle Y, Z \rangle - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle, \\ \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \langle X, W \rangle - \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \\ &\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \\ &\quad - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle + \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle, \\ \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, Z_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, W_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \\ &\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \\ &\quad - \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle + \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \varepsilon(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle \\ &\quad + \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle \\ &\quad + \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad + \langle SX, Z \rangle \langle SY, W \rangle - \langle SX, W \rangle \langle SY, Z \rangle).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Agora vamos determinar a equação de Codazzi. Sabemos que

$$\tilde{R}(X, Y)N = \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X N - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y N + \tilde{\nabla}_{[X, Y]} N,$$

além disso, $\tilde{\nabla}_Z N = \nabla_Z^\perp N - SZ$, para todo Z tangente a M^n . Porém, N é unitário, logo $\langle \tilde{\nabla}_Z N, N \rangle = 0$. Ou seja, $\tilde{\nabla}_Z N$ não possui componente normal, deste modo $\nabla_Z^\perp N = 0$.

Então,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)N &= \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X^\perp N - SX) - \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y^\perp N - SY) + \nabla_{[X, Y]}^\perp N - S[X, Y] \\ &= \tilde{\nabla}_Y (-SX) - \tilde{\nabla}_X (-SY) - S[X, Y] \\ &= -\tilde{\nabla}_Y (SX) + \tilde{\nabla}_X (SY) - S[X, Y] \\ &= \tilde{\nabla}_X (SY) - \tilde{\nabla}_Y (SX) - S[X, Y].\end{aligned}$$

Observe que $\tilde{\nabla}_X(SY) - \nabla_X(SY) = cN$, com $c = \langle \tilde{\nabla}_X(SY), N \rangle$ daí,

$$\tilde{\nabla}_X(SY) = \nabla_X(SY) + \langle \tilde{\nabla}_X(SY), N \rangle N.$$

Então,

$$\tilde{\nabla}_X(SY) - \tilde{\nabla}_Y(SX) = \nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) + \langle \tilde{\nabla}_X(SY) - \tilde{\nabla}_Y(SX), N \rangle N.$$

Como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X(SY) - \tilde{\nabla}_Y(SX), N \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X(SY), N \rangle - \langle \tilde{\nabla}_Y(SX), N \rangle \\ &= X\langle SY, N \rangle - \langle SY, \tilde{\nabla}_X N \rangle - Y\langle SX, N \rangle \\ &\quad - \langle SX, \tilde{\nabla}_Y N \rangle \\ &= 0 - \langle SY, \tilde{\nabla}_X N \rangle - 0 + \langle SX, \tilde{\nabla}_Y N \rangle \\ &= -\langle SY, -SX \rangle + \langle SX, -SY \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

segue-se que $\tilde{\nabla}_X(SY) - \tilde{\nabla}_Y(SX) = \nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX)$, e portanto

$$\tilde{R}(X, Y)N = \nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)N &= R_1(X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)})N_{Q^n(\varepsilon)} \\ &= \varepsilon(\langle X_{Q^n(\varepsilon)}, N_{Q^n(\varepsilon)} \rangle Y_{Q^n(\varepsilon)} - \langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, N_{Q^n(\varepsilon)} \rangle X_{Q^n(\varepsilon)}). \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, N_{Q^n(\varepsilon)} \rangle &= \langle X - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2}, N - \langle N, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2} \rangle \\ &= \langle X, N \rangle - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle \\ &\quad + \langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle \\ &= \langle X, N \rangle - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle \\ &= -\langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, $\langle Y_{Q^n(\varepsilon)}, N_{Q^n(\varepsilon)} \rangle = -\langle Y, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle$. Então,

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}(X, Y)N &= \varepsilon [(-\langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle)(Y - \langle Y, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2}) \\
 &\quad - (-\langle Y, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle)(X - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2})] \\
 &= \varepsilon [(-\langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle Y + \langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle \langle Y, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2}) \\
 &\quad - (-\langle Y, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle X + \langle Y, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle \langle X, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2})] \\
 &= \varepsilon [\langle Y, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle X - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle Y].
 \end{aligned}$$

Sendo $\partial_{n+2} = T + \cos \theta N$, segue-se que

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}(X, Y)N &= \varepsilon [\langle Y, T + \cos \theta N \rangle \langle N, T + \cos \theta N \rangle X \\
 &\quad - \langle X, T + \cos \theta N \rangle \langle N, T + \cos \theta N \rangle Y] \\
 &= \varepsilon [\langle Y, T \rangle \cos \theta \langle N, N \rangle X - \langle X, T \rangle \cos \theta \langle N, N \rangle Y] \\
 &= \varepsilon \cos \theta [\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y].
 \end{aligned}$$

Portanto a equação de Codazzi é dada por

$$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y] = \varepsilon \cos \theta [\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y]. \quad (1.3)$$

Observação 1.17. ∂_{n+2} é paralelo em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. De fato, dado X tangente a $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ podemos escrever $X = X_{Q^n(\varepsilon)} + \langle X, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2}$, daí

$$\tilde{\nabla}_X \partial_{n+2} = \tilde{\nabla}_{X_{Q^n(\varepsilon)}} \partial_{n+2} + \langle X, \partial_{n+2} \rangle \tilde{\nabla}_{\partial_{n+2}} \partial_{n+2}.$$

Denotando por ∇^1 e ∇^2 as conexões de $Q^n(\varepsilon)$ e \mathbb{R} respectivamente temos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_X \partial_{n+2} &= (\nabla_{X_{Q^n(\varepsilon)}}^1 0 + \nabla_0^2 \partial_{n+2}) + \langle X, \partial_{n+2} \rangle (\nabla_0^1 0 + \nabla_{\partial_{n+2}}^2 \partial_{n+2}) \\
 &= \langle X, \partial_{n+2} \rangle \nabla_{\partial_{n+2}}^2 \partial_{n+2} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Sendo ∂_{n+2} paralelo em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_X \partial_{n+2} &= \tilde{\nabla}_X T + \tilde{\nabla}_X [\cos \theta N] \\
 0 &= \tilde{\nabla}_X T + X[\cos \theta] N + \cos \theta \tilde{\nabla}_X N.
 \end{aligned}$$

Observe que $\tilde{\nabla}_X T = \nabla_X T + cN$, daí $c = \langle \tilde{\nabla}_X T, N \rangle$. Por outro lado, $\langle T, N \rangle = 0$, sendo assim $\langle \tilde{\nabla}_X T, N \rangle + \langle T, \tilde{\nabla}_X N \rangle = 0$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X T, N \rangle &= \langle T, -\tilde{\nabla}_X N \rangle \\ &= \langle T, -(\nabla_X^\perp N - SX) \rangle \\ &= \langle T, -\nabla_X^\perp N + SX \rangle \\ &= \langle T, SX \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja, $c = \langle T, SX \rangle$.

Como $\tilde{\nabla}_X N$ não possui componente normal, temos $\tilde{\nabla}_X N = -SX$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X T + \langle T, SX \rangle N + X[\cos \theta]N - \cos \theta SX \\ &= (\nabla_X T - \cos \theta SX) + (\langle T, SX \rangle + X[\cos \theta])N. \end{aligned}$$

Onde $(\nabla_X T - \cos \theta SX)$ é a parte tangente e $(\langle T, SX \rangle + X[\cos \theta])$ é a parte normal. Com isso obtemos

$$\nabla_X T = \cos(\theta)SX \quad \text{e} \quad X[\cos \theta] = -\langle SX, T \rangle = -\langle X, ST \rangle \quad (1.4)$$

1.4 Distribuições e Variedades Integrais

A seguir são apresentados definições e resultados que serão fundamentais para demonstração do Teorema 2.5. Os resultados e definições desta seção são baseados em [2], [10], [17] e [18].

Definição 1.18. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma distribuição \mathcal{D}^r sobre M^n , $r \leq n$, é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M^n$ um subespaço r -dimensional $\mathcal{D}^r(p)$ de $T_p M^n$.*

Definição 1.19. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Dizemos que $\overline{M} \subset M^n$ é uma variedade integral da distribuição \mathcal{D}^r sobre M^n se $T_p \overline{M}$ é um subespaço de $\mathcal{D}^r(p)$, para cada $p \in \overline{M}$. Dizemos que \mathcal{D}^r é completamente integrável se para cada $p \in M^n$ existe uma variedade integral \overline{M} de \mathcal{D}^r tal que $T_p \overline{M} = \mathcal{D}^r(p)$.*

Definição 1.20. *Uma distribuição \mathcal{D}^r é dita involutiva se, para todo par $X, Y \in \mathcal{D}^r$, tem-se que $[X, Y] \in \mathcal{D}^r$.*

Definição 1.21. *Seja \mathcal{D}^r uma distribuição completamente integrável sobre M^n . Então a coleção das variedades integrais de \mathcal{D}^r é dita uma folheação de M^n . Uma variedade integral maximal e conexa de \mathcal{D}^r é chamada uma folha da folheação.*

Teorema 1.22 (Frobenius). *Uma distribuição é completamente integrável se, e somente, se é involutiva.*

Lema 1.23. *Seja $\alpha : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma curva imersa, e para cada s seja $\Delta(s) \subset T_{\alpha(s)}\mathbb{R}^m$ um subespaço j -dimensional de $T_{\alpha(s)}\mathbb{R}^m$ com $\alpha'(s) \in \Delta(s)$. Suponha que todos $\Delta(s)$ sejam paralelos. Então α é uma curva em algum plano j -dimensional $P^j \subset \mathbb{R}^m$, e P^j é justamente $\exp(\Delta(s))$ para qualquer s .*

Considere uma curva $\alpha : [-\delta, \delta] \rightarrow M$ em uma variedade Riemanniana M , e suponha que para cada s temos um subespaço j -dimensional $\Delta(s) \subset T_{\alpha(s)}M$, então Δ é uma distribuição ao longo de α . Seja $\tau_s : T_{\alpha(-\delta)}M \rightarrow T_{\alpha(s)}M$ o transporte paralelo ao longo de α partindo de $\alpha(-\delta)$ até $\alpha(s)$. Dizemos que Δ é paralelo ao longo de α se $\tau_s(\Delta(-\delta)) = \Delta(s)$ para todo s .

Lema 1.24. *Seja $\alpha : [-\delta, \delta] \rightarrow M$ uma curva em uma variedade Riemanniana M , e seja \mathcal{D}^r uma distribuição r -dimensional ao longo de α . Suponha que $DV(s)/ds$ pertence a \mathcal{D}^r para qualquer campo de vetores V em \mathcal{D}^r . Então \mathcal{D}^r é paralelo ao longo de α .*

Capítulo 2

Hipersuperfícies de Rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Neste capítulo iremos definir uma Hipersuperfície de Rotação M^n em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Mostraremos como parametrizá-la a partir de seus paralelos, que por sua vez dependem do plano de rotação escolhido. Veremos que, para hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, os eixos de rotação serão definidos como planos bidimensionais em \mathbb{E}^{n+2} ou \mathbb{L}^{n+2} . O plano de rotação das hipersuperfícies de rotação irá se enquadrar em uma das três categorias: Riemanniano, Lorentziano ou degenerado. Dizemos que o plano de rotação é Lorentziano se a métrica do espaço ambiente restrita ao plano de rotação é uma métrica Lorentziana, analogamente se a restrição da métrica ao plano de rotação é uma métrica Riemanniana dizemos que o plano de rotação é Riemanniano, se a restrição for uma forma quadrática degenerada, ou seja, se existe um vetor u no plano tal que $\langle u, v \rangle = 0$ para todo vetor v do plano, dizemos que o plano de rotação é degenerado.

Veremos que para planos de rotação Riemanniano os paralelos serão esferas, para planos de rotação Lorentziano os paralelos serão espaços hiperbólicos e para planos de rotação degenerado os paralelos serão parabolóides. Por fim, mostraremos um critério para verificar se uma hipersuperfície em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é de rotação.

Antes de apresentar a definição de hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, vamos relembrar brevemente as hipersuperfícies nas formas espaciais.

Em \mathbb{R}^3 , considere uma curva regular plana $\beta(s) = (f(s), 0, g(s))$ com $f > 0$ contida no plano xz . A fim de se obter uma parametrização Ψ para a superfície de rotação Ω

gerada por β em torno do eixo z , basta aplicar uma isometria de \mathbb{R}^3 que fixa o eixo z , em coordenadas, escrevemos

$$\Psi(\theta, s) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(s) \\ 0 \\ g(s) \end{pmatrix} = (f(s) \cos(\theta), f(s) \text{sen}(\theta), g(s)).$$

Um paralelo da superfície Ω que passa pelo ponto $\beta(s_0) = (f(s_0), 0, g(s_0))$ é dado por

$$\Psi_{s_0}(\theta) = \Psi(\theta, s_0) = (f(s_0) \cos(\theta), f(s_0) \text{sen}(\theta), g(s_0)),$$

ou seja é uma circunferência de centro $(0, 0, g(s_0))$ e raio $f(s_0)$. Observe que, se $P^2(s_0)$ é um plano afim paralelo a xy e que passa por $\beta(s_0)$, a interseção $P^2(s_0) \cap \Omega$ é exatamente o paralelo $\Psi_{s_0}(\theta)$. Este fato será usado como motivação para o método que será aplicado neste capítulo com a finalidade de obter parametrizações dos paralelos e conseqüentemente, uma parametrização para hipersuperfície de rotação. Antes de prosseguir vamos definir ação em uma variedade diferenciável.

Dizemos que um grupo G age em uma variedade diferenciável \overline{M} se existe uma aplicação $\psi : G \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ tal que:

- (i) Para cada $g \in G$, a aplicação $\psi_g : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ dada por $\psi_g(p) = \psi(g, p)$, $p \in \overline{M}$ é um difeomorfismo e $\psi_e = \text{identidade}$.
- (ii) Se $g_1, g_2 \in G$, então $\psi_{g_1 g_2} = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}$.

A órbita de um elemento $p \in \overline{M}$ por ψ é a classe de equivalência de p com respeito a relação de equivalência \sim determinada por $p \sim q$ se, só, se existe $g \in G$ tal que $\psi_g(p) = q$, ou seja, $\mathcal{O}(p) = \{q \in \overline{M} \mid q \sim p\}$.

Veremos agora como uma hipersuperfície de rotação em \mathbb{H}^{n+1} , visto no modelo do hiperbolóide, foi definida em [4]. Para tal, iremos denotar por P^k um subespaço k -dimensional de \mathbb{L}^{n+2} passando pela origem e por $O(P^2)$ o conjunto das isometrias de \mathbb{L}^{n+2} com determinante positivo e que deixam P^2 fixo.

Definição 2.1. Escolha P^2 e $P^3 \supset P^2$ tal que $P^3 \cap \mathbb{H}^{n+1} \neq \emptyset$. Seja C uma curva regular em $P^3 \cap \mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{H}^3$ que não intercepta P^2 . A órbita de C sob a ação de $O(P^2)$ é chamada hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ gerada por C em torno de P^2 . Se $\sigma \in O(P^2)$, a

curva $\sigma(C)$ é um meridiano de M^n e a órbita de um ponto de C sob $O(P^2)$ é um paralelo de M^n .

Trocando \mathbb{H}^n por \mathbb{S}^n e \mathbb{L}^{n+2} por \mathbb{E}^{n+2} na definição acima obtém-se a definição para hipersuperfícies de rotação em \mathbb{S}^{n+1} .

Uma hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gerada por uma curva C em torno de um eixo r que não intercepta C é obtida tomando-se a órbita de C sob as isometrias de \mathbb{R}^{n+1} que deixam r fixado. Nos espaços \mathbb{S}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1} o equivalente a eixo de rotação são os grandes círculos e as hipérbolas respectivamente, que são obtidos através da interseção destas variedades com planos que passam pela origem. Sabemos que as isometrias de $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{E}^{n+2}$ e $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ são as isometrias do respectivo espaço ambiente que deixam \mathbb{S}^{n+1} e \mathbb{H}^{n+1} invariantes, então para que tais isometrias deixem fixados grandes círculos e hipérbolas, devemos considerar isometrias do espaço ambiente que mantenha um plano fixado. Por esta razão, na definição acima, um plano de rotação foi introduzido para cumprir o papel de eixo, isto é, o conjunto que é fixado pelas rotações.

Para uma hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, considerando $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid x_{n+2} = 0\}$ e tomando $P^2 = r \oplus \partial_{n+2}$ podemos ver que M^n satisfaz a Definição 2.1 com \mathbb{R}^{n+1} no lugar de \mathbb{H}^{n+1} .

Em [8], parte-se deste contexto para descrever as hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. É o que veremos a seguir.

Considere um espaço 3-dimensional P^3 de \mathbb{E}^{n+2} , respectivamente \mathbb{L}^{n+2} , contendo o eixo x_{n+2} . Seja P^2 um subespaço 2-dimensional de P^3 que também contém o eixo x_{n+2} . Note que $(Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}) \cap P^3 = Q^1(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Denote por \mathcal{I} o grupo de isometrias de \mathbb{E}^{n+2} , respectivamente \mathbb{L}^{n+2} , que deixam $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ invariante e mantém P^2 fixo ponto a ponto.

Definição 2.2. *Seja α uma curva em $Q^1(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ que não intercepta P^2 . Agora considere a ação de \mathcal{I} sobre $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{I} \times (Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}) &\longrightarrow Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R} \\ (\Phi, p) &\longmapsto \Phi(p). \end{aligned}$$

A órbita de um ponto $p \in Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ pela ação ψ é definida por

$$\mathcal{O}(p) = \{q \in Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R} \mid q = \Phi(p) \text{ para alguma isometria } \Phi \in \mathcal{I}\}.$$

O conjunto $M^n = \cup_s \mathcal{O}(\alpha(s))$ é chamado *Hipersuperfície de Rotação gerada por α em torno de P^2* . Se $\Phi \in \mathcal{I}$, a curva $\Phi(\alpha)$ é um meridiano de M^n e a órbita $\mathcal{O}(\alpha(s))$ do ponto $\alpha(s)$ é um paralelo de M^n .

Daqui por diante iremos considerar P^3 gerado por $\partial_1, \partial_{n+1}, \partial_{n+2}$. Para cada possibilidade de P^2 e de $Q^n(\varepsilon)$, vamos encontrar parametrizações para as respectivas hipersuperfícies de rotação. Como consequência, encontraremos um campo normal unitário N sobre M^n , o operador forma S e as curvaturas principais. Para um espaço k -dimensional P^k vamos fixar a notação $P^k = [v_1, \dots, v_k]$ para indicar que P^k é gerado por v_1, \dots, v_k .

2.1 Hipersuperfície de Rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Neste caso estamos considerando $Q^n(\varepsilon) = \mathbb{S}^n$ e $P^2 = [\partial_1, \partial_{n+2}]$. Seja $\alpha(s) = (x_1(s), 0, \dots, 0, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$ uma curva em $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}) \cap P^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que não intercepta P^2 . Num primeiro momento vamos assumir que α não seja uma reta vertical. Em particular α é uma curva em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, então $x_1(s)^2 + x_{n+1}(s)^2 = 1$. Nestas condições α pode ser parametrizada por

$$\alpha(s) = (\cos(s), 0, \dots, 0, \sin(s), a(s)),$$

para alguma função a de modo que α está definida em um intervalo no qual $\sin(s)$ nunca se anula.

Para um dado s_0 , vamos determinar a órbita $\mathcal{O}(\alpha(s_0))$ do ponto $\alpha(s_0)$. Seja $P^n(s_0)$ um n -plano afim passando por $(\cos(s_0), 0, \dots, 0, a(s_0))$ e paralelo a $P^n = [\partial_2, \dots, \partial_{n+1}]$. Denote por $U(s_0)$ a interseção $P^n(s_0) \cap (\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$.

Dado um ponto $q = (\cos(s_0), w_1, \dots, w_n, a(s_0))$ de $U(s_0)$ temos que,

$$\begin{aligned} \cos^2(s_0) + w_1^2 + \dots + w_n^2 &= 1 \\ w_1^2 + \dots + w_n^2 &= 1 - \cos^2(s_0) \\ w_1^2 + \dots + w_n^2 &= \sin^2(s_0). \end{aligned}$$

Daí,

$$\left(\frac{w_1}{\sin(s_0)} \right)^2 + \dots + \left(\frac{w_n}{\sin(s_0)} \right)^2 = 1.$$

Seja

$$\varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$. Isto é,

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathbb{E}^n} = \varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2 = 1,$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle_{\mathbb{E}^n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

No que se segue, vamos usar o símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar também o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^n}$ como são, essencialmente, os mesmos produtos não haverá risco de confusão.

Fazendo $\varphi_i = \frac{w_i}{\text{sen}(s_0)}$ segue-se que $w_i = \text{sen}(s_0)\varphi_i$. Com isso concluímos que os pontos de $U(s_0)$ são da forma

$$(\cos(s_0), \text{sen}(s_0)\varphi_1, \dots, \text{sen}(s_0)\varphi_n, a(s_0)).$$

Ou seja, $U(s_0)$ é uma esfera em $\mathbb{E}^n \subset \mathbb{E}^{n+2}$ de raio $|\text{sen}(s_0)|$ e centro $(\cos(s_0), 0, \dots, 0, a(s_0))$.

Note que $\mathcal{O}(\alpha(s_0)) \subset U(s_0)$. De fato, uma vez que $P^2 = [\partial_1, \partial_{n+2}]$ é mantido fixo por cada isometria $\Phi \in \mathcal{I}$, as coordenadas $\cos(s_0)$ e $a(s_0)$ de $\alpha(s_0)$ serão mantidas por Φ , e conseqüentemente $\Phi(\alpha(s_0))$ está contido no n-plano afim $P^n(s_0)$. Por outro lado, Φ mantém $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ invariante, dessa forma $\Phi(\alpha(s_0))$ pertence a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Agora mostraremos que $\mathcal{O}(\alpha(s_0)) \supset U(s_0)$, para tal basta mostrarmos que existe uma isometria $\Phi \in \mathcal{I}$ tal que

$$\Phi(\alpha(s_0)) = (\cos(s_0), \text{sen}(s_0)\varphi_1, \dots, \text{sen}(s_0)\varphi_n, a(s_0)).$$

Uma expressão para φ é dada explicitamente por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cos(t_1), \\ \varphi_2 &= \text{sen}(t_1) \cos(t_2), \\ \varphi_3 &= \text{sen}(t_1) \text{sen}(t_2) \cos(t_3), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1} &= \text{sen}(t_1) \dots \text{sen}(t_{n-2}) \cos(t_{n-1}), \\ \varphi_n &= \text{sen}(t_1) \dots \text{sen}(t_{n-2}) \text{sen}(t_{n-1}). \end{aligned}$$

Observação 2.3. *Uma demonstração de que a parametrização acima é de fato ortogonal pode ser encontrada no Apêndice, Lema 3.11.*

Vamos construir a isometria Φ como acima da seguinte forma, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, considere a aplicação $\Phi_i : \mathbb{E}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ dada pela matriz

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & A_i & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

onde i representa a posição da diagonal na qual A_i se localiza e

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(t_{i-1}) & -\text{sen}(t_{i-1}) \\ \text{sen}(t_{i-1}) & \cos(t_{i-1}) \end{pmatrix}.$$

Afirmção: $\Phi_i \in \mathcal{I}$ para cada $i \in \{2, \dots, n\}$.

Claramente cada Φ_i mantém $P^2 = [\partial_1, \partial_{n+2}]$ fixo. Sem perda de generalidade, considere $i = 2$. Dado $x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{E}^{n+2}$ temos que

$$\Phi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & A_2 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \cos(t_1) - x_3 \text{sen}(t_1) \\ x_2 \text{sen}(t_1) + x_3 \cos(t_1) \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} (x_2 \cos(t_1) - x_3 \text{sen}(t_1))^2 + (x_2 \text{sen}(t_1) + x_3 \cos(t_1))^2 &= \\ (x_2 \cos(t_1))^2 - 2x_2x_3 \cos(t_1) \text{sen}(t_1) + (x_3 \text{sen}(t_1))^2 &+ \\ + (x_2 \text{sen}(t_1))^2 + 2x_2x_3 \cos(t_1) \text{sen}(t_1) + (x_3 \cos(t_1))^2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x_2^2 \cos^2(t_1) + x_3^2 \sin^2(t_1) + x_2^2 \sin^2(t_1) + x_3 \cos^2(t_1) \\
 &= x_2^2(\cos^2(t_1) + \sin^2(t_1)) + x_3^2(\sin^2(t_1) + \cos^2(t_1)) \\
 &= x_2^2 + x_3^2.
 \end{aligned}$$

Segue daí que Φ_2 é uma isometria que mantém $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ invariante. E com isso demonstramos a afirmação.

Para concluir a construção da isometria Φ considere a aplicação $\nu : \mathbb{E}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{E}^{n+2}$, que troca as coordenadas ∂_2 e ∂_{n+1} , dada pela matriz

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que ν também pertence a \mathcal{I} . A partir daí, temos

$$\nu(\alpha(s_0)) = (\cos(s_0), \sin(s_0)0, \dots, 0, a(s_0)),$$

$$\Phi_2(\nu(\alpha(s_0))) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & A_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s_0) \\ \sin(s_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s_0) \\ \sin(s_0) \cos(t_1) \\ \sin(s_0) \sin(t_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a(s_0) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_3 \circ \Phi_2(\nu(\alpha(s_0))) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & A_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s_0) \\ \text{sen}(s_0) \cos(t_1) \\ \text{sen}(s_0) \text{sen}(t_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s_0) \\ \text{sen}(s_0) \cos(t_1) \\ \text{sen}(s_0) \text{sen}(t_1) \cos(t_2) \\ \text{sen}(s_0) \text{sen}(t_1) \text{sen}(t_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a(s_0) \end{pmatrix}.$$

Prosseguindo dessa maneira, chegamos em $\Phi_n \circ \dots \circ \Phi_2(\nu(\alpha(s_0))) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & & A_n \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s_0) \\ \text{sen}(s_0) \cos(t_1) \\ \text{sen}(s_0) \text{sen}(t_1) \cos(t_2) \\ \text{sen}(s_0) \text{sen}(t_1) \text{sen}(t_2) \cos(t_3) \\ \vdots \\ \text{sen}(s_0) \text{sen}(t_1) \dots \text{sen}(t_{n-2}) \\ 0 \\ a(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s_0) \\ \text{sen}(s_0) \varphi_1 \\ \text{sen}(s_0) \varphi_2 \\ \vdots \\ \text{sen}(s_0) \varphi_{n-1} \\ \text{sen}(s_0) \varphi_n \\ a(s_0) \end{pmatrix}.$$

Com isso acabamos de encontrar a isometria $\Phi \in \mathcal{I}$ desejada, que por sua vez é dada por $\Phi = \Phi_n \circ \dots \circ \Phi_2 \circ \nu$.

Portanto,

$$\mathcal{O}(\alpha(s_0)) = U(s_0).$$

Uma parametrização para a hipersuperfície de rotação M^n gerada por α em torno de $P^2 = [\partial_1, \partial_{n+2}]$ pode ser obtida tomando uma parametrização do paralelo $\mathcal{O}(\alpha(s_0))$ e fazendo s_0 variar ao longo de α . Sendo assim, uma parametrização para M^n é dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cos(s), \text{sen}(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \text{sen}(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), a(s)).$$

Estamos em condições de encontrar o vetor normal. Da parametrização obtida, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (-\text{sen}(s), \cos(s)\varphi_1, \dots, \cos(s)\varphi_n, a'(s)), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \text{sen}(s) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \text{sen}(s) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right). \end{aligned}$$

O normal unitário sobre $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ em $\alpha(s)$ é dado por

$$\xi = (\cos(s), \sin(s)\varphi_1, \dots, \sin(s)\varphi_n, 0).$$

Como φ é uma parametrização ortogonal temos

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle = \delta_{ij} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2,$$

o que implica em $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ e $\frac{\partial f}{\partial t_j}$ serem ortogonais.

Agora vamos determinar o campo normal unitário N sobre M^n , como subvariedade de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, que por sua vez é tangente a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Sabemos que $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ são tangentes a M^n e que ξ é normal a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Nestas condições, como N é normal a M^n e tangente a $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ concluímos que N é ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t_i}$, ξ . Isto é,

$$\left\langle N, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = \langle N, \xi \rangle = 0.$$

Considere \bar{N} um campo ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t_i}$, ξ . Observe que $\left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\rangle = 0$, pois $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$. Sendo assim, a fim de que $\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = 0$, basta que se tenha

$$\bar{N} = (x_1, h\varphi_1, \dots, h\varphi_n, x_{n+2}),$$

para alguma função h . De fato,

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle &= 0 + h \sin(s)\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} + \dots + h \sin(s)\varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i} + 0 \\ &= h \sin(s) \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

Nestas condições temos,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \\ &= -x_1 \sin(s) + h \cos(s)\varphi_1\varphi_1 + \dots + h \cos(s)\varphi_n\varphi_n + x_{n+2}a'(s) \\ &= -x_1 \sin(s) + h \cos(s)\langle \varphi, \varphi \rangle + x_{n+2}a'(s) \\ &= -x_1 \sin(s) + h \cos(s) + x_{n+2}a'(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \bar{N}, \xi \rangle \\
 &= -x_1 \cos(s) + h \operatorname{sen}(s) \varphi_1 \varphi_1 + \dots + h \operatorname{sen}(s) \varphi_n \varphi_n + 0 \\
 &= -x_1 \cos(s) + h \operatorname{sen}(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + 0 \\
 &= -x_1 \cos(s) + h \operatorname{sen}(s)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como que $\operatorname{sen}(s)$ nunca se anula, segue de (2.2) que $h = \frac{-x_1 \cos(s)}{\operatorname{sen}(s)}$, substituindo em (2.1) obtemos $x_1 = x_{n+2} a'(s) \operatorname{sen}(s)$.

Logo

$$h = -x_{n+2} a'(s) \cos(s).$$

Deste modo, podemos escrever

$$\bar{N} = (x_{n+2} a'(s) \operatorname{sen}(s), -x_{n+2} a'(s) \cos(s) \varphi_1, \dots, -x_{n+2} a'(s) \cos(s) \varphi_n, x_{n+2}).$$

Agora resta normalizar \bar{N} , temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle &= (x_{n+2} a'(s))^2 \operatorname{sen}^2(s) + (x_{n+2} a'(s))^2 \cos^2(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + (x_{n+2})^2 \\
 &= (x_{n+2} a'(s))^2 \operatorname{sen}^2(s) + (x_{n+2} a'(s))^2 \cos^2(s) + (x_{n+2})^2 \\
 &= (x_{n+2} a'(s))^2 (\operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s)) + (x_{n+2})^2 \\
 &= (x_{n+2} a'(s))^2 + (x_{n+2})^2 \\
 &= (x_{n+2})^2 ((a'(s))^2 + 1).
 \end{aligned}$$

Logo, $|\bar{N}| = |x_{n+2}| \sqrt{(a'(s))^2 + 1}$ e portanto

$$\frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} (-a'(s) \operatorname{sen}(s), a'(s) \cos(s) \varphi_1, \dots, a'(s) \cos(s) \varphi_n, -1).$$

Com isso concluímos que, a menos de sinal,

$$N = \frac{1}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} (-a'(s) \operatorname{sen}(s), a'(s) \cos(s) \varphi_1, \dots, a'(s) \cos(s) \varphi_n, -1).$$

Finalmente, podemos determinar o operador forma S . Primeiro mostraremos que $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ diagonaliza S .

Seja $p = f(s, t_1, \dots, t_{n-1})$ e

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a representação de S na base $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$. Então,

$$S : T_p M^n \longrightarrow T_p M^n$$

$$v \longmapsto Sv = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j \right)$$

onde v_j é a j -ésima coordenada de v na base $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$. Observe que,

$$S \frac{\partial f}{\partial s} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} \frac{\partial f}{\partial s} + a_{21} \frac{\partial f}{\partial t_1} + \dots + a_{n1} \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}},$$

e para $2 \leq r \leq n$ temos

$$S \frac{\partial f}{\partial t_{r-1}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{1r} \frac{\partial f}{\partial s} + a_{2r} \frac{\partial f}{\partial t_1} + \dots + a_{nr} \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}.$$

Daí,

$$a_{11} = \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1};$$

$$a_{i1} = \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1}, \quad 2 \leq i \leq n;$$

$$a_{1j} = \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{j-1}}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1}, \quad 2 \leq j \leq n;$$

$$a_{ij} = \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{j-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1}, \quad 2 \leq i, j \leq n.$$

Dados X, Y tangentes a M^n temos que

$$\langle SX, Y \rangle = \langle -(\tilde{\nabla}_X N)^T, Y \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle.$$

Por outro lado, $\langle Y, N \rangle = 0$, logo $\langle \widetilde{\nabla}_X Y, N \rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X N \rangle = 0$, ou seja, $\langle \widetilde{\nabla}_X Y, N \rangle = -\langle \widetilde{\nabla}_X N, Y \rangle$. Por (1.1), segue-se que

$$\begin{aligned} \langle SX, Y \rangle &= \langle \widetilde{\nabla}_X Y, N \rangle \\ &= \langle D_X Y + \varepsilon \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \xi, N \rangle \\ &= \langle D_X Y, N \rangle + \varepsilon \langle X_{Q^n(\varepsilon)}, Y_{Q^n(\varepsilon)} \rangle \langle \xi, N \rangle \\ &= \langle D_X Y, N \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle = \left\langle D_{\frac{\partial f}{\partial t_i}} \frac{\partial f}{\partial t_j}, N \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle,$$

onde $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} = \sin(s)(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0)$ e

$$\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle D_{\frac{\partial f}{\partial t_i}} \frac{\partial f}{\partial s}, N \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle,$$

onde $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} = \cos(s)(0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0)$. Então,

$$\begin{aligned} \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \sin(s)(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0), N \right\rangle \\ &= \frac{a'(s) \cos(s) \sin(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \cos(s)(0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0), N \right\rangle \\ &= \frac{a'(s) \cos^2(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \varphi \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Uma vez que $\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \rangle = 0$ temos de (2.4),

$$\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = 0.$$

Além disso, como φ é ortogonal, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Segue de (2.3) que

$$\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle = 0,$$

e portanto $a_{ij} = 0$ para i, j distintos. Ou seja, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ diagonaliza S como queríamos.

Vamos agora ao cálculo dos autovalores. Lembre-se que $\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \rangle = 0$, então

$$0 = \left\langle \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle,$$

o que implica

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j^2}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle.$$

Para $2 \leq i \leq n$ temos,

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_{i-1}^2}, N \right\rangle \left(\text{sen}^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\ &= \left\langle \text{sen}(s) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_{i-1}^2} \right), N \right\rangle \left(\text{sen}^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\ &= \frac{a'(s) \text{sen}(s) \cos(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_{i-1}^2}, \varphi \right\rangle \left(\text{sen}^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\ &= \frac{-a'(s) \text{sen}(s) \cos(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \text{sen}^{-2}(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\ &= \frac{-a'(s) \cos(s)}{\text{sen}(s) \sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \\ &= \frac{-a'(s) \cot(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle (\text{sen}^2(s) + \cos^2(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + (a'(s))^2)^{-1} \\ &= \left\langle (-\cos(s), -\text{sen}(s)\varphi_1, \dots, -\text{sen}(s)\varphi_n, a''(s)), N \right\rangle (1 + (a'(s))^2)^{-1} \\ &= \frac{(1 + (a'(s))^2)^{-1}}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} ((a'(s)) \cos(s) \text{sen}(s) - a'(s) \cos(s) \text{sen}(s) \langle \varphi, \varphi \rangle - a''(s)) \\ &= \frac{1}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} ((a'(s)) \cos(s) \text{sen}(s) - a'(s) \cos(s) \text{sen}(s) - a''(s)) \\ &= \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Como o valor de a_{ii} , com $2 \leq i \leq n$, não depende do índice i , iremos denotar por μ , denotaremos a_{11} por λ . Assim, concluimos que

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix},$$

com curvaturas principais

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{-a'(s) \cot(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{1/2}}.$$

Agora considere o caso em que α é uma reta vertical, isto é,

$$\alpha(s) = (\cos(c), 0, \dots, 0, \sin(c), s),$$

onde c é uma constante. Lembre-se que α não intercepta P^2 , portanto $\sin(c)$ nunca se anula. Uma parametrização para a hipersuperfície M^n gerada por α é dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cos(c), \sin(c)\varphi_1, \dots, \sin(c)\varphi_n, s).$$

Os cálculos que seguem são completamente análogos aos que fizemos anteriormente. Primeiramente temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (0, 0, \dots, 0, 1), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \sin(c) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \sin(c) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right), \\ \xi &= (\cos(c), \sin(c)\varphi_1, \dots, \sin(c)\varphi_n, 0). \end{aligned}$$

Seja \bar{N} um campo sobre M^n ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i}, \xi$. A fim de que se tenha $\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = 0$ basta tomar $\bar{N} = (x_1, h\varphi_1, \dots, h\varphi_n, x_{n+2})$, para alguma função h . De fato,

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle &= 0 + h \sin(c) \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} + \dots + h \sin(c) \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i} + 0 \\ &= h \sin(c) \left\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

Dessa forma, $0 = \left\langle \overline{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = x_{n+2}$ e

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overline{N}, \xi \rangle \\ &= -x_1 \cos(c) + h \operatorname{sen}(c) \varphi_1 \varphi_1 + \dots + h \operatorname{sen}(c) \varphi_n \varphi_n + 0 \\ &= -x_1 \cos(c) + h \operatorname{sen}(c) \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= -x_1 \cos(c) + h \operatorname{sen}(c), \end{aligned}$$

implicando em $h = \frac{x_1 \cos(c)}{\operatorname{sen}(c)} = x_1 \cot(c)$. Portanto,

$$\overline{N} = (x_1, x_1 \cot(c) \varphi_1, \dots, x_1 \cot(c) \varphi_n, 0)$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle &= x_1^2 + x_1^2 \cot^2(c) \varphi_1^2 + \dots + x_1^2 \cot^2(c) \varphi_n^2 + 0 \\ &= x_1^2 + x_1^2 \cot^2(c) \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= x_1^2 + x_1^2 \cot^2(c) \\ &= x_1^2 (1 + \cot^2(c)) \\ &= x_1^2 \operatorname{csc}^2(c) \\ &= \left(\frac{x_1}{\operatorname{sen}(c)} \right)^2. \end{aligned}$$

Logo $\|\overline{N}\| = \frac{|x_1|}{|\operatorname{sen}(c)|}$ e portanto

$$\frac{\overline{N}}{\|\overline{N}\|} = \frac{\pm 1}{|\operatorname{sen}(c)|} (1, \cot(c) \varphi_1, \dots, \cot(c) \varphi_n, 0).$$

Com isso concluímos que, a menos de sinal, o normal unitário N sobre M^n em $\alpha(s)$ é dado por

$$N = \frac{1}{\operatorname{sen}(c)} (1, \cot(c) \varphi_1, \dots, \cot(c) \varphi_n, 0).$$

Note que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} = \operatorname{sen}(c) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0 \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} = (0, \dots, 0).$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle \text{sen}(c) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0 \right), N \right\rangle \\
 &= \frac{\cot(c) \text{sen}(c)}{\text{sen}(c)} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle \\
 &= 0, \qquad (i \neq j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle (0, \dots, 0), N \right\rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ou seja, S é da forma

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle (0, \dots, 0), N \right\rangle \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_{i-1}^2}, N \right\rangle \left(\text{sen}^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \left\langle \text{sen}(c) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2} \right), N \right\rangle \left(\text{sen}^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{\text{sen}(c) \cot(c)}{\text{sen}(c)} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_{i-1}^2}, \varphi \right\rangle \left(\text{sen}^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= -\cot(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \text{sen}^{-2}(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= -\frac{\cot(c)}{\text{sen}^2(c)}, \quad 2 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

Portanto, as curvaturas principais são dadas por

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{\cot(c)}{\text{sen}^2(c)}.$$

2.2 Hipersuperfície de Rotação em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$

Nesta seção iremos descrever as hipersuperfícies de rotação em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Como a métrica em \mathbb{L}^{n+2} é Lorentziana, dividiremos o estudo nos casos em que o plano de rotação P^2 é Lorentziano, Riemanniano e degenerado.

2.2.1 Plano de rotação Lorentziano

Vamos considerar P^2 gerado por $\partial_1, \partial_{n+2}$ e assim como fizemos anteriormente, primeiro vamos assumir que a curva geratriz α não seja uma reta vertical. Seja $\alpha(s) = (x_1(s), 0, \dots, 0, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$ em $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}) \cap P^3 = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$, uma curva que não intercepta P^2 .

Como α está contida em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ devemos ter $-x_1^2(s) + x_{n+1}^2(s) = -1$. Sendo assim, podemos parametrizar $\alpha(s)$ por

$$\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), a(s)),$$

para alguma função a de modo que $\sinh(s)$ nunca se anula.

Agora vamos determinar a órbita $\mathcal{O}(\alpha(s_0))$ do ponto $\alpha(s_0)$ para um dado s_0 . Iremos utilizar o mesmo procedimento adotado na seção 2.1. Seja $P^n(s_0)$ um n -plano

afim passando por $(\cosh(s_0), 0, \dots, 0, a(s_0))$, paralelo a $P^n = [\partial_2, \dots, \partial_{n+1}]$ e $U(s_0) = P^n(s_0) \cap \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Como $P^n(s_0)$ é Riemanniano, de maneira completamente análoga a que fizemos anteriormente, concluímos que os pontos de $U(s_0)$ são da forma

$$(\cosh(s_0), \sinh(s_0)\varphi_1, \dots, \sinh(s_0)\varphi_n, a(s_0)),$$

onde

$$\varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$, pois P^n é Riemanniano. Logo, $U(s_0)$ é uma esfera em $\mathbb{L}^n \subset \mathbb{L}^{n+2}$ de centro $(\cosh(s_0), 0, \dots, 0, a(s_0))$ e raio $\sinh(s_0)$.

Utilizando-se dos mesmos cálculos da seção 2.1, obtemos que

$$\mathcal{O}(\alpha(s_0)) = U(s_0).$$

A fim de obter uma parametrização da hipersuperfície de rotação M^n , gerada por α em torno de $P^2 = [\partial_1, \partial_{n+2}]$, basta variar s_0 ao longo de α na parametrização do paralelo $\mathcal{O}(\alpha(s_0))$.

Então uma parametrização para a hipersuperfície M^n é dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(s), \sinh(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \sinh(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), a(s)).$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (\sinh(s), \cosh(s)\varphi_1, \dots, \cosh(s)\varphi_n, a'(s)), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \sinh(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \sinh(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right), \\ \xi &= (\cosh(s), \sinh(s)\varphi_1, \dots, \sinh(s)\varphi_n, 0). \end{aligned}$$

Seja \bar{N} um campo sobre M^n ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i}, \xi$. De $\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = 0$ concluímos que \bar{N} é da forma $\bar{N} = (x_1, \gamma\varphi_1, \dots, \gamma\varphi_n, x_{n+2})$, para alguma função γ . Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \\ &= -x_1 \sinh(s) + \gamma \cosh(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + x_{n+2} a'(s) \\ &= -x_1 \sinh(s) + \gamma \cosh(s) + x_{n+2} a'(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \bar{N}, \xi \rangle \\
 &= -x_1 \cosh(s) + \gamma \sinh(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + 0 \\
 &= -x_1 \cosh(s) + \gamma \sinh(s).
 \end{aligned}$$

Como $\sinh(s)$ não se anula, segue que $\gamma = \frac{x_1 \cosh(s)}{\sinh(s)}$. Substituindo o valor de γ na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= -x_1 \sinh(s) + \gamma \cosh(s) + x_{n+2} a'(s) \\
 &= -x_1 \sinh(s) + \frac{x_1 \cosh(s)}{\sinh(s)} \cosh(s) + x_{n+2} a'(s) \\
 &= x_1 \left(\frac{\cosh^2(s)}{\sinh(s)} - \sinh(s) \right) + x_{n+2} a'(s) \\
 &= x_1 \frac{\cosh^2(s) - \sinh(s)^2}{\sinh(s)} + x_{n+2} a'(s) \\
 &= \frac{x_1}{\sinh(s)} + x_{n+2} a'(s).
 \end{aligned}$$

Portanto, $x_1 = -x_{n+2} a'(s) \sinh(s)$ e $\gamma = -x_{n+2} a'(s) \cosh(s)$. A partir daí, podemos escrever

$$\bar{N} = (-x_{n+2} a'(s) \sinh(s), -x_{n+2} a'(s) \cosh(s) \varphi_1, \dots, -x_{n+2} a'(s) \cosh(s) \varphi_n, x_{n+2}).$$

Agora vamos normalizar \bar{N} .

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle &= -(x_{n+2} a'(s))^2 \sinh(s)^2 + (x_{n+2} a'(s))^2 \cosh(s)^2 \langle \varphi, \varphi \rangle + x_{n+2}^2 \\
 &= (x_{n+2} a'(s))^2 (\cosh(s)^2 - \sinh(s)^2) + x_{n+2}^2 \\
 &= x_{n+2}^2 (a'(s))^2 + x_{n+2}^2 \\
 &= x_{n+2}^2 (1 + (a'(s))^2)
 \end{aligned}$$

Logo, $\|\bar{N}\| = |x_{n+2}| \sqrt{1 + (a'(s))^2}$ e

$$\frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} (a'(s) \sinh(s), a'(s) \cosh(s) \varphi_1, \dots, a'(s) \cosh(s) \varphi_n, -1).$$

Segue daí que, a menos de sinal, o vetor normal unitário N sobre M^n em $\alpha(s)$ é dado por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} (a'(s) \sinh(s), a'(s) \cosh(s) \varphi_1, \dots, a'(s) \cosh(s) \varphi_n, -1).$$

O cálculo do operador forma S será efetuado de maneira completamente análoga a que fizemos anteriormente. Veja que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= (\cosh(s), \sinh(s)\varphi_1, \dots, \sinh(s)\varphi_n, a''(s)), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= \left(0, \cosh(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \cosh(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} &= \left(0, \sinh(s)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}, \dots, \sinh(s)\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_j \partial t_i}, 0\right).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle \\ &= \left\langle \sinh(s) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0\right), N \right\rangle \\ &= \frac{a'(s) \cosh(s) \sinh(s)}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle \\ &= 0, \tag{$i \neq j$}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle \\ &= \left\langle \cosh(s) \left(0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0\right), N \right\rangle \\ &= \frac{a'(s) \cosh(s) \cosh(s)}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \varphi \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A partir daí, temos

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle (-\sinh^2(s) + \cosh^2(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + (a'(s))^2)^{-1} \\
 &= \left\langle (\cosh(s), \sinh(s)\varphi_1, \dots, \sinh(s)\varphi_n, a''(s)), N \right\rangle (1 + (a'(s))^2)^{-1} \\
 &= \frac{(1 + (a'(s))^2)^{-1}}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} (-a'(s) \cosh(s) \sinh(s) + a'(s) \cosh(s) \sinh(s) \langle \varphi, \varphi \rangle \\
 &\quad - a''(s)) \\
 &= \frac{1}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} (-a''(s)) \\
 &= \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_{i-1}^2}, N \right\rangle \left(\sinh^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \left\langle \sinh(s) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, 0 \right), N \right\rangle \left(\sinh^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{a'(s) \sinh(s) \cosh(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_{i-1}^2}, \varphi \right\rangle \left(\sinh^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{-a'(s) \sinh(s) \cosh(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \sinh^{-2}(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \frac{-a'(s) \cosh(s)}{\sinh(s) \sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \\
 &= \frac{-a'(s) \coth(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}}, \quad 2 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, as curvaturas principais são dadas por $a_{11} = \lambda$ e $a_{ii} = \mu$, ou

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{-a'(s) \coth(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{1/2}}.$$

Veamos agora o caso em que α é uma reta,

$$\alpha(s) = (\cosh(c), 0, \dots, 0, \sinh(c), s),$$

com $\sinh(c) \neq 0$, pois α não intercepta P^2 e c é uma constante. Uma parametrização para a superfície gerada por α é dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(c), \sinh(c)\varphi_1, \dots, \sinh(c)\varphi_n, s),$$

onde $\varphi = (\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} . Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (0, 0, \dots, 0, 1), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \sinh(c) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \sinh(c) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right), \\ \xi &= (\cosh(c), \sinh(c)\varphi_1, \dots, \sinh(c)\varphi_n, 0). \end{aligned}$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, vamos determinar o vetor normal unitário N em M^n . Seja \bar{N} um campo sobre M^n ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i}, \xi$. A fim de que $\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = 0$ basta tomar $\bar{N} = (x_1, h\varphi_1, \dots, h\varphi_n, x_{n+2})$, para alguma função h . Daí,

$$0 = \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = x_{n+2},$$

$$0 = \langle \bar{N}, \xi \rangle = -x_1 \cosh(c) + h \sinh(c).$$

Como $\sinh(c) \neq 0$ teremos $h = \frac{x_1 \cosh(c)}{\sinh(c)}$, então

$$\bar{N} = \left(x_1, \frac{x_1 \cosh(c)}{\sinh(c)} \varphi_1, \dots, \frac{x_1 \cosh(c)}{\sinh(c)} \varphi_n, 0 \right),$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle &= -x_1^2 + x_1^2 \coth^2(c) \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= x_1^2 (-1 + \coth^2(c)) \\ &= x_1^2 \operatorname{csch}(c)^2(c). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{\pm 1}{|\operatorname{csch}(c)|} (1, \coth(c)\varphi_1, \dots, \coth(c)\varphi_n, 0).$$

Portanto, a menos de sinal, concluímos que

$$N = \frac{1}{\operatorname{csch}(c)} (1, \coth(c)\varphi_1, \dots, \coth(c)\varphi_n, 0).$$

Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= (0, \dots, 0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= (0, \dots, 0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} &= \left(0, \sinh(c) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}, \dots, \sinh(c) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_j \partial t_i}, 0\right).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle \\ &= \left\langle \sinh(c) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0\right), N \right\rangle \\ &= \frac{\sinh(c) \coth(c)}{\operatorname{csch}(c)} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle \\ &= 0, \tag{$i \neq j$}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle \\ &= \left\langle (0, \dots, 0), N \right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{aligned}a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\ &= \left\langle (0, \dots, 0), N \right\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_{i-1}^2}, N \right\rangle \left(\sinh^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \left\langle \sinh(c) \left(0, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, 0 \right), N \right\rangle \left(\sinh^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{\sinh(c) \coth(c)}{\operatorname{csch}(c)} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_{i-1}^2}, \varphi \right\rangle \left(\sinh^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{-\sinh(c) \coth(c)}{\operatorname{csch}(c)} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \sinh^{-2}(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \frac{-\coth(c)}{\sinh(c) \operatorname{csch}(c)} \\
 &= -\coth(c), \quad 2 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -\coth(c).$$

2.2.2 Plano de rotação Riemanniano

Considere $P^2 = [\partial_{n+1}, \partial_{n+2}]$ e seja $\alpha(s) = (x_1(s), 0, \dots, 0, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$ uma curva em $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}) \cap P^3 = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$, que não intercepta P^2 . Num primeiro momento, vamos assumir que α não seja uma reta vertical.

Por ser uma curva em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, vale que $-x_1^2(s) + x_{n+1}^2(s) = -1$. Daí, uma parametrização natural para a curva geratriz de M^n é dada por

$$\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), a(s)),$$

para alguma função a .

Seja $P^n(s_0)$ um n -plano afim passando por $(0, \dots, 0, \sinh(s_0), a(s_0))$, paralelo a $P^n = [\partial_1, \dots, \partial_n]$ e $U(s_0) = P^n(s_0) \cap \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, para um dado s_0 . Neste caso observe que $P^n(s_0)$ é Lorentziano.

Dado $q = (w_1, \dots, w_n, \sinh(s_0), a(s_0)) \in U(s_0)$ temos que,

$$\begin{aligned}
 -w_1^2 + \dots + w_n^2 + \sinh^2(s_0) &= -1 \\
 -w_1^2 + \dots + w_n^2 &= -1 - \sinh^2(s_0) \\
 -w_1^2 + \dots + w_n^2 &= -\cosh^2(s_0).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$-\left(\frac{w_1}{\cosh(s_0)}\right)^2 + \dots + \left(\frac{w_n}{\cosh(s_0)}\right)^2 = -1.$$

Seja

$$\varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

uma parametrização ortogonal do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n-1} \subset \mathbb{L}^n$. Então,

$$\langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^n} = -\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2 = -1.$$

No que segue, vamos usar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{L}^n}$, pois são, essencialmente, o mesmo produto.

Fazendo $\varphi_i = \frac{w_i}{\cosh(s_0)}$ segue-se que $w_i = \cosh(s_0)\varphi_i$. Concluimos então que os pontos de $U(s_0)$ são da forma

$$(\cosh(s_0)\varphi_1, \dots, \cosh(s_0)\varphi_n, \sinh(s_0), a(s_0)).$$

Para toda isometria $\Phi \in \mathcal{I}$, as coordenadas $\sinh(s_0)$ e $a(s_0)$ de $\alpha(s_0)$ são mantidas por Φ . Além disso, $\Phi(\alpha(s_0)) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Logo $\mathcal{O}(\alpha(s_0)) \subset U(s_0)$. A fim de provar a recíproca, mostraremos que existe uma isometria $\Phi \in \mathcal{I}$ tal que

$$\Phi(\alpha(s_0)) = (\cosh(s_0)\varphi_1, \dots, \cosh(s_0)\varphi_n, \sinh(s_0), a(s_0)).$$

Uma parametrização ortogonal para φ é dada explicitamente por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \cosh(t_1), \\ \varphi_2 &= \sinh(t_1) \cos(t_2), \\ \varphi_3 &= \sinh(t_1) \sin(t_2) \cos(t_3), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1} &= \sinh(t_1) \sin(t_2) \dots \sin(t_{n-2}) \cos(t_{n-1}), \\ \varphi_n &= \sinh(t_1) \sin(t_2) \dots \sin(t_{n-2}) \sin(t_{n-1}). \end{aligned}$$

Observação 2.4. *A demonstração de que φ é uma parametrização ortogonal do espaço hiperbólico é análoga à demonstração feita no Lema 3.11 do Apêndice.*

$$\Phi_2 \circ \Phi_1(\alpha(s_0)) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & A_2 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(s_0) \cosh(t_1) \\ \cosh(s_0) \sinh(t_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sinh(s_0) \\ a(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(s_0) \cosh(t_1) \\ \cosh(s_0) \sinh(t_1) \cos(t_2) \\ \cosh(s_0) \sinh(t_1) \sin(t_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sinh(s_0) \\ a(s_0) \end{pmatrix}.$$

Prosseguindo sucessivamente dessa forma, obtemos $\Phi_{n-1} \circ \dots \circ \Phi_2(\alpha(s_0)) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & A_{n-1} \\ & & & & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(s_0) \cosh(t_1) \\ \cosh(s_0) \sinh(t_1) \cos(t_2) \\ \cosh(s_0) \sinh(t_1) \sin(t_2) \cos(t_3) \\ \vdots \\ \cosh(s_0) \sinh(t_1) \sin(t_2) \dots \sin(t_{n_2}) \\ 0 \\ \sinh(s_0) \\ a(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(s_0) \varphi_1 \\ \cosh(s_0) \varphi_2 \\ \vdots \\ \cosh(s_0) \varphi_{n-1} \\ \cosh(s_0) \varphi_n \\ \sinh(s_0) \\ a(s_0) \end{pmatrix}.$$

Encontrando assim, a isometria $\Phi = \Phi_{n-1} \circ \dots \circ \Phi_1$ desejada. Logo $\mathcal{O}(\alpha(s_0)) \supset U(s_0)$. E portanto,

$$\mathcal{O}(\alpha(s_0)) = U(s_0).$$

Uma parametrização para M^n será dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(s) \varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \cosh(s) \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \sinh(s), a(s)).$$

Por φ ser uma parametrização ortogonal, segue-se que

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle = \delta_{ij} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2.$$

Além disso $\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle = 0$, pois $\langle \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \rangle = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (\sinh(s)\varphi_1, \dots, \sinh(s)\varphi_n, \cosh(s), a'(s)), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(\cosh(s) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \cosh(s) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right), \\ \xi &= (\cosh(s)\varphi_1, \dots, \cosh(s)\varphi_n, \sinh(s), 0). \end{aligned}$$

Seja \bar{N} um campo normal sobre M^n em $\alpha(s)$. Então \bar{N} é ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i}, \xi$. De $\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = 0$ obtemos $\bar{N} = (\gamma\varphi_1, \dots, \gamma\varphi_n, x_{n+1}, x_{n+2})$, para alguma função γ . Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \\ &= -\gamma \sinh(s)\varphi_1^2 + \sum_{k=2}^n \gamma \sinh(s)\varphi_k^2 + x_{n+1} \cosh(s) + x_{n+2}a'(s) \\ &= \gamma \sinh(s)(-\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2) + x_{n+1} \cosh(s) + x_{n+2}a'(s) \\ &= -\gamma \sinh(s) + x_{n+1} \cosh(s) + x_{n+2}a'(s) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{N}, \xi \rangle \\ &= -\gamma \cosh(s)\varphi_1^2 + \sum_{k=2}^n \gamma \cosh(s)\varphi_k^2 + x_{n+1} \sinh(s) + 0 \\ &= \gamma \cosh(s)\langle \varphi, \varphi \rangle + x_{n+1} \sinh(s) \\ &= -\gamma \cosh(s) + x_{n+1} \sinh(s) \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.6) obtemos

$$\gamma = \frac{x_{n+1} \sinh(s)}{\cosh(s)},$$

substituindo em (2.5) obtemos $x_{n+1} = -x_{n+2}a'(s) \cosh(s)$ e voltando à equação de γ obtemos $\gamma = -x_{n+2}a'(s) \sinh(s)$. Logo,

$$\bar{N} = (-x_{n+2}a'(s) \sinh(s)\varphi_1, \dots, -x_{n+2}a'(s) \sinh(s)\varphi_n, -x_{n+2}a'(s) \cosh(s), x_{n+2}),$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle &= x_{n+2}^2 (a'(s))^2 \sinh^2(s) (-\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2) + x_{n+2}^2 (a'(s))^2 \cosh^2(s) \\
 &\quad + x_{n+2}^2 \\
 &= -x_{n+2}^2 (a'(s))^2 \sinh(s) + x_{n+2}^2 (a'(s))^2 \cosh^2(s) + x_{n+2}^2 \\
 &= x_{n+2}^2 (a'(s))^2 (\cosh^2(s) - \sinh^2(s)) + x_{n+2}^2 \\
 &= x_{n+2}^2 (a'(s))^2 + x_{n+2}^2 \\
 &= x_{n+2}^2 ((a'(s))^2 + 1).
 \end{aligned}$$

Sendo assim, $\|\bar{N}\| = |x_{n+2}| \sqrt{1 + (a'(s))^2}$ e portanto

$$\frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} (a'(s) \sinh(s) \varphi_1, \dots, a'(s) \sinh(s) \varphi_n, a'(s) \cosh(s), -1).$$

Com isso concluímos que, a menos de sinal, o campo normal unitário N sobre M^n em $\alpha(s)$ é dado por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} (a'(s) \sinh(s) \varphi_1, \dots, a'(s) \sinh(s) \varphi_n, a'(s) \cosh(s), -1).$$

Agora vamos ao cálculo do operador forma S . Primeiro veremos que S é diagonalizável.

Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= (\cosh(s) \varphi_1, \dots, \cosh(s) \varphi_n, \sinh(s), a''(s)), \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= \left(\sinh(s) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \sinh(s) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right), \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} &= \left(\cosh(s) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}, \dots, \cosh(s) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_j \partial t_i}, 0, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle \cosh(s) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0, 0 \right), N \right\rangle \\
 &= \frac{a'(s) \cosh(s) \sinh(s)}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle \\
 &= 0, \quad (i \neq j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle \sinh(s) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right), N \right\rangle \\
 &= \frac{a'(s) \sinh(s) \sinh(s)}{\sqrt{1 + (a'(s))^2}} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \varphi \right\rangle, \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Logo,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

e as curvaturas principais são dados por

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle (\sinh^2(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + \cosh^2(s) + (a'(s))^2)^{-1} \\
 &= \left\langle (\cosh(s) \varphi_1, \dots, \cosh(s) \varphi_n, \sinh(s), a''(s)), N \right\rangle (\cosh^2(s) - \sinh^2(s) \\
 &\quad + (a'(s))^2)^{-1} \\
 &= \frac{(1 + (a'(s))^2)^{-1}}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} (a'(s) \cosh(s) \sinh(s) \langle \varphi, \varphi \rangle + a'(s) \cosh(s) \sinh(s) \\
 &\quad - a''(s)) \\
 &= \frac{(1 + (a'(s))^2)^{-1}}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} (a'(s) \cosh(s) \sinh(s) - a'(s) \cosh(s) \sinh(s) - a''(s)) \\
 &= \frac{1}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} (-a''(s)) \\
 &= \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_{i-1}^2}, N \right\rangle \left(\cosh^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \left\langle \cosh(s) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, 0, 0 \right), N \right\rangle \left(\cosh^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{a'(s) \sinh(s) \cosh(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_{i-1}^2}, \varphi \right\rangle \left(\cosh^2(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{-a'(s) \sinh(s) \cosh(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \cosh^{-2}(s) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \frac{-a'(s) \sinh(s)}{\cosh(s) \sqrt{(a'(s))^2 + 1}} \\
 &= \frac{-a'(s) \tanh(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}}, \quad 2 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix},$$

com

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{-a'(s) \tanh(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{1/2}}.$$

Considere agora que a curva geratriz α seja uma reta vertical, isto é,

$$\alpha(s) = (\cosh(c), 0, \dots, 0, \sinh(c), s).$$

Então, uma parametrização para M^n será dada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(c)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \cosh(c)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \sinh(c), s).$$

Temos,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial s} &= (0, \dots, 0, 1), \\
 \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(\cosh(c) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \cosh(c) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right), \\
 \xi &= (\cosh(c)\varphi_1, \dots, \cosh(c)\varphi_n, \sinh(c), 0).
 \end{aligned}$$

Seja \bar{N} um campo normal sobre M^n em $\alpha(s)$. Então \bar{N} é ortogonal a $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i}, \xi$. De $\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = 0$ obtemos $\bar{N} = (\gamma\varphi_1, \dots, \gamma\varphi_n, x_{n+1}, x_{n+2})$, para alguma função γ . de $\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0$ obtemos $x_{n+2} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{N}, \xi \rangle \\ &= -\gamma \cosh(c)\varphi_1^2 + \sum_{k=2}^n \gamma \cosh(c)\varphi_k^2 + x_{n+1} \sinh(c) + 0 \\ &= \gamma \cosh(c)\langle \varphi, \varphi \rangle + x_{n+1} \sinh(c) \\ &= -\gamma \cosh(c) + x_{n+1} \sinh(c) \end{aligned}$$

Como $\cosh(c)$ é não nulo, segue-se que $\gamma = \frac{x_{n+1} \sinh(c)}{\cosh(c)} = x_{n+1} \tanh(c)$. Acarretando em,

$$\bar{N} = (x_{n+1} \tanh(c)\varphi_1, \dots, x_{n+1} \tanh(c)\varphi_n, x_{n+1}, 0),$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle &= x_{n+1}^2 \tanh^2(c)(-\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2) + x_{n+1}^2 \\ &= -x_{n+1}^2 \tanh^2(c) + x_{n+1}^2 \\ &= x_{n+1}^2(1 - \tanh^2(c)) \\ &= x_{n+1}^2 \operatorname{sech}^2(c). \end{aligned}$$

Logo $\|\bar{N}\| = |x_{n+1}| \operatorname{sech}(c)$ e

$$\frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} = \frac{\pm 1}{\operatorname{sech}(c)}(\tanh(c)\varphi_1, \dots, \tanh(c)\varphi_n, 1, 0).$$

Segue daí que, a menos de sinal, o campo normal unitário N sobre M^n em α é dado por

$$N = \frac{1}{\operatorname{sech}(c)}(\tanh(c)\varphi_1, \dots, \tanh(c)\varphi_n, 1, 0).$$

Da mesma forma que fizemos até o momento, iremos mostrar que o operador forma S é diagonalizável para então calcular as curvaturas principais. Primeiramente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= (0, \dots, 0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= (0, \dots, 0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} &= \left(\cosh(c) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}, \dots, \cosh(c) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_j \partial t_i}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle \cosh(c) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0, 0 \right), N \right\rangle \\
 &= \frac{\tanh(c) \cosh(c)}{\operatorname{sech}(c)} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \right\rangle \\
 &= 0, \quad (i \neq j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle (0, \dots, 0), N \right\rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle \\
 &= \left\langle (0, \dots, 0), N \right\rangle \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_{i-1}^2}, N \right\rangle \left(\cosh^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \left\langle \cosh(c) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_{i-1}^2}, 0, 0 \right), N \right\rangle \left(\cosh^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{\cosh(c) \tanh(c)}{\operatorname{sech}(c)} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_{i-1}^2}, \varphi \right\rangle \left(\cosh^2(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \right)^{-1} \\
 &= \frac{-\cosh(c) \tanh(c)}{\operatorname{sech}(c)} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle \cosh^{-2}(c) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{i-1}} \right\rangle^{-1} \\
 &= \frac{-\tanh(c)}{\cosh(c) \operatorname{sech}(c)} \\
 &= -\tanh(c), \quad 2 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -\tanh(c).$$

2.2.3 Plano de rotação degenerado

Considere o conjunto $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ em \mathbb{L}^{n+2} com as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}
 \langle e_i, e_j \rangle &= 0, \quad i, j \neq 1, n+1; \\
 \langle e_1, e_1 \rangle &= \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = 0; \\
 \langle e_1, e_{n+1} \rangle &= 1.
 \end{aligned}$$

Nestas condições dizemos que $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ é uma base pseudo-ortonormal para \mathbb{L}^{n+2} . Neste caso, iremos trabalhar com uma base pseudo-ortonormal de \mathbb{L}^{n+2} . Para tal vamos considerar $e_i = \partial_i$ para $i \neq 1, n+1$ e

$$e_1 = \frac{\partial_1 + \partial_{n+1}}{\sqrt{2}}, \quad e_{n+1} = \frac{-\partial_1 + \partial_{n+1}}{\sqrt{2}}.$$

Vamos utilizar a notação $v = (v_1, \dots, v_{n+2})_{\mathfrak{B}}$ para dizer que v está escrito na base pseudo-ortonormal \mathfrak{B} .

Dados $x = (x_1, \dots, x_{n+2})_{\mathfrak{B}}$ e $y = (y_1, \dots, y_{n+2})_{\mathfrak{B}}$ em \mathbb{L}^{n+2} , vale que

$$\langle x, y \rangle = (x_1 y_{n+1} + x_{n+1} y_1) + x_{n+2} y_{n+2} + \sum_{i=2}^n x_i y_i.$$

Considere $P^2 = [e_1, e_{n+2}]$. Seja $\alpha(r) = (x_1(r), 0, \dots, 0, x_{n+1}(r), x_{n+2}(r))$ em $(\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}) \cap P^3 = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$, uma curva que não intercepta P^2 . Por ser uma curva em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, vale que $-x_1^2(r) + x_{n+1}^2(r) = -1$. Segue daí, que uma parametrização para α é dada por

$$\alpha(r) = (\cosh(r), 0, \dots, 0, \sinh(r), b(r)),$$

para alguma função b .

Queremos escrever α na base \mathfrak{B} . Observe que

$$\partial_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_{n+1}), \quad \partial_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_{n+1}).$$

Como

$$\alpha(r) = \cosh(r)\partial_1 + \sinh(r)\partial_{n+1} + b(r)\partial_{n+2},$$

segue-se que

$$\alpha(r) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(r) + \sinh(r)), 0, \dots, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sinh(r) - \cosh(r)), b(r) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Utilizando o fato de que $\cosh(r) = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r})$ e $\sinh(r) = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r})$, podemos reescrever α na base \mathfrak{B} por

$$\alpha(r) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^r, 0, \dots, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-r}, b(r) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Para facilitar a notação, faça

$$s = \frac{\sqrt{2}}{2}e^r \implies -\frac{1}{2s} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-r},$$

e além disso, denote $a(s) = b(\ln(\sqrt{2}s)) = b(r)$.

Logo,

$$\alpha(s) = \left(s, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2s}, a(s) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Note que $s \neq 0$, ou seja, α realmente não intercepta $P^2 = [e_1, e_{n+2}]$.

Agora já podemos determinar a órbita $\mathcal{O}(\alpha(s_0))$ do ponto $\alpha(s_0)$, para um dado s_0 . Sejam $P^n(s_0)$, n -plano afim passando por $(s_0, 0, \dots, 0, a(s_0))_{\mathfrak{B}}$ paralelo a $P^n = [e_2, \dots, e_{n+1}]$ e $U(s_0) = P^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$

Dado um ponto $q = (s_0, w_2, \dots, w_{n+1}, a(s_0))_{\mathfrak{B}}$ de $U(s_0)$ reescreva-o na base canônica,

$$q = \left(\frac{s_0 - w_{n+1}}{\sqrt{2}}, w_2, \dots, w_n, \frac{s_0 + w_{n+1}}{\sqrt{2}}, a(s_0) \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{s_0 - w_{n+1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 + \left(\frac{s_0 + w_{n+1}}{\sqrt{2}}\right)^2 &= -1 \\ \frac{-s_0^2 + 2s_0w_{n+1} - w_{n+1}^2}{2} + w_2^2 + \dots + w_n^2 + \frac{s_0^2 + 2s_0w_{n+1} + w_{n+1}^2}{2} &= -1 \\ w_2^2 + \dots + w_n^2 + 2s_0w_{n+1} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{w_2}{s_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{w_n}{s_0}\right)^2 + \frac{2w_{n+1}}{s_0} + \frac{1}{s_0^2} = 0.$$

Seja

$$t_2^2 + \dots + t_n^2 + 2t_{n+1} + \frac{1}{s_0^2} = 0$$

uma parametrização para um parabolóide de \mathbb{E}^n .

Fazendo $t_i = \frac{w_i}{s_0}$ para $2 \leq i \leq n+1$, segue-se que $w_i = s_0 t_i$. Em particular,

$$t_{n+1} = -\frac{1}{2s_0^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2.$$

Dai,

$$w_{n+1} = -\frac{1}{2s_0} - \frac{s_0}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2.$$

E com isso concluimos que os pontos de $U(s_0)$ são da forma

$$\left(s_0, s_0 t_2, \dots, s_0 t_n, -\frac{1}{2s_0} - \frac{s_0}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a(s_0) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Note que $\mathcal{O}(\alpha(s_0)) \subset U(s_0)$, pois $P^2 = [e_1, e_{n+2}]$ é fixado ponto a ponto por cada isometria $\Phi \in \mathcal{I}$, daí as coordenadas s_0 e $a(s_0)$ de $\alpha(s_0)$ serão mantidas por Φ , e consequentemente $\Phi(\alpha(s_0))$ está contido no n-plano afim $P^n(s_0)$. Como Φ mantém $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ invariante, $\Phi(\alpha(s_0))$ pertence a $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Para mostrar que $\mathcal{O}(\alpha(s_0)) \supset U(s_0)$, iremos verificar a existência de uma isometria $\Phi \in \mathcal{I}$ tal que

$$\Phi(\alpha(s_0)) = \left(s_0, s_0 t_2, \dots, s_0 t_n, -\frac{1}{2s_0} - \frac{s_0}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a(s_0) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Na base \mathfrak{B} , para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ considere a aplicação $A_i : \mathbb{L}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{L}^{n+2}$, dada pela matriz $(n+2) \times (n+2)$

$$A_i = \left(\begin{array}{cccccccc} & & & & i^{\text{a}} \text{ coluna} & & & \\ & & & & \downarrow & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ t_i & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & 1 & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ -t_i^2 & 0 & 0 & \dots & -t_i & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow i^{\text{a}} \text{ linha,}$$

onde as $(n-2)$ linhas não escritas formam matriz

$$\left(\begin{array}{cccccccc} & & & & i & & & \\ 0 & b_{22}^i & b_{23}^i & \dots & \overbrace{0}^i & b_{2,i+1}^i & b_{2n}^i & 0 & 0 \\ 0 & b_{32}^i & b_{33}^i & \dots & 0 & b_{3,i+1}^i & b_{3n}^i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2}^i & b_{n3}^i & \dots & 0 & b_{n,i+1}^i & b_{nn}^i & 0 & 0 \end{array} \right),$$

e $B_i = (b_{\beta\gamma}^i)$ é uma matriz ortogonal $(n-2) \times (n-2)$ com $2 \leq \beta, \gamma \leq n$ e $\beta, \gamma \neq i$.

Claramente $P^2 = [e_1, e_{n+2}]$ é fixado por cada A_i . A seguir vamos verificar que A_i é uma isometria. Dado $x = \sum x_k e_k$ com $1 \leq k \leq n+2$, temos que

$$A_i(x) = \left(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, t_i x_1 + x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n, -\frac{t_i^2 x_1}{2} - t_i x_i + x_{n+1}, x_{n+2} \right)_{\mathfrak{B}},$$

onde

$$\bar{x}_\beta = \sum_{j=2}^{i-1} x_j b_{\beta j}^i + \sum_{j=i+1}^n x_j b_{\beta j}^i,$$

é tal que $B_i(\sum x_\beta e_\beta) = (\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)$. Uma vez que B_i é uma transformação ortogonal,

segue-se que $\sum x_\beta^2 = \sum \bar{x}_\beta^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle A_i(x), A_i(x) \rangle &= 2x_1 \left(-\frac{t_i^2 x_1}{2} - t_i x_i + x_{n+1} \right) + x_{n+2}^2 + (t_i x_1 + x_i)^2 + \sum \bar{x}_\beta^2 \\ &= 2x_1 x_{n+1} + x_{n+2}^2 + x_i^2 + \sum x_\beta^2 \\ &= 2x_1 x_{n+1} + x_{n+2}^2 + \sum_{j=2}^n x_j^2 \\ &= \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

A fim de concluir que A_i pertence a \mathcal{I} nos resta verificar que A_i mantém $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ invariante. Seja

$$x = (x_1, \dots, x_{n+2})_{\mathfrak{B}} = \left(\frac{x_1 - x_{n+1}}{\sqrt{2}}, x_2, \dots, x_n, \frac{x_1 - x_{n+1}}{\sqrt{2}}, x_{n+2} \right)$$

um ponto de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} -1 &= -\left(\frac{x_1 - x_{n+1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \left(\frac{x_1 - x_{n+1}}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= 2x_1 x_{n+1} + \sum_{j=2}^n x_j^2. \end{aligned}$$

Ou seja, $x = (x_1, \dots, x_{n+2})_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ se, só, se

$$2x_1 x_{n+1} + \sum_{j=2}^n x_j^2 = -1.$$

A partir daí, como

$$A_i(x) = \left(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, t_i x_1 + x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n, -\frac{t_i^2 x_1}{2} - t_i x_i + x_{n+1}, x_{n+2} \right)_{\mathfrak{B}},$$

segue-se que

$$2x_1 \left(-\frac{t_i^2 x_1}{2} - t_i x_i + x_{n+1} \right) + (t_i x_1 + x_i)^2 + \sum \bar{x}_\beta^2 = 2x_1 x_{n+1} + \sum_{j=2}^n x_j^2.$$

Logo $A_i(x) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ e portanto $A_i \in \mathcal{I}$ como queríamos.

Aplicando para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, temos

$$\begin{aligned} A_2(\alpha(s_0)) &= \left(s_0, s_0 t_2, 0, \dots, 0, -\frac{s_0 t_2^2}{2} - \frac{1}{2s_0}, a(s_0) \right)_{\mathfrak{B}}, \\ A_3 \circ A_2(\alpha(s_0)) &= \left(s_0, s_0 t_2, s_0 t_3, 0, \dots, 0, -\frac{s_0 t_3^2}{2} - \frac{s_0 t_2^2}{2} - \frac{1}{2s_0}, a(s_0) \right)_{\mathfrak{B}}, \\ A_4 \circ A_3 \circ A_2(\alpha(s_0)) &= \left(s_0, s_0 t_2, s_0 t_3, s_0 t_4, 0, \dots, 0, -\frac{s_0 t_4^2}{2} - \frac{s_0 t_3^2}{2} - \frac{s_0 t_2^2}{2} - \frac{1}{2s_0}, a(s_0) \right)_{\mathfrak{B}}, \\ &\vdots \\ A_n \circ \dots \circ A_2(\alpha(s_0)) &= \left(s_0, s_0 t_2, \dots, s_0 t_n, -\frac{1}{2s_0} - \frac{s_0}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a(s_0) \right)_{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que $\mathcal{O}(\alpha(s_0)) \supset U(s_0)$. Sendo assim,

$$\mathcal{O}(\alpha(s_0)) = U(s_0).$$

Portanto, uma parametrização para a hipersuperfície de rotação M^n gerada por α em torno de $P^2 = [e_1, e_{n+2}]$ é dada por

$$f(s, t_2, \dots, t_n) = \left(s, s t_2, \dots, s t_n, -\frac{1}{2s} - \frac{s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a(s) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \left(1, t_2, \dots, t_n, \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a'(s) \right)_{\mathfrak{B}}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= (0, \dots, 0, s, 0, \dots, 0, -s t_i, 0)_{\mathfrak{B}}, \\ \xi &= \left(s, s t_2, \dots, s t_n, -\frac{1}{2s} - \frac{s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, 0 \right)_{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Seja $\bar{N} = (x_1, \dots, x_{n+2})_{\mathfrak{B}}$ um campo normal sobre M^n em $\alpha(s)$. Então,

$$\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = \langle \bar{N}, \xi \rangle = 0.$$

Observe que,

$$\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \frac{x_1}{2s^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+1} + x_{n+2} a'(s) + \sum_{i=2}^n x_i t_i; \quad (2.7)$$

$$\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = -x_1 s t_i + s x_i = s(x_i - x_1 t_i), \quad 2 \leq i \leq n; \quad (2.8)$$

$$\langle \bar{N}, \xi \rangle = -\frac{x_1}{2s} - \frac{x_1 s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+1} s + \sum_{i=2}^n s x_i t_i; \quad (2.9)$$

Da equação (2.8) obtemos $x_i = x_1 t_i$ para $2 \leq i \leq n$, pois $s \neq 0$. Substituindo nas equações (2.7) e (2.9), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x_1}{2s^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+1} + x_{n+2}a'(s) + x_1 \sum_{i=2}^n t_i^2 \\ &= \frac{x_1}{2s^2} + \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+1} + x_{n+2}a'(s) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{x_1}{2s} - \frac{x_1 s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+1} s + s x_1 \sum_{i=2}^n t_i^2 \\ &= -\frac{x_1}{2s} + \frac{x_1 s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+1} s \\ &= -\frac{x_1}{2s^2} + \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.11) segue-se que

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{2s^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2.$$

Substituindo o valor de x_{n+1} em (2.10),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x_1}{2s^2} + \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + \left(\frac{x_1}{2s^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 \right) + x_{n+2}a'(s) \\ &= \frac{x_1}{s^2} + x_{n+2}a'(s) \implies x_1 = -s^2 x_{n+2}a'(s) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \left(x_1, x_1 t_2, \dots, x_1 t_n, \frac{x_1}{2s^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, x_{n+2} \right)_{\mathfrak{B}} \\ &= \left(-s^2 x_{n+2}a'(s), -s^2 x_{n+2}a'(s)t_2, \dots, -s^2 x_{n+2}a'(s)t_n, \right. \\ &\quad \left. -\frac{x_{n+2}a'(s)}{2} + \frac{s^2 x_{n+2}a'(s)}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, x_{n+2} \right)_{\mathfrak{B}} \end{aligned}$$

Agora vamos normalizar \overline{N} .

$$\begin{aligned}
 \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle &= 2(-s^2 x_{n+2} a'(s)) \left(-\frac{x_{n+2} a'(s)}{2} + \frac{s^2 x_{n+2} a'(s)}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 \right) + x_{n+2}^2 \\
 &\quad + (-s^2 x_{n+2} a'(s))^2 \sum_{i=2}^n t_i^2 \\
 &= s^2 x_{n+2}^2 a'(s)^2 - (s^2 x_{n+2} a'(s))^2 \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_{n+2}^2 + (s^2 x_{n+2} a'(s))^2 \sum_{i=2}^n t_i^2 \\
 &= s^2 x_{n+2}^2 a'(s)^2 + x_{n+2}^2 \\
 &= s^2 x_{n+2}^2 \left(a'(s)^2 + \frac{1}{s^2} \right).
 \end{aligned}$$

Logo, $|\overline{N}| = |s x_{n+2}| \sqrt{\frac{1}{s^2} + a'(s)^2}$, e portanto,

$$\frac{\overline{N}}{|\overline{N}|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{1}{s^2} + a'(s)^2}} \left(sa'(s), sa'(s)t_2, \dots, sa'(s)t_n, -\frac{a'(s)}{2s} + \frac{sa'(s)}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, -\frac{1}{s} \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Sendo assim, a menos de sinal, concluímos que

$$N = \frac{1}{(s^{-2} + a'(s)^2)^{1/2}} \left(sa'(s), sa'(s)t_2, \dots, sa'(s)t_n, -\frac{a'(s)}{2s} + \frac{sa'(s)}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, -\frac{1}{s} \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Já reunimos condições para o cálculo do operador forma S . Assim como fizemos nos casos anteriores, primeiro vamos verificar que o operador forma S é diagonalizado por $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_n} \right\}$.

Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= (0, \dots, 0, -s^{-3}, a''(s))_{\mathfrak{B}}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -t_i, 0)_{\mathfrak{B}}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} &= (0, \dots, 0)_{\mathfrak{B}}, \quad i \neq j, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2} &= (0, \dots, 0, -s, 0)_{\mathfrak{B}}
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle = 0, \quad i \neq j, \\ \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle \\ &= \langle (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -t_i, 0)_{\mathfrak{B}}, N \rangle \\ &= -t_i s a'(s) + t_i s a'(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

As curvaturas principais são dadas por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle \left(\frac{1}{s^2} - \sum_{i=2}^n t_i^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2 + a'(s)^2 \right)^{-1} \\ &= \langle (0, \dots, 0, -s^{-3}, a''(s))_{\mathfrak{B}}, N \rangle (s^{-2} + a'(s)^2)^{-1} \\ &= (-s^{-3} s a'(s) - s^{-1} a''(s)) (s^{-2} + a'(s)^2)^{-1/2} (s^{-2} + a'(s)^2)^{-1} \\ &= -(s^{-2} a'(s) + s^{-1} a''(s)) (s^{-2} + a'(s)^2)^{-3/2} \\ &= -s^{-3} (s^{-2} a'(s) + s^{-1} a''(s)) s^3 (1 + s^2 a'(s)^2)^{-3/2} \\ &= -(s a'(s) + s^2 a''(s)) (1 + s^2 a'(s)^2)^{-3/2}, \\ a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle^{-1} \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}, N \right\rangle (s^2)^{-1} \\ &= \left\langle (0, \dots, 0, -s, 0)_{\mathfrak{B}}, N \right\rangle s^{-2} \\ &= (-s^2 a'(s)) (s^{-2} + a'(s)^2)^{-1/2} s^{-2} \\ &= (-s^2 a'(s)) s^{-1} (s^{-2} + a'(s)^2)^{-1/2} s^{-1} \\ &= (-s a'(s)) (1 + s^2 a'(s)^2)^{-1/2}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Segue daí,

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix},$$

onde

$$\lambda = -\frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{sa'(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{1/2}}.$$

Agora, suponha α uma reta vertical. Neste caso α pode ser parametrizada por

$$\alpha(s) = \left(c, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2c}, s \right)_{\mathfrak{B}}$$

onde c é uma constante.

Uma parametrização para M^n é dada por

$$f(s, t_2, \dots, t_n) = \left(c, ct_2, \dots, ct_n, -\frac{1}{2c} - \frac{c}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a(s) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (0, \dots, 0, 1)_{\mathfrak{B}}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= (0, \dots, 0, c, 0, \dots, 0, -ct_i, 0)_{\mathfrak{B}}, \\ \xi &= \left(c, ct_2, \dots, ct_n, -\frac{1}{2c} - \frac{c}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, 0 \right)_{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Seja $\bar{N} = (x_1, \dots, x_{n+2})_{\mathfrak{B}}$ tal que

$$\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = \langle \bar{N}, \xi \rangle = 0.$$

Observe que,

$$\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = x_{n+2}; \tag{2.12}$$

$$\left\langle \bar{N}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = -x_1 ct_i + cx_i = c(x_i - x_1 t_i), \quad 2 \leq i \leq n; \tag{2.13}$$

$$\langle \bar{N}, \xi \rangle = -\frac{x_1}{2c} + \frac{cx_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 + cx_{n+1}; \tag{2.14}$$

De (2.12) obtemos $x_{n+2} = 0$, de (2.13) obtemos $x_i = x_1 t_i$ para $2 \leq i \leq n$ e de (2.14)

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{2c^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \left(x_1, x_1 t_2, \dots, x_1 t_n, \frac{x_1}{2c^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, 0 \right)_{\mathfrak{B}}; \\ \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle &= 2x_1 \left(\frac{x_1}{2c^2} - \frac{x_1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2 \right) + x_1^2 \sum_{i=2}^n t_i^2 \\ &= \frac{x_1^2}{c^2} - x_1^2 \sum_{i=2}^n t_i^2 + x_1^2 \sum_{i=2}^n t_i^2 = \left(\frac{x_1}{c} \right)^2; \\ \|\bar{N}\| &= \frac{|x_1|}{|c|}; \\ \frac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|} &= \pm c \left(1, t_2, \dots, t_n, \frac{1}{2c^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, 0 \right)_{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Portanto, a menos de sinal,

$$N = c \left(1, t_2, \dots, t_n, \frac{1}{2c^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, 0 \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Veja que,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2} = (0, \dots, 0, -c, 0)_{\mathfrak{B}}, \quad i \neq j.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle = 0, \quad i \neq j, \\ \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

isto é, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_n} \right\}$ diagonaliza S . A partir daí,

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle = 0, \\
 a_{ii} &= \left\langle S \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle^{-1} \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}, N \right\rangle (c^2)^{-1} \\
 &= \left\langle (0, \dots, 0, -c, 0)_{\mathfrak{B}}, N \right\rangle c^{-2} \\
 &= -c^2 c^{-2} = -1.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix},$$

onde

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -1.$$

2.3 Critério

Acabamos de ver como parametrizar uma hipersuperfície de rotação em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e calculamos as curvaturas principais. Vimos também que, para cada possibilidade de plano de rotação, o operador forma S é do tipo

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix}.$$

Daí uma pergunta natural: Se M^n é uma hipersuperfície de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ que possui operador forma como descrito acima, seria M^n de rotação? A resposta para tal pergunta se encontra

no próximo teorema. Podemos adiantar que, com certas hipóteses adicionais, a resposta é sim.

Teorema 2.5 (Critério). *Seja $f : M^n \longrightarrow Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície conexa, $n \geq 3$, com operador forma dado por*

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix}$$

e $\lambda \neq \mu$. Suponha que $ST = \lambda T$ e que λ seja uma função de μ , isto é, $\lambda = \lambda(\mu)$. Então M^n está contida em uma hipersuperfície de rotação.

Demonstração: Denote por \mathcal{D}_λ e \mathcal{D}_μ as distribuições geradas pelos auto-espaços referentes a λ e μ respectivamente. Veja que \mathcal{D}_λ é uma distribuição involutiva, pois é uma distribuição de dimensão 1. A seguir mostraremos que \mathcal{D}_μ também é uma distribuição involutiva. Para tal vamos utilizar a equação de Codazzi (1.3). Dados $X, Y \in \mathcal{D}_\mu$ linearmente independentes, temos que

$$S[X, Y] = \nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - \varepsilon \cos \theta [\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y].$$

Observe que \mathcal{D}_μ e \mathcal{D}_λ são espaços ortogonais, isto é, para $V \in \mathcal{D}_\mu$ e $W \in \mathcal{D}_\lambda$ arbitrários, $\langle V, W \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)\langle V, W \rangle &= \langle V, \lambda W \rangle - \langle \mu V, W \rangle \\ &= \langle V, SW \rangle - \langle SV, W \rangle \\ &= \langle SV, W \rangle - \langle SV, W \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

De $\lambda \neq \mu$ concluímos o que queríamos. Como $T \in \mathcal{D}_\lambda$ temos $\langle X, T \rangle = \langle Y, T \rangle = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} S[X, Y] &= \nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) \\ &= \nabla_X(\mu Y) - \nabla_Y(\mu X) \\ &= X(\mu)Y - Y(\mu)X + \mu \nabla_X(Y) - \mu \nabla_Y(X) \\ &= X(\mu)Y - Y(\mu)X + \mu[X, Y], \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} S[X, Y] - \mu[X, Y] &= X(\mu)Y - Y(\mu)X \\ (S - \mu\text{id})[X, Y] &= X(\mu)Y - Y(\mu)X. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} S(X(\mu)Y - Y(\mu)X) &= X(\mu)SY - Y(\mu)SX \\ &= X(\mu)\mu Y - Y(\mu)\mu X \\ &= \mu(X(\mu)Y - Y(\mu)X), \end{aligned}$$

o que implica em $(X(\mu)Y - Y(\mu)X) \in \mathcal{D}_\mu$.

Por outro lado, mostraremos que $(S - \mu\text{id})[X, Y] \in \mathcal{D}_\lambda$. A fim de verificar essa última afirmação mostraremos primeiro que $(S - \lambda\text{id})(S - \mu\text{id}) \equiv 0$.

Seja W tangente a M^n . Escreva $W = W_\lambda + W_\mu$ de modo que $W_\lambda \in \mathcal{D}_\lambda$ e $W_\mu \in \mathcal{D}_\mu$.

Daí,

$$\begin{aligned} (S - \mu\text{id})W &= S(W_\lambda + W_\mu) - \mu(W_\lambda + W_\mu) \\ &= \lambda W_\lambda + \mu W_\mu - \mu W_\lambda - \mu W_\mu \\ &= (\lambda - \mu)W_\lambda. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} (S - \lambda\text{id})(S - \mu\text{id})W &= (S - \lambda\text{id})(\lambda - \mu)W_\lambda \\ &= (\lambda - \mu)(SW_\lambda - \lambda W_\lambda) \\ &= (\lambda - \mu)(\lambda W_\lambda - \lambda W_\lambda) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} (S - \lambda\text{id})((S - \mu\text{id})[X, Y]) &= 0 \\ S((S - \mu\text{id})[X, Y]) &= \lambda(S - \mu\text{id})[X, Y], \end{aligned}$$

implicando em $(S - \mu\text{id})[X, Y] \in \mathcal{D}_\lambda$. Como a interseção entre os auto-espacos relativos a λ e μ é o vetor nulo, segue-se que

$$(S - \mu\text{id})[X, Y] = X(\mu)Y - Y(\mu)X = 0.$$

Portanto, $S[X, Y] = \mu[X, Y]$, ou seja, $[X, Y] \in \mathcal{D}_\mu$ e com isso concluímos que \mathcal{D}_μ é involutiva como queríamos.

Uma vez que \mathcal{D}_λ e \mathcal{D}_μ são involutivas, pelo teorema de Frobenius, são completamente integráveis. Para cada $p \in M^n$ denote por $M_\lambda(p)$ e $M_\mu(p)$ as folhas de \mathcal{D}_λ e \mathcal{D}_μ passando por p . Como $X(\mu)Y - Y(\mu)X = 0$ e X, Y são linearmente independentes devemos ter $X(\mu) = Y(\mu) = 0$, acarretando em μ constante ao longo das folhas de \mathcal{D}_μ . Conseqüentemente $\lambda = \lambda(\mu)$ também é constante ao longo das folhas de \mathcal{D}_μ .

Em uma vizinhança de $p \in M^n$, escolha coordenadas t_1, \dots, t_{n-1} e s de modo que t_1, \dots, t_{n-1} são coordenadas locais em $M_\mu(p)$ e s é uma coordenada em $M_\lambda(p)$. Faça $T = \frac{\partial}{\partial s}$, $U_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$, e denote por N o normal unitário da imersão f . Para mostrar que M^n é hipersuperfície de rotação em uma vizinhança de p , mostraremos que $M_\mu(p)$ é totalmente umbílica no respectivo espaço ambiente e, conseqüentemente, está contida em um subespaço P^n , e que $M_\lambda(p)$ é uma curva contida em um subespaço P^3 , satisfazendo a definição de hipersuperfície de rotação.

Primeiro iremos verificar que $M_\mu(p)$ é totalmente umbílica em \mathbb{E}^{n+2} , respectivamente em \mathbb{L}^{n+2} . Sejam D a conexão do espaço ambiente e $\tilde{\nabla}$ a conexão de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} D_{U_i}\xi &= U_i - \langle U_i, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2} \\ &= U_i - \langle U_i, T \rangle \partial_{n+2} \\ &= U_i. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como $D_{U_i}N = \tilde{\nabla}_{U_i}N + c\xi$, temos que

$$c = \varepsilon \langle D_{U_i}N, \xi \rangle = -\varepsilon \langle N, D_{U_i}\xi \rangle = -\varepsilon \langle N, U_i \rangle = 0,$$

acarretando em $D_{U_i}N = \tilde{\nabla}_{U_i}N$.

Lembre-se que $\langle N, N \rangle = 1$, então $\langle \tilde{\nabla}_{U_i}N, N \rangle = 0$, ou seja, $\tilde{\nabla}_{U_i}N$ não possui componente normal. Sendo assim,

$$SU_i = -(\tilde{\nabla}_{U_i}N)^T = -\tilde{\nabla}_{U_i}N.$$

Logo,

$$D_{U_i}N = -SU_i = -\mu U_i. \tag{2.16}$$

Analogamente, temos $D_T N = \tilde{\nabla}_T N + c\xi$, daí

$$\begin{aligned} c &= \varepsilon \langle D_T N, \xi \rangle = -\varepsilon \langle N, D_T \xi \rangle \\ &= -\varepsilon \langle N, T - \langle T, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2} \rangle \\ &= \varepsilon \langle T, \partial_{n+2} \rangle \langle N, \partial_{n+2} \rangle \\ &= \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta), \end{aligned}$$

então $D_T N = \tilde{\nabla}_T N + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) \xi$.

Sendo N unitário, $\tilde{\nabla}_T N$ não possui componente normal, daí $ST = -\tilde{\nabla}_T N$ implicando em

$$\begin{aligned} D_T N &= -ST + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) \xi \\ &= -\lambda T + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) \xi. \end{aligned}$$

Note que

$$[U_i, T] = \left[\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = 0.$$

Além disso, por (1.4),

$$U_i(\cos(\theta)) = -\langle S U_i, T \rangle = -\mu \langle U_i, T \rangle = 0,$$

logo θ é constante ao longo de $M_\mu(p)$. Veja que o mesmo ocorre com $\langle T, T \rangle = \sin^2(\theta)$. A partir dessas observações, lembrando que o espaço ambiente é plano e denotando por λ' e μ' as derivadas de λ e μ em relação a s , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = R(U_i, T)N &= D_T D_{U_i} N - D_{U_i} D_T N + D_{[U_i, T]} N \\ &= D_T(-\mu U_i) - D_{U_i}(-\lambda T + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) \xi) + 0 \\ &= -T(\mu) U_i - \mu D_T(U_i) + \lambda D_{U_i} T - \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) D_{U_i} \xi \\ &= -\mu' U_i - \mu D_T(U_i) + \lambda D_{U_i} T - \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) U_i \\ &= -\mu' U_i - \mu D_{U_i} T + \lambda D_{U_i} T - \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) U_i \\ &= -\mu' U_i + (\lambda - \mu) D_{U_i} T - \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) U_i. \end{aligned}$$

Donde,

$$D_{U_i} T = \frac{\mu' + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta)}{\lambda - \mu} U_i \quad (2.17)$$

Das equações (2.15),(2.16) e (2.17) concluímos que $M_\mu(p)$ é totalmente umbílica no espaço ambiente como queríamos. Segue daí que $M_\mu(p) \subset P^n(p)$, onde $P^n(p)$ é um subespaço afim n -dimensional de \mathbb{E}^{n+2} , respectivamente de \mathbb{L}^{n+2} .

A seguir vamos mostrar que os subespaços $P^n(p)$ que correspondem a folhas distintas de \mathcal{D}_μ , ao longo de $M_\lambda(p)$, são paralelos no espaço ambiente.

Considere os seguintes campos de vetores ao longo de $M_\mu(p)$:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\mu' + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta)}{\lambda - \mu} N + \mu T \\ Y &= \xi + \frac{1}{\mu} N \end{aligned}$$

Veja que X e Y são ortogonais a $P^n(p)$, pois $\langle X, U_i \rangle = \langle Y, U_i \rangle = 0$. Além disso, X e Y são constantes ao longo de $M_\mu(p)$. De fato,

$$\begin{aligned} D_{U_i} X &= \frac{\mu' + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta)}{\lambda - \mu} D_{U_i} N + \mu D_{U_i} T \\ &= \frac{\mu' + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta)}{\lambda - \mu} (-\mu' U_i) + \mu \left(\frac{\mu' + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta)}{\lambda - \mu} U_i \right) \\ &= \frac{\mu' + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta)}{\lambda - \mu} (-\mu' U_i + \mu' U_i) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{U_i} Y &= D_{U_i} \xi + \frac{1}{\mu} D_{U_i} N \\ &= U_i + \frac{1}{\mu} (-\mu' U_i) \\ &= U_i - U_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por ξ , N e T serem ortogonais, pode-se verificar que X e Y são linearmente independentes, assim faz sentido consideramos o plano gerado por $X(p)$ e $Y(p)$. Vamos denotá-lo por $\pi(p)$. Claramente $\pi(p)$ é ortogonal a $P^n(p)$, mais precisamente, $\pi(p)$ é o complemento ortogonal de $P^n(p)$ no espaço ambiente. Dessa forma, a fim de mostrar que os planos $P^n(p)$ são paralelos ao longo de $M_\lambda(p)$, basta verificar que os planos $\pi(p)$ o são. Para isso, vamos usar o Lema 1.24.

Veja que, se $V \in \pi(p)$, então $V = aX + bY$ e $D_T V = a'X + aD_T X + b'X + bD_T Y$, sendo assim, ao mostrar que $D_T X$ e $D_T Y$ pertencem a $\pi(p)$ podemos concluir que $D_T V$ também pertence a $\pi(p)$, e pelo Lema 1.24 segue-se que $\pi(p)$ é paralelo ao longo de $M_\lambda(p)$.

Primeiramente veja que

$$\begin{aligned}
 0 = R(U_i, T)X &= D_T D_{U_i} X - D_{U_i} D_T X + D_{[U_i, T]} X \\
 &= D_T D_{U_i} X - D_{U_i} D_T X, \\
 \implies D_{U_i} D_T X &= D_T D_{U_i} X = D_T 0 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = R(U_i, T)Y &= D_T D_{U_i} Y - D_{U_i} D_T Y + D_{[U_i, T]} Y \\
 &= D_T D_{U_i} Y - D_{U_i} D_T Y, \\
 \implies D_{U_i} D_T Y &= D_T D_{U_i} Y = D_T 0 = 0.
 \end{aligned}$$

De $\langle X, U_i \rangle = \langle X, U_i \rangle = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle D_T X, U_i \rangle + \langle X, D_T U_i \rangle \\
 &= \langle D_T X, U_i \rangle + \langle X, D_{U_i} T \rangle \\
 &= \langle D_T X, U_i \rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle D_T Y, U_i \rangle + \langle Y, D_T U_i \rangle \\
 &= \langle D_T Y, U_i \rangle + \langle Y, D_{U_i} T \rangle \\
 &= \langle D_T Y, U_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Logo $D_T X$ e $D_T Y$ são vetores constantes ao longo de $M_\mu(p)$ e ortogonais a $F^n(p)$, consequentemente pertencem a $\pi(p)$ como queríamos. Sendo assim, os planos $\pi(p)$ são paralelos ao longo de $M_\lambda(p)$ e portanto o mesmo ocorre com os planos $F^n(p)$.

Agora vamos mostrar que $M_\lambda(p)$ é uma curva contida em um espaço 3-dimensional assim como na definição 2.2. Ao longo de $M_\lambda(p)$, considere o espaço 3-dimensional $[\xi, N, T]$.

Observe que

$$D_T N = -\lambda T + \varepsilon \langle T, T \rangle \cos(\theta) \xi,$$

$$\begin{aligned} D_T \xi &= T - \langle T, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2} \\ &= T - \langle T, T \rangle (T + \cos(\theta) N), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_T T &= D_T \partial_{n+2} + D_T (\cos(\theta) N) \\ &= T (\cos(\theta)) N + \cos(\theta) D_T N. \end{aligned}$$

Ou seja, $D_T N$, $D_T \xi$ e $D_T T$ pertencem a $[\xi, N, T]$. Assim, dado $V = a\xi + bN + cT$ em $[\xi, N, T]$, segue-se que $D_T V \in [\xi, N, T]$ e portanto, pelo Lema 1.24, $[\xi, N, T]$ é paralelo ao longo de $M_\lambda(p)$. A partir do Lema 1.23, concluímos que $M_\lambda(p)$ está contida em um espaço 3-dimensional P^3 do espaço ambiente.

Seja $\bar{\pi}$ uma plano paralelo a $\pi(p)$ que não toca $M_\lambda(p)$. Como X e Y pertencem a $[\xi, N, T]$ o mesmo ocorre com o plano $\bar{\pi}$. Nestas condições, ao variar P^n ao longo de $M_\lambda(p)$, a interseção com $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ nos fornece uma hipersuperfície de rotação com plano de rotação $\bar{\pi}$ e curva geratriz $M_\lambda(p)$.

Observe que provamos o resultado para uma vizinhança de um ponto $p \in M^n$ arbitrário. Por um argumento padrão de conexidade, podemos concluir que M^n está contida em uma hipersuperfície de rotação. Tome p, q distintos em M^n . Então existem vizinhanças Ω_p, Ω_q de p e q respectivamente, as quais estão contidas em hipersuperfícies de rotação. Por hipótese M^n é conexa, logo conexa por caminhos. Considere um caminho $\beta : [0, 1] \rightarrow M^n$ tal que $\beta(0) = p$ e $\beta(1) = q$. Para cada $t \in [0, 1]$, seja Ω_t uma vizinhança de $\beta(t)$ contida em uma hipersuperfícies de rotação. Como $\beta([0, 1])$ é um conjunto compacto existem t_1, \dots, t_k tais que $\beta([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^k \Omega_{t_i}$ e de modo que, $\Omega_{t_i} \cap \Omega_{t_{i+1}} \neq \emptyset$, $\Omega_{t_1} = \Omega_p$ e $\Omega_{t_k} = \Omega_q$. Como $\Omega_{t_i} \cap \Omega_{t_{i+1}} \neq \emptyset$ temos Ω_{t_i} e $\Omega_{t_{i+1}}$ contidas na mesma hipersuperfícies de rotação. Sendo assim, indutivamente concluímos que Ω_p e Ω_q estão contidas na mesma hipersuperfícies de rotação, ou seja p e q pertencem as mesma hipersuperfícies de rotação. ■

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo, faremos algumas aplicações dos resultados obtidos no Capítulo 2. Vamos classificar hipersuperfícies de rotação intrinsecamente planas de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Mostraremos que hipersuperfícies de rotação de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ são normalmente planas no espaço ambiente e vamos finalizar determinando todas as hipersuperfícies de rotação mínimas de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Durante as demonstrações iremos constantemente recorrer aos cálculos realizados no capítulo 2.

3.1 Hipersuperfícies de Rotação intrinsecamente planas

Hipersuperfícies de rotação de \mathbb{E}^{n+1} são planas se, só, se $n = 2$ e a curva geratriz é uma parte aberta de uma reta. Iremos agora classificar hipersuperfícies de rotação de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.1. *Seja M^n uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ intrinsecamente plana, com plano de rotação P^2 como descrito anteriormente. Então $n = 2$ e a curva geratriz α ou é uma reta vertical ou é parametrizada por*

$$\alpha(s) = \left(\cos(s), 0, \sin(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2(\sigma) - 1} d\sigma \right),$$

com $C \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos escrever a equação de Gauss (1.2) utilizando as curvaturas principais obtidas anteriormente. Já vimos que $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ diagonaliza o operador forma S . Além disso,

$$S \frac{\partial f}{\partial s} = \lambda \frac{\partial f}{\partial s} \quad \text{e} \quad S \frac{\partial f}{\partial t_i} = \mu \frac{\partial f}{\partial t_i}.$$

Para facilitar os cálculos, vamos denotar $u = \frac{\partial f}{\partial s}$ e $v_i = \frac{\partial f}{\partial t_i}$. Sabemos que $\partial_{n+2} = T + \cos(\theta)N$, onde T é a projeção de ∂_{n+2} sobre o espaço tangente de M^n . Então na base $\{u, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ temos

$$T = \frac{\langle u, \partial_{n+2} \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i, \partial_{n+2} \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i.$$

Lembre-se que

$$\begin{aligned} \partial_{n+2} &= (0, \dots, 0, 1), \\ u &= (-\sin(s), \cos(s)\varphi_1, \dots, \cos(s)\varphi_n, a'(s)), \\ v_i &= \left(0, \sin(s) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \sin(s) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\langle u, \partial_{n+2} \rangle = a'(s), \quad \langle v_i, \partial_{n+2} \rangle = 0, \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle = 1 + a'(s)^2.$$

Substituindo na equação de T obtemos

$$T = \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2} u \quad \text{e} \quad \|T\|^2 = \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2}.$$

Pela equação de Gauss (1.2),

$$\begin{aligned} \langle R(u, v_i)u, v_i \rangle &= \varepsilon(\langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle - \langle u, v_i \rangle \langle v_i, u \rangle) \\ &\quad + \langle u, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle v_i, u \rangle - \langle v_i, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle u, u \rangle \\ &\quad + \langle v_i, T \rangle \langle u, T \rangle \langle u, v_i \rangle - \langle u, T \rangle \langle u, T \rangle \langle v_i, v_i \rangle \\ &\quad + \langle Su, u \rangle \langle Sv_i, v_i \rangle - \langle Su, v_i \rangle \langle Sv_i, u \rangle. \end{aligned}$$

Por hipótese M^n é plana, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo X, Y, Z tangente a M^n .

Logo,

$$0 = \langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle - \langle v_i, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle u, u \rangle - \langle u, T \rangle \langle u, T \rangle \langle v_i, v_i \rangle + \lambda \mu \langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle,$$

pois $\langle u, v_i \rangle = 0$. Daí,

$$0 = \langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle - \langle v_i, T \rangle^2 \langle u, u \rangle - \langle u, T \rangle^2 \langle v_i, v_i \rangle + \lambda \mu \langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle. \quad (3.1)$$

Note que

$$\begin{aligned}\langle u, T \rangle &= \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2} (1 + a'(s)^2), \\ \langle v_i, T \rangle &= 0, \\ \langle v_i, v_i \rangle &= \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|.\end{aligned}$$

Logo, de (3.1) segue que

$$\begin{aligned}0 &= (1 + a'(s)^2) \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| - 0 - \left(\frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2} (1 + a'(s)^2) \right)^2 \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| \\ &\quad + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|. \\ &= (1 + a'(s)^2) \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| - a'(s)^2 \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| \\ &\quad + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| \\ &= \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| \\ &= \text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| (1 + \lambda \mu (1 + a'(s)^2)).\end{aligned}$$

Como $\text{sen}^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\| \neq 0$ devemos ter $1 + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) = 0$, isto é,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{1 + a'(s)^2} + \lambda \mu \\ &= 1 - \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2} + \lambda \mu \\ &= 1 - \|T\|^2 + \lambda \mu.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Se $n \geq 3$ podemos considerar v_i e v_j distintos. Neste caso a equação de Gauss (1.2) nos dá

$$\begin{aligned}\langle R(v_i, v_j)v_i, v_j \rangle &= \varepsilon(\langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle - \langle v_i, v_j \rangle \langle v_j, v_i \rangle \\ &\quad + \langle v_i, T \rangle \langle v_j, T \rangle \langle v_j, v_i \rangle - \langle v_j, T \rangle \langle v_j, T \rangle \langle v_i, v_i \rangle \\ &\quad + \langle v_j, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle v_i, v_j \rangle - \langle v_i, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle v_j, v_j \rangle \\ &\quad + \langle S v_i, v_i \rangle \langle S v_j, v_j \rangle - \langle S v_i, v_j \rangle \langle S v_j, v_i \rangle).\end{aligned}$$

Uma vez que M^n é plana e $\langle v_i, v_j \rangle = \text{sen}^2(s) \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \rangle = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle + \mu^2 \langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle \\ &= \langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle (1 + \mu^2) \\ &= 1 + \mu^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se $n \geq 3$, de (3.2) e (3.3) obtemos o sistema

$$\begin{cases} 1 - \|T\|^2 + \lambda\mu = 0 \\ 1 + \mu^2 = 0 \end{cases}$$

que por sua vez não possui solução, já que $\mu^2 \geq 0$. Dessa forma concluímos que $n = 2$.

Como $\partial_{n+2} = T + \cos(\theta)N$ temos que

$$\begin{aligned} \langle \partial_{n+2}, \partial_{n+2} \rangle &= \langle T + \cos(\theta)N, T + \cos(\theta)N \rangle \\ 1 &= \|T\|^2 + \cos^2(\theta). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.2) obtemos $\lambda\mu = -\cos^2(\theta)$. Caso α seja uma reta vertical, já vimos que

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\text{sen}(c)}(1, \cot(c)\varphi_1, \dots, \cot(c)\varphi_n, 0), \\ \lambda &= 0, \\ \mu &= -\frac{\cot(c)}{\text{sen}^2(c)}, \end{aligned}$$

onde c é uma constante. Assim, a equação $\lambda\mu = -\cos^2(\theta)$ é satisfeita. Se α não é uma reta vertical então pode ser parametrizada por

$$\alpha(s) = (\cos(s), 0, \text{sen}(s), a(s)),$$

e pelos cálculos que fizemos no capítulo 2 temos

$$\lambda\mu = \frac{a'(s)a''(s)\cot(s)}{(1+a'(s)^2)^2}.$$

Por outro lado,

$$-\cos^2(s) = \|T\|^2 - 1 = \frac{a'(s)}{1+a'(s)^2} - 1 = -\frac{1}{1+a'(s)^2}.$$

Logo (3.2) implica em

$$\begin{aligned}\frac{a'(s)a''(s)\cot(s)}{(1+a'(s)^2)^2} &= -\frac{1}{1+a'(s)^2}, \\ a'(s)a''(s)\cot(s) &= -1 - a'(s)^2 \\ 2a'(s)a''(s)\tan^{-1}(s) &= -2 - 2a'(s)^2 \\ (a'(s)^2)' &= -2\tan(s) - 2\tan(s)a'(s)^2 \\ (a'(s)^2)' &= -2\tan(s)(1+a'(s)^2) \\ \frac{a'(s)^2}{1+a'(s)^2} &= -2\tan(s).\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{a'(\sigma)^2}{1+a'(\sigma)^2}d\sigma &= -2 \int \tan(\sigma)d\sigma \\ \ln(1+a'(s)^2) &= 2\ln(\cos(s)) + C_1 \\ 1+a'(s)^2 &= \cos^2(s)e^{C_1} \\ a'(s)^2 &= C_2 \cos^2(s) - 1 \\ a'(s) &= \pm\sqrt{C \cos^2(s) - 1} \\ a(s) &= \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2(\sigma) - 1}d\sigma.\end{aligned}$$

■

Como consequência, temos o Corolário a seguir. Observamos que este resultado não se encontra no artigo de referência.

Corolário 3.2. *Se a curvatura de Ricci na direção de T é nula, então a curva geratriz α ou é uma reta vertical ou é parametrizada por*

$$\alpha(s) = (\cos(s), 0, \dots, 0, \sin(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2(\sigma) - 1}d\sigma),$$

com $C \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam

$$\bar{T} = \frac{T}{\|T\|} \quad \text{e} \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}.$$

Considere a base ortonormal $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M^n$ ortogonal a \bar{T} . Então,

$$Ric_p(\bar{T}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(\bar{T}, \bar{v}_i)\bar{T}, \bar{v}_i \rangle.$$

Pela equação de Gauss (1.2),

$$\begin{aligned} \langle R(\bar{T}, \bar{v}_i)\bar{T}, \bar{v}_i \rangle &= \varepsilon(\langle \bar{T}, \bar{T} \rangle \langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle - \langle \bar{T}, \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_i, \bar{T} \rangle) \\ &\quad + \langle \bar{T}, T \rangle \langle \bar{v}_i, T \rangle \langle \bar{v}_i, \bar{T} \rangle - \langle \bar{v}_i, T \rangle \langle \bar{v}_i, T \rangle \langle \bar{T}, \bar{T} \rangle \\ &\quad + \langle \bar{v}_i, T \rangle \langle \bar{T}, T \rangle \langle \bar{T}, \bar{v}_i \rangle - \langle \bar{T}, T \rangle \langle \bar{T}, T \rangle \langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle \\ &\quad + \langle S\bar{T}, \bar{T} \rangle \langle S\bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle - \langle S\bar{T}, \bar{v}_i \rangle \langle S\bar{v}_i, \bar{T} \rangle. \end{aligned}$$

Lembre-se que $T = \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2}u$, assim $\langle \bar{v}_i, \bar{T} \rangle = 0$ e $S\bar{T} = \lambda\bar{T}$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle R(\bar{T}, \bar{v}_i)\bar{T}, \bar{v}_i \rangle &= \langle \bar{T}, \bar{T} \rangle \langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle - \langle \bar{T}, T \rangle^2 \langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle + \lambda\mu \langle \bar{T}, \bar{T} \rangle \langle \bar{v}_i, \bar{v}_i \rangle, \\ &= 1 - \frac{\langle T, T \rangle^2}{\|T\|^2} + \lambda\mu \\ &= 1 - \|T\|^2 + \lambda\mu \end{aligned}$$

Segue daí que

$$Ric_p(\bar{T}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \|T\|^2 + \lambda\mu) = 1 - \|T\|^2 + \lambda\mu.$$

Portanto, se $0 = Ric_p(\bar{T}) = 1 - \|T\|^2 + \lambda\mu$, pela demonstração do teorema anterior segue-se o resultado. \blacksquare

Agora classificaremos as hipersuperfícies de rotação intrinsecamente planas de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.3. *Seja M^n uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ intrinsecamente plana, com plano de rotação P^2 como descrito anteriormente. Se $n \geq 3$, então P^2 ou é Lorentziano ou é degenerado. Além disso possui curva geratriz α dada por*

- (i) $\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), \pm \cosh(s) + C)$, com $C \in \mathbb{R}$, se P^2 é Lorentziano,
- (ii) α é uma reta vertical em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ se P^2 é degenerado.

Se $n = 2$, então a curva geratriz α ou é uma reta vertical em $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ ou é parametrizada como se segue, com $C \in \mathbb{R}$:

- (i) $\alpha(s) = \left(\cosh(s), 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2(\sigma) - 1} d\sigma \right)$ se P^2 é Lorentziano,
- (ii) $\alpha(s) = \left(\cosh(s), 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \sinh^2(\sigma) - 1} d\sigma \right)$ se P^2 é Riemanniano,

(iii) $\alpha(s) = \left(s, 0, -\frac{1}{2s}, \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C - \frac{1}{\sigma}} d\sigma \right)_{\mathfrak{B}}$, se P^2 é degenerado.

Demonstração: Assim como fizemos anteriormente, considere a base $\{u, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, onde $u = \frac{\partial f}{\partial s}$ e $v_i = \frac{\partial f}{\partial t_i}$. Além disso lembre-se que $Su = \lambda u$ e $Sv_i = \mu v_i$.

Iremos separar a demonstração em três casos: P^2 Riemanniano, P^2 Lorentziano e P^2 degenerado. Em cada um deles, iremos primeiro avaliar o que acontece quando $n \geq 3$ e depois o que acontece se $n = 2$.

Da equação de Gauss (1.2) e por hipótese, obtemos para qualquer valor de n

$$\begin{aligned} \langle R(u, v_i)u, v_i \rangle &= \varepsilon(\langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle - \langle u, v_i \rangle \langle v_i, u \rangle) \\ &\quad + \langle u, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle v_i, u \rangle - \langle v_i, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle u, u \rangle \\ &\quad + \langle v_i, T \rangle \langle u, T \rangle \langle u, v_i \rangle - \langle u, T \rangle \langle u, T \rangle \langle v_i, v_i \rangle \\ &\quad + \langle Su, u \rangle \langle Sv_i, v_i \rangle - \langle Su, v_i \rangle \langle Sv_i, u \rangle, \\ 0 &= -\langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_i, T \rangle^2 \langle u, u \rangle + \langle u, T \rangle^2 \langle v_i, v_i \rangle + \lambda \mu \langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Quando $n \geq 3$ podemos considerar v_i e v_j distintos, daí

$$\begin{aligned} \langle R(v_i, v_j)v_i, v_j \rangle &= \varepsilon(\langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle - \langle v_i, v_j \rangle \langle v_j, v_i \rangle) \\ &\quad + \langle v_i, T \rangle \langle v_j, T \rangle \langle v_j, v_i \rangle - \langle v_j, T \rangle \langle v_j, T \rangle \langle v_i, v_i \rangle \\ &\quad + \langle v_j, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle v_i, v_j \rangle - \langle v_i, T \rangle \langle v_i, T \rangle \langle v_j, v_j \rangle \\ &\quad + \langle Sv_i, v_i \rangle \langle Sv_j, v_j \rangle - \langle Sv_i, v_j \rangle \langle Sv_j, v_i \rangle. \\ 0 &= -\langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle + \langle v_j, T \rangle^2 \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_i, T \rangle^2 \langle v_j, v_j \rangle + \mu^2 \langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Temos ainda que

$$T = \frac{\langle u, \partial_{n+2} \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i, \partial_{n+2} \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i.$$

Caso 1: $P^2 = [\partial_{n+1}, \partial_{n+2}]$ Riemanniano.

Para $n \geq 3$, temos

$$\begin{aligned} u &= (\sinh(s)\varphi_1, \dots, \sinh(s)\varphi_n, \cosh(s), a'(s)), \\ v_i &= (\cosh(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \cosh(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u, \partial_{n+2} \rangle &= a'(s), & \langle v_i, \partial_{n+2} \rangle &= 0 \\ \langle u, u \rangle &= 1 + a'(s)^2, & \langle v_i, v_i \rangle &= \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2, \\ T &= \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2} u, & \|T\|^2 &= \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2}.\end{aligned}$$

Substituindo os valores acima em (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}0 &= -(1 + a'(s)^2) \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 + \left((1 + a'(s)^2) \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2} \right)^2 \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 \\ &\quad + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= (-1 - a'(s)^2) \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 + a'(s)^2 \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 \\ &\quad + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= -\cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 \\ &= \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 (-1 + \lambda \mu (1 + a'(s)^2)).\end{aligned}$$

Como $\cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2$ é não nulo, segue-se que

$$0 = -1 + \lambda \mu (1 + a'(s)^2) = -\frac{1}{1 + a'(s)^2} + \lambda \mu = -1 + \|T\|^2 + \lambda \mu.$$

Fazendo o mesmo na equação (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}0 &= -\cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\|^2 + \mu^2 \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 \cosh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\|^2 \\ &= \cosh^4(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\|^2 (-1 + \mu^2)\end{aligned}$$

Uma vez que $\cosh^4(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\|^2$ é não nulo segue-se que

$$0 = -1 + \mu^2.$$

Assim temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -1 + \|T\|^2 + \lambda \mu = 0 \\ -1 + \mu^2 = 0 \end{cases}$$

Se α não é uma reta vertical, a equação $-1 + \mu^2 = 0$ não possui solução. De fato, já vimos no capítulo 2 que $\mu = -\frac{a'(s) \tanh(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}}$, então

$$\mu^2 = \frac{a'(s)^2 \tanh^2(s)}{1 + a'(s)^2},$$

deste modo, $\mu^2 = 1$ acarreta em $a'(s)^2(1 - \tanh^2(s)) = -1$, o que é uma contradição, já que $a'(s)^2 \geq 0$ e $-1 < \tanh(s) < 1$.

Se α é uma reta vertical a equação $-1 + \mu^2 = 0$ continua sem solução, pois como já vimos no capítulo 2, $\mu = -\tanh(c)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é um constante daí

$$\mu^2 = (-\tanh(c))^2 = \tanh^2(c) < 1.$$

Portanto P^2 não pode ser Riemanniano para $n \geq 3$.

No caso em que $n = 2$ a equação de Gauss (1.2) nos dá apenas $-1 + \|T\|^2 + \lambda\mu = 0$. Se α não é uma reta vertical podemos considerar a seguinte parametrização

$$\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \sinh(s), a(s)).$$

Pelos cálculos feitos no capítulo 2 temos

$$\lambda\mu = \frac{-a''(s)}{(1 + a'(s)^2)^{3/2}} \cdot \frac{-a'(s) \tanh(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} = \frac{a'(s)a''(s) \tanh(s)}{(1 + a'(s)^2)^2}.$$

Note que também temos

$$T = \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2}u, \quad \|T\|^2 = \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2}.$$

Substituindo tais valores na equação $\lambda\mu = 1 - \|T\|^2$ obtemos

$$\frac{a'(s)a''(s) \tanh(s)}{(1 + a'(s)^2)^2} = 1 - \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2}$$

$$\frac{a'(s)a''(s) \tanh(s)}{(1 + a'(s)^2)^2} = \frac{1}{1 + a'(s)^2}$$

$$a'(s)a''(s) \tanh(s) = 1 + a'(s)^2$$

$$a'(s)a''(s) = \coth(s)(1 + a'(s)^2)$$

$$2a'(s)a''(s) = 2 \coth(s)(1 + a'(s)^2)$$

$$(a'(s)^2)' = 2 \coth(s)(1 + a'(s)^2)$$

$$\frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2} = 2 \coth(s).$$

Integrando ambos os membros segue-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{a'(\sigma)^2}{1+a'(\sigma)^2} d\sigma &= 2 \int \coth(\sigma) d\sigma \\ \ln(1+a'(s)^2) &= 2 \ln(\sinh(s)) + C_1 \\ 1+a'(s)^2 &= \sinh^2(s) e^{C_1} \\ a'(s)^2 &= C_2 \sinh^2(s) - 1 \\ a'(s) &= \pm \sqrt{C \sinh^2(s) - 1} \\ a(s) &= \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \sinh^2(\sigma) - 1} d\sigma. \end{aligned}$$

Caso 2: $P^2 = [\partial_1, \partial_{n+2}]$ Lorentziano.

Para $n \geq 3$, temos

$$\begin{aligned} u &= (\sinh(s), \cosh(s)\varphi_1, \dots, \cosh(s)\varphi_n, a'(s)), \\ v_i &= \left(0, \sinh(s) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \sinh(s) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right), \\ \langle u, \partial_{n+2} \rangle &= a'(s), \quad \langle v_i, \partial_{n+2} \rangle = 0 \\ \langle u, u \rangle &= 1 + a'(s)^2, \quad \langle v_i, v_i \rangle = \sinh^2(s) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2, \\ T &= \frac{a'(s)}{1+a'(s)^2} u, \quad \|T\|^2 = \frac{a'(s)^2}{1+a'(s)^2}. \end{aligned}$$

De maneira completamente análoga ao que fizemos no primeiro caso, ao substituirmos os valores acima em (3.4) e (3.5) obtemos

$$\begin{cases} -1 + \|T\|^2 + \lambda\mu = 0 \\ -1 + \mu^2 = 0 \end{cases}$$

Suponha que α não seja uma reta vertical. Sabemos que $\mu = -\frac{a'(s) \coth(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}$. Então $\mu^2 = 1$ desde que

$$1 = \frac{a'(s)^2 \coth^2(s)}{1+a'(s)^2},$$

que é equivalente a $1 = a'(s)^2(\coth^2(s) - 1)$. Uma vez que $\coth^2(s) > 1$ segue-se que

$$\begin{aligned} a'(s)^2 &= \frac{1}{\coth^2(s) - 1} \\ a'(s)^2 &= \frac{1}{\operatorname{csch}^2(s)} \\ a'(s)^2 &= \sinh^2(s) \\ a'(s) &= \pm \sinh(s) \\ a(s) &= \pm \cosh(s) + C \end{aligned}$$

Veja que $a(s) = \pm \cosh(s) + C$ satisfaz $-1 + \|T\|^2 + \lambda\mu = 0$. De fato, como $\lambda = -\frac{a''(s)}{(1 + a'(s)^2)^{3/2}}$ temos que

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= 1 - \|T\|^2 \\ \frac{a''(s)}{(1 + a'(s)^2)^{3/2}} \cdot \frac{a'(s) \coth(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}} &= 1 - \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2} \\ \frac{a'(s)a''(s) \coth(s)}{(1 + a'(s)^2)^2} &= \frac{1}{1 + a'(s)^2} \\ \frac{\sinh(s) \cosh(s) \coth(s)}{(1 + \sinh^2(s))^2} &= \frac{1}{1 + \sinh^2(s)} \\ \frac{\cosh^2(s)}{\cosh^4(s)} &= \frac{1}{\cosh^2(s)}. \end{aligned}$$

Se $n = 2$, da equação de Gauss (1.2), obtemos apenas a equação $-1 + \|T\|^2 + \lambda\mu = 0$. Assumindo que α não seja uma reta vertical podemos considerar a parametrização

$$\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \sinh(s), a(s)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{a'(s) \coth(s)}{\sqrt{1 + a'(s)^2}}, & \lambda &= -\frac{a''(s)}{(1 + a'(s)^2)^{3/2}}, \\ T &= \frac{a'(s)}{1 + a'(s)^2} u, & \|T\|^2 &= \frac{a'(s)^2}{1 + a'(s)^2}. \end{aligned}$$

Substituindo em $-1 + \|T\|^2 + \lambda\mu = 0$ temos,

$$\begin{aligned}\lambda\mu &= 1 - \|T\|^2 \\ \frac{a'(s)a''(s)\coth(s)}{(1+a'(s)^2)^2} &= 1 - \frac{a'(s)^2}{1+a'(s)^2} \\ \frac{a'(s)a''(s)\coth(s)}{(1+a'(s)^2)^2} &= \frac{1}{1+a'(s)^2} \\ \frac{a'(s)a''(s)}{1+a'(s)^2} &= \tanh(s) \\ \frac{(a'(s)^2)'}{1+a'(s)^2} &= 2\tanh(s).\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros segue-se que

$$\begin{aligned}\int \frac{(a'(\sigma)^2)'}{1+a'(\sigma)^2} d\sigma &= 2 \int \tanh(\sigma) d\sigma \\ \ln(1+a'(s)^2) &= 2 \ln(\cosh(s)) + C_1 \\ 1+a'(s)^2 &= \cosh^2(s)e^{C_1} \\ a'(s)^2 &= C_2 \cosh^2(s) - 1 \\ a'(s) &= \pm \sqrt{C \cosh^2(s) - 1} \\ a(s) &= \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cosh^2(\sigma) - 1} d\sigma\end{aligned}$$

Caso 3: $P^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ Degenerado.

Lembre-se que no caso degenerado estamos trabalhando com a base pseudo-ortonormal de \mathbb{L}^{n+2} mencionada no capítulo 2. Para $n \geq 3$, tem-se que

$$\begin{aligned}u &= \left(1, t_2, \dots, t_n, \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n a'(s)\right)_{\mathfrak{B}}, \\ v_i &= (0, \dots, 0, \underbrace{s}_i, 0, \dots, 0, -st_i, 0)_{\mathfrak{B}}, \\ \langle u, \partial_{n+2} \rangle &= a'(s), & \langle v_i, \partial_{n+2} \rangle &= 0 \\ \langle u, u \rangle &= \frac{1}{s^2} + a'(s)^2, & \langle v_i, v_i \rangle &= s^2, \\ T &= \frac{a'(s)}{s^{-2} + a'(s)^2} u, & \|T\|^2 &= \frac{a'(s)^2}{s^{-2} + a'(s)^2}.\end{aligned}$$

Ao substituir tais valores nas equações (3.4) e (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= -\langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_i, T \rangle^2 \langle u, u \rangle + \langle u, T \rangle^2 \langle v_i, v_i \rangle + \lambda \mu \langle u, u \rangle \langle v_i, v_i \rangle \\
 &= -\left(\frac{1}{s^2} + a'(s)^2\right) s^2 + 0 + \left(\frac{a'(s)}{s^{-2} + a'(s)^2}\right)^2 \left(\frac{1}{s^2} + a'(s)^2\right)^2 s^2 + \lambda \mu \left(\frac{1}{s^2} + a'(s)^2\right) s^2 \\
 &= -1 - s^2 a'(s)^2 + s^2 a'(s)^2 + \lambda \mu (1 + s^2 a'(s)^2) \\
 &= -1 + \lambda \mu (1 + s^2 a'(s)^2) \\
 &= -\frac{1}{1 + s^2 a'(s)^2} + \lambda \mu \\
 &= -1 + \|T\|^2 + \lambda \mu,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= -\langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle + \langle v_j, T \rangle^2 \langle v_i, v_i \rangle + \langle v_i, T \rangle^2 \langle v_j, v_j \rangle + \mu^2 \langle v_i, v_i \rangle \langle v_j, v_j \rangle \\
 &= -s^2 \cdot s^2 + 0 + 0 + \mu^2 s^2 \cdot s^2 \\
 &= s^4 (-1 + \mu^2) \\
 &= -1 + \mu^2.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} -1 + \|T\|^2 + \lambda \mu = 0 \\ -1 + \mu^2 = 0 \end{cases}$$

Se α não é uma reta vertical temos que

$$\mu^2 = \left(\frac{-sa'(s)}{1 + s^2 a'(s)^2}\right)^2 = \frac{s^2 a'(s)^2}{1 + s^2 a'(s)^2} < 1.$$

Logo, a equação $-1 + \mu^2 = 0$ não é satisfeita.

Se é uma reta vertical, então é parametrizada por

$$\alpha(s) = \left(c, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2c}, s\right)_{\mathfrak{B}},$$

com $c \in \mathbb{R}$ constante. Além disso,

$$N = \left(c, ct_2, \dots, ct_n, \frac{1}{2c} - \frac{c}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, 0\right)_{\mathfrak{B}}, \quad \lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -1.$$

Lembre-se que $\partial_{n+2} = T + \cos(\theta)N$, daí $1 - \|T\|^2 = \cos^2(\theta)$, onde $\cos(\theta) = \langle N, \partial_{n+2} \rangle$.

Nestas condições

$$\begin{cases} -1 + \|T\|^2 + \lambda \mu = 0 \\ -1 + \mu^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \mu = \langle N, \partial_{n+2} \rangle^2 \\ \mu^2 = 1 \end{cases}$$

e portanto α satisfaz o sistema.

Assim como nos casos anteriores, se $n = 2$ obtemos da equação de Gauss (1.2) apenas $-1 + \|T\|^2 + \lambda\mu = 0$. Supondo que α não seja uma reta vertical, segue-se que

$$\alpha(s) = \left(s, 0, -\frac{1}{2s}, a(s) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{3/2}}, & \mu &= -\frac{sa'(s)}{\sqrt{1 + s^2a'(s)^2}}, \\ T &= \frac{a'(s)}{s^{-2} + a'(s)^2}u, & \|T\|^2 &= \frac{a'(s)^2}{s^{-2} + a'(s)^2}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= 1 - \|T\|^2 \\ \frac{s^2a'(s)^2 + s^3a'(s)a''(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^2} &= \frac{1}{1 + s^2a'(s)^2} \\ s^2a'(s)^2 + s^3a'(s)a''(s) &= 1 + s^2a'(s)^2 \\ s^3a'(s)a''(s) &= 1 \\ 2a'(s)a''(s) &= \frac{2}{s^3}. \\ (a'(s)^2)' &= \frac{2}{s^3}. \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros,

$$\begin{aligned} \int (a'(\sigma)^2)' d\sigma &= 2 \int \frac{d\sigma}{\sigma^3} \\ a'(s)^2 &= 2\left(-\frac{1}{2s^2} + C_1\right) \\ a'(s) &= \pm \sqrt{-\frac{1}{s^2} + C_2}. \end{aligned}$$

De onde segue

$$a(s) = \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C - \frac{1}{\sigma^2}} d\sigma.$$

■

3.2 Hipersuperfícies de Rotação normalmente planas

Nesta seção, mostraremos que as hipersuperfícies de rotação em $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ possuem fibrado normal plano no respectivo espaço ambiente. Como faremos uma demonstração

unificada, vamos denotar por $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$ o espaço ambiente de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon) = \mathbb{E}^{n+2}$ se $\varepsilon = 1$ e $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon) = \mathbb{L}^{n+2}$ se $\varepsilon = -1$.

Sejam M^n uma hipersuperfície de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, N o normal unitário de M^n sobre $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e ξ o normal unitário de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$. Vamos denotar por S_N e S_ξ os operadores forma correspondentes. Sejam D a conexão do espaço ambiente e ∇ a conexão de M^n como subvariedade de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$. Então,

$$\nabla_X^\perp \xi = \varepsilon \langle \nabla_X^\perp \xi, \xi \rangle \xi + \langle \nabla_X^\perp \xi, N \rangle N \quad \text{e} \quad \nabla_X^\perp N = \varepsilon \langle \nabla_X^\perp N, \xi \rangle \xi + \langle \nabla_X^\perp N, N \rangle N.$$

Uma vez que $\nabla_X^\perp \xi = D_X \xi + S_\xi X$ e $\langle \xi, \xi \rangle = \varepsilon$ temos

$$0 = \langle D_X \xi, \xi \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi - S_\xi X, \xi \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \xi \rangle - \langle S_\xi X, \xi \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \xi \rangle,$$

$$\langle \nabla_X^\perp \xi, N \rangle = \langle D_X \xi, N \rangle + \langle S_\xi X, N \rangle = \langle D_X \xi, \xi \rangle + \langle -\nabla_X \xi, N \rangle = \langle D_X \xi, \xi \rangle.$$

Logo,

$$\nabla_X^\perp \xi = \langle D_X \xi, \xi \rangle N.$$

Como $\xi = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$ temos que

$$\begin{aligned} D_X \xi &= (X(x_1), \dots, X(x_{n+1}), 0) \\ &= X - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp \xi &= \langle X - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \partial_{n+2}, N \rangle N \\ &= (\langle X, N \rangle - \langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle \partial_{n+2}, N \rangle) N \\ &= -\langle X, \partial_{n+2} \rangle \langle \partial_{n+2}, N \rangle N \\ &= -\langle X, T + \cos(\theta) N \rangle \langle T + \cos(\theta) N, N \rangle N \\ &= -\langle X, T \rangle \cos(\theta) \langle N, N \rangle N \\ &= -\cos(\theta) \langle X, T \rangle N. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sendo N unitário vale que $0 = \langle \nabla_X^\perp N, N \rangle$, daí

$$\nabla_X^\perp N = \varepsilon \langle \nabla_X^\perp N, \xi \rangle \xi = -\varepsilon \langle N, \nabla_X^\perp \xi \rangle \xi = \varepsilon \cos(\theta) \langle X, T \rangle \xi. \tag{3.7}$$

A partir destas equações podemos demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 3.4. *Seja M^n uma hipersuperfície de rotação de $Q^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então M^n possui fibrado normal plano em $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$.*

Demonstração:

Seja R^\perp o tensor curvatura normal de M^n como subvariedade de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$. Considere X, Y , campos tangentes em M^n ortogonais a T . Mostraremos que $R^\perp(X, Y) = R^\perp(T, X) = 0$.

Vamos começar mostrando que $R^\perp(X, Y) = 0$. Por definição,

$$\begin{aligned} R^\perp(X, Y)\xi &= \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi + \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi, \\ R^\perp(X, Y)N &= \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp N - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp N + \nabla_{[X, Y]}^\perp N. \end{aligned}$$

Das equações (3.6) e (3.7) segue que

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp \xi &= -\cos(\theta)\langle X, T \rangle N = 0 \\ \nabla_Y^\perp \xi &= -\cos(\theta)\langle Y, T \rangle N = 0 \\ \nabla_X^\perp N &= \varepsilon \cos(\theta)\langle X, T \rangle \xi = 0 \\ \nabla_Y^\perp N &= \varepsilon \cos(\theta)\langle Y, T \rangle \xi = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} R^\perp(X, Y)\xi &= \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi = -\cos(\theta)\langle [X, Y], T \rangle N \\ R^\perp(X, Y)N &= \nabla_{[X, Y]}^\perp N = \varepsilon \cos(\theta)\langle [X, Y], T \rangle \xi. \end{aligned}$$

Afirmção: $\langle [X, Y], T \rangle = 0$. Inicialmente, note que

$$0 = \langle X, T \rangle = \langle X, \partial_{n+2} - \cos(\theta)N \rangle = \langle X, \partial_{n+2} \rangle,$$

isto é, como X, Y são ortogonais a T , eles não possuem a componente ∂_{n+2} . Sendo assim, podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \partial_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^{n+1} b_j \partial_j.$$

Daí,

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (a_i \partial_i(b_j) - b_i \partial_i(a_j)) \partial_j.$$

Ou seja, $[X, Y]$ não possui a componente ∂_{n+2} e portanto

$$\langle [X, Y], T \rangle = \langle [X, Y], \partial_{n+2} \rangle = 0.$$

Com isso, concluímos que $R^\perp(X, Y)\xi = R^\perp(X, Y)N = 0$.

Agora mostraremos que $R^\perp(T, X) = 0$. Por definição,

$$\begin{aligned} R^\perp(T, X)\xi &= \nabla_X^\perp \nabla_T^\perp \xi - \nabla_T^\perp \nabla_X^\perp \xi + \nabla_{[T, X]}^\perp \xi, \\ R^\perp(T, X)N &= \nabla_X^\perp \nabla_T^\perp N - \nabla_T^\perp \nabla_X^\perp N + \nabla_{[T, X]}^\perp N. \end{aligned}$$

De (3.6) e (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} R^\perp(T, X)\xi &= \nabla_X^\perp \nabla_T^\perp \xi - \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle N \\ &= \nabla_X^\perp(-\cos(\theta)\langle T, T \rangle N) - \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle N \\ &= -\nabla_X^\perp(\cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta)N) - \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle N \\ &= -X(\cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta))N - \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta)\nabla_X^\perp N \\ &\quad - \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle N \\ &= -X(\cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta))N - \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^\perp(T, X)N &= \nabla_X^\perp \nabla_T^\perp N + \varepsilon \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle \xi \\ &= \nabla_X^\perp(\varepsilon \cos(\theta)\langle T, T \rangle \xi) + \varepsilon \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle \xi \\ &= \nabla_X^\perp(\varepsilon \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta)\xi) + \varepsilon \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle \xi \\ &= X(\varepsilon \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta))\xi + \varepsilon \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta)\nabla_X^\perp \xi \\ &\quad + \varepsilon \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle \xi \\ &= \varepsilon X(\cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta))\xi + \varepsilon \cos(\theta)\langle [T, X], T \rangle \xi \end{aligned}$$

Por outro lado, como já vimos anteriormente e pelos cálculos realizados no Capítulo 2, fazendo $u = \frac{\partial f}{\partial s}$ e $v_i = \frac{\partial f}{\partial t_i}$, podemos representar T na base $\{u, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ por

$$T = \frac{\langle u, \partial_{n+2} \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Como $S_N u = \lambda u$, temos $S_N T = \lambda T$. Por (1.4), $X[\cos \theta] = -\langle X, S_N T \rangle = \lambda \langle X, T \rangle = 0$, pois X é ortogonal a T , o que implica em $X(\cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\theta)) = 0$.

Ainda por (1.4) temos que

$$\begin{aligned}
 \langle [T, X], T \rangle &= \langle \nabla_T X - \nabla_X T, T \rangle \\
 &= \langle \nabla_T X, T \rangle - \langle \nabla_X T, T \rangle \\
 &= -\langle X, \nabla_T T \rangle - \langle \cos(\theta) S_N X, T \rangle \\
 &= -\langle X, \cos(\theta) S_N T \rangle - \cos(\theta) \langle X, S_N T \rangle \\
 &= -\lambda \cos(\theta) \langle X, T \rangle - \lambda \cos(\theta) \langle X, T \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Segue daí que $R^\perp(T, X)\xi = R^\perp(T, X)N = 0$ e portanto $R^\perp(T, X) = 0$. ■

3.3 Hipersuperfícies de Rotação mínimas

Em \mathbb{E}^3 as superfícies mínimas são catenóides, enquanto que hipersuperfícies de rotação em \mathbb{E}^{n+1} são catenoides generalizados no sentido de Blair, ver [1]. O teorema a seguir nos dá todas as hipersuperfícies de rotação mínimas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.5. *Seja M^n uma hipersuperfície de rotação mínima de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com plano de rotação P^2 como descrito anteriormente. Então a curva geratriz α ou é uma reta vertical*

$$\alpha(s) = (0, \dots, 0, 1, s)$$

ou é dada por

$$\alpha(s) = \left(\cos(s), 0, \dots, 0, \sin(s), \int_{s_0}^s \frac{C}{\sqrt{\sin(\sigma)^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma \right),$$

com $C \in \mathbb{R}$.

Demonstração: A fim de que M^n seja mínima devemos ter

$$\lambda + (n-1)\mu = 0.$$

Se α é uma reta vertical, sabemos que

$$\alpha(s) = (\cos(c), 0, \dots, 0, \sin(c), s), \quad \lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = -\cot(c),$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. De $\lambda + (n-1)\mu = 0$ segue-se que $\cot(c) = 0$. Além disso, note que $\cos^2(c) + \sen^2(c) = 1$, pois α é uma curva em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Logo $\sen(c) = \pm 1$. Daí $\alpha(s) = (0, \dots, 0, 1, s)$ como queríamos.

Se α não é uma reta vertical, já vimos que

$$\lambda = -\frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{a'(s)\cot(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}.$$

Substituindo em $\lambda + (n-1)\mu = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \lambda &= -(n-1)\mu \\ \frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}} &= -(n-1)\frac{a'(s)\cos(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} \\ \frac{a''(s)}{1+a'(s)^2} &= -(n-1)a'(s)\cot(s) \\ \frac{a''(s)}{a'(s)(1+a'(s)^2)} &= -(n-1)\cot(s). \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros temos

$$\begin{aligned} \int \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)(1+a'(\sigma)^2)} d\sigma &= -(n-1) \int \cot(\sigma) d\sigma \\ \ln\left(\frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\right) &= -(n-1)\ln(\sen(s)) + C_1 \\ \frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} &= C \sen(s)^{-(n-1)} \\ \frac{a'(s)^2}{1+a'(s)^2} &= C^2 \sen(s)^{-2(n-1)}, \end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros por $1+a'(s)^2$,

$$\begin{aligned} a'(s)^2 &= C^2 \sen(s)^{-2(n-1)}(1+a'(s)^2) \\ a'(s)^2 &= C^2 \sen(s)^{-2(n-1)} + a'(s)^2 C^2 \sen(s)^{-2(n-1)} \\ a'(s)^2 \sen(s)^{-2(n-1)} &= C^2 + a'(s)^2 C^2 \\ a'(s)^2 \sen(s)^{2(n-1)} - a'(s)^2 C^2 &= C^2 \\ a'(s)^2 (\sen(s)^{2(n-1)} - C^2) &= C^2 \\ a'(s)^2 &= \frac{C^2}{\sen(s)^{2(n-1)} - C^2} \\ a'(s) &= \pm \frac{C}{\sqrt{\sen(s)^{2(n-1)} - C^2}}. \end{aligned}$$

De onde segue que,

$$a(s) = \pm \int_{s_0}^s \frac{C}{\sqrt{\operatorname{sen}(\sigma)^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Observação 3.6. A resolução da integral $\int \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)(1 + a'(\sigma)^2)} d\sigma$ se encontra no Apêndice, Lema 3.9.

Analogamente, obtemos um resultado para hipersuperfícies de rotação mínimas em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.7. Seja M^n uma hipersuperfície de rotação mínima de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com plano de rotação P^2 como descrito anteriormente. Então a curva geratriz α é descrita como se segue, com $C \in \mathbb{R}$:

(i) Se P^2 é Lorentziano,

$$\alpha(s) = \left(\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s \frac{C}{\sqrt{\operatorname{senh}(\sigma)^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma \right);$$

(ii) se P^2 é Riemanniano,

$$\alpha(s) = \left(\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s \frac{C}{\sqrt{\operatorname{cosh}(\sigma)^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma \right)$$

ou $\alpha(s) = (1, 0, \dots, 0, s)$;

(iii) se P^2 é degenerado,

$$\alpha(s) = \left(s, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2s}, \pm \int_{s_0}^s \frac{C}{\sigma \sqrt{\sigma^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Demonstração: Por hipótese M^n é mínima, logo

$$\lambda + (n - 1)\mu = 0. \tag{3.8}$$

Lembre-se que, quando P^2 é não degenerado e α é uma reta vertical, temos

$$\alpha(s) = (\cosh(c), 0, \dots, 0, \sinh(c), s),$$

onde $c \neq 0$ é uma constante. Se α não é uma reta vertical, temos

$$\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), a(s)).$$

No caso em que P^2 é degenerado e α não é uma reta, temos

$$\alpha(s) = \left(s, 0, \dots, 0, \frac{1}{2s}, a(s) \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Se α é uma reta

$$\alpha(s) = \left(c, 0, \dots, 0, \frac{1}{2c}, s \right)_{\mathfrak{B}}.$$

Vamos dividir a demonstração em três casos: P^2 Riemanniano, P^2 Lorentziano e P^2 degenerado.

Caso 1: $P^2 = [\partial_1, \partial_{n+2}]$ Lorentziano.

Se α é uma reta vertical temos $\lambda = 0$ e $\mu = -\coth(c)$. Substituindo os valores de λ e μ em (3.8) obtemos

$$0 = \coth(c) \implies \cosh(c) = 0.$$

Uma vez que α é uma curva em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, devemos ter

$$-1 = -\cosh^2(c) + \sinh^2(c) = \sinh^2(c) \geq 0.$$

Logo α não pode ser uma reta vertical.

Se α não é uma reta vertical, $\lambda = -\frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}}$ e $\mu = -\frac{a'(s)\coth(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}$. Substituindo os valores de λ e μ em (3.8) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}} &= -(n-1) \frac{a'(s)\coth(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} \\ \frac{a''(s)}{1+a'(s)^2} &= -(n-1)a'(s)\coth(s) \\ \frac{a''(s)}{a'(s)(1+a'(s)^2)} &= -(n-1)\coth(s). \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros,

$$\begin{aligned} \int \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)(1+a'(\sigma)^2)} d\sigma &= -(n-1) \int \coth(\sigma) d\sigma \\ \ln \left(\frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} \right) &= -(n-1) \ln(\sinh(s)) + C_1 \\ \frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} &= C \sinh(s)^{-(n-1)} \\ \frac{a'(s)^2}{1+a'(s)^2} &= C^2 \sinh(s)^{-2(n-1)}. \end{aligned}$$

Prosseguindo com um cálculo análogo ao que fizemos na demonstração do Teorema 3.5, segue-se que

$$a(s) = \pm \int_{s_0}^s \frac{C}{\sqrt{\sinh(\sigma)^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Caso 2: $P^2 = [\partial_{n+1}, \partial_{n+2}]$ Riemanniano.

Se α é uma reta vertical temos $\lambda = 0$ e $\mu = -\tanh(c)$. Deste modo, a equação (3.8) acarreta em

$$0 = \tanh(c) \implies \sinh(c) = 0.$$

Como α é uma curva em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ temos

$$1 = \cosh^2(c) + \sinh^2(c) = \cosh^2(c) \implies \cosh(c) = 1.$$

Logo $\alpha(s) = (1, 0, \dots, 0, s)$.

Se α não é uma reta vertical temos $\lambda = -\frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}}$ e $\mu = -\frac{a'(s)\tanh(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}$. De (3.8) segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{a''(s)}{(1+a'(s)^2)^{3/2}} &= -(n-1) \frac{a'(s)\tanh(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} \\ \frac{a''(s)}{1+a'(s)^2} &= -(n-1)a'(s)\tanh(s) \\ \frac{a''(s)}{a'(s)(1+a'(s)^2)} &= -(n-1)\tanh(s). \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros,

$$\begin{aligned} \int \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)(1+a'(\sigma)^2)} d\sigma &= -(n-1) \int \tanh(\sigma) d\sigma \\ \ln\left(\frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}}\right) &= -(n-1) \ln(\cosh(s)) + C_1 \\ \frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} &= C \cosh(s)^{-(n-1)} \\ \frac{a'(s)^2}{1+a'(s)^2} &= C^2 \cosh(s)^{-2(n-1)}. \end{aligned}$$

Prosseguindo de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, obtemos

$$a(s) = \pm \int_{s_0}^s \frac{C}{\sqrt{\cosh(\sigma)^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Caso 3: $P^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ degenerado.

Se α é uma reta vertical, $\lambda = 0$ e $\mu = -1$. Daí, a equação (3.8) implica em $n = 1$ e portanto α não pode ser uma reta vertical.

Se α não é uma reta vertical temos, $\lambda = -\frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{3/2}}$ e $\mu = -\frac{sa'(s)}{\sqrt{1 + s^2a'(s)^2}}$.
Substituindo em (3.8) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{3/2}} &= -(n-1)\frac{sa'(s)}{\sqrt{1 + s^2a'(s)^2}} \\ \frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{1 + s^2a'(s)^2} &= -(n-1)sa'(s) \\ \frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{1 + s^2a'(s)^2} &= -(n-1)sa'(s) \\ \frac{a'(s) + sa''(s)}{sa'(s)(1 + s^2a'(s)^2)} &= -(n-1)\frac{1}{s} \\ \frac{(sa'(s))'}{sa'(s)(1 + (sa'(s))^2)} &= -(n-1)\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros segue-se que

$$\begin{aligned}\int \frac{(\sigma a'(\sigma))'}{\sigma a'(\sigma)(1 + (\sigma a'(\sigma))^2)} d\sigma &= -(n-1) \int \frac{1}{\sigma} d\sigma \\ \ln\left(\frac{sa'(s)}{\sqrt{1 + s^2a'(s)^2}}\right) &= -(n-1)\ln(s) + C_1 \\ \frac{sa'(s)}{\sqrt{1 + s^2a'(s)^2}} &= \frac{C}{s^{(n-1)}} \\ sa'(s)s^{(n-1)} &= C\sqrt{1 + s^2a'(s)^2}.\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$\begin{aligned}s^2a'(s)^2s^{2(n-1)} &= C^2(1 + s^2a'(s)^2) \\ s^2a'(s)^2s^{2(n-1)} &= C^2 + C^2s^2a'(s)^2 \\ s^2a'(s)^2s^{2(n-1)} - C^2s^2a'(s)^2 &= C^2 \\ s^2a'(s)^2 &= \frac{C^2}{s^{2(n-1)} - C^2} \\ s^2a'(s)^2 &= \frac{C^2}{s^{2(n-1)} - C^2} \\ sa'(s) &= \frac{\pm C}{\sqrt{s^{2(n-1)} - C^2}} \\ a'(s) &= \frac{\pm C}{s\sqrt{s^{2(n-1)} - C^2}}.\end{aligned}$$

Agora basta integrar,

$$a(s) = \pm \int_{s_0}^s \frac{C}{\sigma \sqrt{\sigma^{2(n-1)} - C^2}} d\sigma.$$

■

Observação 3.8. A resolução da integral $\int \frac{(\sigma a'(\sigma))'}{\sigma a'(\sigma)(1 + (\sigma a'(\sigma))^2)} d\sigma$ se encontra no Apêndice, Lema 3.10.

Apêndice

Lema 3.9.

$$\int_{s_0}^s \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)(1+a'(\sigma)^2)} d\sigma = \ln \left(\frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} \right) + C.$$

Demonstração: Fazendo a substituição $a'(s) = u$ obtemos $a''(s)ds = du$, daí

$$\int \frac{a''(\sigma)}{a'(\sigma)(1+a'(\sigma)^2)} d\sigma = \int \frac{1}{u+u^3} du.$$

Pelo método das frações parciais temos que

$$\frac{1}{u+u^3} = \frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}.$$

Logo,

$$\int \frac{1}{u+u^3} du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{u}{1+u^2} du.$$

Fazendo a substituição $v = 1 + u^2$ obtemos $dv = 2udu$, daí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u+u^3} du &= \int \frac{1}{u} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{v} dv \\ &= \ln(u) - \frac{1}{2} \ln(v) + C \\ &= \ln(u) - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C \\ &= \ln(a'(s)) - \frac{1}{2} \ln(1+a'(s)^2) + C \\ &= \ln \left(\frac{a'(s)}{\sqrt{1+a'(s)^2}} \right) + C \end{aligned}$$

■

Lema 3.10.

$$\int_{s_0}^s \frac{(\sigma a'(\sigma))'}{\sigma a'(\sigma)(1+(\sigma a'(\sigma))^2)} d\sigma = \ln \left(\frac{s a'(s)}{\sqrt{1+s^2 a'(s)^2}} \right) + C.$$

Demonstração:

Basta fazer a substituição $sa'(s) = u$ e repetir processo feito no lema anterior. ■

Lema 3.11. *Sejam $\Psi_1 = 1$ e $\Psi_i = \prod_{j=1}^{i-1} \text{sen}(t_j)$ para $2 \leq i \leq n$. Então*

$$\varphi = \Psi_n \partial_n + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i \cos(t_i) \partial_i$$

é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$.

Demonstração: Primeiramente observe que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi \rangle &= \Psi_1^2 \cos^2(t_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) + \Psi_n^2 \\ &= \cos^2(t_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \text{sen}^2(t_j) \cos^2(t_i) \right) + \prod_{j=1}^{n-1} \text{sen}^2(t_j) \\ &= \cos^2(t_1) + \text{sen}^2(t_1) \left[\cos^2(t_2) + \sum_{i=3}^{n-1} \left(\prod_{j=2}^{i-1} \text{sen}^2(t_j) \cos^2(t_i) \right) + \prod_{j=2}^{n-1} \text{sen}^2(t_j) \right] \\ &= \cos^2(t_1) + \text{sen}^2(t_1) \left[\cos^2(t_2) + \text{sen}^2(t_2) \left(\cos^2(t_3) + \sum_{i=4}^{n-1} \left(\prod_{j=3}^{i-1} \text{sen}^2(t_j) \cos^2(t_i) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \prod_{j=3}^{n-1} \text{sen}^2(t_j) \right) \right] \\ &\quad \vdots \\ &= \cos^2(t_1) + \text{sen}^2(t_1) \left[\cos^2(t_2) + \text{sen}^2(t_2) \left(\cos^2(t_3) + \text{sen}^2(t_3) \left(\cos^2(t_4) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{sen}^2(t_4) \left(\dots \left(\cos^2(t_{n-2}) + \text{sen}^2(t_{n-2}) \left(\cos^2(t_{n-1}) + \text{sen}^2(t_{n-1}) \right) \right) \right) \dots \right) \right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Derivando Ψ_i em relação a t_k obtemos

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t_k} = 0 \quad \text{para } k \geq i,$$

caso contrário

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t_k} = \frac{\cos(t_k)}{\text{sen}(t_k)} \Psi_i.$$

Além disso, note que $\Psi_i = \text{sen}(t_{i-1})\Psi_{i-1}$ se $i \geq 2$. A partir daí temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t_k} &= \frac{\partial \Psi_n}{\partial t_k} \partial_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t_k} \cos(t_i) \partial_i \right) - \Psi_k \text{sen}(t_k) \partial_k \\
&= \frac{\partial \Psi_n}{\partial t_k} \partial_n + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial t_k} \cos(t_i) \partial_i \right) - \Psi_k \text{sen}(t_k) \partial_k \\
&= \frac{\cos(t_k)}{\text{sen}(t_k)} \Psi_n \partial_n + \sum_{i>k}^{n-1} \left(\frac{\cos(t_k)}{\text{sen}(t_k)} \Psi_i \cos(t_i) \partial_i \right) - \Psi_k \text{sen}(t_k) \partial_k \\
&= \frac{\cos(t_k)}{\text{sen}(t_k)} \left(\Psi_n \partial_n + \sum_{i>k}^{n-1} \left(\Psi_i \cos(t_i) \partial_i \right) - \Psi_k \frac{\text{sen}^2(t_k)}{\cos(t_k)} \partial_k \right).
\end{aligned}$$

Suponha $k > l$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right\rangle &= \frac{\cos(t_k) \cos(t_l)}{\text{sen}(t_k) \text{sen}(t_l)} \left(\Psi_n^2 + \sum_{i>k}^{n-1} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) \right. \\
&\quad \left. - \Psi_k \frac{\text{sen}^2(t_k)}{\cos(t_k)} \Psi_k \cos(t_k) \right) \\
&= \frac{\cos(t_k) \cos(t_l)}{\text{sen}(t_k) \text{sen}(t_l)} \left(\Psi_n^2 + \sum_{i>k}^{n-1} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) - \Psi_k^2 \text{sen}^2(t_k) \right).
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\Psi_n^2 + \sum_{i>k}^{n-1} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) &= \text{sen}^2(t_{n-1}) \Psi_{n-1}^2 + \cos^2(t_{n-1}) \Psi_{n-1}^2 \\
&\quad + \sum_{i>k}^{n-2} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) \\
&= \Psi_{n-1}^2 + \sum_{i>k}^{n-2} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) \\
&= \text{sen}^2(t_{n-2}) \Psi_{n-2}^2 + \cos^2(t_{n-2}) \Psi_{n-2}^2 \\
&\quad + \sum_{i>k}^{n-3} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) \\
&= \Psi_{n-2}^2 + \sum_{i>k}^{n-3} \left(\Psi_i^2 \cos^2(t_i) \right) \\
&\quad \vdots \\
&= \Psi_{k+2}^2 + \Psi_{k+1}^2 \cos^2(t_{k+1}) \\
&= \Psi_{k+1}^2 \\
&= \Psi_k^2 \text{sen}^2(t_k).
\end{aligned}$$

Segue daí que $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right\rangle = 0$. e com isso concluimos o resultado. ■

Conclusão

Neste trabalho estudamos *Hipersuperfícies de Rotação* nos espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Em cada um destes espaços descrevemos as parametrizações de tais hipersuperfícies e fornecemos as curvaturas principais.

Em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, as hipersuperfícies de rotação possuem plano de rotação Riemanniano e podem ser parametrizada por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cos(s), \sin(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \sin(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), a(s)),$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária. Vimos que as órbitas são esferas em $\mathbb{E}^n \subset \mathbb{E}^{n+2}$ e as curvaturas principais são dadas por

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{-a'(s) \cot(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{1/2}}.$$

Em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ existem três possibilidades para o plano de rotação: Lorentziano, Riemanniano ou degenerado.

No caso Lorentziano as hipersuperfícies de rotação podem ser parametrizadas por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(s), \sinh(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \sinh(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), a(s)),$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária. As órbitas são esferas em $\mathbb{L}^n \subset \mathbb{L}^{n+2}$ e as curvaturas principais são dadas por

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{-a'(s) \coth(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}}.$$

No caso Riemanniano as hipersuperfícies de rotação poder ser parametrizadas por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\cosh(s)\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \cosh(s)\varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \sinh(s), a(s)),$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal do espaço hiperbólico, as órbitas são espaços hiperbólicos em $\mathbb{L}^n \subset \mathbb{L}^{n+2}$ e as curvaturas principais são dadas por

$$\lambda = \frac{-a''(s)}{((a'(s))^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{-a'(s) \tanh(s)}{\sqrt{(a'(s))^2 + 1}}.$$

No caso degenerado as hipersuperfícies de rotação poder ser parametrizadas por

$$f(s, t_2, \dots, t_n) = \left(s, st_2, \dots, st_n, -\frac{1}{2s} - \frac{s}{2} \sum_{i=2}^n t_i^2, a(s) \right)_{\mathfrak{B}},$$

onde \mathfrak{B} é uma base pseudo-ortonormal para \mathbb{L}^{n+2} , as órbitas são parabolóides em $\mathbb{L}^n \subset \mathbb{L}^{n+2}$ e as curvaturas principais são dadas por

$$\lambda = -\frac{sa'(s) + s^2a''(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{sa'(s)}{(1 + s^2a'(s)^2)^{1/2}}.$$

Em todos os casos o operador forma é do tipo

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix},$$

o que motiva o Teorema 2.5 que diz se uma hipersuperfície M^n dos espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ possui operador forma como citado acima, além de outras condições adicionais então M^n é uma hipersuperfície de rotação, mais precisamente M^n está contida em um hipersuperfície de rotação.

Como aplicações, classificamos as hipersuperfícies de rotação intrinsecamente planas. Vimos que em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ devemos ter $n = 2$ e a curva geratriz ou é uma reta vertical ou é dada por $\alpha(s) = (\cos(s), 0, \sin(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2(\sigma) - 1} d\sigma)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Ainda em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, apresentamos o Corolário 3.2, um resultado que não aparece no artigo de referência [8], que diz se uma hipersuperfície M^n possui curvatura de Ricci na direção de $T = \partial_{n+2} - \cos\theta N$ nula então a curva geratriz ou é uma reta vertical ou é dada por $\alpha = (\cos(s), 0, \dots, 0, \sin(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2(\sigma) - 1} d\sigma)$. Já em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, vimos que se $n \geq 3$ o plano de rotação dever ser Lorentziano, com curva geratriz $\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), \pm \cosh(s) + C)$ ou degenerado, com curva geratriz dada por uma reta vertical. Se $n = 2$ ou curva geratriz é uma reta vertical ou dada por $\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \cos^2(\sigma) - 1} d\sigma)$ no caso Lorentziano, $\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C \sinh^2(\sigma) - 1} d\sigma)$ no caso Riemanniano e $\alpha(s) = (s, 0, -\frac{1}{2s}, \pm \int_{s_0}^s \sqrt{C - \frac{1}{\sigma}} d\sigma)_{\mathfrak{B}}$ no caso degenerado.

Classificamos também as hipersuperfícies de rotação mínimas. Em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, vimos que ou a curva geratriz é uma reta vertical $\alpha(s) = (0, \dots, 0, 1, s)$ ou é dada por $\alpha(s) = (\cos(s), 0, \dots, 0, \sin(s), \int_{s_0}^s C(\sin(\sigma)^{2(n-1)} - C^2)^{-1/2} d\sigma)$. Já em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ as hipersuperfícies possuem curva geratriz $\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s C(\sinh(\sigma)^{2(n-1)} -$

$C^2)^{-1/2} d\sigma$) no caso Lorentziano, $\alpha(s) = (\cosh(s), 0, \dots, 0, \sinh(s), \pm \int_{s_0}^s C(\cosh(\sigma))^{2(n-1)} - C^2)^{-1/2} d\sigma$) ou $\alpha(s) = (1, 0, \dots, 0, s)$ no caso Riemanniano e $\alpha(s) = (s, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2s}, \pm \int_{s_0}^s C\sigma^{-1}(\sigma^{2(n-1)} - C^2)^{-1/2} d\sigma)_{\mathfrak{B}}$ no caso degenerado. Ainda nas aplicações mostramos que toda hipersuperfície de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é normalmente plana nos respectivos espaços ambientes.

Com respeito a trabalhos relacionados podemos citar [12] que descreve as hipersuperfícies de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ de curvatura constante, neste caso Manfio e Tojeiro mostram que uma hipersuperfície M^n de curvatura constante c em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, com $c \geq 1$ e em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, com $c \leq -1$ são subconjuntos de hipersuperfícies de rotação. Em [14], Mendonça e Tojeiro fazem uma generalização da definição aqui abordada, mais precisamente, define-se subvariedades de rotação, com codimensão arbitrária. Vimos que as hipersuperfícies de rotação são normalmente planas no respectivo espaço ambiente, além disso $T = \partial_{n+2} - \cos\theta N$ é uma direção principal, em [19], Tojeiro mostra que uma hipersuperfície em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é normalmente plana se, só se T é uma direção principal. Em [5], Chaves faz uma classificação das hipersuperfícies em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com curvaturas principais constantes.

Referências Bibliográficas

- [1] BLAIR, David E.: *On a generalization of the catenoid*, Canadian Journal of Mathematics, vol. **27**, 231-236, 1975.
- [2] CANDEL, Alberto; CONLON, Lawrence: *Foliations I*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, vol. **23**, Providence, 1999.
- [3] CARMO, M. P do: *Geometria Riemanniana*, IMPA, 5a ed, Rio de Janeiro 2011.
- [4] CARMO, M. P do; DAJCZER, Marcos: *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. **277**, 685-709, 1983.
- [5] CHAVES, Rosa; SANTOS, Eliane: *Hypersurfaces with constant principal curvatures in $S^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , arXiv:1503.03507v1, 2015.
- [6] DANIEL, Benoit: *Isometric immersions into $S^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. **361**, 6255-6282, 2009.
- [7] DILLEN, Franki; FASTENAKELS, Johan; VEKEN, Van der; VRANCKEN, Luc: *Constant angle surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$* , Monatshefte für Mathematik, vol. **152**, 89-96, 2007.
- [8] DILLEN, Franki; FASTENAKELS, Johan; VEKEN, Van der: *Rotation hypersurfaces in $S^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Note di Matematica, vol. **29**, 41-54, 2009.
- [9] ESPINAR, José María: *La ecuación de Codazzi en superficies*, Tese de Doutorado, Departamento de Geometria Topologia, Universidade de Granada, Espanha 2008.

- [10] GROMOLL, Detlef; WALSCHAP, Gerard: *Metric Foliations and Curvature*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, vol. **268**, 2009.
- [11] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R.: *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics,
- [12] MANFIO, Fernando; TOJEIRO, Ruy: *Hipersurfaces whith constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Illinois Journal of Mathematics, vol. **55**, 397-415, 2011.
- [13] MEEKS, W.; ROSENBERG, H.: *Stable minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$* , Journal of Differential Geometry, Birkhäuser, vol. **68**, 2009.
- [14] MENDONÇA, Bruno; TOJEIRO, Ruy: *Umbilical submanifolds of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$* , Canadian Journal of Mathematics, vol. **66**, 400-428, 2014.
- [15] O'NEILL, Barrett: *Semi-Riemannian geometry : with applications to relativity*, Academic Press, Pure and applied mathematics, vol. **103**, New York 1983.
- [16] ROSENBERG, Harold: *Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$* , Illinois Journal of Mathematics, vol. **46**, 1177-1195, 2002.
- [17] SPIVAK, Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 3a ed, vol. **1**, Houston 1999.
- [18] SPIVAK, Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 3a ed, vol. **4**, Houston 1999.
- [19] TOJEIRO, Ruy: *On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, vol. **41**, 199-209, 2010.