

Leonardo Sousa Gomes Marinho

Soluções Caóticas em um Problema de Programação Dinâmica

Brasília

2017

*Este trabalho é dedicado a meu pai,
que sempre instigou minha curiosidade e sede de saber.*

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado não teria sido possível sem o apoio de várias pessoas às quais sou muito grato.

Início agradecendo, em especial, ao meu orientador Daniel Cajueiro pelo apoio e paciência. Aos colegas da Universidade de Brasília pelas discussões e ajuda, em especial a Guilherme Solino pela valiosa ajuda na formatação do texto final. A Oona Rodrigues pelo apoio emocional, sem o qual esta tarefa teria sido muito mais árdua e menos prazerosa. Aos colegas do Banco Central do Brasil pelas dicas e frutíferas discussões.

Gostaria de agradecer também a Frederico Macedo e Alberto Mendes pela revisão do texto e sugestões de melhoria e aos funcionários da secretaria e membros da Comissão de Pós-Graduação do Departamento de Economia da UnB pela paciência com meus prazos incovenientes.

Também agradeço a meus sócios e amigos Pedro Vinícius, Guilherme Lavoratti e Rodolfo Carvalho pela paciência com minhas ausências em nossos compromissos num momento crucial de nossas vidas.

Finalmente, gostaria de agradecer ao Banco Central do Brasil por ter me concedido licença remunerada para a realização do Mestrado em Economia. Tal apoio foi absolutamente crucial para o bom andamento e aproveitamento do curso. Espero poder contribuir ao máximo com os conhecimentos adquiridos na universidade para aumentar ainda mais o já elevado padrão de excelência desta respeitável instituição.

*“Em todo caos há um cosmos,
em toda desordem uma ordem secreta.”*
(Carl Jung)

*“Caos no meio do caos não é divertido,
mas caos no meio da ordem é.”*
(Steve Martin)

Resumo

Programação dinâmica é uma técnica onipresente em toda a ciência econômica, e é de interesse saber se as soluções para esta classe de problemas podem ser caóticas. A literatura na área provém, principalmente, do estudo de modelos de crescimento endógeno, mas o presente trabalho analisa um modelo proveniente da área de pesquisa conhecida como dinâmica humana, um ramo da teoria dos sistemas complexos. Um aspecto crucial da possibilidade de soluções caóticas para este tipo de problema é o valor do fator de desconto, onde a literatura econômica sugere que tais soluções só seriam comuns para fatores de desconto baixos, atípicos em economia. Aqui, para valores elevados do fator de desconto, são apresentadas soluções caóticas nos valores esperados de um modelo estocástico de programação dinâmica onde o espaço de estados é discreto. Tais soluções são analisadas numericamente por meio de gráficos e simulações e algumas de suas principais características, especialmente sua natureza caótica, são demonstradas analiticamente.

Palavras-chave: Caos. Programação dinâmica. Dinâmica humana.

Abstract

Dynamic programming is a ubiquitous technique throughout economics, and it is of interest to know whether solutions to this class of problems may be chaotic. Literature in this area comes mainly from the study of endogenous growth models, but the present work analyzes a model from the research area known as human dynamics, a branch of complex systems theory. A crucial aspect of the possibility of chaotic solutions to this kind of problem is the discount factor value, where economic literature suggests that such solutions are common only for low, atypical values. Here, chaotic solutions for high values of the discount factor are presented for the expected values of a stochastic dynamic programming model with discrete state space. Such solutions are analyzed numerically and graphically through simulations and some of their main characteristics, especially their chaotic nature, are demonstrated analytically.

Keywords: Chaos. Dynamic programming. Human dynamics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Plane $x_L - x_H$ showing regions A, B and C	34
Figura 2 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.9) with $k = 0$	36
Figura 3 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.9) with $k = 0.3$	36
Figura 4 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.9) with $k = 0.1791111111111111$	37
Figura 5 – Time evolution of (3.9) showing trajectories starting at 29.5 and 29.51.	38
Figura 6 – Cobweb diagrams for equation (3.10).	38
Figura 7 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.10).	39
Figura 8 – Time evolution of (3.10) showing trajectories starting at 29 and 29.00001.	40
Figura 9 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.10). Escaping trajectories.	40
Figura 10 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11).	41
Figura 11 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Oscillating sink.	41
Figura 12 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Chaos frontier.	42
Figura 13 – Bifurcation diagram for (3.11).	43
Figura 14 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Unstable periodic orbit.	43
Figura 15 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Chaos and floating point.	44
Figura 16 – Time evolution of (3.11) showing trajectories starting at 29.4 and 29.4001.	44
Figura 17 – Cobweb diagrams for equations (4.3) and (4.4).	50
Figura 18 – Time evolution and cobweb diagrams for equation (4.3).	50
Figura 19 – Time evolution of (4.3) showing a period 5 asymptotically periodic orbit.	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Joint probability distribution of e_L and e_H .	28
Tabela 2 – Joint probability distribution of e_L and e_H with $\lambda = \mu = 1$.	33

Sumário

Introdução	19
1 REVISÃO DA LITERATURA	23
2 THE MODEL	27
3 PROTOCOLS	33
3.1 Introduction	33
3.2 The Constant Protocol	35
3.3 The Positive Slope Protocol	37
3.4 The Negative Slope Protocol	39
3.5 Conclusion	45
4 CHAOS	47
4.1 Some Properties of One-dimensional Maps	47
4.2 Analysis of the Positive Slope Map	48
4.3 Analysis of the Negative Slope Map	49
5 CONCLUSÃO	55
REFERÊNCIAS	57

Introdução

Compreender o comportamento de pessoas individualmente ou coletivamente é de suma importância para ramos do conhecimento como a sociologia, a psicologia e a economia. Diversas abordagens são utilizadas em diferentes disciplinas, com ênfase em variados aspectos do comportamento humano, dependendo dos objetivos da pesquisa na área. Em particular, embora a ciência econômica tenha abordado o processo de tomada de decisão individual ou coletiva principalmente com base no pressuposto da racionalidade dos agentes econômicos, recentemente este pressuposto tem sido relaxado de diversas formas, numa tentativa de explicar dados que não se encaixam na premissa do agente racional.

Uma destas abordagens com potencial para explicar determinadas características do comportamento humano de interesse para a Ciéncia Económica é o ramo do conhecimento conhecido como dinâmica humana. Este é um ramo de pesquisa da teoria de sistemas complexos que tenta compreender o comportamento humano em interação com outras pessoas e diversos tipos de ambientes, frequentemente utilizando-se perspectivas inspiradas em técnicas do ramo da física conhecido como mecânica estatística. Neste ramo existem modelos de filas e estudos sobre o comportamento de multidões, e um dos principais trabalhos nesta área, principalmente por sua influência nas pesquisas realizadas posteriormente, é o artigo pioneiro de [Barabasi \(2005\)](#): *The origin of bursts and heavy tails in human dynamics*.

Neste trabalho, o autor modela o tempo de espera entre ações humanas utilizando um modelo de filas, na tentativa de explicar as “caudas gordas” observadas experimentalmente em processos deste tipo. Por exemplo, [Paxson e Floyd \(1995\)](#) abordam o problema do tráfego de informações em redes de computadores, focando em processos de acesso à rede iniciados por usuários, um típico problema de execução aleatória de uma determinada tarefa ao longo do tempo. Os autores concluem que o uso de processos de Poisson para a modelagem de tais processos mostra-se inadequado.

Tradicionalmente, a modelagem de eventos que ocorrem aleatoriamente ao longo do tempo é feita com processos de Poisson. Esta é uma escolha natural, dado que é a solução para este tipo de problema quando os eventos são *estatisticamente independentes* ao longo do tempo (veja, por exemplo, [Daley e Vere-Jones \(2003\)](#)). Porém, em várias situações reais, especialmente as que envolvem agentes humanos, esta suposição não é válida. Por exemplo: pessoas que chegam aos caixas de um supermercado observam o tamanho das filas e normalmente escolhem a menor, de modo que a probabilidade de chegada em uma fila específica é influenciada pelo tamanho desta fila em relação às outras.

[Barabasi \(2005\)](#) aborda o problema assumindo que pessoas tomam decisões de execução de tarefas organizadas em filas por meio de um protocolo que executa primeiro as tarefas com alta prioridade, deixando as tarefas com baixa prioridade esperando um tempo mais longo na fila. Com esta simples hipótese, ele mostra numericamente que a distribuição do tempo de espera entre a execução de tarefas segue uma lei de potência, com uma cauda muito mais gorda que a esperada num processo de Poisson. Posteriormente, [Vazquez \(2005\)](#) demonstrou analiticamente tais resultados.

Este modelo levou a um aumento da atividade de pesquisa na área, com diversas extensões da ideia original. Evidência experimental desta abordagem para várias atividades de execução de tarefas por pessoas é dada em [Vázquez et al. \(2006\)](#). Outras contribuições são dadas por [Hidalgo \(2006\)](#), [Grinstein e Linsker \(2006\)](#) e [Formentin et al. \(2014\)](#), por exemplo.

Numa abordagem alternativa, [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#) analisam a suposição de que as pessoas realizam tarefas por meio de um protocolo que preferencialmente executa a tarefa de maior prioridade primeiro. Porém, neste trabalho, a associação de prioridades às tarefas é feita de modo a minimizar um índice de custo dependente do estado do sistema. No modelo dos autores há duas filas (que podem ser vistas como apenas uma fila), uma com tarefas de alta prioridade e outra com tarefas de baixa prioridade. Em cada instante de tempo, o agente avalia o custo do estado atual, que é função do comprimento das filas, e também considera a dinâmica futura do sistema e os custos associados. Deste modo, os autores modelam tal situação por meio de um modelo estocástico de programação dinâmica com taxa de desconto intertemporal, onde a escolha do agente é aquela que minimiza o custo total, dado pelo custo atual e pelos custos esperados futuros descontados.

Uma das conclusões dos autores é que o protocolo utilizado depende da função custo encarada pelo agente. Esta função determina, em cada instante de tempo, o custo de manter uma tarefa em determinada fila por mais um período. Se a função custo é linear, executar a tarefa de alta prioridade é sempre ótimo, o que leva ao protocolo estudado em [Barabasi \(2005\)](#) entre outros. Porém, se o custo é quadrático, diferentes tipos de protocolo são possíveis. Dependendo do comprimento relativo das filas, pode ser ótimo em determinado instante executar apenas as tarefas de alta prioridade ou apenas as de baixa prioridade. Há também a possibilidade de indiferença em relação a qual das tarefas executar. Finalmente, ao final do artigo eles ainda mostram que, dependendo dos parâmetros do sistema, o protocolo considerado pode gerar uma dinâmica complexa.

Esta possibilidade de dinâmica complexa é interessante porque mesmo com valores elevados do fator de desconto ela pode ocorrer. Cabe ressaltar que, mesmo não sendo estritamente caótica no sentido matemático do termo, para quase todos (no sentido de Lebesgue) os valores de parâmetros, a dinâmica do sistema é aperiódica. Tal resultado vai de encontro a alguns resultados na literatura que sugerem que soluções caóticas em problemas de programação dinâmica tenderiam a ocorrer apenas com fatores de desconto baixos, característica esta não muito comum em problemas econômicos. Portanto, uma conclusão apressada é que tais soluções caóticas não seriam de interesse econômico.

O presente trabalho é inteiramente baseado em [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#), sendo uma extensão do artigo dos autores. No trabalho original, a dinâmica complexa encontrada não é caótica no sentido utilizado em [Li e Yorke \(1975\)](#), que é uma definição de caos muito aceita na literatura de sistemas dinâmicos. Aqui, diferentes protocolos que também são soluções ótimas do problema de programação dinâmica são considerados, e são apresentados dois protocolos ótimos que induzem soluções caóticas para o comportamento esperado do sistema. Tais protocolos exploram a região do espaço de estados onde o agente mostra-se indiferente às opções de alta ou baixa prioridade.

No primeiro protocolo considerado, aqui chamado de protocolo com inclinação positiva, devido ao fato de o mapa que define tal protocolo ter uma inclinação positiva na região de indiferença, as tarefas são realizadas de modo a aumentar as chances de o sistema ir em direção à fronteira entre a região de indiferença e uma das regiões onde é ótimo realizar a tarefa de alta ou baixa prioridade. Por exemplo: se o sistema se encontra na região de baixa prioridade, as tarefas de baixa prioridade são executadas até o tamanho das filas atingir a região de indiferença. Uma vez nesta região, as tarefas da fila de alta prioridade são executadas com probabilidade positiva, de modo a trazer o sistema de volta à região anterior, e a probabilidade de execução da tarefa de alta prioridade aumenta à medida que o sistema entra mais profundamente na região de indiferença, tornando cada vez mais provável que as filas voltem à região de baixa prioridade. Uma situação parecida ocorre se o sistema iniciar na região de alta prioridade.

Este protocolo é analisado em detalhes nas Seções 3.3 e 4.2. Na Seção 3.3, faz-se uma

abordagem numérica do mapa com inclinação positiva, onde suas propriedades, especialmente sua natureza caótica, são analisados de maneira informal por meio de gráficos e simulações. Já na Seção 4.2, este protocolo é analisado de maneira mais formal, e seu comportamento caótico é demonstrado e analisado matematicamente.

O segundo protocolo considerado é uma espécie de imagem espelhada do primeiro, e é chamado de protocolo com inclinação negativa. Como o nome sugere, o mapa que o define tem inclinação negativa na região de indiferença. Seu comportamento é inverso ao do protocolo com inclinação positiva. Por exemplo: estando o sistema na região de baixa prioridade, ao atingir a região de indiferença, as tarefas de baixa prioridade ainda são preferencialmente executadas, com a probabilidade de execução das tarefas de alta prioridade tornando-se maior à medida em que o sistema adentra mais profundamente a região de indiferença. Então, finalmente alcança-se o ponto, dependente dos parâmetros, em que as tarefas de alta prioridade são executadas com probabilidade 1, fazendo o sistema retornar à região de indiferença e finalmente atingir a região de baixa prioridade novamente, gerando uma alternância entre as regiões de alta e baixa prioridade.

Como será demonstrado nas Seções 3.4 e 4.3, este mapa apresenta um comportamento bastante complexo, com regiões do espaço de parâmetros onde a dinâmica é completamente caótica, e outras regiões onde a dinâmica é periódica. Na Seção 3.4, a análise é feita de maneira mais informal, por meio de gráficos e simulações. Finalmente, na Seção 4.3 a análise do protocolo com inclinação negativa é feita de maneira mais formal, com demonstrações matemáticas de sua natureza caótica e com a explicação do que ocorre nas fronteiras onde o sistema deixa de ser caótico e passa a se comportar de maneira periódica.

O texto está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 é feita uma revisão da literatura de dinâmica humana, de soluções caóticas em problemas de programação dinâmica e também da literatura de mapas unidimensionais. No Capítulo 2 o modelo utilizado em [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#) é apresentado e sua solução é encontrada. No Capítulo 3, os protocolos propostos são apresentados e é feita uma análise numérica, baseada em simulações e gráficos, de tais protocolos, bem como do protocolo proposto em [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#). No Capítulo 4 estes mesmos protocolos são analisados matematicamente de maneira mais formal, com uma introdução à dinâmica de mapas unidimensionais destacando os conceitos mais importantes utilizados. O capítulo 5 conclui o presente trabalho.

1 Revisão da Literatura

Como já mencionado na Introdução, o trabalho pioneiro feito em Barabasi (2005), *The origin of bursts and heavy tails in human dynamics*, levou a um aumento na atividade de pesquisa na área. Enquanto o citado autor modelava a realização de tarefas ao longo do tempo por pessoas supondo que estas realizam primeiro tarefas de alta prioridade, conseguindo replicar as “caudas gordas” observadas experimentalmente neste tipo de processo, outros autores extenderam tal abordagem em diferentes direções.

Estudos sobre a temporalidade da realização de tarefas por pessoas foram feitos em variados contextos. Henderson e Bhatti (2001) investigam o acesso de jogadores em redes de jogos *on-line*. Wang e Guo (2010) analisam tais conceitos no contexto de operações logísticas, enquanto Dezsö et al. (2006) concentram-se em acessos a determinadas páginas na internet. Outros trabalhos relacionados são Gonçalves e Ramasco (2008) e Gao et al. (2013).

Trabalhos empíricos sobre correspondências escritas que observam escalas de tempo que vão de alguns meses a vários anos podem ser encontrados em Eckmann, Moses e Sergi (2004), Wu et al. (2010), Oliveira e Barabási (2005), Qu, Wang e Wang (2011), Malmgren et al. (2008), Malmgren et al. (2009) e Formentin et al. (2014). Estes estudos estão relacionados a outros onde “caudas gordas” são encontradas em atividades realizadas por pessoas ou animais: Hanai et al. (2006), Crane, Schweitzer e Sornette (2010), Proekt et al. (2012), Jung et al. (2014) e Mryglod et al. (2015).

Diversas tentativas de explicar estas “caudas gordas”, tipicamente modeladas por distribuições com caudas que obedecem a uma lei de potência foram feitas. O já mencionado trabalho pioneiro de Barabasi (2005) é um exemplo. Hidalgo (2006) mostra analiticamente e numericamente que “caudas gordas” podem surgir no processo de realização de tarefas ao longo do tempo em nível populacional se os indivíduos que compõem a população realizam as tarefas individualmente como num processo de Poisson com tempos característicos distintos. O fenômeno também é observado se os agentes variam suas taxas de realização de tarefas de maneira determinística ou estocástica.

Grinstein e Linsker (2006) deduzem analiticamente resultados assintóticos para modelos estocásticos de filas com tarefas executadas de acordo com uma associação de prioridades contínua. Masuda, Kim e Kahng (2009) encontram analiticamente valores para o expoente das caudas de distribuições de atividades realizadas ao longo do tempo. Em Walraevens et al. (2012), os autores aplicam técnicas da teoria de filas, como o modelo de prioridades estocástico para analisar tempos de espera. Outros trabalhos na área são: Blanchard e Hongler (2007), Min, Goh e Kim (2009), Cho et al. (2010), Kim e Chae (2010), Jo, Pan e Kaski (2012), Jiang et al. (2013) e Formentin et al. (2015).

O artigo mais importante relacionado ao presente trabalho é Cajueiro e Maldonado (2008). Como já mencionado na Introdução, aqui é feita uma extensão do trabalho dos autores. Porém, o foco da extensão está concentrado nas consequências dinâmicas do processo de minimização de custos utilizado no artigo, ao invés da distribuição das tarefas realizadas pelo agente ao longo do tempo, que é o principal foco dos trabalhos mencionados anteriormente na presente seção. Especificamente, o ponto focado aqui é a solução do problema de programação dinâmica apresentado em Cajueiro e Maldonado (2008).

Problemas que envolvem programação dinâmica permeiam toda a teoria econômica. A razão disso é que tal técnica visa à solução ótima de um problema de escolha intertemporal, algo recorrente

em vários ramos da ciência econômica. Um ponto de interesse é saber se as soluções deste tipo de problema são “bem comportadas”.

Com os avanços ocorridos na teoria dos sistemas dinâmicos a partir da década de 1960, especialmente com o melhor entendimento do fenômeno do caos, o interesse nas propriedades das soluções de problemas de programação dinâmica ressurgiu, especialmente na literatura sobre crescimento agregado, onde pretendia-se investigar se flutuações no crescimento econômico poderiam ser causadas por fatores endógenos e não por choques externos.

[Boldrin e Montrucchio \(1986\)](#) mostram que, para fatores de desconto suficientemente baixos, a função que determina a política ótima para problemas de crescimento ótimo pode ser de qualquer tipo, podendo inclusive apresentar comportamento caótico. [Montrucchio e Sorger \(1996\)](#) mostram um resultado que poderia ser interpretado como o recíproco do primeiro: eles provam que para gerar soluções ótimas com grande entropia topológica nesta classe de modelos, o fator de desconto deve ser pequeno.

Porém, apesar da importância do resultado dos autores, um valor alto da entropia topológica é uma condição *suficiente*, porém, não é *necessária* para a ocorrência de caos na definição adotada por [Li e Yorke \(1975\)](#). Corroborando este fato, [Nishimura, Sorger e Yano \(1994\)](#) mostram que é possível encontrar infinitos modelos como os considerados por [Montrucchio e Sorger \(1996\)](#) que possuem políticas ótimas exibindo caos ergódico. [Mitra e Sorger \(1999\)](#) mostram que caos topológico é um fenômeno robusto neste tipo de problema mesmo para valores do fator de desconto arbitrariamente elevados. Eles encontram restrições exatas para o fator de desconto sob as quais o mapa logístico e o “mapa da tenda” (tent map), dois bem conhecidos mapas caóticos, podem ser políticas ótimas de modelos de crescimento agregado. Entretanto, nestes casos os valores encontrados pelos autores são pequenos comparados aos tipicamente encontrados em problemas econômicos.

[Boldrin et al. \(2001\)](#) estudam um modelo de crescimento endógeno que apresenta soluções caóticas. Outros trabalhos sobre caos em problemas econômicos que envolvem programação dinâmica são [Gardini, Sushko e Naimzada \(2008\)](#), [Gardini et al. \(2009\)](#), [Fanti e Gori \(2011\)](#) e [Gupta, Stander et al. \(2014\)](#), por exemplo. Uma coleção de artigos relacionando problemas de otimização e caos é apresentada em [Majumdar, Mitra e Nishimura \(2000\)](#).

As raízes da teoria do caos remontam a Poincaré ([Poincaré \(1890\)](#)) ainda no século XIX, num estudo sobre o problema dos três corpos na mecânica celeste ([Diacu e Holmes \(1996\)](#)). Estudos sobre equações diferenciais não-lineares foram realizados por diversos autores. Alguns trabalhos importantes na área são [Birkhoff \(1927\)](#), [Kolmogorov \(1941\)](#), [Kolmogorov \(1979\)](#), [Cartwright \(1949\)](#) e [Smale \(2000\)](#).

Apesar destas observações feitas na primeira metade do século XX, demorou até que ficasse evidente para a comunidade científica que modelos lineares não poderiam explicar diversos fenômenos que apareciam ser aleatórios mas eram na verdade determinísticos, como o famoso mapa logístico e várias observações experimentais vindas principalmente da física. Com o surgimento dos computadores, a teoria ganhou fôlego, já que passou a ser possível simular diversos sistemas com grande velocidade e precisão. Isso levou ao trabalho pioneiro do meteorologista Edward Lorenz ([Lorenz \(1963\)](#)), que concluiu que mesmo com um modelo detalhado da atmosfera não seria possível prever o tempo para períodos muito longos adequadamente.

Desenvolvimentos posteriores vieram com a descoberta da geometria fractal por Benoît Mandelbrot ([Mandelbrot \(1967\)](#), [Mandelbrot e Pignoni \(1983\)](#)) e a contribuição de diversos autores. Apesar do foco inicial da teoria ter sido equações diferenciais não-lineares, o estudo de mapas, como o mapa logístico ([May et al. \(1976\)](#)), se mostrou um importante tópico tanto por suas aplicações na teoria das

equações diferenciais como por seu interesse intrínseco.

Mapas envolvem a iteração de uma função, operação que se mostra importante desde os tempos babilônicos, onde estes utilizavam tal operação na construção de um calendário preciso. A partir do século XVIII, outra importante aplicação de mapas surgiu com os métodos de determinar numericamente os zeros de uma função, como o método de Newton-Raphson. Porém, foi apenas no início do século XX que a análise sistemática deste tipo de operação começou a ser feita, com os trabalhos de Julia e Fatou. Aplicações da teoria de mapas na análise de sistemas de maior dimensão são feitas em [Guckenheimer \(1976\)](#), [Collet, Eckmann e Koch \(1981\)](#), [Levi \(1981\)](#) e [Holmes e Whitley \(1984\)](#).

De particular interesse para o presente trabalho são os mapas unidimensionais, onde uma referência que compila grande diversidade de resultados importantes é [Melo e Strien \(2012\)](#). Os mapas estudados na presente dissertação também são da classe de mapas lineares por pedaços, e uma referência no assunto é [Bernardo et al. \(2008\)](#).

O presente trabalho focará em um problema de programação dinâmica estocástico, diferentemente dos problemas determinísticos abordados na literatura econômica. A dinâmica caótica resultante da política ótima do problema de programação dinâmica se dá, então, nos valores esperados das variáveis de estado. Um importante aspecto dos resultados encontrados é que o sistema pode apresentar dinâmica caótica nos valores esperados mesmo que *o fator de desconto seja elevado*. Serão apresentados dois protocolos ótimos para o modelo estudado em [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#) que apresentam comportamento caótico na dinâmica esperada para valores economicamente realistas do fator de desconto.

2 The Model

The model is the same as in [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#). Their model has two queues: a high priority queue (H) and a low priority queue (L) with sizes x_H and x_L , respectively. The state of the system at time t is given by $(x_L(t), x_H(t))$, and the cost of this state is given by $g(x_L(t), x_H(t))$. This cost function has the following property:

$$\frac{\partial g(x_L, x_H)}{\partial x_L} \Big|_{x_L=x_H} < \frac{\partial g(x_L, x_H)}{\partial x_H} \Big|_{x_L=x_H} \quad (2.1)$$

which means that the marginal cost for an additional task arriving at L is smaller than if the task arrives at H , for equally sized queues. For this reason, they call H a high priority queue and L a low priority queue.

At each discrete time step, a task arrives at H with probability $\lambda\rho$ or at L with probability $\lambda(1-\rho)$. At the same time step, first task in H is executed with probability $\mu u(x_L(t), x_H(t))$ or first task in L is executed with probability $\mu[1 - u(x_L(t), x_H(t))]$, where $u(x_L, x_H)$ is a state dependent control function. This control function is chosen in order to minimize the total cost function:

$$J_u(x_L, x_H) = E_u \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t g(x_L(t), x_H(t)) \middle| x_L, x_H \right] \quad (2.2)$$

where $E_u[\cdot|x_L, x_H]$ is the expected value conditioned on initial state $(x_L, x_H) = (x_L(0), x_H(0))$ and control function u . Parameter α is the discount factor.

The following quadratic form for the cost function is explicitly assumed:

$$g(x_L, x_H) = h_L x_L^2 + h_H x_H^2, \quad 0 < h_L < h_H. \quad (2.3)$$

Here, the same approach to minimize (2.2) through u is followed. The principle of optimality ([Bertsekas et al. \(1995\)](#)) together with the Banach fixed point theorem imply that the minimum cost function $\min_u J_u(x_L(t), x_H(t))$ at time t , if it exists, is given by the solution to the Bellman equation:

$$\begin{aligned} J(x_L(t), x_H(t)) = \\ \min_u \{g(x_L(t), x_H(t)) + \alpha E_u[J_u(x_L(t+1), x_H(t+1))|x_L(t), x_H(t)]\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

To solve (2.4), first notice that the evolution of states is given by:

$$x_L(t+1) = x_L(t) + \epsilon_L(t) - \theta_L(t) \quad (2.5a)$$

$$x_H(t+1) = x_H(t) + \epsilon_H(t) - \theta_H(t) \quad (2.5b)$$

where $\epsilon_L(t)$ and $\epsilon_H(t)$ model the arrival of tasks in L and H , respectively. Also, $\theta_L(t)$ and $\theta_H(t)$ model the execution of tasks in L and H and their distributions are given by:

$$\epsilon_L(t) \sim Bernoulli(\lambda(1-\rho)) \quad (2.6a)$$

$$\epsilon_H(t) \sim Bernoulli(\lambda\rho) \quad (2.6b)$$

$$\theta_L(t) \sim Bernoulli(\mu(1-u)) \quad (2.6c)$$

$$\theta_H(t) \sim Bernoulli(\mu u). \quad (2.6d)$$

Here, $Bernoulli(p)$ is the Bernoulli distribution with parameter p ¹. Moreover, these variables are *not* independent, because if $\epsilon_L(t) = 1$ then $\epsilon_H(t) = 0$ and vice versa. The same is true for θ_L and θ_H . Define

$$e_L(t) = \epsilon_L(t) - \theta_L(t) \quad (2.7a)$$

$$e_H(t) = \epsilon_H(t) - \theta_H(t) \quad (2.7b)$$

so that

$$x_L(t+1) = x_L(t) + e_L(t) \quad (2.8a)$$

$$x_H(t+1) = x_H(t) + e_H(t). \quad (2.8b)$$

In equations (2.7) or (2.8), $e_L(t)$ and $e_H(t)$ are also *not* independent. So, it is convenient to write down their joint probability distribution as shown in Table 1.

		e_H			f_{e_L}
		-1	0	1	
e_L	-1	0	$(1-\lambda)\mu(1-u)$	$\lambda\rho\mu(1-u)$	$\mu(1-u)[1-\lambda(1-\rho)]$
	0	$(1-\lambda)\mu u$	$(1-\lambda)(1-\mu) + \lambda(1-\rho)\mu(1-u) + \lambda\rho\mu u$	$\lambda\rho(1-\mu)$	$\lambda(1-\rho)[2\mu(1-u) - 1] - \mu(1-u) + 1$
	1	$\lambda(1-\rho)\mu u$	$\lambda(1-\rho)(1-\mu)$	0	$\lambda(1-\rho)[1-\mu(1-u)]$
f_{e_H}		$\mu u(1-\lambda\rho)$	$\mu u[2\lambda\rho - 1] - \lambda\rho + 1$	$\lambda\rho(1-\mu u)$	1

Tabela 1 – Joint probability distribution of e_L and e_H . Marginal distributions are also displayed.

Using Table 1, equation (2.4) may be easily rewritten as equation (1) in Cajueiro e Maldonado (2008):

$$J(x_L, x_H) = F(x_L, x_H) + \min_u u(x_L, x_H)G(x_L, x_H) \quad (2.9)$$

¹ $x \sim Bernoulli(p)$ if $x = 1$ with probability p and 0 with probability $1 - p$. The Bernoulli density is given by:

$$p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

where $u = u(x_L(t), x_H(t))$ is the control function valued at state $(x_L, x_H) = (x_L(t), x_H(t))$. Also,

$$\begin{aligned} F(x_L, x_H) &= g(x_L, x_H) + \lambda\rho(1-\mu)\alpha J(x_L, x_H + 1) \\ &\quad + \lambda(1-\rho)(1-\mu)\alpha J(x_L + 1, x_H) \\ &\quad + (1-\lambda)\mu\alpha J(x_L - 1, x_H) \\ &\quad + \lambda\rho\mu\alpha J(x_L - 1, x_H + 1) \\ &\quad + \lambda(1-\rho)\mu\alpha J(x_L, x_H) \\ &\quad + (1-\lambda)(1-\mu)\alpha J(x_L, x_H) \end{aligned} \tag{2.10}$$

and

$$\begin{aligned} G(x_L, x_H) &= (1-\lambda)\mu\alpha[J(x_L, x_H - 1) - J(x_L - 1, x_H)] \\ &\quad + \lambda\rho\mu\alpha[J(x_L, x_H) - J(x_L - 1, x_H + 1)] \\ &\quad + \lambda(1-\rho)\mu\alpha[J(x_L + 1, x_H - 1) - J(x_L, x_H)] \end{aligned} \tag{2.11}$$

To solve (2.9), the same reasoning presented in Cajueiro e Maldonado (2008) is followed. This minimization problem is a linear programming, and $u(x_L, x_H)$ explicitly depends on the signal of $G(x_L, x_H)$, such that, if $G(x_L, x_H) < 0$, the maximum possible $u(x_L, x_H)$ minimizes (2.9), that is, $u(x_L, x_H) = 1$. Similarly, if $G(x_L, x_H) > 0$, $u(x_L, x_H) = 0$. Finally, if $G(x_L, x_H) = 0$, than $u(x_L, x_H)$ may be any value in $[0, 1]$. Notice that, given real constants a, b, c, d, e , quadratic polynomials like

$$a + bx_L + cx_H + dx_L^2 + ex_H^2 \tag{2.12}$$

equipped with sup-norm form a Banach space. So, because $g(x_L(t), x_H(t))$ has the same structure (2.12) (see (2.3)) for all t , it follows that the sequence of functions obtained by successive iterations of (2.9) has the same functional form. Therefore, a polynomial as in (2.12) is the solution to (2.9). To determine the constants a, b, c, d, e , substitute $J(x_L, x_H) = a + bx_L + cx_H + dx_L^2 + ex_H^2$ into (2.9) and solve for the constants.

Identifying $G(x_L, x_H) > 0$, $G(x_L, x_H) = 0$ and $G(x_L, x_H) < 0$ cases with subscripts A, B and C, respectively, the substitution process for each case gives the following equations depending on the signal of G :

$$J_i(x_L, x_H) = a_i + b_i x_L + c_i x_H + d x_L^2 + e x_H^2 \tag{2.13}$$

$$G_i(x_L, x_H) = \mu\{b_i - c_i + 2(dx_L - ex_H) + d[2\lambda(1-\rho) - 1] + e(1 - 2\lambda\rho)\} \tag{2.14}$$

where $i = A, B, C$. The constants in equations (2.13) and (2.14) are given by:

$$\begin{aligned} a_A &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3}\{[(1-\alpha)(\mu + (1-\rho)\lambda)) + 2\alpha(\lambda^2 + \mu^2 - \mu\lambda) + \\ &\quad + 2\rho\lambda(\mu(1+\alpha) + \lambda\alpha(\rho-2)) - 2\mu\lambda]h_L + \lambda\rho(1-\alpha + 2\lambda\rho\alpha)h_H\} \\ b_A &= \frac{2\alpha h_L[-\mu + \lambda(1-\rho)]}{(1-\alpha)^2} \\ c_A &= \frac{2\alpha h_H\lambda\rho}{(1-\alpha)^2} \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
a_B &= \frac{\alpha}{(h_L + h_H)(1 - \alpha)^3} \{ [2\lambda\alpha(1 - \alpha)(-\rho^2\lambda + 2\lambda\rho - 1 - \lambda - \rho)]h_L^2 + \\
&\quad + [\delta(2\lambda\rho\alpha^2 + 4\lambda\alpha - 4\lambda\rho\alpha + 1 - 2\lambda - 2\alpha + \alpha^2 - 2\lambda\alpha^2 + 2\lambda\rho) + \\
&\quad + 2\lambda(-\mu\alpha + 2\lambda\rho^2\alpha^2 + 2\lambda\rho\alpha - 2\lambda\rho^2\alpha - \alpha^2\mu - 2\lambda\alpha^2\rho + \lambda\alpha^2) + \\
&\quad + 2\mu(\alpha - \alpha^2 + \mu\alpha^2)]h_Lh_H + [\delta(-4\lambda\rho\alpha + 2\delta - \alpha^2 + 2\delta\alpha^2 + 2\lambda\rho\alpha^2 - \\
&\quad - 1 - 4\alpha\delta + 2\alpha + 2\lambda\rho) + 2\lambda\rho(\lambda\rho\alpha^2 - \lambda\rho\alpha - \alpha^2 + \alpha)]h_H^2 \} \\
b_B &= \frac{1}{(h_L + h_H)} \left\{ \frac{h_L^2}{1 - \alpha} [1 - 2\lambda(1 - \rho)] + \frac{h_Lh_H}{(1 - \alpha)^2} [2\alpha(\lambda - \mu) + \right. \\
&\quad \left. + (2\lambda\rho - 1 + 2\delta)(1 - \alpha)] \right\} \\
c_B &= \frac{1}{(h_L + h_H)} \left\{ \frac{h_H^2}{1 - \alpha} (1 - 2\lambda\rho - 2\delta) + \frac{h_Lh_H}{(1 - \alpha)^2} [2(\lambda - \mu\alpha) - \right. \\
&\quad \left. - (2\lambda\rho + 1)(1 - \alpha)] \right\}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
a_C &= \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^3} \{ [\lambda(1 - \alpha)(1 - \rho) + 2\lambda^2\alpha(1 - \rho)^2]h_L + \\
&\quad + [(1 - \alpha)(\mu + \lambda\rho) + 2\mu^2\alpha + 2\lambda\rho(\lambda\rho\alpha - \mu\alpha - \mu)]h_H \} \\
b_C &= \frac{2\alpha h_L \lambda(1 - \rho)}{(1 - \alpha)^2} \\
c_C &= \frac{2\alpha h_H (-\mu + \lambda\rho)}{(1 - \alpha)^2}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
d &= \frac{h_L}{1 - \alpha} \\
e &= \frac{h_H}{1 - \alpha}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

where $\delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ is a parameter that defines the set of points such that $G(x_L, (h_L/h_H)x_L + \delta) = 0$, and the linear relation between x_L and x_H inside the argument of this equation is obtained setting equation (2.14) to zero. Parameters $\underline{\delta}$ and $\bar{\delta}$ are given by:

$$\underline{\delta} = \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ \left[\frac{1 - \alpha}{2} - \lambda\rho \right] + \frac{h_L}{h_H} \left[-\frac{1 - \alpha}{2} + \lambda(1 - \rho) - \alpha\mu \right] \right\} \tag{2.19a}$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ \left[\frac{1 - \alpha}{2} - \lambda\rho + \alpha\mu \right] + \frac{h_L}{h_H} \left[-\frac{1 - \alpha}{2} + \lambda(1 - \rho) \right] \right\}. \tag{2.19b}$$

It is easy to see that

$$\delta \rightarrow \underline{\delta} \Rightarrow J_B(\delta) \rightarrow J_A \text{ and } G_B(\delta) \rightarrow G_A \tag{2.20}$$

$$\delta \rightarrow \bar{\delta} \Rightarrow J_B(\delta) \rightarrow J_C \text{ and } G_B(\delta) \rightarrow G_C \tag{2.21}$$

So, three regions delimited by the straight lines

$$x_H = \frac{h_L}{h_H} x_L + \bar{\delta} \quad (2.22a)$$

$$x_H = \frac{h_L}{h_H} x_L + \underline{\delta} \quad (2.22b)$$

arise, where for each region a suitable value for u minimizes 2.9. In next chapter, this solution is explored in more detail, and some possible choices for protocol u are analysed, including the possibility of chaotic behavior for the expected values of state variables x_L and x_H .

3 Protocols

3.1 Introduction

In this chapter, three different optimal protocols will be analyzed. From now on only the (long run) stationary case $\mu = \lambda$ will be considered. If, additionally, it is assumed $\lambda = 1$, dynamics becomes completely one-dimensional. To see this, substitute $\lambda = \mu = 1$ in Table 1. Results are shown in Table 2. Notice that the sum $e_L + e_H$ equals zero anywhere probabilities are positive, implying the sum of (2.8a) and (2.8b) to be constant for all t :

$$x_L(t) + x_H(t) = x_L(0) + x_H(0) = \sigma_0 \quad (3.1)$$

This equation is a downward slope straight line in (x_L, x_H) plane with -1 slope passing through $(x_L(0), x_H(0))$, as Figure 1 shows.

		e_H		
	-1	0	1	f_{e_L}
e_L	-1	0	0	$\rho(1-u)$
	0	0	$(1-\rho)(1-u) + \rho u$	$(1-\rho)(1-u) + \rho u$
	1	$(1-\rho)u$	0	$(1-\rho)u$
f_{e_H}	$(1-\rho)u$	$(1-\rho)(1-u) + \rho u$	$\rho(1-u)$	1

Tabela 2 – Joint probability distribution of e_L and e_H with $\lambda = \mu = 1$. Marginal distributions are also displayed.

Figure 1 also shows regions A, B and C delimited by the straight lines:

$$x_H = \frac{h_L}{h_H} x_L + \bar{\delta} \quad (3.2a)$$

$$x_H = \frac{h_L}{h_H} x_L + \underline{\delta} \quad (3.2b)$$

where, as shown in Cajueiro e Maldonado (2008) and Chapter 2, three regions arise with different regimes: in A, $u = 0$; in B, u is any function $u: B \rightarrow [0, 1]$ and in C, $u = 1$. Here, $\underline{\delta}$ and $\bar{\delta}$ are given by equations (2.19).

Cajueiro e Maldonado (2008) analyzed the constant protocol function $u = \rho + k$, $k > 0$, and found that the expected value $E_t[x(t+1)]$ follows a dynamics topologically conjugate to the translation in the circle (see Melo e Strien (2012)), which exhibits a complex behavior. Depending on system parameters, this behavior can be quite complicated, but its dynamics cannot be considered chaotic in the sense of Li e Yorke (1975). However, other protocols are possible.

Since dynamics is essentially one-dimensional (see (3.1)), it suffices analyze only one queue, e.g., H . Its size will be denoted as $x_t = x_H(t)$.

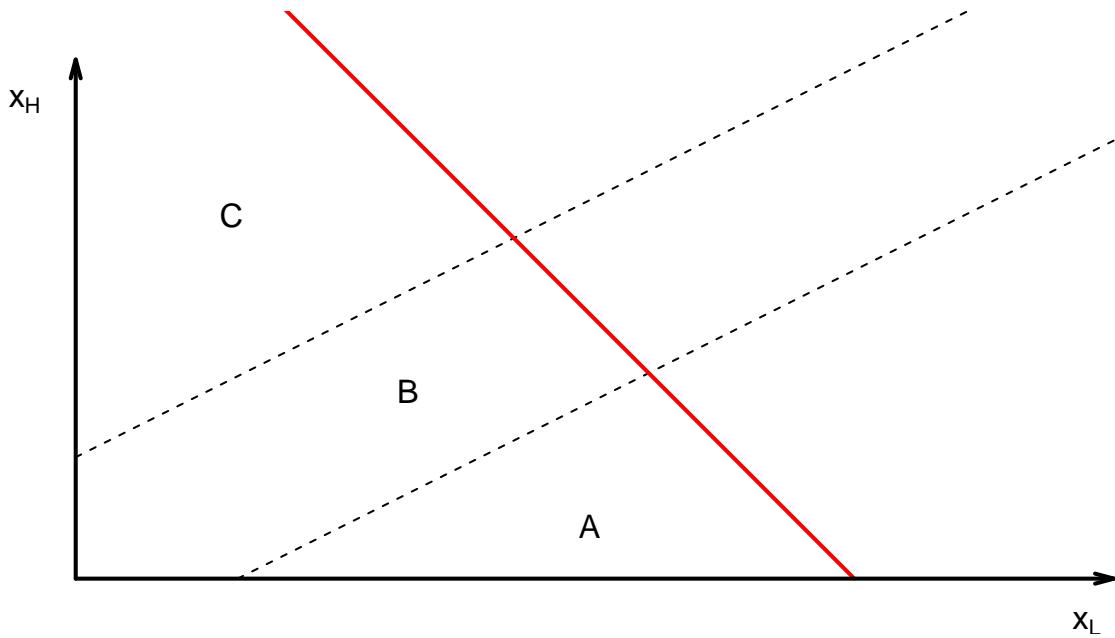


Figura 1 – Plane $x_L - x_H$ showing regions A, B and C delimited by dashed lines and the solid straight line, given by (3.1), where dynamics occurs.

The protocol proposed in [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#) is given by:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ \rho + k & \text{if } x \in B \text{ and } k \in [-\rho, (1-\rho)] \\ 1 & \text{if } x \in C \end{cases} \quad (3.3)$$

Two protocols that will be shown to exhibit chaotic behavior are given by the following equations:

$$u_+(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ \min \left[\max \left(\frac{1-k}{x_A} x + k, 0 \right), 1 \right] & \text{if } x \in B \text{ and } k \geq 1 \\ 1 & \text{if } x \in C \end{cases} \quad (3.4)$$

$$u_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ \min \left[\max \left(\frac{k}{x_A} x - k, 0 \right), 1 \right] & \text{if } x \in B \text{ and } k \geq 0 \\ 1 & \text{if } x \in C \end{cases} \quad (3.5)$$

where $x_A = \frac{h_H \delta + h_L \sigma_0}{h_H + h_L}$ is the point that separates regions A and B. These equations represent optimal policies for (2.4) with $\lambda = \mu = 1$ given the cost function (2.3). The expected value of x_{t+1} may be written, for these protocols, as

$$E_t[x_{t+1}] = x_t + \rho - u \quad (3.6)$$

$$E_t[x_{t+1}] = x_t + \rho - u_+ \quad (3.7)$$

$$E_t[x_{t+1}] = x_t + \rho - u_- \quad (3.8)$$

Substituting equations (3.3), (3.4) and (3.5) into equations (3.6), (3.7) and (3.8), respectively, leads to the following dynamic equations:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t + \rho & \text{if } x_t \leq x_A \\ x_t - k & \text{if } x_A < x_t < x_C \text{ and } k \in [-\rho, (1-\rho)] \\ x_t + \rho - 1 & \text{if } x_t \geq x_C \end{cases} \quad (3.9)$$

$$x_{t+1}^+ = \begin{cases} x_t^+ + \rho & \text{if } x_t^+ \leq x_A \\ \left(1 + \frac{k-1}{x_A}\right)x_t^+ + \rho - k & \text{if } x_A < x_t^+ < x_{B+} \text{ and } k \geq 1 \\ x_t^+ + \rho - 1 & \text{if } x_t^+ \geq x_{B+} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$x_{t+1}^- = \begin{cases} x_t^- + \rho & \text{if } x_t^- \leq x_A \\ \left(1 - \frac{k}{x_A}\right)x_t^- + \rho + k & \text{if } x_A < x_t^- < x_{B-} \text{ and } k \geq 0 \\ x_t^- + \rho - 1 & \text{if } x_t^- \geq x_{B-} \end{cases} \quad (3.11)$$

where $x_{B+} = \min\left[\frac{k}{k-1}x_A, x_C\right]$, $x_{B-} = \min\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)x_A, x_C\right]$, $x_C = x_A + \frac{\alpha}{1-\alpha}$ and α is the discount factor.

For all these protocols there is a special parameter k . Basically, k controls the slope and location of the function $u: B \rightarrow [0, 1]$, which is linear in all cases considered. This parameter strongly influences model dynamics. Notice that, depending on k , there are truncations at points x_{B+} and x_{B-} . This is because $u \in [0, 1]$, and if it goes outside this interval, it is set to the closer value in the interval, causing a “degeneration” of policies inside region B. This makes policies in region B where $x > x_{B+}$ or $x < x_{B-}$ equal policies in regions A or C, depending on each case.

The dynamics of equations (3.9), (3.10) and (3.11) will be analysed in the following sections.

3.2 The Constant Protocol

In Cajueiro e Maldonado (2008), the authors considered protocol (3.3), which is constant over region B. If $k = 0$, each point in region B represents a fixed point. It is easy to see that if $x_t \in A$ or $x_t \in C$, next iterates will soon or later reach region B and then the system stops there. Time evolution and cobweb diagram for this situation are shown in Figure 2.

Notice that x values are increased arithmetically by $\rho = 0.4$ at each iteration in region A and immediately stops after reaching region B at $x = 29.6$.

For positive k values, the behavior is more complicated. Actually, as observed in Cajueiro e Maldonado (2008), this dynamics is topologically conjugate to the translation in the circle (Melo e Strien (2012)) and the system follows a limit cycle of period $p + q$ if $\frac{\rho}{k} = \frac{p}{q}$ is a irreducible ratio representation of a rational number. Negative k values are symmetric to positive ones and dynamics is qualitatively the same. As an example, consider $\rho = 0.4$ and $k = 0.3$, whose irreducible ratio representation is $\frac{\rho}{k} = \frac{4}{3}$. These parameters imply a periodic motion with period $p + q = 7$, and its dynamics is shown in Figure 3.

If the ratio $\frac{\rho}{k}$ is irrational, the motion is quasi-periodic and never exactly repeats itself (Hilborn (2000)). Since rational numbers have Lebesgue measure zero, its fair to say that the “typical” case is quasi-periodic. But, since rationals are also dense in \mathbb{R} , and because computers have finite precision, it is impossible to “see” a really aperiodic trajectory through simulation. Figure 4 shows time evolution and cobweb diagram for equation 3.9 with $\rho = 0.4$ and $k = 0.1791111111111111$, which have a very large period (actually, the period is 17,911,111,111,111,115). Notice that the trajectory seems periodic, but a closer look shows that it is aperiodic in this 100 points simulation.

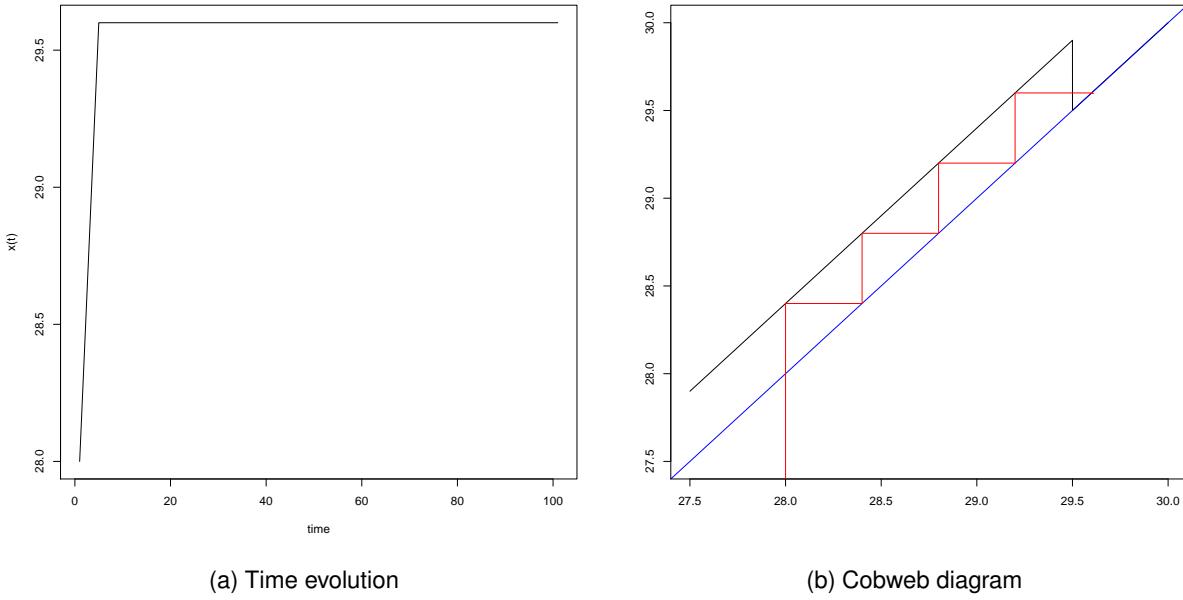


Figura 2 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.9) with $k = 0$. Parameter values are $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 28$ and $\sigma_0 = 99$.

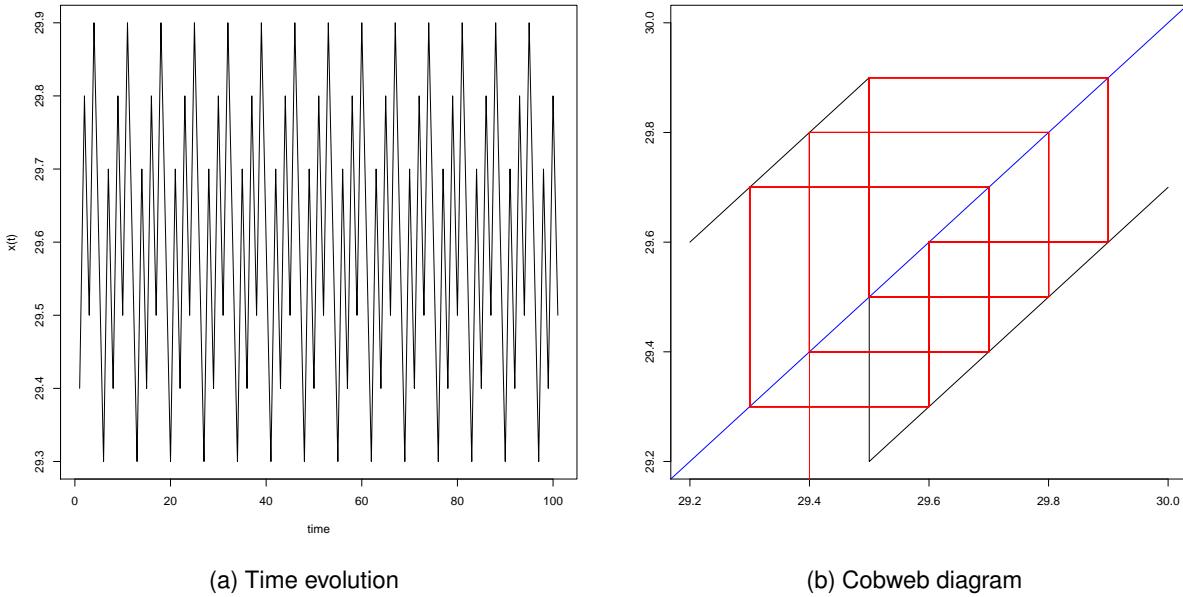


Figura 3 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.9) with $k = 0.3$. Parameter values are $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.4$ and $\sigma_0 = 99$.

This dynamics has some complexity, but it is not chaotic in a mathematical sense. The model (3.9) lacks some properties that are associated with chaotic systems. This will be shown in next chapter. As an illustration, Figure 5 shows time evolution for two trajectories starting at close different points. The system lacks sensitive dependence on initial conditions. Yet, sensitive dependence on initial conditions is regarded as the main signature of chaos.

A way to see this lack of sensitivity to initial conditions is to calculate the Lyapunov exponents for

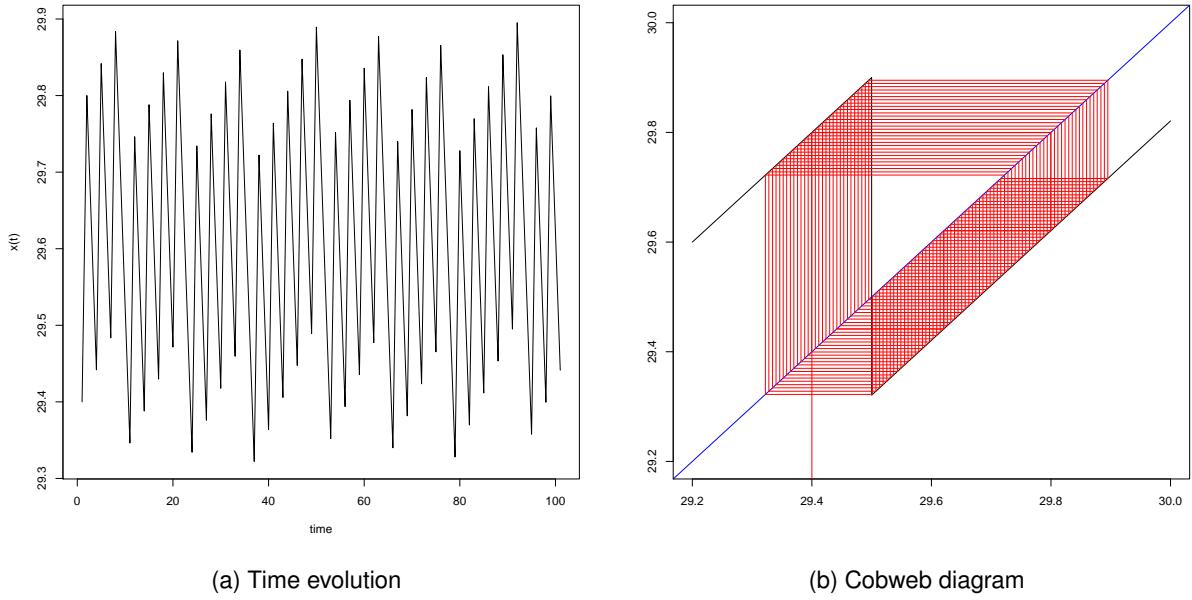


Figura 4 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.9) with $k = 0.1791111111111111$. Parameter values are $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.4$ and $\sigma_0 = 99$. Period is 17,911,111,111,111,115.

this system. Using the equation

$$\lambda = \frac{1}{n} \left(\ln|f'(x_0)| + \ln|f'(x_1)| + \cdots + \ln|f'(x_{n-1})| \right) \quad (3.12)$$

for the Lyapunov exponent of a trajectory $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, it is clear that this value and its average over any set of trajectories is zero for all n . So, this system does not have sensitive dependence on initial conditions. For details, see [Hilborn \(2000\)](#).

3.3 The Positive Slope Protocol

Protocol (3.4) has a negative slope in region B and leads to a positive slope along the same region for equation (3.10). This positive slope is greater than 1 if $k > 1$ and, in this case, it is responsible for a very complicated dynamics. If $k = 1$, dynamics in region B becomes the same as in region C and the system behaves like in Section 3.2, with dynamics depending on the ratio $\frac{\rho}{1-\rho}$. So, only the $k > 1$ case will be considered here.

Dynamic equation (3.10) is discontinuous at x_A and x_C . Discontinuous maps are more complicated than continuous ones, but here the system is piecewise-linear, and the literature for this class of systems is relatively mature (see, e.g., [Bernardo et al. \(2008\)](#)).

As in Section 3.2, regions A and C have no fixed points and, once the system is in one of them, it is “pushed back” into region B. In this region there exists one fixed point, given by equation $x^* = \left(1 + \frac{k-1}{x_A}\right)x^* + \rho - k$, whose solution is $x^* = \frac{k-\rho}{k-1}x_A$. An important fact about this fixed point is that it is unstable, because the derivative of the map evaluated at it, $\left(1 + \frac{k-1}{x_A}\right)$, is greater than 1 (see [Hilborn \(2000\)](#) and Chapter 4). So, this is a repelling fixed point for trajectories close to it and if $x_0 < x^*$, trajectory goes to region A direction. Otherwise, if $x_0 > x^*$, trajectory goes to region C direction. Finally, if $x_0 = x^*$, the system stays there. Figure 6 shows situations where trajectory goes to A or C.

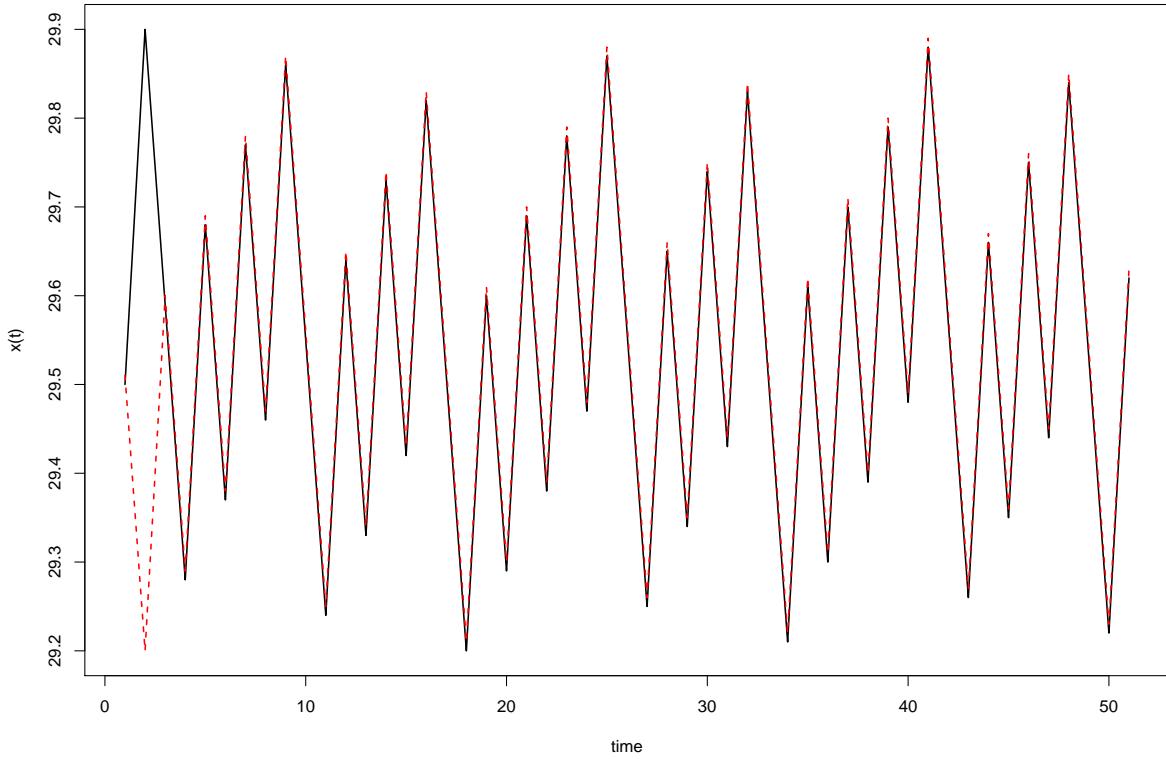


Figura 5 – Time evolution of (3.9) showing trajectories starting at 29.5 (solid line) and 29.51 (dashed line). Both are very close to each other even after 50 iterations. Parameter values are $k = 0.31$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$ and $\sigma_0 = 99$. Period is 35.

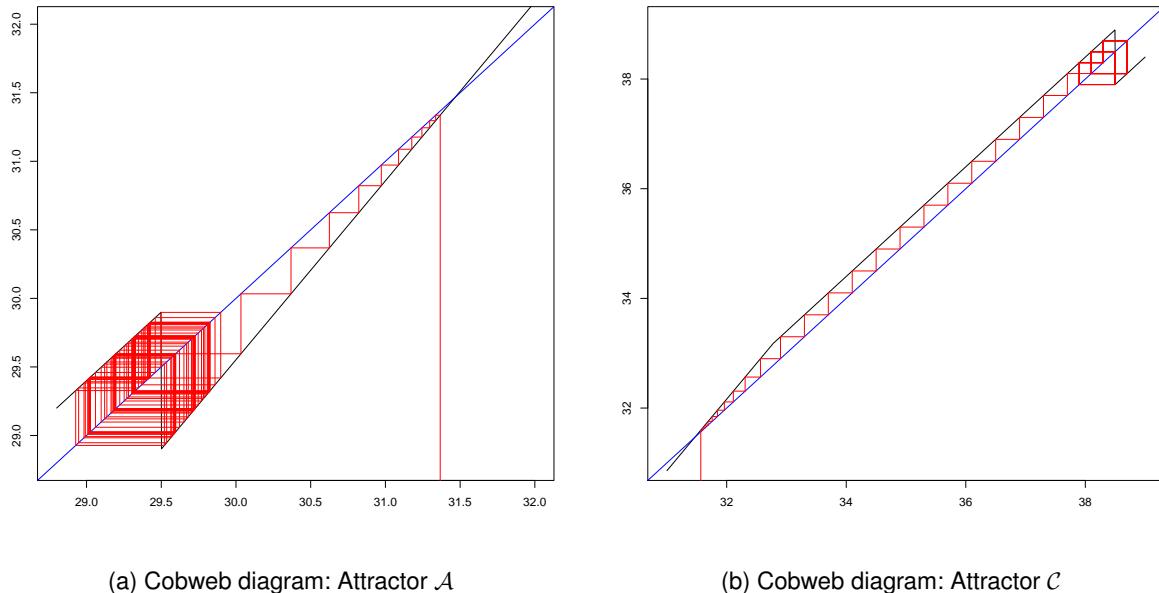


Figura 6 – Cobweb diagrams for equation (3.10). In 6a, $x_0 = \frac{k-\rho}{k-1}x_A - 0.1$ and in 6b, $x_0 = \frac{k-\rho}{k-1}x_A + 0.1$. Parameter values are $k = 10$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$ and $\sigma_0 = 99$.

Figure 6 shows some interesting properties of (3.10). There are two attractors for this map: one between regions A and B, now called attractor \mathcal{A} , and another between regions B and C, now called

attractor \mathcal{C} . Trajectories converge to either attractor, \mathcal{A} or \mathcal{B} , depending on the signal of $x_0 - x^*$. Attractor \mathcal{A} has a very complicated dynamics, which will be shown to be chaotic. Attractor \mathcal{C} has a periodic dynamics. Chaotic behavior of attractor \mathcal{A} is due to a greater than 1 slope of the map in region B. Notice that, because k is not low enough, region B in attractor \mathcal{C} has slope 1, leading to a periodic dynamics as described in Section 3.2.

Figure 7 displays the chaotic nature of trajectories in attractor \mathcal{A} . A comparison with Section 3.2 plots shows how a greater than 1 slope leads to a more complicated behavior. Dynamics in Figure 7 seems completely aperiodic. Also, it has sensitive dependence on initial conditions. Figure 8 shows two trajectories diverging after only 20 iterations even starting at points differing by only 0.00001.

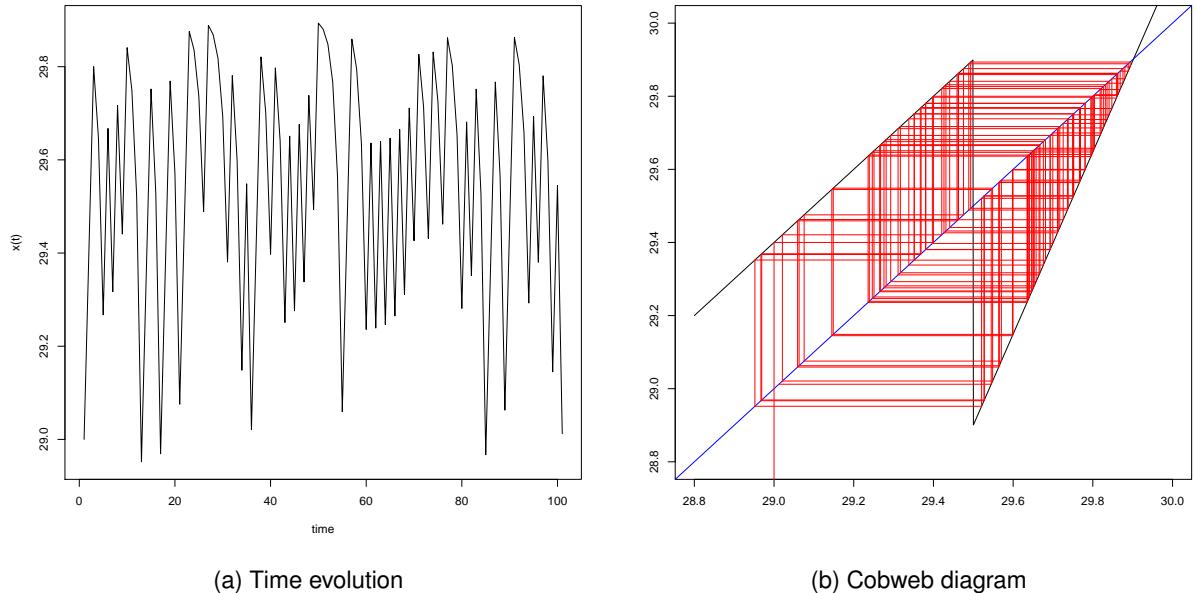


Figura 7 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.10). Parameter values are $k = 45$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29$ and $\sigma_0 = 99$.

It is worth noting that, if $x^* < x_A + \rho$, the fixed point x^* falls “inside” the attractor \mathcal{A} and, eventually, trajectories will escape to attractor \mathcal{C} . Figure 9 illustrates this situation. This happens because the attractor \mathcal{A} is chaotic. Moreover, every point within interval $[x_A + \rho - 1, x_A + \rho]$ can be arbitrarily approximated by points in trajectories initiated at almost all (in Lebesgue sense) points of the basin of attraction of \mathcal{A} . So, points x_n such that $x^* < x_n \leq x_A + \rho$ will be repelled to attractor \mathcal{C} .

In Chapter 4, a more formal analysis of the properties of map (3.10) is done.

3.4 The Negative Slope Protocol

Protocol (3.5) has a positive slope in region B and leads to a negative slope along the same region for equation (3.11) if $k > x_A$. If $k = 0$, dynamics in region B is the same as in region A, so trajectories go to attractor \mathcal{C} and the system behavior can be described as in Section 3.2. If $k > 0$, the derivative of the map in region B is less than 1 and a fixed point given by $x^* = (1 + \frac{\rho}{k})x_A$ arises for $k \geq \frac{1-\alpha}{\alpha} \rho x_A$. This fixed point has a derivative whose modulus is less than 1 if $\frac{1-\alpha}{\alpha} \rho x_A \leq k < 2x_A$, leading to a stable fixed point as shown in Figures 10 and Figure 11. The emergence of this fixed point causes attractor \mathcal{C} to collapse and not to be an attractor anymore.

For $k = 2x_A$ the slope is exactly -1 and trajectories do not converge to x^* . Actually, after reaching

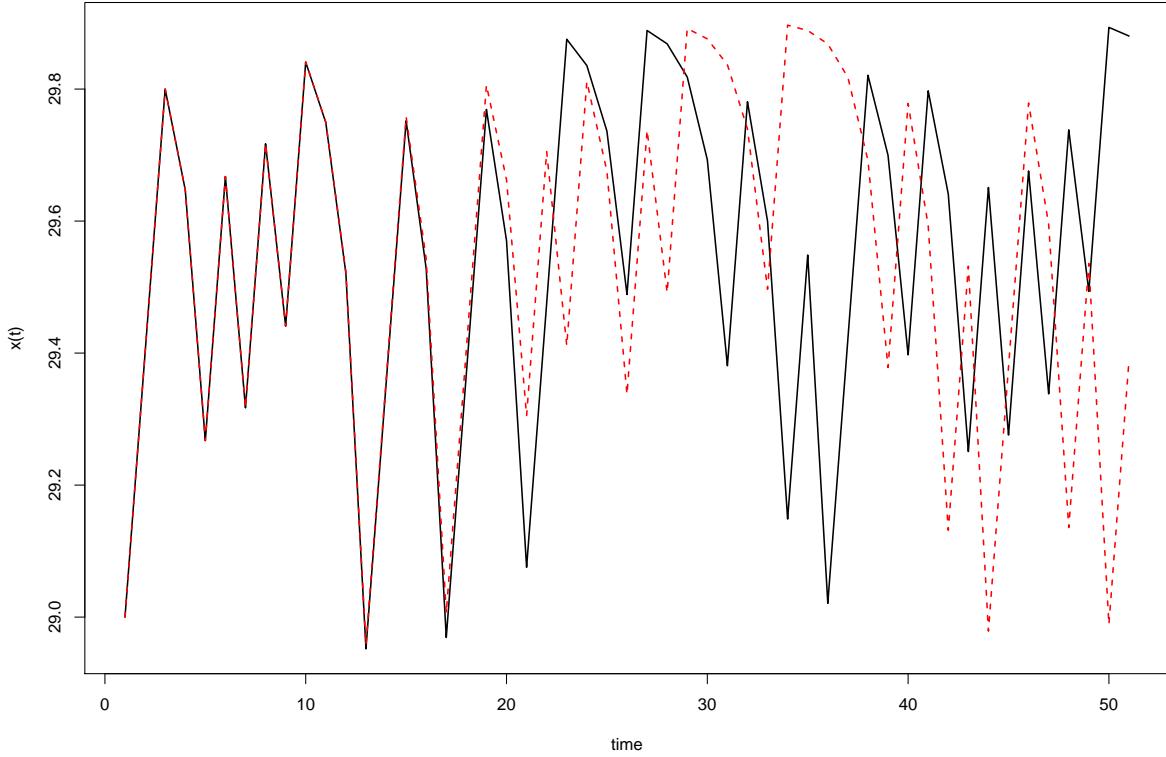


Figura 8 – Time evolution of (3.10) showing trajectories starting at 29 (solid line) and 29.00001 (dashed line). Both start much closer than in Figure 5, but here trajectories are completely different after only 20 iterations. Parameter values are $k = 45$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$ and $\sigma_0 = 99$.

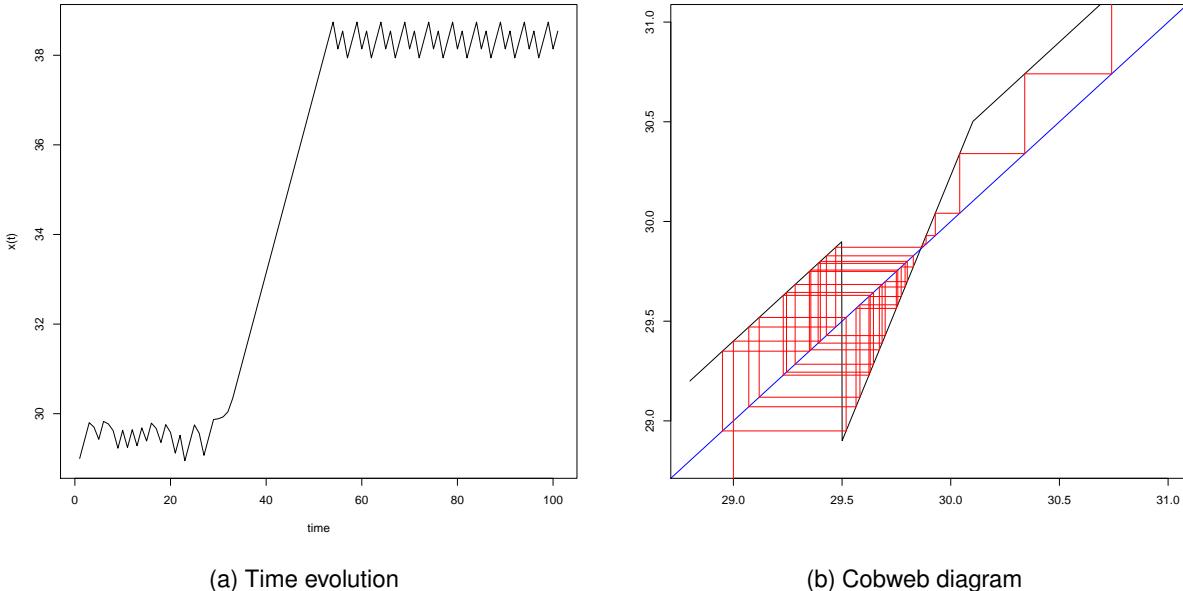


Figura 9 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.10). Parameter values are $k = 50$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29$ and $\sigma_0 = 99$. These parameters imply $x^* = 29.86122 < 29.9 = x_A + \rho$, leading trajectories to escape from \mathcal{A} after 30 iterations.

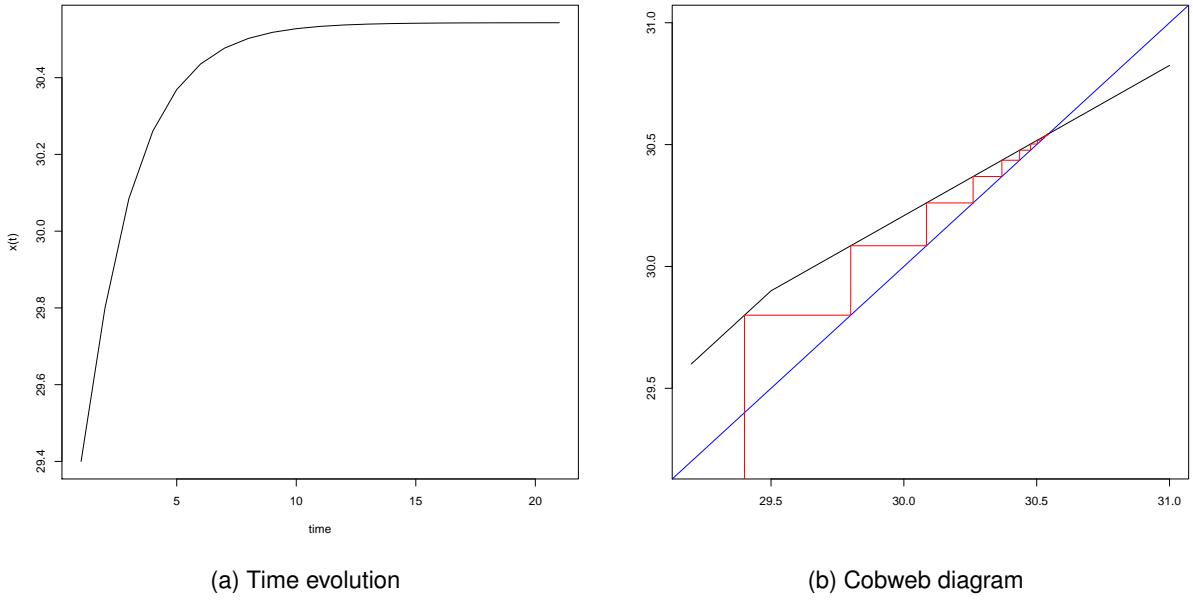


Figura 10 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Parameter values are $k = \frac{1-\alpha}{\alpha} \rho x_A + 10 < x_A$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.4$ and $\sigma_0 = 99$.

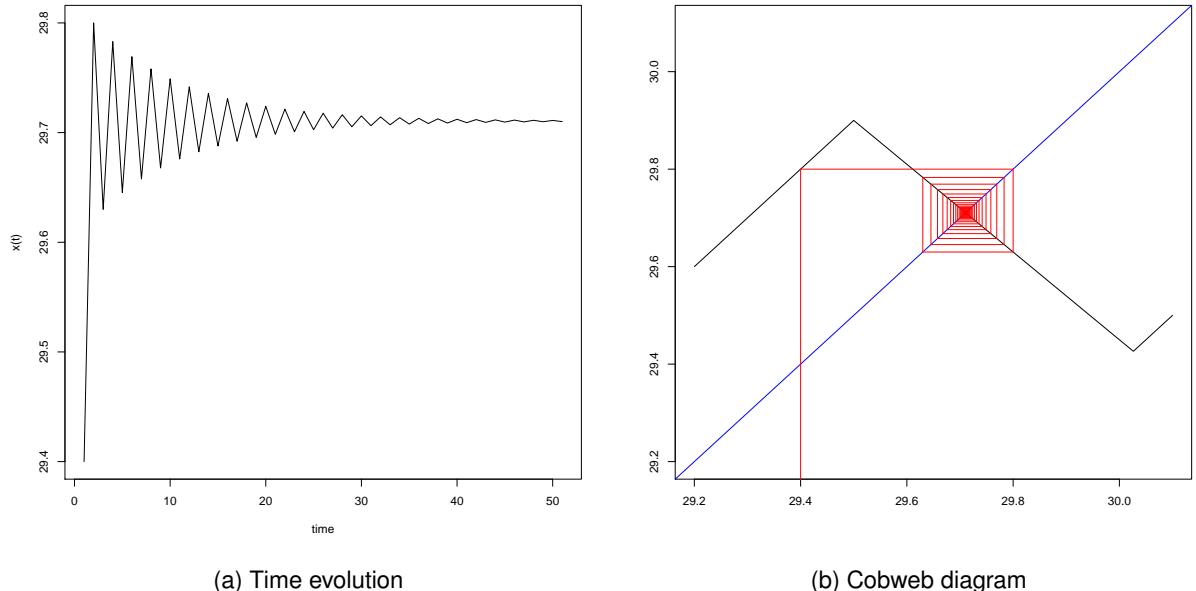


Figura 11 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Parameter values are $k = 1.9x_A$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.4$ and $\sigma_0 = 99$. This k value leads to a negative slope so that stable trajectories oscillate around the fixed point before converging.

region B, system oscillates in a period two orbit forever. Figure 12 shows this periodic behavior, which is a frontier between stable trajectories and chaos. If $k > 2x_A$, the slope of equation (3.11) in region B is less than -1. So, the fixed point x^* becomes unstable.

For $2x_A < k < nx_A$, where n is an integer such that $\frac{\rho}{n}$ is the irreducible ratio representation of ρ , trajectories are chaotic. Why this happens will be analysed in Chapter 4. As an example, take $\rho = 0.4$ such that $\rho = \frac{2}{5}$ and, consequently, $n = 5$. A bifurcation diagram for this situation is shown in Figure 13

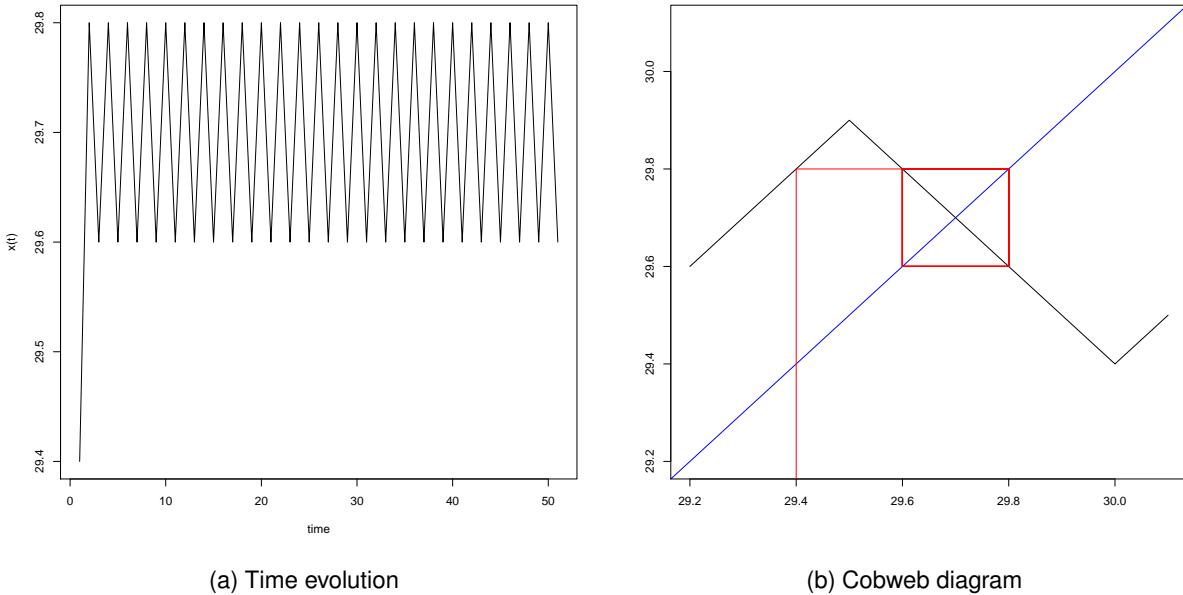


Figura 12 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Parameter values are $k = 2x_A$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.4$ and $\sigma_0 = 99$. This k value is a frontier between stable and chaotic regimes.

where two vertical lines at $k = 2x_A$ and $k = 5x_A$ highlight the chaotic region between them. Various features of the dynamics can be seen in this figure, some of which will be more carefully analyzed in Chapter 4. The main characteristics are the bifurcation points at $k = 2x_A$ and $k = nx_A$. While the former depends linearly on x_A , the latter depends on ρ in a non-trivial manner. Actually, for almost all ρ values, n does not exist and chaos can be found for arbitrarily high k values. Moreover, as can be seen in Figure 13, for $k > nx_A$ there is a stable period 5 orbit for each k which, by Sharkowskii's theorem (Hilborn (2000)), implies the existence of orbits of any period above 5 in the so called Sharkowskii ordering. In particular, there are chaotic orbits for all $k > nx_A$. More on this fact will be discussed in Chapter 4.

Another important feature is that, for this system, chaos is robust. That is to say, there are no stable periodic windows for $2x_A < k < nx_A$. Of course, there are infinite unstable periodic orbits for each k value inside this interval (see Hilborn (2000)), and one such example is shown in Figure 14 for $k = 3x_A$ and $n = 5$.

There are some interesting features about the period 4 orbit shown in Figure 14. This orbit is given by $29.3 \mapsto 29.7 \mapsto 29.5 \mapsto 29.9 \mapsto 29.3 \mapsto \dots$, and it is easy to check that it is periodic. As will be shown in Chapter 4, it is unstable because the point 29.7 belongs to a region where the map has a less than -1 slope. Besides it being periodic, simulating too much points on a computer leads to an anomalous behavior due to a combination of floating point error and the inherent instability of the orbit, as can be seen in Figure 15. This happens because the binary representation of the initial point 29.3 is not finite (actually, it is 11101.01001100110011...). So, the tiny floating point operations errors are amplified by this chaotic map, and the instability of the period 4 orbit becomes clear.

Finally, to illustrate the sensitivity to initial conditions of equation (3.11), two orbits with very close initial values are shown in Figure 16. Notice how they diverge after only 20 iterations starting with a difference of 0.00001.

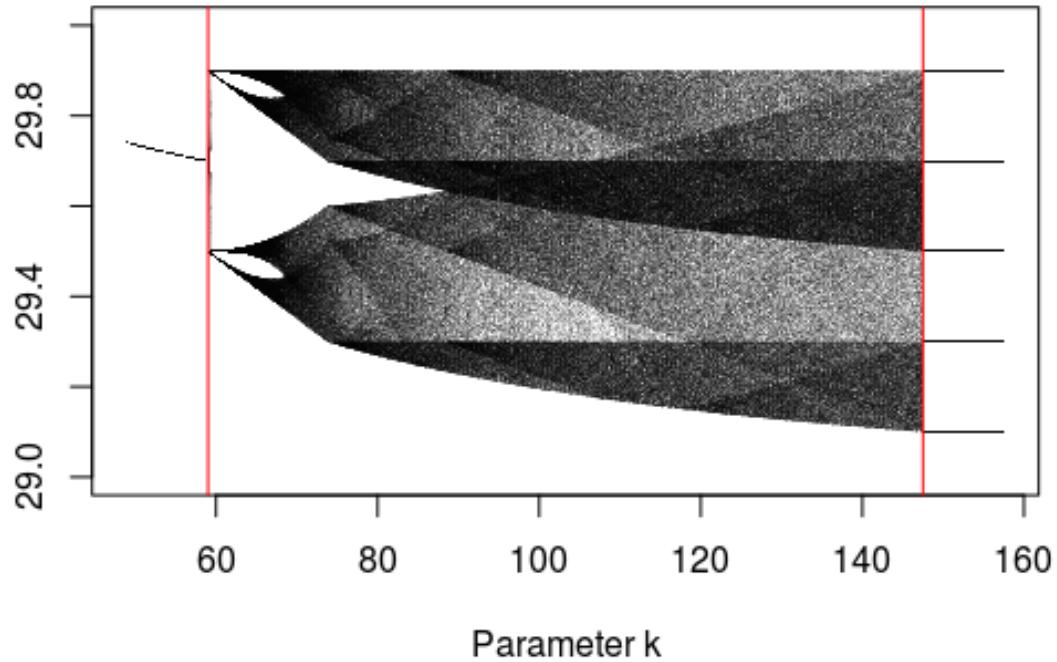


Figura 13 – Bifurcation diagram for (3.11). Vertical lines are $k = 2x_A$ and $k = 5x_A$. Parameter values are $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$ and $\sigma_0 = 99$.

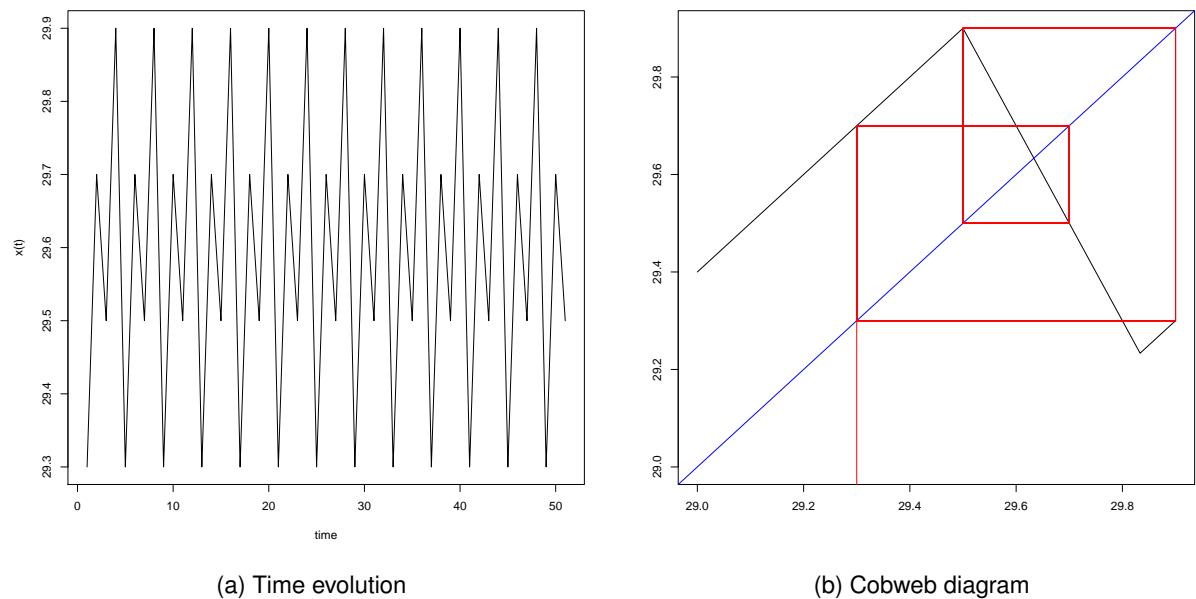


Figura 14 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Parameter values are $k = 3x_A$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.3$ and $\sigma_0 = 99$. This is an unstable period 4 orbit.

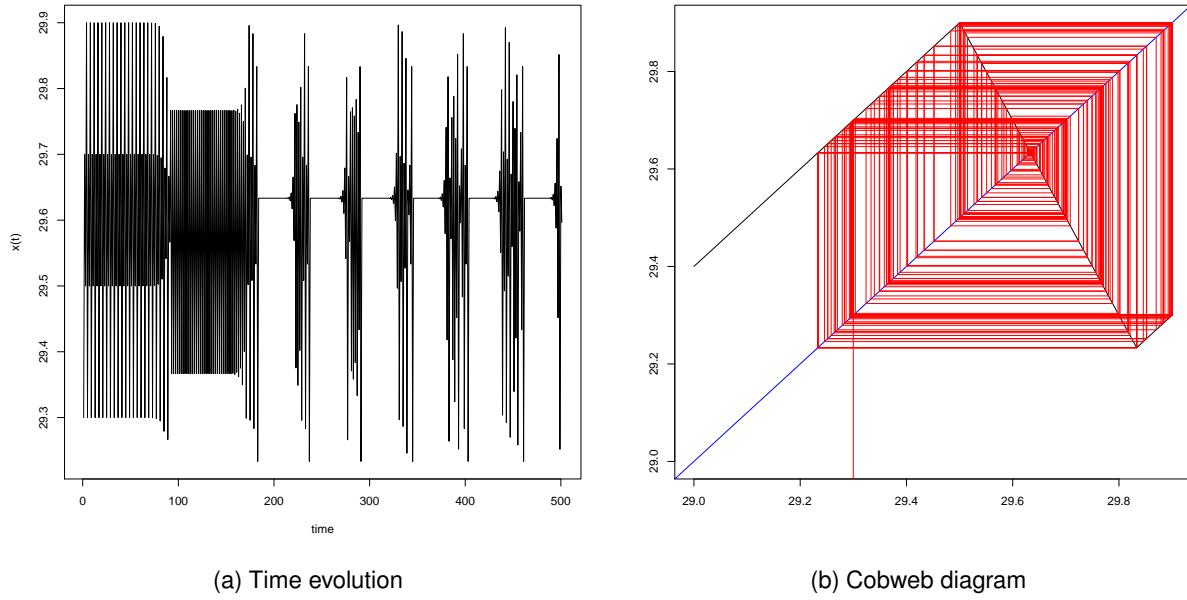


Figura 15 – Time evolution and cobweb diagram for equation (3.11). Parameter values are $k = 3x_A$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.3$ and $\sigma_0 = 99$. Deviations from the original period 4 orbit are caused by errors on computer floating point operations.

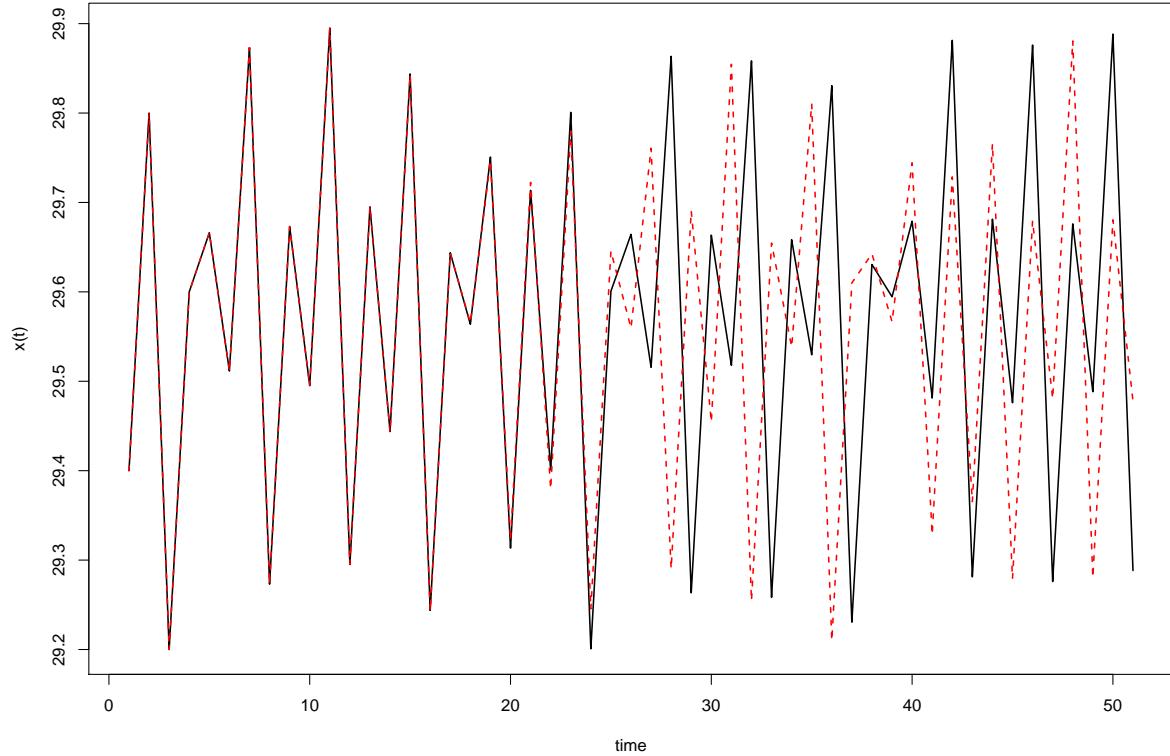


Figura 16 – Time evolution of (3.11) showing trajectories starting at 29.4 (solid line) and 29.40001 (dashed line). Both start much closer than in Figure 5 and trajectories are completely different after only 20 iterations. Parameter values are $k = 3x_A + 10$, $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$ and $\sigma_0 = 99$.

3.5 Conclusion

In this chapter the dynamic consequences of protocols (3.3), (3.4) and (3.5) were analyzed through simulations in a somewhat informal manner. Numerical simulations suggest that the map presented in equation (3.9) does not have sensitivity to initial conditions, a property regarded as the main characteristic of a chaotic system. Figures 8 and 16 strongly suggest that this sensitivity is present on systems (3.10) and (3.11), and some analysis of which regions of parameter values leads to chaos were carried out. These properties are analyzed in a more formal manner on next chapter.

4 Chaos

4.1 Some Properties of One-dimensional Maps

In this chapter, the chaotic behavior of equations (3.10) and (3.11) is analyzed in more detail and some analytical results are presented. To achieve this purpose some concepts are necessary. Let $f: I \rightarrow I$ be a one-dimensional map from some interval $I \subset \mathbb{R}$ to itself.

Definition 1. A point x^* is a **fixed point** of f if it satisfies $x^* = f(x^*)$.

A fixed point is called a **sink** or an **attracting fixed point** if points sufficiently close to x^* are attracted to x^* . A fixed point is called a **source** or a **repelling fixed point** if points sufficiently close to x^* are repelled from x^* . More precisely, x^* is a sink if exists $\epsilon > 0$ such that if $x \in (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon) \setminus \{x^*\}$ then $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = x^*$. Similarly, x^* is a source if exists $\epsilon > 0$ such that if $x \in (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon) \setminus \{x^*\}$ then exists k such that $f^{(k)}(x) \notin (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$. Here, $f^{(k)}(x)$ represents k -th iterate of f starting at x .

Next result is well known in dynamical systems literature.

Theorem 1. Let f be a smooth map on \mathbb{R} and x^* a fixed point of f . If $|f'(x^*)| < 1$, then x^* is a sink. If $|f'(x^*)| > 1$, then x^* is a source.

Demonstração. See Alligood, Sauer e Yorke (1996). □

Technically speaking, this result is valid where f is differentiable, and f does not need to be smooth on all its domain, as stated. But, if the trajectory contains points where f is non-differentiable, some care must be taken. One way to deal with this is to consider left and right derivatives, but calculations get more involved. Since for all maps considered here the non-differentiability points are finite and at most two, is simpler to consider only trajectories that do not contain these points. From now on, this assumption is implicit. Finally, here non-differentiable points have zero measure for all iterations of the map and, if they are included, conclusions are the same.

Another important observation concerns the stability of periodic orbits. Let $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ be a period n orbit of the map f . It is easy to see that $x_i = f^{(n)}(x_i)$ for all $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. In other words, the points of a period n orbit are fixed points of the iterated map $f^{(n)}$. Applying the chain rule to $f^{(n)}(x_i)$ leads to the following equation:

$$(f^{(n)})'(x_i) = f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{n-1}) \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (4.1)$$

Equation (4.1) shows that for every point of a periodic orbit, $(f^{(n)})'$ has the same value, and this value determines the stability of the orbit by Theorem 1. So, the following corollary applies:

Corollary 1. The periodic orbit $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ is a sink if

$$|f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{n-1})| < 1$$

and a source if

$$|f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{n-1})| > 1$$

Corollary 1 gives a simple criteria to determine the stability of a periodic orbit: If $|f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{n-1})| < 1$, then the orbit is a sink, and nearby trajectories are attracted to the periodic orbit $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. So, this orbit is stable. Otherwise, if $|f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{n-1})| > 1$, then the orbit is a source, and nearby trajectories are repelled from the periodic orbit $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. So, this orbit is unstable.

Finally, an important fact is that the only attractors that exist in non-circular one-dimensional maps of an interval are stable periodic orbits or chaotic attractors (see [Bernardo et al. \(2008\)](#) and [Melo e Strien \(2012\)](#)). Circular maps are those with a circular state space, like map (4.8), and they may show quasi-periodic motion.

4.2 Analysis of the Positive Slope Map

The positive slope map is given by equation (3.10), reproduced here for convenience:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_{t+1} + \rho & \text{if } x_t \leq x_A \\ \left(1 + \frac{k-1}{x_A}\right)x_t + \rho - k & \text{if } x_A < x_t < x_B \text{ and } k \geq 1 \\ x_t + \rho - 1 & \text{if } x_t \geq x_B \end{cases} \quad (4.2)$$

where $x_B = \min\left[\frac{k}{k-1}x_A, x_C\right]$, $x_A = \frac{h_H\delta + h_L\sigma_0}{h_H + h_L}$, $x_C = x_A + \frac{\alpha}{1-\alpha}$, and α is the discount factor.

The map is piecewise-linear and assuming $k > 1$, $x^* > x_A + \rho$, and $x_0 < x^*$ the trajectory remains trapped on attractor \mathcal{A} (see chapter 3), which is chaotic according to the following proposition:

Proposition 1. *The attractor \mathcal{A} is chaotic for all $k > 1$.*

Demonação. Let f be the map representing equation (4.2). That \mathcal{A} is an attractor is a consequence of $x^* > x_A + \rho$.

Supposing $x_0 < x^*$, x_0 is in the basin of attraction of \mathcal{A} , so trajectories starting at x_0 will remain in \mathcal{A} . There are no fixed points inside \mathcal{A} , so any trajectory have to pass through regions A and B. Actually, if $x_0 \in A$, the trajectory is $(x_0, x_0 + \rho, x_0 + 2\rho, \dots)$ eventually reaching region B. Once in region B, the trajectory is pushed back to region A.

The map slope in region A is 1 and in region B it is $\left(1 + \frac{k-1}{x_A}\right) > 1$, given that $k > 1$. Therefore, for any long enough trajectory $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$|f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_n)| > 1$$

because if $x_i \in A$, then $f'(x_i) = 1$ and, at least for one i , $f'(x_i) = \left(1 + \frac{k-1}{x_A}\right) > 1$.

In particular, every periodic trajectory in \mathcal{A} , if it exists, is unstable by corollary 1. Given that the only attractors that exist in non-circular one-dimensional maps are stable periodic orbits or chaotic attractors, the result follows. \square

Proposition 1 shows that if trajectories are attracted to \mathcal{A} , then dynamics is chaotic for all $k > 1$ allowable values. This means that chaos is a robust phenomenon in this map, because there are no periodic windows inside the chaotic region.

4.3 Analysis of the Negative Slope Map

Besides being continuous, the map in equation (3.11) is more complicated. Its equation is reproduced here for convenience:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t + \rho & \text{if } x_t \leq x_A \\ \left(1 - \frac{k}{x_A}\right)x_t + \rho + k & \text{if } x_A < x_t < x_B \text{ and } k \geq 0 \\ x_t + \rho - 1 & \text{if } x_t \geq x_B \end{cases} \quad (4.3)$$

where $x_B = \min\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)x_A, x_C\right]$, $x_A = \frac{h_H\delta + h_L\sigma_0}{h_H + h_L}$, $x_C = x_A + \frac{\alpha}{1-\alpha}$, and α is the discount factor. This map is related to the following map:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t + \rho & \text{if } x_t \leq x_A \\ x_t + \rho - 1 & \text{if } x_t > x_A \end{cases} \quad (4.4)$$

which is topologically equivalent to the translation in the circle, so as equation (3.9) (see Melo e Strien (2012)). Notice that map (4.4) is the limit for $k \rightarrow \infty$ of map (4.3). But, even for finite k , both maps can have equivalent dynamics. Suppose an orbit

$$(x_0, x_1, \dots) \text{ such that, } \forall i \in \{0, 1, 2, \dots\}, x_i \notin (x_A, x_B). \quad (4.5)$$

It is clear that this orbit is the same for maps (4.3) and (4.4), since only regions where $x_i \leq x_A$ or $x_i \geq x_B$ are visited, and in these regions both maps are the same. The existence of an orbit such as (4.5) can be established by a simple example. Suppose the following parameter values for equations (4.3) and (4.4):

$$\rho = 0.4 \quad (4.6a)$$

$$\alpha = 0.9 \quad (4.6b)$$

$$h_L = 10 \quad (4.6c)$$

$$h_H = 20 \quad (4.6d)$$

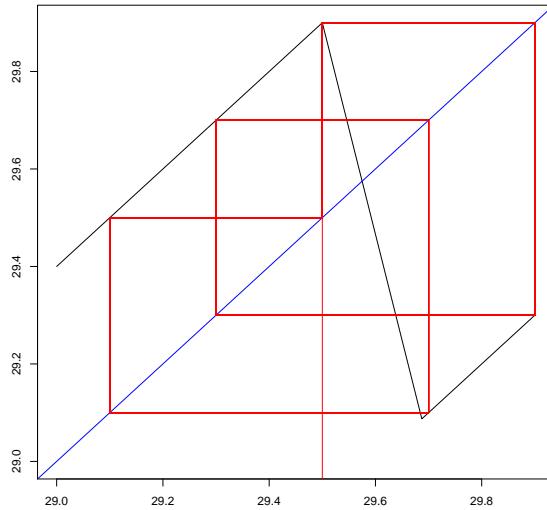
$$x_0 = 29.5 \quad (4.6e)$$

$$\sigma_0 = 99 \quad (4.6f)$$

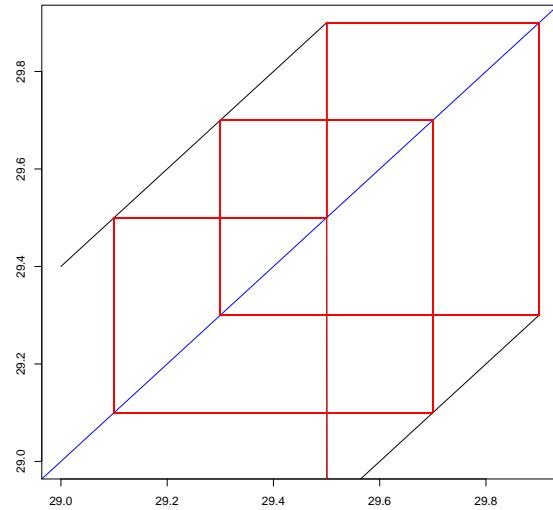
Figure 17 shows cobweb diagrams for equations (4.3) and (4.4) with parameters given by equations (4.6) and $k = 157.5$ for equation (4.3). Notice both period 5 trajectories given by same values (29.5, 29.9, 29.3, 29.7, 29.1, ...). Also, Figure 17 suggests that, for sufficiently low k , equation (4.3) cannot “sustain” this period 5 trajectory, since one of its points will fall inside the interval (x_A, x_B) . Actually, for $k = 137.5$, equation (4.3) becomes chaotic, as exhibited in Figure 18.

Suggestion given by Figure 17 is indeed true, and will be proved through some steps. First, notice that the equivalence of maps (4.3) and (4.4) for trajectories with property (4.5) permits analysis of such orbits by the translation in the circle map. As pointed out in chapter 3, trajectories for map (4.4) are related to ρ rationality. If ρ is rational and is represented by an irreducible ratio $\frac{p}{n}$, the motion is periodic with period n . If ρ is irrational, the motion is quasi-periodic. To see this, it is convenient to make the change of variables $y_t = x_t - x_A - \rho + 1$, such that the map (4.4) may be written as

$$y_{t+1} = \begin{cases} y_t + \rho & \text{if } y_t \leq 1 - \rho \\ y_t + \rho - 1 & \text{if } y_t > 1 - \rho \end{cases} \quad (4.7)$$

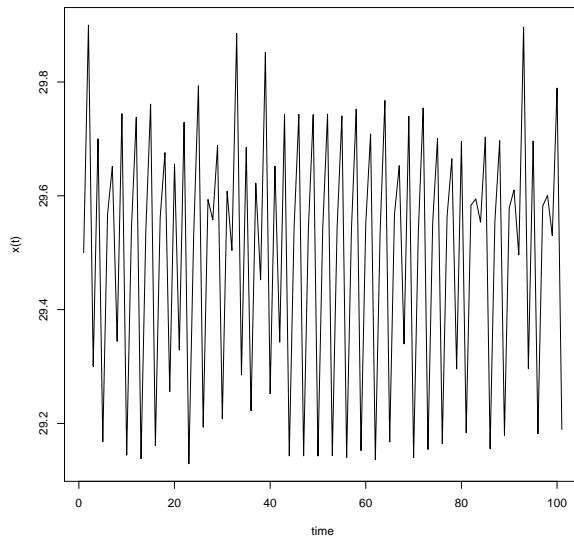


(a) Map (4.3)

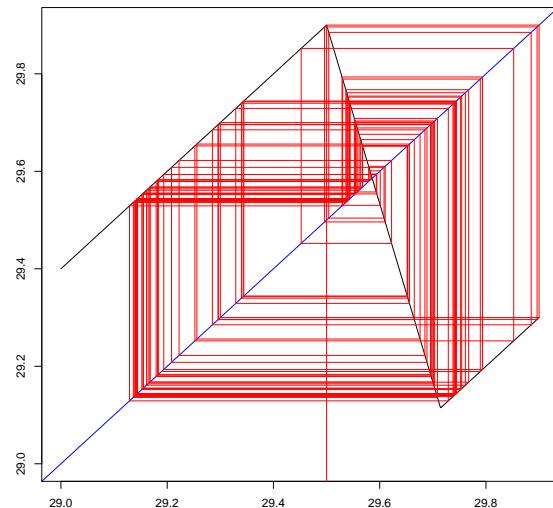


(b) Map (4.4)

Figura 17 – Cobweb diagrams for equations (4.3) and (4.4). Parameter values are $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.5$, $\sigma_0 = 99$ and, for equation (4.3), $k = 157.5$. Both trajectories are exactly the same.



(a) Time evolution



(b) Cobweb diagram

Figura 18 – Time evolution and cobweb diagrams for equation (4.3). Parameter values are $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.5$, $\sigma_0 = 99$, and $k = 137.5$.

which is a map $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ from unit interval to itself. More concisely:

$$y_{t+1} = y_t + \rho \bmod 1 \quad (4.8)$$

where $\bmod 1$ means to take only the fractionary part of the result.

Suppose $\rho = \frac{p}{n}$ is an irreducible ratio representation of ρ , assumed rational. Iterating equation

(4.8) n times leads to

$$y_{t+n} = y_t + n\rho \bmod 1 \quad (4.9)$$

which leads to

$$y_{t+n} = y_t + n\frac{p}{n} \bmod 1 = y_t \quad (4.10)$$

that is to say that map $f^{(n)}$ fixes all points in $[0, 1]$ and any orbit (x_0, x_1, \dots) is a period n orbit. If ρ is irrational, orbits are dense in $[0, 1]$, and this result is known as Jacobi's Theorem (see Devaney (2003)).

One important fact here is: if $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ is a period n orbit of map (4.7), then, for any x_i in this orbit, $x_i + \frac{1}{n} \bmod 1$ also belongs to the orbit. This is the result of next lemma.

Lemma 1. *Let $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ be a period n orbit of map (4.8) and $\rho = \frac{p}{n}$ an irreducible fraction. If $x_i \in \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, then exists an integer m such that $f^{(m)}(x_i) = x_i + \frac{1}{n} \bmod 1$.*

Demonstração. Since $f^{(m)}(x_i) = x_i + m\frac{p}{n} \bmod 1$, then the lemma affirms that $x_i + m\frac{p}{n} = x_i + \frac{1}{n} \bmod 1$ has a solution for integer m . Subtracting x_i leads to $m\frac{p}{n} = \frac{1}{n} \bmod 1$. This means that there is an integer r such that

$$m\frac{p}{n} = \frac{1}{n} + r. \quad (4.11)$$

Rearranging gives

$$mp - rn = 1. \quad (4.12)$$

From number theory (see Shokranian, Soares e Godinho (1994)), this equation has a solution for integers m and r if, and only if, p and n are coprime. But this is the case, since $\frac{p}{n}$ is irreducible. \square

Now, the main result of this section:

Proposition 2. *Map (4.3) is chaotic for all $k \in (2x_A, nx_A)$, where $\rho = \frac{p}{n}$ is an irreducible fraction representation.*

Demonstração. Suppose $k > 2x_A$. Thus, the unique fixed point $x^* = (1 + \frac{\rho}{k})x_A$ is unstable, since $|f'(x^*)| > 1$. Also, $|f'(x)| > 1$ for all $x \in (x_A, x_B)$. So, by Corollary 1, all stable periodic orbits cannot have points inside the interval (x_A, x_B) . Since in this case map (4.3) behaves like map (4.8), these periodic orbits have period n , where $\rho = \frac{p}{n}$ is a irreducible fraction representation.

Consider a period n stable orbit $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ and take $x_i \in S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ such that

$$x_i = \max\{x \in S; x \leq x_A\} \quad (4.13)$$

Notice that exists at least one $x_j \in S$ such that $x_j \geq x_B > x_A$. This fact together with Lemma 1 imply $x_i + \frac{1}{n} \in S$. By equation (4.13), $x_i \leq x_A < x_i + \frac{1}{n}$. Also, $x_B = (1 + \frac{1}{k})x_A = x_A + \frac{x_A}{k}$. Suppose $k < nx_A$. This implies $x_B = x_A + \frac{x_A}{k} > x_A + \frac{1}{n} \geq x_i + \frac{1}{n}$. So, $x_i + \frac{1}{n} \in (x_A, x_B)$, which contradicts the stability assumption for $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Thus, if $k \in (2x_A, nx_A)$, there are not stable periodic orbits on map (4.3).

Since only attractors that exist in non-circular one-dimensional maps are stable periodic orbits or chaotic attractors, the result follows. \square

Proposition 2 supposes a rational ρ . Of course, if ρ is irrational, orbits in map (4.7) are dense in $[0, 1]$ and any trajectory will eventually reach interval (x_A, x_B) , leading to chaos for all $k > 2x_A$.

Bifurcation diagram in Figure 13 shows the chaotic region delimited by vertical lines given by $k = 2x_A$ and $k = nx_A$. Notice that proposition 2 explains behavior for $k \in (2x_A, nx_A)$ but does not say

anything about what happens for $k \geq nx_A$ if ρ is rational. Figure 13 suggests that only periodic orbits remain, and indeed only period 5 orbits are visible on the graph.

As mentioned in section 3.4, Sharkowskii's theorem implies, for $k \geq nx_A$ and figure 13 orbits, the existence of orbits of any period above 5 in the Sharkowskii ordering of the integers (see Melo e Strien (2012)).

Definition 2. *The following ordering on the set of natural numbers is called **Sharkowskii ordering**:*

$$\begin{aligned} 3 &\prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 2n+1 \dots \\ \dots &\prec 6 \prec 10 \prec 14 \prec \dots \prec 2(2n+1) \dots \\ \dots &\prec 2^m 3 \prec 2^m 5 \prec \dots \prec 2^m (2n+1) \dots \\ \dots &\prec 2^n \prec 2^{n-1} \prec 2^{n-2} \prec \dots \prec 2 \prec 1 \end{aligned}$$

So, in Figure 13, Sharkowskii's theorem guarantees the existence of chaotic orbits for all $k \geq nx_A$ even for rational ρ . Why are they not visible in Figure 13? Someone may be tempted to say that these chaotic orbits are unstable, but this is meaningless, since chaotic orbits are unstable by definition. Certainly, period 5 orbits are stable, but why are they always reached in this example?

An important fact about Figure 13 is that it shows **asymptotic** behavior of the orbits. Before converging to period 5 orbits, trajectories behave like chaotic ones for a dense set of initial values. One example of such transient behavior is shown in figure 19.

This figure highlights an interesting property of map (4.3). For k values slightly above nx_A , the transient behavior is more persistent. This is due to the fact that the region (x_A, x_B) is almost $\frac{1}{n}$ in size. In fact, for figure 19 parameters, $x_B - x_A = 0.1998645 < 0.2 = \frac{1}{n}$. The tiny difference $d = 0.0001355014$ is the size of the interval close to x_A or x_B where stable periodic orbits have to pass through to remain stable, according to proposition 2. But, in numerical simulations, this tiny region is always reached for sufficiently long transients. This is probably due to the fact that the chaotic transient behavior have trajectories which approximate arbitrarily close all points inside the attractor. Studying the ergodic properties of map 4.3 may give a way to calculate the “expected” length of the chaotic transient before it converges to a periodic orbit. These observations about the behavior of map (4.3) are very interesting, but will not be proved here.

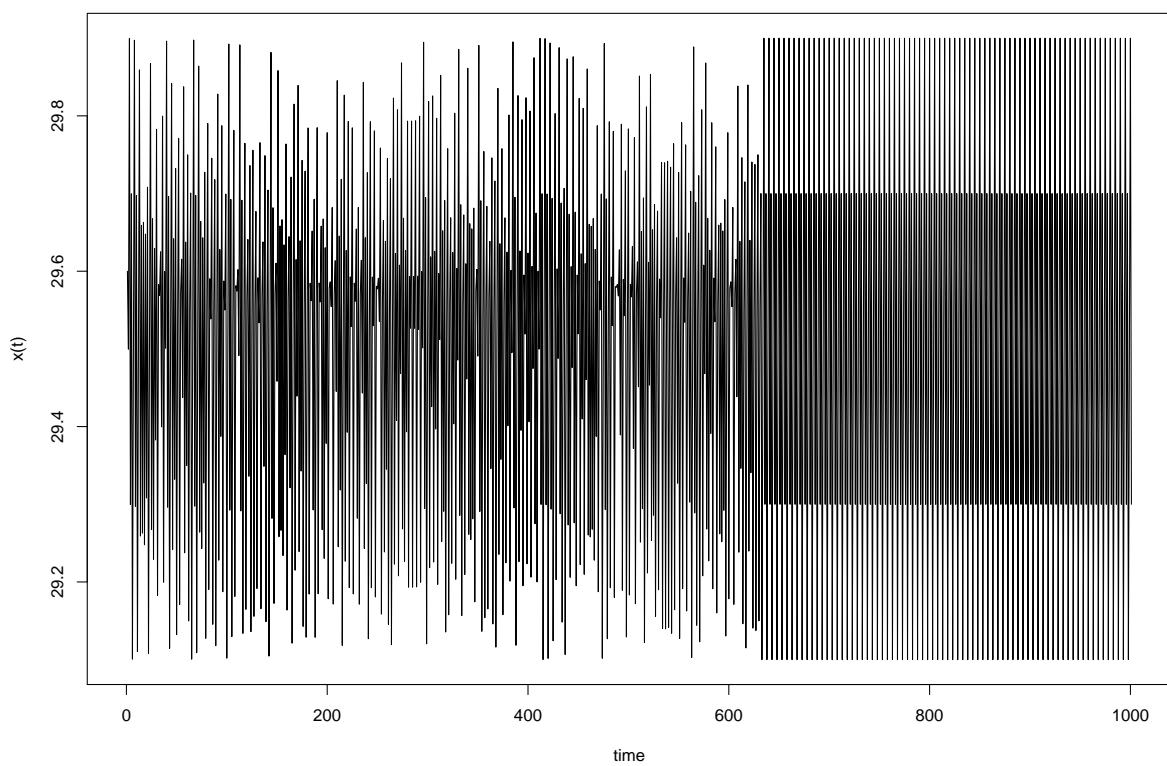


Figura 19 – Time evolution of (4.3) showing a period 5 asymptotically periodic orbit. $k = 5x_A + 0.1$, just slightly above the theoretical limit for chaotic behavior $5x_A$. Notice the long chaotic transient before asymptotic period 5 stability. Parameter values are $\rho = 0.4$, $\alpha = 0.9$, $h_L = 10$, $h_H = 20$, $x_0 = 29.6$ and $\sigma_0 = 99$.

5 Conclusão

Os resultados apresentados mostram que soluções caóticas em problemas de programação dinâmica podem ocorrer mesmo com valores do fator de desconto economicamente plausíveis. No presente trabalho, a dinâmica caótica ocorre nos valores esperados das variáveis de estado, dado que o problema é estocástico por natureza. Durante toda a dissertação, o valor utilizado nas simulações para o fator de desconto foi $\alpha = 0.9$ para fins de comparação entre os resultados, mas os mesmos fenômenos são observados para valores maiores ou menores. Cabe observar que o valor utilizado é bastante razoável em aplicações econômicas.

Os protocolos apresentados no Capítulo 3 mostram uma dinâmica rica para os valores esperados das variáveis de estado do sistema. A discussão da Seção 3.2 deixou claro que o protocolo utilizado em [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#) pode apresentar um comportamento bastante complexo, podendo ser periódico ou quasi-periódico. Tais propriedades não foram analisadas formalmente, mas as discussões da Seção 4.3 relativas à equação (4.4) são válidas para o mapa (3.9), dado que tais mapas são topologicamente equivalentes, como já mencionado no texto. Portanto, fica claro que tal mapa não é caótico no sentido estritamente matemático do termo, e as trajetórias simuladas exibidas na Figura 5 deixam claro que tal mapa não é sensível às condições iniciais.

Por outro lado, o mapa (3.10) apresenta comportamento caótico para todo $k > 1$ se as trajetórias convergem para o atrator \mathcal{A} (assumindo que os parâmetros garantam que esta região seja realmente um atrator), como demonstrado na Seção 4.2. Esta Seção também deixou claro que o comportamento caótico do mapa (3.10) é robusto no sentido de que não existem janelas de periodicidade na região caótica. As análises numéricas da Seção 3.3 ilustram estas propriedades.

Similarmente, o mapa (3.11) também apresenta comportamento caótico, mas sua dinâmica é ainda mais rica. As simulações da Seção 3.4 mostram como o comportamento deste mapa é complexo, onde o diagrama de bifurcação na Figura 13 serve como resumo da dinâmica. Nesta figura, a dinâmica é claramente caótica entre os valores de k determinados teoricamente na Seção 4.3. O interessante fato do sistema tornar-se abruptamente periódico para $k > nx_A$ é detalhadamente explicado na Seção 4.3. Cabe salientar também que o comportamento caótico na região onde $2x_A < k < nx_A$ é robusto.

Tais conclusões acerca de soluções caóticas com valores elevados do fator de desconto para o problema estudado em [Cajueiro e Maldonado \(2008\)](#) mostra que, de certa forma, as conclusões apresentadas em [Montrucchio e Sorger \(1996\)](#) não se aplicam ao presente caso. Porém, o estudo apresentado em [Montrucchio e Sorger \(1996\)](#) trata de um problema determinístico, diferente do caso estocástico estudado aqui. Mais ainda, os autores assumem características de convexidade para o espaço de estados do sistema que não se aplicam ao problema estudado na presente dissertação, que assume um espaço de estados discreto, propriedade que pode ter interesse econômico em diversos contextos.

Finalmente, uma observação importante é que os mapas estudados descrevem a dinâmica esperada do sistema. Mas, por este ser estocástico por natureza, a dinâmica resultante é estocástica. Não foi realizada aqui uma análise da influência das não linearidades responsáveis pelo comportamento caótico dos valores esperados nas distribuições assintóticas das variáveis de estado. Este é um assunto de grande interesse em Economia e em análise de dados em geral, mas ainda é uma área de pesquisa pouco explorada na literatura. Outra linha de pesquisa que pode ser considerada é o caso determinístico com espaço de estados discreto. O presente trabalho pode ser um ponto de partida para tais análises.

Referências

- ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos*. [S.I.]: Springer, 1996. Citado na página 47.
- BARABASI, A.-L. The origin of bursts and heavy tails in human dynamics. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 435, n. 7039, p. 207–211, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 23.
- BERNARDO, M. et al. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 163. Citado 3 vezes nas páginas 25, 37 e 48.
- BERTSEKAS, D. P. et al. *Dynamic programming and optimal control*. [S.I.]: Athena Scientific Belmont, MA, 1995. v. 1. Citado na página 27.
- BIRKHOFF, G. D. On the periodic motions of dynamical systems. *Acta Mathematica*, Springer, v. 50, n. 1, p. 359–379, 1927. Citado na página 24.
- BLANCHARD, P.; HONGLER, M.-O. Modeling human activity in the spirit of barabasi's queueing systems. *Physical Review E*, APS, v. 75, n. 2, p. 026102, 2007. Citado na página 23.
- BOLDRIN, M.; MONTRUCCHIO, L. On the indeterminacy of capital accumulation paths. *Journal of Economic theory*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 26–39, 1986. Citado na página 24.
- BOLDRIN, M. et al. Chaotic equilibrium dynamics in endogenous growth models. *Journal of Economic Theory*, Elsevier, v. 96, n. 1-2, p. 97–132, 2001. Citado na página 24.
- CAJUEIRO, D. O.; MALDONADO, W. L. Role of optimization in the human dynamics of task execution. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 3, p. 035101, 2008. Citado 11 vezes nas páginas 20, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 33, 34, 35 e 55.
- CARTWRIGHT, M. On non-linear differential equations of the second order. In: CAMBRIDGE UNIV PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.I.], 1949. v. 45, n. 04, p. 495–501. Citado na página 24.
- CHO, W.-k. et al. Generalized priority-queue network dynamics: Impact of team and hierarchy. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 6, p. 066109, 2010. Citado na página 23.
- COLLET, P.; ECKMANN, J.-P.; KOCH, H. Period doubling bifurcations for families of maps on rn. *Journal of statistical physics*, Springer, v. 25, n. 1, p. 1–14, 1981. Citado na página 25.
- CRANE, R.; SCHWEITZER, F.; SORNETTE, D. Power law signature of media exposure in human response waiting time distributions. *Physical Review E*, APS, v. 81, n. 5, p. 056101, 2010. Citado na página 23.
- DALEY, D. J.; VERE-JONES, D. An introduction to the theory of point processes. volume i: Elementary theory and methods. *Probability and its applications*, 2nd edn. Springer, Berlin, 2003. Citado na página 19.
- DEVANEY, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. [S.I.]: Westview Press, 2003. Citado na página 51.
- DEZSÖ, Z. et al. Dynamics of information access on the web. *Physical Review E*, APS, v. 73, n. 6, p. 066132, 2006. Citado na página 23.
- DIACU, F.; HOLMES, P. *Celestial encounters: the origins of chaos and stability*. [S.I.]: Princeton University Press, 1996. Citado na página 24.
- ECKMANN, J.-P.; MOSES, E.; SERGI, D. Entropy of dialogues creates coherent structures in e-mail traffic. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, National Acad Sciences, v. 101, n. 40, p. 14333–14337, 2004. Citado na página 23.
- FANTI, L.; GORI, L. Public health spending, old-age productivity and economic growth: chaotic cycles under perfect foresight. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Elsevier, v. 78, n. 1, p. 137–151, 2011. Citado na página 24.

- FORMENTIN, M. et al. Hidden scaling patterns and universality in written communication. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 1, p. 012817, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [19](#) e [23](#).
- FORMENTIN, M. et al. New activity pattern in human interactive dynamics. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2015, n. 9, p. P09006, 2015. Citado na página [23](#).
- GAO, L. et al. Individual and group dynamics in purchasing activity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 392, n. 2, p. 343–349, 2013. Citado na página [23](#).
- GARDINI, L. et al. Forward and backward dynamics in implicitly defined overlapping generations models. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Elsevier, v. 71, n. 2, p. 110–129, 2009. Citado na página [24](#).
- GARDINI, L.; SUSHKO, I.; NAIMZADA, A. K. Growing through chaotic intervals. *Journal of Economic Theory*, Elsevier, v. 143, n. 1, p. 541–557, 2008. Citado na página [24](#).
- GONÇALVES, B.; RAMASCO, J. J. Human dynamics revealed through web analytics. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 2, p. 026123, 2008. Citado na página [23](#).
- GRINSTEIN, G.; LINSKER, R. Biased diffusion and universality in model queues. *Physical review letters*, APS, v. 97, n. 13, p. 130201, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [19](#) e [23](#).
- GUCKENHEIMER, J. A strange, strange attractor. In: *The Hopf bifurcation and its applications*. [S.I.]: Springer, 1976. p. 368–381. Citado na página [25](#).
- GUPTA, R.; STANDER, L. et al. *Endogenous Fluctuations in an Endogenous Growth Model with Inflation Targeting*. [S.I.], 2014. Citado na página [24](#).
- HANAI, K. et al. Scale free dynamics involved in the ant locomotion. In: *Proceedings of the Int. Conf. on Cellular and Molecular Biology, Biophysics and Bioengineering*. [S.I.: s.n.], 2006. Citado na página [23](#).
- HENDERSON, T.; BHATTI, S. Modelling user behaviour in networked games. In: ACM. *Proceedings of the ninth ACM international conference on Multimedia*. [S.I.], 2001. p. 212–220. Citado na página [23](#).
- HIDALGO, C. A. Conditions for the emergence of scaling in the inter-event time of uncorrelated and seasonal systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 369, n. 2, p. 877–883, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [19](#) e [23](#).
- HILBORN, R. C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. [S.I.]: Oxford University Press on Demand, 2000. Citado 3 vezes nas páginas [35](#), [37](#) e [42](#).
- HOLMES, P.; WHITLEY, D. Bifurcations of one-and two-dimensional maps. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 311, n. 1515, p. 43–102, 1984. Citado na página [25](#).
- JIANG, Z.-Q. et al. Calling patterns in human communication dynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 110, n. 5, p. 1600–1605, 2013. Citado na página [23](#).
- JO, H.-H.; PAN, R. K.; KASKI, K. Time-varying priority queuing models for human dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 6, p. 066101, 2012. Citado na página [23](#).
- JUNG, K. et al. Bursts and heavy tails in temporal and sequential dynamics of foraging decisions. *PLoS Comput Biol*, Public Library of Science, v. 10, n. 8, p. e1003759, 2014. Citado na página [23](#).
- KIM, K.; CHAE, K. C. Discrete-time queues with discretionary priorities. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 200, n. 2, p. 473–485, 2010. Citado na página [23](#).
- KOLMOGOROV, A. Preservation of conditionally periodic movements with small change in the hamilton function. In: *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*. [S.I.]: Springer, 1979. p. 51–56. Citado na página [24](#).
- KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. In: JSTOR. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. [S.I.], 1941. v. 30, n. 4, p. 301–305. Citado na página [24](#).

- LEVI, M. *Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations*. [S.I.]: American Mathematical Soc., 1981. v. 244. Citado na página 25.
- LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, JSTOR, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 20, 24 e 33.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963. Citado na página 24.
- MAJUMDAR, M.; MITRA, T.; NISHIMURA, K. *Optimization and chaos*. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2000. v. 11. Citado na página 24.
- MALMGREN, R. D. et al. On universality in human correspondence activity. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 325, n. 5948, p. 1696–1700, 2009. Citado na página 23.
- MALMGREN, R. D. et al. A poissonian explanation for heavy tails in e-mail communication. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 105, n. 47, p. 18153–18158, 2008. Citado na página 23.
- MANDELBROT, B. B. How long is the coast of britain. *Science*, v. 156, n. 3775, p. 636–638, 1967. Citado na página 24.
- MANDELBROT, B. B.; PIGNONI, R. *The fractal geometry of nature*. WH freeman New York, 1983. Citado na página 24.
- MASUDA, N.; KIM, J.; KAHNG, B. Priority queues with bursty arrivals of incoming tasks. *Physical Review E*, APS, v. 79, n. 3, p. 036106, 2009. Citado na página 23.
- MAY, R. M. et al. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, London, v. 261, n. 5560, p. 459–467, 1976. Citado na página 24.
- MELO, W. D.; STRIEN, S. V. *One-dimensional dynamics*. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 25. Citado 6 vezes nas páginas 25, 33, 35, 48, 49 e 52.
- MIN, B.; GOH, K.-I.; KIM, I.-M. Waiting time dynamics of priority-queue networks. *Physical Review E*, APS, v. 79, n. 5, p. 056110, 2009. Citado na página 23.
- MITRA, T.; SORGER, G. On the existence of chaotic policy functions in dynamic optimization. *Japanese Economic Review*, Wiley Online Library, v. 50, n. 4, p. 470–484, 1999. Citado na página 24.
- MONTRUCCHIO, L.; SORGER, G. Topological entropy of policy functions in concave dynamic optimization models. *Journal of Mathematical Economics*, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 181–194, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 55.
- MRYGLOD, O. et al. Interevent time distributions of human multi-level activity in a virtual world. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 419, p. 681–690, 2015. Citado na página 23.
- NISHIMURA, K.; SORGER, G.; YANO, M. Ergodic chaos in optimal growth models with low discount rates. *Economic Theory*, Springer, v. 4, n. 5, p. 705–717, 1994. Citado na página 24.
- OLIVEIRA, J. G.; BARABÁSI, A.-L. Human dynamics: Darwin and einstein correspondence patterns. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 437, n. 7063, p. 1251–1251, 2005. Citado na página 23.
- PAXSON, V.; FLOYD, S. Wide area traffic: the failure of poisson modeling. *IEEE/ACM Transactions on Networking (ToN)*, IEEE Press, v. 3, n. 3, p. 226–244, 1995. Citado na página 19.
- POINCARÉ, H. Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, Springer, v. 13, n. 1, p. A3–A270, 1890. Citado na página 24.
- PROEKT, A. et al. Scale invariance in the dynamics of spontaneous behavior. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 109, n. 26, p. 10564–10569, 2012. Citado na página 23.
- QU, S.; WANG, Q.; WANG, L. The statistical research of human dynamics on correspondence. In: IEEE. *Modelling, Identification and Control (ICMIC), Proceedings of 2011 International Conference on*. [S.I.], 2011. p. 282–284. Citado na página 23.

SHOKRANIAN, S.; SOARES, M.; GODINHO, H. *Teoria dos números*. [S.I.]: UnB, 1994. Citado na página [51](#).

SMALE, S. Morse inequalities for a dynamical system. In: *The Collected Papers of Stephen Smale: Volume 2*. [S.I.: s.n.], 2000. p. 596–602. Citado na página [24](#).

VAZQUEZ, A. Exact results for the barabási model of human dynamics. *Physical review letters*, APS, v. 95, n. 24, p. 248701, 2005. Citado na página [19](#).

VÁZQUEZ, A. et al. Modeling bursts and heavy tails in human dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 73, n. 3, p. 036127, 2006. Citado na página [19](#).

WALRAEVENS, J. et al. Stochastic queueing-theory approach to human dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 2, p. 021139, 2012. Citado na página [23](#).

WANG, Q.; GUO, J.-L. Human dynamics scaling characteristics for aerial inbound logistics operation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 389, n. 10, p. 2127–2133, 2010. Citado na página [23](#).

WU, Y. et al. Evidence for a bimodal distribution in human communication. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 107, n. 44, p. 18803–18808, 2010. Citado na página [23](#).