



**UnB**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**COSMOLOGIA QUÂNTICA NA GRAVIDADE TELEPARALELA**

*Alexandre da Silva Fernandes*

Brasília - DF

2017



**UnB**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# **COSMOLOGIA QUÂNTICA NA GRAVIDADE TELEPARALELA**

*Alexandre da Silva Fernandes*

*Orientador: Prof. Dr. Sérgio Costa Ulhoa*

Brasília - DF

2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

FF363c Fernandes, Alexandre da Silva  
Cosmologia quântica na gravidade teleparalela /  
Alexandre da Silva Fernandes; orientador Sérgio  
Costa Ulhoa. -- Brasília, 2017.  
63 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --  
Universidade de Brasília, 2017.

1. Relatividade Geral. 2. Cosmologia. 3.  
Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral. 4.  
Gravidade teleparalela. 5. Cosmologia quântica. I.  
Ulhoa, Sérgio Costa, orient. II. Título.

# “Cosmologia Quântica na Gravidade Teleparalela.”

Por

**Alexandre da Silva Fernandes.**

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada por:



Prof. Sérgio Costa Ulhoa  
IF/UnB



Prof. Abraão Jessé Capistrano de Souza  
UNILA



Prof. Ronni Geraldo Gomes de Amorim  
Gama/UnB

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque  
Coordenador de Pós-Graduação  
Instituto de Física

*Ao meu filho Symon que daqui a algum tempo poderá  
compreender e até expandir esse conhecimento.  
E ao meu prof. Claudio de Sousa que me direcionou  
para essa árdua e maravilhosa área.*

*Porque assim como os céus são mais altos do que a terra, assim são os meus caminhos mais altos do que os vossos caminhos, e os meus pensamentos mais altos do que os vossos pensamentos.*

*Isaías 55:9 - Bíblia Sagrada, edição Almeida Corrigida Fiel 2007*

---

## Agradecimentos

À Deus, por ter me dado capacidade o suficiente para produzir este conhecimento.

Ao meu orientador Sérgio, pela paciência que teve (e ainda tem) de me acompanhar e ensinar este mundo que me era novo, da pesquisa, e que se abriu um outro universo em minha mente.

Ao professor Ronni, pelos inúmeros ensinamentos e pela paciência para tirar várias dúvidas.

Ao professor C. M. G. de Sousa, que foi um dos principais responsáveis a me ensinar as primeiras trilhas dessa área, sempre me mostrando os espinhos e até as rosas que poderiam ser colhidos ao longo da caminhada.

Ao Oscar que sempre esteve ao meu lado me ajudando, principalmente no início, me apoiando, me "empurrando" e sempre me auxiliando.

Aos meus colegas de academia Hailleen, Rodrigo, Lydiane, Antonio, xará Alexandre, David e Helena, pelas milhares de dúvidas, várias ajudas na caminhada acadêmica e pelas preciosas discussões.

Ao professor Arsen, que sempre me tirou numerosas dúvidas, recomendou uma biblioteca básica, que compõe boa parte do meu pequeno acervo, e teve uma paciência de Jó para me ensinar como se caminha na vida acadêmica, sem contar das inúmeras vezes que me aconselhou valiosamente.

Aos professores que tive na UCB (Paulo Henrique, Armando Maroja, Paulo Brito, Diego Nolasco e outros), que me ensinaram as "primeiras letras e equações" e sempre me incentivaram a continuar na academia.

Aos professores Pinzul e Marcos Maia que me atenderam em diversos momentos para tirar dúvidas e as discussões que me ajudaram a entender muitos detalhes desse trabalho.

À Amanda, pela gentil e importantíssima ajuda na revisão do texto.

À minha família pelo apoio.

---

## Resumo

A cosmologia quântica na gravidade teleparalela é uma teoria construída à partir do Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral (TERG) e da quantização de Weyl. O TERG é uma descrição alternativa à proposta de Einstein. Ela demonstra que o campo gravitacional em termos de campo de tetradas, permitindo a obtenção, dentre outras soluções, da densidade de energia gravitacional. Já o procedimento de Weyl mostra um formalismo mais sólido para tratamento da correspondência entre operadores clássicos e quânticos. Através de um formalismo hamiltoniano da Relatividade Geral (RG), Wheeler e DeWitt construíram uma teoria quântica para a cosmologia mas que tem vários problemas, alguns deles relatados nesse trabalho. Partindo das ferramentas da TERG, do Modelo Cosmológico Padrão (MCP) e da quantização de Weyl, é obtido a equação de cosmologia quântica a partir da energia gravitacional e contrastada com a de Wheeler-DeWitt, a equação da cosmologia quântica teleparalela completa e sua equivalente em primeira aproximação. A discussão final é um panorama do que se tem em gravitação, os problemas e as possíveis soluções com a cosmologia quântica na gravidade teleparalela.

**Palavras chaves:** Relatividade Geral. Cosmologia. Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral. Gravidade teleparalela. Cosmologia quântica.

## *Abstract*

Quantum cosmology in teleparallel gravity is a theory built from Teleparallelism equivalent to General Relativity (TEGR) and Weyl quantization. The TEGR is an alternative description to Einstein's proposal. It demonstrates that the gravitational field in terms of tetrads field, allowing to obtain, among other solutions, the gravitational energy density. However, Weyl's procedure shows solid formalism for dealing with the correspondence between classical and quantum operators. Starting from a GR formalism, Wheeler and DeWitt constructed a quantum theory for cosmology with has several problems, some of them reported in this dissertation. From the TEGR, Standard Cosmology Model (SCP) and Weyl quantization tools, the quantum cosmology equation is obtained from gravitational energy and contrasted with Wheeler-DeWitt equation, the complete quantum cosmology equation and its equivalent in first approximation. The final discussion is an overview about gravitation, the problems and possible solutions with quantum cosmology in teleparallel gravity.

**Keywords:** General Relativity. Cosmology. Teleparallelism Equivalent to General Relativity. Teleparallel gravity. Quantum cosmology.

## Lista de abreviaturas e notação

**FLRW**  $\Rightarrow$  Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

**MCP**  $\Rightarrow$  Modelo Cosmológico Padrão ou Teoria do Big Bang

**RE**  $\Rightarrow$  Teoria da Relatividade Restrita ou Especial

**RG**  $\Rightarrow$  Teoria da Relatividade Geral

**TERG**  $\Rightarrow$  Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral

**Notação:** as unidades das constantes  $G$  e  $c$  serão fixadas com a escolha de  $G = c = 1$ , a menos que se explicita o contrário.

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>1 RELATIVIDADE GERAL E TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>13</b>
1.1 Teoria da Relatividade Geral . . . . .	13
1.1.1 <i>Fundamentos gerais da RG</i> . . . . .	14
1.1.2 <i>Equações de campo pelo princípio variacional</i> . . . . .	17
1.1.3 <i>Resultados da Relatividade Geral</i> . . . . .	18
1.1.3.1 Avanço do periélio de Mercúrio . . . . .	18
1.1.3.2 Curvatura da luz num campo gravitacional . . . . .	19
1.1.3.3 Buracos negros . . . . .	20
1.1.3.4 Ondas gravitacionais . . . . .	21
1.2 Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral . . . . .	22
1.2.1 <i>Propriedades do campo de tétradas</i> . . . . .	23
1.2.2 <i>Formalismo lagrangiano</i> . . . . .	25
1.2.3 <i>Interpretação do campo de tétradas</i> . . . . .	28
<b>2 COSMOLOGIA</b>	<b>30</b>
2.1 Cosmografia e princípios . . . . .	31

2.1.1	<i>Lei de Hubble</i> . . . . .	32
2.1.2	<i>Princípios cosmológicos</i> . . . . .	33
2.2	Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	33
2.2.1	<i>A métrica de FLRW</i> . . . . .	34
2.2.2	<i>Equações de Friedmann</i> . . . . .	36
2.2.3	<i>Problemas com o MCP</i> . . . . .	37
2.3	Cosmologia quântica de Wheeler-DeWitt . . . . .	38
2.3.1	<i>Equação de Wheeler-DeWitt</i> . . . . .	39
<b>3</b>	<b>QUANTIZAÇÃO</b>	<b>42</b>
3.1	Quantização canônica . . . . .	43
3.1.1	Aplicação de quantização canônica . . . . .	45
3.2	Quantização de Weyl . . . . .	46
3.2.1	Aplicação do procedimento de quantização de Weyl . . . . .	47
<b>4</b>	<b>COSMOLOGIA QUÂNTICA NA GRAVIDADE TELEPARALELA</b>	<b>50</b>
4.1	Campo de tétradas para a métrica FLRW . . . . .	51
4.2	Quantizações da cosmologia . . . . .	52
4.2.1	<i>Cosmologia quântica tipo Wheeler-DeWitt</i> . . . . .	53
4.2.2	<i>Cosmologia quântica na gravidade teleparalela</i> . . . . .	54
4.2.3	<i>Cosmologia quântica na gravidade teleparalela em primeira aproximação</i> . . . . .	55
	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>57</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

# INTRODUÇÃO

Desde o século XVII, a busca por unificação ou teoria que abarque a maior quantidade de fenômenos em um número menor de princípios, tem sido cada vez maior na física atual. Várias ideias surgiram, algumas para preencher lacunas que a Relatividade Geral (RG) deixava [1]. Uma dessas brechas é não apresentar uma expressão para a densidade de energia gravitacional que seja independente de coordenadas. Desse modo, é impossível conciliar física quântica e RG [2], [3].

Ao longo da história, pode-se observar algumas unificações. Uma das primeiras é quando Newton uniu as leis celestes com as leis da Terra, em sua cosmologia, que era baseada em espaço e tempo absolutos. Esse efeito é oriundo da observação do céu, que é feita há milênios, onde o homem aprendeu como prever as estações para plantar, colher e se agasalhar simplesmente ao observar os movimentos das estrelas e dos planetas [1].

Essas longas observações têm levado a humanidade a se aprofundar em questões cada vez mais intrigantes e até mesmo filosóficas e metafísicas. A busca por saber como o universo funciona, como se originou e como será o seu fim tem criado um grande desenvolvimento científico e tecnológico, principalmente nos últimos 100 anos [1].

Até o início do século XX, a Física mostrava-se em grande expansão, de modo a auxiliar nas revoluções industriais e na compreensão de elementos químicos. Com isso, surgiram até rumores de que a Física, no fim do século XIX, já estava pronta e que faltavam apenas detalhes para melhorar a precisão dos experimentos e da tecnologia. Mas, havia no céu límpido da ciência mais fundamental duas "pequenas nuvens" que ainda suscitavam dúvidas [4].

Essas pequenas nuvens trouxeram uma avalanche de desenvolvimento teórico e empírico na física: mecânica quântica e teoria da relatividade. Em 1900, Max Planck inaugurava a nova área ao explicar fenômenos que pareciam não fazer sentido na mais sólida física clássica terminada no

século XIX. No entanto, Albert Einstein, que até então era um desconhecido no meio científico e na época trabalhava em um escritório governamental na Suíça, sacudiu a base da ciência, com três dos cinco artigos no alvorecer do século XX, dentre eles o que dava base à Relatividade Especial e outro que fazia previsões quânticas sobre a luz [4].

Há pouco mais de 100 anos, Einstein generalizava sua teoria, de 1905, com gravitação, elevando a RG, com seus postulados, relacionando-os a um padrão cosmológico, ou seja, as equações da RG, que tem o formato de  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$ , seriam as primeiras previsões teóricas no século XX de como o nosso universo funciona [5]. No eclipse da expedição de Eddington, a primeira comprovação veio, dado pelo caminho da luz de uma estrela que sofre uma curvatura ao passar por um corpo massivo, no caso, o Sol [6]. O sucesso da RG veio com diversas previsões confirmadas, sendo a última, em 2015, dada pelo LIGO (detecção direta das ondas gravitacionais) [7]. Mas, ela ainda tem problemas, como por exemplo, o fato de não haver expressão de densidade de energia gravitacional.

Em síntese, a ausência de uma expressão de densidade de energia gravitacional, advinda da RG, será um dos focos do presente trabalho. Certamente, ela é um ponto crucial, visto que é a partir dessa expressão que será construída uma teoria de cosmologia quântica. Partindo de um caminho alternativo que mantivesse os bons resultados que a RG trouxe, mas que resolvesse o problema da densidade de energia gravitacional e que descrevessem os operadores de uma cosmologia quântica, desse modo, se alcança uma teoria mais completa que a RG, para descrever a cosmologia em nível quântico.

Diante do exposto, para resolver este problema é utilizado o Teleparalelismo Equivalente à RG (TERG). Em suas equações de campo o tensor  $t^{\lambda\mu} = k(4\Sigma^{bc\lambda}T_{bc}{}^{\mu} - g^{\lambda\mu}\Sigma^{bcd}T_{bcd})$  resolve o problema que se tem na RG: ele é interpretado como o tensor de energia-momento do campo gravitacional. E nas equações de campo da TERG,  $\partial_\nu(e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4}e^a{}_\mu(t^\lambda{}_\mu + T^{\lambda\mu})$  todas as descobertas da RG são de igual forma explicadas: tem-se uma equivalência completa entre as duas teorias, sem perda das explicações dos fenômenos ao longo dos últimos 100 anos e uma possibilidade de se fazer uma cosmologia quântica baseada em princípios físicos e matemáticos sólidos [8].

Uma outra diferença de interpretação da TERG frente à RG é o fato de que na primeira a gravidade é um fenômeno devido a torção. A curvatura, que é utilizada na geometria riemanniana, é nula mas, com a torção não-nula, os efeitos gravitacionais se tornam equivalentes [9].

A outra nuvem que lord Kelvin citou em sua palestra no fim do século XIX é a que deu origem à física quântica, iniciando-se com Planck, passando por Einstein, Bohr, Schrödinger e outros. Desse modo, a quantização seria o entendimento mais profundo a nível microscópico da

natureza. nas décadas de 1920 a 1950, várias ferramentas foram construídas, pois a complexidade das equações, derivadas dos modelos, ficava cada vez maior. Uma delas é a quantização canônica, amplamente utilizada ao longo da história, mais simples de utilização e que busca fazer correspondência entre o mundo clássico e o microscópio [10].

Nesse mesmo período, Hermann Weyl escreveu um procedimento de quantização, que será abordado nessa dissertação. Em relação a quantização canônica surgem alguns problemas, que não são bem entendidos para o objetivo que é descrito aqui. Um deles é que a canônica não pode ser usada em funções não-polinomiais, enquanto a de Weyl não tem esse impeditivo [11].

Mesmo com esses ventos de desenvolvimento e problemas, a física se desenvolveu até a década de 1960, quando John Wheeler e Bryce DeWitt fundaram a cosmologia quântica padrão, ou seja, partiram da formulação hamiltoniana da RG e da quantização canônica, dando origem a uma equação que é interpretada como a que rege o universo através da função de onda  $\Psi$  [12]. Mas a equação tem sérios problemas.

Um deles é o que já foi citado anteriormente: RG não tem formulação para oferecer uma expressão para a densidade de energia gravitacional. Além disso, a interpretação da mecânica quântica que Wheeler e DeWitt deram, é muito estranha do ponto de vista da interpretação de Copenhagen: a física quântica de muitos mundos. E não é só: o tempo é intrínseco, ou seja, não há evolução temporal da energia gravitacional no universo porque  $\hat{H}\Psi = 0$  [13]. Mesmo com todos esses problemas, essa cosmologia quântica tem sido amplamente estudada há mais de 40 anos.

Diante disso, com as ferramentas da TERG e do procedimento de quantização de Weyl, uma cosmologia quântica com princípios físicos sólidos é apresentada nessa dissertação. Partindo da formulação da TERG é construído um campo de tétradas para a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que é um dos alicerces do Modelo Cosmológico Padrão (MCP) e que dá suporte à comumente chamada teoria do Big Bang. O passo seguinte é encontrar a densidade de energia gravitacional que, só depois da aplicação da TERG é possível:  $\Pi^{(0)1} = 4\kappa ar \sin \theta \left( \sqrt{1 - kr^2} - 1 \right)$ .

Tendo em mãos a equação da densidade de energia gravitacional, algumas análises são feitas. A primeira é encontrar uma equação do tipo Wheeler-DeWitt. Na sequência é encontrada a equação da cosmologia quântica, partindo da interpretação de gravidade onde não há problema no ente a ser quantizado e aplicando o procedimento de Weyl. Mas a expressão completa não pode ser resolvida analiticamente pois um dos operadores tem expoente fracionado. Com isso, é buscado uma primeira aproximação e montado a equação de cosmologia quântica na gravidade teleparalela com essa aproximação.

---

A estrutura da dissertação está dividida em quatro partes. No capítulo 1 é mostrada a RG, seus fundamentos, as equações de campo e seus resultados. No mesmo capítulo é apresentado o TERG, as propriedades do campo de tétradas, o formalismo lagrangiano dessa teoria e o significado físico desse campo de tétradas.

Em seguida, no capítulo 2, é feito um panorama na cosmologia, partindo desde o princípio da cosmografia inaugurada por Edwin Hubble no monte Wilson, passando pela lei observacional de Hubble e os princípios cosmológicos, até os problemas ainda não resolvidos do MCP, delineando sobre a métrica de FLRW e as equações de Friedman. Por fim, é tratado sobre a cosmologia quântica de Wheeler-DeWitt, com um panorama no que a equação representa e, principalmente, nos problemas e falhas que ela apresenta.

Já no capítulo 3, aborda-se sobre procedimentos de quantizações. Dessa forma, é mostrado o procedimento canônico e seus problemas, de Weyl e um exemplo simples de aplicação. Por fim, o capítulo 4, encerra com um tratamento na cosmologia quântica partindo de sólidos princípios físicos, que é a TERG sendo aplicada à métrica FLRW e, com isso, obtendo a densidade de energia gravitacional. Na primeira parte é mostrado a construção do campo de tétradas para a métrica da teoria do Big Bang. Na outra parte são mostradas as quantizações aplicadas à cosmologia. A primeira delas é análoga às quantizações que Wheeler e DeWitt fizeram, ou seja, utilizando os fatores de escala  $a(t)$  e  $\dot{a}(t)$  e os problemas envolvidos nesse tipo de procedimento. Ademais, a segunda é a equação da cosmologia quântica na gravidade teleparalela, que é construída a partir da densidade de energia gravitacional, que foi encontrada na seção anterior, mostrando que ela é mais coerente do ponto de vista físico. No entanto, como é uma equação de difícil solução, foi feita uma expansão e uma primeira aproximação, que é descrita na última parte desse capítulo.

A discussão final traz o panorama que foi feito na dissertação e apontando para o futuro, ou seja, há convicção que todo esse embasamento teórico resolve e poderá resolver grande parte dos problemas que se tem em cosmologia. Apesar da intensa pesquisa com a equação de Wheeler-DeWitt, este trabalho está sendo direcionado à um caminho que tem viés de interpretação física mais sólida. De modo em que utiliza a TERG, contornando problemas que há na RG e se coloca como a real teoria de gravitação a nível global no universo, e um procedimento de quantização, que segue uma clara correspondência matemática, o entendimento completo do universo pode ser avançado na cosmologia quântica na gravidade teleparalela.

# Capítulo 1

## RELATIVIDADE GERAL E TELEPARALELISMO EQUIVALENTE À RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo será dado um panorama sobre a RG e o TERG. Além de incluir um breve contexto histórico, que é considerado na RG, tendo como foco os problemas que existem em sua interpretação como teoria de gravitação. Já no que tange à TERG é mostrado a história com olhar desenvolvimentista, ou seja, os avanços científicos desenvolvidos desde as tentativas de Einstein [2] até os dias atuais.

### 1.1 Teoria da Relatividade Geral

Entre março e junho de 1905, quando era analista no Escritório de Patentes em Berna, Suíça, Albert Einstein era apenas um desconhecido no meio científico. Naquele ano abalou o mundo ao publicar cinco artigos, sendo 3 deles destacados: sobre o *quantum* de luz e um que lançava as bases da Relatividade Especial ou Restrita (RE, nome que viria a ser conhecida, essa teoria, posteriormente). Depois desta publicação, não houve nenhum interesse por meses, até que um renomado físico da época, Max Planck, o solicitou alguns detalhes adicionais. Já em 1911, ele foi convidado a escrever um artigo de revisão sobre a RE. No primeiro semestre de 1916, a RG, uma generalização ou aplicação da RE com gravitação, é publicada. [14] [5].

A RG leva em conta o princípio da equivalência, onde é postulado que referenciais em queda livre são equivalentes, para realização de experimentos físicos, a um inercial sem gravidade.

Em relação aos conceitos apresentados, as leis da física devem ter uma estrutura, de modo que a sua validade, seja a mesma em qualquer sistema de referência animado em movimento. A partir daí, o quadro fica mais completo quando se tem desvio da luz vindo de uma estrela e passando perto do Sol (eclipse visto em Sobral pela expedição montada por Eddington em 1919, demonstrando que o espaço-tempo curva com massa), dilatação gravitacional (considerada em aplicação tecnológica como GPS), buracos negros (como o Sagitarius A\*), ondas gravitacionais (detectadas 2 vezes pelo LIGO no segundo semestre de 2015) e outras [6] [15].

Com todo o sucesso em previsões da RG, há problemas de interpretação física que ela não tem como resposta, como por exemplo, o entendimento do momento angular do campo gravitacional que é deficitário [16]. Mas, principalmente, que será o foco deste trabalho, é que não há uma definição de densidade energia gravitacional e isso inviabiliza a quantização e uma compreensão mais clara da estrutura do universo.

Para resolver esses problemas se faz necessária, a utilização de uma teoria que preserve os avanços obtidos pela RG. Nesse sentido, a mais promissora, em estudo, é o TERG que consiste em uma teoria que é baseada em campo de tétradas (base de vetores linearmente independentes que obedecem uma relação de ortogonalidade). As primeiras tentativas nesse viés, vem do próprio Einstein que buscava unificar a gravitação e o eletromagnetismo [2]. Ao longo das décadas, a pesquisa nessa alternativa de teoria tem-se intensificado, por alguns grupos, com a finalidade de resolver esses problemas e investigar, ainda mais, o âmago do universo como um todo.

### 1.1.1 *Fundamentos gerais da RG*

Nesta seção serão apresentadas as principais ideias para a construção da RG. Pode-se resumi-la, em ideias chaves, da seguinte forma [17]:

- i) Gravidade é geometria, ou seja, a força gravitacional, conhecida na mecânica newtoniana, é generalizada para a curvatura da geometria do espaço-tempo quadridimensional, ou seja, a responsável pela gravidade é a curvatura;
- ii) Massa-energia é a fonte da curvatura do espaço-tempo, pois, a massa é a causadora da curvatura e, desde a RE, energia também o é;
- iii) Massas livres de ação externa movem-se na linha reta em espaço-tempo curvo, ou seja,

corpos são atraídos e movem-se em relação aos outros devido a curvatura que suas massas provocam no espaço-tempo e esse movimento é em geodésica.

Alguns conceitos devem ser analisados dentro destes itens, um deles é a geometria do espaço-tempo, que é modelado por uma variedade <sup>1</sup> diferencial riemanniana onde são definidos as distâncias por meio das métricas [19]. Localmente, a geometria euclidiana é a regente [15].

Dado um conjunto de pontos é possível definir curvas e superfícies nessa variedade, que poderão ter dimensões diversas. Uma curva pode ser definida como [19]

$$x^a = x^a(u), (a = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

onde  $u$  é o parâmetro e  $x^a$  são  $n$  funções de  $u$ . Tomando um  $m < n - 1$  pode-se construir uma hipersuperfície de  $m$  dimensões. Com base nessas coordenadas, dependendo da situação, há necessidade de transformação entre coordenadas. Tomando uma curva  $\gamma$  na variedade dada, considera-se uma mudança de coordenadas de  $x^a \rightarrow x'^a$  dado por  $n$  equações se faz por  $x'^a = x^a(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . E, para cada coordenada, é utilizada a matriz de transformação ou jacobiana [19].

De forma geral, um tensor, que é um conjunto de quantidades que sob transformações de coordenadas, é escrito [19]

$$X'^{\mu\dots\nu\dots} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \dots \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \dots X^{\alpha\dots\beta\dots} \quad (1.2)$$

Com base no que foi descrito acima, esta é uma generalização que garante a invariância entre tensores contravariantes e covariantes, ou seja, quantidades físicas devem ser invariantes sob quaisquer transformações de coordenadas. Dizendo de outro modo: observáveis, medidas, experimentos e qualquer outro tipo de física envolvida não deve depender do sistema de coordenadas adotado. Para garantir a totalidade da invariância de quantidades físicas sob transformações de coordenadas é necessário definir o operador derivada. Para um campo escalar  $\phi$ , sua derivada é definida como  $\phi_{;a} \equiv \partial_a \phi$  [20].

Tomando dois pontos  $x^\mu$  e seu infinitesimal  $x^\mu + dx^\mu$  e considerando o transporte paralelo das componentes de um vetor  $\lambda^a$  (pois deve-se derivar tanto as componentes quanto os versores relacionados) a derivada covariante é escrita como [20]

$$\nabla_\nu \lambda^\mu = \lambda^\mu_{;\nu} \equiv \lambda^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\beta\nu} \lambda^\beta, \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>matematicamente, é um espaço de Hausdorff com base contável e que tem homeomorfismo entre os pontos e  $\mathbb{R}^n$ . Fisicamente, é o local onde ocorrem os fenômenos físicos [18]

onde  $\lambda^\mu{}_{;v} \equiv \partial_v \lambda^\mu + \Gamma^\mu{}_{\beta\mu} \lambda^\beta$  e  $\Gamma^\mu{}_{\beta\mu}$  são os símbolos de Christoffel definidos, genericamente, como  $\Gamma_{abc} \equiv \frac{1}{2}(\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ba} - \partial_a g_{bc})$ .

Note-se que nos símbolos de Christoffel aparece a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Métrica é um tensor simétrico covariante de 2ª ordem que permite definir distâncias. De forma geral, pode ser definida como [19]

$$du^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.4)$$

Com esses conceitos em mente pode-se definir a geodésica, que é a menor distância entre dois pontos em uma curva. Essa definição é aplicada em qualquer tipo de variedade ou geometria e que tem as mesmas regras utilizadas em tensores e conexões. A equação da geodésica métrica é [19] [20]

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\alpha}{du} = 0. \quad (1.5)$$

Um outro conceito muito importante é o tensor de Riemann ou Riemann-Christoffel [19], que é definido como [20]

$$R^\theta{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\theta{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\theta{}_{\alpha\beta} + \Gamma^\phi{}_{\alpha\gamma} \Gamma^\theta{}_{\phi\beta} - \Gamma^\phi{}_{\alpha\beta} \Gamma^\theta{}_{\phi\gamma}. \quad (1.6)$$

Ou seja,  $R^\theta{}_{\alpha\beta\gamma}$  depende da métrica e de suas derivadas. Conseqüentemente dessa definição, o tensor é antissimétrico com respeito aos dois últimos índices,  $R^\theta{}_{\alpha\beta\gamma} = -R^\theta{}_{\alpha\gamma\beta}$ . O tensor de Ricci é definido pela contração [19]

$$R_{\alpha\beta} = R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta} = g^{\gamma\lambda} R_{\lambda\alpha\gamma\beta}. \quad (1.7)$$

O último termo é o escalar de curvatura ou de Ricci

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (1.8)$$

Utilizando a identidade de Bianchi [20]

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\theta;\phi} = \partial_\phi \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\theta} - \partial_\phi \partial_\theta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \quad (1.9)$$

e as definições do tensor de Ricci e seu escalar chega-se a  $T^{\mu\nu}$  de Einstein [20]

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

que satisfaz a condição

$$G^\nu{}_{\gamma;\nu} = 0. \quad (1.11)$$

Finalmente, as equações de campo da RG são descritas como [20]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

onde o lado esquerdo da equação é o próprio tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  [20].

Tomando a equação (1.11), Einstein mostrou que pode-se escrever [21]

$$t^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{16\pi} \left[ L\delta^{\mu}_{\nu} - g_{\alpha\beta,\nu} \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\mu}} \right], \quad (1.13)$$

onde  $L = g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta})$ .

Partindo desse pressuposto, entende-se que este é o motivo de não ser possível obter uma densidade de energia gravitacional:  $t^{\mu}_{\nu}$  é um pseudotensor [3], [21], [23], ou seja, para ser um tensor real todos os conjuntos de seus componentes devem ser transformados sob quaisquer transformações de coordenadas [22]. Com o Teleparalelismo equivalente à RG este problema é solúvel, ou seja, obtém-se um tensor, com significado verdadeiro da palavra e da expressão, de energia-momento do campo gravitacional.

### 1.1.2 Equações de campo pelo princípio variacional

Na seção anterior foi dado um panorama sobre os pilares da RG. Nesse sentido, aqui, será dado uma abordagem geral sobre a construção das equações de campo utilizando o princípio variacional. Todas elas podem ser obtidas pelo funcional [24]

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0, \quad (1.14)$$

que dá uma quantidade invariante sob transformações de coordenadas e que é escrita em termos da métrica  $g_{\mu\nu}$ . A densidade de lagrangiana representada é  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$  onde  $R$  é o escalar de Ricci. Com isso a ação é definida como [24]

$$S_{HE} = \int \sqrt{-g}R d^4x, \quad (1.15)$$

que é conhecida como ação de Hilbert-Einstein. Aplicando a equação anterior (1.15) na expressão (1.14) e utilizando o escalar de Ricci (1.8) obtém-se

$$\delta S_{HE} = \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \int d^4x \delta \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Analisando cada uma das três parcelas, o resultado final da variação da ação de Hilbert-

Einstein tem a forma

$$\delta S_{HE} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

As equações de Einstein no vácuo (considerando apenas a parte geométrica da ação) é obtida, reutilizando a expressão (1.14)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (1.18)$$

Para se ter as equações de campo de forma completa, é necessário considerar a ação da matéria  $S_M$ , ou seja,

$$S = \frac{1}{16\pi} S_{HE} + S_M. \quad (1.19)$$

Com isso, as equações de campo de Einstein completas ficam no formato

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

onde o último tensor é definido como  $T_{\mu\nu} = 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$ , que contém a informação da densidade de energia total medida por um observador inercial [38].

### 1.1.3 Resultados da Relatividade Geral

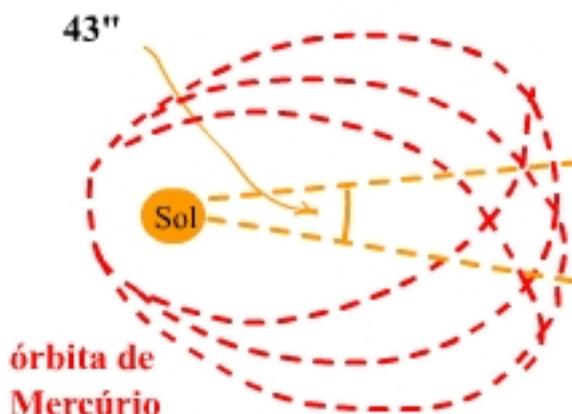
A RG foi uma das maiores mudanças de visão de universo. Desse modo, depois da introdução da RE, Einstein trabalhou para generalizar sua teoria afim de obter algo que abarcasse a gravitação, da mesma forma que a teoria de Newton do século XVII. No entanto, não bastava apenas a mudança de ordem matemática, era necessário, para aceitação, que essa teoria fizesse previsão e que fosse observado. Historicamente, ela obteve bons resultados.

#### 1.1.3.1 Avanço do periélio de Mercúrio

As órbitas dos planetas têm um movimento de precessão bem conhecido, que é explicado pela mecânica clássica e pela perturbação dos outros planetas. Mas, havia uma alteração muito grande (mensurável) em relação ao planeta Mercúrio: sua órbita, no periélio, tinha 1,38" de arco a mais em cada translação completada. Desse total, 1,28" era explicado devido à perturbação dos outros planetas mas 0,10" ficava sem explicação, totalizando um avanço 43" de arco do periélio por século [6].

Desde 1859, com as medidas de Le Verrier, várias soluções foram dadas para explicar esse efeito. Uma delas era "aumentar a massa" de Vênus em, pelo menos, 10%, proposta completamente inadmissível. Até a procura por outro planeta, entre o Sol e Mercúrio, foi dado como hipótese mas caiu por terra devido a falta de observação [38].

A melhor explicação foi a dada por Einstein em sua teoria, que previra o valor correto do avanço de  $43''$ , detalhe este que falhava com a aplicação da teoria de gravitação de Newton. Este foi o início da mecânica celeste pós-newtoniana que generalizava a unificação da Terra e Céu feita no século XVII [6], [38].



**Figura 1:** Precessão de Mercúrio. Retirado de <http://www.pucsp.br/pos/cesima/schenberg/alunos/fernandacardoso/Relatividade/Eixo%20Orbital.htm>

### 1.1.3.2 Curvatura da luz num campo gravitacional

Ademais, é interessante salientar uma outra interessante ideia proposta na RG por Einstein que se tratava da luz vinda de uma estrela, que ao passar próximo de um objeto massivo, como o Sol, teria sua trajetória curvada, ou seja, haveria uma deflexão do raio luminoso de uma estrela provocada pelo campo gravitacional do Sol. Desse modo, ele calculou que, durante a observação de um eclipse solar total, o raio de uma estrela passando rasante ao Sol teria uma posição aparente deslocada de  $1,75''$  de arco [6].

Eddington, juntamente com Dyson e Davidson publicaram, em 1919, os resultados de duas expedições, uma na ilha do Príncipe e a outra na cidade de Sobral, Ceará. Os resultados das chapas fotográficas analisadas posteriormente davam conta de uma deflexão da luz na casa dos  $1,98'' \pm 0,30''$ .

Em decorrência disso, este resultado deu uma repercussão muito grande à RG pois foi a primeira comprovação da teoria. Entretanto, não foi a única medida deste tipo: em 1995 foi feita uma outra observação utilizando a técnica de interferometria de base muito longa (VLBI) e mais recentemente, 2003, foi feita outra medida de deflexão causada pelo planeta Júpiter. Ambas as medidas tiveram previsões acuradas pela teoria [6].

### 1.1.3.3 Buracos negros

Pode-se definir buracos negros como sendo são objetos astrofísicos que, inicialmente, foram modelados ainda no mundo newtoniano do século XVIII. Desse modolo, pela lei da gravidade de Newton, para um objeto sair do campo gravitacional de um astro qualquer, era necessário ter velocidade maior que um valor limite. Outrossim, este é conhecido como velocidade de escape. A equação que rege esse fenômeno é

$$v_e = \sqrt{\frac{2M}{R}}, \quad (1.21)$$

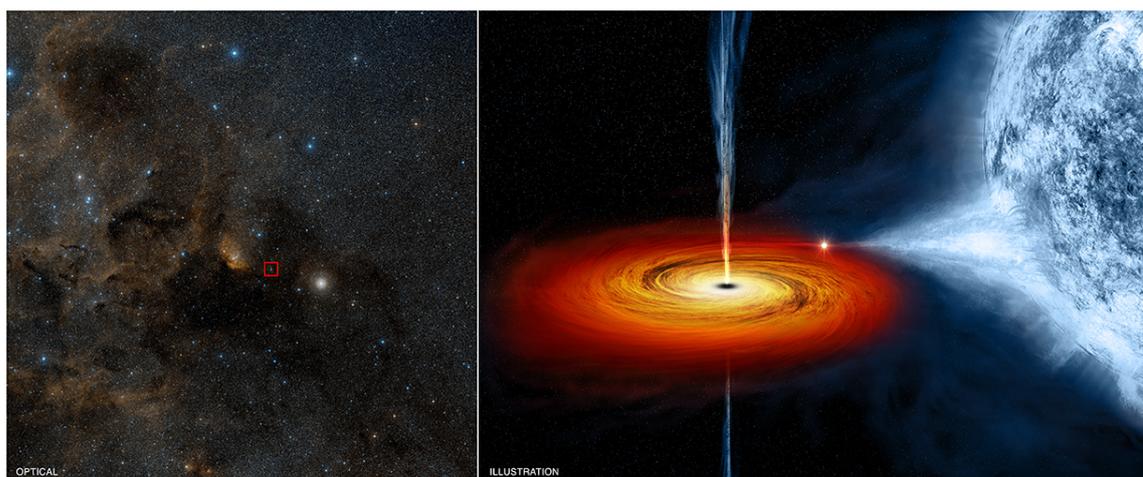
onde  $M$  é a massa do astro e  $R$ , seu raio. A dedução dessa equação é escrevendo sua energia mecânica (energia cinética e gravitacional). Note-se que não importa a massa do objeto. É importante destacar que quando o raio  $R$  tende a zero, a velocidade tende a infinito. Para efeitos de comparação: para a superfície da Terra e do Sol, as velocidades são de 11,2 Km/s e 617 Km/s, respectivamente [6].

John Michell e Laplace, ente os séculos XVIII e XIX, propuseram, talvez independentemente, que haveria astros no universo onde a velocidade de escape seriam tão grandes quando a própria  $c$  da luz (ainda estava em voga, nessa época, a teoria corpuscular da luz, como a mais aceita). Esses objetos, denominados como *estrelas escuras*, não permitiriam a luz sair de sua superfície. Uma estrela desse tipo, com massa equivalente à do Sol, teria um raio de apenas 18,5 Km de extensão [6]

Ao longo de várias décadas, nada disso foi detectado. No entanto, com a publicação da RG [5], foi possível achar solução das equações de campo (1.20) interessantes que abarcariam esse tipo de objeto. Dessa forma, dois meses após a publicação da RG, Einstein notifica que calculou uma curvatura do espaço-tempo de uma estrela esférica. No mesmo ano, Schwarzschild publica [26] uma solução que é dependente da massa crítica da estrela a qual a luz poderia ser "aprisionada". O raio de Schwarzschild é dado por [6]

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1.22)$$

Depois dessas soluções, houve intensa pesquisa teórica ao longo dos anos seguintes. Um deles foram os trabalhos de Oppenheimer e outros onde davam conta que estrelas poderiam, no fim de suas vidas, implodir indefinidamente. A primeira detecção dos efeitos ao redor de um buraco negro veio em 1965 [27] e, ao longo das décadas, vários outros foram encontrados, como em centros de galáxias e até fusões.



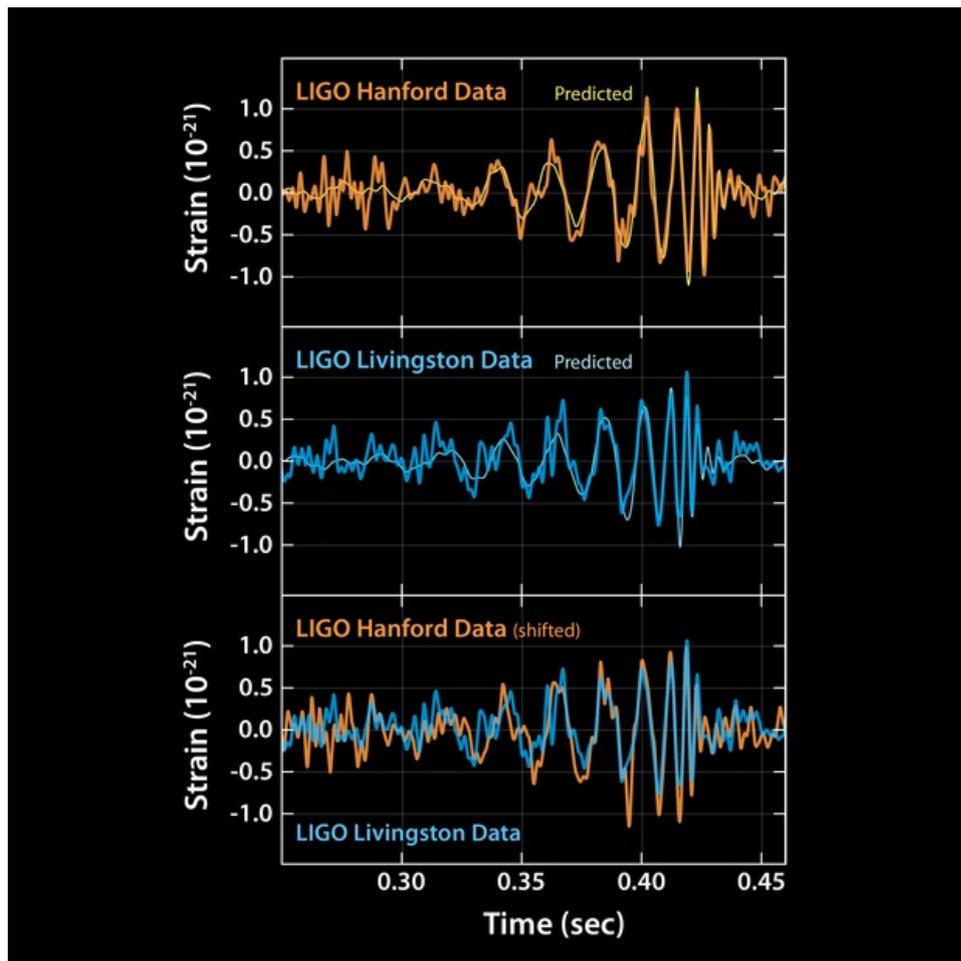
**Figura 2:** Imagem em ótico do DSS e ilustração do buraco negro Cygnus X-1. Retirado de <http://chandra.harvard.edu/photo/2011/cygx1/>

#### 1.1.3.4 Ondas gravitacionais

Uma outra confirmação à RG é uma previsão que as equações de campo fraco tem soluções do tipo ondas transversais que se deslocam à velocidade da luz e que são geradas pelas variações de tempo do quadrupolo de momento da fonte [28].

Entretanto, essa previsão foi inicialmente questionada sua validade por se tratar de uma detecção muito pequena, que exigia equipamentos muito sensíveis. Mesmo assim, Hulse e Taylor descobriram o sistema binário de pulsar PSR B1913+16, em 1974 [29] muito peculiar. Sete anos depois, juntamente com Weisberg, Taylor observa o mesmo pulsar e detecta, através das medidas das massas e do movimento dos astros, que há um decaimento de energia devido a radiação gravitacional. Apesar de ter sido uma medida indireta, foi muito importante para impulsionar mais pesquisas e construções de equipamentos para detecção das ondas gravitacionais.

Em 2015, o *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) detectou, através de interferometria, as ondas gravitacionais provenientes da fusão de dois buracos negros estelares de 29 e 36 massas solares [31]. Outra observação foi feita pelo LIGO, acerca de uma nova fusão de buracos negros com 7,5 e 14,2 massas solares, em 2015, [7], que deu mais uma sustentação à RG e abriu uma nova janela de observação astronômica através das ondas gravitacionais.



**Figura 3:** Sinais detectados pelo LIGO em Livingston, Lousiana e Hanford, Washington. Retirado de <https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160211a>

## 1.2 Teleparalelismo equivalente à Relatividade Geral

É compreendido, geralmente, que a energia do campo gravitacional não é local, ou seja, é definida em uma região específica do espaço. Por exemplo, Landau e Lifshitz [23] mostram um pseudotensor do campo gravitacional que é dependente da segunda derivada do tensor métrico e que pode ser anulada por uma transformação de coordenadas conveniente e dependente, resultando em uma concordância com o princípio da equivalência da RG.

Ao longo da história recente, a investigação sobre uma teoria alternativa à RG aumentou desde a sua publicação [2]. Einstein viu nas teorias teleparalelas uma possibilidade de unificação entre a gravidade e o eletromagnetismo. Em 1929, ele notou que as equações de campo de uma teoria que tem lagrangiana do tipo  $L = e(AI_1 + BI_2 + CI_3)$ , onde  $e = \det(e^a{}_\mu)$  e com valores  $A = 1/4$ ,  $B = 1/2$ , e  $C = -1$  são simétricas nos dois índices livres de espaço-tempo, resultando em uma teoria linearizada que descreve o campo gravitacional [8]. Desse modo,

Lanczos observou que a invariante definida por  $A$ ,  $B$  e  $C$  são equivalentes ao escalar de curvatura de Riemann. Uma das razões da infrutífera busca feita por Einstein nessa unificação deve-se ao fato que não via como escolher, justificadamente, determinadas equações de campo [8].

Møller mostrou, em 1961, que é impossível anular o campo gravitacional por transformação de coordenadas [32], ou seja, uma abordagem de pseudotensor torna-se inviável a construção de qualquer entendimento sobre o campo gravitacional dado que as quantidades físicas se tornam dependentes da transformação a ser aplicada. Mas, ao resgatar a ideia inicial de Einstein, Møller mostrou que pode ser obtida uma densidade de energia gravitacional. Já em 1963 Pellegrini e Plebanski encontraram uma formulação lagrangiana da gravidade teleparalela em campos de tétradas baseando-se nas ideias de Møller [34].

Em 1976, Y. M. Cho mostrou que a densidade lagrangiana do teleparalelismo é invariante sob transformações  $SO(3, 1)$  e, também, é equivalente a densidade lagrangiana de Hilbert-Einstein da RG [35]. Já em 1979/81 Hayashi e Shirafuji chegaram a conclusão, na intitulada *New General Relativity*, que fixando os parâmetros adequados, a densidade lagrangiana se reduz a uma densidade escalar de curvatura  $eR$  da geometria riemanniana [36]. Heh e Nitsch mostraram estudos de uma classe geral de teorias de gravitação em geometria de Riemann-Cartan. Estas teorias, com conexão e campos de tétradas, possuem casos particulares de teorias teleparalelas e uma delas é equivalente a RG [8]. Finalmente em 1994 Maluf [33] mostrou a formulação hamiltoniana para a TERG.

Diversas contribuições tem sido feitas no TERG, com braços de atuação em várias aplicações como descrição do momento angular [37] e densidade de energia gravitacional ao longo do tempo [38] de estrelas de nêutrons, buraco negro tipo Kerr [39], ondas gravitacionais [16], aprimoramento do entendimento do princípio de equivalência como não sendo geral [40] dentre outros. Mas, uma grande contribuição tem sido dada em 2014 por Ulhoa e Amorim ao publicarem um artigo sobre a quantização do espaço-tempo da métrica de Schwarzschild, abrindo as portas para a gravitação quântica e, conseqüentemente, para a cosmologia quântica, com um contexto bem mais definido do que da RG [41].

### 1.2.1 Propriedades do campo de tétradas

Conforme visto acima, o TERG é uma alternativa a formulação geométrica da RG de Einstein. Sua montagem é feita em termos de campos de tétradas  $e^a{}_{\mu}$  de uma conexão  $\omega_{\mu ab}$  ou somente entre as tétradas. Dado um campo de tétradas é possível construir um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , os símbolos de Christoffel (que são responsáveis pela mudança dos versores), a conexão da torção de Levi-Civita  ${}^0\omega_{\mu ab}(e)$  e a conexão de Weitzenböck  $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}\partial_{\mu}e_{a\nu}$ . Prosseguindo

nas construções observar-se-á que o tensor de curvatura é posto como nulo e a geometria de Weitzenböck é mais geral e consistente que a geometria de Riemann [8]. E essa consistência será melhor apreciada por permitir uma construção de uma teoria gravitacional cosmológica.

Uma característica do campo de tetradas é que descreve tanto o espaço-tempo físico curvo  $g_{\mu\nu}$  como o espaço-tempo tangente plano  $\eta_{ab}$  na mesma tetrada. Ou seja, um ponto do espaço-tempo físico e seu correspondente no espaço-tempo tangente é descrito pela mesma tetrada [37].

O campo de tetradas é descrito por 4 vetores no espaço-tempo ortonormais e linearmente independentes,  $e^a{}_\mu$ , com o índice do espaço-tempo tangente plano  $a = (0), (1), (2), (3)$ . Já os índices de espaço-tempo físico são descritos como  $\mu = 0, i, a = (0), (i)$  [8].

Considere um vetor no espaço-tempo físico. Sua correspondente no tangente, usando a tetrada, é dada por

$$V^\mu = e_a{}^\mu V^a. \quad (1.23)$$

Inversamente, considerando um vetor no espaço-tempo tangente, sua projeção correspondente no físico é [37]

$$V^a = e^a{}_\mu V^\mu. \quad (1.24)$$

A relação de ortonormalidade é escrita como

$$\begin{aligned} e^a{}_\mu e_b{}^\mu &= \delta_b^a, \\ e^a{}_\mu e_a{}^\nu &= \delta_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (1.25)$$

É possível descrever, devido a relação anterior, o tensor métrico do espaço-tempo curvo físico

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= e^a{}_\mu e_{a\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= e^{a\mu} e_a{}^\nu. \end{aligned} \quad (1.26)$$

e tangente como

$$\begin{aligned} \eta_{ab} &= e_a{}^\mu e_b{}^\nu g_{\mu\nu}, \\ \eta^{ab} &= e^a{}_\mu e^b{}_\nu g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

onde  $\eta^{ab} = e^{a\mu} e^b{}_\mu$  é a métrica de Minkowski [37].

### 1.2.2 Formalismo lagrangiano

Conforme mostrado na subseção anterior, as tetradas convertem os índices de Lorentz em índices do espaço-tempo e vice-versa. Para se construir uma formulação lagrangiana da teoria é colocado uma conexão de spin no grupo  $SO(3, 1)$ ,  $\omega_{\mu ab}$ , e, impondo que essa conexão seja nula é obtido uma invariância global de Lorentz [37]. Ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} e^a_{\nu} &= 0, \\ \partial_{\mu} e^a_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e^a_{\lambda} + \omega_{\mu}{}^a{}_b e^b_{\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Isolar a conexão  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e^a_{\lambda}$ , que é escrita em função da tetrada e da conexão de spin,

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = e^{a\lambda} e^b_{\nu} \omega_{\mu ab} + e^{a\lambda} \partial_{\mu} e_{a\nu} \quad (1.29)$$

e, aplicando essa conexão na expressão usual de tensor de curvatura, obtém-se:

$$R^{\lambda}_{\gamma\mu\nu}(\Gamma) = \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\gamma\mu} + \Gamma^c_{\gamma\nu} \Gamma^{\lambda}_{c\mu} - \Gamma^c_{\gamma\mu} \Gamma^{\lambda}_{c\nu} = e_a{}^{\lambda} e^b_{\gamma} R^a{}_{b\mu\nu}(e, \omega), \quad (1.30)$$

que é o tensor curvatura geral.

Abrindo cada conexão, considerando a derivada do campo de tetrada como nulo e substituindo no tensor curvatura geral, obtém-se:

$$R^{\lambda}_{\gamma\mu\nu}(e, \omega) = e_a{}^{\lambda} e^b_{\gamma} (\partial_{\mu} \omega_{\nu ab} - \partial_{\nu} \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ac} \omega_{\nu cb} - \omega_{\nu ac} \omega_{\mu cb}). \quad (1.31)$$

Já o tensor torção, utilizando a equação (1.29) e a diferença das conexões em (1.31), é descrito como

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}. \quad (1.32)$$

Se essas conexões fossem os símbolos de Christoffel, na RG esse resultado seria nulo mas, generalizando, é:

$$T^a{}_{\mu\nu}(e, \omega) = \partial_{\mu} e^a_{\nu} - \partial_{\nu} e^a_{\mu} + \omega_{\mu a\nu} - \omega_{\nu a\mu}. \quad (1.33)$$

A conexão de spin  $\omega_{\mu a\nu}$  que aparece na expressão anterior é descrita, identicamente, como

$$\omega_{\mu ab} = {}^0\omega_{\mu ab} + K_{\mu ab}, \quad (1.34)$$

onde  ${}^0\omega_{\mu ab}$  é a conexão de Levi-Civita possuindo torção nula e  $K_{\mu ab}$ , o tensor de contorção, sendo

definidos como

$$\begin{aligned} {}^0\omega_{\mu ab} &= -\frac{1}{2}e^c{}_{\mu}(\Omega_{abc} - \Omega_{bac} - \Omega_{cab}), \\ K_{\mu ab} &= -\frac{1}{2}e_a{}^{\lambda}e_b{}^{\nu}(T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}), \end{aligned} \quad (1.35)$$

com  $\Omega_{abc} = e_{av}(e_b{}^{\mu}\partial_{\mu}e_c{}^{\nu} - e_c{}^{\mu}\partial_{\mu}e_b{}^{\nu})$ .

Pela equação (1.28) sabe-se que a derivada covariante de um campo de tetradas é nulo. Multiplicando essa equação por  $e^{a\lambda}$ ,

$$e^{a\lambda}\partial_{\mu}e_{av} = {}^0\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - e^{a\lambda}({}^0\omega_{\mu ab})e^b{}_{\nu} \quad (1.36)$$

e reescrevendo a equação 1.34, com a conexão  $\omega_{\mu ab} = 0$  (pois a ela não exerce influência na dinâmica dos campos de tetradas), obtém-se [8]

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = {}^0\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + e^{a\lambda}K_{\mu ab}e^b{}_{\nu}, \quad (1.37)$$

que é a conexão de Weitzenböck:  $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}\partial_{\mu}e_{av}$ . Esta conexão é assimétrica nos índices  $\mu$  e  $\nu$ . Quando utilizada, substituindo no tensor torção (1.32) e de curvatura (1.6), obtém-se uma torção não nula,  $T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = e^{a\lambda}(\partial_{\beta\mu}e_{av} - \partial_{\beta\nu}e_{a\mu})$ , e um tensor nulo. Ou seja, o tensor não nulo é, em detrimento à interpretação riemanniana na RG, o agente do efeito gravitacional [9].

Utilizando a definição em (1.34) para calcular o escalar de curvatura, que é a contração dos índices da equação (1.20) pela multiplicação do determinante da tetrada, obtém-se [37]:

$$eR(e, \omega) = eR(e) + e\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a{}_a\right) - 2\partial_{\mu}(eT^{\mu}). \quad (1.38)$$

Impondo que  $\omega_{\mu ab} = 0$  (pois a conexão não exerce influência na dinâmica dos campos de tetradas [38]) tem-se:

$$eR(e) \equiv -e\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a{}_a\right) + 2\partial_{\mu}(eT^{\mu}), \quad (1.39)$$

onde  $T^a{}_a = T^b{}_b$ , e a torção  $T^a{}_{\mu\nu}$  da 1.33 é reescrita como

$$T^a{}_{\mu\nu}(e) = \partial_{\mu}e^a{}_{\nu} - \partial_{\nu}e^a{}_{\mu}. \quad (1.40)$$

A densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  é descrita desprezando a divergência da equação (1.39), pois ela não tem contribuição na ação total [37]:

$$\mathcal{L}(e_{a\mu}) = -ke\left(\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^aT_a\right) - \mathcal{L}_M, \quad (1.41)$$

com  $k = \frac{1}{16\pi}$  e  $\mathcal{L}_M$ , a densidade de lagrangiana para os campos de matéria. Ainda, pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(e_{a\mu}) = -ke\Sigma^{abc}T_{abc} - \mathcal{L}_M, \quad (1.42)$$

onde o tensor  $\Sigma^{abc}$  é definido como [33]

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4} \left( T^{abc} + T^{bac} - T^{cab} \right) + \frac{1}{2} \left( \eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c \right). \quad (1.43)$$

As equações de campo são calculadas a partir da variação funcional da densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  em termos da tetrada  $e^{a\mu}$  através da equação de Euler-Lagrange, chegando em [38]:

$$\partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e \left( \Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4} e^{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) = \frac{1}{4k} e T^{a\mu}. \quad (1.44)$$

Como  $\Sigma^{abc}T_{abc}$  é proporcional ao escalar de curvatura com uma divergência total a menos, o lado esquerdo da equação 1.44 é proporcional ao tensor de Einstein  $G_{a\mu} = e_a{}^\mu G_{\nu\mu}$ , segue a importante relação

$$\begin{aligned} \partial_\lambda (e\Sigma^{a\mu\lambda}) - e \left( \Sigma^{b\lambda\mu} T_{b\lambda}{}^a - \frac{1}{4} e^{a\mu} T_{bcd} \Sigma^{bcd} \right) &= \frac{1}{2} e \left[ R^{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e^{a\mu} R(e) \right], \\ R_{a\mu}(e) - \frac{1}{2} e_{a\mu} R(e) &= \frac{1}{2k} T_{a\mu}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Observa-se que é clara a equivalência entre essa teoria e a RG. Nesse sentido, esta é mais explícita quando se analisa como a RG é descrita, em termos de um tensor de curvatura diferente de zero, sendo uma teoria essencialmente geométrica, e com tensor de torção nulo. Já para o TERG é acontece o inverso mas com total equivalência: curvatura baseada a partir da conexão de Cartan nula e torção diferente de zero.

Reescrevendo a expressão (1.44) para se obter as equações de campo como [8]

$$\partial_\nu (e\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{1}{4} e^a{}_\mu (t^\lambda{}_\mu + T^{\lambda\mu}), \quad (1.46)$$

onde

$$t^{\lambda\mu} = k(4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}{}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd}), \quad (1.47)$$

que é interpretado como o tensor de energia-momento do campo gravitacional. Esse é um tensor verdadeiro sob transformações de coordenadas, apesar de não ser simétrico. Dado que o tensor

$\Sigma^{a\lambda\nu}$  é antissimétrico nos dois últimos índices e derivando a equação (1.46) em relação à  $\partial_\mu$ ,

$$\partial_\mu \partial_\nu (e \Sigma^{a\lambda\nu}) \equiv 0,$$

$$\partial_\mu e^a{}_\mu (t^\lambda{}_\mu + T^{\lambda\mu}) = 0, \quad (1.48)$$

ou seja, a última relação é uma lei de conservação local para os tensores de energia-momento gravitacional  $t^\lambda{}_\mu$  e dos campos de matéria  $T^{\lambda\mu}$ .

### 1.2.3 Interpretação do campo de tétradas

Tomando a equação (1.42) verifica-se que as invariâncias dão ao campo de tétradas o *status* de sistemas de referências. Isso significa, em outras palavras, que a invariância dessa teoria por transformações globais  $SO(3, 1)$  mostra que dois campos de tétradas são as soluções das equações de campo, produzem o mesmo tensor métrico e não se relacionam por nenhuma transformação global de Lorentz; são sistemas de referências diferentes. Com isso, pode-se adotar que esses objetos tem significado físico como sendo sistemas de referencial adaptado a observadores ideias de massa nula no espaço-tempo [37].

Cada conjunto de tétradas determina uma classe de sistema de referências [42]. Dado uma linha mundo  $C$  de um observador no espaço-tempo, com representação  $x^\mu(\tau)$  e com velocidade de  $u^\mu(\tau) = dx^\mu / d\tau$  ao longo dessa linha, a identificação desse observador é feita com a componente  $a = (0)$  da tétrada  $e_a{}^\mu$ , ou seja,  $e_{(0)}{}^\mu = u^\mu(\tau)$ . Já a aceleração  $a^\mu$  desse observador é dada pela derivada absoluta de  $u^\mu$  ao longo de  $C$ :  $a^\mu = Du^\mu / d\tau = De_{(0)}{}^\mu / d\tau = u^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}{}^\mu$ , com a derivada covariante escrita em termos dos símbolos de Christoffel [8].

Com isso, a tétrada determina a velocidade e a aceleração de um observador, conectado a um sistema de referência, longo de uma linha mundo. Deste ângulo de visão, dado um conjunto de tétradas, com o qual  $e_{(0)}{}^\mu$  descreve uma congruência de curvas do tipo tempo, é adaptado a uma classe particular de observadores que são caracterizados pelo pela descrição acima de velocidade e aceleração. Se  $e^a{}_\mu \rightarrow \delta^a{}_\mu$  quando  $r \rightarrow \infty$ , então  $e^a{}_\mu$  é adaptado a observadores estáticos no infinito tipo espaço [8].

A aceleração no espaço-tempo pode ser generalizada pela derivada absoluta da tétrada

$$\frac{De_a{}^\mu}{d\tau} = \phi_a{}^b e_b{}^\mu, \quad (1.49)$$

onde  $\phi_{ab}$  é um tensor de aceleração antissimétrico. Isolando-o é obtido

$$\phi_a{}^b = e^b{}_\mu \frac{De_a{}^\mu}{d\tau} = e^b{}_\mu u^\lambda \nabla_\lambda e_a{}^\mu, \quad (1.50)$$

escrita em termos dos símbolos de Christoffel. Esta conexão está relacionada com a conexão de spin  $\omega_{\mu ab}$ , da equação (1.23), que está na equação (1.17). Fazendo a substituição na expressão anterior (1.50) obtém-se

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2} [T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a}], \quad (1.51)$$

que é interpretado como a aceleração inercial ao longo do caminho  $x^\mu(\tau)$  [8].

Portanto, dado um campo de tétradas em um espaço-tempo, a interpretação geométrica pode ser dada tanto pela devida identificação da velocidade  $u^\mu = e_{(0)}{}^\mu$  dos observadores, junto com a orientação das componentes  $e_{(a)}{}^\mu$ ,  $a = 1, \dots, 3$  ou pelos valores do tensor aceleração  $\phi_{ab} = -\phi_{ba}$  que caracterizam o estado inicial do referencial. A componente  $e_{(0)}{}^0$  é determinada pela normalização. Nos dois casos, a fixação do referencial dependerá da fixação das seis componentes do campo de tétradas [8].

Uma outra interpretação, que é conceitualmente diferente na RG, está relacionado a torção. A curvatura, na RG, é utilizada para geometrizar a interação gravitacional. Esta, por sua vez, é descrita no movimento das partículas em trajetórias definidas pela equação da geodésica e a geometria, nesse caso, substitui o conceito de força. Já no TERG, a gravidade é devido à torção, não geometrizando as interações, mas tendo como papel a força. Com isso, não há geodésica no TERG, apenas equações de força análogas à equação de força de Lorentz da eletrodinâmica [43].

## Capítulo 2

# COSMOLOGIA

Cosmologia é o estudo do universo como um todo, cujo termo é oriundo da junção de duas palavras do grego que significam tratado da harmonia ou ordem. Por se tratar de uma grande abrangência, esta ciência trata seus componentes como pequenos objetos, tais como galáxias e seus aglomerados. Nesse sentido, a escala de distância desse estudo é das maiores estruturas que o ser humano pode observar [44].

Ao longo dos séculos, vários estudos dentro das civilizações têm sido feitos, com produção de culturas onde tenta-se resolver algumas questões relacionadas a origem e dinâmica do universo. Como a cosmologia trata do universo de forma abrangente, a origem, a dinâmica e até a sua evolução e o seu fim também são questionados desde os primórdios da sociedade. Desde Dionísio de Alexandria, no século III a.C., passando pela ciência moderna com Copérnico, Kepler, Galileu e Newton, as teorias cosmológicas tem sido constantemente adaptadas para abarcar maior quantidade de observações [45].

Finalmente, no século XX, graças à algumas soluções das equações de Einstein e, principalmente, com a inauguração da cosmografia em 1929 por Edward Hubble, a cosmologia tem se estabelecido com amplas previsões teóricas descobertas [44], [46]. E, com todo o desenvolvimento observacional, aliado aos avanços das soluções das equações de campo de Einstein, obtém-se o Modelo Cosmológico Padrão (MCP), onde está envolvido com a métrica de FLRW (Friedman-Lemaître-Robertson-Walker).

## 2.1 Cosmografia e princípios

No início do século XX houve um intenso debate científico entre Harlow Shapley e F. Curtis sobre a natureza da galáxia Via Láctea no que tange às "nebulosas". O principal ponto era a origem de alguns sistemas de aglomerados, onde uns astrônomos apoiavam a ideia de Shapley, de uma origem local, e outros suportavam Curtis, que defendia uma origem "extragaláctica"[45].

A disputa só foi finalizada com as observações advindas de um telescópio no Monte Palomar (Observatório de Monte Wilson), em Pasadena. Edwin Powell Hubble observou várias Cefeidas<sup>1</sup> em Andrômeda e mostrou que a distância era muito maior do que a distância local [45]. Em 1929, utilizando várias medidas com ajuda de seu colaborador, Milton Humanson, Hubble mediu distâncias de várias galáxias (que, no seu artigo, são chamadas de nebulosas extragalácticas), obtendo o *redshift* [47]. *Redshift* é uma medida do deslocamento do espectro, devido ao efeito Doppler, que proporciona o saber da distância de afastamento do objeto. Ele tem o formato dado por:

$$z \equiv \frac{\lambda_{ab} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (2.1)$$

onde  $\lambda_{ab}$  é o comprimento de onda de absorção, medido em laboratório e o  $\lambda_{em}$  é o de emissão, que advém do objeto estudado [44]. Os resultados publicados por Hubble, mostram uma correlação entre a velocidade de afastamento das galáxias e a estimativa de sua distância [48]:

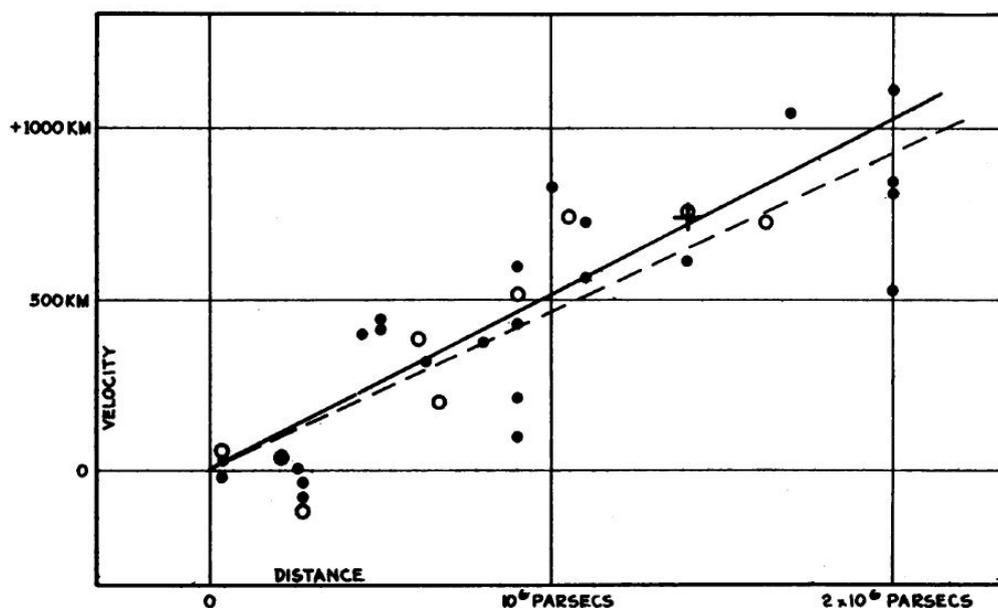


Figura 4: Dados obtidos por Hubble em 1929 [48].

<sup>1</sup>Estrelas pulsantes, que variam seu brilho ao longo de períodos de tempo [47]

### 2.1.1 *Lei de Hubble*

De posse dos resultados da figura 4 e, interpretando o plot de *redshift* e distância, chega-se a Lei de Hubble [44]:

$$v = Hr, \quad (2.2)$$

onde  $H$  é a chamada *constante de Hubble*. O valor mais preciso dessa constante obtido pela missão Planck <sup>2</sup> é de  $H_0 = (67,8 \pm 0,9) \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

Devido ao tamanho e, conseqüentemente, idade do universo, tudo o que se vê através da radiação é a história cosmológica disponível para estudos. Em virtude disso, devido a finitude da velocidade da luz  $c$ , o espectro observado hoje em dia é a imagem do que se era quando os fótons deixaram o objeto [45].

Em detalhes, pode se especificar que a informação de como um objeto se apresenta hoje está relacionado com  $c$  depois de ter passado um tempo  $\delta t$  de viagem dos fótons por uma distância  $D$ . Mas, a galáxia onde se encontra o observador também viajou no  $\delta t$ ; ou seja, há uma variação tanto na distância quanto no tempo, que deve ser levando em conta utilizando a constante de Hubble no passado [45]. Para se relacionar esses detalhes é necessário conceituar alguns parâmetros. Um deles é a noção de *observador comóvel*: durante o passar do  $\delta t$  este observador vê que as galáxias (levando em conta que o objeto é uma galáxia) mantém a mesma distância entre si, que é a *distância comóvel*  $d_c$ . Já para um observador que não acompanha o fluxo de Hubble, a distância aumenta com o tempo devido à expansão do universo (que será comentado mais a frente), que é chamada de *distância própria*  $d_p$  [45].

Diante dessas informações: suponha que uma galáxia esteja na posição  $\mathbf{r}_1$  e emita uma luz no instante  $t_1$  e a do observador esteja em  $\mathbf{r}_0$ . A  $d_c$  será igual a  $a_0 \cdot r_1$ , onde  $a_0 = a(t_0)$ , que é o fator de escala do universo hoje [45]. Hubble observou que as galáxias estavam se afastando uma das outras. Ou seja, isso implica, pelo modelo visto até agora, que todo o universo era muito menor, com todas as galáxias muito próximas uma das outras. E mais: isso quer dizer que em um tempo muito antigo não havia nem galáxias e tudo estava junto [48].

Um detalhe importante a ser destacado: os trabalhos de Hubble no monte Palomar, assim como a lei que tem seu nome, são de caráter observacional, ou seja, o gráfico da figura 4 tem informações de velocidade em função da distância e, conforme será visto mais adiante, os valores medidos para o *redshift* são os valores atuais, ou seja, nada é imposto que a curva permaneceu ou permanecerá constante ao longo da história do universo.

<sup>2</sup>Satélite da Agência Espacial Europeia (ESA) que mapeou a temperatura e a polarização da radiação cósmica de fundo. Mais informações científicas são encontradas em <http://www.cosmos.esa.int/web/planck/publications>

### 2.1.2 *Princípios cosmológicos*

Há dois princípios importantes que dão base ao Modelo Cosmológico Padrão. Um deles é o *Princípio Cosmológico*: não há nenhuma localização especial do observador no universo. Isso implica que, para o modelo, o universo é isotrópico (acima de 100 Mpc) e homogêneo, nessa sequência. Esse é uma generalização do princípio de Copérnico para largas escalas cosmológicas, onde nem a Terra, nem o Sol, nem o Grupo Local são centros: não há centro no universo [44]. O outro refere-se a uma rede imaginária de coordenadas, onde cada galáxia está fixa no espaço. Ou seja, apenas a escala do sistema de coordenadas varia com o passar do tempo. As linhas dessa rede são geodésicas por onde as galáxias se movimentam e o conjunto delas forma uma hipersuperfície espacial isotrópica e homogênea (pelo princípio cosmológico). Este é o *Princípio de Weyl* [15].

## 2.2 Modelo Cosmológico Padrão

Conforme visto na seção 2.1.2, o princípio cosmológico estabelece a isotropia e a homogeneidade no universo. Também, na mesma seção, foi dado um panorama sobre a lei de Hubble, que relaciona a distância e a velocidade de afastamento das galáxias, sendo interpretado como expansão do universo e, retroagindo, tendo um início numa fase densa e quente. O MCP é baseado nessas hipóteses, sendo, resumidamente [15]:

- i) Princípio Cosmológico, ou seja, universo isotrópico e homogêneo em larga escala;
- ii) Lei de Hubble, ou seja, distâncias médias em relação às velocidades médias: equação (2.2),  

$$v = Hr;$$
- iii) A dinâmica do universo é regida pelas equações de campo da RG (1.20),  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu};$
- iv) Retrocedendo a expansão, tudo começa em um estado quente e denso, com a dominação da energia de radiação.

O MCP é baseado em geometria não euclidiana. Ou seja, o espaço-tempo é tratado com curvatura onde há massa de grandes corpos, como estrelas e planetas. Mas, essa matemática só teve ampla aplicação após a RG de Einstein, em 1916 [44]. Até essa época, principalmente no século XIX, houve intensa descrição por Bolyai, Lobachevski e Gauss, até culminar com os trabalhos de Riemann [50]. Com o uso dessa classe de geometria, Einstein mostrou que o conteúdo do universo, massa-energia, tem ligação com espaço-tempo [44].

Inicialmente, as equações que reproduzem o modelo foram descritas por Alexander Friedmann em 1922 [51]. Elas relacionam o fator de escala  $a(t)$ , o formato da geometria do universo  $k$  (que tem valores de -1, para fechado, 0 sendo plano e 1 como aberto) e o raio  $r$ . Friedman também utilizou a densidade de energia  $\epsilon(t)$  e a pressão  $P(t)$ , que estão conectados com o conteúdo do universo [44].

Posteriormente, depois de ter estudado os trabalhos de Einstein, Friedmann recalculou considerando o universo como isotrópico e homogêneo, achando qual seria sua dinâmica. Ele observou que o universo pode se contrair ou se expandir em função do tempo. Inicialmente, não foi reconhecido seus resultados; apenas após sua morte em 1925 [44].

Em 1927, George Lemaître, independentemente, chegou a esses resultados mas fazendo ligação entre o *redshift* e as medidas que Hubble observou [52]. Já Robertson e Walker demonstraram que há um elemento de linha geral, admitindo isotropia e homogeneidade no universo [53], [54], [55].

Todo esse conjunto de conhecimento e desenvolvimento matemático é conhecido pelo nome de *Teoria do Big Bang*, por ter elementos matemáticos e físicos (como radiação e matéria) do universo. Também é referenciado como modelo ou métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [15].

### 2.2.1 A métrica de FLRW

Conforme citado na seção, Robertson e Walker, independentemente, escreveram uma métrica geral, onde se admite o princípio cosmológico (isotropia e homogeneidade para o universo), com as dinâmica (contração ou expansão) das distâncias ao longo do tempo. Escrevendo [44]

$$d\Omega^2 \equiv d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.3)$$

e

$$k = \begin{cases} -1 \rightarrow \text{curvatura espacial negativa} \\ 0 \rightarrow \text{curvatura espacial nula ou plana} \\ +1 \rightarrow \text{curvatura espacial positiva} \end{cases} \quad (2.4)$$

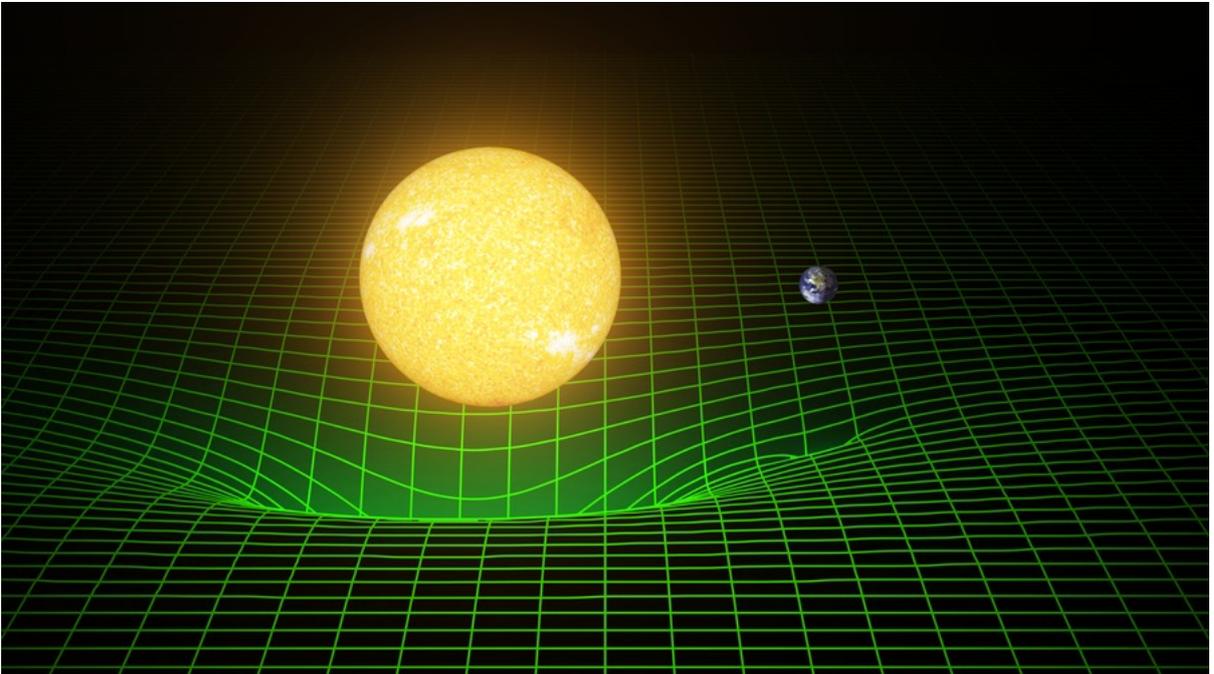
a métrica, com adição das contribuições de Friedmann e Lemaître ao longo da história, é descrita como [56]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.5)$$

e a matriz escrita como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Atualmente, a última medida do Planck, mostra que o universo aparenta ser plano [49]. O termo  $a(t)$  é o fator de escala da dinâmica geométrica do espaço-tempo. Já o parâmetro  $t$  da métrica é o tempo cosmológico próprio, que é referenciado na seção 2.1. Ou seja, é o tempo que um observador vê a medida que o universo se expande ao seu redor (observador comóvel).



**Figura 5:** Representação da curvatura do espaço-tempo em 2D devido a corpos massivos em 3D. Retirado de <http://https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160211e>

### 2.2.2 Equações de Friedmann

Na seção 2.2 foi visto um pouco sobre o trabalho de Friedmann. Em seu artigo, ele cita dois tipos de universo, um desenvolvido por Einstein e outro por de Sitter. O caminho, de forma geral, para se mostrar as equações dinâmicas desenvolvidas em 1922 é partir do elemento de linha desenvolvido por Robertson e Walker (2.5) [51]. As equações são escritas como [15] [44] [45]:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{k}{r^2} \frac{1}{a^2(t)}, \quad (2.7)$$

onde  $\rho(t)$  é a densidade de energia e  $k$  o parâmetro de curvatura.

Utilizando a equação (2.2) e as considerações da seção (2.1.1),

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.8)$$

onde  $a$  é o fator de escala do universo e  $\dot{a}$  a sua derivada. Isso quer dizer que a velocidade  $v$  de Hubble, hoje, está relacionada com  $H_0$ , que é a medida da constante atual. Daí, pode-se tirar a idade do universo,  $H_0^{-1}$ , que é medido em 13,8 bilhões de anos [49].

Tomando base da dinâmica das equações (2.7) é possível construir vários modelos de universo (dominado por poeira, por radiação e com valores de  $k$  variando de -1, 0 e 1 [15]). Nota-se que, para encontrar a densidade de energia crítica do universo, nesse modelo, basta isolar a variável correspondente, considerando que o universo é, praticamente, plano [49]. Ou seja, com  $k = 0$  [56]:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (2.9)$$

Por outro lado, se a densidade de energia  $\epsilon(t)$  for muito grande ou pequena, o universo tem curvatura positiva ( $k = 1$ ) ou negativa ( $k = -1$ ), respectivamente.

Outra forma de escrever a equação (2.9) é como uma densidade de massa equivalente, [44]:

$$\rho_{c,0} \equiv \frac{\epsilon_{c,0}}{c^2}. \quad (2.10)$$

Uma outra equação, mais usada e com valores de medida, é a que define o parâmetro densidade  $\Omega(t)$ . Este, adimensional, dá a relação entre a densidade absoluta  $\rho$  e a crítica  $\rho_c$  da seguinte forma [44] [56]:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.11)$$

Com ela, tem-se [47] que, se  $\Omega(t)$  for menor ou maior do que 1, o universo é fechado ou aberto, respectivamente. Mas, se for igual a 1, o universo é plano.

A faixa de valores de  $\Omega(t)$  depende do tipo de objeto. Os últimos valores medidos [46]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_m = 0,32 \pm 0,02, \\ \Omega_b = 0,049 \pm 0,001, \\ CDM : \Omega_m - \Omega_b, \\ \text{Neutrinos} : 0,001 \lesssim \Omega_\nu \lesssim 0,05, \\ \Omega_\nu = 0,68 \pm 0,02, \\ \Omega_\gamma = 4,6 \cdot 10^{-5}, \\ \Omega_{Total} = 1,001 \pm 0,003, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

onde  $\Omega_m$  é a densidade de matéria,  $\Omega_b$  é a de bárions,  $\Omega_\nu$  é a de energia escura e  $\Omega_\gamma$ , a de fótons. Observa-se que a densidade total é muito próxima de 1, dando a geometria do universo em, praticamente, plana, nesse modelo.

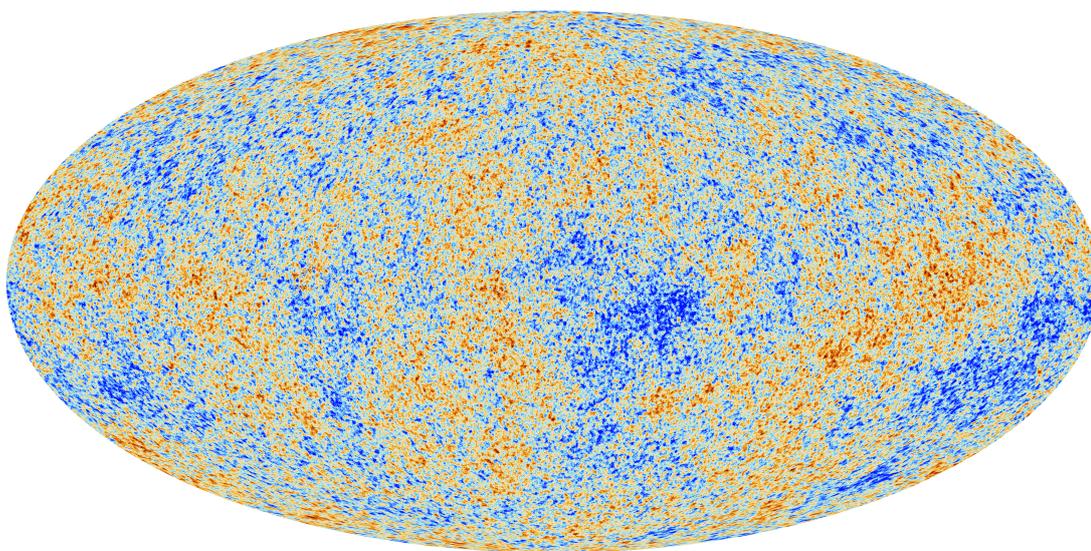
### 2.2.3 Problemas com o MCP

O objetivo geral deste trabalho não é dissecar, completamente, todo o MCP, suas previsões e seus problemas. Entretanto, diante do que já foi exposto, nas subseções anteriores, uma palavra rápida sobre alguns entraves do modelo mais usado em medições atualmente, é necessário. Há diversos problemas com o MCP mas será comentado apenas três: o problema da planaridade, do horizonte e da homogeneidade.

O problema da planaridade refere-se ao caso de  $\Omega_0 = 1$ . Conforme visto nos últimos parágrafos da seção anterior, o valor de todo o conteúdo do universo, medido pelo Planck [49], leva a essa estranheza. Detalhe: o valor de  $\Omega_0$  ser, atualmente igual a um, significa que sempre esse valor se manteve. Desse modo, se  $\Omega_0$  fosse maior ou menor no passado, o universo já teria se expandido demais ou já teria se colapsado. Por que esse valor? Por que não maior ou menor do que um? Um campo de investigação surgiu com a teoria de Alan Guth, que são modelos onde se usa inflação, mas sem sucesso permanente ainda. É um caso em investigação a ser resolvido [15].

O outro problema, do horizonte, refere-se a uma alta isotropia no universo. A velocidade da luz, sendo finita, dá uma ideia de que algumas áreas do universo nunca estiveram em contato na época do desacoplamento. Mas, como isso é explicado tendo em vista a isotropia, como medido pelo Planck, por exemplo? [57]

Observando os dados da CMB (radiação cósmica de fundo) pela missão Planck, tem-se



**Figura 6:** Dados obtidos pelo satélite Planck da [ESA](#)  
[57]

que as variações térmicas são muito pequenas, da ordem de  $10^{-5}$ . Mas, a tendência natural da gravidade é acumular massa. Ou seja, tomando-se toda a matéria do universo e voltando, sempre, ao passado, chegará a um ponto de densidade tendendo ao infinito a medida que o tempo tende a zero. Mas, ao passo que o universo vai crescendo, as estruturas vão se formando. Como resultado disso, alguns problemas são adicionados ao problema da homogeneidade: a origem do universo, a formação anisotrópica das estruturas em pequenas escalas e a assimetria entre matéria e antimatéria [58].

Um problema muito intrigante está no fato de que mais de 90% do universo não é conhecido no MCP. E somente esse percentual tem dado muita pesquisa teórica, construção de grandes laboratórios para detecção de partículas de matéria escura, simulações computacionais afim de se obter alguma resposta palpável para a energia escura mas, até agora, sem sucesso.

Naturalmente, há outros problemas que, ao menos, não são colocados por serem interpretados como do escopo filosófico. Esses vários "por quês" ou até alguns "como" aparecem no início do universo, nas leis que funcionaram no Big Bang e que ainda funcionam na dinâmica de todo o processo físico.

## 2.3 Cosmologia quântica de Wheeler-DeWitt

O MCP é o modelo mais completo, até o momento, que explica alguns dados observacionais. mas, conforme visto na seção 2.2.3 há muitos problemas. Um que não foi citado advém de

uma de suas hipóteses bases que, retrocedendo a expansão, o universo tem um início quente e denso até o ponto de singularidade [15]. Por isso, perto deste evento os efeitos quânticos são devem consideráveis. Para fazer um tratamento adequado, neste período, é necessário uma teoria de gravitação quântica com aplicação cosmológica ou, em outras palavras, uma cosmologia quântica [59].

Até a presente dada, não há uma teoria bem estabelecida com dados observacionais ou experimentais feitos. Mas, isso não foi um impeditivo para intensas pesquisas neste campo desde o nascimento da física quântica. Rosenfeld foi um dos primeiros físicos, em 1930, a investigar quais seriam as consequências de uma quantização do campo gravitacional, abrindo as portas para uma ampla produção de trabalhos científicos [13].

Vários problemas são encontrados no caminho de quantizar as equações de campo de Einstein (1.20). Um deles, conforme citado no final da seção 1.1.1 é o fato de haver um pseudotensor  $t^{\mu}_{\nu}$ , ou seja, não é possível obter uma densidade de energia gravitacional.

Nesse sentido, outro problema é que a física quântica foi formulada em termos de hamiltonianas e a RG em um contexto covariante, além de que a RG também não é linear. Para resolver este problema seria necessário construí-la em um formalismo hamiltoniano, separando espaço e tempo. Esta solução foi dada em 1962 por Arnowitt, Deser e Misner [60]. Ela foi aplicada em espaços-tempo globalmente cobertos por hipersuperfícies. A quantização desse tipo de teoria é complicada de ser resolvida e resulta na equação de Wheeler-DeWitt [12]. Mas, há dois problemas sérios: ausência do tempo e como esse conceito é recuperado em aproximação semi-clássica [61].

### 2.3.1 Equação de Wheeler-DeWitt

Em 1967 Bryce S. DeWitt publica na Physical Review um artigo onde é mostrado a equação de Einstein-Schrödinger [13] que é descrita como [62]

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(a) = 0, \quad (2.13)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{p}{a} \frac{\partial}{\partial a} + g_c k a^2 - g_\lambda a^4 - g_r k^2 - \frac{g_s k}{a^2} \right) \Psi(a) = 0,$$

onde as constantes  $g_c$  é a de acoplamento de curvatura,  $g_\lambda$  está associada à constante cosmológica,  $g_r$  corresponde ao termo de radiação e  $g_s$  como matéria. Já  $p$  indica a ambiguidade do ordenamento dos fatores  $a$ , que é o fator de escala cosmológico, e o operador momento  $\Pi_a$  e  $k$  é a geometria do espaço-tempo, com valores de -1, 0 ou 1.

Esta teoria foi trabalhada por DeWitt durante vários anos. A equação em si, (2.13), nasceu de discussões com Wheeler, onde o foco da questão era descobrir qual a estrutura do domínio de uma variedade onde se teria uma mecânica quântica gravitacional. Mas, mesmo depois de quase 40 anos de trabalho em cima desta teoria, vários problemas ainda não foram solucionados [12]. Um deles é o fato de  $\Psi$ , que é a função de onda do universo, não ter um significado físico, além de interpretações sem sentido da matemática colocada.

A interpretação padrão da mecânica quântica é a de Copenhague, que tem caráter de dá sentido aos experimentos usuais, tendo um observador externo ao sistema físico a ser analisado e que é regido pela mecânica clássica. Mas isso não é suficiente para se interpretar o universo como um todo, com seu conteúdo (pois os observadores fazem parte desse sistema). Mesmo podendo ter alguns problemas de interpretação, a posição ortodoxa é a que tem sido mais suportada por experimentos, como a descoberta de John Bell em 1964 [63].

Um outro problema é com o ordenamento, pois há uma analogia entre o superhamiltoniano quântico e o superhamiltoniano clássico. Entretanto, essa questão, ainda não resolvida, decorre do problema do tempo descrito anteriormente. Além disso, um outro problema existente se refere às condições de contorno para se obter uma solução única e garantir que as funções de onda sejam quadrado integráveis [59].

A equação de Wheeler-DeWitt não representa um mundo físico, pois perde-se a noção de autovalores e, conseqüentemente, a noção de espectro do operador, que é a base central de operação da teoria. Se não há autovalores, não há o que se medir no mundo físico. O outro problema, extremamente sério, é a perda do sentido de tempo ou de evolução temporal do sistema: um universo sem dinâmica e desenvolvimento de seus parâmetros físicos simplesmente não faz sentido [63].

A interpretação quântica adotada na teoria é a de muitos mundos de Everett-Wheeler. Ela tenta descrever vários universos, na função de onda cosmológica, de tal forma que tempo e probabilidade não tem significados físicos em quesitos de colapsos gravitacionais extremos. Isso seria uma forma de salvar a teoria se não fosse pelo fato de que, com essa interpretação em detrimento à da escola de Copenhague, não trazer física testável: sem evidências de universos por onde funções de onda teriam trajetórias, além de tempo e medida são dados explícitos na evolução do sistema [12], [59], [63].

Conforme será visto posteriormente, uma saída será proposta para resolver estes e vários outros problemas que foram descritos até aqui. Observa-se que a teoria cosmologia quântica de Wheeler-DeWitt está baseada em dois pilares, que são a RG e a mecânica quântica usando o procedimento canônico. Já foi mostrado anteriormente, na seção 1, que a RG tem problemas

conceituais profundos, como a não definição clara de uma expressão de energia gravitacional. E, na seção seguinte, será mostrado que a quantização também tem problemas em sua formulação, por exemplo de ser arbitrária e não ter um padrão matemático bem definido.

Algumas soluções são dadas: usar uma teoria equivalente à RG, de forma a obter os mesmos resultados ao longo das décadas mas com ganho adicional. E é nesse ponto onde foi introduzido a TERG. Já para a questão do procedimento canônico será apresentado outra quantização que não tem esses problemas, que é a de Weyl. Por fim, será obtido uma cosmologia quântica em um contexto mais adequada aos conceitos físicos e com uma matemática mais clara: cosmologia quântica na gravidade teleparalela.

## Capítulo 3

# QUANTIZAÇÃO

O universo inteiro pode ser dividido, basicamente, em três partes: mundo cosmológico (descrito pela RG, onde moram as grandes estruturas intergalácticas), mundo clássico (onde ocorrem todos os fenômenos desde o dia-a-dia até a ordem de galáxias) e mundo quântico (regido por natureza probabilística, descrevendo partículas, átomos e forças elementares).

Até aqui foi descrito parte desses mundos com a RG que, se levada ao limite newtoniano, produz todo o ambiente clássico. Para se ter uma completa descrição do universo, é necessário que todos esses mundos anteriores sejam descritos pela física quântica, através de algum método de quantização.

Dois entendimentos sobre quantização tem sido muito utilizados na literatura. Um deles é o de discretizar um conjunto de valores de uma quantidade física. O outro entendimento usual é que um sistema é clássico ou tem o uso da mecânica clássica quando o limite da constante de Planck  $h$  tende a zero. Isso significa que no cerne da natureza física, a mecânica quântica domina de forma fundamental. Mas, para se resgatar o mundo newtoniano, que é clássico, nada pode ser perdido quando tal sistema é quantizado [66].

Com isso, pelo segundo entendido (que será utilizado nessa dissertação), quantização é uma correspondência entre teorias clássica e quântica. Mas, é bem conhecido na literatura que essa correspondência não é feita de uma única forma: ao longo das décadas apareceram vários tratamentos e métodos para quantização, alguns completos, outros aproximados [10].

Essas ideias de obter observáveis quânticos vem desde Heisenberg, em meados da década de 1920 [41]. Como já é bem conhecido, os métodos de quantização canônico, proposto inicialmente por P. A. M. Dirac, e o integral de caminho, proposto por Richard Feynman, tem dado boa parte de subsídios para as quantizações. Mas, há um preço: a quantização canônica não deixa muito

claro como é o entendimento no limiar entre os mundos micro e macro.

Dado esse e outros problemas já conhecidos na literatura, surge um outro método de quantização que foi desenvolvido na mesma época. H. Weyl deixou um modelo [11] que é, do ponto de vista matemático, mais claro a regra de correspondência entre funções clássicas e operadores quânticos.

### 3.1 Quantização canônica

A quantização canônica é representada por uma correspondência entre os observáveis clássicos, que são valores reais das funções  $f(p,q)$  de  $(p,q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$  (que é o espaço de fase), em operadores autoadjuntos  $Q_f$  no espaço de Hilbert  $L^2(\mathfrak{R}^n)$  com as seguintes características [10], [41]:

- i) a correspondência entre  $f \mapsto Q_f$  é linear;
- ii)  $Q_1 = I$ , onde  $\mathbf{1}$  é a constante da função e  $I$  a identidade do operador;
- iii) regra de von Neumann: para qualquer função  $\Phi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  para o qual  $Q_{\Phi \circ f}$  são bem definidos,  $Q_{\Phi \circ f} = \Phi(\hat{f})$ . O domínio do mapa  $Q : f \mapsto Q_f$  é chamado de espaço de observáveis quantizáveis;
- iv) os operadores  $\hat{f}_{p_j}$  e  $\hat{f}_{q_j}$  correspondem às coordenadas das funções  $p_j$  e  $q_j$ , com  $(j = 1, \dots, n)$  e são formados, com  $\psi \in L^2(\mathfrak{R}^n, d\mathbf{q})$ , por

$$\begin{aligned}\hat{f}_{q_j}\psi &= q_j\psi, \\ \hat{f}_{p_j}\psi &= -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial q_j}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

A última condição é conhecida como regra de von Neumann e o domínio do mapa  $Q : f \mapsto \hat{f}$  é chamado de espaço dos observáveis quantizados. O parâmetro  $\hbar$  é um valor positivo muito pequeno e que é identificado pela constante de Planck ou, também usado, por  $\hbar = h/2\pi$ .

Pelo teorema de Stone e von Neumann, [10] e [67], os operadores de 3.1 são únicos agindo no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  que satisfaz a condição de irredutibilidade e as relações de comutação

$$[Q_{p_j}, Q_{p_k}] = [Q_{q_j}, Q_{q_k}] = 0, \quad [Q_{p_k}, Q_{p_j}] = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_{jk} I \quad (3.2)$$

A interpretação física é que, um sistema clássico, de  $n$  graus de liberdade, se move sobre um espaço de fase  $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$ , sendo  $q_j$  e  $p_j$  observáveis de posição e momento canônicos, respectivamente. O estado do sistema é dado como uma medida da distribuição de probabilidade neste mesmo espaço. Os estados desse sistema correspondem a subespaços  $C_u$  de uma dimensão de  $L^2(\mathfrak{R}^n)$  com  $\|u\| = 1$ , resultando, da medida dos observáveis  $f$  no estado  $u$ , na distribuição de probabilidade  $\langle \Pi(Q_f)u, u \rangle$ , onde  $\Pi(Q_f)$  é o espectro de  $Q_f$ . Os operadores não-comutativos representam a impossibilidade de se medir, simultaneamente, os observadores correspondentes originais [10].

Um último detalhe desse panorama sobre o método de quantização canônico é que, tomando duas funções  $f$  e  $g$  tem por implicação as relações de comutatividade da seguinte forma [10]:

$$[Q_f, Q_g] = \frac{i\hbar}{2\pi} Q_{f,g}, \quad (3.3)$$

onde

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \quad (3.4)$$

é o parêntese de Poisson de  $f$  e  $g$  e a correspondência da equação 3.3, relacionando o parênteses de Poisson da 3.4 e o comutador quântico, leva a todos os observáveis quânticos de  $f$  e  $g$ .

A técnica para quantizar um sistema clássico, canonicamente, pode ser descrito pelos seguintes passos: toma-se  $q_i$  e  $p_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , as coordenadas de posição e momento, respectivamente e  $n$  sendo os graus de liberdade do sistema a ser tratado. Depois, os  $\hat{q}_i$  e  $\hat{p}_i$ , que são operadores posição e momento quantizados no espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{R}^n, d\mathbf{x})$  são obtidos de 3.1. E a forma como esses operadores, descritos acima, agirão em um conjunto de vetores  $\psi$  em  $\mathcal{H}$  é [10]:

$$\begin{aligned} (\hat{q}_i \psi)(\mathbf{x}) &= x_i \psi(\mathbf{x}), \\ (\hat{p}_i \psi)(\mathbf{x}) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

E, pelo teorema de Stone-von Neumann, [10] e [67], há uma única equivalência que satisfaz as relações de comutação canônica:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar I \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Os operadores  $\hat{q}_i$  e  $\hat{p}_j$ , juntamente com  $I$ , são os geradores da representação do grupo de Weyl-Heisenberg no  $L^2(\mathcal{R}^n, d\mathbf{x})$ .

Os estados quânticos do sistema descrito pelo conjunto de vetores  $\psi$  é evoluído pela equação de Schrödinger [68]:

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(t). \quad (3.7)$$

O hamiltoniano quântico  $\hat{H}$  é construído de acordo com a função clássica inicial. E, como se sabe da física quântica, este será a forma de quantização a ser executada: dada uma função clássica (que, neste caso, virá da cosmologia tratada com a TERG), será procurado o hamiltoniano quântico correspondente. Em um trabalho futuro (não será tratado aqui), a função de onda  $\Psi$ , que corresponderá a função de onda do universo, será encontrada como solução da equação do formato da 3.7.

Mas, a formulação da quantização canônica, apesar de vários sucessos na literatura, tem alguns problemas. Um deles é que a tanto os observáveis como os estados são descritos em termos de uma estrutura matemática que não é simples ou natural e isso é prejudicial para o entendimento físico do procedimento [69].

Outro problemas são listados, tais como, se o espaço físico do sistema clássico não for linear, é possível aplicar o procedimento canônico? Se houver potências mais altas nos observáveis, por exemplo  $f(q,p) = (q_i)^n(p_j)^m$ , com  $m + n \geq 3$ , ainda é aplicável? Não, pois há outros métodos que expande a quantização canônica, mostrando que ela não é completa para todos os casos [10].

Esses problemas podem chegar até inviabilizar algum tratamento mais apurado de um entendimento físico cosmológico, como é o objetivo desse trabalho. Por não ter uma regra clara matematicamente consistente, isso se torna um grande impeditivo para entendimento físico dos fenômenos no limite entre o clássico e o quântico, além do problema de não ser aplicável a funções não-polinomiais. Mas, para resolver estes problemas e abrir um pouco mais o leque de possibilidades, na seção seguinte será apresentado o procedimento de quantização idealizado, inicialmente, por Hermann Weyl no fim dos anos 1920 [41], [11].

### 3.1.1 Aplicação de quantização canônica

Um exemplo simples de aplicação de quantização canônica é o do oscilador harmônico. A função, que é polinomial, é escrita no formato de [63]:

$$F = -kx = m\frac{d^2}{dt^2},$$

onde  $m$  é a massa que está conectada a mola e que tem constante de força igual a  $k$ . A solução típica desse sistema é

$$x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

com  $A$  e  $B$  sendo constantes e a frequência de oscilação  $\omega$  definido como  $\omega \equiv \frac{k}{m}$ . A energia potencial é

$$V = \frac{kx^2}{2}.$$

Fazendo uma expansão em torno de uma pequena oscilação, ou seja,  $(x - x_0)$ , a energia potencial toma forma de

$$V \approx \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2,$$

onde  $V''$  é a derivada segunda de  $V$ . Colocando a constante de mola como  $k = V''(x_0)$ , o problema comum na quantização desse sistema é resolver a equação de Schrödinger para o potencial  $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$  (para oscilações de pequena amplitude). Para este caso, basta resolver a equação estacionária de Schrödinger

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\Psi = E\Psi.$$

Tomando dois operadores hermitianos do tipo

$$\hat{p} \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}, \quad \hat{x} = x,$$

o hamiltoniano toma forma de

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2).$$

A relação de comutação desses dois operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{x}$  é

$$[\hat{p}, \hat{x}] = \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} = i\hbar.$$

## 3.2 Quantização de Weyl

A quantização de Weyl é bem definida matematicamente e pode ser estendida para espaços de fase curvos. Uma forma geral desse procedimento é considerando um sistema clássico descrito por  $n$  variáveis,  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , suas correspondentes variáveis quânticas são  $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n$ . Isto significa que quando as variáveis clássicas são quantizadas, nesse procedimento, a função é automaticamente quantizada. O mapa de Weyl, que define essa operação,  $W : f \rightarrow \hat{f} = W[f]$ , é

dado por [41]:

$$W[f](z_1, z_2, \dots, z_n) := \frac{1}{(2\pi\alpha)^n} \int d^n k d^n z f(z_1, z_2, \dots, z_n) \exp\left(\frac{i}{\alpha} \sum_{l=1}^n k_l (z_l - \hat{z}_l)\right). \quad (3.8)$$

Tomando o núcleo (ou kernel) dessa transformação como

$$\Delta(\hat{z}, z) = \frac{1}{(2\pi\alpha)^n} \int k d^n \exp\left(\frac{i}{\alpha} \sum_{l=1}^n k_l (z_l - \hat{z}_l)\right). \quad (3.9)$$

Ou seja, o mapa de Weyl é reescrito como

$$W[f](z_1, z_2, \dots, z_n) := \int d^n z \Delta(\hat{z}, z) f(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (3.10)$$

O conjunto dado de operadores  $\hat{z}_n$  formam um espaço não-comutativo, ou seja, é dado pela troca das coordenadas locais  $z_n$  pelos operadores hermitianos  $\hat{z}_n$ , que leva a relação de comutação

$$[\hat{z}_a, \hat{z}_b] = i\alpha_{ab}, \quad (3.11)$$

onde  $\alpha_{ab}$  é um tensor anti-simétrico.

Esse tipo de mapa é um isomorfismo entre os operadores e a representação no espaço de fase da mecânica quântica. Desse modo, ele tem suas vantagens, como a principal delas por ser clara e eliminar as ambiguidades que tem na quantização canônica, além de se ter um procedimento matemático claro e bem definido, que pode ter um entendimento físico bem mais claro. E uma outra superioridade é que esse procedimento de Weyl é utilizado em funções não-polinomiais, ou seja, justamente onde há problemas dos métodos tradicionais de quantização. A principal complicação, obviamente, é utilizar em funções polinomiais [41].

### 3.2.1 Aplicação do procedimento de quantização de Weyl

Considere A, B operadores hermitianos. Então o comutador entre eles é [63]

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (3.12)$$

Tomando uma função do tipo  $f(q, p) = qp$ , que será quantizado para  $f(\hat{q}, \hat{p})$ . Utilizando a definição do procedimento de Weyl, equação (3.8), e aplicando na função a ser quantizada a fim de se encontrar os operadores correspondentes,  $f(q, p) \rightarrow \hat{f}(\hat{q}, \hat{p})$

$$\hat{f}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dq dp dy d\eta f(q, p) e^{\frac{i}{\hbar} [y(\hat{q}-q) + \eta(\hat{p}-p)]}. \quad (3.13)$$

Da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [71]

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad (3.14)$$

obtém-se

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} . \quad (3.15)$$

Então

$$f(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dq dp dy d\eta qp e^{\frac{i}{\hbar} y(\hat{q}-q)} e^{\frac{i}{\hbar} \eta(\hat{p}-p)} e^{-\frac{1}{2\hbar}[i y(\hat{q}-q), i\eta(\hat{p}-p)]} . \quad (3.16)$$

Modificando o último comutador da equação anterior:

$$[iy(\hat{q} - q), i\eta(\hat{p} - p)] = -\eta y(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}) . \quad (3.17)$$

Por outro lado, o comutador entre  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  é

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{p}] &= i\hbar , \\ (\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}) &= i\hbar . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Com isso, a equação (3.17) fica

$$[iy(\hat{q} - q), i\eta(\hat{p} - p)] = -i\hbar\eta y . \quad (3.19)$$

Então, a equação (3.16) ficará como

$$f(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dq dp dy d\eta qp e^{\frac{i}{\hbar} y(\hat{q}-q)} e^{\frac{i}{\hbar} \eta(\hat{p}-p)} e^{\frac{1}{2} - i\hbar\eta y} . \quad (3.20)$$

Fazendo uma troca de variáveis do tipo

$$q \rightarrow q' - \frac{y}{2}, dq \rightarrow dq'$$

e uma manipulação algébrica a equação (3.20) toma forma de

$$\begin{aligned} f(\hat{q}, \hat{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int dq' dp dy \left(q' - \frac{y}{2}\right) p \left[ \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int e^{\frac{i}{\hbar} \eta(q' - \hat{q})} d\eta \right] e^{\frac{i}{\hbar} y(\hat{q}-q)} , \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int dp dy \left(q' - \frac{y}{2}\right) p e^{\frac{i}{\hbar} y(\hat{q}-q)} \delta(q' - \hat{q}) . \end{aligned}$$

Utilizando algumas propriedades de cálculo de integrais, algumas manipulações algébricas e as

relações da função delta de Dirac [64], [65]:

$$i) \quad \int \delta(x) dx = 1,$$

$$ii) \quad \int f(x) \delta(x) dx = f(0),$$

$$iii) \quad \int f(x) \delta(x - a) dx = f(a),$$

$$iv) \quad \int f(x) \delta'(x) dx = -f'(0),$$

$$v) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\eta x} d\eta \quad (3.21)$$

e aplicando na equação (3.20) é obtido, de forma direta e exata

$$f(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}). \quad (3.22)$$

Este exemplo simples é apenas para demonstrar que a integral em (3.20) pode ser muito complicada de se resolver analiticamente, sendo necessário, em alguns casos, partir para a ajuda computacional ou para aproximações. Em muitos casos a integral torna-se de fácil cálculo com o uso das propriedades da delta de Dirac para chegar ao resultado pretendido.

## Capítulo 4

# COSMOLOGIA QUÂNTICA NA GRAVIDADE TELEPARALELA

Neste último capítulo, serão abordados os resultados para uma cosmologia quântica em um cenário de gravidade teleparalela. A ideia é aplicar a quantização de Weyl, apresentada no tópico 3.2, na TERG, do capítulo 1. Antes, porém, será obtido a formulação cosmológica equivalente à métrica de FLRW, vista na subseção 2.2.1, que advém da aplicação do princípio cosmológico.

Em seguida, é obtida a equação de cosmologia quântica de forma análoga à obtida por Wheeler e DeWitt nos anos 1960, só que utilizando a formulação teleparalela da RG. Como será visto, ela é inconsistente com os princípios da física quântica, por exemplo da dinâmica do sistema cosmológico.

Para resolver esse problema, será apresentado a equação de cosmologia quântica com a formulação partindo dos princípios físicos consistentes, tendo a TERG como sendo verdadeira teoria de gravidade com aplicação em todo o universo, e a quantização de Weyl, como o procedimento mais geral para qualquer sistema físico.

A equação completa da cosmologia quântica na gravidade teleparalela é bastante complicada de se obter seus operadores. Para contornar esse problema será apresentado a equação em uma primeira aproximação, mostrando que a teoria é bem consistente e usual.

## 4.1 Campo de tétradas para a métrica FLRW

Um campo de tétradas que abarque um sistema de coordenadas esféricas (pois, a métrica utilizada no FLRW, aqui, está nessa configuração da equação (2.3)) é caracterizado por dois parâmetros, que é o espaço-tempo próprio, regido pela geometria riemanniana ( $x^\mu = x^\mu(t, r, \theta, \phi)$ ) e o espaço-tempo tangente, montado com o espaço de Minkowski ( $q^a = q^a(t, x, y, z)$ ). A forma de se transformar essas coordenadas é  $dq^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ . Quando essa relação é integrável globalmente, os espaços físico e tangente são planos, gerando  $T^a{}_{\mu\nu} = 0$ . Mas, na presença de campo gravitacional o tensor de torção não é nulo. [9].

Ou seja, esse campo de tétradas escolhido para esse observador estático tem uma característica que foi imposta: há um campo de velocidade do tipo

$$u^\mu(\tau) = (u^0, 0, 0, 0) = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (4.1)$$

onde  $x^\mu(\tau)$  é a representação da linha-mundo que o observador está, identificando  $u^\mu = e_{(0)}{}^\mu$ . Adapta-se esse observador a um sistema de simetria axial, cuja métrica geral é do tipo [8]

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 + 2g_{03}d\phi dt, \quad (4.2)$$

onde  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta)$ .

Então, o importante campo de tétradas resultante é [8]:

$$e_{b\mu}\eta^{ab} = e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -C \\ 0 & \sqrt{g_{11}} \sin\theta \cos\phi & \sqrt{g_{22}} \cos\theta \cos\phi & -D r \sin\theta \sin\theta \\ 0 & \sqrt{g_{11}} \sin\theta \sin\phi & \sqrt{g_{22}} \cos\theta \sin\phi & D r \sin\theta \cos\phi \\ 0 & \sqrt{g_{11}} \cos\theta & -\sqrt{g_{22}} \sin\phi & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{aligned} A(r, \theta) &= \sqrt{-g_{00}}, \\ C(r, \theta) &= -\frac{g_{03}}{\sqrt{-g_{00}}}, \\ D &= \sqrt{\frac{-\delta}{(r^2 \sin^2 \theta) g_{00}}}, \\ \delta &= g_{03}g_{03} - g_{00}g_{33}. \end{aligned}$$

Com isso, aplicando a métrica de FLRW (2.5) no campo de tétradas (4.3) obtém-se o

equivalente para o FLRW:

$$e^a{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \sin\theta \cos\phi & ar \cos\theta \cos\phi & -ar \sin\theta \sin\phi \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \sin\theta \sin\phi & ar \cos\theta \sin\phi & ar \sin\theta \cos\phi \\ 0 & \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \cos\theta & -ar \sin\phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Utilizando a equação (1.43),  $\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c)$ , e a relação  $T^\beta{}_\alpha = T^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\lambda}g^{\beta\gamma}T_{\lambda\gamma}$  obtém-se

$$\Sigma^{001} = \frac{1}{4}(2g^{11}T_{001}) - \frac{1}{2}g^{11}(T_{001} + g^{22}T_{212} + g^{33}T_{313}). \quad (4.5)$$

Aplicando as componentes métricas (2.6) e a definição de torção (1.32),  $T_{a\mu\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} - \partial_\nu e_{a\mu}$  chega-se a:

$$\Sigma^{001} = \frac{\sqrt{1-kr^2} - (1-kr^2)}{a^2 r}. \quad (4.6)$$

Para se obter a densidade de energia gravitacional aplica-se o determinante em (4.4),

$$\det(e^a{}_{\mu}) = \frac{a^3 r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-kr^2}},$$

e a definição de  $\Pi^{aj} = -4\kappa e \Sigma^{a0j}$  (que é a densidade de energia-momento gravitacional [8]), encontrando-se:

$$\Pi^{(0)1} = 4\kappa ar \sin\theta \left( \sqrt{1-kr^2} - 1 \right), \quad (4.7)$$

onde  $\kappa \equiv \frac{1}{16\pi}$ ,  $k$  a curvatura espacial e  $a = a(t)$  o fator de escala.

Este resultado é denotado como a densidade de energia gravitacional do universo, pois advém da métrica de FLRW. Este resultado é importante pois, conforme visto na seção sobre TERG 1.2, aqui se tem uma expressão verdadeira de uma gravitação em âmbito cosmológico, pois foi construído em cima de um conhecimento de bem fundamentado na natureza da gravidade, detalhe este que na RG não é possível.

## 4.2 Quantizações da cosmologia

Nesta etapa, serão obtidos alguns resultados muito importantes para a pesquisa em cosmologia quântica. Mais necessariamente, dados sobre a forma mais correta da aplicação da teoria de Wheeler-DeWitt e a construção que está mais centrada nos princípios físicos, como a TERG. Assim, dois outros resultados, a equação completa e a sua solução em primeira aproximação,

mostrarão fundamentos teóricos mais apropriados para um estudo mais focado nos problemas que se tem em cosmologia quântica.

### 4.2.1 *Cosmologia quântica tipo Wheeler-DeWitt*

Neste passo será encontrado uma equação análoga à Wheeler-DeWitt (2.13) mas utilizando todo o aparato físico que a TERG proporciona ao dá mais subsídios na formulação da RG. Para encontrá-la é necessário resolver [8]

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_j \Pi^{aj} = - \oint_S dS_j \Pi^{aj}, \quad (4.8)$$

onde

$$\Pi^{aj} = -4\kappa e \Sigma^{a0j}. \quad (4.9)$$

Mas,  $P^0 = E$ , que é a energia gravitacional. Por isso, tomando a equação (4.7) e aplicando em (4.8) com  $r \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in ([0, \pi])$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  é obtido

$$E = - \lim_{r \rightarrow r_0} 8\pi \kappa a r \left[ \sqrt{1 - kr^2} - 1 \right], \quad (4.10)$$

onde  $r_0$  é o horizonte aparente. Este, que está associado à métrica de FLRW (2.5), é do tipo dinâmico, ou seja, sobre uma superfície de expansão nula e sua forma é [70]

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}}, \quad (4.11)$$

com  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . Resolvendo a equação (4.10), com uma primeira aproximação utilizada em expressão do tipo  $(1 + x)^n$  chega-se a

$$E \approx \frac{2ak\sqrt{k} - 2a^2k\sqrt{k} - a^3k\sqrt{k} + \frac{1}{2}a^4(\dot{a})^2\sqrt{k} + a^6k\sqrt{k}}{2k^2}. \quad (4.12)$$

Aplicando as propriedades da delta de Dirac (3.21), simetrizando, usando a comutatividade do tipo  $[\hat{a}, \hat{a}] = i\omega$  o hamiltoniano é

$$2k^2\hat{H} \approx 2\hat{a}k\sqrt{k} - 2\hat{a}^2k\sqrt{k} - \hat{a}^3k\sqrt{k} + \frac{1}{2}\hat{a}^4\sqrt{k}(\hat{a})^2 + \hat{a}^6k\sqrt{k} - 3\omega^2\hat{a}^2\sqrt{k} - i\omega 2\hat{a}\sqrt{k}\hat{a} \quad (4.13)$$

Substituindo os operadores  $\hat{a} = a$  e  $\hat{a} = -i\omega \frac{\partial}{\partial a}$  e utilizando o mesmo caminho que Wheeler e DeWitt propuseram na teoria, ou seja, aplicando o hamiltoniano na função de onda e  $\mathcal{H}\Psi = 0$ ,

$$\left( 2ak\sqrt{k} - 2a^2k\sqrt{k} - a^3k\sqrt{k} - \frac{1}{2}\omega^2a^4\sqrt{k}\frac{\partial^2}{\partial a^2} + a^6k\sqrt{k} - 3\omega^2a^2\sqrt{k} - \omega^2 2a\sqrt{k}\frac{\partial}{\partial a} \right) \Psi = 0. \quad (4.14)$$

Observa-se que essa equação (4.14) é similar a Wheeler-DeWitt (2.13): há derivada de primeira e segunda ordens, geometria do espaço-tempo e fator de escala cosmológico  $a(t)$ . Inclusive, tem-se a mesma similaridade com relação à aplicação na função de onda  $\Psi$ , obtendo uma equação do tipo estacionária.

Quase todas as críticas que foram feitas na seção 2.3.1 são aplicadas aqui: não faz sentido físico se ter uma equação de cosmologia quântica que não evolui com o tempo, ou seja, estacionária. Entretanto, aqui há alguns resgates feitos em relação à Wheeler-DeWitt: a equação (4.13) foi construída por um sólido fundamento matemático e físico (TERG e procedimento de Weyl), obtendo uma expressão de quantização para a energia gravitacional.

Só que observando esse procedimento, partindo de  $a(t)$  e  $\dot{a}(t)$ , que são fatores de escala, surge outra questão: para efeitos de quantização, é utilizado coordenadas físicas, não perfazendo o sentido físico necessário para se entender o universo. Desse modo, nem partindo de princípios matemáticos e físicos corretos, a formulação de Wheeler-DeWitt traz alguma segurança para se entender a natureza.

Para contornar esses problemas, tanto de interpretação quanto fornecer ferramentas à análise da cosmologia quântica, será montado um procedimento partindo da densidade de energia gravitacional, pois esta envolve todo o universo onde é válido a métrica de FLRW.

### 4.2.2 *Cosmologia quântica na gravidade teleparalela*

Conforme visto na subseção anterior, a quantização da energia, que é a tipificação da equação de Wheeler-DeWitt, não fornece subsídios adequados para uma interpretação física concreta. Por isso, aqui será tratado os operadores da cosmologia quântica na gravidade teleparalela através da densidade de energia.

Tomando a equação (4.7) e definindo uma função do tipo

$$\epsilon(r, \tau) = Ar\tau \left( \sqrt{1 - kr^2} - 1 \right),$$

onde  $A = 4a\kappa$  e  $\tau = \sin \theta$ . Tomando-se um espaço não-comutativo descrito na seção 3.2, os operadores serão

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dr d\tau d\beta d\eta \epsilon(r, \tau) e^{\frac{i}{\alpha}[\beta(r-\hat{r})+\eta(\tau-\hat{\tau})]}. \quad (4.15)$$

Utilizando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [71],  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ , a equação anterior (4.15) toma forma de

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{(2\pi\alpha)^2} \int dr d\tau d\beta d\eta \left[ Ar\tau \left( \sqrt{1 - kr^2} - 1 \right) \right] e^{\frac{i}{\alpha}\beta(r1-\hat{r})} e^{\frac{i}{\alpha}\eta(\tau-\hat{\tau})} e^{\frac{\beta\eta}{2}}. \quad (4.16)$$

Separando  $\epsilon(r, \tau) = Ar\tau (\sqrt{1 - kr^2} - 1)$  em

$$g(r, \tau) = Ar\tau, \quad (4.17)$$

$$h(r, \tau) = \sqrt{1 - kr^2}, \quad (4.18)$$

ficando  $\epsilon(r, \tau) = g(r, \tau)h(r, \tau) - g(r, \tau)$ . Aplicando a simetrização, discutida na seção 3.2 sobre quantização, obtém-se os operadores

$$g(\hat{r}, \hat{\tau}) = \frac{A}{2}(\hat{r}\hat{\tau} + \hat{\tau}\hat{r}), \quad (4.19)$$

$$h(\hat{r}) = (-k\hat{r}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.20)$$

a equação completa toma forma de

$$\hat{\mathcal{H}} = \left[ \frac{A}{2}(\hat{r}\hat{\tau} - \hat{\tau}\hat{r}) \right] (-k\hat{r}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \left[ \frac{A}{2}(\hat{r}\hat{\tau} - \hat{\tau}\hat{r}) \right] \quad (4.21)$$

Aqui reside um problema: o último operador tem um expoente fracionado. Para contornar este problema, na próxima seção será abordado uma expansão e tomado a primeira aproximação de  $h(r, \tau)$ .

### 4.2.3 *Cosmologia quântica na gravidade teleparalela em primeira aproximação*

Para encontrar o operador da equação (4.18) é necessário expandir a função com um tipo  $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$  em  $(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}$  e toma-se a primeira ordem, o que equivaleria a um  $r$  pequeno:

$$(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{kr^2}{2}. \quad (4.22)$$

Então, a função  $h(r, \tau)$  da equação (4.18) toma corpo como

$$h(r, \tau) = g(r, \tau) + m(r, \tau), \quad (4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} g(r, \tau) &= Ar\tau, \\ m(r, \tau) &= -\frac{Ak}{2}(r^3\tau). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Os respectivos operadores de  $g(r, \tau)$  e  $m(r, \tau)$  são

$$g(\hat{r}, \hat{\tau}) = \frac{A}{2}(\hat{r}\hat{\tau} + \hat{\tau}\hat{r}), \quad (4.25)$$

$$m(\hat{r}, \hat{\tau}) = -\frac{Ak}{8}(4\hat{r}^3\hat{\tau} - 6i\alpha\hat{\tau}^2). \quad (4.26)$$

Então, o operador  $\hat{h}(\hat{r}\hat{t})$  da equação (4.21) é

$$h(\hat{r}, \hat{t}) = \frac{A}{2} (\hat{r}\hat{t} + \hat{t}\hat{r}) - \frac{Ak}{8} (4\hat{r}^3\hat{t}_2 - 6i\alpha\hat{r}^2) \quad (4.27)$$

e o operador final de  $\hat{\mathcal{H}}$  da (4.15) é

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{Ak}{8} (4\hat{r}^3\hat{t} - 6i\alpha\hat{r}^2). \quad (4.28)$$

Usando  $\hat{r} = r$  e  $\hat{t} = -i\alpha\frac{\partial}{\partial r}$  chega-se ao operador densidade de energia gravitacional:

$$\hat{\mathcal{H}} = 3a\kappa k i \alpha r^2 + 2a\kappa k r^3 i \alpha \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.29)$$

A equação da cosmologia quântica em contexto da gravidade teleparalela, em uma primeira aproximação, é:

$$3a\kappa k \alpha r^2 \Psi + 2a\kappa k r^3 \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (4.30)$$

onde  $a = a(t)$ ,  $\kappa \equiv \frac{1}{16\pi}$  e  $k = \{-1, 0, 1\}$ .

Com essa equação (4.30), tem-se uma expressão clara, com princípios de quantização coerentes com uma origem matemática sem ambiguidades que o procedimento canônico carrega. Além do mais, ela tem por base a TERG, que faz correções substanciais à RG no sentido de se ter uma interpretação de universo físico com densidade de energia gravitacional, que permite a quantização e outras possíveis soluções a serem buscadas futuramente.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Desde a publicação da RG por Einstein a visão de universo mudou. Os trabalhos de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker, com apoio das observações de Hubble elevou a um patamar muito mais alto todo o conhecimento cosmológico que a humanidade detinha até 1915. E o grande desenvolvimento que a física quântica obteve ao vasculhar as entranhas da matéria quase fecha o quadro completo do conhecimento humano.

Mas, havia alguns entraves que pareciam insolúveis. Um deles vinha justamente da RG: não é possível, em sua interpretação da gravidade e em suas equações de campo, obter uma expressão de densidade de energia gravitacional. Sem isso, não poderia quantizar a gravidade. Mais do que isso: uma cosmologia quântica, com bons fundamentos físicos e matemáticos, que possibilitasse um estudo mais profundo do universo, desde seu nascimento até sua dinâmica completa, estaria longe de ser conseguida.

Wheeler e DeWitt, remando contra a maré nesses problemas, propuseram uma teoria que partia da formulação hamiltoniana da RG e da quantização canônica, mas sob interpretação, da física quântica, da teoria de muitos mundos. A proposta foi uma equação do tipo Schrödinger mas estacionária: não havia tempo de forma explícita, não há sentido físico para este universo que é apenas 1, dentro da interpretação de muitos mundos. Mesmo assim, a cosmologia quântica canônica foi amplamente estudada por mais de 40 anos.

Uma nova formulação para a gravitação foi desenvolvida ao longo de décadas. A TERG age justamente nos pontos onde a RG falha sem, contudo, perder a explicação dos fenômenos que a RG já trouxe ao longo do tempo. A interpretação de que efeitos gravitacionais decorrem não da curvatura do espaço-tempo, mas da torção em que ele se encontra, além de ter embasamento matemático sólido, resolve vários problemas da RG e o principal deles, que foi abordado nessa dissertação: expressão da densidade

de energia gravitacional.

Quase como um presente de Páris à Helena de Tróia, a TERG possibilitou extrair a expressão da densidade de energia gravitacional pela aplicação da métrica de FLRW. Com isso, uma porta para a cosmologia quântica é aberta, restando tratá-la com um procedimento de quantização, que deveria ter sólida base matemática e não ter ambiguidades.

A quantização que atende aos requisitos de não se ter ambiguidades, de ser clara do ponto de vista matemático e de ser utilizada em qualquer tipo de função é a de Weyl. Sua formulação matemática é transparente, pois a integral pode ser resolvida pela aplicação das propriedades da função delta de Dirac e, com isso, há uma correspondência entre os operadores clássicos e quânticos de forma natural.

Tendo em mãos um grande problema a resolver (obter uma equação que descreva a cosmologia de forma quântica com interpretação física real), uma tentativa que não funcionou (apesar de grandes pesquisas teóricas envolvidas) e as ferramentas corretas (TERG e procedimento de Weyl), uma proposta de cosmologia quântica na gravidade teleparalela foi apresentada nessa dissertação.

Antes do operador hamiltoniano final, foi obtido um campo de tétradas para a métrica FLRW do MCP. Com isso, foi possível obter uma expressão de energia e densidade de energia gravitacional. A primeira aplicação da quantização de Weyl foi na energia gravitacional, com objetivo de contrapor a proposta de Wheeler-DeWitt e demonstrar que, tanto o procedimento (de usar energia e não densidade de energia gravitacional) quanto a interpretação (original e no novo contexto) não são consistentes com uma física cosmológica quântica.

Por fim, uma equação da cosmologia quântica na gravidade teleparalela é obtida. Devido a dificuldade em se resolver a equação de forma completa, foi utilizada expansão e em primeira aproximação. Uma nova porta se abre. Esta tem subsídios adequados para abrir uma grande linha de pesquisa, que será desenvolvida futuramente. Há várias aplicações e investigações a serem feitas, principalmente com intuito de explicar problemas muito difíceis que ainda se tem. Algumas análises que poderão ser feitas: eventos que deram origem ao Big Bang (tunelamento quântico ou outro), explicação dos fenômenos energia escura e matéria escura, universo de Gödel, campos escalares diversos, separação dos termos geométrico e de matéria, dentre outros que poderão surgir. Somente o tempo e as evidências futuras poderão dá a certeza da funcionalidade da cosmologia quântica teleparalela, aqui proposta.

## Referências Bibliográficas

- [1] V. O. Rivelles, Física na Escola **8**, 10 (2007).
- [2] A. Einstein, Math. Annal. **102**, 687 (1930).
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).
- [4] P. A. Schulz, Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 509 (2007).
- [5] A. Einstein, *A teoria da relatividade especial e geral* (Contraponto, Rio de Janeiro, 1999).
- [6] R. Gazzinelli, *Teoria da relatividade especial* (Editora Blucher, São Paulo, 2009).
- [7] LIGO Scientific Collaboration e Virgo Collaboration Phys. Rev. Lett. **116** 241103-1 (2016).
- [8] J. W. Maluf, Anna. Phys. **525**, 339 (2013).
- [9] F. F. Faria, *O fluxo de energia-momento gravitacional*, dissertação, Universidade de Brasília, 2005.
- [10] S. T. Ali e M. Engliš, Rev. Math. Phys **4**, 391 (2005).
- [11] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics* (Dover, New York, 1930).
- [12] B. S. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [13] B. S. DeWitt, Gen. Relativ. Gravit. **1**, 181 (1970).
- [14] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou e A. N. Lasenby, *General relativity: an introduction for physicist* (Cambridge University Press, New York, 2006).
- [15] A. B. Henriques, *A Teoria da Relatividade Geral* (IST Press, Lisboa, 2009).

- 
- [16] S. C. Ulhoa, *O momento angular do campo gravitacional e o grupo de Poincaré*, Tese de doutorado, Universidade de Brasília, 2009.
- [17] J. B. Hartle, *Am. J. Phys.* **74**, 14 (2006).
- [18] J. R. Munkres, *Topology* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000).
- [19] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press, New York, 1998).
- [20] J. Foster e J. D. Nightingale, *A short course in General Relativity* (Springer, New York, 2006).
- [21] N. Banerjee e S. Sen, *Pramana* **6**, 609 (1997).
- [22] M. R. Spiegel, *Análise vetorial* (McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1961).
- [23] L. Landau e E. Lifchitz, *Teoria do campo* (Hemus, São Paulo, 2004).
- [24] R. P. Feynman, F. B. Moringo e W. G. Wagner, *Feynman lectures on Gravitation* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1995).
- [25] F. W. Dyson, A. S. Eddington e C. Davidson, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **220**, 291 (1919).
- [26] K. Schwarzschild, *Phys.-Math. Klasse*, **1916**, 189 (1916) [*arXiv:physics/9905030v1*].
- [27] S. Bowyer, E. T. Byram, T. A. Chubb e H. Friedman, *Science* **147**, 394 (1965).
- [28] J. Weber, *General relativity and gravitational waves* (Dover Publications, Mineola, 2004).
- [29] R. A. Hulse e J. H. Taylor, *Astrophys. J.* **195**, L51 (1974).
- [30] J. H. Taylor e J. M. Weisberg, *Astrophys. J.* **253**, 908 (1981).
- [31] LIGO Scientific Collaboration e Virgo Collaboration *Phys. Rev. Lett.* **116** 061102-1 (2016).
- [32] C. Møller, *Ann. Phys.* **12**, 118 (1961).
- [33] J. W. Maluf, *J. Math. Phys.* **35**, 335 (1994).
- [34] C. Pellegrini e J. Plebanski, *Mat. Fys. Skr.* **2**, 4 (1963).
- [35] Y. M. Cho, *Phys. Rev. D* **14**, 2521 (1976); **14**, 3335 (1976).
- [36] *Phys. Rev. D* **19**, 3524 (1979); **24** 3312 (1981).

- 
- [37] S. C. Ulhoa, *Physicae* **8**, 11 (2009).
- [38] H. G. V. González, *Uso do Einstein Toolkit na Gravidade Teleparalela*, dissertação, Universidade de Brasília, 2007.
- [39] M. V. O. Veiga, *Uma expressão regularizada para o momento-energia gravitacional no contexto do equivalente teleparalelo da Relatividade Geral*, dissertação, Universidade de Brasília, 2007.
- [40] J. W. Maluf e S. C. Ulhoa, *Ann. Phys.* **522**, 766 (2010).
- [41] S. C. Ulhoa e R. G. G. Amorim, *Advances in High Energy Physics* **2014**, 1 (2014).
- [42] J. W. Maluf, M. V. O. Veiga e J. F. da Rocha-neto, *Gen. Relativ. Gravit.* **39** 227 (2007).
- [43] R. Aldrovandi e J. G. Pereira, *Teleparallel gravity: an introduction* (Springer, New York, 2013).
- [44] B. S. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Addison-Wesley, San Francisco, 2003).
- [45] J. E. Horvarth, G. Lugones, S. Scarano Jr., R. Teixeira e M. P. Allen, *Cosmologia física* (Livraria da Física, São Paulo, 2011).
- [46] C. Patrignani *et. al.*, (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 40, 100001 (2016).
- [47] K. S. Oliveira filho e M. F. O. Saraiva, *Astronomia e astrofísica* (Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [48] E. Hubble, *Proc. Nati. Acad. Sci.* **15**, 168 (1929).
- [49] Planck Collaboration, *Astron. Astrophys.* **594**, 1 (2016).
- [50] D. F. Dario, *Geometrias não euclidianas: elíptica e hiperbólica no ensino médio*, dissertação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014.
- [51] A. Friedman, *Gen. Relativ. Gravit.* **31**, 1991 (1999).
- [52] A. G. Lemaître, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **47**, 483 (1927); *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **92**, 49 (1931).
- [53] H. P. Robertson, *Astrohpys. J.* **82**, 284 (1935).
- [54] H. P. Robertson, *Astrohpys. J.* **83**, 187 (1936); **83**, 257 (1936).
- [55] A. G. Walker, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s2-42**, 90 (1937).

- 
- [56] T. Padmanabhan, *Gravitation: foundations and frontiers* (Cambridge University Press, New York, 2010).
- [57] Planck Collaboration, *Astron. Astrophys.* **594**, 1 (2016).
- [58] F. M. N. Santos, *Cosmologia inflacionária e o problema da medida*, dissertação, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.
- [59] C. Roque De Bom, *Histórias consistentes em modelos de cosmologia quântica dominados por radiação*, dissertação, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2013.
- [60] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner, *The dynamics of General Relativity em Gravitation: an introduction to current research* (John Wiley & Sons, New York, 1962), editado por L. Witten.
- [61] E. J. C. de Pinho, *Teoria de perturbações invariantes de calibre em cenários de cosmologia quântica e sua confrontação com as observações*, tese, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2006.
- [62] L. G. Martins, *Modelos cosmológicos e buracos negros no contexto da gravitação de Horava-Lifshitz*, dissertação, Universidade Federal de Lavras, 2015.
- [63] D. J. Griffiths, *Mecânica quântica* (Pearson, São Paulo, 2011).
- [64] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica* (Person Addison Wesley, São Paulo, 2011).
- [65] G. S. Smith, *Classical electromagnetic radiation* (Cambridge University Press, New York, 1997).
- [66] F. A. Berezin, *Math. USSR - Izvestiya* **5**, 1109 (1974).
- [67] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).
- [68] V. Kupriyanov, *Quantização de sistemas não-lagrangianos e mecânica quântica não-comutativa*, tese, Universidade de São Paulo, 2009.
- [69] L. Gouba, *International Journal of Modern Physics A* **31**, 1630025 (2016).
- [70] B. R. Morais, *Aceleração e termodinâmica do horizonte aparente da métrica de FLRW no contexto do TEGR*, dissertação, Universidade de Brasília, 2015.
- [71] R. Gilmore, *J. Math. Phys.* **15**, 2090 (1974).