
**Fenômenos paramétricos de segunda ordem e
transições Landau-Zener em Eletrodinâmica
Quântica de circuitos**

Everton Luis da Silva e Silva

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Dodonov



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Fenômenos paramétricos de segunda ordem e transições
Landau-Zener em Eletrodinâmica Quântica de circuitos**

Everton Luis da Silva e Silva

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Dodonov

Brasília - DF

Fevereiro de 2017

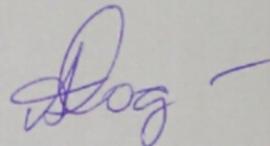
“Fenômenos Paramétricos de segunda ordem e transições Landau-Zener em Eletrodinâmica Quântica de Circuitos.”

Por

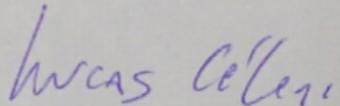
Everton Luis da Silva e Silva.

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

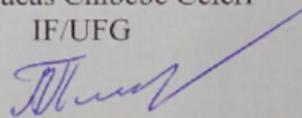
Aprovada por:



Prof. Alexandre Dodonov
IF/UnB



Prof. Lucas Chibebe Céleri
IF/UFG



Prof. Aleksandr Nikolaievich Pinzul
IF/UnB

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LSI586 Luis da Silva e Silva, Everton
f Fenômenos paramétricos de segunda ordem e
transições Landau-Zener em Eletrodinâmica Quântica de
circuitos / Everton Luis da Silva e Silva;
orientador Alexandre Dodonov. -- Brasília, 2017.
123 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Física) --
Universidade de Brasília, 2017.

1. Eletrodinâmica quântica de circuitos não
estacionária. 2. Efeito Casimir dinâmico e anti
efeito Casimir dinâmico. 3. Modelo de Rabi. 4.
Transições Landau-Zener em eletrodinâmica quântica de
circuitos. I. Dodonov, Alexandre , orient. II. Título.

Resumo

Fenômenos paramétrica de segunda ordem e transições Landau-Zener em Eletrodinâmica Quântica de circuitos

Everton Luis da Silva e Silva

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Dodonov

Nesta dissertação vamos estudamos analítica-numericamente um arranjo não estacionário de Eletrodinâmica Quântica de circuitos no qual N átomos artificiais de dois níveis interagem com um modo de campo eletromagnético confinado em um ressonador. Consideramos que a frequência de transição atômica ou o acoplamento átomo campo são modulados temporalmente por uma superposição de funções harmônicas com frequências $\eta^{(j)}$. E mostrando que todos os fenômenos ressonantes que ocorrem para uma frequência específica η também ocorrem quando η é reduzido pela metade. Todavia, neste último caso, a taxa de transição entre os estados acoplados pela modulação é consideravelmente menor. Dentre os fenômenos previstos na nossa abordagem destacam-se: o efeito Casimir dinâmico, o efeito anti-Jaynes-Cummings e um novo fenômeno descrito em trabalhos recentes no contexto da eletrodinâmica quântica de circuitos, denominado anti-efeito Casimir dinâmico. As taxas de transição entre os estados são calculadas explicitamente no regime de acoplamento fraco, e as perspectivas para a implementação do nosso modelo em laboratório são analisadas de maneira qualitativa. Ademais, investigamos numericamente o comportamento do sistema no regime ultraforte de interação radiação-matéria uma vez que nossos cálculos analíticos não contemplam este caso. Por fim, demonstramos que, quando a frequência de modulação η varia linearmente com o tempo, transições Landau-Zener efetivas são induzidas no sistema.

Palavras-chave: Eletrodinâmica quântica de circuitos não estacionária, modulação paramétrica, ressonâncias de segunda ordem, transições Landau-Zener em eletrodinâmica quântica de circuitos.

Abstract

Second order parametric phenomena and Landau-Zener transitions in circuit Quantum
Electrodynamics

Everton Luis da Silva e Silva

Supervisor: Prof. Dr. Alexandre Dodonov

In this work we investigate analytically and numerically the nonstationary circuit quantum electrodynamics setup in which a single artificial atom interacts with a single mode of the electromagnetic field confined in a resonator. We consider that the atomic transition frequency or the atom-field coupling strength are modulated in time by a multi-tone external perturbation. We show that all the resonant phenomena that occur for the modulation frequency η also occur for the halved modulation frequencies. However in the latter case the associated transition rates between the coupled states are significantly smaller. We derive several effects, such as: dynamical Casimir effect, anti-Jaynes-Cummings effect and a new phenomenon predicted in recent works in circuit quantum electrodynamics called anti-dynamical Casimir effect. The transition rates between the light-matter dressed states are evaluated explicitly and the prospects of experimental implementation of our model are discussed in a qualitative manner. Furthermore we numerically study the behavior of this system in the ultrastrong coupling regime, since our analytical calculations do not contemplate this case. Finally we show that when the modulation frequency η changes linearly with time, effective Landau-Zener transitions are induced in the system.

Keywords: Nonstationary circuit quantum electrodynamics, parametric modulation, second order resonances, Landau-Zener transitions in circuit quantum electrodynamics.

Agradecimentos

No decorrer desta longa jornada, fiéis amigos eu fiz no meio da estrada. A caminhada e o aprendizado seriam, com certeza, diferentes sem eles. Sendo assim, para evitar minha danação, não deixarei de dizer a todos que sou profundamente grato a:

- o professor Alexandre Dodonov pela postura inigualavelmente profissional e pela impagável carga de conhecimentos adquiridos tanto durante a orientação quanto nas disciplinas ministradas, agradeço de verdade pela orientação durante estes dois anos de mestrado;
- meus pais que desde o meu primeiro sopro de vida nunca deixaram de se sacrificar por mim;
- minha avó que durante todos esses anos não mediu esforços para investir na minha formação;
- o grande companheiro de sala, Moisés Júnior que contribuiu diretamente na confecção dos algoritmos computacionais utilizados nas análises numéricas deste trabalho;
- Sarah, namorada, amiga e grande amor, por me mostrar um novo significado para a vida;
- a grande amiga Gabi Viana pela parceria e pela disponibilidade de avaliar este trabalho com tanto interesse;
- Aos amigos Igor Sousa, Lucas Bernar, Gabriel Aleixo, Luciano Miranda, José Solano, Antônio do Carmo, Ítalo Sanglard e Artur Castelo Branco pelos momentos de descontração regados por cervejas baratas;
- aos Professores Aleksandr N. Pinzul, Lucas C. Céleri e Arsen Melikyan pela disponibilidade de compor a banca examinadora deste trabalho;
- a CAPES pelo auxílio financeiro;

“If the doors of perception were cleansed everything would appear as it is, infinite”

(William Blake, The Marriage of Heaven and Hell)

Lista de abreviaturas

AECD: anti-Efeito Casimir Dinâmico

AJC: anti Jaynes-Cummings

ECD: Efeito Casimor Dinâmico

EDQC: Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

EDQc: Eletrodinâmica Qântica de Circuitos

JC: Jaynes-Cummings

LZ: Landau-Zener

RWA: Rotating wave approximation

Lista de Figuras

3.1	a) Representação esquemática de uma Junção Josephson em um circuito. b) Representação esquemática de uma Junção Josephson na qual as áreas cinzas representam os supercondutores da junção e a área intermediária branca representa o material isolante através do qual os pares de Cooper tunelam. c) Escaneamento por micrografia eletrônica de uma junção Josephson formada por dois eletrodos de alumínio supercondutor separados por uma barreira de óxido de alumínio. (Figuras b e c reproduzidas respectivamente das referências [54] e [55])	19
3.2	Diagrama esquemático de uma CPB. (Figura reproduzida da referência [54]) . . .	23
3.3	Níveis de energia E_j de uma CPB, com E_j em unidades de E_C . Para pequenos valores de E_J/E_C o sistema está no regime de carga, de modo que as bandas tem forma parabólica. Por outro lado, para grandes valores de E_J/E_C as bandas tornam-se planas e espaçadas. (Figura reproduzida da referência [48])	24
3.4	Frequência de transição do qubit Ω em função do fluxo aplicado. (Figura reproduzida da referência [75]).	26
3.5	a) Diagrama esquemático de um transmon (azul escuro C_J, E_J), ressonador (vermelho L_r, C_r), fonte de fluxo de campo magnético (marron), fonte de voltagem (azul claro). b) Esquema simplificado do dispositivo transmon-ressonador. O arranjo funciona com capacitores agrupados C'_B, C_{g1}, C_{g2} que geram capacitâncias efetivas C_B, C_g suficiente para produzir o regime $E_J \gg E_C$ de operação de um transmon. (Figura reproduzida da referência [69]).	30
4.1	a) Contorno através do qual a integração é feita.	37

<p>4.2 Quando $\frac{v}{\Delta^2} = 0,2$ o sistema transita adiabaticamente para o estado $e\rangle$ com probabilidade $P_e \approx 0,9996$. Por outro lado, se aumentarmos essa razão em dez vezes, isto é, quando $\frac{v}{\Delta^2} = 2$ a probabilidade de uma transição adiabática cai pela metade ($P_e \approx 0,544$). Se aumentarmos ainda mais essa razão $P_e \rightarrow 0$ e o sistema experimenta uma transição não-adiabática. (Figura reproduzida da referência [120])</p>	<p>39</p>
<p>5.1 Número médio de fótons gerados a partir do estado de zero excitações $g, 0\rangle$ para a ressonância de AJC $\eta \simeq \frac{\Delta_+ + 2\delta_+ - 1,916\delta_-}{K}$. A ressonância de primeira ordem ($K = 1$) corresponde ao gráfico vermelho, enquanto a ressonância de segunda ordem ($k = 2$) corresponde ao gráfico preto.</p>	<p>64</p>
<p>5.2 Número médio de fótons gerados, no regime ultraforte (preto) e no regime fraco (vermelho), a partir do estado de zero excitações $g, 0\rangle$ para a ressonâncias de AJC de primeira ordem $\eta \simeq \Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+$ (regime fraco) e $\eta \simeq \Delta_+ - 2\delta_- + 0.8059\delta_+$ (regime ultraforte).</p>	<p>65</p>
<p>5.3 Número médio de fótons gerados via ECD para ressonâncias de primeira (vermelho) e segunda ordem (preto), cujas frequências de modulação, respectivamente para $K = 1$ e $K = 2$ são dadas por $\eta = \frac{2\omega_0 + 2\delta_- + 0,93\delta_+}{K}$.</p>	<p>68</p>
<p>5.4 $P_{ g,0\rangle}$, $P_{ g,2\rangle}$ e $P_{ e,1\rangle}$ obtidos via integração numérica do Hamiltoniano de Rabi no regime ressonante átomo-campo para a ressonância de primeira ordem ($K = 1$) $\eta = 2\omega_0 + g\sqrt{2} - \delta_+ + 7 \times 10^{-2}\delta_+$.</p>	<p>73</p>
<p>5.5 Evolução do número médio de fótons gerados a partir do estado de vácuo obtidos via integração numérica do Hamiltoniano de Rabi no regime ressonante átomo-campo para a ressonância de primeira (vermelho) e segunda ordem (preto) com a frequência de modulação $\eta = \frac{(2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 0,4\delta_+)}{K}$.</p>	<p>74</p>
<p>5.6 Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime ressonante para a frequência de modulação de primeira ordem ($K = 1$) $\eta = 2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 7 \times 10^{-2}\delta_+ - \nu(t)$.</p>	<p>77</p>
<p>5.7 Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime ressonante para a frequência de modulação segunda ordem ($K = 2$) $\eta = \frac{2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 7 \times 10^{-2}\delta_+ - \nu(t)}{2}$.</p>	<p>78</p>

5.8	Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime AJC para a frequência de modulação de primeira ordem ($K = 1$) $\eta(t) = \Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+ - \nu(t)$	80
5.9	Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime AJC para a frequência de modulação de segunda ordem ($K = 2$) $\eta(t) = \frac{\Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+ - \nu(t)}{2}$	81
6.1	Resumo esquemático dos resultados obtidos no capítulo 5.	83

Sumário

1	Introdução	1
2	Interação Luz-matéria	8
2.1	Introdução	8
2.2	O modelo de Rabi	9
2.3	Aproximação de Onda Girante	12
2.4	Autoestados do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	14
2.4.1	Regime Ressonante	15
2.4.2	Regime Dispersivo	15
3	Eletrodinâmica Quântica de Circuitos	17
3.1	Introdução	17
3.2	Junções Josephson	18
3.3	Variedades de átomos artificiais	22
3.3.1	Cooper pair box	22
3.3.2	Transmon qubit	26
3.3.3	Transmon acoplado a um ressonador	29
4	Transições Landau-Zener	32
4.1	Introdução	32
4.2	Fórmula de Landau Zener	34
5	Fenômenos Paramétricos em Eletrodinâmica Quântica de Circuitos	41
5.1	Introdução	41
5.2	Modelo Teórico	42
5.3	Base de Dicke	43

5.3.1	Função de Onda	44
5.4	Eliminando \hat{H}_1	46
5.4.1	Deslocamentos de Frequência	54
5.5	Segunda Ordem	58
5.6	Regime Dispersivo	62
5.6.1	Ressonância de AJC	63
5.6.2	Ressonância de ECD	66
5.6.3	Ressonância de AECD	71
5.7	Regime Ressonante	72
5.8	Transições Landau-Zener em EDQc	75
6	Conclusão	82
A	Aproximação de onda girante (RWA)	85
B	Deslocamento de frequência	88
C	Aproximações por RWA	91
D	Programa	94
	Referências Bibliográficas	98

Capítulo 1

Introdução

Na sua forma mais simples e intuitiva, a palavra vácuo refere-se ao espaço completamente vazio. Retirando toda a matéria de uma determinada região do espaço, permanecemos com aquilo que “descuidadamente” denominamos espaço vazio, ou simplesmente vácuo. Mesmo em teorias como a mecânica clássica e o eletromagnetismo de Maxwell, esse conceito permanece válido, já que o vácuo é descrito como o espaço livre de matéria e radiação. Em geral, não nos ocorre que essa definição possa ser um tanto ingênua.

De fato, muitos filósofos da antiguidade clássica perceberam as complexidades conceituais envolvidas nas noções fundamentais que dizem respeito a matéria, tempo, espaço, movimento e vazio. A filosofia grega nos ensina que foram estabelecidos dois pontos de vista distintos a respeito do vácuo [1]: o primeiro deles nos diz que o vácuo é tão simplesmente espaço vazio, isto é, completamente destituído de matéria¹; já o segundo ponto de vista considera que o espaço vazio é inconcebível, de modo que o vácuo deve ser considerado como uma espécie de meio sutil (um “éter”)². Neste contexto, as palavras vácuo e vazio não significam a mesma coisa. Sem dúvida, o mais notório dentre aqueles que negavam o vácuo como sinônimo de vazio foi Aristóteles (384-322 a.C.). A doutrina Aristotélica, que afirmava ser a existência do vazio uma impossibilidade física, começou a ser refutada em 1644, quando Evangelista Torricelli (1608-1647) inventou o barômetro de mercúrio; nesta experiência, Torricelli derramou mercúrio em um tubo de vidro que tinha uma das suas extremidades fechadas e depois mergulhou a extremidade aberta em um recipiente que também continha mercúrio. A coluna de mercúrio desceu deixando um pequeno espaço entre a superfície do líquido e a extremidade fechada. Torricelli sugeriu que este espaço

¹Alguns exemplos de defensores deste ponto de vista são: o filósofo atomista Demócrito (c.460-370 a.C.), Platão (c.428-347 a.C.) e o poeta e filósofo romano Lucrecio (c. 94-55 a.C.).

²Alguns defensores desse ponto de vista são: Parmênides de Eléia (c.515-450 a.C.), Zenon de Eléia (c. 490 a.C.) e Melissos de Samos (c.350 a.C.).

era completamente destituído de matéria e, portanto, poderia ser considerado vazio. Além da experiência de Torricelli, outra foi realizada em 1657 por Otto von Guericke (1602-1686), filósofo natural e burgomestre de Magdeburgo. Ele uniu dois hemisférios de cobre e com o auxílio de uma bomba retirou praticamente todo o ar do interior dos hemisférios; esta ausência de ar permitia que a pressão atmosférica externa mantivesse os hemisférios fortemente unidos, a ponto de parselhas de cavalos não conseguirem separá-los. Este experimento se tornou mais uma refutação experimental da concepção aristotélica sobre o vácuo. Entretanto, no século XIX, os trabalhos de Maxwell, que sugerem que a luz é uma onda eletromagnética, levaram a maioria dos físicos a supor a existência de um meio sutil denominado *éter luminífero*, o qual seria o meio de propagação das ondas eletromagnéticas. E, neste contexto, renasce a antiga noção de que deve existir um meio sutil embebendo todo o universo. Contudo, em um experimento clássico, Albert A. Michelson (1852-1931) e Edward W. Morley (1838-1923) mostraram que a hipótese de um tal meio sutil era, muito provavelmente, desnecessária para explicar a propagação das ondas eletromagnéticas. E, por fim, com o advento da teoria especial da relatividade, o éter luminífero foi finalmente descartado.

Neste vasto universo de opiniões e especulações sobre a real natureza do vácuo, vemos alternarem-se as concepções do vácuo como tão simplesmente o vazio e como um meio dotado de propriedades características. Entretanto, todas estas questões mudaram drasticamente com o nascimento da teoria quântica, a qual forneceu um novo ponto de vista sobre o que é o espaço vazio.

Numa reunião da sociedade alemã de física, em 14 de dezembro de 1900, Max Planck apresentou um artigo intitulado “*Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal*” [2]. A data de apresentação é considerada o nascimento da teoria quântica e marca o início de uma revolução na física. Assim como a teoria da relatividade estende o campo de aplicação das leis físicas para a região de grandes velocidades, a teoria quântica estende esse campo à região de pequenas dimensões; e, assim como a velocidade da luz é uma constante universal que caracteriza a relatividade, também uma constante universal, chamada constante de Planck h , caracteriza a teoria quântica. Planck introduziu essa constante em seu artigo de 1900, quando estudava o espectro da radiação térmica emitida por um corpo negro³. Um exemplo de corpo negro pode ser obtido se considerarmos um objeto que contém uma cavidade ligada ao exterior por um pequeno orifício⁴. Descontente com o método proposto em seu trabalho de 1900, no

³Corpos cuja superfície absorvem toda a radiação térmica incidente sobre eles.

⁴A radiação incidente sobre o orifício é completamente absorvida depois de sucessivas reflexões sobre a superfície

qual os osciladores das paredes da cavidade absorviam e emitiam energia quanticamente, Planck publica, em 1912, sua segunda teoria do corpo negro [3]. Neste novo trabalho, propõe um modelo no qual os osciladores das paredes de uma cavidade absorvem energia continuamente, mas emitem descontinuamente. Além disso, supôs que se o oscilador atingir uma energia igual a um múltiplo inteiro de $\hbar\omega$ ele teria uma probabilidade de perder toda sua energia. Planck usou a mecânica estatística de Boltzman e o conceito de entropia e calculou a média no ensemble da energia de um oscilador de frequência ω , obtendo

$$\langle U \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT} - 1\right)}, \quad (1.1)$$

na qual $\hbar = h/2\pi$ tal que h é a constante de Plank, k é a constante de Boltzman e T é a temperatura do corpo negro. A consequência mais extraordinária deste resultado é que, mesmo quando a temperatura do corpo negro é zero, as energias médias dos osciladores harmônicos que o constituem não se anulam. Em outras palavras, mesmo quando a temperatura é nula ainda resta uma energia residual igual a

$$\langle U \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (1.2)$$

que posteriormente foi denominada de *energia de ponto zero*. Contudo, é interessante notar que embora o trabalho de Planck tenha sido o primeiro a propor a ideia de energia de ponto zero, ela aparece apenas nos osciladores materiais, mas não no campo eletromagnético.

Nos anos seguintes, a energia de ponto zero logo chamou a atenção de eminentes físicos da época. Assim, em 1916 Nernst [4] sugeriu que o campo eletromagnético também possui uma energia de ponto zero associada a cada modo normal de vibração; em outras palavras, Nernst sugere que cada modo de vibração do campo é equivalente a um oscilador harmônico. Desta maneira, as ideias de Nernst culminam com o surgimento do conceito de *radiação de ponto zero*. Ainda, as especulações de Nernst foram mais além: ele considerou que essa radiação sofre *flutuações*, conjecturou também sobre a possibilidade do conteúdo de energia dessa radiação ser infinito e, portanto, especulou sobre a necessidade de introduzir algum tipo de corte afim de manter este conteúdo de energia finito. Posteriormente, com a formalização matemática da teoria quântica, verificou-se que, de fato, cada modo do campo eletromagnético possui uma

interna da cavidade. Isto é, o orifício absorve como um corpo negro. No processo inverso, no qual a radiação que deixa o orifício é constituída a partir das emissões da superfície interna, o orifício emite como se fosse um corpo negro.

energia de ponto zero dada pela equação (1.2), tal que, somando sobre todas as frequências de oscilação possíveis, obtemos um conteúdo de energia divergente.

Embora a energia de ponto zero fosse considerada nos trabalhos de eminentes físicos do século XX, por exemplo no trabalho de Einstein e Stern para o calor específico do hidrogênio molecular a baixas temperaturas [5], ou na estatística de elétrons de Enrico Fermi, o valor divergente da energia de ponto zero desagradava a tantos outros. Esta, de fato, é uma das principais razões que levaram a comunidade científica a considerar um campo eletromagnético de ponto zero virtual. Dentre aqueles que não estavam contentes com a ideia de energia de ponto zero estava W. Pauli, que em 1933, escreveu [6]:

“A esta altura, deve ser mencionado que é mais consistente não introduzir aqui a energia de ponto-zero de meio quantum por grau de liberdade, em contraste com o oscilador material. Porque, por um lado, isto levaria a uma energia infinitamente grande por volume, devida aos infinitos graus de liberdade. Por outro lado, esta energia não pode ser observada, em princípio, uma vez que não pode ser emitida, absorvida ou refratada – logo, não pode ser presa por paredes – e uma vez que ela não gera campo gravitacional, como é sabido da experiência.”

Apesar dos argumentos apresentados por todos que eram contrários à energia de ponto zero, tal ideia consolidou-se cada vez mais com o desenvolvimento da teoria quântica de campos, uma vez que muitos fenômenos importantes têm origem ligada à energia de ponto zero. Um interessante exemplo é a interação, a grandes distâncias relativas, entre duas moléculas neutras, sem momento de dipolo permanente, porém polarizáveis. Esta interação, conhecida como *força de van der Waals dispersiva*, foi descrita teoricamente em 1930 por London [7], o qual usando a teoria de perturbação da mecânica quântica em quarta ordem na constante de acoplamento, obteve uma energia potencial de interação que varia com r^{-6} , tal que r é a distância entre as moléculas. Entretanto os dados experimentais, obtidos por Verwey e Overbeek [8], não eram compatíveis com as previsões teóricas de London, a não ser que se supusesse que a força de van der Waals dispersiva entre as moléculas diminuísse mais rapidamente em relação à distância r do que r^{-6} . Verwey e Overbeek supuseram que essa diferença era devida à finitude da velocidade de propagação da interação eletromagnética, o que causaria um enfraquecimento maior da interação a grandes distâncias. Em 1948, os físicos holandeses H. B. G. Casimir e D. Polder [9], consideraram essa hipótese e calcularam a influência dos efeitos de retardamento das forças de

van der Waals⁵, concluindo que isto implicava numa mudança na lei de potência: ela deveria ser mudada de r^{-6} para r^{-7} . A partir de então, as forças entre duas moléculas polarizáveis sem momento de dipolo permanente, considerando efeitos de retardamento, são conhecidas como *forças de Casimir-Polder*. Ainda naquele ano, Casimir rededuziu os resultados obtidos com Polder, porém de uma forma muito mais simples. O novo método introduzido por Casimir consistia em calcular a alteração na energia de ponto zero do vácuo eletromagnético causado pela presença das moléculas neutras; esta alteração induz o aparecimento de uma força sobre o sistema que o faz tender a uma configuração de menor energia. A partir de então, a interação entre corpos neutros imersos no vácuo ficou conhecida como efeito Casimir.

Casimir considerou, em seguida, um problema que atualmente é muito mais conhecido do que aquele da atração entre duas moléculas neutras: a atração entre duas placas neutras, paralelas, perfeitamente condutoras colocadas no vácuo. Casimir criou uma técnica que consistia em calcular a variação na energia de ponto zero do campo devida às placas. Tal diferença de energia, regularizada e renormalizada, é o que chamamos de energia de Casimir, dada por [10]:

$$E = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3}, \quad (1.3)$$

na qual d é a distância entre as placas e A é a área de cada uma delas. A força é dada pela derivada de E em relação a d , isto é

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c A}{240 d^4}. \quad (1.4)$$

É interessante pontuar que a novidade no trabalho de Casimir [10] não é a força de interação entre corpos neutros e sim o método utilizado, que relaciona a força entre as placas diretamente com a variação da energia de ponto zero do campo.

Uma generalização do efeito Casimir estático consiste em considerar situações em que os corpos estejam em movimento. Podemos imaginar a configuração de duas placas paralelas considerada anteriormente, porém com uma ou ambas em movimento. Neste caso, podemos nos perguntar: o que acontece com a força entre as placas? Algum fenômeno novo surge? Estas questões foram resolvidas no contexto da teoria quântica de campos, segundo a qual, uma placa no vácuo submetida a um movimento relativístico com aceleração não uniforme pode converter fótons virtuais em fótons reais diretamente observáveis [11], acompanhado de uma força de

⁵Ou London-van der Waals.

amortecimento que faz o papel de força de reação da radiação. Este fenômeno de criação de excitações do campo a partir do seu estado de vácuo foi denominado por J. Schwinger, nos anos 90, como Efeito Casimir Dinâmico (ECD). Todavia um experimento com fronteiras se movendo a velocidades próximas à da luz não é praticável, por conta disso várias propostas alternativas para implementar o ECD em laboratório eclodiram de modo que talvez a mais bem sucedida proposta tenha surgido no contexto da Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (EDQc), a qual possibilitou uma nova maneira de estudar fenômenos não estacionários que levam à criação de excitações de um sistema composto por um átomo artificial de dois níveis acoplado a um modo do campo eletromagnético. Outro efeito interessante que pode ser estudado no contexto da EDQc é o efeito anti-Jaynes-Cummings (AJC), cuja principal característica consiste na geração de uma excitação de campo e uma excitação atômica a partir do estado fundamental do átomo e do estado de vácuo do campo. Por conta disso, podemos dizer que o efeito AJC, assim como o ECD são fenômenos de vácuo⁶ e serão estudados com maior riqueza de detalhes mais tarde.

O resto desta dissertação está dividido em seis capítulos. No capítulo dois apresentaremos um modelo simples que descreve uma das interações mais fundamentais da natureza: a interação luz-matéria. Este modelo, denominado modelo de Rabi, descreve a dinâmica de interação de um átomo de dois níveis acoplado a um modo do campo eletromagnético em uma cavidade óptica. Em seguida apresentaremos a formulação matemática dos autoestados do Hamiltoniano deste sistema a fim de utilizá-los mais tarde como ferramenta para a realização dos cálculos desenvolvidos neste projeto de mestrado.

O capítulo três foi introduzido para tornar a dissertação mais completa. Nele discutimos com relativa profundidade a EDQc, apresentando todos os pré-requisitos necessários para o leitor se aprofundar de maneira confortável nos tópicos mais importantes deste trabalho. Além disso, neste capítulo ficarão claras as motivações de trabalhar com sistemas dinâmicos no contexto da EDQc, uma vez que esta área de pesquisa apresenta inúmeras aplicações tecnológicas e se mostra promissora para o aperfeiçoamento da computação quântica.

No capítulo quatro apresentaremos uma breve revisão sobre transições não adiabáticas em sistemas quânticos de dois níveis que ocorrem quando algum parâmetro do sistema varia rapidamente. Este fenômeno conhecido como transição Landau-Zener, será utilizado por nós posteriormente para propor protocolos mais sofisticados de criação de excitações a partir do vácuo.

⁶Embora ocorram também para estados iniciais diferentes do estado de vácuo.

O resultado original mais importante desta dissertação encontra-se no capítulo cinco, no qual analisaremos o sistema não-estacionário de EDQc quando um ou mais parâmetros do sistema variam harmonicamente com uma frequência η ajustável, ou como uma superposição de diferentes modulações senoidais. É conhecido na literatura [12, 13] que se essa frequência for ajustada da maneira apropriada a dinâmica do sistema apresentará comportamentos de ECD, anti-Efeito Casimir Dinâmico⁷ (AECD) e efeito AJC. Ademais estados emaranhados com dois fótons podem ser criados para o estado inicial de vácuo no regime apropriado. Nosso principal objetivo é mostrar que se a frequência de modulação for reduzida à metade, caracterizando aquilo que denominamos ressonância de segunda ordem, é possível reobter os mesmos fenômenos, contudo com uma dramática redução na taxa de oscilação entre os estados que se acoplam em cada fenômeno estudado. Também será mostrado como transições efetivas de Landau-Zener podem ser realizadas neste contexto, fornecendo uma maneira mais robusta para criar excitações experimentalmente. Por último, o capítulo seis está reservado para as conclusões e comentários finais desta dissertação.

⁷Em que excitações são aniquiladas coerentemente devido à modulação dos parâmetros.

Capítulo 2

Interação Luz-matéria

2.1 Introdução

Podemos conceber a interação luz-matéria como uma das interações mais fundamentais da natureza. O modelo matemático mais simples que descreve este sistema, denominado modelo de Rabi [14], consiste na interação entre um átomo de dois níveis e um modo do campo eletromagnético quantizado confinado em uma cavidade óptica. Este sistema foi amplamente estudado durante as últimas décadas e culminou com a eclosão da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EDQC) [15, 16, 17], área que consolidou-se de maneira fundamental na pesquisa em óptica quântica, uma vez que possibilitou, como aplicação, a geração de uma fonte de luz comprimida, engenharia de estados quânticos sofisticados e a construção de portas lógicas quânticas. Além disso possibilitou a implementação da interação átomo-campo utilizando arranjos formados por único átomo posicionado em uma cavidade, composta por dois espelhos, que confina o campo eletromagnético e aumenta a intensidade da interação entre o átomo e o campo relativamente ao espaço livre [18].

Embora o modelo de Rabi tenha sido amplamente estudado nas últimas décadas, uma solução exata surgiu apenas em 2011 com Braak [19]. Apesar disso, soluções analíticas aproximadas fornecem excelentes resultados para a maioria dos fenômenos estudados neste contexto. A aproximação mais empregada para obtenção de soluções analíticas é a afamada *aproximação de onda girante*, que será descrita com mais detalhes por nós no capítulo 5 e no apêndice A. Lançando mão dessa aproximação é possível eliminar certos termos do Hamiltoniano que descreve o modelo de Rabi, denominados termos *contra-girantes*, culminando com um Hamiltoniano trivialmente diagonalizável denominado Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JC) [20, 21]. Assim,

o Hamiltoniano de JC foi exaustivamente explorado nas últimas décadas no contexto da óptica quântica e principalmente na EDQC, de modo que muitos experimentos corroboram as previsões teóricas. Ademais, o modelo de JC trouxe à tona interessantes fenômenos oriundos da natureza quântica do campo eletromagnético, por exemplo: oscilações de Rabi [14], colapsos e ressurgimentos da inversão de população [22, 23], emaranhamento entre átomo e campo [24] entre outros. Além disso, a interação átomo-campo pode ser realizada experimentalmente de maneira altamente controlável numa arquitetura que une EDQC e matéria condensada usando qubits supercondutores como átomos artificiais de dois níveis acoplados fortemente a um guia de onda supercondutor. Esta área, conhecida como eletrodinâmica quântica de circuitos, será explorada com mais detalhes no capítulo 3.

Embora o modelo de JC forneça resultados corroborados pela experiência, foi demonstrado que os termos contra-girantes do Hamiltoniano de Rabi são responsáveis por diversos fenômenos inauditos, por exemplo: caos quântico [25, 26, 27], ECD em microcavidades supercondutoras [28], efeito AJC [13], AECD [12], geração espontânea de fótons no regime ultra-forte [29], impossibilidade de atingir o zero absoluto de temperatura no contexto da termodinâmica quântica [30], entre outros. Neste capítulo estamos interessados em apresentar as ferramentas mais básicas necessárias para estudar a dinâmica de interação do sistema átomo-campo. Caso o leitor queira se aprofundar neste estudo recomendamos a leitura do capítulo 14 da referência [23].

2.2 O modelo de Rabi

Vamos considerar o modelo elementar de um átomo de hidrogênio composto por um próton de massa m_p na posição \vec{r}_p e um elétron de massa m_e na posição \vec{r}_e , acoplado com um modo ω_0 do campo eletromagnético quantizado em uma cavidade. Vamos considerar ainda que o átomo se comporta como um dipolo com momento de dipolo $\vec{P} = e\vec{r}$, tal que \vec{r} é o vetor posição relativa entre o próton e o elétron. Além disso, vamos supor que o campo elétrico na cavidade não varia consideravelmente em relação ao tamanho do átomo. Portanto, na aproximação de dipolo, os campos $\vec{E}(\vec{r}_e, t)$ e $\vec{E}(\vec{r}_p, t)$, na posição do elétron e do próton, respectivamente, são aproximadamente iguais entre si e ao campo na posição \vec{R} do centro de massa do sistema, isto é $\vec{E}(\vec{r}_e, t) \approx \vec{E}(\vec{r}_p, t) \approx \vec{E}(\vec{R}, t)$. Por fim, vamos supor que o átomo possui apenas dois graus de liberdade internos, o estado excitado $|e\rangle$ e o estado fundamental $|g\rangle$ com energias $E_2 = \hbar\Omega_2$ e $E_1 = \hbar\Omega_1$, respectivamente. Este arranjo pode ser obtido ajustando a geometria da cavidade

de forma que a frequência do modo ω_0 fique muito próxima da frequência de transição atômica $\Omega_0 = \Omega_2 - \Omega_1$ induzindo transições entre os níveis. Sendo assim, o Hamiltoniano do campo livre na cavidade é dado por:

$$\hat{H}_{campo} = \hbar\omega_0 \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.1)$$

Uma vez que estamos supondo que apenas os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ possam ser populados, podemos escrever o Hamiltoniano do átomo nesta base da seguinte maneira:

$$\hat{H}_{atomo} = E_2|e\rangle\langle e| + E_1|g\rangle\langle g|. \quad (2.2)$$

Podemos manipular algebricamente esta equação a fim de reescrevê-la em termos da frequência de transição atômica Ω_0 , isto é

$$\hat{H}_{atomo} = \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}(E_2 + E_1), \quad (2.3)$$

tal que $\Omega_0 = \Omega_2 - \Omega_1$ e $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ é a matriz de spin de Pauli. O Hamiltoniano de interação entre o átomo de dois níveis, com momento de dipolo $\hat{\mathcal{P}} = e\hat{r}$, e o campo toma a forma

$$\hat{H}_{int} = -e\hat{r} \cdot \hat{E}(\hat{R}, t). \quad (2.4)$$

Podemos usar a relação de completeza para expressar o operador posição \hat{r} na base $|\vec{r}\rangle$,

$$\hat{r} = \int d^3r |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| \hat{r}.$$

Devemos notar que o operador dipolo elétrico $\hat{\mathcal{P}} = e\hat{r}$ é ímpar em relação à inversão atômica pelo centro do átomo ($\hat{r} \rightarrow -\hat{r}$) e que o Hamiltoniano (2.3) é invariante em relação a esta transformação, portanto seus autoestados têm paridade bem definida. Deste modo os elementos diagonais $\langle e|\hat{r}|e\rangle$ e $\langle g|\hat{r}|g\rangle$ são identicamente nulos, uma vez que a integração é feita em todo o espaço e o integrando é uma função ímpar, isto é

$$\langle j|\hat{r}|j\rangle = \int d^3r |\Psi_j(r)|^2 \vec{r} = 0, \quad (2.5)$$

na qual $j = e, g$ e $|\Psi_j(\vec{r})| = |\langle j|\hat{r}^\dagger| \rangle|$. Por outro lado os elementos não diagonais tomam a forma

$$\langle e|\hat{r}|g\rangle = \int d^3r \Psi_e^*(r) \vec{r} \Psi_g(r), \quad (2.6)$$

$$\langle e|\hat{r}|g\rangle = \int d^3r \Psi_g^*(r) \vec{r} \Psi_e(r). \quad (2.7)$$

Isto posto, podemos novamente utilizar a relação de completeza e escrever o operador momento na base dos estados de energia do átomo

$$e\hat{r} = \vec{\mathcal{P}}|e\rangle\langle g| + \vec{\mathcal{P}}^*|g\rangle\langle e|, \quad (2.8)$$

na qual $\vec{\mathcal{P}} \equiv e\langle e|\hat{r}|g\rangle$, e $\vec{\mathcal{P}}^* \equiv e\langle g|\hat{r}|e\rangle$. Sendo assim o operador momento de dipolo descreve transições entre os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$, uma vez que $e\hat{r}|g\rangle = \vec{\mathcal{P}}|e\rangle$ e $e\hat{r}|e\rangle = \vec{\mathcal{P}}^*|g\rangle$. Podemos ainda escrever (2.8) em termos das matrizes de Pauli $\hat{\sigma}_+ \equiv |e\rangle\langle g|$ e $\hat{\sigma}_- \equiv |g\rangle\langle e|$, tal que $\hat{\sigma}_+$ cria uma excitação atômica e $\hat{\sigma}_-$ destroi uma excitação atômica

$$e\hat{r} \equiv \vec{\mathcal{P}}\hat{\sigma}_+ + \vec{\mathcal{P}}^*\hat{\sigma}_-. \quad (2.9)$$

Sendo assim podemos combinar a equação (2.9) com a equação do campo quantizado na cavidade $\hat{E}(\vec{R}, t) = \varepsilon_0 \vec{u}(\vec{R}) i(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ ¹ a fim de reescrever o Hamiltoniano de interação como

$$\hat{H}_{int} = -\varepsilon_0 i(\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{u}(\vec{R})\hat{\sigma}_+ + \vec{\mathcal{P}}^* \cdot \vec{u}(\vec{R})\hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.10)$$

na qual $\vec{u}(\vec{R})$ é a função de modos na cavidade e $\varepsilon_0 = \sqrt{\hbar\omega_0/2\varepsilon_0 V}$ é a unidade de quantização do campo elétrico (muitas vezes chamado de campo elétrico por fóton) tal que V é o volume da cavidade. Deste modo, após algumas manipulações algébricas chegamos a

$$\hat{H}_{int} = \hbar g_0(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.11)$$

no qual $g = |\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{u}(\vec{r})|_{\varepsilon_0/\hbar}$ é a constante de acoplamento átomo-campo. Finalmente podemos combinar (2.1), (2.3) e (2.11) chegando ao Hamiltoniano total do sistema átomo-campo

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{n} + \frac{\hbar\Omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (2.12)$$

¹Para mais detalhes sobre a quantização do campo na cavidade ver capítulo 10 da referência [23].

conhecido como Hamiltoniano de Rabi. Podemos ainda reescrever (2.12) da seguinte maneira

$$\hat{H} = \hbar\omega_0\hat{n} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar g_0(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_-\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger). \quad (2.13)$$

Nota-se que a equação (2.13) depende do objeto $(\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{a})$, denominado termo girante, e do objeto $(\hat{\sigma}_-\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger)$, denominado termo contra-girante. Durante muitas décadas este último termo foi desprezado na maioria dos problemas em óptica quântica por ser contraintuitivo, uma vez que representa a transição do estado excitado para o fundamental acompanhada da absorção de um fóton e a transição do estado fundamental para o excitado seguida da criação de um fóton. Em outras palavras, graças ao termo contra-girante é possível acoplar os estados $|g, 0\rangle \leftrightarrow |e, 1\rangle$, isto é, existe uma probabilidade não nula de medir um fóton na cavidade mesmo que inicialmente o átomo e o campo estejam no estado fundamental, o que representa um fóton criado a partir do vácuo! Isto causou bastante estranheza na comunidade científica durante a segunda metade do século XX pois acreditava-se que o termo contra-girante não conservava energia. Todavia hoje em dia sabemos que isso não é verdade, conforme mostrado em [31]. Além disso, o termo contra-girante está associado ao aparecimento de muitos fenômenos interessantes e contraintuitivos como o ECD, AECD e o efeito AJC que serão estudados com mais detalhes no capítulo 5.

2.3 Aproximação de Onda Girante

Conforme discutimos na seção anterior os termos contra-girantes foram, durante muitas décadas, negligenciados por conta de seu conteúdo exótico. O método utilizado em geral para eliminar estes termos das contas será apresentado nesta seção. Contudo devemos salientar que este não é um método confiável uma vez que só faz sentido na representação de interação, não havendo portanto qualquer justificativa crível para desprezá-los na representação de Schrödinger. Motivados por isso, no apêndice A apresentamos um método aproximativo matematicamente consistente que não depende da representação de interação e que fornece resultados teóricos satisfatórios, conforme veremos mais tarde. Com essa informação em mente vamos temporariamente mudar o Hamiltoniano (2.11) para a representação de interação lançando mão da transformação unitária $U = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$, com $H_0 = \hbar\omega_0\hat{n} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\hat{\sigma}_z$. Nesta representação o

Hamiltoniano (2.11) toma a seguinte forma

$$\hat{H}_{int}^{(I)} = \hbar g_0 \left(\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i\Delta_- t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i\Delta_- t} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i\Delta_+ t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i\Delta_+ t} \right), \quad (2.14)$$

tal que $\Delta_\pm = \omega_0 \pm \Omega_0$. Podemos notar que o termo girante é multiplicado pelo fator exponencial que envolve a *dessintonia* Δ_- , dada pela diferença entre a frequência do campo ω_0 e a frequência de transição atômica Ω_0 . Em contraste, o termo contra-girante, é multiplicado pelo fator que depende da soma dessas frequências. Desta forma, quando o sistema está próximo da ressonância, isto é, quando $\Delta_- = 0$, os termos contra-girantes oscilam com duas vezes a frequência óptica ($2\omega_0$), enquanto que os termos girantes não apresentam comportamento oscilatório. Uma vez que a equação de Schrödinger é uma equação diferencial de primeira ordem no tempo podemos integra-la concluindo que o termo girante e contra-girante são aproximadamente proporcionais a $\frac{g_0}{i\Delta_-} (e^{i\Delta_- T} - 1)$ e $\frac{g_0}{i\Delta_+} (e^{i\Delta_+ T} - 1)$, respectivamente. Sendo assim, na condição $\Delta_- \ll \Delta_+$ podemos desprezar os termos contra-girantes contanto que a condição

$$\frac{g_0}{\Delta_+} \ll 1, \quad (2.15)$$

seja satisfeita, caracterizando o que denominamos de aproximação de onda girante (RWA, do inglês *Rotating Wave Approximation*). Podemos notar que, a partir dessas condições, o RWA será tanto melhor quanto mais próximo o sistema estiver da ressonância, uma vez que o termo contra-girante oscilará muito rapidamente em relação ao termo girante. Esta condição é geralmente corroborada em experimentos usuais de EDQC [32], de modo que $g_0 \approx 10^{-5} \omega_0$ com ω_0 da ordem de $10GHz$. Isto posto, podemos desprezar o termo contra-girante na equação (2.14) obtendo

$$\hat{H}_{int}^{(I)} = \hbar g_0 \left(\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i\Delta_- t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i\Delta_- t} \right), \quad (2.16)$$

Aplicando a transformação inversa recuperamos o Hamiltoniano total na representação de Schrödinger sujeito ao RWA

$$\hat{H}_{JC} = \hbar \omega_0 \hat{n} + \frac{\hbar \Omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g_0 \left(\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+ \hat{a} \right), \quad (2.17)$$

conhecido como Hamiltoniano de JC [23], o qual foi verificado em diversos experimentos na última década [33, 34, 35, 36, 37]. Em síntese, aqui o RWA é utilizado para eliminar o termo

contra-girante do Hamiltoniano de Rabi. Todavia este termo não pode ser desprezado no caso não-estacionário, assim como na presença de defasagem forte [39]. Ademais, conforme discutimos brevemente na seção anterior ele é responsável por criar excitações do campo a partir do estado de vácuo, um efeito análogo ao ECD, conforme mostraremos com mais detalhes no capítulo 5.

2.4 Autoestados do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Devido ao RWA o termo de interação girante no Hamiltoniano de JC conserva o número de excitações $\hat{N} = \hat{n} + |e\rangle\langle e| = \hat{n} + (1 + \hat{\sigma}_z)/2$, uma vez que \hat{H}_{JC} e \hat{N} comutam, isto é, $[\hat{H}_{JC}, \hat{N}] = 0$. Ademais é imediata a conclusão de que o Hamiltoniano de interação acopla estados $|g, n+1\rangle \rightarrow |e, n\rangle$, que formam um subespaço bi-dimensional invariante em relação a (2.17). O Hamiltoniano de JC pode ser trivialmente diagonalizado², de modo que seus autoestados

$$|\varphi_{n,+}\rangle = \sin \theta_n |g, n\rangle + \cos \theta_n |e, n-1\rangle, \quad (2.18)$$

$$|\varphi_{n,-}\rangle = \cos \theta_n |g, n\rangle - \sin \theta_n |e, n-1\rangle, \quad (2.19)$$

juntamente com $|\varphi_0\rangle = |g, 0\rangle$ formam uma base completa no espaço de Hilbert do sistema átomo-campo

$$\langle \varphi_{n,S} | \varphi_{n,T} \rangle = \delta_{S,T}, \quad (2.20)$$

tal que $S = \pm 1$ e n é o número de excitações do sistema átomo-campo. Isto posto, podemos escrever

$$\hat{H}_{JC} |\varphi_{n,S}\rangle = \lambda_{n,S} |\varphi_{n,S}\rangle, \quad (2.21)$$

tal que $\lambda_{n,S}$ são os correspondentes autovalores do Hamiltoniano de JC dados por

$$\lambda_{n,S} = \omega n - \frac{\Delta_-}{2} + S \frac{\beta_n}{2}, \quad (2.22)$$

²Para mais detalhes sobre como diagonalizar o Hamiltoniano de JC recomendamos a leitura do apêndice B da referência [12, 38]

com $\beta_n = \sqrt{\Delta_-^2 + 4g^2n}$. O ângulo θ_n definido em (2.18) e (2.19) pode ser escrito em termos de β_n e Δ_- da seguinte maneira:

$$\tan \theta_n = \frac{\beta_n + \Delta_-}{2g\sqrt{n}}. \quad (2.23)$$

Os estados $|g, n+1\rangle$ e $|e, n\rangle$ são por vezes denominados estados pelados de JC. Por outro lado a base formada pelos estados $|\varphi_{n,S}\rangle$ é conhecida como base dos *estados vestidos* ou simplesmente *base vestida*.

2.4.1 Regime Ressonante

Quando a frequência da cavidade for igual à frequência de transição atômica, a dessintonia átomo-campo tornar-se-á nula³, isto é, $\Delta_- = 0$. Como consequência disso: $\tan \theta_n = 1 \rightarrow \theta_n = \frac{\pi}{4}$, portanto $\sin \theta_n = \cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Neste regime portanto, podemos escrever os autoestados de JC (2.18) e (2.19) de maneira compacta como segue

$$|\varphi_{n,S}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, n\rangle + S|e, n-1\rangle), \quad (2.24)$$

de modo que os correspondentes autovalores podem ser obtidos a partir de (2.22)

$$\lambda_{n,S} = \omega n + Sg\sqrt{n}. \quad (2.25)$$

A dinâmica do sistema átomo-campo é portanto bastante simples no regime ressonante, uma vez que $|\varphi_{n,S}\rangle$ é composto pela superposição de estados pelados com igual probabilidade, sendo estados maximamente emaranhados.

2.4.2 Regime Dispersivo

Em contraste ao regime ressonante, o regime dispersivo é caracterizado por um valor grande da dessintonia em relação ao acoplamento de acordo com a seguinte desigualdade: $\Delta_-/2 \gg g_0\sqrt{n}$. Sendo assim, podemos manipular algebricamente a equação (2.22) e reescrevê-la como

$$\lambda_{n,S} = \omega_0 n - \frac{\Delta_-}{2} + \frac{S|\Delta_-|}{2} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{g_0}{\Delta_-} \right)^2 n}. \quad (2.26)$$

³Em geral o regime ressonante é válido quando $g_0 \gg \Delta_-$.

Expandindo a raiz quadrada do lado direito da equação acima de acordo com $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$, obtemos

$$\lambda_{n,+} = \omega_0 n - \frac{\Delta_-}{2} + \mathcal{D} \left[\frac{\Delta_-}{2} + \delta_- n - \alpha n^2 + 2\alpha_3 n^3 + \dots \right], \quad (2.27)$$

$$\lambda_{n,-} = \omega_0 n - \frac{\Delta_-}{2} - \mathcal{D} \left[\frac{\Delta_-}{2} + \delta_- n - \alpha n^2 + 2\alpha_3 n^3 + \dots \right], \quad (2.28)$$

na qual $\delta_- = \frac{g_0^2}{\Delta_-}$, $\alpha_3 = \frac{g_0^6}{\Delta_-^3}$, $\mathcal{D} = \frac{|\Delta_-|}{\Delta_-} = \frac{\Delta_-}{|\Delta_-|} = \pm 1$ e $\alpha = \frac{g_0^4}{\Delta_-^3}$ é conhecido como termo não linear de Kerr. Podemos observar a partir destas duas equações que os autovalores $\lambda_{n,\pm}$ dependem do módulo da dessintonia Δ_- através de um novo índice \mathcal{D} introduzido por nós após a expansão. Isto posto, podemos escrever estes autovalores compactamente indexados por \mathcal{D} da seguinte maneira:

$$\lambda_{n,\mathcal{D}} = \omega_0 n + \delta_- n - \alpha n^2 + 2\alpha_3 n^3 + \dots \quad (2.29)$$

$$\lambda_{n,-\mathcal{D}} = \omega_0 n - \Delta_- - \delta_- n + \alpha n^2 - 2\alpha_3 n^3 + \dots \quad (2.30)$$

Ademais, no regime dispersivo podemos representar os estados vestidos aproximadamente por (em primeira ordem de $\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{n}$)

$$|\varphi_{n,\mathcal{D}}\rangle \simeq |g, n\rangle + \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{n} |e, n-1\rangle, \quad (2.31)$$

$$|\varphi_{n,-\mathcal{D}}\rangle \simeq -\mathcal{D} \left\{ -\frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{n} |g, n\rangle + |e, n-1\rangle \right\}. \quad (2.32)$$

Uma vez que estes estados são determinados, bem como suas auto energias, podemos descrever a dinâmica do sistema átomo-campo satisfatoriamente. Vamos lançar mão de todas as ferramentas pronunciadas neste capítulo para conduzir nossos cálculos no capítulo 5, no qual apresentaremos os resultados originais desta dissertação densenvolvidos ao longo deste projeto de mestrado. Antes disso, no entanto, será necessário apresentar, nos dois próximos capítulos, alguns ingredientes de vital importância para a compreensão do modelo que estamos interessados em estudar.

Capítulo 3

Eletrodinâmica Quântica de Circuitos

3.1 Introdução

No capítulo anterior apresentamos um modelo simples que descreve uma das interações mais fundamentais da natureza: o acoplamento de um átomo de dois níveis com um modo do campo eletromagnético em uma cavidade óptica. Conforme discutimos, este sistema foi amplamente estudado durante a segunda metade do século XX e culminou com a eclosão da EDQC. Todavia na última década veio à tona uma nova área conhecida como Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (EDQc), a partir da qual assomou-se uma maneira singular de estudar este tipo de interação utilizando circuitos supercondutores em vez de átomos reais. Este tipo de configuração fez-se possível pois admiravelmente alguns circuitos, embora formados por centenas de bilhões de átomos, se comportam como se fossem um único “átomo” cujos níveis de energia e a magnitude de acoplamento com o campo eletromagnético podem ser convenientemente manipulados devido a aplicação de voltagens e campos magnéticos. Estes circuitos, conhecidos como *átomos artificiais* ou *qubits supercondutores*, além de possibilitarem a realização de regimes outrora impossíveis à luz da EDQC, são também a mais promissora promessa para o aperfeiçoamento e desenvolvimento de computadores quânticos, conforme discutiremos com mais detalhes ao longo deste capítulo.

Em síntese, a EDQc estuda a interação entre átomos artificiais (qubits supercondutores) acoplados ao campo eletromagnético [40, 41, 42], de modo que convencionalmente um qubit é posicionado na posição de anti-nó de um modo estacionário de um ressonador¹ de linha de

¹Para mais detalhes sobre ressonadores, que vão de suas propriedades à sua fabricação, recomendamos a leitura da referência [45].

transmissão unidimensional² [43, 40, 44], que se comporta como uma cavidade. Não estamos, no entanto, interessados em derivar todos os pormenores da EDQc, uma vez que já existe na literatura uma razoável quantidade de teses detalhando-a satisfatoriamente [47, 48, 49, 50]. Isto posto, nas próximas seções apresentaremos uma breve introdução teórica sobre os fundamentos mais relevantes para a implementação da interação átomo-campo no contexto da EDQc.

3.2 Junções Josephson

A interpretação da supercondutividade como sendo um fenômeno quântico macroscópico surgiu em 1935 com London [51]. Contudo a teoria que viria a explicar satisfatoriamente a supercondutividade a baixas temperaturas foi formulada somente em 1957, graças ao trabalho de John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer. Esta teoria, conhecida como teoria BCS³, sugere que elétrons, quando no estado supercondutor, se agrupam em pares chamados pares de Cooper, de modo que estes elétrons são ligados com uma energia tipicamente da ordem de $10^{-3}eV$ para supercondutores convencionais ($T < 25K$). De acordo com o princípio da exclusão de Pauli, dois elétrons com o mesmo conjunto de números quânticos não podem ocupar o mesmo nível de energia. Todavia os pares de Cooper (ou superelétrons) curiosamente se comportam de maneira muito diferente da de elétrons isolados; eles atuam como bósons, partículas de spin inteiro, podendo se condensar em um mesmo nível de energia. Dessa maneira, de acordo com a teoria BCS, os pares de Cooper podem ser descritos por uma única função de onda macroscópica com fase θ e com cargas e massas efetivas dadas respectivamente por $e^* = 2e$ e $m^* = 2m$, tal que m e e são a massa e a carga de um elétron, respectivamente. Em síntese, a atração de pares de elétrons é a responsável pelo fenômeno da supercondutividade, de modo que estes pares se condensam e fluem pelo material sem qualquer resistência.

Uma aplicação interessante consiste no aparato formado por dois supercondutores fracamente acoplados por uma fina barreira isolante, conforme ilustrado na figura 3.1 b. Este dispositivo, conhecido como Junção Josephson, recebeu este nome depois que Brian Josephson previu, em 1962, que pares de elétrons podem tunelar através da barreira entre os dois supercondutores, sem nenhuma resistência, gerando uma corrente elétrica que flui pelo material mesmo na ausência de diferença de potencial [52]. No ano seguinte, esse fenômeno foi comprovado por Anderson e Rowell [53], o que rendeu a Josephson o prêmio Nobel de física dez anos

²Recentemente ressonadores 3D vem sendo amplamente utilizados [46]

³Nome formado com as iniciais dos sobrenomes dos autores.

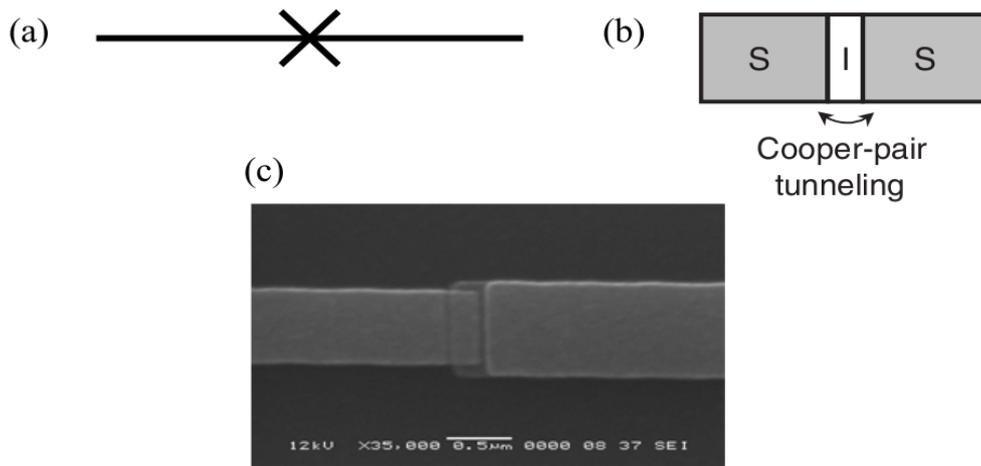


Figura 3.1: a) Representação esquemática de uma Junção Josephson em um circuito. b) Representação esquemática de uma Junção Josephson na qual as áreas cinzas representam os supercondutores da junção e a área intermediária branca representa o material isolante através do qual os pares de Cooper tunelam. c) Escaneamento por micrografia eletrônica de uma junção Josephson formada por dois eletrodos de alumínio supercondutor separados por uma barreira de óxido de alumínio. (Figuras b e c reproduzidas respectivamente das referências [54] e [55])

mais tarde. As equações que relacionam a corrente não linear de tunelamento I e a voltagem U através da junção são dadas por

$$I(t) = I_c \sin \phi(t), \quad (3.1)$$

$$U(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (3.2)$$

nas quais ϕ é a diferença de fase das funções de onda macroscópicas que descrevem ambos supercondutores. Conforme podemos observar a partir da equação (3.2), quando a diferença de fase é constante a voltagem é nula; apesar disso, uma corrente flui através do material podendo atingir um valor máximo igual a I_c , também denominada corrente crítica da junção (que depende das características dos supercondutores que formam o dispositivo). Esse fenômeno da passagem de corrente mesmo com voltagem nula é denominado efeito Josephson DC. Por outro lado, quando a corrente ultrapassa seu valor crítico, a voltagem tornar-se-á não nula (dependendo da condutividade da barreira). Assim, se uma voltagem DC ($U(t) = U_0$) for aplicada na junção, podemos mostrar, por integração direta de (3.2), que ϕ evolui linearmente com o tempo de acordo com

$$\phi = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} U_0 t. \quad (3.3)$$

Deste modo, a junção é atravessada por uma corrente alternada descrita por

$$I = I_c \sin(\omega_J t + \phi_0), \quad (3.4)$$

tal que $\omega_J = \frac{2e}{\hbar} U_0$ é a frequência da corrente que é em geral bastante elevada. Se por exemplo $U = 1\mu V$, teremos $\omega_J = 438.6 MHz$, que está no domínio das microondas. Assim sendo, a energia E_J armazenada na junção, denominada energia de Josephson, pode ser obtida calculando o trabalho⁴ para deslocar os pares de Cooper através da junção

$$E_J = \int_0^t IU(t)dt. \quad (3.5)$$

Substituindo as equações (3.1) e (3.2) em (3.5) obtemos

$$E_J = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} [1 - \cos \phi]. \quad (3.6)$$

Podemos ainda tomar a derivada temporal de (3.1) obtendo a dinâmica da corrente

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2eUI_c}{\hbar} \cos \phi. \quad (3.7)$$

Essa equação descreve um indutor de indutância L_J , que de acordo com a definição convencional $U = L \frac{dI}{dt}$, toma a seguinte forma:

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \phi}, \quad (3.8)$$

de modo que $\Phi_0 = h/2e$ é o quantum de fluxo magnético (veja a seção 3.2.3 da tese de D. Schuster para mais detalhes sobre a quantização do fluxo [47]). Portanto, uma junção Josephson pode ser pensada como um indutor cuja indutância é uma função não linear da diferença de fase ϕ entre as ilhas supercondutoras. Além disso, a geometria de uma junção Josephson (figura 2.1 b) é similar à de um capacitor plano, deste modo há uma pequena capacitância C_J associada à junção. Conforme veremos com mais detalhes nas próximas seções, esta indutância não linear combinada com a capacitância intrínseca da junção Josephson, C_J , resulta em um oscilador anarmônico que serve de base para a confecção de uma grande variedade de circuitos supercondutores não triviais que se comportam como se fossem um único átomo. Estes dispositivos,

⁴ $dW = pdt \rightarrow dW = IUdt.$

também conhecidos como qubits supercondutores (sistemas quânticos macroscópicos de dois níveis altamente controláveis⁵), tornaram-se recentemente objeto de intensa pesquisa científica, pois podem ser utilizados como unidade básica de codificação, armazenamento e transmissão de dados [56, 57, 58, 59] em computadores quânticos. Em outras palavras, o qubit é o análogo quântico do bit, havendo contudo uma diferença significativa entre ambos: enquanto um bit só pode ser encontrado em apenas um de dois estados possíveis, 0 ou 1, o qubit, por se tratar de um dispositivo quântico, pode se encontrar numa superposição de dois estados, aumentando exponencialmente a realização de cálculos em paralelo.

Embora o problema da decoerência ainda seja um dos maiores impedimentos para o desenvolvimento de computadores quânticos robustos que utilizam qubits supercondutores, um grupo de pesquisadores da Universidade de Columbia conseguiram, em 2011, controlar a decoerência em um sistema quântico complexo, neste caso, um conjunto de moléculas magnéticas chamadas moléculas de ferro-8 [60]. Neste experimento, os pesquisadores prepararam uma série cristalina de moléculas de ferro-8 em uma superposição quântica, tal que o colapso dessa superposição, devido à decoerência, foi observado. Eles concluíram que o tempo de decoerência é de aproximadamente $500\mu s$, uma eternidade para potenciais dispositivos implementados em computação quântica, uma vez que as memórias eletrônicas atuais operam na faixa de nanosegundos. É interessante ressaltar que recentemente um algoritmo quântico com três qubits, desenvolvido em parceria com a google, foi utilizado com sucesso para realizar cálculos de estrutura eletrônica de hidrogênio molecular [61]. Assim, tanto as moléculas magnéticas quanto os qubits supercondutores podem ser candidatos promissores para o desenvolvimento de computadores quânticos no futuro. Ademais estes dispositivos podem ser usados para testar os princípios mais fundamentais da mecânica quântica em escala macroscópica, assim como realizar experimentos em óptica quântica outrora impossíveis, uma vez que átomos artificiais alcançam regimes de acoplamento com campo até 10^4 vezes maiores do que o atingido em sistemas atômicos reais [40]. Por fim, qubits supercondutores podem ser controlados por correntes, voltagens e campos magnéticos, o que os caracteriza como dispositivos quânticos macroscópicos altamente controláveis, sendo potenciais objetos de inovação tecnológica e desenvolvimento científico de ponta.

⁵Em outras palavras, os qubits supercondutores, assim como átomos reais, têm níveis discretos de energia e exibem oscilações coerentes entre esses níveis.

3.3 Variedades de átomos artificiais

Diferentes tipos de átomos artificiais diferenciam-se pela maneira como suas propriedades são controladas. Exemplos incluem qubits de fluxo [62, 63, 64], qubits de fase [65], qubits de carga (controlados pela voltagem na entrada do circuito, também conhecidos como *Cooper pair box*) [66, 67, 68] e qubits híbridos denominados transmons [69, 70, 71]. Nós, nas próximas subseções, limitar-nos-emos a descrever com um pouco mais de detalhes apenas estes dois últimos dispositivos. No entanto, possivelmente estes tipos de átomos artificiais nem existirão num futuro próximo devido ao surgimento de novos tipos de dispositivos, como Xmons [61] e transmons verticais [72].

3.3.1 Cooper pair box

Entre os vários qubits supercondutores desenvolvidos atualmente, o arranjo conhecido como “Cooper pair box” (CPB) consiste de uma junção Josephson com energia E_J e capacitância C_J acoplada a uma voltagem contínua V_g que injeta no circuito uma carga de polarização Q_g através da capacitância C_g , conforme esquematizado na figura 3.2. Neste circuito há duas energias relevantes: $E_C = e^2/2C_\Sigma$, que é a energia de cada elétron armazenado no capacitor de capacitância total $C_\Sigma = C_g + C_J$, e a energia de Josephson, E_J , associada aos pares de Cooper que tunelam através da junção. Dessarte o Hamiltoniano deste arranjo toma a seguinte forma [73, 50]:

$$\hat{H}_{CPB} = 4E_C(\hat{\mathcal{N}} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi}. \quad (3.9)$$

na qual $\hat{\mathcal{N}}$ é o operador número de pares de Cooper em excesso na ilha supercondutora e $n_g = Q_g/2e$ é a carga reduzida (adimensional) associada à voltagem externa V_g . Na equação (3.9) $\hat{\mathcal{N}}$ e $\hat{\phi}$ são variáveis canonicamente conjugadas, tal que $\hat{\mathcal{N}} = -i\frac{\partial}{\partial \hat{\phi}}$, $[\hat{\mathcal{N}}, e^{\pm i\hat{\phi}}] = \pm e^{\pm i\hat{\phi}}$ e $\hat{\mathcal{N}}|\mathcal{N}\rangle = \mathcal{N}|\mathcal{N}\rangle$. Por conseguinte o conjunto de estados $\{|\mathcal{N}\rangle\}$ forma uma base completa (chamada base de carga) para a CPB; devemos no entanto ressaltar que estes estados referem-se ao número de pares de Cooper em excesso nos supercondutores, e não aos estados de energia de CPB. Prosseguindo, podemos reescrever o Hamiltoniano (3.9) na base de carga conforme

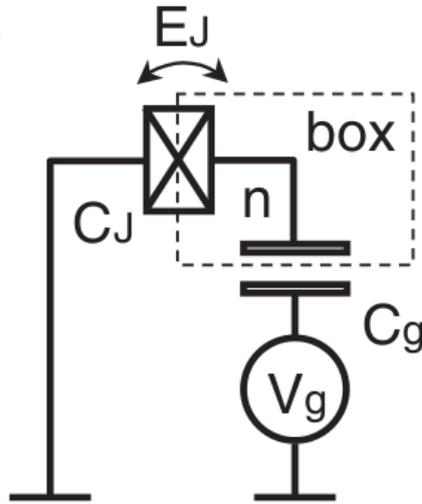


Figura 3.2: Diagrama esquemático de uma CPB. (Figura reproduzida da referência [54])

segue

$$\hat{H}_{CPB} = 4E_C \sum_{\mathcal{N}} (\mathcal{N} - n_g)^2 |\mathcal{N}\rangle\langle\mathcal{N}| - E_J \sum_{\mathcal{N}} (|\mathcal{N} + 1\rangle\langle\mathcal{N}| + |\mathcal{N}\rangle\langle\mathcal{N} + 1|). \quad (3.10)$$

Quando a energia de carga é muito maior que a energia de Josephson, $E_C \gg E_J$, de modo que o acoplamento de Josephson seja uma pequena perturbação, ao ajustar a voltagem externa de modo que $n_g = \pm 0, 5$, o arranjo é reduzido a um sistema de dois níveis que é descrito pelo Hamiltoniano⁶:

$$\hat{H}_{CPB} \approx 2E_C (1 - n_g) \hat{\sigma}_z - \frac{E_J}{2} \hat{\sigma}_x,$$

tal que $\hat{\sigma}_z = 2\hat{\mathcal{N}}$ e $\hat{\sigma}_x = |\mathcal{N} + 1\rangle\langle\mathcal{N}| + |\mathcal{N}\rangle\langle\mathcal{N} + 1|$ são os operadores de Pauli de pseudo-spin. Este Hamiltoniano pode ser interpretado como uma partícula de spin 1/2 em um campo magnético $B = E_J \hat{x} + 4E_C (1 - n_g) \hat{z}$, de modo que os estados possíveis são uma superposição de estados de carga com $\mathcal{N} = 0, 1$, isto é, $(c_0|0\rangle \pm c_1|1\rangle)$. Em outras palavras, quando a voltagem externa V_g é ajustada apropriadamente no limite de carga ($E_C \gg E_J$), a CPB comportar-se-á como um sistema de dois níveis.

Em 1999, Nakamura *et al.* [66] mostraram como os estados de um qubit formado por um CPB podem ser manipulados usando pulsos rápidos de voltagem, de modo que oscilações coerentes entre os dois estados puderam ser observadas apenas variando a duração de cada

⁶Uma Cooper pair box também opera como um sistema de dois níveis quando $E_C \approx E_J$ como pode ser observado no primeiro gráfico da figura 3.3.

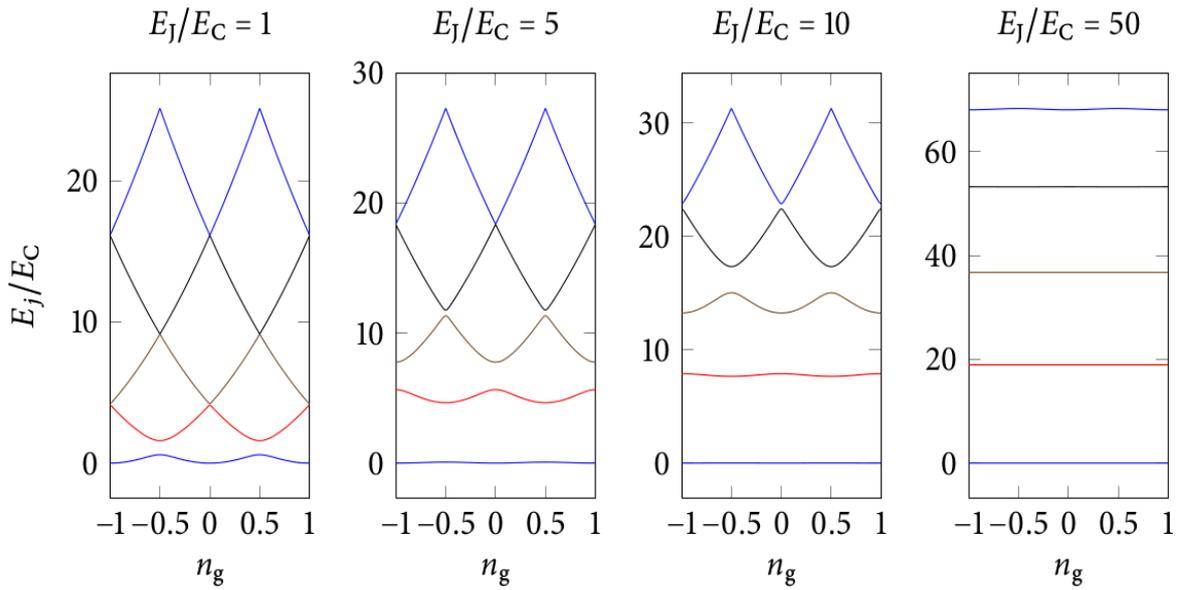


Figura 3.3: Níveis de energia E_j de uma CPB, com E_j em unidades de E_C . Para pequenos valores de E_J/E_C o sistema está no regime de carga, de modo que as bandas tem forma parabólica. Por outro lado, para grandes valores de E_J/E_C as bandas tornam-se planas e espaçadas. (Figura reproduzida da referência [48])

pulso. Três anos mais tarde, em 2002, Vion et al. [74] mostraram que, de fato, a voltagem que otimiza o funcionamento de uma CPB como um qubit corresponde aos pontos $n_g = \pm 0.5$, conhecidos como pontos de degenerescência de carga ou simplesmente “sweet spots”. Contudo, devido ao acoplamento com o ambiente, o qubit estará sujeito a flutuações no valor de n_g (conhecidas como ruído de carga). Isso significa que o espaço entre os dois menores níveis de energia flutua levando a curtos tempos de coerência para o qubit. O espectro de energia de uma CPB é mostrado na figura 3.3, para os cinco menores estados de carga de (3.9), em unidades de E_C . Podemos observar que para baixos valores de E_J/E_C as energias são funções parabólicas de n_g com “avoided crossings” nos pontos $n = \pm 0, 5$. Entretanto, à medida que E_J/E_C cresce, os níveis tornam-se lineares e espaçados, caracterizando um novo regime que será estudado com mais detalhes na seção subsequente.

Uma modificação útil de uma CPB pode ser obtida adicionando uma nova junção Josephson paralela à primeira com energia E_{J2} . Esse arranjo, conhecido como SQUID (sigla do inglês Superconducting quantum interference device⁷), é portanto descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$\hat{H}_S = 4E_C(\hat{N} - n_g)^2 - E_{J1} \cos \hat{\phi}_1 - E_{J2} \cos \hat{\phi}_2. \quad (3.11)$$

⁷Dispositivos Supercondutores de Interferência Quântica.

na qual $\hat{\phi}_i$, $i = 1, 2$, é a diferença de fase associada às ilhas supercondutoras de cada junção. Devido à quantização do fluxo, a diferença de fase equivalente, $\phi = \phi_1 - \phi_2$, pode ser escrita em termos do fluxo magnético Φ que atravessa o loop formado pelas duas junções, isto é

$$\phi = 2\pi n - \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (3.12)$$

tal que n é um inteiro e Φ_0 é o quantum de fluxo magnético. Deste modo, usando algumas identidades trigonométricas, o Hamiltoniano (3.11) pode ser reescrito como:

$$\hat{H}_S = 4E_C(\hat{\mathcal{N}} - n_g)^2 - E_{J\Sigma} \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \cos\hat{\theta} - (E_{J2} - E_{J1}) \sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \sin\hat{\theta}, \quad (3.13)$$

tal que $\hat{\theta} = (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2)/2$ e $E_{J\Sigma} = E_{J1} + E_{J2}$. Podemos notar que (3.13) é igual a (3.9) quando $E_{J1} = E_{J2}$, com energia efetiva dada por

$$E_J^{ef} = E_{J\Sigma} \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (3.14)$$

Essa simetria mostra que podemos controlar a energia de Josephson efetiva apenas ajustando o fluxo do campo magnético aplicado. Por outro lado as coisas tornam-se um pouco mais complicadas quando as energias E_{J1} e E_{J2} são diferentes, neste caso o Hamiltoniano do SQUID tornar-se-á

$$\hat{H}_S = 4E_C(\hat{\mathcal{N}} - n_g)^2 - E_J^{ef} \sqrt{1 + d^2 \tan^2\left(\frac{\pi\hat{\Phi}}{\Phi_0}\right)} \cos(\hat{\theta} - \theta_0), \quad (3.15)$$

tal que θ_0 é o *shift* de fase dado pela identidade $\tan\theta_0 = d \tan(\pi\Phi/\Phi_0)$, e d é o parâmetro de assimetria do sistema escrito como

$$d = \frac{E_{J1} - E_{J2}}{E_{J1} + E_{J2}}. \quad (3.16)$$

Deste modo, um par de junções Josephson se comportam como uma única junção de energia E_d dada por

$$E_d = E_J^{ef} \sqrt{1 + d^2 \tan^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)},$$

tal que quando o parâmetro de assimetria tende a zero ($d \rightarrow 0$) a energia do SQUID tende à

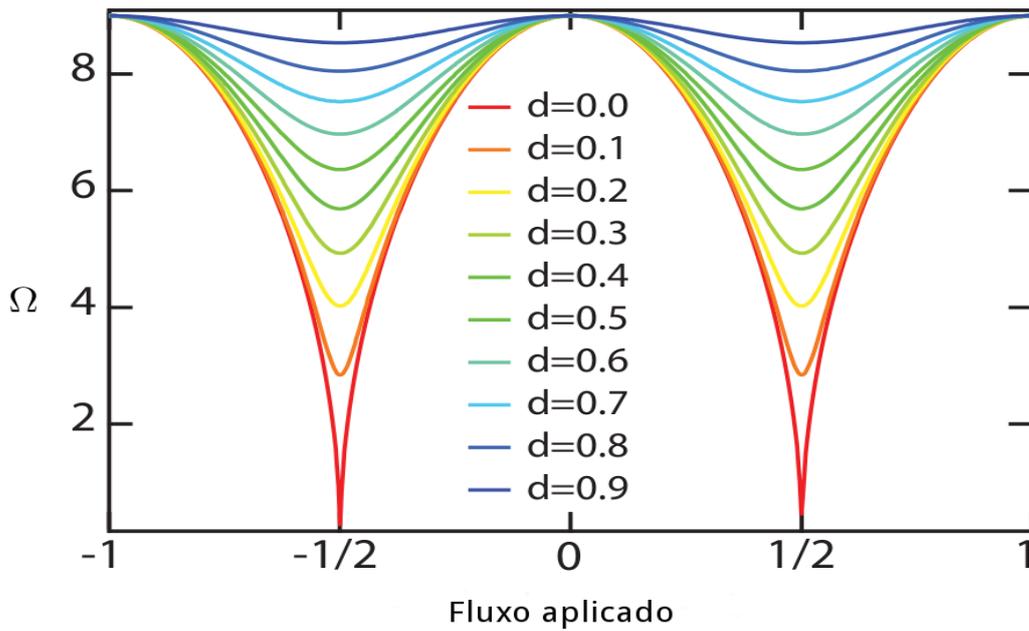


Figura 3.4: Frequência de transição do qubit Ω em função do fluxo aplicado. (Figura reproduzida da referência [75]).

energia do arranjo simétrico ($E_d \rightarrow E_J^{ef}$). Conforme podemos ver na figura 3.4 quando o SQUID é simétrico a frequência de transição do qubit assume valores que vão de um valor máximo até zero. Por outro lado quando o SQUID é não simétrico uma frequência mínima diferente de zero surge e o qubit torna-se menos sensível ao fluxo. Este simples exemplo mostra como os parâmetros internos dos átomos artificiais podem ser controlados *in situ* em EDQc.

3.3.2 Transmon qubit

Conforme discutimos na seção precedente, CPB's são dispositivos sensíveis a ruídos de carga que operam no regime $E_C \gg E_J$. Apesar dessa sensibilidade estes dispositivos se comportam como sistemas quânticos macroscópicos de dois níveis. Contudo, conforme pode ser visto na figura 3.3, a teoria prevê que no limite $E_J \gg E_C$ o espaçamento entre os níveis de energia do sistema tornar-se-á independente das flutuações de n_g , o que por sua vez pode levar a um regime em que é possível obter maiores tempos de coerência para o qubit. Dispositivos que operam nesse novo regime, denominados *Transmons*, foram desenvolvidos em 2007 por pesquisadores da Universidade de Yale [69, 70], tornando-se tão logo promissores para o desenvolvimento de processadores quânticos com mais de um qubit. Embora processadores baseados em alguns qubits tenham sido desenvolvidos usando ressonância magnética nuclear [76, 77, 78], armadilhas de íons [79, 80] e sistemas ópticos [81], o desenvolvimento de processadores com qubits

supercondutores manteve-se por muito tempo como um desafio penoso. Apesar dessa peleja, em 2009, também na Universidade de Yale, pesquisadores apresentaram o primeiro protótipo de um processador quântico de estado sólido supercondutor [43], formado por dois transmons em uma estrutura compacta capaz de rodar algoritmos simples, como selecionar números de uma sequência. Além de todos esses avanços, um ano mais tarde, em 2010, o mesmo grupo de cientistas conseguiu pela primeira vez observar o emaranhamento quântico entre três transmons supercondutores [82, 83]. Ademais, outros feitos da equipe no campo da computação quântica incluem a transmissão e a recepção de informações quânticas [84, 85] e a interligação entre átomos artificiais usando micro-ondas [86]. Desta maneira, por serem promissores para o desenvolvimento de processadores e pesquisa científica de ponta, os transmons foram adotados por vários grupos de pesquisa ao redor mundo e são a espécie de qubit supercondutor mais utilizados atualmente.

Transmons diferenciam-se de CPB's por estarem acoplados a um capacitor de grande capacitância, com o propósito de proteger o sistema de efeitos de flutuações de carga. Deste modo, no limite $E_J \gg E_C$ podemos expandir o Hamiltoniano (3.9) em série de Taylor para pequenos ângulos, $\hat{\phi}$, obtendo

$$\hat{H}_T = 4E_C \hat{N}^2 - \frac{E_J}{2} \hat{\phi}^2 - E_J \left(\frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 - \frac{1}{6!} \hat{\phi}^6 + \dots \right). \quad (3.17)$$

Podemos introduzir os operadores de criação \hat{b}^\dagger e aniquilação \hat{b} para o oscilador harmônico de energia $\hbar\omega = \sqrt{8E_J E_C}$ [48, 75] descrito pela contribuição quadrática do Hamiltoniano (3.17): $\hat{H}_0 = 4E_C \hat{n}^2 - \frac{E_J}{2} \hat{\phi}^2$. Assim, o Hamiltoniano (3.17) tornar-se-á

$$\hat{H}_T = \sqrt{8E_J E_C} \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) - \frac{E_C}{12} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^4. \quad (3.18)$$

Expandindo o termo $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})^4$ e desprezando os termos que oscilam rapidamente (RWA), podemos reescrever (3.18) como

$$\hat{H}_T = \hbar\omega' \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) - \frac{E_C}{2} \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b},$$

na qual a frequência ω' do oscilador toma a seguinte forma:

$$\omega' = \frac{\sqrt{8E_J E_C} + \alpha_m}{\hbar},$$

de modo que é conveniente definir o coeficiente de anarmonicidade $\alpha_m = -E_C$ [87] dado por

$$\alpha_m = E_{m+1,m} - E_{m,m-1},$$

tal que $E_{m,n} = E_n - E_m$ é a energia de transição entre os níveis n e m . O coeficiente de anarmonicidade pode ser comparado com a energia de transição entre os dois menores níveis do transmon $E_{0,1} \approx \sqrt{8E_J E_C}$. Deste modo definimos o coeficiente relativo de anarmonicidade α_m^r , escrito como

$$\alpha_m^r = - \left(\frac{8E_J}{E_C} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

No limite $E_J \gg E_C$ a anarmonicidade tende a zero e, portanto, a frequência ω' tende a frequência ω de um oscilador harmônico. Isso é contudo um problema, pois baixos valores de anarmonicidade podem levar o transmon a se comportar como um sistema de muitos níveis, em vez de se comportar como um qubit. Conforme discutimos na seção anterior, o ruído de carga diminui exponencialmente quando $E_J \gg E_C$ [69] e os níveis de energia se tornam visivelmente espaçados quando $E_J \gtrsim 20E_C$. Contudo o preço que pagamos por reduzir o ruído de carga é que a anarmonicidade do sistema torna-se muito pequena. Felizmente é possível acessar um regime no qual o transmon é insensível a ruídos de carga, ao mesmo tempo mantendo uma anarmonicidade suficiente para o arranjo se comportar como um sistema de dois níveis⁸. É possível mostrar que a razão das energias deve satisfazer a relação $20 \ll E_J/E_C \ll 5 \times 10^4$, definindo assim um largo intervalo no qual a sensibilidade ao ruído de carga diminui exponencialmente mantendo uma anarmonicidade suficiente para operar o qubit [69]. Isto posto, podemos reescrever, de modo simplificado, o Hamiltoniano (3.3.2) na base dos dois possíveis estados do transmon da seguinte maneira

$$\hat{H}_T = \hbar \sum_{k=1}^2 \Omega_k |k\rangle \langle k|,$$

que pode ser reescrita como

$$\hat{H}_T = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z,$$

⁸Um transmon típico opera com $E_C \approx 300\text{MHz}$, o que produz uma anarmonicidade suficiente para manipular os estados do arranjo [87].

Deste modo um transmon pode ser mapeado em um sistema de spin 1/2.

3.3.3 Transmon acoplado a um ressonador

Nosso objetivo nesta dissertação é estudar a interação entre um qubit supercondutor e um modo do campo eletromagnético, então vamos considerar o arranjo ilustrado na figura 3.5, no qual um transmon é colocado no centro de um ressonador supercondutor de linha de transmissão. Sendo assim, o Hamiltoniano desse sistema é obtido somando o Hamiltoniano do transmon (3.9), o Hamiltoniano do ressonador⁹ e o Hamiltoniano de interação¹⁰. Imediatamente obtemos

$$\hat{H} = 4E_C(\hat{\mathcal{N}} + n_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi} + \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2\beta e V_{rms}^0 \hat{\mathcal{N}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (3.20)$$

no qual $\omega_r = 1/L_r C_r$ é a frequência do ressonador, $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ cria (aniquila) um fóton na linha de transmissão, $V_{rms}^0 = \sqrt{\hbar\omega_r/2C_r}$ é a voltagem associada ao campo elétrico de vácuo e o parâmetro β , essencialmente determinado pela geometria do circuito, é definido como a razão entre a capacitância C_g e a capacitância total: $\beta = C_g/C_\Sigma$. Reescrevendo (3.20) na base dos estados de energia do transmon $|k\rangle$ obtemos [69]

$$\hat{H} = \hbar \sum_k \Omega_k |k\rangle \langle k| + \hbar\omega_r \hat{n} + \hbar \sum_{j,k} g_{jk} |j\rangle \langle k| (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (3.21)$$

No caso em que a anarmonicidade é suficientemente alta para que o transmon se comporte como um qubit, o Hamiltoniano (3.21) toma a forma (trocando $\omega_r \rightarrow \omega_0$)

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{n} + \frac{\hbar\Omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (3.22)$$

de modo que Ω_0 é a frequência de transição atômica entre os dois níveis dada por

$$\Omega_0 = \frac{E_J}{\hbar}, \quad (3.23)$$

e g_0 é a intensidade do acoplamento átomo campo

$$g_0 = \frac{2e\beta V_{rms}^0}{\hbar}. \quad (3.24)$$

⁹Ressonadores de linha de transmissão, assim como cavidades, se comportam como osciladores harmônicos na ausência de qubits. Portanto seu Hamiltoniano é dado por $\hat{H} = \hbar\omega_r \hat{n}$.

¹⁰Para mais detalhes sobre o Hamiltoniano de interação átomo-campo recomendamos a leitura da referência [69]

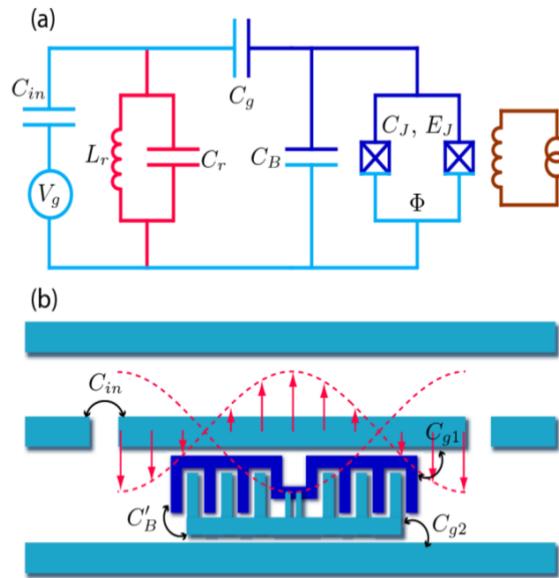


Figura 3.5: a) Diagrama esquemático de um transmon (azul escuro C_J, E_J), ressonador (vermelho L_r, C_r), fonte de fluxo de campo magnético (marrom), fonte de voltagem (azul claro). b) Esquema simplificado do dispositivo transmon-ressonador. O arranjo funciona com capacitores agrupados C'_B, C_{g1}, C_{g2} que geram capacitâncias efetivas C_B, C_g suficiente para produzir o regime $E_J \gg E_C$ de operação de um transmon. (Figura reproduzida da referência [69]).

O Hamiltoniano (3.22) que descreve a dinâmica de um transmon em um ressonador de linha de transmissão é exatamente igual ao Hamiltoniano de Rabi (2.12) introduzido por nós na seção 2.2. Isto significa que é possível implementar a interação de um átomo de dois níveis com luz no contexto da EDQc, de modo que a frequência de transição do qubit e o acoplamento com o ressonador são parâmetros altamente controláveis, uma vez que dependem, respectivamente, da energia da junção Josephson e da voltagem aplicada ao circuito. Esquemas eficientes para variar em tempo real o parâmetro de acoplamento átomo-campo podem ser encontrados em [88, 138]. Se por um lado o ruído de carga decresce exponencialmente no limite $E_J \gg E_C$, por outro o acoplamento g entre a cavidade e o transmon aumenta consideravelmente em relação a sistemas atômicos reais. Talvez essa seja a mais cabal característica que nos leva a utilizar esta espécie qubit neste trabalho. Ademais, neste projeto de mestrado estamos interessados em estudar o sistema descrito nesta seção considerando que os parâmetros dados em (3.23) e (3.24) variam harmonicamente com o tempo com uma frequência η , isto é

$$X_0 \rightarrow X(t) = X_0 + \varepsilon_X \sin(\eta t), \quad (3.25)$$

tal que ε_X com $X = \{\Omega, g\}$ é a amplitude da modulação dos parâmetros. Este sistema será estudado com mais detalhes no capítulo 5, onde expomos os resultados originais deste trabalho. Sistemas *não-estacionários* de EDQc são atualmente implementados em laboratório ajustando os parâmetros do sistema *in situ* [89, 90, 91].

Capítulo 4

Transições Landau-Zener

4.1 Introdução

Vamos considerar a seguinte experiência mental: Imagine um pêndulo perfeito com período T , oscilando sem fricção nem resistência de maneira suave dentro de uma caixa posicionada em um suporte que oscila verticalmente com um certo período T_e . Se o período de oscilação do suporte for muito pequeno em relação ao período do pêndulo, T , a caixa será sacudida bruscamente e o pêndulo irá oscilar de maneira caótica. Por outro lado se o período de oscilação do suporte T_e for grande em relação a T , o pêndulo continuará oscilando de maneira suave no mesmo plano e com mesma amplitude. Neste exemplo, o valor grande do período do suporte caracteriza uma frequência de oscilação pequena em relação a frequência de oscilação do pêndulo. Assim, o suporte oscila gradualmente sem perturbar consideravelmente o pêndulo dentro da caixa. Esta mudança gradual nas condições externas do sistema (em relação a algum parâmetro interno) caracteriza um processo *adiabático* [92]. Nesta breve experiência mental podemos notar que há dois parâmetros importantes envolvidos: T (período de oscilação do pêndulo) e T_e (período de oscilação do suporte). Isto posto concluímos que, neste caso, um processo adiabático clássico¹ ocorre quando $T_e \gg T$.

Contudo em mecânica quântica o conteúdo essencial de um processo deste tipo pode ser condensado na forma de um teorema: Suponhamos que o Hamiltoniano varia gradualmente de um valor inicial \hat{H}_i para um valor final \hat{H}_f . O teorema adiabático afirma que se o sistema parte do n -ésimo autoestado de \hat{H}_i , ele evoluirá (de acordo com a equação de Schrödinger) para o n -ésimo autoestado de \hat{H}_f [92]. Em síntese, um processo adiabático ocorre quando

¹Para uma discussão mais detalhada sobre processos adiabáticos clássicos recomendamos a leitura da referência [93].

algum parâmetro do sistema, controlado externamente, varia lentamente em relação a um outro parâmetro interno. Em contraste, quando a variação de um parâmetro for rápida em relação ao outro, um processo não-adiabático ocorre no sistema. Isto ficará mais claro na próxima seção, onde mostraremos que é possível induzir transições não-adiabáticas em um sistema de dois níveis acoplado com o campo eletromagnético apenas ajustando a frequência de transição em relação ao parâmetro de acoplamento.

Transições não-adiabáticas, também conhecidas como *transições Landau-Zener* (LZ), desempenham um papel fundamental em numerosos fenômenos em física e química, sendo estudadas teoricamente e experimentalmente em vários contextos distintos, por exemplo: biofísica [94], ressonância magnética nuclear [95], colisões moleculares [96], sistemas ópticos [97, 98], *quantum dot arrays* [99], condensados de Bose-Einstein [100], controle de reações químicas [101] e processamento de informação quântica [102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110]. A probabilidade de transições não-adiabáticas em um átomo de dois níveis isolado foi determinada, em trabalhos clássicos e independentes, por Landau² [111], Zener [112], Stueckelberg [113] e Majorana [114]. Estes últimos não ganharam o devido reconhecimento pelo feito, de modo que a probabilidade de uma transição adiabática num sistema de dois níveis acoplado a um modo do campo eletromagnético ficou conhecida como fórmula de Landau-Zener. Todavia, deduções alternativas da fórmula de LZ surgiram anos mais tarde. Em 2005, por exemplo, Witting [115] propôs uma nova dedução baseada em integrações de contorno no plano complexo. Contudo uma inspeção delicada nesta dedução revela que ela é baseada numa suposição não garantida sobre o comportamento assintótico das autofunções envolvidas no problema, além disso na dedução de Witting há uma singularidade em $t = 0$, fato que acaba tornando o cálculo um tanto complicado. Felizmente esta complicação adicional no método de Witting foi superada em 2013 por Chichinin [116], o qual propôs uma dedução alternativa que não envolve singularidades em nenhum instante t . Um ano mais tarde, em 2014, Anh Ho e Chibotaru [117] propuseram um método também baseado em integrações de contorno, contudo sem o problema do comportamento assintótico das autofunções e sem qualquer singularidade no tempo. Vale ressaltar que o problema padrão de LZ tratado por todos os autores supracitados considera um modelo no qual o átomo está isolado e portanto não interage com o ambiente. Há, no entanto, numerosos estudos que analisam o problema de LZ considerando o átomo acoplado ao ambiente [118, 119]. Na próxima seção vamos apresentar uma dedução simples e elegante, baseada

²Landau obteve o mesmo resultado de Zener com um erro de um fator 2π .

na referência [117], para a probabilidade de transições não-adiabáticas em um sistema de dois níveis, em seguida citar alguns trabalhos recentes que amalgamam transições LZ com EDQc.

4.2 Fórmula de Landau Zener

Vamos considerar o sistema semiclássico composto por um átomo de dois níveis com momento de dipolo $\vec{\mathcal{P}}$, acoplado a um modo do campo eletromagnético. Vamos considerar ainda que o campo elétrico (polarizado na direção z) não varia consideravelmente ao longo da extensão do átomo, isto ocorre se o comprimento de onda da radiação for muito maior do que as dimensões atômicas. Sendo assim, podemos desprezar a variação espacial do campo elétrico representando-o como

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi) \hat{k}. \quad (4.1)$$

O Hamiltoniano de interação é dado por

$$\hat{H}_{int} = -e\hat{r} \cdot \vec{E}(t), \quad (4.2)$$

na qual o operador dipolo elétrico $e\hat{r} = \vec{\mathcal{P}}\hat{\sigma}_+ + \vec{\mathcal{P}}^*\hat{\sigma}_-$ é escrito em termos dos elementos não diagonais do operador posição $\vec{\mathcal{P}} = e\langle e|\hat{r}|g\rangle$ e $\vec{\mathcal{P}}^* = e\langle g|\hat{r}|e\rangle$ e das matrizes de pauli $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ (conforme introduzimos no capítulo 2). Isto posto, após algumas manipulações algébricas o Hamiltoniano de interação (4.2) toma a seguinte forma:

$$H_{int} = \frac{\Delta}{2} \cos(\omega t + \phi) \hat{\sigma}_x \quad (4.3)$$

na qual $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$ e $\Delta = 2E_0|\mathcal{P}_z|$ é a constante de acoplamento átomo-campo. O problema padrão de LZ consiste em considerar o caso particular em que o campo não oscila com o tempo, deste modo o Hamiltoniano (4.3) tornar-se-á

$$H_{int} = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_x. \quad (4.4)$$

Somando (4.4) com o Hamiltoniano dos estados internos do átomo obtemos

$$\hat{H}_{LZ} = \frac{(E_2 - E_1)}{2} \sigma_z + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_x.$$

Afim de resolver o problema analiticamente vamos supor que a energia de separação entre os níveis do átomo é uma função linear do tempo, isto é, $E_2 - E_1 = vt$

$$\hat{H}_{LZ}(t) = \frac{vt}{2}\sigma_z + \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x. \quad (4.5)$$

Este Hamiltoniano portanto descreve o problema padrão de LZ, sendo assim, a partir dele podemos calcular explicitamente a probabilidade de o átomo sofrer uma transição não-adiabática devido ao acoplamento com o campo. Conforme sabemos, a dinâmica do sistema é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}_{LZ} |\Psi(t)\rangle. \quad (4.6)$$

Podemos expandir a função de onda na base dos estados do átomo

$$|\Psi(t)\rangle = c_g(t) |g\rangle + c_e(t) |e\rangle. \quad (4.7)$$

Deste modo substituindo (4.7) em (4.6) obtemos, após algumas manipulações algébricas, o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas:

$$\dot{c}_g(t) = -\frac{ivt}{2\hbar} c_g(t) - \frac{i\Delta}{2\hbar} c_e(t), \quad (4.8)$$

$$\dot{c}_e(t) = -\frac{i\Delta}{2\hbar} c_g(t) + \frac{ivt}{2\hbar} c_e(t). \quad (4.9)$$

Podemos trivialmente desacoplar estas equações obtendo a seguinte equação para $c_g(t)$:

$$\ddot{c}_g(t) + \left(-\frac{iv}{2\hbar} + \frac{\Delta^2}{4\hbar^2}\right) c_g(t) + \frac{v^2 t^2}{4\hbar^2} c_g(t) = 0. \quad (4.10)$$

A solução exata da equação (4.10) para todo t é um tanto laboriosa. Por sorte, não estamos interessados nesta solução, queremos apenas estudar a probabilidade de uma transição não-adiabática quando $t \rightarrow \infty$. Fisicamente, neste limite o módulo de c_g converge para uma constante. Desta maneira podemos escrever

$$c_g(t) = |c_g| e^{-i\phi(t)}. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) e suas derivadas em (4.10) imediatamente encontramos a dinâmica de ϕ

$$-i\ddot{\phi}(t) - \dot{\phi}^2(t) + \left(-\frac{iv}{2\hbar} + \frac{\Delta^2}{4\hbar^2} + \frac{v^2 t^2}{4\hbar^2}\right) = 0. \quad (4.12)$$

Isolando as partes real e imaginária obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \pm \frac{1}{2\hbar} vt \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{v^2 t^2}}, \\ \ddot{\phi}(t) &= -\frac{v}{2\hbar}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

No limite $t \rightarrow \infty$ o termo $-\frac{iv}{2\hbar} + \frac{\Delta^2}{4\hbar^2}$ da equação (4.10) comportar-se-á como uma perturbação que pode ser desprezada quando comparada com $\frac{v^2 t^2}{4\hbar^2}$. Sendo assim, quando $t \rightarrow \infty$ as equações (4.10) e (4.12) tomam, respectivamente, a seguinte forma:

$$\ddot{c}_g(t) + \frac{v^2}{4\hbar^2} t^2 c_g(t) = 0, \quad (4.14)$$

$$-i\dot{\phi}(t) - \dot{\phi}^2(t) + \frac{v^2 t^2}{4\hbar^2} = 0. \quad (4.15)$$

Como estamos interessados na solução assintótica, então $\frac{\Delta^2}{v^2 t^2} \ll 1$. Podemos, portanto, expandir (4.13) de acordo com $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \dots$ se $|x| \ll 1$ e considerar até a primeira ordem em $\frac{\Delta^2}{v^2 t^2}$, obtendo

$$\dot{\phi}(t) \approx \frac{1}{2\hbar} vt + \frac{1}{4\hbar} \frac{\Delta^2}{vt}.$$

Manipulando as equações (4.8) e (4.9) concluímos que no limite assintótico ($t \rightarrow \infty$) a razão $\dot{c}_g(t)/c_g(t)$ é dada por

$$\frac{\dot{c}_g(t)}{c_g(t)} = -i \left(\frac{1}{2\hbar} vt + \frac{1}{4\hbar} \frac{\Delta^2}{vt} \right). \quad (4.16)$$

Integrando o termo do lado esquerdo em todo o espaço imediatamente obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{c}_g(t)}{c_g(t)} dt = \ln \frac{c_g(\infty)}{c_g(-\infty)}. \quad (4.17)$$

Vamos estender (4.16) analiticamente afim de encontrar uma função equivalente no plano complexo, como segue

$$\left(\frac{\dot{c}_g}{c_g} \right)_{|z| \rightarrow \infty} = -i \left(\frac{1}{2\hbar} vz + \frac{1}{4\hbar} \frac{\Delta^2}{vz} \right). \quad (4.18)$$

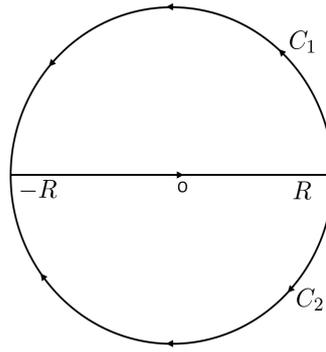


Figura 4.1: a) Contorno através do qual a integração é feita.

Assim sendo, podemos definir a seguinte integral de contorno no plano complexo:

$$\oint_c f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\dot{c}_g(t)}{c_g(t)} dt + \int_{c_1 \cup c_2} f(z) dz \quad (4.19)$$

tal que $f(z) = \frac{1}{2\hbar} v z + \frac{1}{4\hbar} \frac{\Delta^2}{v z}$ é uma função complexa oriunda da extensão analítica realizada anteriormente. Definimos o caminho que vai de $-R$ até R no eixo real e fechamos o contorno pela semi-circunferência C_1 ou C_2 no plano complexo, conforme ilustrado na figura 4.1. Na representação polar podemos escrever $z = R e^{i\theta} \rightarrow dz = i R e^{i\theta} d\theta$, deste modo chegamos a:

$$\oint_c f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\dot{c}_g(t)}{c_g(t)} dt + i \int_{c_1 \cup c_2} \left(\frac{1}{2\hbar} v R^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{4\hbar} \frac{\Delta^2}{v} \right) d\theta. \quad (4.20)$$

Uma vez que $f(z)$ é uma função analítica quando $|z| \rightarrow \infty$ (pois $\partial f / \partial \bar{z} = 0$) a integral do lado esquerdo da equação (4.20) é identicamente nula

$$\oint_c \left(\frac{1}{2\hbar} v z + \frac{1}{4\hbar} \frac{\Delta^2}{v z} \right) dz = 0. \quad (4.21)$$

Portanto, imediatamente encontramos a seguinte identidade:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\dot{c}_g(t)}{c_g(t)} dt = -i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\hbar} v R^2 \int_0^{\pm\pi} e^{2i\theta} d\theta + \int_0^{\pm\pi} \frac{1}{4\hbar} \frac{\Delta^2}{v} d\theta \right). \quad (4.22)$$

Por sorte, o termo que depende explicitamente de R é identicamente nulo, isto é, $\int_0^{\pm\pi} e^{2i\theta} d\theta = 0$. Graças a este resultado podemos obter a solução da integral que queríamos desde o começo. Por último, fazendo o limite $R \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{c}_g(t)}{c_g(t)} dt = \pm i \frac{\pi \Delta^2}{4\hbar v}. \quad (4.23)$$

Portanto, comparando (4.17) e (4.23) podemos escrever

$$\ln \frac{c_g(\infty)}{c_g(-\infty)} = \pm \frac{\pi \Delta^2}{4\hbar v}.$$

De modo que o sinal de menos corresponde ao contorno C_1 e o sinal de mais corresponde ao contorno C_2 . Este resultado nos permite determinar a probabilidade de encontrar o átomo no estado $|g\rangle$ quando $t \rightarrow \infty$

$$|c_g(\infty)|^2 = |c_g(-\infty)|^2 e^{\pm \frac{\pi \Delta^2}{2\hbar v}}. \quad (4.24)$$

Supondo que o átomo é inicialmente preparado no mesmo estado $|g\rangle$ tal que $|c_g(-\infty)|^2 = 1$, concluímos que

$$|c_g(\infty)|^2 = e^{\pm \frac{\pi \Delta^2}{2\hbar v}}.$$

A única solução fisicamente possível corresponde ao contorno de integração C_1 , portanto a probabilidade de uma transição não-adiabática (ou transição LZ) é dada por

$$P_{LZ} = e^{-\frac{\pi \Delta^2}{2\hbar v}}. \quad (4.25)$$

Uma vez que o sistema possui apenas dois níveis de energia, a probabilidade de encontrá-lo em qualquer um desses níveis no final do processo é de 100%, logo $P_e + P_g = 1$ de modo que a probabilidade de uma transição adiabática tornar-se-á

$$P_e = 1 - e^{-\frac{\pi \Delta^2}{2\hbar v}}.$$

No limite $v \gg \Delta^2$, $P_{LZ} \rightarrow 1$, isto é, quando a taxa com que a frequência de transição atômica varia for maior que o quadrado do acoplamento átomo-campo, o sistema terá 100% de chance de sofrer uma transição não-adiabática. Ademais, a recíproca é verdadeira, isto é, quando $v \ll \Delta^2$, $P_{LZ} \rightarrow 0$, em outras palavras: quando a taxa de variação da frequência de transição atômica for menor que o quadrado do acoplamento átomo-campo o sistema terá 100% de chance de sofrer uma transição adiabática. Podemos fazer uma breve comparação com o exemplo do pêndulo clássico descrito no início deste capítulo, no qual concluímos que um processo adiabático ocorre quando $T \ll T_e$; já no caso do problema padrão de LZ, um processo

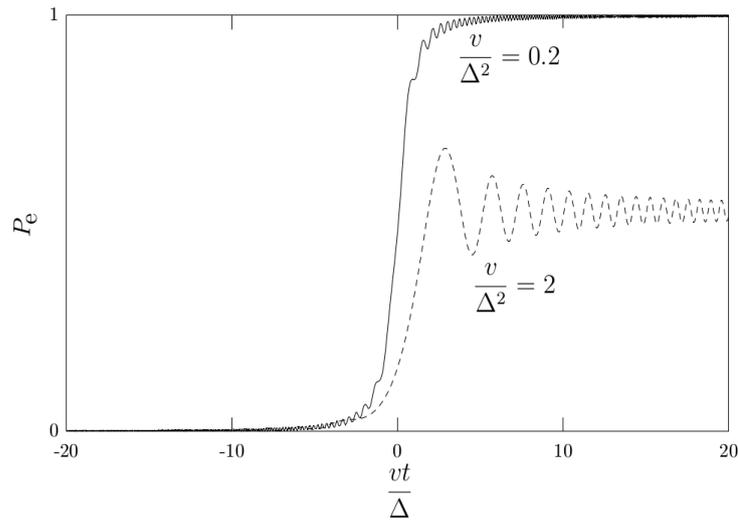


Figura 4.2: Quando $\frac{v}{\Delta^2} = 0,2$ o sistema transita adiabaticamente para o estado $|e\rangle$ com probabilidade $P_e \approx 0,9996$. Por outro lado, se aumentarmos essa razão em dez vezes, isto é, quando $\frac{v}{\Delta^2} = 2$ a probabilidade de uma transição adiabática cai pela metade ($P_e \approx 0,544$). Se aumentarmos ainda mais essa razão $P_e \rightarrow 0$ e o sistema experimenta uma transição não-adiabática. (Figura reproduzida da referência [120])

adiabático ocorre quando $v \ll \Delta^2$. A figura 4.2 ilustra a solução numérica para a probabilidade P_e de uma transição adiabática para dois valores distintos de v/Δ^2 . Em suma, transições LZ são fenômenos que podem ser observados em um sistema de dois níveis com algum tipo de acoplamento não diagonal entre estados (como o intermediado por campo eletromagnético neste exemplo) desde que o Hamiltoniano do sistema dependa do tempo de um modo tal que as energias do sistema na base adiabática variam linearmente e cruzam-se num certo instante. Todavia, transições LZ também podem ocorrer em sistemas de muitos níveis [103, 121, 122], em sistemas acoplados ao ambiente que incluem dissipação e decoerência [123, 124], bem como quando os elementos diagonais do Hamiltoniano tem dependência não linear no tempo [125, 126].

Nesta seção apresentamos uma solução analítica assintótica para o Hamiltoniano padrão de LZ, contudo, caso o leitor esteja interessado em uma solução analítica exata para tempos finitos recomendamos a leitura da referência [127]. Ademais, soluções obtidas via teoria de perturbação dependente do tempo e teoria de perturbação adiabática são discutidas com detalhes na referência [128].

Uma vez que a frequência de transição atômica do átomo pode ser controlada ajustando a energia de Josephson em EDQc, transições LZ tem sido extensivamente observadas em qubits supercondutores [104, 105, 108, 109, 110, 129, 130, 131, 132, 133]. Na seção 5.8 do próximo

capítulo vamos estudar a geração de fótons a partir do estado inicial de vácuo em uma arquitetura de EDQc via transições efetivas de LZ entre estados vestidos do sistema átomo-campo. Como explicado posteriormente, a nossa proposta difere drasticamente de outras propostas que fazem uso de LZ: em vez de considerar a variação linear dos níveis de energia do átomo em função do tempo, vamos analisar os efeitos da variação linear da frequência de modulação dos níveis de energia do átomo.

Capítulo 5

Fenômenos Paramétricos em Eletrodinâmica Quântica de Circuitos

5.1 Introdução

No capítulo 3 vimos que a EDQc fornece um meio de estabelecer em laboratório, de maneira controlada, uma das interações mais fundamentais da natureza: a interação entre um único átomo e luz. Tal grau de controle sobre os parâmetros do sistema possibilita a manifestação de fenômenos outrora impossíveis à luz da EDQC, uma vez que, em dissemelhança com átomos reais, qubits supercondutores acoplam-se fortemente com o campo. Dessarte, é possível com a tecnologia atual, manipular *in situ* as propriedades do átomo artificial bem como o acoplamento com o campo eletromagnético. Neste capítulo apresentaremos os resultados originais desenvolvidos ao longo deste projeto de mestrado, tal que nosso ponto de partida está alicerçado no sistema de EDQc não-estacionário descrito na subseção 3.3.3 pelo Hamiltoniano (3.22), no qual um transmon é acoplado a um ressonador de linha de transmissão de modo que a frequência de transição do transmon ou o acoplamento com o campo são submetidos a uma pequena modulação temporal periódica descrita por (3.25). A partir disso, vamos mostrar que, quando a frequência da modulação é ajustada de maneira apropriada, é possível criar excitações de átomo e/ou campo a partir do estado inicial de vácuo, ou de qualquer outro estado inicial do sistema devido ao termo contragirante do Hamiltoniano de Rabi. Em particular estes fenômenos de criação de excitações do sistema a partir de um dado estado inicial caracterizam os já mencionados ECD [134, 135] e efeito AJC. Estudos recentes mostram que o ECD pode ser implementado experimentalmente com a tecnologia atual em um sistema não-estacionário de EDQc dissipativo

[136]. Ademais, analisaremos um novo e curioso fenômeno previsto teoricamente em 2015 por I. M. de Souza e A. Dodonov [12] denominado por estes autores como anti efeito Casimir dinâmico, caracterizado pela criação de uma excitação atômica acompanhada da destruição de três excitações do campo. Mostraremos ainda que ajustando frequência de modulação, no regime em que a frequência do campo é igual a frequência de transição atômica, estados emaranhados átomo-campo com até dois fótons podem ser criados a partir do vácuo. Por fim, vamos mostrar que geração de fótons a partir do vácuo é possível via transições LZ quando a frequência de modulação varia linearmente com o tempo.

5.2 Modelo Teórico

Vamos considerar o sistema composto por N qubits idênticos acoplados com um único modo do campo eletromagnético confinado em uma cavidade óptica. Denotando a frequência da cavidade, a frequência de transição atômica e o acoplamento átomo-campo por ω_0 , Ω e g , respectivamente, a dinâmica de interação é dada pelo Hamiltoniano de Rabi

$$\hat{H}/\hbar = \omega \hat{n} + \sum_{l=1}^N \left[\frac{\Omega}{2} \hat{\sigma}_z^{(l)} + g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_+^{(l)} + \hat{\sigma}_-^{(l)}) \right], \quad (5.1)$$

tal que \hat{a}^\dagger e \hat{a} são os operadores de criação e aniquilação e $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ é o operador número. Os operadores atômicos são $\hat{\sigma}_-^{(l)} = |g^{(l)}\rangle\langle e^{(l)}|$, $\hat{\sigma}_+^{(l)} = |e^{(l)}\rangle\langle g^{(l)}|$ e $\hat{\sigma}_z^{(l)} = |e^{(l)}\rangle\langle e^{(l)}| - |g^{(l)}\rangle\langle g^{(l)}|$, tal que $|g^{(l)}\rangle$ e $|e^{(l)}\rangle$ denotam os estados fundamental e excitado do l -ésimo qubit, respectivamente. Posto que estamos interessados em estudar a dinâmica de um sistema não estacionário, vamos considerar que os parâmetros variam temporalmente de acordo com uma função pré-determinada, isto é, $X = X_0 + \varepsilon_X f_X$, de modo que $\{X = \Omega, g\}$ e $|\varepsilon_X| \ll |X_0|$. O termo ε_X representa a amplitude da modulação e X_0 corresponde ao respectivo parâmetro sem perturbação. Ademais, a função f_X é dada por

$$f_X = \sum_j w_X^{(j)} \sin(\eta^{(j)} t + \phi_X^{(j)}) \quad (5.2)$$

na qual $w_X^{(j)} \leq 1$ e o somatório \sum_j representa a soma sobre todas as frequências de modulação $\eta^{(j)}$ possíveis.

5.3 Base de Dicke

Os cálculos analíticos podem ser simplificados introduzindo um estado coletivo de N qubits denominado estado de Dicke (ED) (normalizado) com k excitações [137]

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{k!(N-k)!/N!} \sum_p |e^{(1)}\rangle |e^{(2)}\rangle \dots |e^{(k)}\rangle |g^{(k+1)}\rangle \dots |g^N\rangle,$$

A soma presente nesta última equação é feita sobre todas as possíveis permutações entre os qubits no estado excitado e fundamental, tal que $k = 0, 1, \dots, N$. Na base de Dicke o Hamiltoniano (5.1) é descrito por

$$\hat{H}/\hbar = \omega \hat{n} + \sum_{k=1}^N E_k \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} G_k (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{\sigma}_{k,k+1}), \quad (5.3)$$

na qual $\hat{\sigma}_{k,k} = |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{j}|$ é o operador que descreve o conjunto de estados atômicos, $E_k = k\Omega \equiv E_{0,k} + \varepsilon_{E,k} f_{E,\Omega}$ e $G_k = g\sqrt{(k+1)(N-k)} \equiv G_{0,k} + \varepsilon_{G,k} f_{G,g}$. É importante notar que o Hamiltoniano (5.3) também descreve a interação entre o campo e um átomo de $(N+1)$ níveis na configuração “escada”, portanto, a nossa abordagem contempla simultaneamente estes dois casos fisicamente distintos. Podemos dividir o Hamiltoniano (5.3) em três partes

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad (5.4)$$

de modo que

$$\hat{H}_0/\hbar = \omega_0 \hat{n} + \sum_{k=1}^N E_{0,k} \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}) \quad (5.5)$$

$$\hat{H}_1/\hbar = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{E,k} f_{E,k} \hat{\sigma}_{k,k} + \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{G,k} f_{G,k} (\hat{a} \hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k,k+1}) \quad (5.6)$$

$$\hat{H}_2/\hbar = \sum_{k=0}^{N-1} G_k (\hat{a} \hat{\sigma}_{k,k+1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k+1,k}) \quad (5.7)$$

tal que \hat{H}_0 representa uma contribuição estacionária, que corresponde ao Hamiltoniano generalizado de Jaynes-Cummings na base de Dicke, e \hat{H}_1 representa uma perturbação que depende explicitamente do tempo e conserva o número total de excitações.

5.3.1 Função de Onda

Vamos conduzir nossos cálculos no quadro de Schrödinger e na base dos estados vestidos $|\varphi_{n,S}\rangle$, que conforme vimos no capítulo 2, para o caso $N = 1$, são definidos como autoestados do Hamiltoniano generalizado de Jaynes-Cummings, isto é

$$\hat{H}_0|\varphi_{n,S}\rangle = \hbar\lambda_{n,S}|\varphi_{n,S}\rangle,$$

de modo que o índice S diferencia autovalores $\lambda_{n,S}$ com o mesmo número de excitações n (em geral S depende de n). Notemos que, como todos os parâmetros do Hamiltoniano \hat{H}_0 são reais, seus autoestados são também reais. Uma vez que estes estados sejam determinados, bem como suas auto energias, poderemos descrever a dinâmica do sistema satisfatoriamente. Assim, vamos expandir a função de onda nesta base como segue

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{S(n)} e^{-it\lambda_{n,S}} A_{n,S}(t) |\varphi_{n,S}\rangle, \quad (5.8)$$

tal que $A_{n,S}(t)$ é a amplitude de probabilidade de, num instante t , encontrar o sistema no estado $|\varphi_{n,S}\rangle$, e a notação $S(n)$ é um lembrete de que os valores de S podem variar dependendo do valor de n . Sabemos que a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (5.9)$$

Usando a expansão (5.8) e derivando em relação ao tempo, podemos escrever o lado esquerdo da equação acima como

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{S(n)} \left[-i\lambda_{n,S} e^{-it\lambda_{n,S}} A_{n,S}(t) + \dot{A}_{n,S}(t) e^{-it\lambda_{n,S}} \right] |\varphi_{n,S}\rangle. \quad (5.10)$$

O lado direito de (5.9) pode ser reescrito, utilizando (5.4) e (5.8), da seguinte maneira

$$\hat{H} |\psi(t)\rangle = \left(\hat{H}_0 + H_1 + H_2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{S(n)} e^{-it\lambda_{n,S}} A_{n,S}(t) |\varphi_{n,S}\rangle, \quad (5.11)$$

e usando (5.10) e (5.11) podemos reescrever a equação de Schrödinger como

$$i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} e^{-it\lambda_{n,\mathcal{S}}} \dot{A}_{n,\mathcal{S}}(t) |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}(n)} A_{n,\mathcal{S}}(t) e^{-it\lambda_{n,\mathcal{S}}} \hat{H}_1 |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}(n)} A_{n,\mathcal{S}}(t) e^{-it\lambda_{n,\mathcal{S}}} \hat{H}_2 |\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle. \quad (5.12)$$

Uma vez que $|\varphi_{n,\mathcal{S}}\rangle$ forma uma base completa

$$\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle = \delta_{m,n} \delta_{\mathcal{T},\mathcal{S}},$$

podemos multiplicar (5.12) por $\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} |$ e após algumas manipulações obtemos

$$i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) = \sum_{\mathcal{S}(n)} A_{n,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{H}_1/\hbar) | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}(n)} A_{n,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{H}_2/\hbar) | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \quad (5.13)$$

Como \hat{H}_1 conserva o número de excitações, podemos escrever

$$\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_1/\hbar | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle = \delta_{n,m} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_1/\hbar | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle$$

tal que

$$\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_1/\hbar | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle = \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right)$$

na qual

$$\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{E,k,j} = \varepsilon_{E,k} w_{E,k}^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{\sigma}_{k,k} | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle \quad (5.14)$$

$$\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{G,k,j} = \varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{a}\hat{\sigma}_{k+1,k} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{k,k+1}) | \varphi_{m,\mathcal{S}} \rangle \quad (5.15)$$

$(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{E,k,j})^* = \Pi_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^{E,k,j}$ e $(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{G,k,j})^* = \Pi_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^{G,k,j}$. Portanto, podemos reescrever (5.13) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) &= \sum_{\mathcal{S}(m)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} A_{m,\mathcal{S}}(t) \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \sin(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}(n)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.4 Eliminando \hat{H}_1

A partir de agora buscaremos uma solução aproximada para a amplitude de probabilidade $A_{m,\mathcal{T}}(t)$ fazendo uma série de aproximações, expandindo as exponenciais que dependem explicitamente das amplitudes de modulação que denotamos genericamente por ε , até a primeira ordem, conforme ficará claro mais tarde. Além disso vamos utilizar um poderoso método aproximativo conhecido como RWA. Inicialmente vamos abrir o primeiro somatório da equação (5.16)

$$\begin{aligned} i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) &= \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} A_{m,\mathcal{T}}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j} \sin(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}) + \\ &+ \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} A_{m,\mathcal{S}}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \sin(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}(n)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} A_{n,\mathcal{S}}(t) \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Não sabemos resolver essa equação exatamente, entretanto, podemos por um instante esquecer os dois últimos termos na equação (5.17) obtendo, deste modo, uma equação diferencial extremamente simples, a saber

$$i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) = \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} A_{m,\mathcal{T}}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j} \sin(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}) \quad (5.18)$$

cuja solução exata, obtida via integração direta, assume a seguinte forma:

$$A_{m,\mathcal{T}} = B_{m,\mathcal{T}}^{(1)} \exp \left\{ - \sum_j \frac{i\alpha_j}{\eta^{(j)}} \cos \phi_{L,k}^{(j)} \right\} \exp \left\{ \sum_j \frac{i\alpha_j}{\eta^{(j)}} \cos(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}) \right\}, \quad (5.19)$$

na qual $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}$ é uma constante e $\alpha_j = \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}$. A equação (5.19) é solução de (5.18), contudo buscamos uma solução para a equação (5.17). Para isso, vamos propor que

(5.19) é solução com a condição de que $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}$ seja uma função do tempo. Sendo assim podemos derivar (5.19) em relação ao tempo e comparar com (5.17) afim de escrever uma equação diferencial para $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t)$, como segue

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)} &= \sum_{S(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} B_{m,S}^{(1)} \times \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{\Pi_{m,S,S}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos \left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)} \right) - \cos \phi_{L,k}^{(j)} \right] \right\} \times \\
&\times \Pi_{m,\mathcal{T},S}^{L,k,j} \sin \left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{S(n)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} B_{n,S}^{(1)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,S} \rangle \times \\
&\times \exp \left\{ i \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{\Pi_{n,S,S}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos \left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)} \right) - \cos \phi_{L,k}^{(j)} \right] \right\}. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Afim de encontrar uma solução aproximada para $B_{m,S}^{(1)}$ vamos exigir que¹

$$\sum_j \sum_{k=0}^2 \sum_{L=E,G} \frac{|\Pi_{m,S,S}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}|}{\eta^{(j)}} \ll 1. \quad (5.21)$$

Sendo assim, podemos expandir a exponencial dependente do tempo até a primeira ordem, isto é

$$\exp \left\{ i \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{\Pi_{m,S,S}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}}{\eta^{(j)}} \beta_k^{(j)} \right\} = 1 + \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{i \left(\Pi_{m,S,S}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j} \right)}{\eta^{(j)}} \beta_k^{(j)},$$

na qual $\beta_k^{(j)} = \cos \left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)} \right) - \cos \phi_{L,k}^{(j)}$. Substituindo esta expansão apenas no primeiro termo da equação (5.20) e desprezando todos os termos de ordem 3 e ordem superior obtemos, após algumas manipulações algébricas, a seguinte equação

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)} &= \sum_{S(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} B_{m,S}^{(1)} \Pi_{m,\mathcal{T},S}^{L,k,j} \sin \left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)} \right) + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{S(n)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} B_{n,S}^{(1)} \exp \left\{ i \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{\Pi_{n,S,S}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}}{\eta^{(j)}} \times \right. \\
&\times \left. \left[\cos \left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)} \right) - \cos \phi_{L,k}^{(j)} \right] \right\} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,S} \rangle. \quad (5.22)
\end{aligned}$$

¹Lembrar que os coeficientes $\Pi_{n,S,S}^{L,k,j}$ dependem explicitamente das amplitudes de modulação.

Podemos dividir o somatório em duas partes $\sum_j = \sum'_j + \sum''_j$, tal que \sum'_j varre frequências de modulação altas $\eta^{(j')} \sim \lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,T}$, e \sum''_j varre frequências de modulação baixas $\eta^{(j'')} \sim \lambda_{m,S} - \lambda_{m,T}$. Portanto após algumas manipulações obtemos

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)} = & \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum''_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} B_{m,\mathcal{S}}^{(1)} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) + \\
& + \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum'_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} B_{m,\mathcal{S}}^{(1)} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \left[e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})t} + \right. \\
& \left. - e^{-i\phi_{L,k}^{(j)}} e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})t} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}(n)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} B_{n,\mathcal{S}}^{(1)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle \times \\
& \times \exp \left\{ i \sum_j \sum_{k=0}^2 \sum_{L=E,G} \frac{\Pi_{n,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) - \cos\phi_{L,k}^{(j)} \right] \right\}. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Agora propomos o seguinte Ansatz

$$\begin{aligned}
B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) = & B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum'_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \times \\
& \times \left[e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} - e^{-i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} \right]. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

A aproximação feita até agora contempla apenas a exponencial dependente do tempo do primeiro termo da equação (5.20). Mais tarde vamos repetir este procedimento para as demais exponenciais. Derivando (5.24) em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)} = & i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum'_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \times \left\{ e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} + \right. \\
& \left. - e^{-i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} \right\} + \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum'_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \times \\
& \times \left[e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})t} - e^{-i\phi_{L,k}^{(j)}} e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})t} \right]. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Comparando (5.24) com (5.25) e desprezando todos os termos de segunda ordem obtemos uma

equação diferencial para $B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}$

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j' \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \times \left\{ e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} + \right. \\
& \left. - e^{-i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}} \right\} + \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j'' \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} \times \\
& \times B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}(n)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} B_{n,\mathcal{S}}^{(1)} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle \times \\
& \times \exp \left\{ i \sum_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{\Pi_{n,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{L,k,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k,j}}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) - \cos\phi_{L,k}^{(j)} \right] \right\}. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Até agora manipulamos apenas os termos relativos a \hat{H}_1 . A partir da equação (5.7) concluímos que

$$\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left(\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a} \hat{\sigma}_{k,k+1} | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle + \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k+1,k} | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle \right) \quad (5.27)$$

onde os operadores $\hat{a} \hat{\sigma}_{k,k+1}$ ($\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k+1,k}$) destroem (criam) duas excitações do sistema. Isto posto, definimos

$$\langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{H}_2 / \hbar | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} G_k \left(\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} + \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* \right), \quad (5.28)$$

tal que

$$\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a} \hat{\sigma}_{k,k+1} | \varphi_{m+2,\mathcal{S}} \rangle, \quad (5.29)$$

$$\Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* = \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{k+1,k} | \varphi_{m-2,\mathcal{S}} \rangle. \quad (5.30)$$

Nosso principal objetivo agora é reescrever (5.26) em primeira ordem em ε , deste modo expandimos a exponencial dependente do tempo e desprezamos todos os termos de segunda ordem (e ordem superior) em ε . Ademais, conforme podemos observar, o primeiro termo de (5.26) é de primeira ordem e depende explicitamente de $\dot{B}_{m,\mathcal{S}}^{(2)}$. Podemos eliminar este termo reescrevendo (5.26) em ordem zero e trocando $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$. Fazendo isso, obtemos após algumas

manipulações algébricas a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &= \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j'' \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} B_{m,S}^{(2)}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) + \\
&\frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j' \sum_{k=0}^2 \sum_{L=E,G} \left\{ \sum_{k3=0}^{N-1} G_{k3} \sum_{\mathcal{R}(m+2)} e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}})} B_{m+2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \Lambda_{k3,m+2,\mathcal{S},\mathcal{R}} \right. \\
&+ \left. \sum_{k3=0}^1 G_{k3} \sum_{\mathcal{R}(m-2)} e^{it(\lambda_{m,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}})} B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)}(t) \Lambda_{k3,m,\mathcal{R},\mathcal{S}}^* \right\} \times \\
&\times \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \left[e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta^{(j)}} - e^{-\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta^{(j)}} \right] + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} G_k \sum_{\mathcal{S}(m+2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \mathcal{H}_{m+2,S} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} G_k \sum_{\mathcal{S}(m-2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} \mathcal{H}_{m-2,S} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} G_k \sum_{\mathcal{S}(m+2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} G_k \sum_{\mathcal{S}(m-2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^*, \tag{5.31}
\end{aligned}$$

na qual

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{m+2,S} &= B_{m+2,S}^{(2)}(t) \sum_j \sum_{k1=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{i \left(\Pi_{m+2,S,\mathcal{S}}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j} \right)}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k1}^{(j)}\right) - \cos\phi_{L,k1}^{(j)} \right] + \\
&- \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R}(m+2) \neq \mathcal{S}(m+2)} \sum_j' \sum_{k2=0}^N \sum_{L=E,G} B_{m+2,\mathcal{R}}^{(2)} \Pi_{m+2,S,\mathcal{R}}^{L,k2,j} \times \\
&\times \left[e^{i\phi_{L,k2}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} - e^{-\phi_{L,k2}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \right] \tag{5.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{m-2,S} &= B_{m-2,S}^{(2)}(t) \sum_j \sum_{k1=0}^N \sum_{L=E,G} \frac{i \left(\Pi_{m-2,S,\mathcal{S}}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j} \right)}{\eta^{(j)}} \left[\cos\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k1}^{(j)}\right) - \cos\phi_{L,k1}^{(j)} \right] + \\
&- \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R}(m-2) \neq \mathcal{S}(m-2)} \sum_j' \sum_{k2=0}^{N-1} \sum_{L=E,G} B_{m-2,\mathcal{R}}^{(2)} \Pi_{m-2,S,\mathcal{R}}^{L,k2,j} \times \\
&\times \left[e^{i\phi_{L,k2}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} - e^{-\phi_{L,k2}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_{m-2,S} - \lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \right] \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Sabemos que $E_k \equiv E_{0,k} + \varepsilon_{E,k} f_{E,k}$ e $G_k \equiv G_{0,k} + \varepsilon_{G,k} f_{G,k}$, então escrevemos de forma compacta

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = & \sum_{S(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j'' \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,S})} B_{m,S}^{(2)}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},S}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) + \\
& \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \sum_{S(m+2)} e^{it(\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m+2,S})} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} + \\
& + \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \sum_{S(m-2)} e^{it(\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m-2,S})} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* + \sum_{i=1}^5 \text{linha}_i. \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Devido ao extenso tamanho da equação (5.34) compactamos vários termos utilizando a notação $\sum_{i=1}^5 \text{linha}_i$ de modo que a linha_1 será analisada por nós abaixo, enquanto as demais linhas serão tratadas no apêndice C. A parcela da equação (5.34) que representa a linha_1 é dada por

$$\begin{aligned}
\text{linha}_1 = & \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j' \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \sum_{k_1=0}^{N-1} G_{0,k_1} \left\{ \sum_{S(m+2)} e^{it(\lambda_m, \mathcal{R} - \lambda_{m+2,S})} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k_1,m+2,\mathcal{R},S} + \right. \\
& \left. + \sum_{S(m-2)} e^{it(\lambda_m, \mathcal{R} - \lambda_{m-2,S})} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k_1,m,S,\mathcal{R}}^* \right\} \times \\
& \times \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} \left[e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} - e^{-\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})t} - 1}{\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \right], \quad (5.35)
\end{aligned}$$

e após algumas manipulações algébricas chegamos a

$$\begin{aligned}
\text{linha}_1 = & \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j' \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \sum_{k_1=0}^{N-1} G_{0,k_1} \left\{ \sum_{S(m+2)} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k_1,m+2,\mathcal{R},S} \times \right. \\
& \times \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S})}}{\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} + \\
& - \sum_{S(m+2)} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k_1,m+2,\mathcal{R},S} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} e^{-\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,S})}}{\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} + \\
& + \sum_{S(m-2)} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k_1,m,S,\mathcal{R}}^* \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} e^{i\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{it(\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m-2,S} + \eta^{(j)})} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,S})}}{\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} + \\
& \left. + \sum_{S(m-2)} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k_1,m,S,\mathcal{R}}^* \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} e^{-\phi_{L,k}^{(j)}} \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,S})} - e^{it(\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)})}}{\lambda_m, \mathcal{T} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \right\}. \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Conforme sabemos, o valor da frequência de modulação externa η é ajustável em livremente pelo agente externo, se por exemplo, $\eta^{(j)} = \lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}}$ concluímos que o primeiro termo da

equação (5.36) não apresentará comportamento oscilatório uma vez que o argumento da exponencial se anula. De modo análogo, quando $\eta^{(j)} = \lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}}$ o último termo da equação (5.36) também não oscila. Isto posto, dizemos que o primeiro e o último termo da equação acima são termos ressonantes. Por outro lado, todos os demais termos de (5.36) sempre oscilam, uma vez que seus argumentos jamais se anulam com o ajuste da frequência de modulação, isto é, $\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta \neq 0$ e da mesma maneira $\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)} \neq 0$. Dizemos que estes termos estão fora de ressonância e oscilam rapidamente em relação aos termos ressonantes. Em outras palavras, enquanto os termos ressonantes não oscilam quando ajustamos η apropriadamente, os termos fora de ressonância oscilam com frequência de ordem da frequência de modulação. Assim estes termos são indesejáveis, pois sob as condições impostas anteriormente apresentar-se-ão como ruído e o comportamento geral das soluções é dado satisfatoriamente pelos termos ressonantes. Sendo assim, podemos desprezar todos os termos que oscilam rapidamente lançando mão do método RWA, citado por nós no capítulo 2 deste trabalho e detalhado apropriadamente no apêndice A. Essencialmente, este método consiste em eliminar os termos que oscilam rapidamente quando o objeto que multiplica cada exponencial é muito menor que seu respectivo argumento. Sendo assim, podemos eliminar todos os termos que oscilam rapidamente em (5.36), desde que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\frac{G_{0,k1} \Lambda_{k1,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j}}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}) (\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{R}})}, \frac{G_{0,k1} \Lambda_{k1,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j}}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}) (\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} \ll 1,$$

$$\frac{G_{0,k1} \Lambda_{k1,m,\mathcal{S},\mathcal{R}}^* \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j}}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}) (\lambda_{m,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})}, \frac{G_{0,k1} \Lambda_{k1,m,\mathcal{S},\mathcal{R}}^* \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j}}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}) (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} \ll 1.$$

Portanto, a cada aproximação feita por meio do RWA desprezamos termos que não alteram substancialmente a dinâmica do sistema, contudo, o preço que pagamos por isso é que os argumentos das exponenciais imaginárias são ligeiramente deslocados, de modo que (de acordo com o apêndice A) estes deslocamentos são da ordem de

$$\frac{\left(G_{0,k1} \Lambda_{k1,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} \right)^2}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})^2 (\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{R}})}, \frac{\left(G_{0,k1} \Lambda_{k1,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} \right)^2}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})^2 (\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})},$$

$$\frac{\left(G_{0,k1} \Lambda_{k1,m,\mathcal{S},\mathcal{R}}^* \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} \right)^2}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})^2 (\lambda_{m,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})}, \frac{\left(G_{0,k1} \Lambda_{k1,m,\mathcal{S},\mathcal{R}}^* \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} \right)^2}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})^2 (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})},$$

que por sua vez alteram o valor da frequência de modulação η que anula o argumento das

exponenciais nos termos ressonantes. Deste modo, para ajustarmos a frequência de modulação da maneira apropriada, vamos determinar o valor desses deslocamentos explicitamente na seção 5.4.1. Por fim, após realizar estas aproximações apropriadamente, a equação (5.36) tornar-se-á

$$\begin{aligned} \text{linha}_1 = & -\frac{i}{2} \sum_{\mathcal{R}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum'_j \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} \sum_{k1=0}^{N-1} G_{0,k1} \left\{ \sum_{\mathcal{S}(m+2)} \frac{\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} e^{i\phi_{L,k}^{(j)}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} \Lambda_{k1,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} \times \right. \\ & \times e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \times \\ & \left. \times \sum_{\mathcal{S}(m-2)} \frac{\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k,j} e^{-i\phi_{L,k}^{(j)}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \Lambda_{k1,m,\mathcal{S},\mathcal{R}}^* \right\}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

A equação acima descreve uma parte da dinâmica do nosso problema sem os termos que oscilam rapidamente em primeira ordem. Podemos repetir o procedimento acima em todas as demais linhas presentes na equação (5.34) (ver apêndice C) a fim de reescrever a dinâmica do sistema como

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = & \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum''_j \sum_{k=0}^2 \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} B_{m,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) + \\ & \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \sum_{\mathcal{S}(m+2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \sum_{\mathcal{S}(m-2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* + \\ & + \sum'_j \left\{ \sum_{\mathcal{S}(m+2)} \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(j)} e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) + \right. \\ & \left. - \sum_{\mathcal{S}(m-2)} \Theta_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(j)*} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \right\}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

na qual definimos o coeficiente

$$\begin{aligned} \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(j)} = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 G_{0,k} \left\{ \sum_{k1=0}^N \sum_{L=E,G} \sum_{\mathcal{R}(m+2)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \frac{\Pi_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{L,k1,j} e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}}}{(\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} + \right. \\ & - \sum_{k1=0}^N \sum_{L=E,G} \sum_{\mathcal{R}(m)} \frac{\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k1,j} e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}}}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} + \\ & \left. - \frac{\varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} e^{i\phi_{G,k}^{(j)}}}{G_{0,k}} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Usando as identidades $\Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* = \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}$ e $\Pi_{m,\mathcal{T},S}^{L,j*} = \Pi_{m,S,\mathcal{T}}^{L,j}$ temos finalmente

$$\begin{aligned} \Theta_{m,S,\mathcal{T}}^{(j)*} = & -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \left\{ \sum_{k1=0}^2 \sum_{L=E,G} \sum_{\mathcal{R}(m)} \frac{\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{L,k1,j} e^{-\phi_{L,k1}^{(j)}}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \Lambda_{k,m,S,\mathcal{R}}^* \right. \\ & - \sum_{k1=0}^N \sum_{L=E,G} \sum_{\mathcal{R}(m-2)} \Lambda_{k,m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^* \frac{\Pi_{m-2,\mathcal{R},S}^{L,k1,j} e^{-i\phi_{L,k1}^{(j)}}}{\lambda_{m-2,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)}} + \\ & \left. + \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* \frac{\varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} e^{-i\phi_{G,k}^{(j)}}}{G_{0,K}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Conforme discutimos anteriormente, cada vez que utilizamos o RWA para eliminar termos que oscilam rapidamente, os autovalores de JC sofrem um deslocamento considerável. Na próxima seção vamos determinar o valor destes deslocamentos a fim de ajustar a frequência de modulação η da maneira mais apropriada.

5.4.1 Deslocamentos de Frequência

Conforme vimos na seção anterior, o método de aproximação RWA elimina os termos que oscilam rapidamente na equações diferenciais. Contudo, se não quisermos eliminar todos estes termos, podemos manter os termos dominantes a fim de deduzir os deslocamentos que corrigem os autovalores de JC. Com este objetivo em mente, vamos retornar à equação diferencial que deduzimos antes de iniciar as aproximações por RWA dada em (5.34)

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = & \sum_{\mathcal{S}(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j'' \sum_{k=0}^N \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} B_{m,S}^{(2)}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},S}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \sum_{\mathcal{S}(m+2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} B_{m+2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S} + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \sum_{\mathcal{S}(m-2)} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S})} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m,S,\mathcal{T}}^* + \sum_{i=1}^5 \text{linha}_i. \end{aligned}$$

Podemos reescrever esta equação de maneira mais compacta como segue

$$i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = q_1 e^{itW_1} B_{m+2,S}^{(2)}(t) + q_2 e^{itW_2} B_{m-2,S}^{(2)}(t) + \mathcal{W}(t) B_{n,S}^{(2)}, \quad (5.41)$$

na qual

$$\begin{aligned} q_1 &= \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \\ W_1 &= \lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} \\ q_2 &= \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}} \\ W_2 &= \lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} \end{aligned}$$

e $\mathcal{W}(t)B_{n,\mathcal{S}}^{(2)}$ denota todos os outros termos. De acordo com o apêndice B, a solução aproximada de (5.41) é dada por

$$\begin{aligned} B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) &\simeq B_{m,\mathcal{T}}^{(2a)}(t)e^{itS_1} + \frac{q_1}{W_1} [e^{itS_2} - e^{itW_1}] B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) + \\ &+ \frac{q_2}{W_2} [e^{itS_3} - e^{itW_2}] B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) + \int d\tau \mathcal{W}(\tau) B_{n,\mathcal{S}}^{(2)}(\tau), \end{aligned} \quad (5.42)$$

tal que S_i são constantes da ordem de $\mathcal{O}(q_i^2/W_i)$ e $B_{m,\mathcal{T}}^{(2a)}$ é uma função que varia lentamente. As somatórias em k e \mathcal{S} podem agora ser incluídas trivialmente, sob as mesmas aproximações. A partir de (5.42) podemos escrever a solução de $B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t)$ e $B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t)$ trocando $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ e $m \rightarrow m \pm 2$; em seguida, substituímos os resultados em (5.41), eliminando todos os termos fora de ressonância por RWA, chegando a

$$\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = -i\nu_{m,\mathcal{T}} B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) + \mathcal{W}(t)B_{n,\mathcal{S}}^{(2)}, \quad (5.43)$$

na qual

$$\nu_{m,\mathcal{T}} = \left[\sum_{\mathcal{S}(m-2)} \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}} \right)^2}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}})} - \sum_{\mathcal{S}(m+2)} \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \right)^2}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}})} \right], \quad (5.44)$$

de modo que $\mathcal{W}(t)B_{n,S}^{(2)}$ torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t)B_{n,S}^{(2)} &= \sum_{S(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j'' \sum_{k=0}^2 \sum_{L=E,G} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} B_{m,S}^{(2)}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},S}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) + \\ &+ \sum_j' \left\{ \sum_{S(m+2)} \Theta_{m+2,\mathcal{T},S}^{(j)} e^{-it(\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} B_{m+2,S}^{(2)}(t) + \right. \\ &\left. - \sum_{S(m-2)} \Theta_{m,S,\mathcal{T}}^{(j)*} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,S} - \eta^{(j)})} B_{m-2,S}^{(2)}(t) \right\}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por sorte, os termos que dependem explicitamente de e^{itS_i} com $i = 1, 2, 3$ estão fora de ressonância e contribuem muito pouco para a dinâmica. Ademais, uma vez que $\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t)$ é dado por (5.43) podemos imediatamente escrever

$$B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}} b_{m,\mathcal{T}}(t), \quad (5.46)$$

cuja derivada é dada trivialmente por

$$\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(2)}(t) = -i\nu_{m,\mathcal{T}} e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}} b_{m,\mathcal{T}}(t) + e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}} \dot{b}_{m,\mathcal{T}}(t). \quad (5.47)$$

Comparando (5.47) com (5.43) concluímos que

$$\dot{b}_{m,\mathcal{T}}(t) = \mathcal{W}(t)B_{n,S}^{(2)} e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}}. \quad (5.48)$$

Portanto, a partir de (5.45) concluímos que

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{T}} &= -i \sum_{S(m) \neq \mathcal{T}(m)} \sum_j'' \sum_{k=0}^2 \sum_{L=E,G} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m,S})} b_{m,S} \Pi_{m,\mathcal{T},S}^{L,k,j} \sin\left(\eta^{(j)}t + \phi_{L,k}^{(j)}\right) \\ &+ \sum_j' \left\{ \sum_{S(m+2)} \Theta_{m+2,\mathcal{T},S}^{(j)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,S} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} b_{m+2,S} + \right. \\ &\left. - \sum_{S(m-2)} \Theta_{m,S,\mathcal{T}}^{(j)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,S} - \eta^{(j)})} b_{m-2,S} \right\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

tal que

$$\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} = \lambda_{m,\mathcal{T}} + \nu_{m,\mathcal{T}}, \quad (5.50)$$

$$\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{S}} = \lambda_{m,\mathcal{S}} + \nu_{m,\mathcal{S}}, \quad (5.51)$$

são os autovalores de JC corrigidos. A grosso modo, nós fizemos uma transformação a partir de (5.43), de modo que (5.46) absorve as fases contendo $\nu_{m,\mathcal{T}}$ corrigindo os autovalores de JC. Este resultado é fundamental, pois a partir dele podemos ajustar o valor da frequência de modulação a fim induzir o aparecimento de fenômenos associados a criação de excitações do sistema a partir de um dado estado inicial, conforme ficará claro mais tarde. Não estamos interessados no primeiro termo da equação (5.49), pois sua contribuição é muito pequena quando ajustamos a frequência de modulação para $\eta^{(j)} \approx \tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}}$ ou $\eta^{(j)} \approx \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}}$, assim podemos reescrever (5.49) como

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{T}} = & \sum_j' \left\{ \sum_{\mathcal{S}(m+2)} \Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(j)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} b_{m+2,\mathcal{S}} + \right. \\ & \left. - \sum_{\mathcal{S}(m-2)} \Theta_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(j)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} b_{m-2,\mathcal{S}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Esta equação, combinada com (5.39) e (5.40), descreve a dinâmica de interação entre N qubits (ou um átomo de $N + 1$ níveis) e um modo do campo eletromagnético confinado em uma cavidade. Podemos claramente observar que a equação (5.52) acopla estados vestidos que diferem por duas excitações. Conforme discutimos no capítulo 3 a interação de um único qubit com um modo do campo eletromagnético pode ser implementada de maneira controlada em EDQc, isto é, nosso modelo pode ser implementado em laboratório mesmo no caso em que $N = 1$. Sendo assim, motivados pela perspectiva de realização experimental do nosso modelo, podemos reescrever (5.52) para um qubit da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{T}} = & \sum_{\mathcal{S}} \left[\Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(k)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \eta)} b_{m+2,\mathcal{S}} \right. \\ & \left. - \Theta_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(k)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}} - \eta)} b_{m-2,\mathcal{S}} \right], \end{aligned} \quad (5.53)$$

de modo que, neste caso, como estamos interessados apenas nas frequências $\eta \approx \tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}}$ e $\eta \approx \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}}$, eliminamos o somatório \sum_j sobre todas as frequências de modulação $\eta^{(j)}$

possíveis e consideramos que $w_X^{(j)} = 1$ e $\phi^{(j)} = 0$. A taxa de transição $\Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(k)}$ entre os estados que se acoplam tornar-se-á

$$\Theta_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(k)} = \frac{g_0}{2} \sum_{\mathcal{R}=\pm} \left(\frac{\Lambda_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \Pi_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{(k)}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta} - \frac{\Lambda_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{R}}^{(k)}}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{R}} + \eta} \right) + \delta_{k,g} \frac{\varepsilon g}{2} \Lambda_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}. \quad (5.54)$$

Até aqui realizamos todos os cálculos fazendo expansões nas exponenciais dependentes do tempo até a primeira ordem em ε . Sendo assim, dizemos que $\eta \approx \tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}}$ ou $\eta \approx \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}}$ caracterizam ressonâncias de primeira ordem. Contudo, nosso principal objetivo neste capítulo é mostrar que se a frequência de modulação for reduzida à metade, caracterizando aquilo que denominamos ressonância de segunda ordem, é possível reobter os mesmos fenômenos, contudo com uma dramática redução na taxa de oscilação entre os estados que se acoplam em cada fenômeno estudado.

5.5 Segunda Ordem

A partir de agora buscaremos uma solução aproximada para a amplitude de probabilidade $A_{m,\mathcal{T}}(t)$ fazendo uma série de aproximações expandindo as exponenciais que dependem explicitamente das amplitudes de modulação, ε , até a segunda ordem, em contraste ao que fizemos nas seções anteriores. Procedendo os cálculos da mesma maneira que fizemos na seção 5.4 e considerando uma modulação harmônica com $w_X^{(j)} = 1$, $\phi^{(j)} = 0$ e $N = 1$, concluímos que a amplitude de probabilidade associada à expansão da função de onda na base vestida toma a forma

$$i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) = A_{m,\mathcal{T}}(t) \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k \sin(\eta t) + \sum_{\mathcal{S} \neq \mathcal{T}} A_{m,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,\mathcal{S}})} \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{S}}^k \sin(\eta t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{S}} A_{n,\mathcal{S}}(t) e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,\mathcal{S}})} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{H}_2/\hbar) | \varphi_{n,\mathcal{S}} \rangle. \quad (5.55)$$

Nesta seção omitimos o índice j , pois a modulação é monocromática. Além disso consideramos que apenas um dos parâmetros do sistema é modulado, então $k = g$ ou $k = \Omega$ (para modulação simultânea, as expressões finais ficariam grandes de mais devido os termos $\varepsilon_g \times \varepsilon_\Omega$). Não sabemos resolver a equação (5.55) exatamente, entretanto podemos temporariamente eliminar os dois últimos termos na equação (5.17) obtendo, deste modo, uma equação diferencial

extremamente simples, a saber

$$i\dot{A}_{m,\mathcal{T}}(t) = A_{m,\mathcal{T}}(t)\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k \sin(\eta t), \quad (5.56)$$

cuja solução exata, obtida via integração direta, assume a seguinte forma:

$$A_{m,\mathcal{T}} = B_{m,\mathcal{T}}^{(1)} \exp\left(-\frac{i\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k}{\eta}\right) \exp\left(\frac{i\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k}{\eta} \cos \eta t\right), \quad (5.57)$$

na qual $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}$ é uma constante. A equação (5.57) é solução de (5.56), contudo buscamos uma solução para a equação (5.17). Para isso vamos propor que (5.57) é solução com a condição de que $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}$ seja uma função do tempo. Sendo assim, podemos derivar (5.57) em relação ao tempo e comparar com (5.55) a fim de escrever uma equação diferencial para $B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t)$, como segue

$$\begin{aligned} i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= \sum_{S \neq \mathcal{T}} B_{m,S}^{(1)} e^{i(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k - \Pi_{m,S,S}^k)/\eta} e^{\frac{i(\Pi_{m,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{\eta} \cos \eta t} \times \\ &\times e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S})} \Pi_{m,\mathcal{T},S}^k \sin(\eta t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_S B_{n,S}^{(1)} e^{i(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k - \Pi_{n,S,S}^k)/\eta} \times \\ &\times e^{\frac{i(\Pi_{n,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{\eta} \cos \eta t} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{H}_2/\hbar) | \varphi_{n,S} \rangle. \end{aligned} \quad (5.58)$$

A fim de encontrar uma solução aproximada para $B_{m,S}^{(1)}$ vamos considerar que²

$$\left| \frac{\Pi_{m,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k}{\eta} \right| \ll 1. \quad (5.59)$$

Sendo assim podemos expandir a exponencial dependente do tempo até a segunda ordem em ε ³, isto é

$$\begin{aligned} e^{\frac{i(\Pi_{n,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{\eta} \cos \eta t} &= 1 + \frac{i(\Pi_{m,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{\eta} \cos \eta t + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{i(\Pi_{m,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{\eta} \cos \eta t \right]^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.60)$$

²O leitor deve recordar que os coeficientes $\Pi_{m,\mathcal{T},S}^k$ dependem explicitamente das amplitudes de modulação.

³Lembrar que os coeficientes $\Pi_{m,S,S}^k$ dependem explicitamente de ε .

Substituindo (5.60) na equação (5.58) e desprezando todos os termos de ordem 3 e ordem superior obtemos, após algumas manipulações algébricas, a seguinte equação

$$\begin{aligned}
i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)} &= \frac{1}{2i} \sum_{S \neq \mathcal{T}} B_{m,S}^{(1)} e^{i(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k - \Pi_{m,S,S}^k)/\eta} \left\{ \Pi_{m,\mathcal{T},S}^k \left[e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta)} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta)} \right] + \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{i(\Pi_{m,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{2\eta} \Pi_{m,\mathcal{T},S}^k \left[e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + 2\eta)} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - 2\eta)} \right] \right\} + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_S B_{n,S}^{(1)} e^{i(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k - \Pi_{n,S,S}^k)/\eta} \exp \left[\frac{i(\Pi_{n,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{\eta} \cos \eta t \right] \times \\
&\quad \times e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{n,S})} \langle \varphi_{m,\mathcal{T}} | (\hat{H}_2/\hbar) | \varphi_{n,S} \rangle. \tag{5.61}
\end{aligned}$$

Em seguida propomos o seguinte Ansatz como solução de (5.61)

$$\begin{aligned}
B_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) &= B_{m,\mathcal{T}}^{(2)} - \frac{1}{2i} \sum_{S \neq \mathcal{T}} B_{m,S}^{(2)} e^{i(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k - \Pi_{m,S,S}^k)/\eta} \times \\
&\quad \times \Pi_{m,\mathcal{T},S}^k \left\{ \left(\frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta)} - 1}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + \eta)} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta)} - 1}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - \eta)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i(\Pi_{m,S,S}^k - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k)}{2\eta} \left[\frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + 2\eta)} - 1}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} + 2\eta)} - \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - 2\eta)} - 1}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,S} - 2\eta)} \right] \right\}. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

Uma vez que os autovalores de JC são dados por $\lambda_{m,\mathcal{T}} = \omega_0 m + \frac{\mathcal{T}\beta_m - \Delta}{2}$ (seção 2.4), portanto $\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,-\mathcal{T}} = \mathcal{T}\beta_m$. Sendo assim podemos reescrever o ansatz (5.62), eliminando o somatório $\sum_{S \neq \mathcal{T}}$, de maneira mais conveniente como

$$i\dot{B}_{m,\mathcal{T}}^{(1)}(t) = B_{m,\mathcal{T}}^{(2)} - B_{m,-\mathcal{T}}^{(2)} \zeta_{m,\mathcal{T}}^{(k)}(t) \tag{5.63}$$

na qual

$$\begin{aligned}
\zeta_{m,\mathcal{T}}^{(k)}(t) &= \frac{\Pi_{m,\mathcal{T},-\mathcal{T}}^k}{2i} \exp \left(i \frac{\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k - \Pi_{m,-\mathcal{T},-\mathcal{T}}^k}{\eta} \right) \times \\
&\quad \left\{ \left(\frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,-\mathcal{T}} + \eta)} - 1}{(\eta + \mathcal{T}\beta_n)} + \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,-\mathcal{T}} - \eta)} - 1}{(\eta - \mathcal{T}\beta_n)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^k - \Pi_{m,-\mathcal{T},-\mathcal{T}}^k)}{2i\eta} \left(\frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,-\mathcal{T}} + 2\eta)} - 1}{(2\eta + \mathcal{T}\beta_n)} + \frac{e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m,-\mathcal{T}} - 2\eta)} - 1}{(2\eta - \mathcal{T}\beta_n)} \right) \right\},
\end{aligned}$$

Escrevendo $B_{m,\mathcal{T}}^{(2)}$ e $B_{m,-\mathcal{T}}^{(2)}$ em termos dos deslocamentos $\nu_{m,\mathcal{T}}$ calculados na subseção 5.4.1

obtemos

$$B_{m,-\mathcal{T}}^{(2)} = e^{-it\nu_{m,-\mathcal{T}}} b_{m,-\mathcal{T}}(t), \quad (5.64)$$

$$B_{m,\mathcal{T}}^{(2)} = e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}} b_{m,\mathcal{T}}(t). \quad (5.65)$$

Isto posto, podemos reescrever (5.57) como

$$A_{m,\mathcal{T}}(t) = \exp\left(i\Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{(k)} \frac{\cos \eta t - 1}{\eta}\right) \times \left[e^{-it\nu_{m,\mathcal{T}}} b_{m,\mathcal{T}}(t) - e^{-it\nu_{m,-\mathcal{T}}} \zeta_{m,\mathcal{T}}^{(k)}(t) b_{m,-\mathcal{T}}(t) \right] \quad (5.66)$$

e após algumas manipulações algébricas obtemos a equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{b}_{m,\mathcal{T}} = & \sum_{\mathcal{S}} \left[\Phi_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(k)} e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - 2\eta)} b_{m+2,\mathcal{S}} \right. \\ & \left. - \Phi_{m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^{(k)*} e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}} - 2\eta)} b_{m-2,\mathcal{S}} \right], \end{aligned} \quad (5.67)$$

em que a taxa de acoplamento entre os estados vestidos que diferem por duas excitações são

$$\begin{aligned} \Phi_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^{(k)} = & \frac{ig_0}{4} \left[\frac{\Lambda_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \left(\Pi_{m+2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{(k)} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{(k)} \right)^2}{2\eta^2} - \frac{\Lambda_{m+2,-\mathcal{T},-\mathcal{S}} \Pi_{m+2,-\mathcal{S},\mathcal{S}}^{(k)} \Pi_{m,\mathcal{T},-\mathcal{T}}^{(k)}}{(\eta - \mathcal{S}\beta_{m+2})(\eta + \mathcal{T}\beta_m)} \right. \\ & \frac{\Lambda_{m+2,\mathcal{T},-\mathcal{S}} \Pi_{m+2,-\mathcal{S},\mathcal{S}}^{(k)}}{\eta} \left(\frac{\Pi_{m+2,-\mathcal{S},-\mathcal{S}}^{(k)} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{(k)}}{\eta - \mathcal{S}\beta_{m+2}} + \frac{\Pi_{m+2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{(k)} - \Pi_{m+2,-\mathcal{S},-\mathcal{S}}^{(k)}}{2\eta - \mathcal{S}\beta_{m+2}} \right) \\ & - \frac{\Lambda_{m+2,-\mathcal{T},\mathcal{S}} \Pi_{m,\mathcal{T},-\mathcal{T}}^{(k)}}{\eta} \left(\frac{\Pi_{m+2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{(k)} - \Pi_{m,-\mathcal{T},-\mathcal{T}}^{(k)}}{\eta + \mathcal{T}\beta_m} + \frac{\Pi_{m,-\mathcal{T},-\mathcal{T}}^{(k)} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{(k)}}{2\eta + \mathcal{T}\beta_m} \right) \\ & - \delta_{k,g} \frac{\varepsilon g}{g_0} \left(\frac{\Lambda_{m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \left(\Pi_{m+2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{(g)} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{(g)} \right)}{\eta} + \frac{\Lambda_{m+2,\mathcal{T},-\mathcal{S}} \Pi_{m+2,-\mathcal{S},\mathcal{S}}^{(g)}}{\eta - \mathcal{S}\beta_{m+2}} + \right. \\ & \left. - \frac{\Lambda_{m+2,-\mathcal{T},\mathcal{S}} \Pi_{m,\mathcal{T},-\mathcal{T}}^{(g)}}{\eta + \mathcal{T}\beta_m} \right) \Big]. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Sendo assim, dizemos que $\eta \approx (\tilde{\lambda}_{m+2,\mathcal{S}} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}})/2$ ou $\eta \approx (\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,\mathcal{S}})/2$ caracterizam ressonâncias de segunda ordem. Em outras palavras, a ressonância de segunda ordem é igual a metade da ressonância de primeira. Finalmente, podemos compactar todos os resultados em primeira e segunda ordem dados em (5.53) e (5.67) a fim de obter a equação diferencial que

descreve a dinâmica total do sistema

$$\dot{b}_{m,\mathcal{T}} = \sum_S \left[\left(\Theta_{m+2,\mathcal{T},S}^{(k)} e^{it\eta} + \Phi_{m+2,\mathcal{T},S}^{(k)} e^{it2\eta} \right) e^{-it(\tilde{\lambda}_{m+2,S} - \tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}})} b_{m+2,S} \right. \quad (5.69)$$

$$\left. - \left(\Theta_{m,S,\mathcal{T}}^{(k)} e^{-it\eta} + \Phi_{m,S,\mathcal{T}}^{(k)} e^{-it2\eta} \right)^* e^{it(\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{T}} - \tilde{\lambda}_{m-2,S})} b_{m-2,S} \right]. \quad (5.70)$$

Esta equação é o resultado mais importante deste trabalho, uma vez que a partir dela podemos controlar a dinâmica do sistema composto por um transmon acoplado a um modo do campo eletromagnético ajustando a frequência de modulação externa η dos parâmetros em primeira e segunda ordem. É conhecido na literatura que, ajustando a frequência de modulação em primeira ordem, é possível simular o ECD e o efeito AJC em EDQc [13]. Ademais, as taxas de transição de primeira ordem, $\Theta_{m+2,\mathcal{T},S}^{(k)}$, entre os estados vestidos que se acoplam em cada fenômeno, foram calculadas explicitamente em 2015 por I. M. de Sousa e A. Dodonov [12]. Além disso, os autores previram teoricamente um novo fenômeno denominado AECD, que corresponde a aniquilação de pares de excitações do sistema quando a frequência de modulação é ajustada apropriadamente. Contudo, previsões teóricas sobre a taxa de segunda ordem, $\Phi_{m+2,\mathcal{T},S}^{(k)}$, não existem na literatura e correspondem ao resultado original deste trabalho. Nosso principal objetivo nas próximas seções é mostrar que se a frequência de modulação for reduzida à metade, caracterizando aquilo que denominamos ressonância de segunda ordem, é possível simular o ECD e o efeito AJC em EDQc, contudo com uma dramática redução na taxa de oscilação entre os estados que se acoplam em cada fenômeno estudado.

5.6 Regime Dispersivo

Conforme discutimos na subseção 2.4.2, o regime dispersivo ocorre quando $|\Delta_-|/2 \gg g_0\sqrt{m}$, tal que m é o número máximo de excitações. Vimos também que os autovalores de JC neste regime são dados pela equação (2.24), a saber

$$\lambda_{m,\mathcal{D}} \approx \omega_0 m + \delta_- m, \quad (5.71)$$

$$\lambda_{m,-\mathcal{D}} \approx \omega_0 m - \Delta_- - \delta_- m. \quad (5.72)$$

Contudo, este autovalor sofreu um deslocamento sutil devido às aproximações feitas através do método RWA na seção anterior, de modo que o autovalor corrigido $\tilde{\lambda}_{m,S}$ foi calculado explicita-

mente por nós em (5.51) e (5.44). Portanto, a partir destas equações, podemos mostrar que no regime dispersivo o autovalor de JC corrigido é dado por (fazendo $S = \mathcal{D}$)

$$\tilde{\lambda}_{m,\mathcal{D}} \simeq (\omega_0 + \delta_-)m - \delta_+(m+1), \quad (5.73)$$

$$\tilde{\lambda}_{m>0,-\mathcal{D}} \simeq (\omega_0 - \delta_-)m - \Delta_- + \delta_+(m-1), \quad (5.74)$$

tal que $\tilde{\lambda}_{0,\mathcal{D}} \equiv \tilde{\lambda}_0 = -\delta_+$; $\mathcal{D} = \Delta_-/|\Delta_-| = \pm$. Lembremo-nos ainda que, conforme vimos na subseção 2.4.22, podemos escrever os autoestados de JC em primeira ordem de $g_0\sqrt{m}/\Delta_-$ da seguinte maneira:

$$|\varphi_{m \geq 0, \mathcal{D}}\rangle \simeq \left(|g, m\rangle + \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} |e, m-1\rangle \right), \quad (5.75)$$

$$|\varphi_{m > 0, -\mathcal{D}}\rangle \simeq -\mathcal{D} \left(|e, m-1\rangle - \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m} |g, m\rangle \right). \quad (5.76)$$

Os critérios de validade dos nossos cálculos são $\varepsilon_\Omega, g_0\sqrt{m}, \varepsilon_g\sqrt{m}, |\Delta_-| \ll \omega_0$. Ajustando a frequência de modulação η dos parâmetros apropriadamente obtemos, no regime dispersivo, três fenômenos distintos: ECD, AJC e o AECD. Nosso objetivo nas próximas subseções é calcular explicitamente o valor das taxas de transição de primeira e segunda ordem, dadas respectivamente por (5.54) e (5.68).

5.6.1 Ressonância de AJC

A ressonância de AJC ocorre quando ajustamos a frequência de modulação η de acordo com

$$\eta \simeq \frac{\Delta_+ + 2(\delta_+ - \delta_-)}{K}, \quad (5.77)$$

na qual $K = 1$ ou $K = 2$ representa, respectivamente, as ressonâncias de primeira e segunda ordem. Neste caso a equação (5.70) acopla os estados vestidos $\{|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+2,-\mathcal{D}}\rangle\}$, de modo que em ordem zero de $g_0\sqrt{m}/\Delta_-$ estes estados correspondem aproximadamente a $|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle \approx |g, m\rangle$ e $|\varphi_{m+2,-\mathcal{D}}\rangle \approx |e, m+1\rangle$. Neste caso, o efeito AJC diz respeito a transições da forma $|g, m\rangle \leftrightarrow |e, m+1\rangle$, de maneira que quando $m = 0$ observamos transições $|g, 0\rangle \leftrightarrow |e, 1\rangle$ que correspondem a criação de um fóton e uma excitação atômica a partir do estado fundamental do campo e do átomo, ou em contrapartida correspondem a destruição de um fóton e de uma excitação atômica a partir do estado inicial $|e, 1\rangle$. Do ponto de vista físico, a modulação

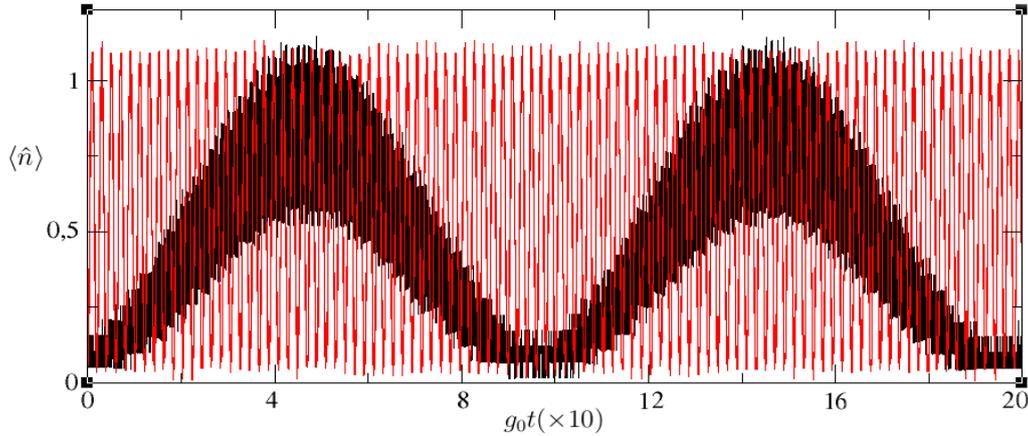


Figura 5.1: Número médio de fótons gerados a partir do estado de zero excitações $|g, 0\rangle$ para a ressonância de AJC $\eta \simeq \frac{\Delta_+ + 2\delta_+ - 1,916\delta_-}{K}$. A ressonância de primeira ordem ($K = 1$) corresponde ao gráfico vermelho, enquanto a ressonância de segunda ordem ($k = 2$) corresponde ao gráfico preto.

externa complementa a energia Δ_+ necessária para criar um fóton e uma excitação atômica simultaneamente. É interessante notar que este fenômeno está claramente associado ao termo contragirante ($\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$) do Hamiltoniano de Rabi, uma vez que $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ ($\hat{\sigma}_- \hat{a}$) cria (destrói) uma excitação do campo e do átomo simultaneamente. Estimamos as taxas de transição de primeira e segunda ordem a partir das equações (5.54) e (5.68) para a modulação de Ω

$$\Theta_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=\Omega)} \simeq -\mathcal{D}g_0\sqrt{m+1} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\Delta_+} \right), \quad (5.78)$$

$$\Phi_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=\Omega)} \simeq -2i\mathcal{D}g_0\sqrt{m+1} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\Delta_+} \right)^2, \quad (5.79)$$

e para a modulação de g

$$\Theta_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=g)} \simeq \mathcal{D}g_0\sqrt{m+1} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right), \quad (5.80)$$

$$\Phi_{m+2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=g)} \simeq -4i\mathcal{D}\sqrt{m+1} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right)^2 \frac{g_0^3(m+1)}{\Delta_+\Delta_-} \left(1 + \frac{2\Delta_-}{2\omega_0 + \Delta_-} \right). \quad (5.81)$$

Considerando os parâmetros realistas $\omega_0/2\pi = 10\text{GHz}$, $g_0/\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_\Omega/\Omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_g/g_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\Delta_- = 8g_0$ [40, 37, 59] e $m = 0$ obtemos, para o acoplamento $|g, 0\rangle \leftrightarrow |e, 1\rangle$, as seguintes taxas de transição: $\Theta_{2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=\Omega)} \approx 9,37 \times 10^{-3}g_0$, $\Phi_{2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=\Omega)} \approx 1,75 \times 10^{-4}$, $\Theta_{2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=g)} \approx 2,5 \times 10^{-2}$ e $\Phi_{2, \mathcal{D}, -\mathcal{D}}^{(k=g)} \approx 1,30 \times 10^{-5}$. Podemos notar que a taxa de transição de segunda ordem para o parâmetro g é uma ordem de grandeza mais lenta em relação à respectiva taxa para o parâmetro

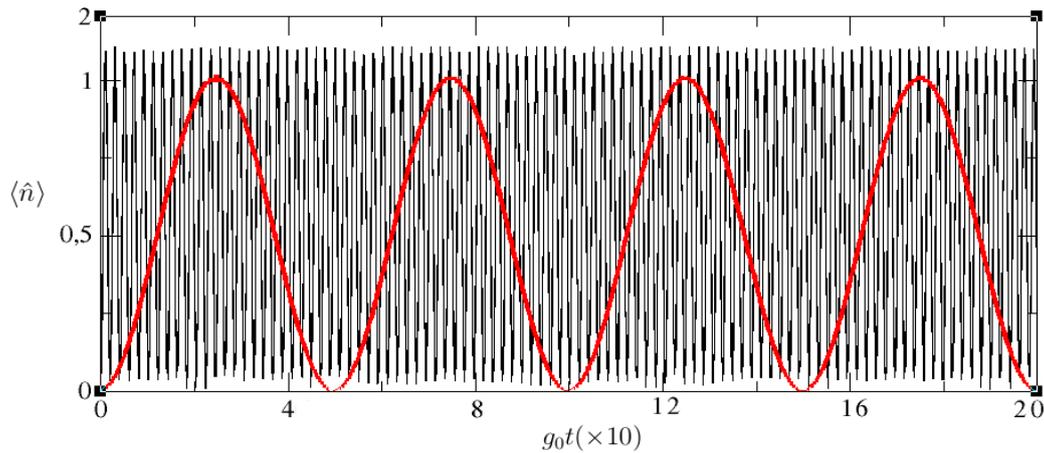


Figura 5.2: Número médio de fótons gerados, no regime ultraforte (preto) e no regime fraco (vermelho), a partir do estado de zero excitações $|g, 0\rangle$ para a ressonâncias de AJC de primeira ordem $\eta \simeq \Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+$ (regime fraco) e $\eta \simeq \Delta_+ - 2\delta_- + 0.8059\delta_+$ (regime ultraforte).

Ω . Portanto, para alcançar as ressonâncias de segunda ordem no regime AJC, a modulação da frequência de transição atômica é mais vantajosa. Não consideramos, no entanto, os efeitos de dissipação e decoerência tanto do átomo artificial quanto da cavidade. Experimentos recentes alcançam valores experimentais $\kappa \approx \gamma \approx \gamma_{ph} \approx 5 \times 10^{-5} g_0$ [138, 139, 72], tal que κ é a taxa de decaimento da cavidade, γ é a taxa de decaimento do qubit e γ_{ph} é a taxa de defasagem atômica pura. Isto posto, para lidar com a dissipação de maneira qualitativa, comparamos as taxas de transição entre os estados $|g, 0\rangle \leftrightarrow |e, 1\rangle$, calculadas nesta seção, com as taxas de dissipação fenomenológicas κ , γ e γ_{ph} . Podemos notar que as taxas de transição de primeira ordem para Ω e para g são respectivamente da ordem de $10^{-3}g_0$ e $10^{-2}g_0$, ambos estes valores são maiores que os parâmetros dissipativos. Logo, o acoplamento entre os estados $|g, 0\rangle \leftrightarrow |e, 1\rangle$ através da modulação periódica de Ω e g parece possível de realizar experimentalmente para ressonâncias de primeira ordem ($\eta \simeq \Delta_+ + 2(\delta_+ - \delta_-)$). Por outro lado, as taxas de transição de segunda ordem para Ω e para g são da ordem de $10^{-4}g_0$ e $10^{-5}g_0$, respectivamente. Notamos imediatamente que apenas a taxa de transição para o parâmetro g encontra-se no limite de resolução, posto que é da mesma ordem que os parâmetros dissipativos. Isto nos leva a conclusão imediata de que, para ressonâncias de segunda ordem ($\eta \simeq [\Delta_+ + 2(\delta_+ - \delta_-)]/2$) o efeito AJC é viável experimentalmente pelo menos para a modulação da frequência de transição atômica.

Na condução de nossos cálculos analíticos consideramos um valor moderado para o acoplamento átomo-campo $g_0 \approx 5 \times 10^{-2}\omega_0$, o que implica em taxas de transição pequenas para os acoplamentos gerados devido a modulação dos parâmetros. Contudo, em EDQc é possível

alcançar regimes nos quais o acoplamento átomo-campo é comparável com a frequência ω_0 da cavidade. Este regime, denominado regime ultra-forte [140, 29], ocorre em geral quando $g_0 > 0, 1\omega_0$. Uma vez que nossos cálculos analíticos não contemplam este caso, vamos resolver o Hamiltoniano de Rabi numericamente utilizando o integrador de Runge-Kutta de quarta ordem a fim de estudar a dinâmica do sistema no regime ultraforte. Utilizamos um algoritmo simples escrito em C que resolve um conjunto de N equações diferenciais acopladas para a obtenção de nossos resultados numéricos (apêndice D).

Na figura 5.1 plotamos o número médio de fótons gerados a partir do estado de zero excitações (no regime ultraforte) para ressonâncias de primeira e segunda ordem. Fixando os parâmetros $g_0 = 0, 2\omega_0$, $\varepsilon_g = 0, 3g_0$ e $\Delta_- = 8g_0$, observamos que mesmo para ressonâncias de segunda ordem (gráfico preto) ocorre o acoplamento $|g, 0\rangle \leftrightarrow |e, 1\rangle$, embora com uma dramática redução na taxa de transição entre estes estados, em relação à ressonância de primeira ordem (gráfico vermelho). Ademais, na figura 5.2 comparamos as taxas de transição em primeira ordem entre os estados $|g, 0\rangle \leftrightarrow |e, 1\rangle$ para o regime de acoplamento fraco (vermelho) e ultraforte (preto). Podemos notar a taxa de transição é visivelmente otimizada devido ao forte acoplamento do qubit com o campo.

5.6.2 Ressonância de ECD

A ressonância de ECD ocorre quando ajustamos a frequência de modulação η de acordo com

$$\eta \simeq \frac{2\omega_0 + 2(\delta_- - \delta_+)}{K}. \quad (5.82)$$

Neste caso, dois tipos de acoplamento são possíveis: $\{|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+2,\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+4,\mathcal{D}}\rangle, \dots\}$ e $\{|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+2,-\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+4,-\mathcal{D}}\rangle, \dots\}$, de modo que em ordem zero de $g_0\sqrt{m}/\Delta_-$ estes acoplamentos correspondem, respectivamente, a transições da forma $|g, m\rangle \leftrightarrow |g, m+2\rangle \leftrightarrow |g, m+4\rangle \dots$ e $|e, m\rangle \leftrightarrow |e, m+2\rangle \leftrightarrow |g, m+4\rangle \dots$. Se $m=0$ existe uma probabilidade não nula de observarmos a transição $|g, 0\rangle \leftrightarrow |g, 2\rangle$, que corresponde a geração de pares de fótons a partir do estado inicial de vácuo. Por consequência dessa característica peculiar, o ECD é geralmente reconhecido na literatura pela criação de fótons a partir do vácuo, embora fótons possam ser criados a partir de qualquer outro estado inicial. A taxa de transição de primeira ordem Θ , dada por (5.54), foi calculada explicitamente em [12], onde demonstrou-se que $\langle \hat{n} \rangle$ exibe um comportamento de colapso e ressurgimento em função do tempo e que a criação de fótons a partir do vácuo sofre

uma saturação devido ao termo não-linear de kerr ($\alpha = g_0^4/\Delta_-^3$). Considerando o acoplamento $\{|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+2,\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+4,\mathcal{D}}\rangle, \dots\}$ calculamos as taxas de transição de primeira e segunda ordem explicitamente a partir de (5.54) e (5.68) para a modulação de Ω

$$\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\Omega)} \simeq \delta_- \sqrt{(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\Delta_+} \right), \quad (5.83)$$

$$\Phi_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\Omega)} \simeq i\delta_- \sqrt{(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\Delta_+} \right)^2 \frac{\Delta_+}{\Omega_0}, \quad (5.84)$$

e para a modulação de g

$$\Theta_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(g)} \simeq -\delta_- \sqrt{(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right) \frac{2\Omega_0}{\Delta_+}, \quad (5.85)$$

$$\Phi_{m+2,\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(g)} \simeq -i\delta_- \sqrt{(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right)^2 \frac{\Delta_-}{\Omega_0}. \quad (5.86)$$

Da mesma maneira calculamos estas taxas, no caso do acoplamento $\{|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+2,-\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+4,-\mathcal{D}}\rangle, \dots\}$, para a modulação de Ω

$$\Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\Omega)} \simeq -\delta_- \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\Delta_+} \right) \sqrt{m(m+1)}, \quad (5.87)$$

$$\Phi_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(\Omega)} \simeq -i\delta_- \sqrt{m(m+1)} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\Delta_+} \right)^2 \frac{\Delta_+}{\Omega_0}, \quad (5.88)$$

e para a modulação de g

$$\Theta_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(g)} \simeq \delta_- \sqrt{m(m+1)} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right) \frac{2\Omega_0}{\Delta_+} \quad (5.89)$$

$$\Phi_{m+2,-\mathcal{D},-\mathcal{D}}^{(g)} \simeq i\delta_- \sqrt{m(m+1)} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right)^2 \frac{\Delta_-}{\Omega_0} \quad (5.90)$$

Consideramos os mesmos parâmetros utilizados na seção anterior $\omega_0/2\pi = 10GHz$, $g_0/\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_\Omega/\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, e $\Delta_- = 8g_0$. Ademais, escolhendo $m = 0$ para transições $|\varphi_{m,\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+2,\mathcal{D}}\rangle$ e $m = 1$ para transições do tipo $|\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m+2,-\mathcal{D}}\rangle$ concluímos que: $\Theta_{\pm\mathcal{D},\pm\mathcal{D}}^{(\Omega)} = 1, 65 \times 10^{-3}g_0$, $\Phi_{\pm\mathcal{D},\pm\mathcal{D}}^{(\Omega)} \approx 4, 14 \times 10^{-5}g_0$, $\Theta_{\pm\mathcal{D},\pm\mathcal{D}}^{(g)} \approx 3, 30 \times 10^{-3}g_0$ e $\Phi_{m+2,\pm\mathcal{D},\pm\mathcal{D}}^{(g)} \approx 7, 36 \times 10^{-5}g_0$. Deste modo, as taxas de transição de segunda ordem são duas ordens de grandeza mais lentas do que as respectivas taxas de primeira ordem para a modulação de ambos os parâmetros. Comparando as taxas de transição entre os estados $|g, 0\rangle \leftrightarrow |g, 2\rangle$ e $|e, 1\rangle \leftrightarrow |e, 3\rangle$, calculadas nesta seção, com as taxas de dissipação fenomenológicas $\kappa \approx \gamma \approx \gamma_{ph} \approx 5 \times 10^{-5}g_0$, notamos que para ressonâncias de primeira ordem as taxas de transição são maiores que os parâmetros dissi-

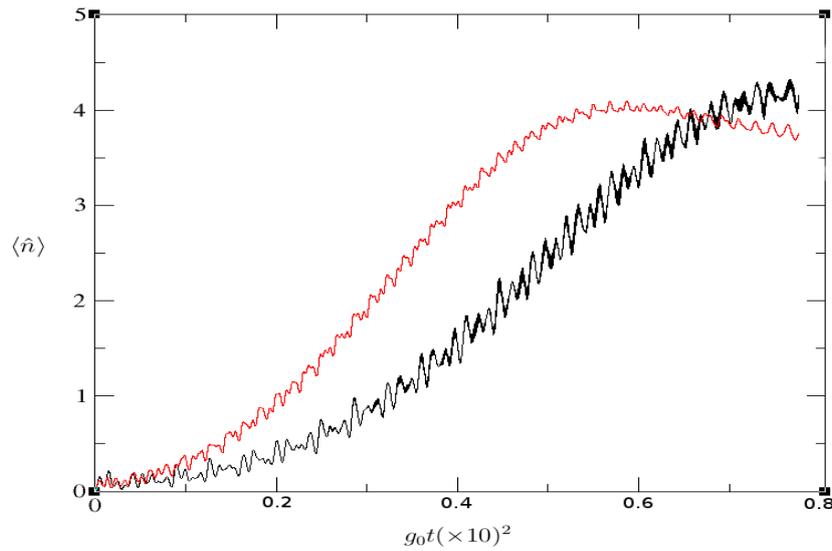


Figura 5.3: Número médio de fótons gerados via ECD para ressonâncias de primeira (vermelho) e segunda ordem (preto), cujas frequências de modulação, respectivamente para $K = 1$ e $K = 2$ são dadas por $\eta = \frac{2\omega_0 + 2\delta_- + 0,93\delta_+}{K}$.

pativos. Por outro lado, as taxas de transição de segunda ordem para Ω e para g são da mesma ordem que os parâmetros dissipativos. Logo, a geração de fótons a partir do vácuo através da modulação periódica de Ω e g parece viável de realizar experimentalmente para ressonâncias de primeira e segunda ordem, embora este último caso esteja no limite de resolução.

Conforme comentamos na seção anterior, nossos cálculos analíticos foram conduzidos para o regime de acoplamento fraco ($g_0 \approx 5 \times 10^{-2} \omega_0$). Todavia, resolvemos o Hamiltoniano de Rabi numericamente a fim de estudar o comportamento do sistema no regime de acoplamento ultraforte. Na figura 5.3 plotamos o número médio de fótons gerados a partir do vácuo $|g, 0\rangle$ no regime ultraforte fixando os parâmetros $g_0 = 0,2\omega_0$, $\varepsilon_g = 0,3g_0$ e $\Delta_- = 8g_0$. Observamos que mesmo para ressonâncias de segunda ordem (gráfico preto) a geração de fótons é possível.

O ECD é, em geral, caracterizado na literatura como fenômeno de criação de fótons a partir do estado inicial de vácuo, embora a criação de fótons seja possível para qualquer outro estado inicial. Este fenômeno foi inicialmente concebido no contexto da teoria quântica de campos devido ao movimento de uma (ou mais) fronteiras no vácuo. Em outras palavras, de acordo com a teoria quântica de campos, uma fronteira móvel no vácuo sofre a ação de uma força dissipativa; por argumentos de conservação de energia esta força deve vir acompanhada do fenômeno de criação de partículas, neste caso, fótons. O primeiro cálculo sobre criação de partículas devido ao movimento de fronteiras deve-se a G. T. Moore [11], o qual considerou uma cavidade unidi-

mensional cujas extremidades se movem arbitrariamente e concluiu que quando o movimento cessa existe “uma probabilidade não nula de que a cavidade contenha fótons reais carregados de energia.”⁴ Já o primeiro trabalho a calcular a força dissipativa devido às flutuações de vácuo sobre uma fronteira móvel deve-se a S. A. Fulling e P. Davies [141], os quais consideraram o campo escalar sem massa em $1 + 1$ dimensões e uma fronteira em movimento sujeita à condição de contorno de Dirichlet. Embora o método utilizado por Fulling e Davies forneça o resultado exato da força sobre a fronteira móvel, ele só é válido em $1 + 1$ dimensões. Por causa dessa limitação no método de Fulling e Davies, em 1982, Ford e Vilenkin [142] propuseram um método perturbativo para o cálculo da força de Casimir sobre uma fronteira móvel considerando o modelo do campo escalar em $3 + 1$ dimensões. Uma analogia é útil para nosso estudo: consideremos um grão de pólen submerso e parado em relação a um fluido; as moléculas do fluido transferem momento linear ao grão pois se chocam constantemente com ele exercendo-lhe uma força. Embora existam flutuações na força, uma vez que as colisões são aleatórias, em média a força é nula. Se o grão de pólen for induzido a se mover com velocidade constante devido a ação de uma força externa, o fluido exercerá sobre ele uma força de atrito (devido à viscosidade) que é, como sabemos, dissipativa. Esta força tem origem nas flutuações da força quando o grão está parado, portanto a força dinâmica dissipativa está essencialmente ligada com as flutuações da força estática. Do mesmo modo, algo totalmente análogo acontece com um corpo neutro em movimento no vácuo. Esta conexão pode ser estabelecida através de um poderoso teorema, conhecido como *teorema flutuação-dissipação*. Neste contexto, em 1991, Barton [143, 144] mostrou que a força estática de Casimir⁵ sobre uma única fronteira (neste caso uma placa parada em relação a um certo referencial) embora nula, sofre flutuações. Em seguida, Jaekel e Reynaud [145] mostraram que as flutuações de ponto zero podem dar origem a forças dissipativas sobre fronteiras em movimento no vácuo, de modo análogo à força dissipativa sobre um grão de pólen num fluido viscoso.

Vamos analisar a seguir dois problemas no contexto da mecânica quântica não-relativística que podem nos ajudar a melhor compreender o ECD. O primeiro deles é o problema de uma partícula dentro de uma caixa de paredes impenetráveis, cuja largura varia com o tempo e o segundo é o problema de uma partícula submetida a um potencial dependente do tempo.

Em 1980, Munier e colaboradores [146] estudaram o problema de uma partícula (livre de massa m) em uma cavidade unidimensional. No modelo, eles consideraram que uma das pare-

⁴Tradução livre do autor (trecho retirado do artigo [11])

⁵Força sobre uma fronteira em repouso no vácuo.

des permanece fixa na origem, ao passo que a outra está em movimento dado por $x = \delta q(t)$. Além disso, supuseram que a parede da direita inicia um movimento em $t = t_i$ e retorna ao repouso em $t = t_f$ na mesma posição inicial; supuseram, ainda, que $\delta q(t) = a$ ($a > 0$), para $t < t_i$ e para $t > t_f$. Para descrever este sistema, os autores resolveram a equação de Schrodinger, e a estratégia utilizada por eles foi aplicar transformações canônicas apropriadas para transformar o problema em um outro, no qual as condições de contorno sobre a função de onda são impostas sobre fronteiras fixas. A consequência desta simplificação é o aparecimento de um termo explicitamente dependente do tempo no lado direito da equação de Schrodinger. Deste modo, embora o problema em questão seja bem particular, ele nos sugere que fronteiras móveis sejam equivalentes a potenciais dependentes do tempo. Como consequência disso, fenômenos físicos que surgem devido à presença de fronteiras móveis devem ocorrer também no caso de potenciais dependentes do tempo. Um dos mais importantes resultados encontrados por Munnier e colaboradores é o seguinte: se antes do movimento da fronteira o sistema estiver no seu estado fundamental, depois de cessado este movimento haverá uma probabilidade não nula de o sistema estar em algum estado excitado, isto é, com uma energia maior. Em outras palavras, no contexto da teoria quântica de campos, fronteiras móveis devem dar origem à criação de excitações do campo. Contudo, conforme mostramos através dos nossos cálculos neste trabalho, o ECD ocorre mesmo para um sistema composto por apenas um qubit, sendo, por consequência, um fenômeno intrínseco da interação luz matéria em sistemas não estacionários. Portanto ele não requer necessariamente o movimento de fronteiras no espaço, uma vez que excitações do campo podem ser geradas apenas ajustando de maneira apropriada os parâmetros de um átomo artificial.

Um dos trabalhos teóricos pioneiros onde se apresenta uma proposta de realização experimental para o ECD é dado na referência [135]. A partir de então novas propostas sugeriram em diferentes contextos [147, 148, 149, 150, 151, 152]. Em 1994 Law determinou a frequência de ressonância ($\eta \approx 2\omega_0$) que otimiza a geração de fótons via ECD utilizando um Hamiltoniano efetivo equivalente a uma cavidade óptica em um meio não linear, caracterizando o ECD como um fenômeno de amplificação paramétrica. Uma das primeiras propostas de experimento para a realização do ECD foi apresentada em 2005 por Braggio *et. all.* [153], a partir de então outros esquemas experimentais foram propostos [154, 155, 156, 157, 158, 159]. Contudo, apenas em 2011 C. W Wilson *et. all* [160] anunciaram a detecção experimental do ECD em uma arquitetura de EDQc. Ademais, 4 anos mais tarde um novo fenômeno denominado AECD foi prescrito teó-

ricamente por pesquisadores da universidade de Brasília conforme descreveremos na próxima subseção.

5.6.3 Ressonância de AECD

O AECD, previsto recentemente por I. M. de Souza e A. Dodonov [12], ocorre no regime dispersivo e consiste na aniquilação de três fótons acompanhada da criação de uma excitação atômica via acoplamento $\{|\varphi_{m+2,\mathcal{D}}\rangle, |\varphi_{m,-\mathcal{D}}\rangle\}$. Em ordem zero de $g_0\sqrt{m}/\Delta_-$ este acoplamento corresponde a transições da forma $|g, m+2\rangle \leftrightarrow |e, m-1\rangle$. Este fenômeno ocorre quando ajustamos a frequência de modulação η de acordo com

$$\eta \simeq \frac{3\omega_0 - \Omega_0 + 2(\delta_- - \delta_+)(m+1)}{K}, \quad (5.91)$$

tal que $m \geq 1$. Deste modo, o AECD é caracterizado pela aniquilação de um par de excitações do sistema a partir de um estado inicial com pelo menos três fótons. Calculamos as taxas de transição de primeira e segunda ordem explicitamente a partir de (5.54) e (5.68) para a modulação de Ω

$$\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\Omega)} \simeq \frac{1}{2}\mathcal{D}\delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\omega_0 + \Delta_-} \right) \frac{\omega_0 + \Delta_-}{\omega_0}, \quad (5.92)$$

$$\Phi_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\Omega)} \simeq \frac{1}{2}i\mathcal{D}\delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{2\omega_0 + \Delta_-} \right)^2 \times \quad (5.93)$$

$$\times \left[2 \frac{(\omega_0 + \Delta_-/2)^2}{(\omega_0 - \Delta_-/2)^2} - \frac{\omega_0 + \Delta_-}{\omega_0} \right], \quad (5.94)$$

e para a modulação de g

$$\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(g)} \simeq -\mathcal{D}\delta_- \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right) \frac{\Omega_0}{\omega_0}, \quad (5.95)$$

$$\Phi_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(g)} \simeq -\frac{i\mathcal{D}\delta_- \Delta_-}{(\omega_0 - \Delta_-/2)} \frac{g_0}{\Delta_-} \sqrt{m(m+1)(m+2)} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right)^2 \left[2 - \frac{\Delta_-}{(\omega_0 - \Delta_-/2)} \right] \quad (5.96)$$

Considerando novamente os mesmos parâmetros utilizados nas seções anteriores e $m = 1$, obtemos as seguintes taxas de transição: $\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\Omega)} \approx 3,34 \times 10^{-4} g_0$, $\Phi_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(\Omega)} \approx 9,26 \times 10^{-6}$, $\Theta_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(g)} \approx 5,74 \times 10^{-4}$ e $\Phi_{m+2,-\mathcal{D},\mathcal{D}}^{(g)} \approx 1,80 \times 10^{-5}$. Podemos ver que as taxas de transição de segunda ordem, tanto para o parâmetro g para o parâmetro Ω , são da ordem de 10^{-6} , ambos estes valores são menores que os parâmetros dissipativos $\kappa \approx \gamma \approx \gamma_{ph} \approx 5 \times 10^{-5} g_0$. Portanto, o AECD possui viabilidade experimental apenas para ressonâncias de primeira ordem, uma vez

que os efeitos de dissipação impossibilitam o acoplamento necessário para que a aniquilação de excitações do sistema seja observada para ressonâncias de segunda ordem.

5.7 Regime Ressonante

Conforme discutimos na seção 2.4.1, o regime ressonante ocorre quando $|\Delta_-|/g_0 \ll 1$, ou em particular quando $\Delta_- = 0$. Vimos também que os autovalores de JC neste regime são dados pela equação (2.24), a saber

$$\lambda_{m,S} = \omega_0 m + \mathcal{S}g_0\sqrt{m}. \quad (5.97)$$

Contudo, devido as aproximações feitas através do método RWA este autovalor sofreu um deslocamento sutil, de modo que o autovalor corrigido $\tilde{\lambda}_{m,S}$ foi calculado explicitamente por nós em (5.51) e (5.44). Portanto, a partir destas equações, podemos mostrar que no regime ressonante o autovalor de JC corrigido é dado por

$$\tilde{\lambda}_{m,S} = \omega_0 m + \mathcal{S}g_0\sqrt{m} - \delta_+, \quad (5.98)$$

na qual $\delta_+ = \frac{g_0^2}{\Delta_+}$. A partir de (5.98) podemos observar que o deslocamento sofrido por (5.97) é igual a δ_+ , e em particular quando $m = 0$ concluímos que

$$\tilde{\lambda}_0 = -\delta_+. \quad (5.99)$$

O critério de validade de nossos cálculos é dado pelas relações $\varepsilon_\Omega, g_0\sqrt{m}, \varepsilon_g\sqrt{m} \ll \omega_0$ (tal que m é o número máximo de excitações). Sendo assim, resolvendo (5.70), encontramos que para o estado inicial de vácuo $|g, 0\rangle$ a geração de excitações do sistema ocorre quando a frequência de modulação é ajustada de acordo com

$$\eta = \frac{2\omega_0 + \mathcal{S}g_0\sqrt{2}}{K}. \quad (5.100)$$

Neste caso, para $m = 0$, a equação (5.70) acopla os estados $\{|\varphi_{0,\mathcal{T}}\rangle, |\varphi_{2,S}\rangle\}$, o que corresponde a transições entre $|g, 0\rangle$ e o estado emaranhado $(|g, 2\rangle + |e, 1\rangle)$ com duas excitações, isto é

$$|g, 0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 2\rangle + |e, 1\rangle). \quad (5.101)$$

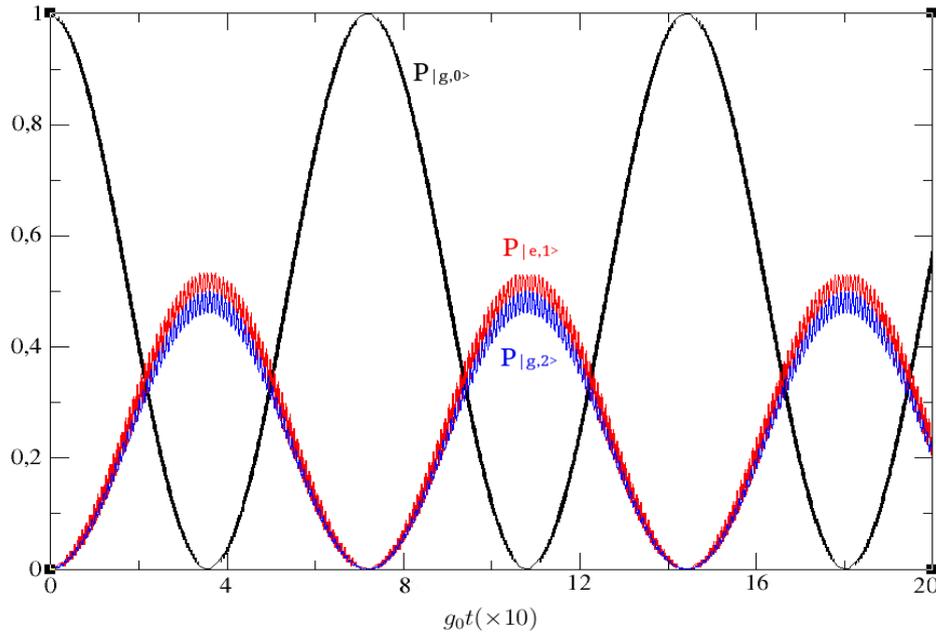


Figura 5.4: $P_{|g,0\rangle}$, $P_{|g,2\rangle}$ e $P_{|e,1\rangle}$ obtidos via integração numérica do Hamiltoniano de Rabi no regime ressonante átomo-campo para a ressonância de primeira ordem ($K = 1$) $\eta = 2\omega_0 + g\sqrt{2} - \delta_+ + 7 \times 10^{-2}\delta_+$.

Ilustramos este tipo de comportamento na figura 5.4 onde plotamos a probabilidade de encontrar o átomo nos estados $|g, 0\rangle$, $|g, 2\rangle$ e $|e, 1\rangle$, dadas respectivamente por $P_{|g,0\rangle}$, $P_{|g,2\rangle}$ e $P_{|e,1\rangle}$, obtidos via integração numérica do Hamiltoniano de Rabi. Fixamos os parâmetros $\Delta_- = 0$, $g_0 = 5 \times 10^{-2}\omega_0$ e $\varepsilon_g/g_0 = 5 \times 10^{-2}$. Os resultados estão em excelente acordo com a previsão teórica dada em (5.101) demonstrando que uma superposição de estados $|g, 0\rangle$, $|e, 1\rangle$ e $|g, 2\rangle$ é criada a partir do estado inicial $|g, 0\rangle$. Utilizando os autoestados de JC no regime ressonante, dado em (2.24), calculamos as taxas de transição de primeira e segunda ordem explicitamente, a partir de (5.54) e (5.68) para a modulação de

$$\Theta_{2,T,S}^{(k=\Omega)} \simeq Sg_0\sqrt{2} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{8\Omega_0} \right), \quad (5.102)$$

$$\Phi_{2,T,S}^{(k=\Omega)} \simeq 3iSg_0\sqrt{2} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{8\Omega_0} \right)^2, \quad (5.103)$$

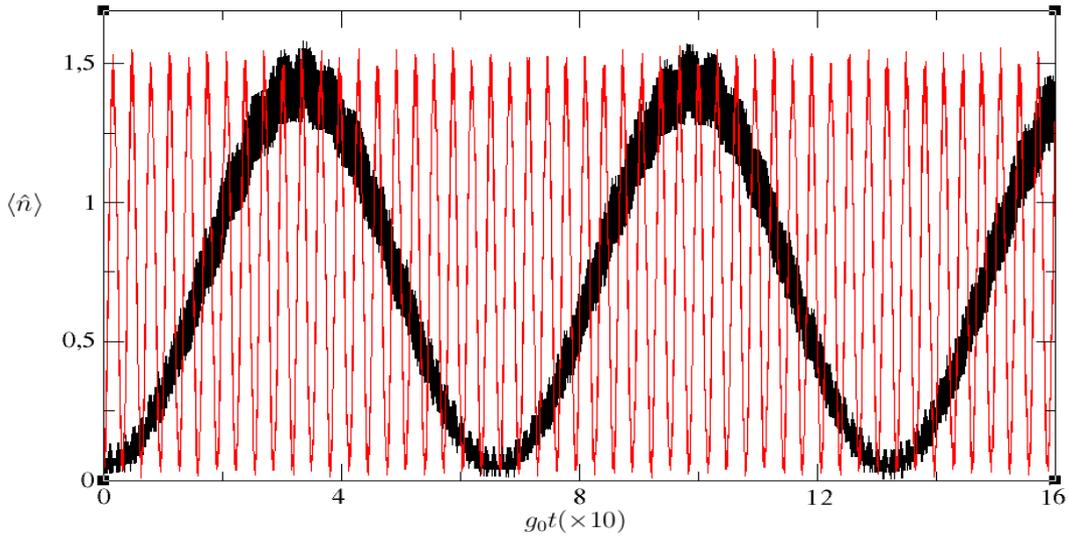


Figura 5.5: Evolução do número médio de fótons gerados a partir do estado de vácuo obtidos via integração numérica do Hamiltoniano de Rabi no regime ressonante átomo-campo para a ressonância de primeira (vermelho) e segunda ordem (preto) com a frequência de modulação $\eta = \frac{(2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 0.4\delta_+)}{K}$.

e para a modulação do parâmetro g

$$\Theta_{2,\mathcal{T},S}^{(k=g)} \simeq -S \frac{g_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right), \quad (5.104)$$

$$\Phi_{2,\mathcal{T},S}^{(k=g)} \simeq -i \frac{g_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{\varepsilon_g}{2g_0} \right)^2 \frac{\sqrt{2}g_0}{\omega_0}, \quad (5.105)$$

Considerando os mesmos parâmetros utilizados nas seções anteriores e $m = 0$ obtemos as seguintes taxas de transição: $\Theta_{2,\mathcal{T},S}^{(k=\Omega)} \approx 8,8 \times 10^{-3} g_0$, $\Phi_{2,\mathcal{T},S}^{(k=\Omega)} \approx 1,65 \times 10^{-4}$, $\Theta_{2,\mathcal{T},S}^{(k=g)} \approx 1,76 \times 10^{-2}$ e $\Phi_{2,\mathcal{T},S}^{(k=g)} \approx 3,12 \times 10^{-5}$. Podemos notar que a taxa de transição de segunda ordem para o parâmetro g é duas ordens de grandeza mais lenta em relação à respectiva taxa para o parâmetro Ω devido ao fator $g_0/\omega_0 \ll 1$, embora em primeira ordem as taxas sejam semelhantes. Se compararmos estas taxas com os parâmetros dissipativos $\kappa \approx \gamma \approx \gamma_{ph} \approx 5 \times 10^{-5} g_0$ concluímos que a criação de excitações do sistema via acoplamento (3.24) é viável experimentalmente pelo menos para a modulação da frequência de transição atômica.

Na figura 5.5 plotamos a evolução do número médio de fótons gerados a partir do estado de vácuo no regime ressonante para o regime ultraforte fixando os parâmetros usuais $g_0 = 0,2\omega_0$, $\varepsilon_g = 0,3g_0$ e $\Delta_- = 0$. Observamos que as taxas de transição de primeira e segunda ordem são incrementadas devido ao forte acoplamento átomo-campo, de modo que a taxa de

segunda ordem no regime ultraforte é comparável à taxa de primeira ordem no regime de acoplamento fraco. Assim, de modo geral o acoplamento ultraforte otimiza a taxa de geração de fótons em todos os regimes estudados. Por conta disso, este regime vem sendo amplamente estudado atualmente no contexto da EDQc não estacionária. Todos os resultados apresentados até aqui, exceto a análise do regime ultraforte, foram publicados na forma de artigo e podem ser consultados na referência [161].

5.8 Transições Landau-Zener em EDQc

Vimos no capítulo 4 que a descrição tradicional do problema de LZ prevê que transições não-adiabáticas ocorrem quando a diferença de energia de um sistema de dois níveis varia linearmente com o tempo, desde que a taxa de variação seja muito menor que o quadrado do acoplamento átomo-campo. Contudo, neste trabalho, vamos lançar mão de uma abordagem um tanto díspar: em vez de considerar a variação linear entre os níveis de energia do átomo artificial, vamos supor a variação linear da frequência de modulação na vizinhança de alguma das frequências. Esta abordagem, estudada com detalhes em 2016 por A. Dodonov *et. al* [162], induz transições LZ no sistema quando a frequência de modulação de primeira ordem varia linearmente com o tempo de maneira apropriada, conforme ficará claro ao longo desta seção. Os autores consideraram uma arquitetura de EDQc com efeitos de dissipação e mostraram que a geração de fótons a partir do vácuo via transições LZ é possível experimentalmente. Nosso objetivo aqui é estudar o mesmo modelo considerando, em contraste, frequências de modulação de segunda ordem. Isto posto, partimos da mesma modulação senoidal para a frequência de transição atômica utilizada nas seções anteriores, porém com uma frequência $\eta = \eta(t)$ que varia linearmente com o tempo

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \varepsilon_\Omega \sin[\eta(t) + \phi_\Omega], \quad (5.106)$$

na qual $\eta(t)$ pode ser escrita de maneira geral como

$$\eta(t) = \eta_j - \nu(t), \quad (5.107)$$

tal que η_j denota as ressonâncias no regime ressonante e no regime dispersivo para o efeito AJC dadas em (5.77) e (5.100) (aqui vamos abordar apenas estes dois casos, já que eles são mais

resistentes aos efeitos dissipativos). Ademais, $\nu(t)$ varia linearmente com o tempo.

Vamos considerar inicialmente o regime ressonante ($\Delta_- = 0$) para o estado inicial de zero excitações $|\varphi_0\rangle = |g, 0\rangle$ com a frequência de modulação

$$\eta(t) = \frac{2\omega_0 - \mathcal{S}g_0\sqrt{2} - \nu(t)}{K}, \quad (5.108)$$

tal que $K = 1$ ou $K = 2$ representam respectivamente as ressonâncias de primeira e segunda ordem. Foi demonstrado em [162] que se $\nu(t)$ é uma função linear do tempo a probabilidade P_{ex} de encontrar o sistema no estado $|\varphi_{2,S}\rangle$ (já que esse é o estado acoplado ao vácuo devido à modulação externa)

$$P_{ex} = 1 - \exp\left(-\frac{\pi\beta^2}{\dot{\nu}}\right), \quad (5.109)$$

tal que β é igual a taxa de transição de primeira ou segunda ordem em cada regime estudado. Logo, se $\dot{\nu} \gg \pi\beta^2$, $P_{LZ} \rightarrow 1$, isto é, o sistema terá 100% de chance de sofrer uma transição não-adiabática. Ademais a recíproca é verdadeira, isto é, quando $\dot{\nu} \ll \pi\beta^2$, $P_{LZ} \rightarrow 0$, o sistema terá 100% de chance de sofrer uma transição adiabática, que no caso corresponde à transição para o estado excitado. Todavia, os cálculos das seções anteriores se referiam às condições próximas da ressonância, portanto nossas fórmulas só valem para pequenos valores de $|\nu|$, de modo que $|\nu(t)| \leq \kappa|\beta| \ll g_0$, tal que κ é da ordem de 10.

A figura 5.6 mostra a implementação da transição $|g, 0\rangle \rightarrow |\varphi_{2,+}\rangle$ devido a modulação do parâmetro Ω no regime ressonante para os parâmetros $\omega_0/2\pi = 10GHz$, $g_0/\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\Delta_- = 0$ e $\varepsilon_\Omega/\Omega_0 = 5 \times 10^{-2}$. Consideramos a ressonância de primeira ordem $\eta = 2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 7 \times 10^{-2}\delta_+ - \nu(t)$ tal que $\nu(t) = 10\beta - \varpi\beta^2t$, onde $\beta = |\Theta_{2,T,S}^\Omega| = g_0\sqrt{2} \left(\frac{\varepsilon_\Omega}{8\Omega_0}\right)$ é a taxa de transição de primeira ordem entre os estados $|g, 0\rangle \rightarrow |\varphi_{2,+}\rangle$ para a modulação da frequência de transição atômica (equação (5.102)). Por fim, ϖ é um número real introduzido como parâmetro de controle da taxa de variação $\dot{\nu}(t) = -\varpi\beta^2$. Plotamos o número médio de fótons gerados $\langle \hat{n} \rangle$ (figura 5.6a) e a probabilidade de excitação atômica P_e (figura 5.6b), a partir do estado inicial de zero excitações $|\varphi_0\rangle = |g, 0\rangle$. Observamos que o sistema sofre transições efetivas para o estado $|\varphi_{2,+}\rangle$, uma vez que o comportamento oscilatório das transições é destruído pela modulação $\eta(t)$. Além disso, observamos que quando $|\dot{\nu}(t)|$ cresce em relação a $\pi\beta^2$, o sistema tende a sofrer transições LZ (não-adiabáticas), isto ocorre aproximadamente para $\varpi = 16$ ($P_e \approx 0,25$). Em particular, para valores maiores de ϖ a probabilidade de excitação

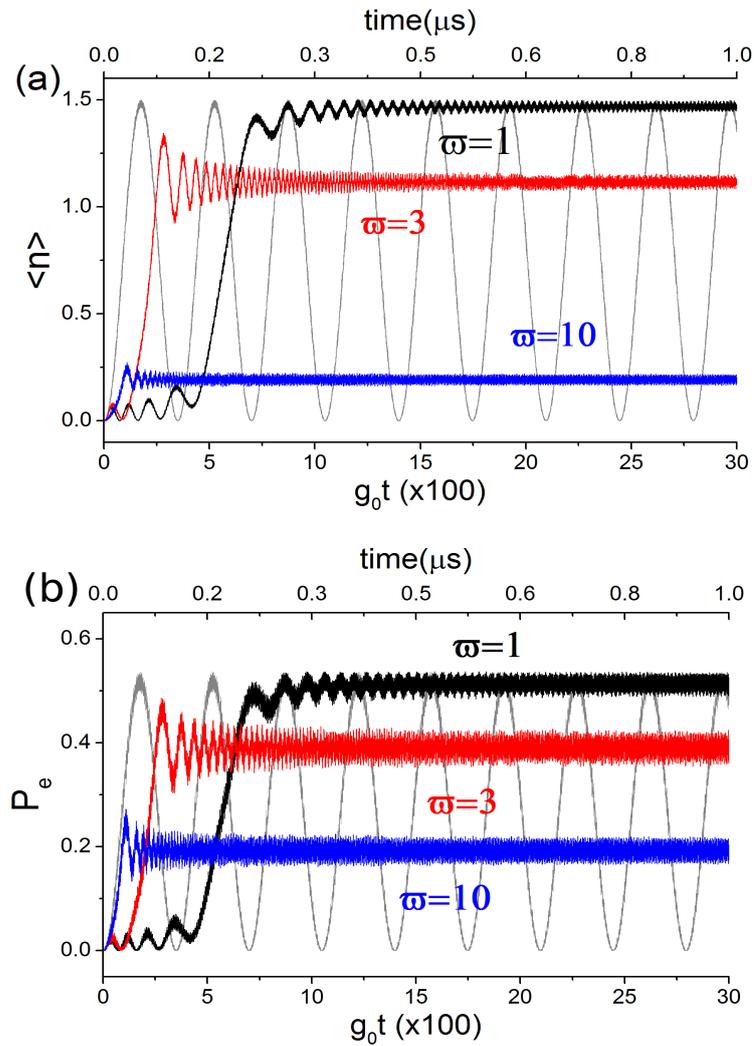


Figura 5.6: Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime ressonante para a frequência de modulação de primeira ordem ($K = 1$) $\eta = 2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 7 \times 10^{-2}\delta_+ - \nu(t)$.

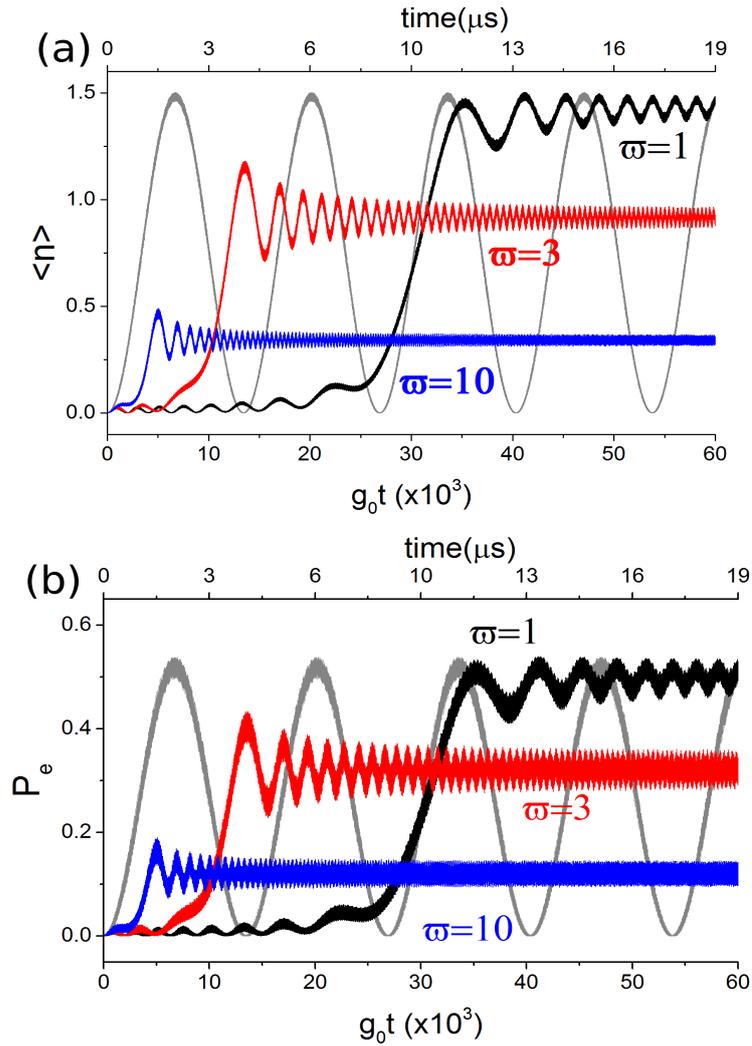


Figura 5.7: Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime ressonante para a frequência de modulação segunda ordem ($K = 2$) $\eta = \frac{2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 7 \times 10^{-2}\delta_+ - \nu(t)}{2}$.

do sistema tende a zero ($P_{ex} \rightarrow 0$) e o sistema experimenta uma transição de LZ efetiva. Por outro lado quando $|\dot{\nu}(t)|$ decresce em relação a $\pi\beta^2$, em particular quando $\varpi = 1$ uma transição adiabática efetiva é observada ($P_{ex} = 1$). O comportamento do sistema para a ressonância de segunda ordem $\eta = \frac{2\omega_0 + g_0\sqrt{2} + 7 \times 10^{-2}\delta_+ - \nu(t)}{2}$ pode ser observado na figura 5.7, tal que $\nu(t) = 10\beta - \varpi\beta^2 t$, onde $\beta = |\Phi_{2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^\Omega| = 3g_0\sqrt{2} \left(\frac{\varepsilon\Omega}{8\Omega_0}\right)^2$ é a taxa de transição de segunda ordem entre os estados $|g, 0\rangle \rightarrow |\varphi_{2,+}\rangle$ para a modulação da frequência de transição atômica (equação (5.103)). Notamos que mesmo em segunda ordem é possível observar transições de LZ efetivas, contudo o tempo para que isto aconteça salta de aproximadamente $1\mu\text{s}$ para $19\mu\text{s}$, quando $\varpi = 1$. Ademais, quando fazemos $\nu(t) = 0$ reobtemos o comportamento oscilatório entre os estados $|g, 0\rangle \rightarrow |\varphi_{2,+}\rangle$ estudado na seção 5.6.

A figura 5.8 mostra a implementação da transição $|g, 0\rangle \rightarrow |\varphi_{2,-\mathcal{D}}\rangle$ devido a modulação do parâmetro Ω no regime dispersivo para o efeito AJC com os mesmos parâmetros utilizados no regime ressonante, porém com $\Delta_- = 8g_0$. Conforme vimos na subseção 5.6.1, em primeira ordem de $g_0\sqrt{m}/\Delta_-$ a transição $|g, 0\rangle \rightarrow |\varphi_{2,-\mathcal{D}}\rangle$ corresponde a $|g, 0\rangle \rightarrow |e, 1\rangle$. Consideramos a ressonância de primeira ordem $\eta(t) = \Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+ - \nu(t)$, tal que $\nu(t) = -10\beta + \varpi\beta^2 t$, onde $\beta = |\Theta_{2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^\Omega| = g_0 \frac{\varepsilon\Omega}{2\Delta_+}$ é a taxa de transição de primeira entre os estados $|g, 0\rangle \rightarrow |e, 1\rangle$ para a modulação da frequência de transição atômica (equação (5.78)). A taxa de variação $\dot{\nu}(t) = -\varpi\beta^2$ é controlada pelo parâmetro ϖ introduzido anteriormente. Plotamos o número médio de fótons gerados $\langle \hat{n} \rangle$ (figura 5.8a) e a probabilidade de excitação atômica P_e (figura 5.8b), a partir do estado inicial de zero excitações $|g, 0\rangle$. Observamos que o comportamento oscilatório entre os estados é novamente destruído, deste modo quando $|\dot{\nu}(t)| \gg \pi\beta^2$, o sistema experimenta transições LZ (não-adiabáticas), isto ocorre aproximadamente para $\varpi = 16$ ($P_{ex} \approx 0,25$), neste caso $P_{LZ} \approx 0,75$. Por outro lado quando $|\dot{\nu}(t)|$ decresce em relação a $\pi\beta^2$, em particular quando $\varpi = 1$ uma transição adiabática efetiva é observada ($P_{ex} = 1$). O comportamento do sistema para a ressonância de segunda ordem $\eta(t) = \frac{\Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+ - \nu(t)}{2}$ pode ser observado na figura 5.9, tal que $\nu(t) = -8\beta + \varpi\beta^2 t$, onde $\beta = |\Phi_{2,\mathcal{T},\mathcal{S}}^\Omega| = 2g_0 \left(\frac{\varepsilon\Omega}{2\Delta_+}\right)^2$ é a taxa de transição de segunda ordem devido a modulação de Ω para o efeito AJC (equação (5.79)). Notamos que mesmo em segunda ordem é possível observar transições de LZ efetivas, contudo, o tempo para que isto aconteça é muito maior em relação à ressonância de primeira ordem. Ademais, quando fazemos $\nu(t) = 0$ reobtemos o comportamento oscilatório entre os estados $|g, 0\rangle \rightarrow |e, 1\rangle$ estudado na seção 5.6. É importante ressaltar que, embora tenhamos considerado apenas a modulação da frequência de transição atômica em nossas simulações, nosso método também é válido para a modulação do acoplamento átomo-campo ou ambos.

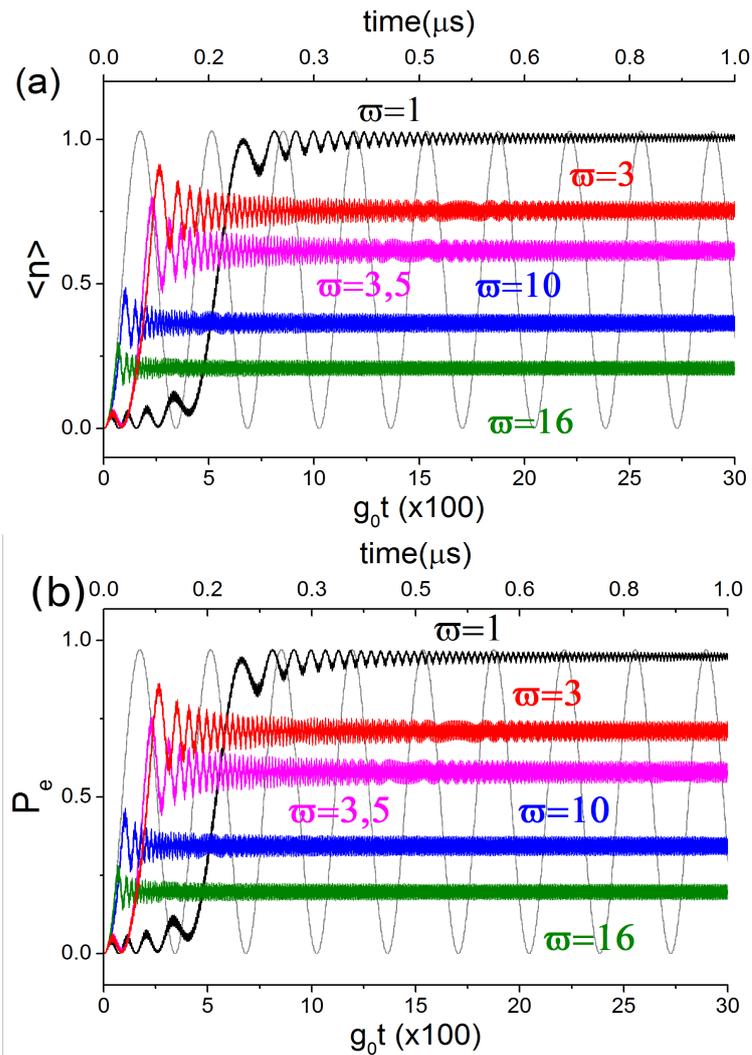


Figura 5.8: Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime AJC para a frequência de modulação de primeira ordem ($K = 1$) $\eta(t) = \Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+ - \nu(t)$.

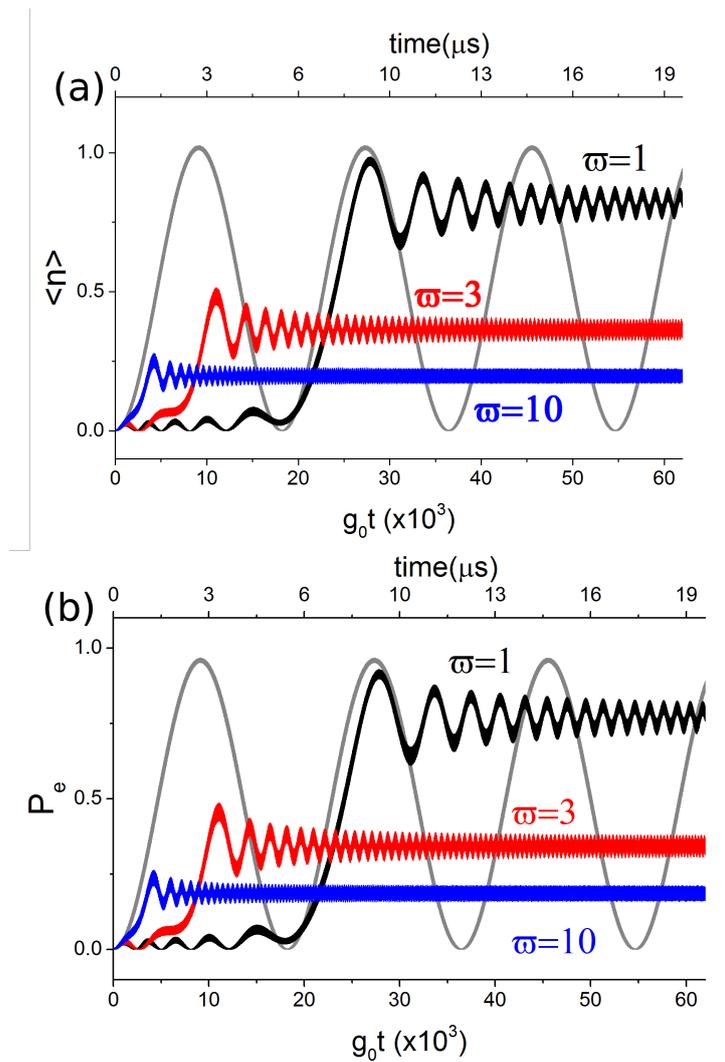


Figura 5.9: Comportamento temporal de: a) número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, b) probabilidade de excitação atômica P_e no regime AJC para a frequência de modulação de segunda ordem ($K = 2$) $\eta(t) = \frac{\Delta_+ - 2\delta_- + 1,916\delta_+ - \nu(t)}{2}$.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho obtivemos expressões analíticas que descrevem a dinâmica de um sistema não estacionário de EDQc submetido a ressonâncias de primeira e segunda ordem. Consideramos uma modulação harmônica, ou uma superposição de funções harmônicas, dos parâmetros do sistema demonstrando que todos os fenômenos que ocorrem para a frequência de modulação $\eta = \eta_j$ ocorrem também para $\eta = \eta_j/2$, tal que η_j denota as ressonâncias de AJC, ECD e AECD. Concluímos que no regime de acoplamento fraco ($g_0 \ll \omega_0$) a modulação da frequência de transição atômica é mais eficiente para induzir geração de fótons a partir do estado de vácuo no regime ressonante e no regime dispersivo para a ressonância de AJC. Embora nossos cálculos analíticos não levem em consideração efeitos de dissipação e decoerência, estimamos a possibilidade de implementação experimental do nosso modelo comparando as taxas de acoplamento calculadas explicitamente em cada fenômeno com os parâmetros dissipativos fenomenológicos determinados empiricamente. Assim, constatamos que a maioria dos fenômenos estudados são, a priori, possíveis de implementar em laboratório para frequências de ressonância de primeira e segunda ordem. A única exceção é o AECD que possui viabilidade experimental apenas para ressonâncias de primeira ordem, uma vez que os efeitos de dissipação impossibilitam o acoplamento necessário para que a aniquilação de excitações do sistema seja observada para ressonâncias de segunda ordem. Ademais, integramos o Hamiltoniano de Rabi numericamente utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem com o propósito de estudar a geração de fótons a partir do estado inicial de vácuo, devido ao termo contragirante do Hamiltoniano de Rabi, no regime ultraforte para os regimes ressonante e dispersivo, considerando ressonâncias de primeira e segunda ordem. Concluímos que, neste caso, a taxa de transição em cada fenômeno é incrementada conforme pode ser visto, em particular, na figura 5.2, onde comparamos

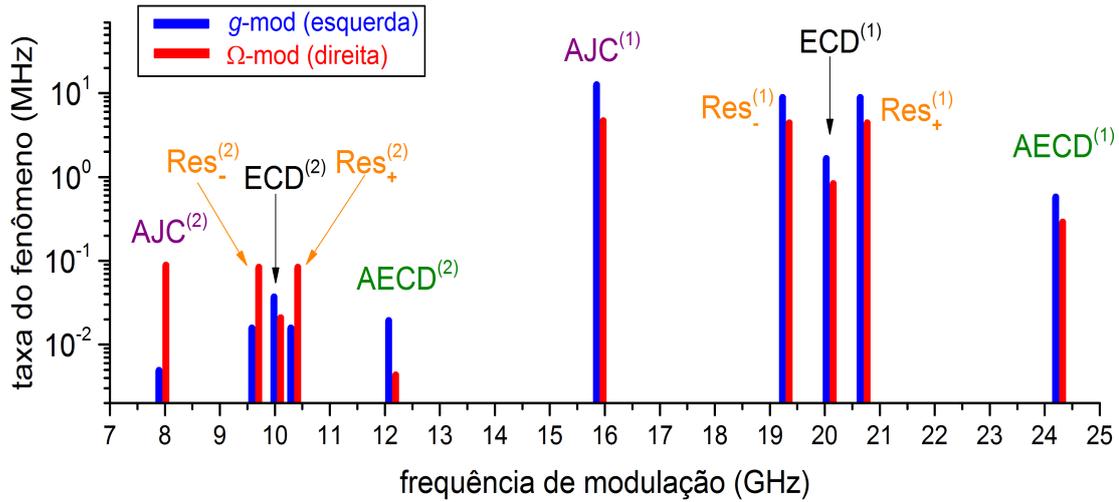


Figura 6.1: Resumo esquemático dos resultados obtidos no capítulo 5.

o número médio de fótons gerados através de ressonância de primeira ordem nos regimes de acoplamento fraco e ultraforte.

Como último tópico, estudamos transições LZ em EDQc não-estacionário através de uma análise puramente numérica. Consideramos nesta abordagem que a frequência de modulação externa varia linearmente com o tempo dentro de uma pequena janela temporal. Concluimos que, neste caso, o comportamento oscilatório entre os estados acoplados é destruído, de modo que o sistema sofre transições adiabáticas assintóticas para uma variação suficientemente lenta da frequência de modulação η .

A figura 6.1 representa um breve resumo dos resultados obtidos no capítulo 5. Fixamos os parâmetros que caracterizam o regime de acoplamento fraco: $\omega_0/2\pi = 10GHz$, $g_0/\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_\Omega/\Omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_g/g_0 = 5 \times 10^{-2}$ e $\Delta_- = 8g_0$ ($\Delta_- = 0$) no regime dispersivo (ressonante). Consideramos o estado inicial de vácuo $|g, 0\rangle$ para todos os efeitos, exceto para o AECD, no qual consideramos o estado inicial $|g, 4\rangle$. No eixo x indicamos a frequência de modulação η em GHz e no eixo y (logarítmico) plotamos as taxas de transição em MHz . A coluna da esquerda (azul) refere-se a modulação do parâmetro g , enquanto que a coluna da direita (vermelha) diz respeito a modulação do parâmetro Ω . Além disso, os índices 1 ou 2 em cada sigla do gráfico (AJC, ECD e AECD) representam, respectivamente, as ressonâncias de primeira e segunda ordem. Neste gráfico, o valor de cada ressonância está exatamente no meio das colunas. Conforme vimos na subseção 5.6.2, o ECD cria pares de excitações a partir de qualquer estado inicial do sistema, gerando acoplamentos do tipo $|g, m\rangle \leftrightarrow |g, m+2\rangle \leftrightarrow |g, m+4\rangle \dots$ ou $|e, m\rangle \leftrightarrow |e, m+2\rangle \leftrightarrow |e, m+4\rangle \dots$ com a mesma taxa de transição. De modo que,

na figura 6.1, a coluna discriminada com a sigla ECD refere-se a criação de pares de excitações a partir do estado inicial $|g, 0\rangle$ ou $|e, 0\rangle$. Ademais, as siglas Res_+ e Res_- referem-se ao regime ressonante estudado na seção 5.7, para $S = +$ e $S = -$, respectivamente. Podemos notar que, no efeito AJC e no regime ressonante, as taxas de transição de segunda ordem para a modulação de g são menores que para a modulação de Ω . Em contraste, para o ECD e o AECD, as taxas de transição de segunda ordem para a modulação de g são maiores que para a modulação de Ω , pois para os valores considerados dos parâmetros a desigualdade $|\Delta_-| \ll \omega_0$ não é mantida. Por outro lado, para as ressonâncias de primeira ordem as taxas de transição para a modulação de g são maiores que para a modulação de Ω , para a escolha dos parâmetros da figura.

Em síntese, este estudo demonstrou que o termo contragirante do Hamiltoniano de Rabi não pode ser desprezado em sistemas não-estacionários, pois devido a este termo fótons podem ser criados a partir do estado inicial de vácuo do sistema. Ademais, este termo também pode resultar em aniquilação coerente de excitações quando a frequência de modulação é ajustada de acordo com a ressonância de AECD. Entretanto, várias questões permanecem em aberto e merecem uma descrição mais detalhada em trabalhos futuros, por exemplo: um tratamento adequado para a dissipação em uma arquitetura de EDQc não-estacionária (uma vez que estudamos aqui apenas a dinâmica unitária), análise do mesmo sistema abordado neste trabalho utilizando N átomos artificiais com mais de dois níveis e a proposta de arranjos experimentais concretos para a modulação dos parâmetros do sistema. Esperamos que este trabalho motive estudos mais aprofundados em arquiteturas de EDQc não-estacionária com modulação mais sofisticada dos parâmetros.

Apêndice A

Aproximação de onda girante (RWA)

Na nossa análise é sempre possível reduzir as equações diferenciais relevantes no seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas:

$$\frac{d}{dt}A = -iqe^{itW}B, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d}{dt}B = iqe^{-itW}A. \quad (\text{A.2})$$

Desacoplando estas equações, chegamos em

$$\frac{d^2}{dt^2}A - iW\frac{d}{dt}A - q^2A = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^2}{dt^2}B + iW\frac{d}{dt}B - q^2B = 0, \quad (\text{A.4})$$

cujas soluções exatas são dadas por

$$A = \frac{e^{itW/2}}{2R} \left\{ e^{-itR/2} [A_0(W+R) + 2qB_0] - e^{itR/2} [A_0(W-R) + 2qB_0] \right\}, \quad (\text{A.5})$$

$$B = -\frac{e^{-itW/2}}{2R} \left\{ e^{-itR/2} [B_0(W-R) + 2qA_0] - e^{itR/2} [B_0(W+R) + 2qA_0] \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Aqui A_0 e B_0 são constantes oriundas das condições iniciais $A(t=0) = A_0$ e $B(t=0) = B_0$, e $R = W \left(1 - \frac{4q^2}{W^2}\right)^{1/2}$, tal que $W^2 - 4q^2 > 0 \rightarrow 4q^2 < W^2$. Sabemos que $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$, logo podemos expandir R até a primeira ordem para $|q| \ll |W|$ obtendo

$$R = W - \frac{2q^2}{W}. \quad (\text{A.7})$$

Após esta aproximação podemos escrever as equações (A.5) e (A.6) da seguinte maneira:

$$A \approx \frac{1}{2\left(W - \frac{2q^2}{W}\right)} \left\{ e^{itq^2/W} [2WA_0 + 2qB_0] - \frac{2q^2}{W} A_0 e^{itq^2/W} - \frac{2q^2}{W} A_0 e^{it\left(W - \frac{q^2}{W}\right)} - 2qB_0 e^{it\left(W - \frac{q^2}{W}\right)} \right\},$$

$$B \approx -\frac{1}{2\left(W - \frac{2q^2}{W}\right)} \left\{ e^{-it\left(W - \frac{q^2}{W}\right)} \left[\left(\frac{2q^2}{W}\right) B_0 + 2qA_0 \right] - e^{-it\frac{q^2}{W}} \left[\left(2W - \frac{2q^2}{W}\right) B_0 + 2qA_0 \right] \right\}.$$

Quando $|q| \ll |W|$ podemos eliminar os termos proporcionais a q^2/W fora das exponenciais

$$A \approx A_0 e^{itq^2/W} + \frac{q}{W} B_0 e^{-itq^2/W} \left(e^{2itq^2/W} - e^{itW} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$B \approx B_0 e^{-it\frac{q^2}{W}} + \frac{q}{W} A_0 e^{it\frac{q^2}{W}} \left(e^{-2it\frac{q^2}{W}} - e^{-itW} \right). \quad (\text{A.9})$$

Portanto

$$A_0 e^{itq^2/W} \approx A - \frac{q}{W} B_0 e^{-itq^2/W} \left(e^{2itq^2/W} - e^{itW} \right), \quad (\text{A.10})$$

Substituindo (A.10) em (A.9)

$$B \approx B_0 e^{-it\frac{q^2}{W}} + \frac{q}{W} A \left(e^{-2it\frac{q^2}{W}} - e^{-itW} \right) - \frac{q^2}{W^2} B_0 e^{-itq^2/W} \left(e^{2itq^2/W} - e^{itW} \right) \left(e^{-2it\frac{q^2}{W}} - e^{-itW} \right).$$

Desprezando termos da ordem de q^2/W^2 obtemos

$$B \approx B_0 e^{-it\frac{q^2}{W}} + \frac{q}{W} A \left(e^{-2it\frac{q^2}{W}} - e^{-itW} \right). \quad (\text{A.11})$$

Comparando (A.11) com (A.9) concluímos imediatamente que

$$A \approx A_0 e^{it\frac{q^2}{W}}. \quad (\text{A.12})$$

De modo análogo concluímos que

$$B \approx B_0 e^{-it\frac{q^2}{W}}. \quad (\text{A.13})$$

No limite $q \ll W$, desprezamos o deslocamento de frequência q^2/W , de modo que $A = A_0$ e $B = B_0$, temos

$$\frac{dA}{dt} \approx 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{dB}{dt} \approx 0. \quad (\text{A.15})$$

Comparando (A.14) e (A.15) com (A.1) e (A.2) concluímos que o lado direito nas expressões para $\frac{dA}{dt}$ e $\frac{dB}{dt}$ pode ser desprezado quando $q \ll W$. Em outras palavras, A e B variam muito lentamente quando o objeto q que multiplica as exponenciais (A.1) e (A.2) é muito menor que o seu respectivo argumento W . Ademais, nesta aproximação introduzimos um erro intrínseco nas frequências da ordem de q^2/W . Utilizamos este método aproximativo na equação (5.36) para definir as aproximações necessárias na obtenção de (5.37).

Apêndice B

Deslocamento de frequência

Podemos reduzir a equação diferencial que aparece na subseção (5.41) ao seguinte formato:

$$\frac{dA}{dt} = -iB \sum_i q_i e^{itW_i}, \quad (\text{B.1})$$

de modo que

$$\frac{dB}{dt} = -iA \sum_i q_i e^{itW_i}. \quad (\text{B.2})$$

Considerando $i = 1, 2, 3$

$$\frac{d}{dt}A = -iB_1q_1e^{itW_1} - iB_2q_2e^{itW_2} - iB_3q_3e^{itW_3}, \quad (\text{B.3})$$

para $q_1 \gg q_2, q_3$ temos

$$\frac{d}{dt}A \approx -iq_1e^{itW_1}B_1. \quad (\text{B.4})$$

Sua solução é dada no apêndice A

$$A \approx A_0e^{it\alpha_1} + \frac{q_1}{W_1}B_1(e^{it\alpha_2} - e^{itW_1}), \quad (\text{B.5})$$

na qual α_1 e α_2 são constantes da ordem de $\sim \mathcal{O}(q_1^2/W_1)$. Vamos considerar que A_0 é uma função que varia lentamente com o tempo a fim de encontrar uma equação diferencial para A_0

em termos de B_2 e B_3 . Assim, tomando a derivada de (B.5)

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} \approx & \dot{A}_0 e^{it\alpha_1} + i\alpha_1 A_0 e^{it\alpha_1} + i \frac{q_1^2}{W_1} A_1 e^{-itW_1} (e^{it\alpha_2} - e^{itW_1}) + \\ & + i\alpha_2 \frac{q_1}{W_1} B_1 e^{it\alpha_2} - iq_1 e^{itW_1} B_1. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Desprezando termos da ordem de $\sim \mathcal{O}(q_i^2/W_i)$

$$\frac{dA}{dt} \approx \dot{A}_0 e^{it\alpha_1} - iq_1 e^{itW_1} B_1. \quad (\text{B.7})$$

Comparando (B.7) com (B.3)

$$e^{it\alpha_1} \frac{dA_0}{dt} \approx -iB_2 q_2 e^{itW_2} - iB_3 q_3 e^{itW_3}. \quad (\text{B.8})$$

Desprezando o deslocamento de frequência $\alpha_1 = q_1/W_1$ obtemos

$$\frac{dA_0}{dt} \approx -iB_2 q_2 e^{itW_2} - iB_3 q_3 e^{itW_3}. \quad (\text{B.9})$$

Considerando $q_2 \gg q_3$

$$\frac{dA_0}{dt} \approx -iB_2 q_2 e^{itW_2}, \quad (\text{B.10})$$

cuja solução é dada por

$$A_0 \approx A_{00} e^{it\alpha_3} + \frac{q_2}{W_2} B_2 (e^{it\alpha_4} - e^{itW_2}), \quad (\text{B.11})$$

tal que α_3 e α_4 são constantes da ordem de $\sim \mathcal{O}(q_2^2/W_2)$. Tomando a derivada de (B.11)

$$\frac{dA_0}{dt} \approx \dot{A}_{00} e^{it\alpha_3} + i\alpha_3 A_{00} e^{it\alpha_3} + i \frac{q_2^2}{W_2} e^{-itW_2} A_2 (e^{it\alpha_4} - e^{itW_2}) + \quad (\text{B.12})$$

$$+ i\alpha_4 \frac{q_2}{W_2} B_2 e^{it\alpha_4} - iq_2 B_2 e^{itW_2}. \quad (\text{B.13})$$

Desprezando termos da ordem de $\sim \mathcal{O}(q_i^2/W_i)$

$$\frac{dA_0}{dt} \approx \dot{A}_{00} e^{it\alpha_3} - iq_2 B_2 e^{itW_2}. \quad (\text{B.14})$$

Comparando (B.14) com (B.9)

$$\frac{dA_{00}}{dt} e^{it\alpha_3} \approx -iq_3 B_3 e^{itW_3}, \quad (\text{B.15})$$

e desprezando o deslocamento de frequência α_3

$$\frac{dA_{00}}{dt} \approx -iq_3 B_3 e^{itW_3}. \quad (\text{B.16})$$

Sua solução é dada por

$$A_{00} \approx A_{000} e^{it\alpha_5} + \frac{q_3}{W_3} B_3 (e^{it\alpha_6} - e^{itW_3}), \quad (\text{B.17})$$

tal que α_5 e α_6 são constantes da ordem de q_3^2/W_3 . Substituindo (B.17) em (B.11)

$$\begin{aligned} A_0 \approx & A_{000} e^{it(\alpha_5+\alpha_3)} + \frac{q_3}{W_3} B_3 (e^{it\alpha_6} - e^{itW_3}) e^{it\alpha_3} + \\ & + \frac{q_2}{W_2} B_2 (e^{it\alpha_4} - e^{itW_2}). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Portanto, usando (B.18) a equação (B.5) pode ser reescrita como (considerando por simplicidade $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6$)

$$A \approx A_{000} e^{it(\alpha_5+\alpha_3+\alpha_1)} + \frac{q_1}{W_1} B_1 (e^{it\alpha_1} - e^{itW_1}) + \frac{q_2}{W_2} B_2 (e^{it\alpha_2} - e^{itW_2}) e^{it\alpha_1} + \quad (\text{B.19})$$

$$+ \frac{q_3}{W_3} B_3 (e^{it\alpha_3} - e^{itW_3}) e^{it(\alpha_3+\alpha_1)}, \quad (\text{B.20})$$

e desprezando α_1 e $\alpha_3 + \alpha_1$ obtemos

$$\begin{aligned} A \approx & A_{000} e^{it(\alpha_5+\alpha_3+\alpha_1)} + \frac{q_1}{W_1} B_1 (e^{it\alpha_1} - e^{itW_1}) + \frac{q_2}{W_2} B_2 (e^{it\alpha_2} - e^{itW_2}) + \\ & + \frac{q_3}{W_3} B_3 (e^{it\alpha_3} - e^{itW_3}), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Finalmente fazendo $A_{000} = A_0$ e $\alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_1 = \alpha_1$ chegamos a

$$A \approx A_0 e^{it\alpha_1} + \sum \frac{q_i}{W_i} B_i (e^{it\alpha_i} - e^{itW_i}). \quad (\text{B.22})$$

Utilizamos esta solução para escrever a equação (5.42) quando deduzimos os deslocamentos de frequência na subseção 5.4.1.

Apêndice C

Aproximações por RWA

A equação diferencial (5.34) foi dividida por nós de maneira compacta em um conjunto de cinco linhas, tal que em cada linha devemos utilizar o método RWA descrito no apêndice A. A linha um passou por esse tratamento no corpo da dissertação. Neste apêndice estamos interessados em explicitar as demais linhas e discriminar as aproximações utilizadas em cada uma delas. Assim, a *linha2* é dada por

$$\begin{aligned}
 \text{linha}_2 \approx & \sum_{k=0}^1 \sum_{S(m+2)} \sum_{L=E,G} \sum_{k1=0}^2 G_{0,k} \left\{ B_{m+2,S}^{(2)}(t) \sum_j \frac{i \left(\Pi_{m+2,S,S}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j} \right)}{\eta^{(j)}} \times \right. \\
 & \times \left[\frac{1}{2} e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S} + \eta^{(j)})} + \frac{1}{2} e^{-\phi_{L,k1}^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S} - \eta^{(j)})} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})} \left(e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}} + e^{-\phi_{L,k1}^{(j)}} \right) \right] - \frac{1}{2i} \sum_{\mathcal{R}(m+2) \neq S(m+2)} \sum_j' B_{m+2,\mathcal{R}}^{(2)} \Pi_{m+2,S,\mathcal{R}}^{L,k1,j} \times \right. \\
 & \times \left[e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})t} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})}}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}} + \right. \\
 & \left. \left. - e^{-\phi_{L,k1}^{(j)}} \frac{e^{i(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})t} - e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})}}{\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}} \right] \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S}. \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

Conforme sabemos $\lambda_{m+2,S} > \lambda_{m,\mathcal{T}} \rightarrow \lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} > 0$ e portanto $\lambda_{m+2,S} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta \neq 0$. Logo, os termos que dependem dessa combinação estão fora de ressonância, logo podemos desprezá-los com as seguintes aproximações

$$\frac{(G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S})^2 \left(\Pi_{m+2,S,S}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j} \right)^2}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S} - \eta^{(j)}) (\eta^{(j)})^2}, \frac{(G_{0,k} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},S})^2 \left(\Pi_{m+2,S,S}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j} \right)^2}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,S})^2 \eta^{(j)}} \ll 1$$

$$\frac{G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)}) (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})}, \frac{G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}) (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})}, \ll 1$$

$$\frac{G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)}) (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})} \ll 1.$$

Nestas aproximações desprezamos deslocamentos de frequência da ordem de

$$\frac{G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} \frac{(\Pi_{m+2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j})}{\eta^{(j)}} \frac{G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})} \frac{(\Pi_{m+2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j})}{\eta^{(j)}},$$

$$\frac{(G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}})^2}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} + \eta^{(j)})^2 (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})}, \frac{(G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}})^2}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})^2 (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}})}$$

$$\frac{(G_{0,k}\Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}})^2}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})^2 (\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \eta^{(j)})},$$

chegando a

$$\begin{aligned} \text{linha}_2 = & \frac{i}{2} \sum_{k=0}^1 \sum_{\mathcal{S}(m+2)} \sum_{L=E,G} \sum_{k1=0}^2 \sum_j' G_{0,k} \left\{ \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \frac{(\Pi_{m+2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j}) e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}}}{\eta^{(j)}} + \right. \\ & \left. + \sum_{\mathcal{S}(m+2) \neq \mathcal{R}(m+2)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \frac{\Pi_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{L,k1,j} e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \right\} e^{-it(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t). \end{aligned}$$

A linha_3 é igual a linha_2 apenas trocando $m+2 \rightarrow m-2$, portanto

$$\begin{aligned} \text{linha}_3 = & \frac{i}{2} \sum_{k=0}^1 \sum_{\mathcal{S}(m-2)} \sum_{L=E,G} \sum_{k1=0}^2 \sum_j' G_{0,k} \left\{ \Lambda_{k,m-2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \frac{(\Pi_{m-2,\mathcal{S},\mathcal{S}}^{L,k1,j} - \Pi_{m,\mathcal{T},\mathcal{T}}^{L,k1,j}) e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}}}{\eta^{(j)}} + \right. \\ & \left. + \sum_{\mathcal{S}(m-2) \neq \mathcal{R}(m-2)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{R}} \frac{\Pi_{m+2,\mathcal{R},\mathcal{S}}^{L,k1,j} e^{i\phi_{L,k1}^{(j)}}}{\lambda_{m+2,\mathcal{R}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)}} \right\} e^{-it(\lambda_{m-2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t). \end{aligned}$$

A linha_4 é dada por

$$\begin{aligned} \text{linha}_4 = & \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^1 \sum_j \sum_{\mathcal{S}(m+2)} \varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} \left[e^{i\phi_{G,k}^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - e^{-i\phi_{G,k}^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} \right] \times \\ & \times B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}, \end{aligned}$$

em que o termo fora de ressonância depende de $\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)}$. Portanto, utilizando a aproximação

$$\frac{\varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}}}{(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)})} \ll 1,$$

e desprezando deslocamentos de frequência da ordem de

$$\frac{(\varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}})^2}{\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} + \eta^{(j)}}$$

chegamos a

$$linha_4 = -\frac{i}{2} \sum_{k=0}^1 \sum_j \sum_{\mathcal{S}(m+2)} \Lambda_{k,m+2,\mathcal{T},\mathcal{S}} \varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} e^{i\phi_{G,k}^{(j)}} e^{-it(\lambda_{m+2,\mathcal{S}} - \lambda_{m,\mathcal{T}} - \eta^{(j)})} B_{m+2,\mathcal{S}}^{(2)}(t).$$

Por fim, a $linha_5$ é dada por

$$linha_5 = \sum_{k=0}^1 \varepsilon_{G,k} \frac{1}{2i} \sum_j w_{G,k}^{(j)} \left[e^{i\phi_{G,k}^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} - e^{-i\phi_{G,k}^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} \right] \times \\ \times \sum_{\mathcal{S}(m-2)} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t) \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^*.$$

Utilizando a aproximação

$$\frac{\varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^*}{(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)})} \ll 1$$

e desprezando deslocamentos da ordem de

$$\frac{(\varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^*)^2}{\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} + \eta^{(j)'}}$$

chegamos a

$$linha_5 = \frac{i}{2} \sum_j \sum_{k=0}^1 \sum_{\mathcal{S}(m-2)} \Lambda_{k,m,\mathcal{S},\mathcal{T}}^* \varepsilon_{G,k} w_{G,k}^{(j)} e^{-i\phi_{G,k}^{(j)}} e^{it(\lambda_{m,\mathcal{T}} - \lambda_{m-2,\mathcal{S}} - \eta^{(j)})} B_{m-2,\mathcal{S}}^{(2)}(t).$$

Combinando todas as linhas e fazendo algumas manipulações algébricas obtemos a equação (5.38).

Apêndice D

Programa

Para a obtenção dos resultados numéricos deste trabalho desenvolvemos um algoritmo simples em C que utiliza o método de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver um conjunto de N equações diferenciais acopladas. Utilizamos este programa para resolver o Hamiltoniano de Rabi numericamente no regime ultraforte ($g_0 = 0.2\omega_0$) e plotamos os gráficos utilizando o software livre Grace. Nosso objetivo neste apêndice é apresentar nosso algoritmo explicitamente, caso o leitor tenha interesse em reobter nossos resultados. Esperamos que este programa auxilie estudantes que tenham interesse em resolver conjuntos de N equações diferenciais de primeira ordem acopladas em qualquer problema de física ou matemática. Deste modo, partimos do Hamiltoniano de Rabi

$$\hat{H}_I/\hbar = \omega\hat{n} + \frac{\Omega}{2}\hat{\sigma}_z + g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$$

e expandimos a função de onda na base dos estados pelados $|g, n\rangle$ e $|e, n\rangle$

$$|\Psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n|g, n\rangle + B_n|e, n\rangle).$$

Utilizando a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle.$$

Podemos escrever a dinâmica das amplitudes de probabilidade $A_n = AR_n + iAI_n$ e $B_n = BR_n + iBI_n$ através de um conjunto de quatro equações diferenciais acopladas da forma

$$\frac{d}{dt}AR_n = \left(\omega n - \frac{\Omega}{2}\right) AI_n + g(\sqrt{n}BI_{n-1} + \sqrt{n+1}BI_{n+1}),$$

$$\frac{d}{dt}AI_n = -\left(\omega n - \frac{\Omega}{2}\right) AR_n - g(\sqrt{n}BR_{n-1} + \sqrt{n+1}BR_{n+1}),$$

$$\frac{d}{dt}BR_n = \left(\omega n + \frac{\Omega}{2}\right) BI_n + g(\sqrt{n+1}AI_{n+1} + \sqrt{n}AI_{n-1}),$$

$$\frac{d}{dt}BI_n = -\left(\omega n + \frac{\Omega}{2}\right) BR_n - g(\sqrt{n+1}AR_{n+1} + \sqrt{n}AR_{n-1}).$$

Nos resultados obtidos nesta dissertação truncamos o número máximo de fótons gerados em $n = 20$. Portanto, cada uma das quatro equações acima dá origem a 20 equações diferenciais acopladas totalizando um número de 80 equações. Escrevemos estas equações num arquivo anexo intitulado sub.c, conforme pode ser visto no preâmbulo do programa abaixo.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "sub.c" (Subrotina com 80 equações diferenciais acopladas)
#define N 80 (Número de equações diferenciais acopladas)
#define dist 0.01 (passo utilizado no integrador)
#define MAX 500 (número máximo de pontos)
FILE *output;
void runge4(double v, double w, double x, double *y, double step);
void f(double lambda2, double lambda0, double g, double v, double w, double x, double *y,
double *yp);
void main() {
double lambda2, lambda0, g, v, w, t, y[N], norma, nm; int j, i,p; (definindo as variáveis)
output=fopen("nmedio.dat", "w");
Dedinindo os parâmetros e as condições iniciais
v = frequência da cavidade  $\omega_0$ ;
```

```

w = frequência de transição atômica  $\Omega_0$ ;
y[0]=1; (Condição inicial  $Y[0] = AR_0$  correspondente ao estado inicial de vácuo)
for (i=1; i<N ;i++)
{
y[i]=0; (condição inicial para as demais equações)
}
fprintf(output, "0\t%f\n", y[0]);
for (j=1; j*dist<=MAX ;j++) {
t=j*dist;
runge4(v, w, t, y, dist);
nm=0;
for (p=1; p<20; p++) {
nm+=p*(y[p]*y[p]+y[20+p]*y[20+p]+y[40+p]*y[40+p]+y[60+p]*y[60+p]); (número
médio de fótons gerados  $\langle \hat{n} \rangle$ )
}
fprintf(output, "%f\t%f\n", t, nm); (Plotando a evolução do número médio de fótons)
}
fclose(output);
}
void runge4(double v, double w, double x, double *y, double step)
{
double c1[N],c2[N],c3[N],c4[N],yy[N],h2=step/2.0;
double g, g0, d, eg, lambda2, lambda0;
int i;
g0=2.e-1*v; (Parâmetro  $g_0$  no regime ultraforte)
d=( colocar aqui a ressonância de cada fenômeno estudado )/K; (d frequência de modulação
 $\eta$  tal que  $K=1$  ou  $K=2$  correspondem as ressonâncias de primeira e segunda ordem)
eg=.3*g0; (eg é a amplitude da modulação  $\varepsilon_g$ )
lambda2=  $\lambda_{2,D}$ ;
lambda0=  $\lambda_0$ ;
g = g0 + eg*sin(d*x); (modulação harmônica do parâmetro  $g$ )
Abaixo escrevemos o integrador de Runge-Kutta de quarta ordem

```

```
f(lambda2, lambda0, g, v, w, x, y,c1);
for (i=0; i<N; i++) yy[i]=y[i]+h2*c1[i];
f(lambda2, lambda0, g, v, w, x+h2,yy,c2);
for (i=0; i<N; i++) yy[i]=y[i]+h2*c2[i];
f(lambda2, lambda0, g, v, w, x+h2,yy,c3);
for (i=0; i<N; i++) yy[i]=y[i]+step*c3[i];
f(lambda2, lambda0, g, v, w, x+step,yy,c4);
for (i=0; i<N; i++)
y[i] +=step*(c1[i]+2.0*c2[i]+2.0*c3[i]+c4[i])/6.0;
}
```

Utilizamos o sistema operacional *free* Ubuntu 14.04 LTS e compilamos os programas no terminal utilizando o seguinte comando: `gcc -g nomedoprograma.c -o nomedoexecutável -lm`. Em seguida rodamos o executável usando o comando: `time ./nomedoexecutável`.

Referências Bibliográficas

- [1] Cougo-Pinto, Farina M. V., C. e Tort A., *O Efeito Casimir*, Rev. Bras. Ens. Fis. **22**, 122 (2000).
- [2] Planck M., *On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum*, Ann. der Phys. **4**, 553 (1900).
- [3] Planck M., *Über die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung*. Ann. der Phys. **37**, 642 (1912).
- [4] Nernst W., *Über einen Versuch, von quantentheoretischen Betrachtungen zur Annahme stetiger Energieänderungen zurückzuführen*, Verhandlungen der Deutschen Phys. Ges. **18**, 83 (1916).
- [5] Einstein A. and Stern O., *Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt*, Ann. der Phys. **40**, 551 (1913).
- [6] Rechenberg H., *Historical remarks on zero-point energy and the Casimir effect*, in Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions, p. 12. Ed. M. Bordag. World Scientific (1999).
- [7] London F., *Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte*, Zeit. für Phys. **63**, 245 (1930).
- [8] Verwey E. J. M. and Overbeek J. Th. G., *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids* (Elsevier publishing company, Amsterdam, 1948).
- [9] Casimir H. B. G and Polder D., *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
- [10] Casimir H. B. G., *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch, **51**, 793 (1948).

- [11] Moore G. T., *Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity*, J. Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [12] de Sousa I. M. and Dodonov A. V., *Microscopic toy model for the cavity dynamical Casimir effect*, J. Phys A: Math. and Theor. **48**, 245302 (2015).
- [13] Dodonov A. V. J., *Photon creation from vacuum and interactions engineering in nonstationary circuit QED*, J. Phys: Conf. Ser. **161**, 012029 (2009).
- [14] Rabi I. I., *On the Process of Space Quantization*, Phys. Rev. **49**, 324 (1936).
- [15] Mabuchi H. and Doherty A., *Cavity Quantum Electrodynamics: Coherence in Context*, Science **298**, 1372 (2002).
- [16] Haroche S., *Fundamental Systems in Quantum Optics* (Elsevier, New York, 1992).
- [17] Kimble H., *Cavity Quantum Electrodynamics* (Academic Press, San Diego, 1994).
- [18] Hadfield R. H. *et al*, *Single photon source characterization with a superconducting single photon detector*, Opt. Expr **13**, 10846 (2005).
- [19] Braak D., *Integrability of the Rabi Model*, Phys. Rev. Lett. **107**, 100401 (2011).
- [20] Jaynes E. T. and Cummings F. W., *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proceedings of the IEEE **51**, 89 (1963).
- [21] Shore B. W. and Knight P. L., *The Jaynes-Cummings Model*, Journal of Modern Optics **40**, 1195 (1993).
- [22] Rempe G., Walther H. and Klein N., *Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*, Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [23] Schleich W. P., *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley, Berlin, 2001).
- [24] Bose S., Fuentes-Guridi I., Knight P. L. and Vedral V., *Subsystem Purity as an Enforcer of Entanglement*, Phys. Rev. Lett. **87**, 050401 (2001).
- [25] Bonci L., Roncaglia R., West B. J. and Grigolini P., *Quantum irreversibility and chaos*. Phys. Rev. Lett. **67**, 2593 (1991).
- [26] Emary C. and Brandes T., *Quantum Chaos Triggered by Precursors of a Quantum Phase Transition: The Dicke Model*, Phys Rev. Lett. **90**, 044101 (2003).

- [27] Furuya K., Nemes M. C. and Pellegrino G. Q., *Quantum Dynamical Manifestation of Chaotic Behavior in the Process of Entanglement*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5524 (1998).
- [28] Johansson J. R., Johansson G., Wilson C. M. and Franco Nori., *Dynamical Casimir effect in superconducting microwave circuits*. Phys. Rev. A. **82**, 052509 (2010).
- [29] Stassi R., Ridolfo A., Di Stefano O., Hartmann M. J. and Savasta S., *Spontaneous Conversion from virtual to real photons in the ultrastrong-coupling regime*, Phys. Rev. Lett. **110**, 243601 (2013).
- [30] Benenti G. and Strini G., *Dynamical Casimir effect and minimal temperature in quantum thermodynamics*, Phys. Rev. A **91**, 020502 (2015).
- [31] Moura A. P. S. and Furuya K., *Efeito dos termos contra-girantes no modelo de Jaynes-Cummings*, Dissertação de mestrado apresentada ao instituto de Física Gleb Wataghin-Unicamp, 1997.
- [32] Walther H., Varcoe B. T. H., Englert B. G. and Becker T., *Cavity quantum electrodynamics*, Report on Progress in Physics **69**, 1325 (2006).
- [33] Wallraff A. et al., *Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics*, Nature **431**, 162 (2004).
- [34] Schuster I., Kubanek A., Fuhrmanek A., Puppe T., Pinkse P. W. H., Murr K. and Rempe G., *Nonlinear spectroscopy of photons bound to one atom*, Nature **4**, 382 (2008).
- [35] Bishop L. S. et al., *Nonlinear response of the vacuum Rabi resonance*, Nature Physics **5**, 105 (2009).
- [36] Fink J. M. et al., *Climbing the Jaynes-Cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity QED system*, Nature **454**, 315 (2008).
- [37] Schuster D. I. et al., *Resolving photon number states in a superconducting circuit*, Nature **445**, 515 (2007).
- [38] de Sousa I. M., *Formulação analítica de modulações temporais em Eletrodinâmica Quântica de Circuitos: Um Toy Model para o efeito Casimir dinâmico e novas aplicações*, Dissertação de mestrado apresentada ao proparagma de pós graduação de física da Universidade de Brasília (2015).

- [39] Werlang T., Dodonov A. V., Duzzioni E. I. and Villas-Boas C. J., *Rabi model beyond the rotating-wave approximation: Generation of photons from vacuum through decoherence*, Phys. Rev. A **78**, 053805 (2008).
- [40] Wallraff A. *et al.*, *Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics*, Nature **431**, 162 (2004).
- [41] Gambetta J., Braff W. A., Wallraff A., Girvin S. M. and Schoelkopf R. J., *Protocols for optimal readout of qubits using a continuous quantum nondemolition measurement*, Phys. Rev. A. **76**, 012325 (2007).
- [42] Blais A. , Huang R. S., Wallraff A., Girvin S. M. and Schoelkopf R. J., *Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation*, Phys. Rev. A **69** , 062320 (2004).
- [43] DiCarlo L., *Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor*, Nature **460**, 240 (2009).
- [44] Majer J., *Coupling superconducting qubits via a cavity bus*, Nature **449**, 443 (2007).
- [45] Göppl M. *et al*, *Coplanar waveguide resonators for circuit quantum electrodynamics*, J. Appl. Phys. AIP. **104**, 113904 (2008).
- [46] Paik H. *et al*, *Observation of High Coherence in Josephson Junction Qubits Measured in a Three-Dimensional Circuit QED Architecture*, Phys. Rev. Lett. **107**, 240501 (2011).
- [47] Schuster D., *Circuit quantum electrodynamics*, PhD thesis, Yale University (2007).
- [48] Bishop L. S., *Circuit Quantum Electrodynamics*, PhD thesis, Yale University (2010).
- [49] Chow J. M., *Quantum Information Processing with Superconducting Qubits*, PhD thesis, Yale University (2010).
- [50] Cottet A., *Implementation of a Quantum Bit in a Superconducting Circuit*, PhD thesis, Université Paris VI (2002).
- [51] London F. and London H., *The Electromagnetic Equations of the Supraconductor*, Proc. R. Soc. London A **149**, 71 (1935).

- [52] Josephson B. D., *Possible new effects in superconductive tunnelling*, Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
- [53] Anderson P.W. and Rowell J. M., *Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect*, Phys. Rev. Lett. **10**, 230 (1963).
- [54] Nakamura Y., Pashkin Yu. A., Yamamoto T. and Tsai J. S., *Coherent manipulations of charge-number states in a Cooper-pair box*, Physica Scripta T **102**, 155 (2002).
- [55] DeFeo M. P., *Microstrip Superconducting Quantum Interference Devices for Quantum Information Science*, PhD Thesis, Syracuse University (2012).
- [56] Makhlin Y., Schoen G. and Shnirman A., *Quantum-state engineering with Josephson junction devices*, Rev. Mod. Phys. **73**, 357 (2001).
- [57] You J. Q. and Nori F., *Superconducting circuits and quantum information*, Phys. Today. **58**, 42 (2005).
- [58] Clarke J. and Wilhelm F. K., *Superconducting quantum bits*, Nature **453**, 1031 (2008).
- [59] Schoelkopf R.J. and Girvin S.M., *Wiring up quantum systems*, Nature **451**, 664 (2008).
- [60] Takahashi S. *et al*, *Decoherence in crystals of quantum molecular magnets*, Nature **476**, 76 (2011).
- [61] O'Malley P. J. J. *et al*, *Scalable quantum simulation of molecular energies*, Phys. Rev. X **6** 031007 (2016).
- [62] Mooij J. E. *et al*, *Josephson persistent-current qubit*, Science **285**, 1036 (1036).
- [63] Friedman J. R., Patel V., Chen E., Tolpygo S. K. and Lukens J. E., *Quantum superposition of distinct macroscopic states*, Nature, **406**, 43 (2000).
- [64] Stern M. *et al*, *Flux qubits with long coherence times for hybrid quantum circuits*, Phys. Rev. Lett. **133**, 123601 (2004).
- [65] Martinid J. M., Nam S., Aumentado J. and Urbina C., *Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit*, Phys. Rev. Lett. **89**, 117901 (2002).
- [66] Nakamura Y., Pashkin Y. A. and Tsai J. S., *Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair-box*, Nature **398**, 786 (1999).

- [67] Lehnert K. W. *et al*, *Measurement of the excited-state lifetime of a microelectronic circuit*, Phys. Rev. Lett. **90**, 027002 (2003).
- [68] Bladh K., Duty T., Gunnarsson D. and Delsing P., *The single Cooper-pair box as a charge qubit*, New Journal of Physics **7**, 180 (2005).
- [69] Koch J. *et al*, *Charge-intensive qubit design derived from Cooper pair box*, Phys. Rev. A. **76**, 042319 (2007).
- [70] Schreier J. A., *Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits*, Phys. Rev. B. **77**, 180502 (2008).
- [71] Houck A. A., Koch J., Devoret M. H., Girvin S. M. and Schoelkopf R. J., *Life after charge noise: recent results with transmons qubits*, Quantum information processing **97**, 10 (2009).
- [72] Sun L. *et al*, *Tracking photon jumps with repeated quantum non-demolition parity measurements*, Nature **511**, 444 (2014).
- [73] Devoret M. H., *Quantum fluctuations in electrical circuits*, in Mesoscopic Quantum Physics: Lecture Notes of the Les Houches Summer School: Volume 61, July (1994). E. Akkermans, G. Montambaux, J. L. Pichard, and J. Zinn-Justin, eds., Lecture Notes of the Les Houches Summer School: Volume 61, July (1994). Elsevier Science Ltd, Feb., 1996.
- [74] Vion D. *et al*, *Manipulating the Quantum State of an Electrical Circuit*, Science **296**, 886 (2002).
- [75] Reed M. D., *Entanglement and Quantum Error Correction with Superconducting Qubits*, PhD thesis, Yale University (2013).
- [76] Chuang I. L., Vandersypen L. M. K., Zhou X., Leung D. W. and Lloyd S., *Experimental realization of a quantum algorithm*, Nature **393**, 143 (1998).
- [77] Chuang I. L., Gershenfeld N. and Kubinec M., *Experimental implementation of fast quantum searching*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3408 (1998).
- [78] Jones J. A., Mosca M. and Hansen R. H., *Implementation of a quantum search algorithm on a quantum computer*, Nature **393**, 344 (1998).

- [79] Guide S. *et al*, *Implementation of the Deutsch-Jozsa algorithm on an ion-trap quantum computer*, *Nature* **421**, 48 (2003).
- [80] Brickman K. A. *et al*, *Implementation of Grover's quantum search algorithm in a scalable system*, *Phys. Rev. A* **72**, 050306 (R) (2005).
- [81] Kwiat P. G., Mitchell J. R., Schwindt P. D. D. and White A. G., *Grover's search algorithm: an optical approach*, *J. Mod. Opt.* **47**, 257 (2000).
- [82] DiCarlo L. *et al*, *Preparation and measurement of three-qubit entanglement in a superconducting circuit*, *Nature Physics* **467**, 574 (2010).
- [83] Matthew N. *et al*, *Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits*, *Nature Physics* **467**, 570 (2010).
- [84] Houck A. A. *et al*, *Generating single microwave photons in a circuit*, *Nature* **449**, 328 (2007).
- [85] Majer J. *et al*, *Coupling superconducting qubits via a cavity bus*, *Nature* **449**, 443 (2007).
- [86] Schuster D. I. *et al*, *Resolving photon number states in a superconducting circuit*, *Nature* **445**, 515 (2007).
- [87] Johnson B. R., *Controlling Photons in Superconducting Electrical Circuits*, Phd thesis Yale (2011)
- [88] Srinivasan S. J., Hoffman A. J., Gambetta J. M. and Houck A. A., *Superconducting Charge Qubit with a V-Shaped Energy Level Diagram*, *Phys. Rev. Lett.* **106** 083601(2011).
- [89] Sillanpää M. A, Park J. I. and Simmonds R. W., *Coherent quantum state storage and transfer between two phase qubits via resonant cavity*, *Nature* **449**, 438 (2007)
- [90] Hofheinz M. *et al*, *Generation of Fock states in a superconducting quantum circuit*, *Nature* **454**, 310 (2008).
- [91] Blais A. *et al*, *Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics*, *Phys. Rev. A* **75**, 032329 (2007)
- [92] Griffiths D., *Introduction to quantum mechanics* (Prentice Hall Upper Saddle River, New Jersey, 1995).

- [93] Crawford Frank S., *Elementary examples of adiabatic invariance*, Am. J. Phys. **58**, 337 (1990).
- [94] Frauenfelder H. and Wolynes P., *Rate theories and puzzles of hemeprotein kinetics*, Science **229**, 337-345 (1985); Garg A., Onuchic J. N. and Ambegaokar V. J., *Effect of friction on electron transfer in biomolecules*, Chem. Phys. **83**, 4491 (1985).
- [95] Schlichter C. P., *Principles of Magnetic Resonance* (Springer-Verlag, Berlin, 1978).
- [96] Child M. S., *Molecular Collision Theory* (Academic Press, London, 1974).
- [97] Spreeuw R. J. C., van Druten N. J., Beijersbergen M. W., Eliel E. R. and Woerdman J. P., Phys. Rev. Lett. **65**, 2642 (1990).
- [98] Bouwmeester D., Dekker N. H., Dorsselaer F. E. V., Schrama C. A., Visser P. M. and Woerdman J. P., *Classical realization of a strongly driven two-level system*, Phys. Rev. A **51**, 646 (1995).
- [99] Saito K. and Kayanuma Y., *Nonadiabatic electron manipulation in quantum dot arrays*, Phys. Rev. B **70**, 201304(R) (2004).
- [100] Witthaut D., Graefe E. M. and Korsch Towards H. J., *Toward a generalized Landau-Zener formula for an interacting Bose-Einstein condensate in a two-level system*, Phys. Rev. A **73**, 063609 (2006).
- [101] Zhu C. and Nakamura H. J., *Theory of nonadiabatic transition for general two-state curve crossing problems. I. Nonadiabatic tunneling case*, Chem. Phys. **101**, 10630 (1994).
- [102] Ankerhold J. and Grabert H., *Enhancement of Macroscopic Quantum Tunneling by Landau-Zener Transitions*, Phys. Rev. Lett. **91**, 016803 (2003).
- [103] Shytov A. V., Ivanov D. A. and Feigelman M. V., *Landau-Zener interferometry for qubits*, Eur. Phys. J. **36**, 263 (2003).
- [104] Izmalkov A. et al, *Observation of macroscopic Landau-Zener transitions in a superconducting device*, Europhys. Lett. **65**, 844 (2004).
- [105] Ithier G. et al., *Zener Enhancement of Quantum Tunneling in a Two-Level Superconducting Circuit*, Phys. Rev. Lett. **94**, 057004 (2005).

- [106] Wubs M., Saito K., Kohler S., Kayanuma Y. and Anggi P. H., *Landau–Zener transitions in qubits controlled by electromagnetic fields*, *New J. Phys.* **7**, 218 (2005).
- [107] Shevchenko S. N., Kiyko A. S., Omelyanchouk A. N. and Krech W., *Dynamic behaviour of Josephson-junction qubits: crossover between Rabi oscillations and Landau-Zener transitions*, *Low Temp. Phys.* **31**, 569 (2005).
- [108] Oliver W. D., Yu Y., Lee J. C., Berggren K. K., Levitov L. S. and Orlando T. P., *Mach-Zehnder Interferometry in a Strongly Driven Superconducting Qubit*, *Science* **310**, 1653 (2005).
- [109] Saito K., Wubs, M. , Kohler S., Hanggi P. and Kayanuma Y., *Quantum state preparation in circuit QED via Landau-Zener tunneling*, *Europhys. Lett.* **76**, 547 (2006).
- [110] Hicke C., Santos L. F. and Dykman M. I., *Fault-tolerant Landau-Zener quantum gates*, *Phys. Rev. A* **73**, 012342 (2006).
- [111] Landau L. D., *Zur theorie der energieubertragung. II*, *Phys. Z. Sowjetunion* **2**, 46 (1932).
- [112] Zener C., *Non-Adiabatic crossing of energy levels*, *Proc. R. Soc. A.* **137**, 696 (1932).
- [113] Stueckelberg E. C. G., *Theorie der unelastischen Stösse zwischen Atomen*, *Helv. Phys. Acta* **5**, 369 (1932).
- [114] Majorana E., *Atomi orientati in campo magnetico variabile*, *Nuovo Cimento* **9**, 43 (1932).
- [115] Witting C., *The Landau-Zener formula*, *The Journal of Physical Chemistry B* **109**, 8428 (2005).
- [116] Chichinin A. I., *Comment on “The Landau-Zener formula”*, *The Journal of Physical Chemistry. B* **117**, 6018 (2013).
- [117] Le Tuan Anh Ho and Chibotaru Liviu F., *A simple derivation of the Landau-Zener formula*, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **16**, 6942 (2014).
- [118] Gefen Y., Ben-Jacob E. and Caldeira A. O., *Zener transitions in dissipative driven systems*, *Phys. Rev. B* **36**, 2770 (1987).
- [119] Haikka P. and Mølmer K., *Dissipative Landau-Zener level crossing subject to continuous measurement: Excitation despite decay*, *Phys. Rev. A* **89**, 052114 (2014).
- [120] Steck D. A., *Quantum and Atom Optics* (University of Oregon, 2016).

- [121] Shytov A. V., *Landau-Zener transitions in a multilevel system: An exact result*, Phys. Rev. A **70**, 052708 (2004).
- [122] Carroll C. E. and Hioe F. T. J., *Transition probabilities for the three-level Landau-Zener model*, Phys. A: Math. Gen. **19**, 2061 (1986).
- [123] Zueco D. P., Hänggi H. and Kohler S., *Landau-Zener tunnelling in dissipative circuit QED*, New J. Phys. **10**, 115012 (2008).
- [124] Ao P. and Rammer J., *Influence of dissipation on the Landau-Zener transition*, Phys. Rev. Lett. **62**, 3004 (1989).
- [125] Vitanov N. V. and Suominen K. -A., *Nonlinear level-crossing models*, Phys. Rev. A **59**, 4580 (1999).
- [126] Chasseur L. S., Theis Y. R., Sanders D. J. Egger and Wilhelm F. K., *Engineering adiabaticity at an avoided crossing with optimal control*, Phys. Rev. A **91**, 043421 (2015).
- [127] Vitanov N. V and Garraway B. M., *Landau-Zener model: Effects of finite coupling duration*, Phys. Rev. A **53** 4288 (1996)
- [128] Lima D. H. G e Rigolin G. G., *Estudo comparativo entre duas teorias de perturbação dependentes do tempo em mecânica quântica*. Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós graduação da Universidade de São Carlos (2016).
- [129] Wubs M., Kohler S. and Hanggi P., *Entanglement creation in circuit QED via Landau-Zener sweeps*, Physica E - Low-Dim. Syst. Nanostr. **40**, 187 (2007).
- [130] Li Jun-Wang, Wu Chun-Wang and Dai Hong-Yi., *Quantum Information Transfer in Circuit QED with Landau-Zener Tunneling*, Chin. Phys. Lett. **28**, 090302 (2011).
- [131] Sillanpää M., Lehtinen T., Paila A., Makhlin Y. and Hakonen P., *Continuous-Time Monitoring of Landau-Zener Interference in a Cooper-Pair Box*, Phys. Rev. Lett. **96**, 187002 (2006).
- [132] Saito K., Wubs M., Kohler S., Hanggi P. and Kayanuma Y., *Quantum state preparation in circuit QED via Landau-Zener tunneling*, Europhysics Letters **76**, 22 (2006).
- [133] Saito K., Wubs M., Kohler S., Hanggi P. and Kayanuma Y., *Dissipative Landau-Zener transitions of a qubit: Bath-specific and universal behavior*, Phy. Rev. B. **75**, 214308 (2007).

- [134] Sakar S., *Photons and quantum fluctuations* (AdamHilger, Bristol, 1988).
- [135] Dodonov V. V, Kilmov A. B and Man'ko V. I., *Nonstationary Casimir effect and oscillator energy level shift*, Phys. Lett A **142**, 511 (1989).
- [136] Veloso D. S and Dodonov A., *Prospects for observing dynamical and anti- dynamical Casimir effects in circuit QED due to fast modulation of qubit parameters*, Journal of Physics B **48**, 165503 (2015).
- [137] Dicke R. H., *Coherence in spontaneous radiation process*, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [138] Zeytinoglu S., Pechal M., Berger S., Abdumalikov A. A. Jr., Wallraff A. and Filipp S., *Microwave-induced amplitude-and phase-tunable qubit-resonator coupling in circuit quantum electrodynamics*, Phys. Rev. A **91**, 043846 (2015).
- [139] Kirchmair G. et al, *Observation of quantum state collapse and revival due to the single-photon Kerr effect*, Nature **495**, 205 (2013).
- [140] Devoret M., Girvin S. and Schoelkopf R., *Circuit-QED: how strong can the coupling between a Josephson junction atom and a transmission line resonator be?*, Ann. Phys. **16**, 767 (2007).
- [141] Fulling S. A. and Davies P. C.W., *Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly*, Proc. Roy. Soc. London A. **348**, 393 (1976).
- [142] Ford L. H. and Vilenkin, A., *Quantum radiation by a moving mirrors*, Phys. Rev. D. **25**, 2569 (1982).
- [143] Barton G., *On the fluctuations of the Casimir forces. II. The stress correlation function*, c J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 991 (1991).
- [144] Barton G., J., *On the fluctuations of the Casimir force*, Phys. A: Math. Gen. **24**, 5533 (1991).
- [145] Jaekel M. T. and Reynaud S., *Fluctuations and dissipation for a mirror in vacuum*, Quantum Opt. **4**, 39 (1992).
- [146] Munier A., Burgan J. R., Feix M. and Fijalkow E., *A direct approach to finding exact invariations for one-dimentional time-dependent classical Hamiltonians*, J. Math. Phys. **22**, 1219 (1980).

- [147] Dodonov V. V., Klimov A. B. and Nikonov D. E., *Quantum phenomena in nonstationary media*, Phys. Rev. A **47**, 4422 (1993).
- [148] Maia Neto P. A., *Numerical approach to the dynamical Casimir effect*, J. Phys. A **27**, 2167 (1994).
- [149] Dodonov V. V., *Photon creation and excitation of a detector in a cavity with a resonantly vibrating wall*, Phys. Lett. A **207**, 126 (1995).
- [150] Lambrecht A., Jaekel and Reynaud M. T. S., *Motion induced radiation from a vibrating cavity*, Phys. Rev. Lett. **77**, 615 (1996).
- [151] Dodonov V. V. and Klimov A. B., *Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary*, Phys. Rev. A **53**, 2664 (1996).
- [152] Dodonov V. V., *Generation of photons in a lossy and detuned cavity with an oscillating boundary*, Phys. Lett. A **244**, 517 (1998).
- [153] Braggio C. et al., *A novel experimental approach for the detection of the dynamical Casimir effect*, Europhys. Lett. **70**, 754 (2005).
- [154] Braggio C. et al, *Characterization of a low noise microwave receiver for the detection of vacuum photons*, Phys. Res. A **603**, 451 (2009).
- [155] Johansson J. R. et al, *Dynamical Casimir effect in a superconducting coplanar waveguide*, Phys. Rev. Lett. **103**, 147003 (2009).
- [156] Fujii T. et al, *Quantum circuit analog of the dynamical Casimir effect*, Phys. Rev. B **84**, 174521 (2011).
- [157] Faccio D. and Carusotto I., *Dynamical Casimir effect in optically modulated cavities*, Europhys. Lett. **96**, 24006 (2011).
- [158] Nation P. D. et al, *Colloquium: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1 (2012).
- [159] Johansson J.R. et al, *Nonclassical microwave radiation from the dynamical Casimir effect*, Phys. Rev. A **87**, 043804 (2013).

- [160] Wilson C. M. *et al*, *Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit*, Nature **479**, 376 (2011).
- [161] Silva E. L. S. and Dodonov A. V., *Analytical comparison of the first- and second-order resonances for implementation of the dynamical Casimir effect in nonstationary circuit QED*, Journal of Physics A **49**, 495304 (2016).
- [162] Dodonov A. V, Mititello B, Napoli A. and Messina A., *Effective Landau-Zener transitions in circuit Casimir effect with time-varying modulation frequency*, Phys. Rev. A **93** , 052505 (2016).