

**UMA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS E
DIFERENÇAS FINITAS À INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA**

LUIS CARLOS DE SOUSA JUNIOR

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

FACULDADE DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UMA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS
FINITOS E DIFERENÇAS FINITAS À INTERAÇÃO
FLUIDO-ESTRUTURA**

ENG. LUIS CARLOS DE SOUSA JUNIOR

ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM - 008A/06
BRASÍLIA/DF: AGOSTO DE 2006**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**UMA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS
FINITOS E DIFERENÇAS FINITAS À INTERAÇÃO FLUIDO-
ESTRUTURA**

ENGº. LUIS CARLOS DE SOUSA JUNIOR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
(M.Sc.).

APROVADA POR:

LINEU JOSÉ PEDROSO, DSC (ENC-UNB)
(ORIENTADOR)

WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA, DSC (ENC-UNB)
(EXAMINADOR INTERNO)

RENATO PAVANELLO, DSC (UNICAMP)
(EXAMINADOR EXTERNO)

DATA: BRASÍLIA/DF, 29 DE AGOSTO DE 2006

FICHA CATALOGRÁFICA

SOUSA Jr, LUIS CARLOS DE

Uma Aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à Interação Fluido-Estrutura [Distrito Federal], 2006.

xix, 197p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2006),
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de
Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Interação Fluido-Estrutura

3. Métodos dos Elementos Finitos

I. ENC/FT/UnB

2. Dinâmica de Estruturas

4. Método das Diferenças Finitas

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOUSA Jr., L. C. (2006). Uma Aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à Interação Fluido-Estrutura. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 197p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Luis Carlos de Sousa Junior.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Uma Aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à Interação Fluido-Estrutura.

GRAU: Mestre

ANO: 2006.

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem sua autorização por escrito.

Luis Carlos de Sousa Junior
Colina Bloco H n.º. 503, UnB, Asa Norte.
70919-970 Brasília – DF – Brasil.
e-mail: sousajr@petrobras.com.br

AGRADECIMENTOS

A Universidade de Brasília e seus funcionários por me proporcionarem uma formação profissional e humana.

Aos investimentos realizados pelos programas de graduação PET/Capes e PIBIC/CNPq na minha formação.

Ao Departamento de Engenharia Civil e Ambiental e seus professores, pela instrução e dedicação, em especial aos orientadores e tutores Lineu Pedroso, André Assis e Ricardo Bernardes pela grande contribuição na minha formação e amizade.

Agradecimento ao “mestre” Lineu José Pedroso por acolher, incentivar e apoiar alunos de graduação do departamento, ao qual eu me incluo, na busca de uma formação acadêmica consistente.

A minha família e em especial aos meus pais por terem ensinado os caminhos corretos.

A minha esposa Aline pelo companheirismo, incentivo e compreensão ao meu trabalho e decisões.

Dedicado à Universidade de Brasília

RESUMO

UMA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS E DIFERENÇAS FINITAS À INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Autor: Luis Carlos de Sousa Junior

Orientador: Lineu José Pedroso

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, agosto de 2006

Em muitos casos práticos de Engenharia, uma estrutura pode ter seu comportamento dinâmico alterado em função da presença de um fluido denso, e nesses casos, deve-se investir em uma abordagem Fluido-Estrutura. Quando houver um regime de pequenos deslocamentos, tanto para a estrutura como para o fluido, este se torna um problema Acústico-Mecânico.

Este trabalho apresenta alguns resultados numéricos baseados na formulação em Elementos Finitos (EF) “U-p” (deslocamento-pressão) (Zienkiewicz e Newton 1969). Essa formulação foi adotada devido a sua ampla utilização, ter mostrado bons resultados em mais de três décadas e pelo fato de ser a base de códigos computacionais comerciais.

É também apresentada uma proposta de formulação numérica equivalente a anterior, porém em Diferenças Finitas (DF). Esse modelo em DF considera estruturas laminares do tipo viga. Em ambas as formulações (EF e DF), o fluido é modelado por meio da equação da onda e condições de contorno diversas: interação fluido-estrutura, parede rígida, ondas de gravidade de pequenas amplitudes e radiação.

São apresentados resultados de casos sintéticos, no qual foi possível explorar as potencialidades das formulações numéricas (acoplamento, condições de contorno). Estes problemas são analisados para o caso de vibrações livres e forçadas. Para a integração no tempo, foi utilizado o Método de Newmark, que se mostrou eficaz mesmo com as matrizes acopladas (fluido+estrutura).

Parâmetros governantes fluido-estrutura são incorporados nas análises. São também apresentados modelos simplificados baseados no conceito de massa adicional.

Os modos naturais de perfil típico de uma barragem gravidade de concreto foram calculados. Simulações transientes foram feitas para entender a resposta dessa estrutura típica sob condições acopladas e desacopladas com o reservatório, quando sujeita a um movimento harmônico do solo.

ABSTRACT

AN APLICATION OF THE METHODOS OF FINITE ELEMENTS AND FINITE DIFFERENCES TO FLUID STRUTURE INTERACTION

Author: Luis Carlos de Sousa Junior

Supervisor: Lineu José Pedroso

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, August of 2006

In many Engineering practical cases, the structural dynamic behavior can be strongly changed by the presence of a dense fluid, and in these cases, some effort on a fluid-structure analysis must be done. Particularly when there are small displacements for fluid and structure this becomes an acoustic-mechanic problem.

This work present some numerical results based on a finite element (FE) formulation “U-p” (displacement – pressure) (Zienkiewicz and Newton 1969). This formulation was adopted because of its well established used, its good results in more than three decades and base for commercial programs.

Also, an equivalent numerical formulation is presented, but it’s based in finite differences method (FD). These FD model consider laminated structures like beams. In both formulations (FE and FD), the fluid is modeled by wave equation and various boundary conditions: fluid-structure interaction, rigid wall, small amplitude gravity waves and radiation.

Results from synthetic cases are presented and possibilities explored of the numerical formulations (coupling, boundary conditions). These problems are analyzed in cases of free and forced vibration. For time integration, the Newmark Method was used, and it was efficient for coupled matrices (fluid + structure).

Fluid-structure governing parameters are incorporated on analysis. Results from simplified models based on added mass concept are also showed.

Natural modes of a typical concrete gravity dam were calculated. Transient simulations were done to understand structural response when coupled and uncoupled with reservoir when submitted to a harmonic ground motion.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1 - INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 - UMA CLASSIFICACAO DOS PROBLEMAS ACOPLADOS | 1 |
| 1.2 - ASPECTOS DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA (IFE) E APLICAÇÕES | 1 |
| 1.2.1 - Efeitos de Superfície Livre em problemas Fluido-Estrutura | 3 |
| 1.2.2 - Por que estudar Interação Fluido Estrutura (IFE) em Barragens e Hidrotécnica | 5 |
| 1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... | 7 |
| 1.3.1 - Revisão geral sobre Interação Fluido-Estrutura | 7 |
| 1.3.2 - Efeitos de Superfície Livre em Fluidos Acústicos..... | 9 |
| 1.3.3 - Outras abordagens à IFE..... | 10 |
| 1.4 - CARACTERIZAÇÃO OBJETIVOS DO TRABALHO | 12 |
| 1.5 - ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES..... | 13 |
| 1.6 - ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO | 14 |
| | |
| 2 - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO | 17 |
| | |
| 2.1 - VIBRAÇÃO DE SÓLIDOS ELÁSTICOS | 17 |
| 2.2 - VIBRAÇÃO DE FLUIDOS ACÚSTICOS..... | 21 |
| 2.2.1 - Condição de Contorno de Interface Fluido-Estrutura (condição FE)... | 23 |
| 2.2.2 - Condição de Contorno de Parede Rígida | 24 |
| 2.2.3 - Condição de Contorno de Superfície Livre..... | 24 |
| 2.2.4 - Condição de Contorno de Radiação no Infinito ou Sommerfeld | 26 |
| 2.3 - MODELO NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS | 27 |
| 2.3.1 - Contorno Flexível tipo Viga Flexional Esbelta para uma Cavidade Acústica | 27 |
| 2.3.2 - Contorno Flexível tipo Viga de Cisalhamento para uma Cavidade Acústica | 28 |
| 2.3.3 - Condições de Contorno para Estruturas Laminares tipo Viga | 29 |

| | |
|---|-----|
| 2.3.4 - Fluido Acústico Limitado por Diferentes Fronteiras | 30 |
| 2.4 - MODELO NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS | |
| FINITOS | 32 |
| 2.4.1 - Sólido Elástico..... | 32 |
| 2.4.2 - Fluido Acústico | 33 |
| 2.5 - MATRIZES ELEMENTARES | 37 |
| 2.5.1 - Elemento Finito 1D para o Fluido..... | 38 |
| 2.5.2 - Elemento Finito 2D para o Fluido..... | 40 |
| 2.5.3 - Elemento Finito 2D para o Sólido | 46 |
| 2.6 - MONTAGEM DO PROBLEMA ACOPLADO | 50 |
| 2.7 - CASO PARTICULAR: FLUIDO INCOMPRESSÍVEL | 51 |
| | |
| 3 - PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS | 53 |
| | |
| 3.1 - ALGORITMO DE MONTAGEM DO PROBLEMA ACOPLADO FE..... | 53 |
| 3.2 - EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES ACOPLADAS..... | 58 |
| 3.2.1 - Modelo 1D – Solução Numérica com Diferenças Finitas | 59 |
| 3.2.2 - Modelo 1D - Solução Numérica com Elementos Finitos | 62 |
| 3.2.1 - Modelo 2D – Solução Numérica com Diferenças Finitas | 65 |
| 3.2.4 - Modelo 2D - Solução Numérica com Elementos Finitos | 72 |
| 3.3 - DISCURSÃO SOBRE O PROBLEMA DE VALORES PRÓPRIOS | 79 |
| 3.4 - MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO | 81 |
| 3.5 - CONSIDERAÇÃO DO AMORTECIMENTO ESTRUTURAL | 85 |
| | |
| 4 - RESULTADOS NUMÉRICOS | 87 |
| | |
| 4.1 - RESERVATÓRIO CURTO (2D) COM VIGA FLEXÍVEL DE FUNDO E | |
| SUP. LIVRE (CASO EIG1) | 88 |
| 4.1.1 - Modos naturais da estrutura – Viga de fundo | 88 |
| 4.1.2 - Modos Naturais da Cavidade | 91 |
| 4.1.3 - Modos Acoplados..... | 97 |
| 4.1.4 - Modelagem com Diferenças Finitas | 100 |
| 4.1.5 - Discussão dos Resultados | 103 |

| | |
|--|------------|
| 4.2 - INTERAÇÃO PLACA-RESERVATÓRIO SEMI-INFINITO COM SUPERFÍCIE LIVRE (CASO EIG2) | 110 |
| 4.2.1 - Modos Naturais de Vibração da Estrutura..... | 111 |
| 4.2.2 - Modos Naturais do Reservatório Semi-infinito | 114 |
| 4.2.3 - Modos Naturais Acoplados – Numérico | 118 |
| 4.2.4 - Modelagem com Diferenças Finitas | 121 |
| 4.2.5 - Discussão dos Resultados | 124 |
| 4.3 - INTERAÇÃO BARRAGEM RESERVATÓRIO LONGO PARA O CASO TÍPICO DE BARRAGEM REAL (CASO EIG3) | 128 |
| 4.3.1 - Discussão de Resultados..... | 133 |
| 4.4 - ESTUDOS TRANSIENTES | 133 |
| | |
| 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES | 149 |
| | |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 154 |
| | |
| APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO DE DERIVADAS POR DIFERENÇAS FINITAS | 161 |
| | |
| APÊNDICE B - DINÂMICA DE VIGAS..... | 164 |
| | |
| APÊNDICE C - MODELAGEM ANALÍTICA DA INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO (IBR) DURANTE UM SISMO | 177 |
| | |
| APÊNDICE D - VIBRAÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE EM TANQUES RETANGULARES..... | 188 |
| | |
| APÊNDICE E - A SISMICIDADE BRASILEIRA | 195 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|-----|
| Tabela 3.1 - Coordenadas dos nós..... | 62 |
| Tabela 3.2 - Conectividade dos elementos..... | 62 |
| Tabela 3.3 - Conectividade dos elementos dos elementos da viga de fundo (fig. 3.8).. | 73 |
| Tabela 3.4 - Comparação das frequências acopladas analíticas e numéricas (MDF e MEF) para os 2 primeiros modos – valores em Hertz. | 79 |
| Tabela 4.1 - Frequências e modos de vibrações livres analíticas de uma cavidade curta (2D), aberta na extremidade superior e fechada na inferior. | 93 |
| Tabela 4.2 - Valores analíticos das frequências unidimensionais – analogia do pistão.. | 98 |
| Tabela 4.3 - Resumo com as frequências naturais do pistão curto com fundo flexível. ... | 108 |
| Tabela 4.4 - Frequências naturais de vibração da viga engastada - livre. | 112 |
| Tabela 4.5 - Solução analítica para os modos naturais de vibração do reservatório. | 116 |
| Tabela 4.6 - Modos de vibração numéricos do reservatório..... | 118 |
| Tabela 4.7 - Modos de vibração acoplados da viga engastada/livre e reservatório semi-infinito. | 119 |
| Tabela 4.8 - Modos naturais numéricos de vibração do reservatório (MDF)..... | 125 |
| Tabela 4.9 - Modos naturais acoplados (MDF)..... | 126 |
| Tabela 4.10 - Malha de EF e modos do reservatório..... | 131 |
| Tabela 4.11 - Modos naturais de vibração acoplados..... | 132 |
| Tabela 4.12 - Resumo das simulações transientes..... | 135 |
| Tabela 4.13 - Parâmetros da análise transiente..... | 136 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 - Problemas Acoplados, (a) Classe I: interação entre dois meios contínuos distintos, (b) Classe II: superposição de dois domínios. | 2 |
| Figura 1.2 - Problemas de Interação Fluido-Estrutura, (a) IFE em tanques líquidos (Kyung 2004), (b) programa de análise numérica de escoamento em estruturas aeronáuticas (internet), (c) ensaio em modelo reduzido de uma plataforma offshore de produção do petróleo..... | 3 |
| Figura 1.3 - Exemplos do efeito de vibração superfície livre na engenharia, (a) modelo de um tanque de caminhão de combustível; (b) reservatório elevado; (c) tanques de foguetes; (d) eclusa ou canal de navegação, (e) navio petroleiro..... | 4 |
| Figura 1.4 - Problemas de Interação Fluido-Estrutura em Engenharia de Barragem, (a) Interação Barragem-Reservatório durante um sismo; (b) Cavidade de uma eclusa de navegação; (c) Adução de Barragem (Encicl. Encarta 1996); (d) Sistema de Adução de Enchimento e Esvaziamento da Eclusa de Tucuruí (SENC 2001) (e) Escoamento em estruturas de um vertedor (Encicl. Encarta 1996); (f) Escoamento em torno de um pilar de vertedor ou de tomada d'água; (g) Escoamento em torno de uma estrutura de controle (comporta); (h) Escoamento sobre uma comporta flexível... .. | 6 |
| Figura 2.1 - Sólido elástico e condições de contorno..... | 18 |
| Figura 2.2 - Interação contorno móvel com cavidade 1D. | 23 |
| Figura 2.3 - Forças em um elemento na superfície livre da cavidade acústica. | 24 |
| Figura 2.4 - Condições de contorno usuais para vigas em DF. | 30 |
| Figura 2.5 - Discretização do fluido pelo MDF, (a) Malha de diferenças finitas, (b) célula para a discretização do operador ∇^2 | 31 |
| Figura 2.6 - Cavidade acústica e condições de contorno..... | 34 |
| Figura 2.7 - Funções de forma para um elemento 1D de 2 nós..... | 38 |
| Figura 2.8 - Elemento finito triangular, (a) Coordenadas dos nós e variável nodal, (b) Formas de interpolação | 41 |
| Figura 2.9 - Coordenadas retangulares e naturais em um elemento triangular | 43 |
| Figura 2.10 - Elemento finito triangular 2D para um sólido de 3 nós e 6 graus de liberdade. | 47 |
| Figura 3.1 - Modelo numérico fluido-estrutura com discretização por Diferenças Finitas. | 54 |
| Figura 3.2 - Modelo numérico fluido-estrutura com discretização por Elementos Finitos. | 55 |

| | |
|---|-----|
| Figura 3.3 - Caso exemplo de acoplamento acústico-mecânico, (a) problema físico, (b) modelo numérico 1D, (c) dados de dimensões e constantes físicas. | 59 |
| Figura 3.4 - Modelo 1D para a cavidade. | 60 |
| Figura 3.5 - Modelo 1D com elementos finitos. | 62 |
| Figura 3.6 - Viga de Cisalhamento e modelo numérico com MDF. | 66 |
| Figura 3.7 - Modelo numérico bidimensional de DF para o sistema acoplado da fig. 3.6. | 68 |
| Figura 3.8 - Modelo numérico bidimensional com EF para o sistema acoplado da fig. 3.6a. | 72 |
| Figura 3.9 - Aproximação para a variação da derivada segunda entre dois instantes de tempo; (a) variação linear ($\beta = 1/6$), (b) constante ($\beta = 1/4$) e (c) variação em “escada” ($\beta = 1/8$). | 82 |
| Figura 4.1 - Reservatório curto aberto com fundo flexível. | 88 |
| Figura 4.2 - Deformadas e freqüências analíticas dos modos naturais da viga de fundo. .. | 89 |
| Figura 4.3 - Estudo de convergência das freqüências numéricas da viga de fundo (MEF). | 90 |
| Figura 4.4 - Modos numéricos de vibração da viga de fundo sobre base elástica (MEF). .. | 91 |
| Figura 4.5 - Reservatório retangular com superfície livre, (a) problema físico, (b) malha numérica. | 91 |
| Figura 4.6 - Deformadas modais analíticas da superfície livre. | 92 |
| Figura 4.7 - Estudo de convergência dos modos numéricos de vibração da superfície livre (MEF). | 94 |
| Figura 4.8 - Modos numéricos de vibração da superfície livre (MEF). | 95 |
| Figura 4.9 - Convergência dos modos da cavidade (MEF). | 96 |
| Figura 4.10 - Seis primeiros modos numéricos de vibração de cavidade com efeito da superfície livre (MEF). | 97 |
| Figura 4.11 - Modelo numérico para o problema acoplado (MEF). | 99 |
| Figura 4.12 - Modos de vibração acoplados (MEF). | 99 |
| Figura 4.13 - Convergência das 5 primeiras freqüências naturais da estrutura (MDF). ... | 101 |
| Figura 4.14 - Modos naturais da viga de cisalhamento (MDF). | 101 |
| Figura 4.15 - Convergência das 5 primeiras freqüências naturais da superfície livre (MDF). | 102 |
| Figura 4.16 - Estudo de convergência das 5 primeiras freqüências naturais da cavidade (MDF). | 103 |
| Figura 4.17 - Modos naturais do reservatório (MDF). (a) Modos da superfície livre; (b) Modos cavidade e estrutura. | 104 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4.18 - Modos naturais acoplados (MDF). (a) dominados pela superfície livre; (b) dominados pela cavidade e estrutura. | 105 |
| Figura 4.19 - Distribuição de pressões na parede vertical do reservatório – modo fundamental. | 106 |
| Figura 4.20 - Frequência natural de vibração (1° modo) em função da relação nível da água-largura do reservatório (h/a). | 107 |
| Figura 4.21 - Esquema do problema acoplado placa – reservatório semi-infinito. | 110 |
| Figura 4.22 - Malha de elementos finitos da estrutura – viga engastada - livre; Fluido – reservatório semi-infinito e interfaces fluido-estrutura e superfície livre. | 111 |
| Figura 4.23 - Estudo de convergência para a viga engastada – livre (MEF). | 113 |
| Figura 4.24 - Frequências e modos de vibração desacoplados da estrutura (MEF). | 114 |
| Figura 4.25 - Esquema da cavidade do reservatório. | 114 |
| Figura 4.26 - Estudo de convergência para o reservatório semi-infinito. | 117 |
| Figura 4.27 - Modelo de interação pistão-reservatório. | 120 |
| Figura 4.28 - Modo de vibração de massa adicional do sistema pistão-reservatório semi-infinito: 25.75Hz (MEF). | 121 |
| Figura 4.29 - Malha de DF para a viga. | 122 |
| Figura 4.30 - Estudo de convergência da malha da viga engastada-livre (MDF). | 123 |
| Figura 4.31 - Cinco primeiros modos naturais flexionais da viga (MDF). | 123 |
| Figura 4.32 - Estudo de convergência dos três primeiros modos do reservatório. | 124 |
| Figura 4.33 - Imagem de uma parte em concreto da barragem de Tucuruí/Pará/Brasil - ELETRONORTE. | 128 |
| Figura 4.34 - Perfil aproximado da barragem em estudo. | 129 |
| Figura 4.35 - Malha e modos naturais de vibração da barragem. | 130 |
| Figura 4.36 - Simulação transiente do caso da seção 4.1 (eig1). | 138 |
| Figura 4.37 - Simulação transiente do caso da seção 4.1 (eig1) (continuação). | 139 |
| Figura 4.38 - Simulação transiente do caso da seção 4.1 (eig1) (continuação). | 140 |
| Figura 4.39 - Simulação transiente do caso da seção 4.2 (eig2b). | 142 |
| Figura 4.40 - Simulação transiente do caso da seção 4.2 (eig2b) (continuação). | 143 |
| Figura 4.41 - Simulação transiente do caso da seção 4.2 (eig2a) (continuação). | 144 |
| Figura 4.42 - Simulação transiente do caso da seção 4.3 (eig3). | 145 |
| Figura 4.43 - Simulação transiente do caso da seção 4.3 (eig3) (continuação). | 146 |
| Figura 4.44 - Resposta transiente do sistema acoplado barragem-reservatório. | 147 |

| | |
|--|-----|
| Figura A.1 -Pontos discretos de uma função. | 161 |
| Figura B.1 - Forças atuando no elemento infinitesimal da viga. | 164 |
| Figura B.2 - Viga engastada-livre. | 168 |
| Figura B.3 - Primeiro modo de vibração de uma viga engastada-livre de uma viga de flexão (esquerda) e uma de cisalhamento (Blennis 1979, pp171). | 170 |
| Figura B.4 - Elemento infinitesimal da viga de cisalhamento sobre base elástica. | 170 |
| Figura B.5 - (a) Empenamento da seção devido o esforço cortante; (b) Mudança no ângulo devido á deformação cisalhante (Timoshenko e Gere 1994). | 174 |
| Figura B.6 - Relação entre as frequências de cisalhamento e flexão – bi-engastada. | 176 |
| Figura C.1 - Estratégias para a solução do problema de interação barragem-reservatório. | 179 |
| Figura C.2 - Problema analítico de Interação Barragem-Reservatório. | 180 |
| Figura C.3 - Pressão no paramento de montante para as soluções aproximada e séries de 1 a 6 termos. | 184 |
| Figura C.4 - Relação altura – frequência natural da barragem e parâmetro de compressibilidade do fluido. | 185 |
| Figura C.5 - Pressões hidrodinâmicas e massa adicional. | 186 |
| Figura D.1 - Tanque retangular 3D. | 189 |
| Figura D.2 - Gráfico da tangente hiperbólica e sua aproximação.. | 192 |
| Figura D.3 - Variação da pressão com a profundidade. Evolução da função $f_2(z)$ para $a=b=h=1m$ | 193 |
| Figura D.4 - Deformadas modais de superfície livre – evolução da função $f_1(x,y)$ | 194 |
| Figura E.1 - Sismicidade no Brasil (Obsis-UnB). | 196 |
| Figura E.2 - Esforços induzidos pelo reservatório (Obsis UnB). | 197 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------------|---|
| a_i, b_i e c_i | Constantes para o cálculo da matriz de rigidez do EF triangular. |
| A | Área da seção transversal. |
| $A^{(e)}$ | Área do Elemento Finito. |
| $[B_p]$ | Matriz de derivadas das funções de forma da pressão no fluido. |
| $[B_u]$ | Matriz de derivadas das funções de forma dos deslocamentos no fluido. |
| c | Velocidade do som (m/s). |
| $[D]$ | Matriz de relações constitutivas. |
| DF | Diferenças Finitas. |
| DIV | Vetor divergente. |
| E | Módulo de Elasticidade Longitudinal. |
| f | Frequência de vibração (Hz). |
| {F} | Vetor de forças concentradas. |
| $[FS]$ | Matriz de acoplamento fluido-estrutura. |
| g | Aceleração da gravidade. |
| GRAD | Vetor gradiente. |
| i | Número complexo. |
| k | Constante elástica da mola. |
| $[K_E], [K_f]$ | Matriz de rigidez da estrutura e do fluido, respectivamente. |
| L_i | Coordenada natural em Elementos Finitos. |
| L_{ij} | Comprimento do lado do EF triangular que contém os nós “i” e “j”. |
| $l^{(e)}$ | Comprimento do Elemento Finito. |
| L, L_x, L_y e L_z | Dimensões da cavidade acústica. |
| m_a | Massa adicional. |
| m, n e r | Índices característicos dos modos de vibração. |
| \bar{m} | Massa da estrutura por metro linear (kg/m). |
| $[M_E], [M_f]$ | Matriz de massa da estrutura e do fluido, respectivamente. |
| \bar{n} | Vetor normal. |
| $[M^*], [C^*]$ e $[K^*]$ | Matrizes gerais do sistema acoplado fluido-estrutura. |
| $[N_p]$ | Matriz com as funções de interpolação para a pressão fluido. |
| $[N_u]$ | Matriz com as funções de interpolação para os deslocamentos da |

| | |
|--|--|
| | estrutura. |
| p | Pressão. |
| \hat{p} | Função aproximada para as pressões no fluido. |
| \bar{p} | Pressões nodais no fluido. |
| p_0 | Amplitude de pressão. |
| q | Vazão mássica acústica ou simplesmente vazão acústica. |
| R | Função de dissipação. |
| $[R]$ | Matriz de radiação no infinito. |
| S | Contorno da estrutura onde atuam as forças de superfície. Área da seção transversal da cavidade acústica. |
| $[SL]$ | Matriz de superfície livre. |
| t | Tempo. Espessura. |
| T | Energia Cinética. |
| U | Deslocamento da estrutura. |
| $\bar{u}, \dot{\bar{u}}, \ddot{\bar{u}}$ | Deslocamento, velocidade e aceleração da estrutura, respectivamente. |
| \hat{u} | Função aproximada para os deslocamentos da estrutura. |
| \bar{u} | Deslocamentos nodais da estrutura. |
| V_E | Volume da Estrutura |
| \vec{V} | Vetor velocidade. |
| α | Parâmetro de rigidez. Parâmetro para cálculo da massa adicional. |
| β | “Bulk Módulo”. |
| δ | Graus de liberdade do problema fluido-estrutura (deslocamento e pressão) |
| ϵ | Deformação do sólido. Erro (Mét. De Galerkin). |
| ϕ | Força de corpo em um sólido. Variável nodal para um elemento finito. Potencial de velocidades. |
| ζ | Fator de amortecimento estrutural (adimensional, em geral dado em %). |

| | |
|---|---|
| η | Elevação da superfície livre. |
| $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 | Contornos da cavidade acústica. |
| Πp | Energia potencial. |
| ν | Viscosidade absoluta do fluido (Pa.s/m). |
| | Coefficiente de Poisson. |
| λ | Parâmetro de compressibilidade. |
| | Autovalor. |
| λ_{n_f} e λ_{n_N} | Parâmetro característico do modo de vibração da estrutura - vibração de flexão e axial (normal), respectivamente. |
| μ | Constante de amortecimento estrutura. |
| | Viscosidade cinemática do fluido (ν/ρ). |
| | Parâmetro de massa do fenômeno fluido-elástico. |
| ρ_f | Densidade ou massa específica do fluido (kg/m^3). |
| ρ_E | Densidade ou massa específica da estrutura (kg/m^3). |
| σ | Tensão. |
| ω | Frequência circular (radianos/segundo). |
| \mathfrak{S} | Lagrangeano |
| Ω_f e Ω_s | Domínio fluido e sólido. |

LISTA DE ABREVIACÕES

| | |
|-------|--|
| EF | Elementos Finitos. |
| EPD | Estado Plano de Deformaoes. |
| EPT | Estado Plano de Tensão. |
| GDFE | Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura – PECC/ENC/UnB |
| IBR | Interaao Barragem-Reservatório. |
| IFE | Interaao Fluido-Estrutura. |
| MEF | Método dos Elementos Finitos. |
| MDF | Método das Diferenças Finitas. |
| MMT | Método da Matriz de Transferência. |
| SSUGL | Sistema simples de 1 grau de liberdade. |

1- INTRODUÇÃO

1.1 - UMA CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS ACOPLADOS

A interação entre meios contínuos diferentes aparece em vários problemas práticos de Engenharia. A solução do problema se dá de forma simultânea, não sendo possível a solução de apenas um meio individualmente. Dependendo do tipo de problema e dos valores das constantes físicas envolvidas, o acoplamento pode ser forte ou fraco, de acordo com o grau de interação.

Zienkiewicz (1989) apresenta duas classes de problemas acoplados:

- Classe I: Envolve os casos no qual o acoplamento entre os diferentes domínios ocorre em uma interface via imposição das condições de contorno. Os meios sofrem diferentes processos de discretização, mas na interface há um acoplamento entre eles, que são fisicamente semelhantes. Nessa classe de problemas estão a Interação Fluido-Estrutura e Estrutura-Estrutura.
- Classe II: Estes problemas se caracterizam pela superposição dos domínios (parcial ou total). O acoplamento se dá nas equações diferenciais que governam diferentes fenômenos físicos. Nesta classe estão a análise térmica de tensões, a estabilidade de solos e a percolação em meios porosos e a extrusão metálica no qual um fluxo plástico é acoplado a um campo térmico.

A figura 1.1 ilustra alguns exemplos das duas classes de problemas voltados para a Engenharia de Barragens.

1.2 - ASPECTOS DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA (IFE) E APLICAÇÕES

A Interação Acústica Fluido-Estrutura, ou Fluido-Elasticidade, envolve o estudo de vibrações de estruturas em presença de um fluido em geral denso, em escoamento ou não. A consideração adequada da presença do fluido se torna importante a medida que o comportamento estrutural é significativamente alterado pela presença do mesmo.

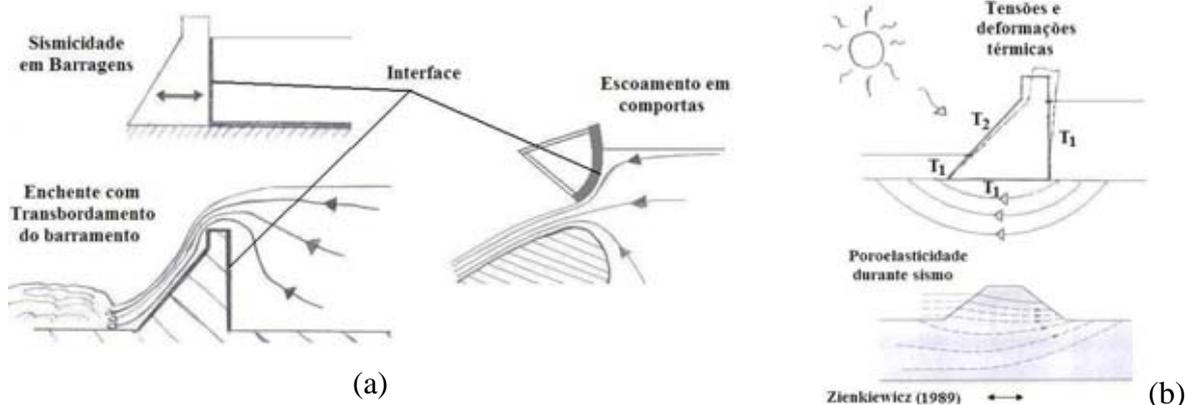


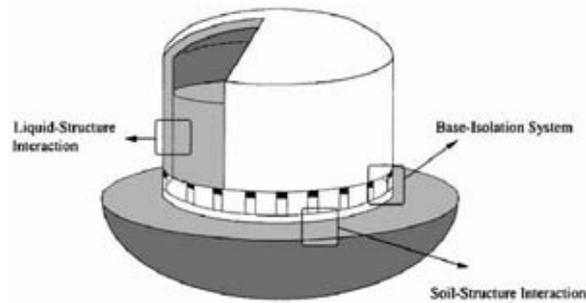
Figura 1.1 - Problemas Acoplados, (a) Classe I: interação entre dois meios contínuos distintos, (b) Classe II: superposição de dois domínios.

Soluções aproximadas baseiam-se em artifícios para eliminar um dos meios em questão. Tem-se, por exemplo, o conceito de massa adicional, no qual o fluido é substituído por massas que são incrustadas na estrutura, representando assim apenas o efeito inercial que o fluido causa na estrutura. Em outros modelos a estrutura é uma condição de contorno para a cavidade, como uma “impedância acústica”.

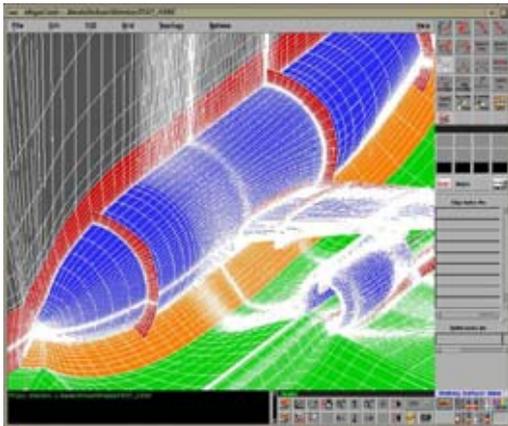
De uma forma geral, pode-se destacar duas abordagens bastante utilizadas e objetos de estudo da IFE: a interação entre uma estrutura deformável e um escoamento do fluido; e a interação dinâmica entre uma estrutura e o meio acústico (fluido). No primeiro caso, um fluxo constante ou oscilante, o desprendimento de vórtice excita estaticamente e dinamicamente a estrutura. A modelagem da equação de movimento do fluido (Navier-Stokes) e a interação deste com o movimento da estrutura são fundamentais no entendimento do fenômeno. Do ponto de vista de análise estrutural, procura-se avaliar as forças de arraste (“drag”) e sustentação (“lift”) resultantes na estrutura.

No segundo caso, o fluido é apenas um meio vibrante (não há escoamento médio), ou seja, as suas partículas se movimentam em torno das posições estáticas – meio acústico. A estrutura também é vibrante e interage com o fluido de modo a formar um sistema de dois meios contínuos acoplados na interface, segundo uma equação que relaciona as variáveis da estrutura com as variáveis do fluido (em geral, deslocamentos e pressões). Essa é uma abordagem simplificada perante a primeira, mas suficiente para muitas aplicações práticas. Esta segunda abordagem é o ponto de partida das formulações desenvolvidas no presente trabalho.

A figura 1.2 mostra alguns problemas de IFE em diversas áreas da Engenharia.



(a)



(c)



(d)

Figura 1.2 - Problemas de Interação Fluido-Estrutura, (a) IFE em tanques líquidos (Kyung 2004), (b) programa de análise numérica de escoamento em estruturas aeronáuticas (internet), (c) ensaio em modelo reduzido de uma plataforma offshore de produção do petróleo (fonte: www.modelbasin.com.br).

1.2.1 - Efeitos de Superfície Livre em problemas Fluido-Estrutura

Ao caminhar com um recipiente contendo líquido, o movimento de uma pessoa deve ser cuidadoso para que não haja derramamento do líquido. Essa experiência mostra que, mesmo para deslocamentos muito pequenos do recipiente, a superfície do líquido pode se mover aumentando significativamente a amplitude das ondas da superfície, culminando no transbordamento do líquido. No entanto, pode-se ajustar cuidadosamente a frequência do movimento para que o líquido não derrame.

Esta simples experiência ilustra o fenômeno de vibração da superfície livre, que está relacionado com a formação de ondas no contorno aberto do líquido. Este fenômeno

também aparece em vários casos práticos de Engenharia, que envolvem a estabilidade das estruturas de reservatórios líquidos. O fluido interno, ao ser excitado pelas paredes do reservatório pode produzir esforços significativos e alterar drasticamente a resposta de estruturas de sustentação do reservatório.

Um evento sísmico pode causar efeitos não negligenciáveis de superfície livre em reservatórios de barragens, eclusas e canais de navegação, estruturas portuárias, reservatórios elevados d'água e petróleo, os quais estão sujeitos a receberem esforços ocasionados pelas ondas de superfície. A figura 1.3 ilustra algumas dessas aplicações.

Nas estruturas aeronáuticas e aeroespaciais, a excitação da superfície livre do líquido nos tanques de combustível pode provocar uma amplificação na amplitude de vibração de veículos espaciais. Essa interação é fortemente influenciada pelo nível do líquido no tanque, que é variável com o tempo. A figura 1.3c ilustra o exemplo.

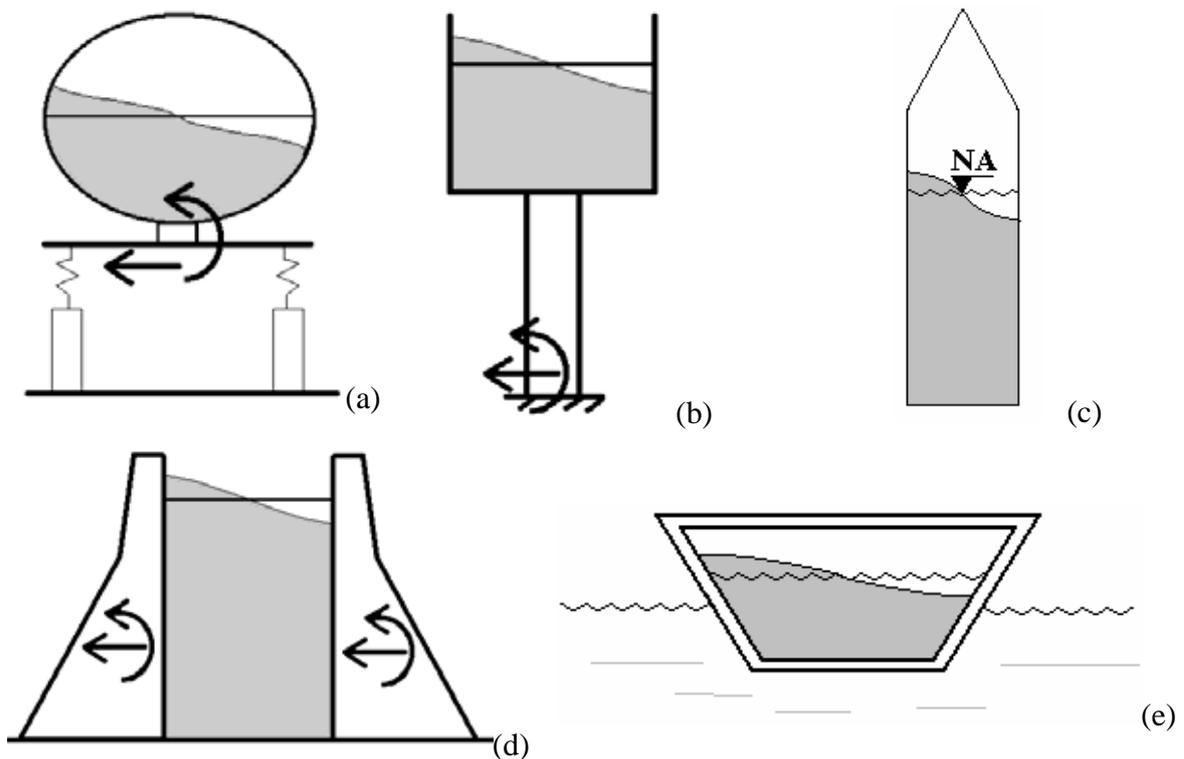


Figura 1.3 – Exemplos do efeito de vibração superfície livre na engenharia, (a) modelo de um tanque de caminhão de combustível; (b) reservatório elevado; (c) tanques de foguetes; (d) eclusa ou canal de navegação, (e) navio petroleiro.

Na história recente, houve uma catástrofe na província de Beluno, Itália (1963), no qual o deslizamento de uma encosta produziu uma onda no reservatório que fez com que a água passasse sobre a crista da barragem, inundando uma vila a jusante e provocando a perda de milhares de vidas.

1.2.2 - Por que estudar Interação Fluido Estrutura (IFE) em Barragens e Hidrotécnica

A Hidroelasticidade está fortemente presente na Engenharia de Barragens e Hidrotécnica, dentre as aplicações nesse campo destacam-se a interação barragem-reservatório durante um sismo, o comportamento dinâmico dos sistemas de adução (golpe de Aríete), válvulas, comportas, turbinas, perfis de vertedores dentre outras.

- Interação dinâmica barragem-reservatório (IBR). Durante a ação de um sismo, é de fundamental importância a consideração da interação dinâmica entre a estrutura e o fluido do reservatório. De uma maneira simplificada, o reservatório pode induzir esforços devido as pressões hidrodinâmicas no paramento da barragem, que produzem uma nova configuração de tensões e estabilidade na mesma. Além disso, o movimento da superfície livre induz um diagrama de pressões adicional na barragem e pode provocar o transbordamento da água do reservatório (overtopping), levando ao surgimento de novas forças dinâmicas sobre a barragem e suas estruturas auxiliares. A análise completa do problema envolve o estudo da resposta dinâmica acoplada, com os dois meios (estrutura e fluido) interagindo entre si. Vide figura 1.4a.

- Interação eclusa-canal de navegação. Vale o mesmo dito para a IBR, a única diferença está nas condições de contorno do reservatório, que agora está confinado por muros de concreto, formando uma cavidade acústica retangular com superfície livre, figura 1.4b.

- Transientes hidráulicos. Os transientes de pressão e velocidade podem ser gerados em tubulações d'água por meio de interrupção brusca do fluxo, devido a quebra de componentes estruturais ou mecânicos e por mudanças de geometria do duto (ação de válvulas). Esses transientes podem provocar a ruptura de elementos estruturais (tubulações) e de controle (válvulas, comportas e grades), danificação de turbinas, cavitação na tubulação etc. Vide figuras 1.4c e 1.4d.

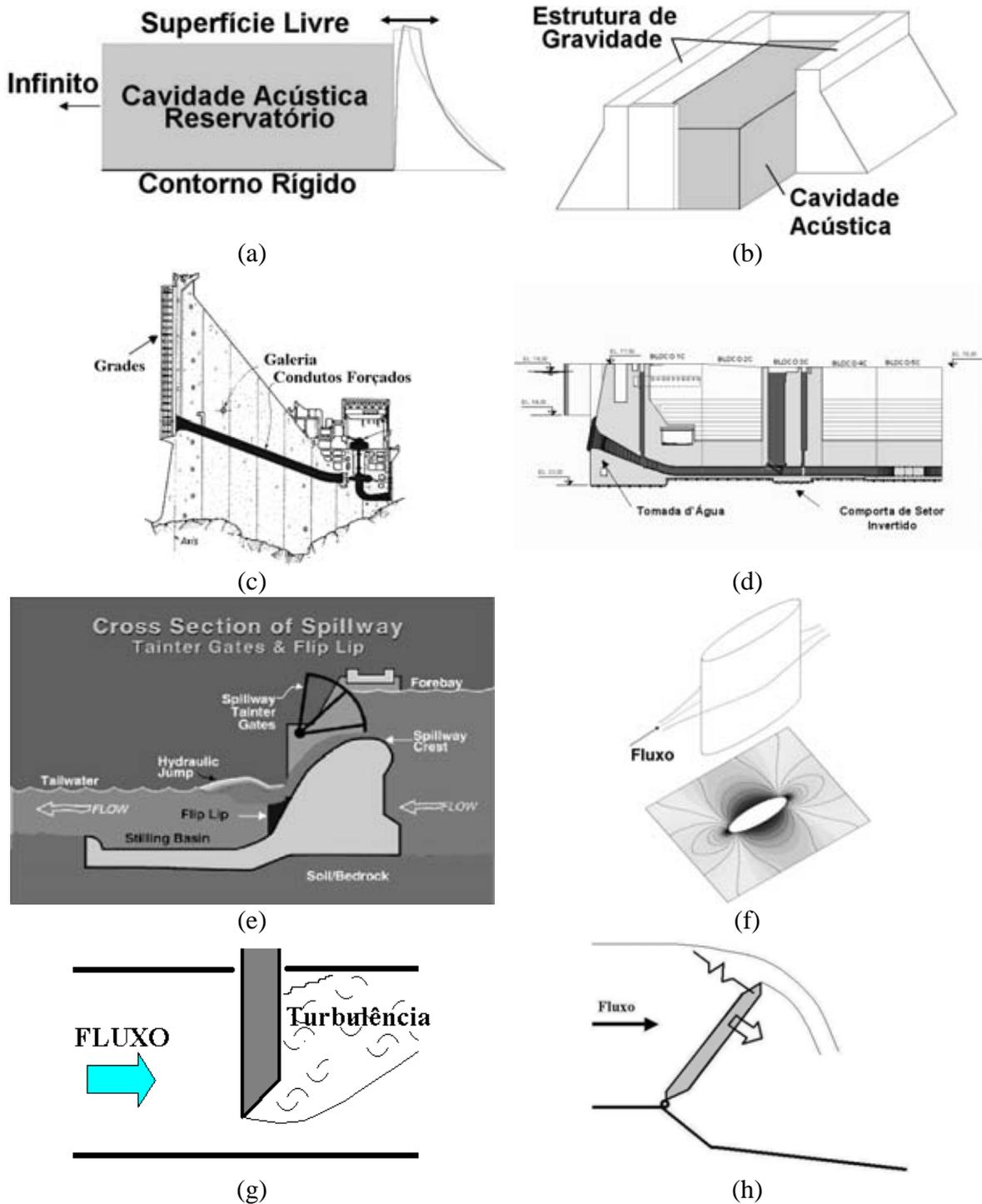


Figura 1.4 - Problemas de Interação Fluido-Estrutura em Engenharia de Barragem, (a) Interação Barragem-Reservatório durante um sismo; (b) Caverna de uma eclusa de navegação; (c) Adutora de Barragem (Encicl. Encarta 1996); (d) Sistema de Adução de Enchimento e Esvaziamento da Eclusa de Tucuruí (SENC 2001) (e) escoamento em estruturas de um vertedor (Encicl. Encarta 1996); (f) escoamento em torno de um pilar de vertedor ou de tomada d'água; (g) escoamento em torno de uma estrutura de controle (comporta); (h) escoamento sobre uma comporta flexível.

- Vibrações induzidas por escoamento. O escoamento da água por uma estrutura pode induzir vibrações que muitas vezes culminam na ruptura da estrutura por fadiga ou fissuração. Esse fenômeno ocorre em comportas, pilares e grades da tomada d'água. Além do arraste, o escoamento a altas velocidades leva ao desprendimento periódico de vórtices que produz uma força (dinâmica) lateral na estrutura, perpendicular ao fluxo. Vide figuras 1.4e a 1.4h.

1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O foco dos estudos desse trabalho são os problemas que envolvem o acoplamento entre uma estrutura vibrante e um fluido acústico, com consideração de efeitos de superfície livre. A seguir é apresentada uma revisão bibliográfica voltada para esse grupo específico de casos.

1.3.1 - Revisão geral sobre Interação Fluido-Estrutura

Soluções analíticas associadas a resultados experimentais inspiraram vários trabalhos clássicos, como os textos de Lamb (1945), Westergaard (1931), Keulegan & Carpenter (1958), Abramson (1967), Belvins (1979 e 1990), Gibert (1988) e tantos outros. Cabe destacar aqui o conceito de Massa Adicional e Matriz de Transferência que permitem análise rápida e simplificada de muitos problemas de IFE. Porém, suas limitações no tratamento adequado de problemas com geometrias complexas, não lineares, e a dificuldade em se abordar problemas de vibrações com compressibilidade do fluido e vibrações de estruturas em 2D ou 3D suscitou o desenvolvimento de formulações numéricas sofisticadas.

Existem duas formas clássicas de abordar o problema fluido-estrutura: as formulações Lagrangeanas e as Eulerianas. A primeira descreve o sólido e o fluido com variáveis de deslocamento, sendo que o fluido é modelado como um sólido elástico sem resistência ao cisalhamento. Esse elemento ficou conhecido na literatura por “Mock Element” ou elemento falso, Cook et. al. (1989).

A formulação vetorial ou Lagrangeana possui as seguintes vantagens: é de fácil implementação, pois os códigos feitos para estruturas são facilmente adaptados; as matrizes são simétricas; e a interface fluido-estrutura não necessita de considerações especiais já que o acoplamento é natural pela igualdade de deslocamentos dos meios na interface. No entanto, esta formulação possui um número elevado de graus de liberdade e conduz a um grande número de modos naturais espúrios de circulação.

Vários pesquisadores dispensaram esforços em desenvolver e aperfeiçoar formulações Lagrangeanas, dentre os quais, pode-se citar Zienkiewicz e Bettess (1978), Handi e Ousset (1978), Bathe e Han (1978), Wang e Bathe (1997), Bermúdez e Rodrigues (1994, 1997) dentre outros. Uma das formas apresentadas na literatura (Cook et. al., 1989) de minimizar os modos de circulação é fazer do módulo de cisalhamento um número muito pequeno ou introduzir um termo (parâmetro) de penalidade que multiplica a matriz de rigidez do fluido, que é ajustável por tentativa e erro. No entanto, apesar dos esforços, a formulação Lagrangeana obteve um estado secundário entre os pesquisadores.

As formulações Escalares ou Eulerianas utilizam variáveis escalares para descrever o fluido, tais como pressão, potencial de velocidades e potencial de deslocamentos. A grande vantagem dessas formulações é o menor número de graus de liberdade no fluido em comparação com as formulações Lagrangeanas.

Historicamente, os primeiros autores que descreveram o fluido com variáveis escalares foram Zienkiewicz e Newton (1969) – Formulação U-p. O fluido acústico era descrito por pressão, com uma formulação derivada a partir da discretização da equação da onda através do Método de Galerkin. A estrutura era descrita por variáveis de deslocamento e havia uma matriz de acoplamento que permitia a resolução acoplada do sistema.

No entanto, as formulações Eulerianas conduzem a matrizes não simétricas, o que dificulta o uso de solucionadores tradicionais de autovalores e autovetores. Everstine (1980) propôs uma mudança de variáveis para simetrizar o problema, que consistia em trocar a pressão pelo potencial de velocidades ($p = -\rho \cdot \dot{\phi}$). Entretanto, essa astúcia impedia a resolução de problemas estáticos. Zienkiewicz e Newton (1969) também foram um dos primeiros a

propor uma simetrização do problema acústico fluido-estrutura, por meio de algebrismo no sistema de equações.

Na literatura (Pedroso (1986), Barbosa (1998) e Morais (2000)) estão descritos vários trabalhos que tentaram simetrizar as matrizes do problema IFE, dentre os quais cabe ressaltar a formulação potencial simétrica ($U-\phi-Po$) (Bathe, 1985) que serviu de base para os estudos de Barbosa e Pedroso (1997), Barbosa (1998) e Casas e Pavanello (1996).

1.3.2 - Efeitos de Superfície Livre em Fluidos Acústicos

O fenômeno de vibração superfície livre interessa à engenheiros de várias áreas de atuação. Dentre as inúmeras pesquisas nesse assunto, podem-se destacar os trabalhos de Westergaard (1931), Lamb (1945) e Abramson (1963). Seus textos discutiam as equações básicas que fundamentavam o fenômeno e soluções analíticas para as frequências, deformadas modais e pressões hidrodinâmicas em tanques de geometria variada e com paredes aceleradas.

Muitos cientistas e engenheiros tentaram formular e simular o movimento do fluido em lagos e baías. O objetivo na maioria das vezes era prever e avaliar a formação de ondas de gravidade. Dentre os estudiosos cabe destacar Goldesborough (1930), Lamb (1950) e Vanoni (1951).

Uma outra forte corrente de pesquisadores se interessou em estudar o efeito hidrodinâmico de um líquido sobre estruturas durante um sismo. Alguns destes são Westergaard (1931), Jacobsen (1949), Werner et ali. (1949), Housner (1957) e Clough (1960).

Além dessas aplicações, houverem também pesquisas na área de Engenharia Naval, Aeronáutica e Militar que estudaram a influencia do fenômeno de movimento da superfície livre na estabilidade de navios tanque, aviões e foguetes. Dentre estes pesquisadores cabe destacar Abramson (1966), Blagoveschchensky (1962) e Stewartson (1959), dentre outros inúmeros pesquisadores.

Uma solução exata para o problema geral de oscilações de fluidos em reservatórios móveis é extremamente difícil, assim, ao lado daqueles que continuavam desenvolvendo soluções

analíticas, outros pesquisadores investiram nos métodos numéricos para resolver o problema. Um dos primeiros a propor um modelo em elementos finitos capaz de incorporar o movimento da superfície livre em reservatórios líquidos foram Zienkiewicz e Newton (1969). Eles estudavam o problema de interação fluido-estrutura e propuseram uma formulação que era capaz de considerar o fenômeno, apesar de não ter utilizado nas simulações desse trabalho.

Apesar do número recente de trabalhos sobre o assunto, o Grupo de Dinâmica e Fluido Estrutura da UnB tem se pautado suas pesquisas em trabalhos clássicos, caso do presente trabalho que baseia-se em Zienkiewicz e Newton (1969). Entretanto, Morais (2000) estudou uma formulação “U- Π -P- η ” em elementos finitos, que previa uma variável (η) para a elevação do nível da superfície livre.

Dentre as várias possibilidades de tratamento do fenômeno de vibração da superfície livre, esse trabalho se desenvolve em duas direções: uma formulação analítica desenvolvida em termos da função potencial de velocidades, onde as pressões são obtidas por derivação temporal deste potencial (Anexo D); e duas formulações numéricas, que partirão da descrição do fluido em termos da variável pressão (equação da onda), com uma discretização do domínio em elementos finitos e diferenças finitas. Sendo que nas formulações numéricas, esse efeito é incorporado à modelagem do fluido acústico, e a importância dessa condição de contorno é discutida nos estudos de caso do capítulo 4.

1.3.3 - Outras abordagens à IFE

A diferença entre as formulações mencionadas é fundamentalmente a forma de discretização nodal do problema. A formulação Euleriana é representada por coordenadas espaciais, enquanto a Lagrangeana por coordenadas materiais. A abordagem Euleriana-Lagrangeana (ALE) procura utilizar uma definição de malha, que seja independente da descrição pelas coordenadas ou pela descrição material, de forma que existam velocidades distintas para o meio e para os nós da malha. A formulação ALE possui vantagem no tratamento de problemas não lineares de grandes deformações (Barbosa 1998).

Recentemente, outras formulações foram apresentadas na literatura para modelagem de problemas acoplados fluido-estrutura. Wang e Bathe (1997) apresentaram uma formulação

mista, no qual o fluido é descrito por variáveis de pressão e deslocamento. Morais (2000) apresenta uma formulação mista baseada nos trabalhos de Abbound (1990), Gibert (1988), Ohayon e Morand (1995), que descreve o fluido por variáveis de pressão, potencial de deslocamentos e pela elevação da superfície livre.

Guam e Moorde (1997) propuseram novas técnicas numéricas para a modelagem da interação reservatório – barragem – fundação. A barragem de terra é discretizada por elementos finitos, a fundação estratificada é representada por uma impedância acústica, o fluido é incompressível e viscoso. O fluido é discretizado por elementos de contorno que também considera a condição de absorção no fundo do reservatório. É analisado um caso prático da barragem La Villita submetida ao sismo El-Centro (1940). A análise transiente é feita com um procedimento no domínio da frequência.

Xing et. all. (1997) fizeram um estudo analítico da interação entre uma viga reta flexível e um reservatório. As expressões são deduzidas para pressão nula na superfície livre e condição linear de ondas de gravidade, para o efeito de radiação no infinito o autor faz a simplificação de pressão nula no infinito. O método analítico é baseado no método de separação de variáveis. Os resultados permitem a constatação do efeito de massa adicional no modo fundamental acoplado.

O fenômeno não linear de cavitação pode ocorrer durante um sismo em uma barragem, pois o movimento do paramento de montante da barragem descola o fluido na região de interface, podendo gerar o desprendimento de micro-bolhas. Oskouei & Dumanoglu (2001) fizeram estudos na barragem Pine Flat (Califórnia) submetida ao sismo El-Centro (1940). Os autores usaram uma formulação numérica baseada em deslocamentos para os dois domínios e obtiveram uma resposta transiente do sistema.

A análise dinâmica acoplada de superfície livre de um líquido com estruturas flexíveis é de fundamental importância em compartimentos de fluidos combustíveis em aviões, caminhões tanque, navios e etc. Bauer & Eidel (2004) se propuseram a estudar analiticamente a interação do movimento de uma viga esbelta flexível com a superfície livre de um reservatório retangular líquido durante movimentos harmônicos translacionais e rotacionais da parede rígida do reservatório. O fluido era inviscito e irrotacional e

descrito por um potencial de velocidades Φ e a viga pela equação de movimento flexural de vigas esbeltas.

Kuçukarslan (2005) procura estabelecer o valor do comprimento mínimo de truncamento da malha de elementos finitos do reservatório de forma a representar adequadamente o modo de massa adicional com condição de contorno de Sommerfeld.

Uma análise vibratória de baixas frequências no acoplamento de tanques flexíveis parcialmente cheios de líquido incompressível é feita por Schotté & Ohayon (2005). O modelo de elementos finitos simétrico é baseado no deslocamento da estrutura, elevação da superfície livre e duas outras variáveis auxiliares ($U-n-\pi-\lambda$, respectivamente). O exemplo numérico estudado é um reservatório retangular líquido particionado ao meio por uma placa flexível. Os resultados numéricos são comparados a um experimento mostrando bom desempenho do método numérico e atestando a incompressibilidade do fluido nos modos de baixa frequência da superfície livre.

1.4 - CARACTERIZAÇÃO OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho se caracteriza por um estudo teórico-analítico-numérico do acoplamento acústico-mecânico, representando a retomada, com implementações, da formulação U-P de Zienkiewicz e Newton (1969). Essa formulação Euleriana tem uma grande importância histórica, além do fato de ser simples, ter sido amplamente testada e ter apresentado bons resultados. O investimento nessa formulação também se justifica por ser análoga a formulação usada em programas comerciais de elementos finitos.

Por outro lado, será proposta uma formulação em Diferenças Finitas com as mesmas potencialidades da formulação em elementos finitos. O objetivo é propor uma formulação alternativa de mais fácil entendimento e que seja aplicável a uma grande variedade de problemas. Nos exemplos estudados, os resultados e desempenho das formulações numéricas serão comparados.

São os objetivos principais deste trabalho:

- Estudar vibrações livres e forçadas de sistemas acústicos-mecânicos com diversas condições de contorno para o fluido – parede rígida, superfície livre e radiação no infinito (Sammerfeld). O fluido é descrito com um meio acústico, ou seja, as partículas sofrem pequenas vibrações em torno da posição de equilíbrio, não havendo escoamento médio, ou seja, apenas a onda acústica se propaga.
- Desenvolver ferramentas computacionais para fluido-estrutura baseado em formulações numéricas em elementos finitos e diferenças finitas.
- Apresentar exemplos de base, que visam a compreensão do fenômeno fluido-estrutura e a discussão a cerca dos principais parâmetros governantes do problema. Esses exemplos são tratados com soluções analíticas, dadas pelo Método da Matriz de Transferência (MMT) e numéricas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método das Diferenças Finitas (MDF). São construídos modelos simplificados para os casos em questão, baseados na incompressibilidade do fluido (conceito de massa adicional).
- Efetuar estudos de vibrações livres em casos de maior complexidade – vibrações livres de uma barragem típica de concreto mostrando-se os modos de vibração e são calculadas as massas adicionais, que auxiliam na montagem dos modelos simplificados.
- Simular casos onde são calculados os valores próprios para se determinar os modos e frequências naturais de vibração. Nas análises transientes, são montados modelos simplificados que reproduzem a resposta transiente acoplada do sistema IFE.

Com efeito, este trabalho tem também por objetivo a continuidade de um Projeto Final em Engenharia Civil do autor dessa dissertação (Sousa Jr 2003). Ele complementa os estudos da referida monografia e apresenta problemas de maior complexidade com resposta transiente, além de também introduzir simulações baseadas nas Diferenças Finitas tanto para o fluido acústico como para a estrutura (viga flexional e de cisalhamento).

1.5 - ABRANGÊNCIAS E LIMITAÇÕES

Os dois meios contínuos em estudo, o sólido e o fluido, têm seu comportamento delimitado por hipóteses simplificadoras. Não são abordados efeitos não-lineares.

O sólido é governado pela teoria linear elástica e regime de pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio.

Trabalha-se com sistemas de 1 grau de liberdade (SSUGL), vigas e sólidos planos (2D).

O fluido é invíscido, irrotacional e seus deslocamentos são em torno da posição de equilíbrio. A condição de superfície livre é modelada com a teoria de ondas superficiais de pequena amplitude (linearização). Não há escoamento nem dispersão de energia no meio fluido.

Os amortecimentos presentes no sistema advêm da estrutura e fronteira distante no fluido.

Os exemplos estudados possuem fronteiras retas (horizontais ou verticais), ou seja, os vetores normais aos contornos possuem valores “1” e “0”.

Os elementos finitos usados são simples – EF 1D de 2 nós e EF triangular de 3 nós. Suas funções de interpolação são lineares.

1.6 - ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação é composta de 5 capítulos e 5 anexos.

O primeiro capítulo contém uma introdução sobre os problemas acoplados e Interação Fluido-Estrutura. É mostrada uma breve classificação dos fenômenos acoplados, com ênfase em algumas aplicações práticas de fluido-estrutura nos diversos campos da Engenharia, com ênfase a Engenharia de Barragens e Hidrotécnica. É apresentada uma sucinta revisão da literatura, destacando alguns trabalhos clássicos, e situando a formulação implementada entre outras congêneres.

O segundo capítulo é dedicado ao desenvolvimento das principais equações governantes do fenômeno fluido-estrutura, e a dedução das formulações numéricas. São apresentados dois métodos de solução do problema fluido-estrutura: a formulação em Elementos Finitos

U-P de Zienkiewicz & Newton (1969) e uma outra proposta em Diferenças Finitas. Por fim, são desenvolvidas as matrizes de elementos finitos 2D lineares do fluido, do sólido e lineares 1D para as condições de contorno (fluido-estrutura, superfície livre e radiação no infinito).

No terceiro capítulo são apresentados aspectos computacionais do trabalho. São relatados a funcionalidade, arquitetura dos códigos desenvolvidos, algoritmo das principais subrotinas e algumas informações sobre os solucionadores de autovalores. É detalhada a montagem das matrizes do sistema acoplado, para as duas formulações numéricas (MEF e MDF), para dois casos simples. Também é feita uma descrição do método de integração no tempo utilizado na análise transiente.

No quarto capítulo contém os estudos de caso (resultados numéricos) realizados. São abordados casos de cavidades acústicas com contornos rígido, fechado, superfície livre, aberto e móvel/flexível (estrutura elástica). São analisados os casos de uma cavidade acústica curta com superfície livre e fundo flexível, uma viga engastada/livre acoplada com um reservatório semi-infinito e uma barragem de grande porte acoplada com um reservatório. Os exemplos são avaliados segundo metodologias analíticas (Método da Matriz de Transferência e Massa Adicional) e numéricas (MEF e MDF).

No quinto capítulo são feitos comentários gerais sobre os estudos realizados, buscando-se organizar as principais conclusões a cerca dos problemas tratados, e apresenta-se as perspectivas para futura continuidade do trabalho.

O Anexo A é um formulário com as aproximações de diferenças finitas para derivadas e considerações sobre erro envolvido no método.

O Anexo B mostra as equações de movimento de vigas segundo alguns modelos de comportamento (flexão pura e cisalhamento). Estas equações são utilizadas na discretização da estrutura com MDF no capítulo 2.

O Anexo C apresenta a dedução da solução analítica da interação entre um reservatório incompressível e uma barragem rígida acelerada. Esta é a clássica solução de Westergaard e serve de referência para os estudos dos modos fundamentais de vibração acoplados

(massa adicional) dos casos 2 e 3 do capítulo 4 (viga engastada/livre acoplada com um reservatório semi-infinito e uma barragem acoplada com um reservatório semi-infinito).

O Anexo D contém a dedução das expressões analíticas para os as frequências e deformadas dos modos naturais de vibração de superfície livre de tanques retangulares.

O Anexo E introduz o problema da sismicidade brasileira e suas reflexões no problema de Interação Barragem-Reservatório.

2- DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Este capítulo apresenta a formulação teórica que fundamenta os estudos e simulações desse trabalho. Trata-se inicialmente, de forma bastante sucinta, as equações que regem a interação acústica fluido-estrutura. As equações governantes do sólido elástico-linear produzem um funcional e uma função de dissipação, que levados na equação de Lagrange, originam a equação de movimento. As equações governantes do fluido são apresentadas (continuidade, quantidade de movimento e estado), para que se possa delas obter a equação da onda, que governa o fenômeno de vibrações acústicas em um fluido invíscido e irrotacional.

A partir das equações de movimento do sólido e do fluido (onda), são aplicados dois métodos numéricos de solução. Um deles é baseado no Método das Diferenças Finitas (MDF) e outro no Método dos Elementos Finitos (MEF). Esses modelos são baseados na formulação denominada U-P, apresentada por Zienkiewicz e Newton (1969), que originalmente discretizou os domínios sólido e fluido por elementos finitos. São desenvolvidas as matrizes para elementos finitos 1D de dois nós e 2D de três nós. O modelo com discretização pelo MDF utiliza iguais equações e condições de contorno.

2.1 - VIBRAÇÃO DE SÓLIDOS ELÁSTICOS

Hipóteses simplificadoras:

- Oscilações de pequena amplitude em torno da posição de equilíbrio;
- Relação tensão-deformação linear;
- Material isotrópico e homogêneo.

Equações linearizadas:

Seja o domínio do problema, as condições de contorno e as equações envolvidas.

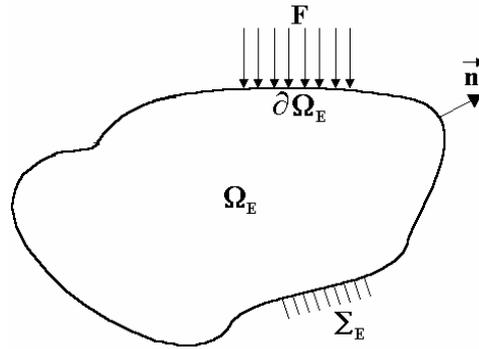


Figura 2.1 – Sólido elástico e condições de contorno.

Onde Ω_E : domínio da estrutura, $\partial\Omega_E$: contorno com condição de força, Σ_E : contorno com condição de deslocamento,

Relação deformação (ϵ) – deslocamento (u):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad \{\epsilon\} = [B]\{u\} \quad (2.1a)$$

Relação tensão (σ) – deformação (ϵ):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (2.1b)$$

Tem-se ainda a equação diferencial de equilíbrio no corpo (Ω_E):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} - \rho_E \ddot{u}_x + b_x &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} - \rho_E \ddot{u}_y + b_y &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho_E \ddot{u}_z + b_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1c}$$

Onde ρ_E é a massa específica do material constituinte da estrutura (kg/m^3), b_x , b_y e b_z são os componentes da força de corpo $\{b\}$.

Condição de contorno de força no contorno ($\partial\Omega_E$):

$$\begin{aligned}
 l_x \cdot \sigma_{xx} + l_y \cdot \sigma_{xy} + l_z \cdot \sigma_{xz} &= F_x \\
 l_x \cdot \sigma_{xy} + l_y \cdot \sigma_{yy} + l_z \cdot \sigma_{yz} &= F_y \\
 l_x \cdot \sigma_{xz} + l_y \cdot \sigma_{yz} + l_z \cdot \sigma_{zz} &= F_z
 \end{aligned} \tag{2.1d}$$

Onde F_x , F_y e F_z são as componentes do vetor de força de superfície $\{F\}$, l_x , l_y e l_z são os co-senos diretores da direção normal ao contorno.

Condição de contorno de deslocamento nulo no contorno (Σ_E).

Condições iniciais de deslocamento e velocidade, $u_i(0)$ e $\dot{u}_i(0)$ respectivamente, em todo domínio.

A Energia Cinética do corpo sólido é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \rho_E \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega_E \tag{2.2}$$

Energia Potencial: Energia de deformação – trab. das forças de sup. - trab. das forças de corpo.

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \{\varepsilon\}^T \{\bar{\sigma}\} d\Omega_E - \iint_{\partial\Omega_E} \{u\}^T \{F\} d\partial\Omega_E - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \{u\}^T \{b\} d\Omega_E \quad (2.3)$$

Lagrangeano:

$$\mathfrak{S} = T - \Pi_p \quad (2.4)$$

Função de dissipação (amortecimento):

$$R = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \mu \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega_E \quad (2.5)$$

Onde μ é uma constante de amortecimento.

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{U}} \right\} - \left\{ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial U} \right\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial \dot{U}} \right\} = \{0\} \quad (2.6)$$

Onde U é o deslocamento.

Substituindo as 2.3, 2.4 e 2.5 em 2.6, chega-se a equação de movimento de um sólido na forma integral.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{U}} \left[\frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \rho_E \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega_E \right] \right\} - \\ & - \left\{ \frac{\partial}{\partial U} \left[\frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \{\varepsilon\}^T \{\bar{\sigma}\} d\Omega_E - \iint_{\partial\Omega_E} \{u\}^T \{F\} d\partial\Omega_E - \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \{u\}^T \{b\} d\Omega_E \right] \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{U}} \left[\frac{1}{2} \iiint_{\Omega_E} \mu \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega_E \right] \right\} = \{0\} \quad (2.7) \end{aligned}$$

2.2 - VIBRAÇÃO DE FLUIDOS ACÚSTICOS

As deduções apresentadas abaixo são uma síntese do exposto em Pedroso (2004).

O fluido estudado neste trabalho obedece às seguintes hipóteses simplificadoras: homogêneo, invíscido; monofásico; isentrópico; pequenos deslocamentos; pressões mínimas sempre superiores a pressão de vapor d'água (não há cavitação).

O problema de mecânica dos fluidos em questão tem 3 incógnitas a serem determinadas: densidade, pressão e velocidade. Sob certas condições de contorno, para se calcular as variáveis do movimento de um fluido, é necessário resolver três equações fundamentais, são elas:

$$\text{Equação da Continuidade} \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{DIV}(\rho_f \vec{V}) = 0 \quad (2.8a)$$

Equação da Quantidade de Movimento (Navier-Stokes)

$$\rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho_f \vec{V} \text{GRAD}(\vec{V}) + \text{GRAD}(p) - \mu \left[\Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \text{GRAD}(\text{DIV}(\vec{V})) \right] = 0 \quad (2.8b)$$

$$\text{Equação de Estado (linearizada)} \quad f(p, \rho_f) = \text{cte} \Leftrightarrow p = \rho_f c^2 \quad (2.8c)$$

Onde p é a pressão; ρ_f é a densidade do fluido; \vec{V} é a velocidade de escoamento do fluido;

$$\text{DIV}(\vec{V}) = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \quad \text{GRAD}(p) = \nabla p = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) p; \quad c \text{ é a}$$

velocidade do som no fluido; μ é o coeficiente de atrito viscoso.

Supondo que a densidade varia harmonicamente no tempo, e que a vibração seja unidimensional (direção 'x'), então a equação 2.8a fica:

$$i\omega \frac{p}{c^2} + \rho_f \text{DIV}(\vec{V}) = 0 \quad (2.9)$$

Multiplicando ambos os lados pela área (S) transversal ao fluxo do fluido, e introduzindo o conceito de vazão ($q = \rho_f \cdot S \cdot V$), obtém-se:

$$\frac{i\omega S}{c^2} p + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

Fazendo μ igual a zero e linearizando a equação da quantidade de movimento (2.8b) chega-se a:

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{GRAD}(p) &= 0 \\ q &= \frac{iS}{\omega} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substituindo 2.11 em 2.10, chega-se a equação da onda no domínio da frequência, em uma dimensão:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0 \quad (2.12)$$

A equação 2.12 pode ser escrita no domínio do tempo.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0 \quad (2.13)$$

Generalizando 2.13 para as outras dimensões, tem-se:

$$\nabla^2 p + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\Delta + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) p = 0 \quad (2.14)$$

Na equação 2.14, Δ é o mesmo que ∇^2 , e corresponde a um operador de rigidez, enquanto que $1/c^2$ é um operador de massa. Essa idéia é semelhante ao conceito de rigidez e massa em estruturas:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0 \quad (2.15)$$

Nas equações 2.13 a 2.14 são aplicáveis dois tipos de condições de contorno: sobre a pressão e sobre o gradiente da pressão.

Pressão prescrita (Dirichlet): $p = p_0$

Gradientes prescritos (Neumann): $\nabla p = p'_0$

A seguir, serão apresentadas algumas expressões que fornecem condições de contorno como um valor prescrito de pressão ou seu gradiente.

2.2.1 - Condição de Contorno de Interface Fluido-Estrutura (condição FE)

A condição de contorno mais importante nesse trabalho é a de interface com sólido móvel-flexível. Como o fluido é descrito por variáveis de pressão e o sólido por seus deslocamentos, deve haver um acoplamento das duas variáveis na região de interface dos meios.

Considerar-se-á um exemplo de uma cavidade unidimensional (em x) acoplada a uma estrutura rígida-móvel (modelo do pistão). O movimento da estrutura “ u ” se dá ao longo do eixo “ x ”, e a pressão ao longo de uma seção transversal é constante. A figura 2.2 ilustra a situação.

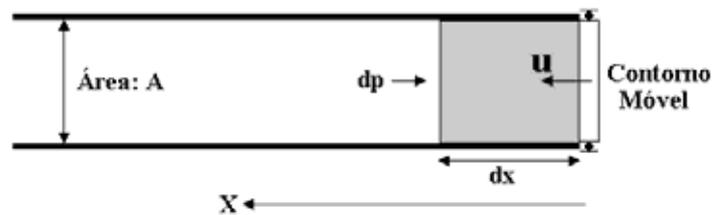


Figura 2.2 - Interação contorno móvel com cavidade 1D.

O elemento infinitesimal de fluido localizado próximo ao contorno móvel pode ser equilibrado ao longo da direção “ x ”, resultando em:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma \\ dpA &= -\rho_f A \ddot{u}_x dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

Onde \ddot{u}_x é a aceleração da parede móvel na direção normal ao contorno móvel.

A equação 2.16 pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_f \ddot{u}_x \quad (2.17)$$

Generalizando a equação 2.17, obtém-se a equação diferencial da “condição fluido-estrutura”.

$$\frac{dp}{d\bar{n}} = \nabla_n p = -\rho_f \ddot{u} \quad (2.18a)$$

2.2.2 - Condição de Contorno de Parede Rígida

Se a parede é rígida $\ddot{u} = 0$. Então a equação 2.18 se torna:

$$\frac{dp}{d\bar{n}} = \nabla_n p = 0 \quad (2.18b)$$

2.2.3 - Condição de Contorno de Superfície Livre

Quando uma cavidade acústica está aberta para a atmosfera, na região de contato são desenvolvidas ondas de superfície. A maneira mais simples de modelar essa condição de contorno é estabelecer pressão nula nessa região. No entanto, essa alternativa elimina a possibilidade de existência de ondas de superfície.

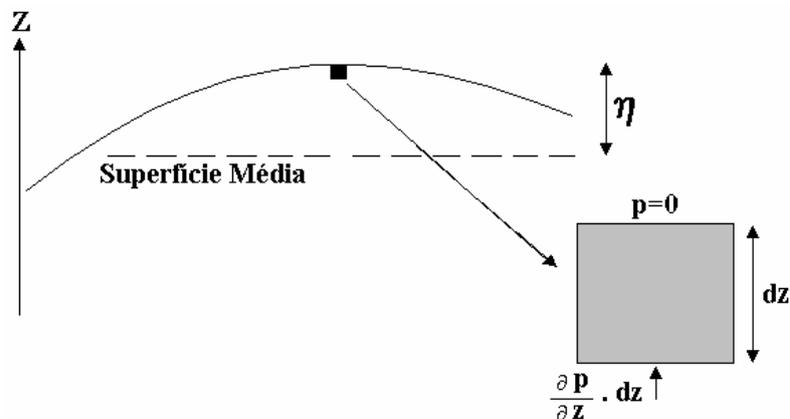


Figura 2.3 - Forças em um elemento na superfície livre da cavidade acústica.

Para considerar corretamente esse fenômeno, será desenvolvida a equação linearizada para ondas de pequenas amplitudes. Na superfície média (figura 2.3) do fluido, a pressão hidrostática é dada pela expressão:

$$p = \rho_f g \eta \quad (2.19)$$

Onde “g” é a aceleração da gravidade e η é a elevação do nível da água.

A velocidade e aceleração de uma partícula sobre a superfície livre podem ser dadas pelas variações temporais da elevação η .

$$\text{Velocidade:} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.20)$$

$$\text{Aceleração:} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

Assim, pode-se fazer o equilíbrio dinâmico somando as forças verticais atuantes em um elemento infinitesimal localizado sob a superfície livre.

$$\begin{aligned} \Sigma F_z &= ma \\ \frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy &= -\rho_f dx dy dz \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho_f \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Derivando a equação 2.19 em relação ao tempo e introduzindo o resultado em 2.22 chega-se a:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_f \frac{\ddot{\eta}}{\rho_f g} \quad (2.23)$$

Como a direção “z” é normal a superfície livre, então pode-se generalizar esta equação para se obter a “condição de superfície livre”.

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = \nabla_n p = -\frac{1}{g} \ddot{p} \quad (2.24)$$

A condição de superfície livre é também conhecida como condição de ondas de gravidade. Isso se deve ao fato da força restauradora do movimento da onda ser dada pelo campo gravitacional da terra (g).

2.2.4 - Condição de Contorno de Radiação no Infinito ou Sommerfeld

Para compreender o efeito de radiação no infinito é conveniente se valer novamente do caso unidimensional. Considere que a pressão em um ponto do fluido é função de duas ondas, a primeira que é gerada em um contorno móvel, por exemplo, e a outra que provém da reflexão das ondas em um outro contorno. A pressão resultante será a interação dessas duas ondas. No entanto, em muitas situações, a cavidade acústica é infinita, não sendo desejável que a onda retorne. Sendo assim, é necessário usar uma condição especial nesse contorno para simular esse fenômeno.

Matematicamente, esta condição pode ser demonstrada de forma didática por Clough 1960 ou Pedroso 2004. Assim, a pressão num ponto “x” é dada por:

$$p = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (2.25)$$

Onde F e G são funções desconhecidas que representam a onda incidente que regressa do contorno longínquo, respectivamente. Para que ocorra a radiação é necessário que G seja nula, ou seja, $p = F(x - ct)$.

Fazendo G=0 e derivando-se a equação 2.25 em relação a “x” e ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x} = F' \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial t} = -cF' \quad (2.27)$$

Das equações 2.26 e 2.27 obtém-se,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.28)$$

A direção “x” é normal ao contorno, então generalizando a equação 2.28 é obtida a equação diferencial da “*condição de radiação no infinito*”.

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = \nabla_n p = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.29)$$

Esta expressão é um resultado clássico da teoria de ondas ou acústica e tem uma analogia com um amortecimento estrutural.

2.3 - MODELO NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A solução de uma equação diferencial em um domínio implica no conhecimento dos valores da(s) variável(eis) estudada(as) em todo o meio contínuo. Computacionalmente, isso só é possível se for conhecida a solução analítica da equação diferencial (Fortuna 2000).

O MDF consiste em resolver a equação diferencial em pontos discretos do domínio. Esse conjunto de pontos denomina-se de malha, e no presente trabalho, estes pontos são igualmente espaçados, ou seja, malha é regular. Mas é possível aplicar o método a uma ‘nuvem’ de pontos com espaçamento aleatório entre nós, segundo a teoria de Operadores Discretos discutida em Pulino 2004.

Para a transformação das equações diferenciais em formas discretizadas e posteriormente em um sistema de equações algébricas em função dos valores da variável em cada nó, é preciso aproximar as derivadas. Essa transformação é possível mediante aplicação da “Expansão em Série de Taylor”. O Anexo A contém o desenvolvimento das expressões do MDF que substituem as derivadas.

2.3.1 - Contorno Flexível tipo Viga Flexional Esbelta para uma Cavidade Acústica

O anexo B “(Dinâmica de Vigas)” apresenta o desenvolvimento da equação diferencial de movimento flexional de uma viga esbelta, que é reescrita abaixo.

$$\phi^{iv}(x) = \omega^2 \frac{\bar{m}}{EI} \phi(x) \quad (2.30)$$

Onde \bar{m} é a massa por unidade de comprimento, EI é a rigidez flexional, ω é frequência circular, $\phi(x)$ é a deformada do eixo central da viga.

Aplicando-se o MDF na equação 2.30 chega-se a um sistema de equações algébricas que pode ser agrupado em uma única equação matricial. A derivada ordinária de quarta ordem, a esquerda da equação 2.30, gera uma matriz [A], e o primeiro termo da direita da equação gera uma matriz diagonal [B].

O sistema de equações na forma matricial fica:

$$\frac{1}{\Delta x^4} [A]\{\phi\} = \omega^2 \frac{\bar{m}}{EI} [B]\{\phi\} \quad (2.31)$$

Onde Δx é o passo da malha e

$$\begin{aligned} [A] = [\phi^{iv}] &= [\phi_{i-2} - 4\phi_{i-1} + 6\phi_i - 4\phi_{i+1} + \phi_{i+2}] \\ [B] = [\phi] &= [\phi_i] \end{aligned} \quad (2.32)$$

A equação matricial final (2.31) é a clássica equação de movimento de um sistema com múltiplos graus de liberdade ($\{[K] - \omega^2[M]\}X = 0$), no domínio da frequência.

2.3.2 - Contorno Flexível tipo Viga de Cisalhamento para uma Cavidade Acústica

A equação de movimento para a viga de cisalhamento também está apresentada no Anexo B. A referida equação está reescrita abaixo:

$$\phi''(x) = \omega^2 \frac{\bar{m}}{kAG} \phi(x) \quad (2.33)$$

Onde \bar{m} é a massa por unidade de comprimento, kAG a rigidez ao cisalhamento, ω é frequência circular, $\phi(x)$ é a deformada do eixo central da viga.

Aplicando-se o operador de diferenças finitas no termo $\phi''(x)$ da equação 2.33, obtém-se a matriz $[C]$. O termo $\phi(x)$ gera uma matriz diagonal $[D]$, semelhante ao caso de vigas flexionais.

Assim, chega-se ao seguinte sistema de equações, na forma matricial:

$$\frac{1}{\Delta x^2} [C] \{\phi\} = \omega^2 \frac{\bar{m}}{kAG} [B] \quad (2.34)$$

Onde Δx é o passo da malha e

$$\begin{aligned} [C] = [\phi''] &= [\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}] \\ [B] = [\phi] &= [\phi_i] \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3.3 - Condições de Contorno para Estruturas Laminadas tipo Viga

A utilização do MDF no contorno requer nós artificiais fora da viga, devido a tipologia das células que substituem as derivadas nesses pontos. Por isso, o MDF também deve discretizar às equações diferenciais dos contornos. Abaixo são mostradas as equações correspondentes a algumas condições de contorno comuns em vigas.

| | | |
|---|--------------|--|
| <p><i>Engaste</i></p>  | $\phi_i = 0$ | $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = 0$ $\frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) = 0$ <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 5px;">$\phi_{i+1} = \phi_{i-1}$</div> |
|---|--------------|--|

(2.36)

| | | | |
|--------------|---|--------------|---|
| <i>Apoio</i> |  | $\phi_i = 0$ | $M = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i = 0$ $\frac{1}{\Delta x^2} \cdot (\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}) = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> $\phi_{i-1} = -\phi_{i+1}$ </div> |
|--------------|---|--------------|---|

| | | | |
|--------------|---|--|--|
| <i>Livre</i> |  | $M = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i = 0$ $\frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}) = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> $\phi_{i-1} = 2\phi_i - \phi_{i+1}$ </div> | $V = \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i = 0$ $\frac{1}{2 \cdot \Delta x^3} (-\phi_{i-2} + 2\phi_{i-1} - 2\phi_{i+1} + \phi_{i+2}) = 0$ $-\phi_{i-2} + 4\phi_{i-2} - 2\phi_{i-1} - 2\phi_{i+1} + \phi_{i+2} = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> $\phi_{i-2} = 4\phi_i - 4\phi_{i+1} + \phi_{i+2} = 0$ </div> |
|--------------|---|--|--|

(2.38)

Figura 2.4 - Condições de contorno usuais para vigas em DF.

Os pontos virtuais podem então ser substituídos por pontos reais da malha, segundo as equações 2.36 a 2.38, correspondentes às condições de contorno da figura 2.4.

2.3.4 - Fluido Acústico Limitado por Diferentes Fronteiras

O esquema da figura 2.5 ilustra uma malha de DF com pontos regularmente espaçados, num domínio bidimensional. Na mesma figura, são mostradas as células equivalentes ao operador laplaciano (∇^2) da equação da onda.

A equação da onda discretizada por DF tem a seguinte forma de recorrência,

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$$

$$\frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_{i,j} = 0 \quad (2.39)$$

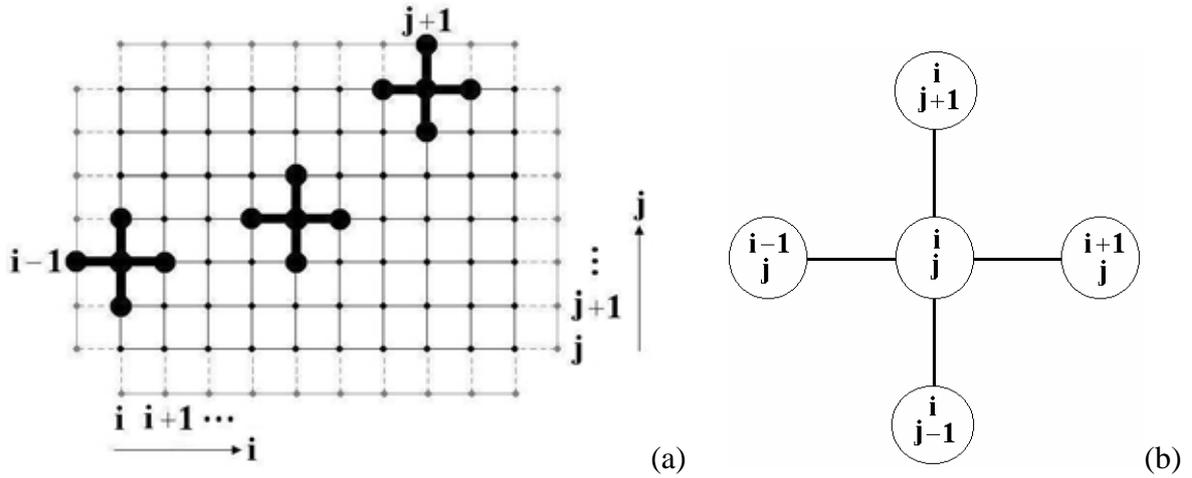


Figura 2.5 – Discretização do fluido pelo MDF, (a) Malha de diferenças finitas, (b) célula para a discretização do operador ∇^2 .

A regra de recorrência (2.39) deve ser aplicada em todos os pontos i,j da malha (figura 2.5a). Um problema surge quando nos pontos sobre um contorno (parede rígida ou móvel, aberta, superfície livre, radiação). A célula (figura 2.5b) acaba envolvendo um ponto fora da malha real do fluido – na figura 2.5a estes pontos “virtuais” estão nas bordas com cor mais clara.

Para contornar este problema, basta discretizar as equações diferenciais do contorno e escrever o ponto virtual em função dos pontos reais dentro da malha, assim como fora feito no item 2.3.1 (figura 2.4 e equações 2.36 a 2.38).

Equação do contorno rígido:
$$\nabla_n p|_j = \frac{\partial p}{\partial n}|_j = \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2\delta} = 0 \Rightarrow p_{k-1} = p_{k+1} \quad (2.40)$$

Equação da superfície livre linearizada (ondas de gravidade):
$$\nabla_n p|_j = \frac{\partial p}{\partial n}|_j = \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2\delta} = -\frac{1}{g} \ddot{p}_k \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow p_{k-1} = -\frac{2\delta}{g} \ddot{p}_k + p_{k+1}$$

ou simplesmente sem ondas de superfície: $p_k = 0$

Equação do contorno infinito:
$$\nabla_n p|_i = \frac{\partial p}{\partial n}|_i = \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2\delta} = -\frac{1}{c} \dot{p} \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow p_{k-1} = -\frac{2\delta}{c} \dot{p}_k + p_{k+1}$$

Equação do acoplamento fluido-estrutura:

$$\nabla_n p|_i = \frac{\partial p}{\partial n}|_i = \frac{p_{k-1} - p_{k+1}}{2 \cdot \delta} = -\rho_f \cdot \ddot{u}_k \quad (2.43)$$

$$\Rightarrow p_{k-1} = -2 \delta \rho_f \ddot{u}_k + p_{k+1}$$

Onde “k” é o índice sobre os nós do contorno; “p_{k-1}” é a pressão em um nó virtual (fora da malha); “u” é o deslocamento normal a fronteira móvel; e “δ” é o passo da malha na direção perpendicular ao contorno.

Aplicando a equação (2.39) em todos os pontos i,j e eliminando os pontos fora da malha com as equações (2.40) a (2.43), chega-se a um sistema de equações semelhante ao obtido pelo MEF. Ou seja, monta-se uma matriz de rigidez do fluido com os termos que vem acompanhando “p_{i,j}”, uma matriz de massa com os termos em $\ddot{p}_{i,j}$, uma matriz de superfície livre com os termos em $-\frac{2\delta}{g} \ddot{p}_{i,j}$, uma matriz de radiação com termos em $\dot{p}_{i,j}$ e uma matriz de acoplamento com termos em \ddot{u} . De forma que o resultado fica,

$$[K_f]\{\bar{p}\} + ([M_f] + [SL])\{\ddot{\bar{p}}\} + [C]\{\dot{\bar{p}}\} + [FS_2]\{\ddot{u}\} = 0 \quad (2.44)$$

2.4 - MODELO NUMÉRICO BASEADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.4.1 - Sólido Elástico

A equação (2.5) pode ser discretizada por elementos finitos. Para isso é necessário aproximar os deslocamentos da seguinte forma:

$$\bar{u} \approx \hat{u} = [N_u]\{\bar{u}\} \quad \dot{\bar{u}} \approx \dot{\hat{u}} = [N_u]\{\dot{\bar{u}}\} \quad \ddot{\bar{u}} \approx \ddot{\hat{u}} = [N_u]\{\ddot{\bar{u}}\} \quad \varepsilon = [B_u]\{\bar{u}\} \quad (2.45)$$

Onde \hat{u} é o campo aproximado de deslocamentos, $[N_u]$ as funções de forma do elemento finito, $\{\bar{u}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais, $[B_u]$ é a matriz de derivadas das funções de forma que relaciona as deformações (ε) com os deslocamentos (u).

Aplicando as equações aproximadas acima (2.45) na equação de Lagrange (2.5), obtém-se a equação de movimento já discretizada:

$$[M_E] \{\ddot{\bar{u}}\} + [C_E] \{\dot{\bar{u}}\} + [K_E] \{\bar{u}\} = \{P_S\} \quad (2.46)$$

Onde:

$$\text{Matriz de massa do elemento: } [M_E]^{(e)} = \iiint_{VE} \rho_E [N_u] [N_u] dV_E \quad (2.47a)$$

$$\text{Matriz de rigidez de um elemento: } [K_E]^{(e)} = \iiint_{VE} [B_u] [D] [B_u] dV_E \quad (2.47b)$$

$$\text{Matriz de amortecimento de um elemento: } [C_E]^{(e)} = \iiint_{VE} \mu [N_u] [N_u] dV_E \quad (2.47c)$$

$$\text{Vetor de forças de superfície: } \{P_S\}^{(e)} = \iint_{S1} [N_u] \{F\} dS^1 \quad (2.47d)$$

$$\text{Vetor de forças de corpo: } \{P_b\}^{(e)} = \iiint_{VE} [N_u] \{b\} dV_E \quad (2.47e)$$

2.4.2 - Fluido Acústico

Hipóteses simplificadoras:

- Oscilações de pequena amplitude em torno da posição de equilíbrio;
- Fluido homogêneo, invíscido e irrotacional;
- As pressões mínimas no sistema são sempre superiores à pressão de vapor d'água (não há cavitação).

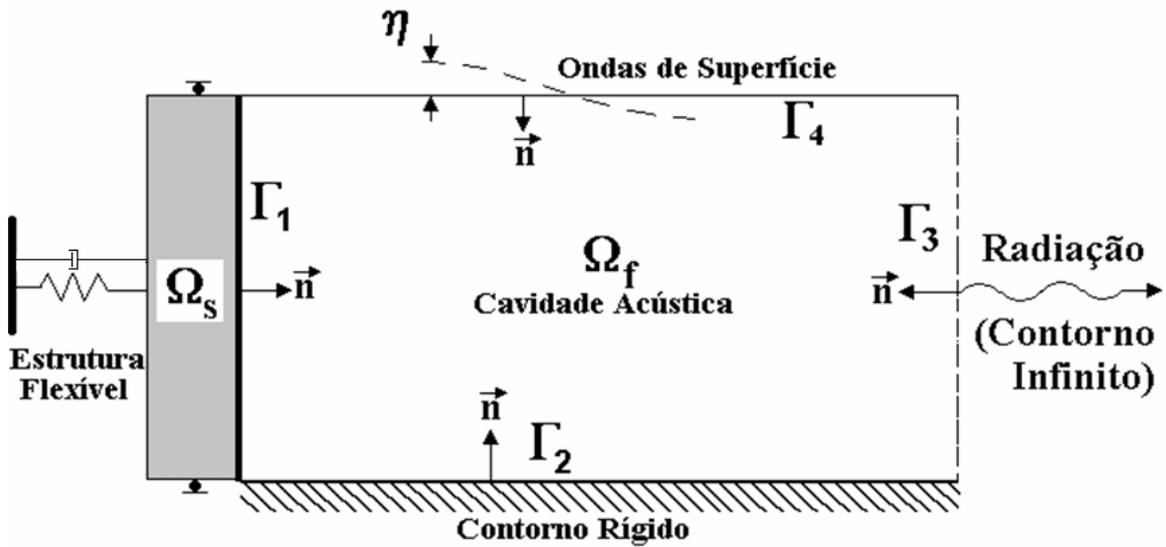


Figura 2.6 – Cavity acústica e condições de contorno.

- | | |
|------------------------------|---|
| Ω_f : domínio fluido; | Γ_1 : interface com o sólido; |
| Ω_s : domínio sólido. | Γ_2 : interface com contorno rígido; |
| | Γ_3 : superfície livre com ondas de gravidade; |
| | Γ_4 : radiação no infinito. |

Reescrevendo as equações governantes do fluido:

| | | |
|---|---|----------------------------|
| Equação da Onda (2.14): | $\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$ | No corpo (Ω_f) |
| Equação do contorno móvel (2.18): | $\nabla_n p = -\rho \{\ddot{u}\}$ | No contorno (Γ_1) |
| Equação do contorno rígido: | $\nabla_n p = 0$ | No contorno (Γ_2) |
| Equação da superfície livre linearizada (ondas de gravidade) (2.24): | $\nabla_n p = -\frac{1}{g} \ddot{p}$ ou $p = 0$ | No contorno (Γ_4) |
| Equação do contorno infinito (radiação) (2.29): | $\nabla_n p = -\frac{1}{c} \dot{p}$ | No contorno (Γ_3) |

Aproximando as pressões no fluido “p” por \hat{p} , surge um erro ε na equação da onda (2.14).

$$\varepsilon = \nabla^2 \hat{p} - \frac{1}{c^2} \ddot{\hat{p}} \neq 0 \quad (2.48)$$

Pelo Método de Galerkin, integrando o produto do erro ε com a função aproximada \hat{p} em todo o domínio fluido, o resultado é zero. Esta é a chamada condição de ortogonalidade.

$$\int_{\Omega_f} \varepsilon \hat{p} d\Omega_f = 0 \quad (2.49)$$

Substituindo o erro (equação 2.48) na equação 2.49 chega-se a:

$$\int_{\Omega_f} \left(\nabla^2 \hat{p} - \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{\hat{p}} \right) \hat{p} d\Omega_f = 0 \quad (2.50)$$

$$\int_{\Omega_f} \nabla^2 \hat{p} \hat{p} d\Omega_f - \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \ddot{\hat{p}} \hat{p} d\Omega_f = 0 \quad (2.51)$$

A primeira integral da equação 2.51 pode ser resolvida aplicando uma integração por partes em duas dimensões, dada pelo teorema de Green-Gauss. O resultado fica:

$$\int_{\Omega_f} \nabla^2 \hat{p} \hat{p} d\Omega_f = \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\nabla \hat{p}) \hat{p} d\Omega_f = - \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} d\Omega_f + \int_{\Gamma} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma \quad (2.52)$$

Onde \vec{n} é um vetor normal ao contorno Γ .

A última integral da equação 2.52 é avaliada no contorno da cavidade acústica. Essa integral pode ser separada de acordo com os tipos de contorno (figura 2.6), ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\nabla \hat{p}) \hat{p} d\Omega_f = & - \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} d\Omega_f + \int_{\Gamma_1} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_3} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} \nabla \hat{p} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_4 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo as equações 2.18, 2.24 e 2.29 nas suas respectivas integrais de contorno (equação 2.53), chega-se a:

$$\int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\nabla \hat{p}) \hat{p} d\Omega_f = - \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} d\Omega_f - \int_{\Gamma_1} \rho_f \{\ddot{u}\} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_3} \frac{1}{g} \ddot{p} \hat{p} d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} \frac{1}{c} \dot{p} \hat{p} d\Gamma_4 \quad (2.54)$$

Substituindo a equação 2.54 na primeira integral da equação 2.51 obtém-se:

$$- \int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} d\Omega_f - \int_{\Gamma_1} \rho_f \{\ddot{u}\} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_3} \frac{1}{g} \ddot{p} \hat{p} d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} \frac{1}{c} \dot{p} \hat{p} d\Gamma_4 - \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \hat{p} d\Omega_f = 0 \quad (2.55)$$

As pressões no fluido “p” e os deslocamentos na estrutura “u” são aproximados pelas funções \hat{p} e \hat{u} , respectivamente. Essas funções são escritas em termos das pressões e deslocamentos nodais ($\{\bar{p}\}$ e $\{\bar{u}\}$), por meio de matrizes de interpolação ou matrizes de funções de forma [Nu] e [Np] adequadas.

$$u \approx \hat{u} = [Nu] \{\bar{u}\} \quad (2.56)$$

$$p \approx \hat{p} = [Np] \{\bar{p}\} \quad (2.57)$$

Além disso, as derivadas das pressões podem ser aproximadas da seguinte maneira:

$$\nabla p \approx \nabla \hat{p} = \nabla [Np] \{\bar{p}\} = \{L\} [Np] \{\bar{p}\} = [Bp] \{\bar{p}\} \quad (2.58)$$

Onde $\{L\}$ é o vetor de derivadas: $\{L\} = \{\partial / \partial X \quad \partial / \partial Y\}^T$.

Aplicando as equações 2.56, 2.57 e 2.58 na equação 2.55, transforma-se as integrais desta última equação nas seguintes matrizes,

$$\int_{\Omega_f} \nabla \hat{p} \cdot \nabla \hat{p} d\Omega_f = \{\bar{p}\}^T \int_{\Omega_f} [Bp]^T [Bp] d\Omega_f \{\bar{p}\} = \{\bar{p}\}^T [K_f] \{\bar{p}\} \quad (2.59a)$$

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \hat{p} d\Omega_f = \{\bar{p}\}^T \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} [Np]^T [Np] d\Omega_f \cdot \{\ddot{\bar{p}}\} = \{\bar{p}\}^T [M_f] \{\ddot{\bar{p}}\} \quad (2.59b)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \rho_f \{\ddot{u}\} \cdot \{n\} \hat{p} d\Gamma_1 = \{\bar{p}\}^T \oint_{\Gamma_1} \rho_f [Nu]^T [\lambda][Np] d\Gamma_1 \{\ddot{u}\} = \{\bar{p}\}^T [FS]^T \{\ddot{u}\} \quad (2.59c)$$

$$\oint_{\Gamma_3} \frac{1}{g} \ddot{p} \hat{p} d\Gamma_3 = \{\bar{p}\}^T \oint_{\Gamma_3} \frac{1}{g} [Np]^T [Np] d\Gamma_3 \{\ddot{p}\} = \{\bar{p}\}^T [SL] \{\ddot{p}\} \quad (2.59d)$$

$$\oint_{\Gamma_4} \frac{1}{c} \dot{p} \hat{p} d\Gamma_4 = \{\bar{p}\}^T \oint_{\Gamma_4} \frac{1}{c} [Np]^T [Np] d\Gamma_4 \{\dot{p}\} = \{\bar{p}\}^T [R] \{\dot{p}\} \quad (2.59e)$$

Onde $[\lambda]$ é uma matriz de rotação que projeta os deslocamentos nodais na direção normal ao contorno.

Substituindo as equações 2.59a a 2.59e em 2.55 e eliminando-se $\{\bar{p}\}^T$, obtém-se a equação de movimento do fluido acústico, semelhante a equação de movimento da estrutura (equação 2.46).

$$[K_f] \{\bar{p}\} + [M_f] \{\ddot{p}\} + \rho [FS]^T \{\ddot{u}\} + [SL] \{\ddot{p}\} + [R] \{\dot{p}\} = 0 \quad (2.60)$$

Onde:

$$[K_f] = \int_{\Omega_f} [Bp]^T [Bp] d\Omega_f \quad \text{Matriz de rigidez do fluido.} \quad (2.61a)$$

$$[M_f] = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} [Np]^T [Np] d\Omega_f \quad \text{Matriz de massa do fluido.} \quad (2.61b)$$

$$[FS]^T = \oint_{\Gamma_1} [Nu]^T [\lambda][Np] d\Gamma_1 \quad \text{Matriz de acoplamento fluido estrutura (transposta).} \quad (2.61c)$$

$$[SL] = \oint_{\Gamma_3} \frac{1}{g} [Np]^T [Np] d\Gamma_3 \quad \text{Matriz de superfície livre – ondas de gravidade.} \quad (2.61d)$$

$$[R] = \oint_{\Gamma_4} \frac{1}{c} [Np]^T [Np] d\Gamma_4 \quad \text{Matriz de radiação no infinito.} \quad (2.61e)$$

As integrais fornecem as matrizes dos elementos finitos para o domínio fluido.

2.5 - MATRIZES ELEMENTARES

A seguir, serão mostradas as matrizes elementares para os domínios fluido e sólido. Essa demonstração é proveniente das equações 2.47 e 2.61. Inicialmente são obtidas as matrizes para um elemento unidimensional simples de 2 nós, no qual a pressão varia linearmente ao longo do seu eixo e é constante ao longo de uma seção transversal. E depois são deduzidas as matrizes de um elemento triangular plano.

2.5.1 - Elemento Finito 1D para o Fluido

Considera-se um elemento 1D de comprimento $l^{(e)}$ e com uma variável genérica por nó (ϕ). As funções de interpolação (forma) são dadas abaixo.

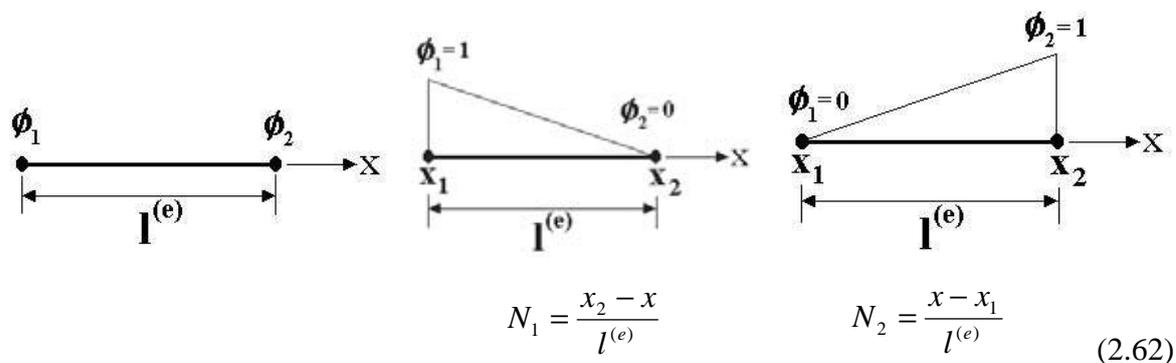


Figura 2.7 - Funções de forma para um elemento 1D de 2 nós.

A partir das funções de forma e pressões nodais, a variável ϕ é aproximada por $\hat{\phi}$. Para isso, basta introduzir a matriz de funções de forma e escrever $\hat{\phi}$ em função dos valores nodais $\{\bar{\phi}\}$.

$$\hat{\phi}(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \{\bar{\phi}\}$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{l^{(e)}} [x_2 - x \quad x - x_1] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

A matriz de derivadas das funções de forma [B] pode ser obtida diferenciando a equação 2.63 em relação a ordenada “x”.

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x}[N] = \frac{\partial}{\partial x}[N_1 \quad N_2]$$

$$[B] = -\frac{1}{l^{(e)}}[-1 \quad 1]$$
(2.64)

a) *Matriz de rigidez do fluido*

De acordo com a equação 2.61a, a matriz de rigidez do fluido é calculada utilizando-se a equação 2.64, ou seja,

$$[K_f]^{(e)} = \int_{\Omega_f} [B_f]^T [B_f] d\Omega_f = A^{(e)} \int_{x1}^{x2} \frac{1}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{l^{(e)}} [-1 \quad 1] dx$$

$$[K_f]^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{(l^{(e)})^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{x1}^{x2} dx$$

$$[K_f]^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.65)

b) *Matriz de massa do fluido*

Segundo a equação 2.61b, a matriz de massa do fluido é obtida utilizando-se as funções de forma (equação 2.62).

$$[M_f]^{(e)} = \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} [N_f]^T [N_f] d\Omega_f$$

$$[M_f]^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{c^2} \int_{x1}^{x2} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2] dx = \frac{A^{(e)}}{c^2} \int_{x1}^{x2} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} dx$$
(2.66)

A integração analítica da equação 2.66 é uma tarefa trabalhosa. É conveniente se fazer uma transformação de coordenadas, ou seja, é preciso substituir a coordenada “x” por uma coordenada natural, fazendo

$$N_1 = L_1 \text{ e } N_2 = L_2 \quad (2.67)$$

Substituindo a equação 2.67 em 2.66 obtém-se:

$$[M_f]^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{c^2} \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 \\ L_1 L_2 & L_2^2 \end{bmatrix} dx \quad (2.68)$$

A integração analítica (equação 2.68), em coordenadas naturais, é dada pela regra:

$$\int_{x_1}^{x_2} L_1^\alpha L_2^\beta dx = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} (x_2 - x_1) \quad (2.69)$$

Logo, em 2.68 as integrais ficam:

$$\int_{x_1}^{x_2} L_1^1 \cdot L_2^1 \cdot dx = \frac{1! 1!}{(1+1+1)!} \cdot l^{(e)} = \frac{1}{6} \cdot l^{(e)} \quad (2.70)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} L_1^2 \cdot L_2^0 \cdot dx = \frac{1! 0!}{(2+0+1)!} \cdot l^{(e)} = \frac{2}{6} \cdot l^{(e)}$$

Substituindo 2.70 em 2.68 chega-se a conclusão de que a matriz de massa é

$$[M_f]^{(e)} = \frac{A^{(e)} l^{(e)}}{6c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

2.5.2 - Elemento Finito 2D para o Fluido

Agora, serão calculadas as matrizes para um elemento 2D. O elemento é triangular de três nós e as funções de interpolação são lineares, como mostra a figura 2.8. O elemento possui uma incógnita por nó (ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3).

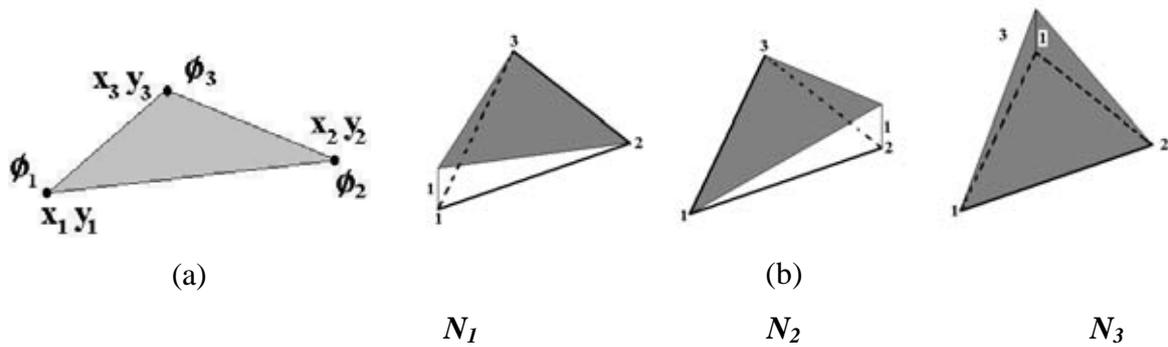


Figura 2.8 - Elemento finito triangular, (a) Coordenadas dos nós e variável nodal, (b) Formas de interpolação.

Um elemento triangular de três nós possui as seguintes funções de interpolação:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}} (a_1 + b_1x + c_1y) \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}} (a_2 + b_2x + c_2y) \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{2A^{(e)}} (a_3 + b_3x + c_3y)
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\
 b_1 &= y_2 - y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 \\
 c_1 &= x_3 - x_2 & c_2 &= x_1 - x_3 & c_3 &= x_2 - x_1
 \end{aligned}$$

Então, a função aproximada $\hat{\phi}$ fica,

$$\hat{\phi}(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \{\bar{\phi}\} \tag{2.73a}$$

$$\text{ou } \hat{\phi}(x) = \frac{1}{2A^{(e)}} [a_1 + b_1x + c_1y \quad a_2 + b_2x + c_2y \quad a_3 + b_3x + c_3y] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \tag{2.73b}$$

A matriz de derivadas das funções de forma do elemento é:

$$[B_f] = \{L\} [N_f] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[B_f] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

a) *Matriz de Rigidez do Fluido*

De acordo com a equação 2.61a, a matriz de rigidez do fluido pode ser obtida utilizando-se a equação 2.74, ou seja,

$$[K_f]^{(e)} = \int_{\Omega_f} [B_f]^T [B_f] d\Omega_f$$

$$[K_f]^{(e)} = \int_{A_f} \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} dA$$

$$[K_f]^{(e)} = \left(\frac{1}{2A^{(e)}} \right)^2 \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ \text{simétrico} & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \int_{A_f} dA$$

$$[K_f]^{(e)} = \frac{1}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ \text{simétrico} & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

b) *Matriz de Massa do Fluido*

De acordo com a equação 2.61b, a matriz de rigidez do fluido é calculada utilizando-se a matriz de funções de forma.

$$[M_f]^{(e)} = \int_{\Omega_f} \frac{1}{c^2} [N_f]^T [N_f] d\Omega_f \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned}
 [M_f]^{(e)} &= \frac{1}{c^2} \int_{A_f} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} dA_f = \\
 &= \frac{1}{c^2} \int_{A_f} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 \\ \text{sim.} & N_2^2 & N_2 N_3 \\ & & N_3^2 \end{bmatrix} dA_f
 \end{aligned}$$

Valendo-se do mesmo procedimento apresentado para o elemento finito 1D, para se obter uma integral das funções de forma é conveniente fazer uma mudança de coordenadas. Para um elemento finito triangular, as coordenadas naturais L_1 , L_2 e L_3 , de um ponto “P” qualquer no triângulo, são dadas através de uma espécie de “quinhão” de área, conforme mostra a figura 2.9.

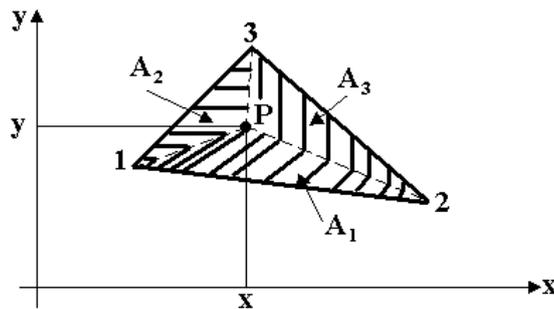


Figura 2.9 - Coordenadas retangulares e naturais em um elemento triangular.

Onde:

$$A_1, A_2 \text{ e } A_3 \quad A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.77)$$

As coordenadas naturais são definidas como:

$$N_1 = L_1 = \frac{A_1}{A} \quad N_2 = L_2 = \frac{A_2}{A} \quad N_3 = L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (2.78)$$

Levando as equações 2.78 em 2.76 o resultado é,

$$[M_f]^{(e)} = \frac{1}{c^2} \int_{A_f} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_2 \\ & L_2^2 & L_2 L_3 \\ sim. & & L_3^2 \end{bmatrix} dA_f \quad (2.79)$$

No caso do elemento 1D, a integração se dava sobre o eixo do elemento. Já no caso da equação 2.76, a integração acontece na área do elemento de profundidade unitária. Para integrar as coordenadas naturais (2.78) em termos de área, basta usar a seguinte expressão:

$$\int_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dx = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A^{(e)} \quad (2.80)$$

Portanto as integrais contidas em 2.79 ficam,

$$\int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1! \cdot 1! \cdot 0!}{(1+1+0+2)!} 2A^{(e)} = \frac{1}{12} A^{(e)} \quad (2.81)$$

$$\int_A L_1^2 dA = \int_A L_1^2 dx = \int_A L_1^2 dx = \frac{2! \cdot 0! \cdot 0!}{(2+0+0+2)!} 2A^{(e)} = \frac{1}{6} A^{(e)}$$

Aplicando 2.81 em 2.79, chega-se a matriz de massa do elemento.

$$[M_f]^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{12 \cdot c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ sim. & & 2 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

c) Matriz de Acoplamento Fluido-Estrutura

O elemento triangular pode estar em uma interface com um elemento finito do domínio sólido. A matriz de acoplamento fluido-estrutura é dada pela expressão (2.61c), onde Γ_1 é o contorno de interface com o sólido.

Supondo que um dos deslocamentos da estrutura (vertical ou horizontal) esteja projetado na direção normal à interface, então,

$$\begin{aligned}
[FS]^{(e)} &= \int_{\Gamma_1} [N_u]^T [\lambda] [N_p] d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_3} \begin{bmatrix} N_{u1} \\ N_{u2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{p1} & N_{p2} \end{bmatrix} d\Gamma_3 \\
[FS]^{(e)} &= \int_{\Gamma_3} \begin{bmatrix} N_{u1}N_{p1} & N_{u1}N_{p2} \\ sim & N_{u2}N_{p2} \end{bmatrix} d\Gamma_3
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Onde N_u e N_p são as funções de interpolação dos deslocamentos do sólido (u) e das pressões no fluido (p), respectivamente. É suposto que os elementos do sólido e do fluido utilizem as mesmas funções de interpolação, então $N_{u_i} = N_{p_i} = L_i$, onde L_i é a coordenada natural, e que dois dos deslocamentos nodais já esteja projetado na direção normal ao contorno.

A integração das coordenadas naturais ao longo da interface com a estrutura fica:

$$\begin{aligned}
\int_{L_{ij}} L_i^1 L_j^1 dL_{ij} &= \frac{1! \cdot 1!}{(1+1+1)!} L_{ij}^{(e)} = \frac{1}{6} L_{ij}^{(e)} \\
\int_{L_{ij}} L_i^2 dL_{ij} &= \int_{L_{ij}} L_j^2 dL_{ij} = \frac{2! \cdot 0!}{(2+0+1)!} L_{ij}^{(e)} = \frac{1}{3} L_{ij}^{(e)}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Para simplificar, impõe-se que a condição de interface com o sólido está presente em apenas um dos lados do elemento finito triangular. Esse lado contém 2 nós “i” e “j”, e seu comprimento é L_{ij} .

Substituindo-se 2.84 em 2.83 demonstra-se que a matriz de acoplamento fluido-estrutura é

$$[FS]^{(e)} = \frac{L_{ij}^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

A matriz 2.85 possui posições apenas nos graus de liberdade (nós) da interface com o sólido. Vale lembrar que, essa matriz é válida somente para interfaces horizontais ou verticais, no qual um dos graus de liberdade do sólido (horizontal ou vertical) já esteja projetado na direção normal a esse contorno. Uma demonstração mais correta da matriz de

acoplamento poderia ser feita mediante utilização do vetor normal, com os co-senos diretores.

d) Matriz da Condição de Superfície Livre

Considerando a equação (2.61d) e introduzindo a matriz de funções de forma do elemento triangular, tem-se,

$$[SL]^{(e)} = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{g} [N_p]^T [N_p] d\Gamma_3$$

$$[SL]^{(e)} = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_3} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} d\Gamma_3 = \frac{1}{g} \int_{\Gamma_3} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ sim & N_2^2 \end{bmatrix} d\Gamma_3 \quad (2.86)$$

Supondo que a condição de contorno exista em apenas 1 dos lados do elemento, o lado que possui os nós “i” e “j” e comprimento L_{ij} , procede-se da mesma maneira do que foi feito anteriormente na matriz de acoplamento fluido-estrutura. Então é obtida a matriz de superfície livre.

$$[SL]^{(e)} = \frac{L_{ij}^{(e)}}{6g} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

e) Matriz de Radiação no Infinito

Segundo a equação 2.61e, a matriz de radiação no infinito difere da matriz de superfície livre apenas na constante “c” no lugar de “g”. Logo, a matriz de radiação fica

$$[R]^{(e)} = \int_{\Gamma_4} \frac{1}{c} [N_f]^T [N_f] d\Gamma_4$$

$$[R]^{(e)} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_4} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ sim. & N_2^2 \end{bmatrix} d\Gamma_4$$

$$[R]^{(e)} = \frac{L_{ij}^{(e)}}{6c} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

2.5.3 - Elemento Finito 2D para o Sólido

O processo de obtenção das matrizes elementares para um elemento sólido triangular 2D de três nós é semelhante ao que foi feito para o elemento triangular do fluido. A diferença entre os dois modelos é que a variável nodal, o deslocamento, é uma grandeza vetorial e precisa de dois graus de liberdade para ser descrita, um deslocamento horizontal e um vertical. A figura 2.10 ilustra o elemento e as variáveis envolvidas.

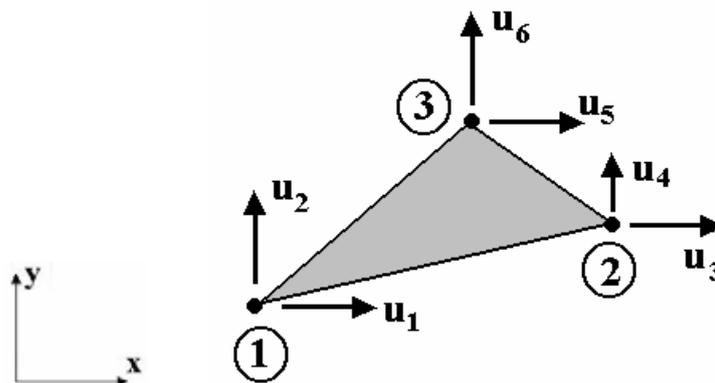


Figura 2.10 - Elemento finito triangular 2D para um sólido de 3 nós e 6 graus de liberdade.

O elemento para estrutura usa as mesmas funções de forma que foram apresentadas para o elemento de fluido (equação 2.72), mas há um arranjo diferente em função da existência de 2 graus de liberdade por nó.

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6\}^T \quad (2.89)$$

ou $\hat{u} = [N_u] \{\bar{u}\}$

A matriz de derivadas é obtida das relações deformação-deslocamento da elasticidade linear. De acordo com a teoria básica da Elasticidade 2D (Shames 1964), essa matriz é dada por,

$$[B_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Introduzindo as equações 2.72 em 2.90 conclui-se que a matriz de derivadas é,

$$[B_u] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

a) *Matriz de Rigidez*

A matriz de rigidez é dada equação 2.47b, onde a matriz de relações constitutivas [D] é expressa por uma das equações:

$$[D_{EPD}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [D_{EPT}] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.92a)$$

Estado Plano de Deformações

Estado Plano de Tensões

As matrizes [B_E] e [D] são formadas por constantes, logo na equação 2.47b elas saem da integral. Assim, a matriz de rigidez do elemento fica

$$[K_E]^{(e)} = [B_u]^T [D] [B_u] \iiint_{VE} dV_E$$

$$[K_E]^{(e)} = \frac{t}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (2.92b)$$

Onde “t” é a espessura do elemento finito.

A matriz de relações constitutivas D pode ser usada em sua versão para estado plano de tensões ou deformações, conforme 2.92a.

b) Matriz de Massa

Introduzindo a matriz de funções de forma (equação 2.89) na equação 2.47a (matriz de massa), obtém-se

$$\begin{aligned}
 [M_E]^{(e)} &= \rho_E \int_{VE} [N_u]^T [N_u] dV_E = \rho_E \int_{A_E} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} dA_E \\
 [M_E]^{(e)} &= \rho_E \int_{VE} [N_u]^T [N_u] dV_E = \rho_E \int_{A_E} \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 & 0 \\ & N_1^2 & 0 & N_1 N_2 & 0 & N_1 N_3 \\ & & N_2^2 & 0 & N_2 N_3 & 0 \\ & & & N_2^2 & 0 & N_2 N_3 \\ \text{sim} & & & & N_3^2 & 0 \\ & & & & & N_3^2 \end{bmatrix} dA_E
 \end{aligned}
 \tag{2.93}$$

Onde “sim” indica que a matriz é simétrica.

Utilizando a mudança de coordenadas, semelhante ao que foi feito nas equações 2.77 a 2.82, é demonstrado que a matriz de massa consistente do elemento sólido é

$$[M_E]^{(e)} = \frac{\rho_E A^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 \\ \text{sim} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}
 \tag{2.94}$$

2.6 - MONTAGEM DO PROBLEMA ACOPLADO

A solução do problema acoplado de Interação Fluido-Estrutura consiste em resolver simultaneamente as equações de movimento da estrutura e do fluido. Essa forma de acoplamento foi originalmente proposta por Zienkiewicz e Newton (1969) para elementos finitos.

Na equação de movimento da estrutura (equação 2.46), o vetor de forças de superfície $\{P_s\}$ pode ser transformado em dois outros vetores: um vetor de forças de superfície genérico $\{f\}$ mais um vetor de forças devido às pressões do fluido na região de interface com o sólido $[FS]^*\{p\}$, ou seja, $\{P_s\}=\{f\}+[FS]^*\{\bar{p}\}$. Logo, as equações de movimento do sólido e do fluido ficam:

$$[M_E]\{\ddot{u}\}+[C_E]\{\dot{u}\}+[K_E]\{u\}-[FS]\{\bar{p}\}=\{f\} \quad (2.95a)$$

$$[K_f]\{\bar{p}\}+[M_f]\{\ddot{\bar{p}}\}+\rho_f[FS]^T\{\ddot{u}\}+[SL]\{\ddot{\bar{p}}\}+[R]\{\dot{\bar{p}}\}=0 \quad (2.95b)$$

As equações acima podem ser arranjadas em uma única equação matricial.

$$\begin{bmatrix} [M_E] & 0 \\ \rho_f \cdot [FS]^T & [M_f]+[SL] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_E] & 0 \\ 0 & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & -[FS] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{Bmatrix}^*$$

$$\text{ou} \quad [M^*]\{\ddot{\delta}\} + [C^*]\{\dot{\delta}\} + [K^*]\{\delta\} = f^* \quad (2.96)$$

Onde as matrizes M^* , C^* e K^* são matrizes análogas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez de um sistema não acoplado, com diferença na configuração da matriz. O vetor $\{\delta\}$ envolve todos os graus de liberdade do sistema (deslocamentos e pressões).

A equação acoplada originada do MDF se diferencia da equação 2.96 pelo fato da matriz de acoplamento ser diferente nas equações de movimento do fluido e da estrutura, ficando o sistema da seguinte maneira.

$$\begin{bmatrix} [M_E] & 0 \\ \rho_f \cdot [FS_2] & [M_f]+[SL] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_E] & 0 \\ 0 & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & [FS_1] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

2.7 - CASO PARTICULAR: FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

Dependendo do parâmetro de compressibilidade do problema fluido-estrutura ($\omega L/c \ll 1$) e das condições de contorno, pode haver um modo de vibração no qual o fluido não tem sua rigidez mobilizada. Esse modo de vibração é denominado modo de massa adicional, e em muitas análises a aplicação desse conceito é suficiente para aproximar o comportamento dinâmico do sistema.

Pela hipótese de incompressibilidade do fluido:

$$c = \infty \quad (2.98)$$

Logo, aplicando (2.98) na equação da onda (2.14), obtém-se a equação de Laplace:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (2.99)$$

A formulação numérica para o fluido (equação 2.95b) fica simplificada na sua 2ª linha, e o campo de pressões no fluido pode ser escrito da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} [K_f] \{\bar{p}\} - \rho [FS]^T \{\ddot{u}\} &= 0 \\ \therefore \{\bar{p}\} &= -\rho [K_f]^{-1} [FS]^T \{\ddot{u}\} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Substituindo a pressão acima na primeira linha da equação (2.95a) obtém-se,

$$\begin{aligned} ([M_E] + \rho [FS] [K_f]^{-1} [FS]^T) \{\ddot{u}\} + [C_E] \{\dot{u}\} + [K_E] \{\bar{u}\} &= \{f\} \\ \text{ou } ([M_E] + [M_{AD}]) \{\ddot{u}\} + [C_E] \{\dot{u}\} + [K_E] \{\bar{u}\} &= \{f\} \end{aligned} \quad (2.101)$$

onde M_{AD} é a matriz de massa adicional, dada por

$$M_{AD} = \rho [FS] [K_f]^{-1} [FS]^T \quad (2.102)$$

A forma de análise dinâmica do sistema FE com a equação 2.101/2.102 substitui o fluido por um efeito inercial, anexando massas (M_{AD}) à estrutura. Esse modelo tem a grande vantagem de ter um número de graus de liberdade reduzido, igual aos graus de liberdade da estrutura.

Uma outra forma de modelar o fluido como um meio incompressível é eliminar, na equação acoplada 2.96, a matriz $[M_f]$. De acordo com a condição de incompressibilidade ($c = \infty$), a matriz M_f (equação 2.61b/MEF e 2.39/MDF) tende a zero. Assim a equação 2.96 fica,

$$\begin{bmatrix} [M_E] & 0 \\ \rho \cdot [FS_2] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_E] & 0 \\ 0 & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & -[FS_1] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.103)$$

3- PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Após a exposição da formulação teórica e feita no capítulo 2, é necessário detalhar a “mecânica” do método, ou seja, mostrar como as equações de movimento são montadas. Para isso, serão apresentadas nesse capítulo as rotinas, regras de recorrência e resolução manual de exemplos para melhor ilustrar a aplicação das formulações numéricas.

O capítulo é dividido em 3 partes. Na primeira é mostrado o esquema geral de aplicação das metodologias numéricas à IFE. Na segunda parte é mostrada a montagem das equações matriciais de um problema típico, onde inicialmente é construído um modelo 1D seguida de um 2D. Sendo que, para cada modelagem, o problema é resolvido por duas formas diferentes, uma com o MDF e outra com MEF. Além disso, na parte final do capítulo é apresentado o algoritmo de integração no tempo.

3.1 - ALGORITMO DE MONTAGEM DO PROBLEMA ACOPLADO FE

A escolha do método numérico para modelagem de um problema de Engenharia depende das características do problema, precisão requerida e principalmente da experiência do Engenheiro. Este trabalho utiliza dois métodos numéricos (MEF e MDF). Para os casos estudados, o MEF mostrou melhor precisão que o MDF, conforme será concluído no capítulo 4 - Resultados Numéricos.

O MEF se vale de um número finito de elementos que representa o domínio físico em estudo. Já o MDF aplica a forma discretizada da equação diferencial que rege o comportamento do meio numa ‘nuvem’ de pontos. A forma de tratamento das condições de contorno também é diferente, o MEF usa elementos especiais na fronteira, já o MDF usa o artifício de discretizar a equação diferencial do contorno para eliminar os nós ‘virtuais’ que surgem na aplicação da forma discretizada da equação governante do fenômeno no domínio.

Independente do método numérico usado, a montagem da equação acoplada tem o mesmo princípio. A idéia principal é resolver simultaneamente as equações de movimento da estrutura e do fluido. A única dificuldade que surge é com a matriz de acoplamento [FS], que relaciona as acelerações da estrutura com as pressões do fluido na interface comum aos dois meios contínuos. As figuras 3.1 e 3.2 ilustram a aplicação do MEF e MDF.

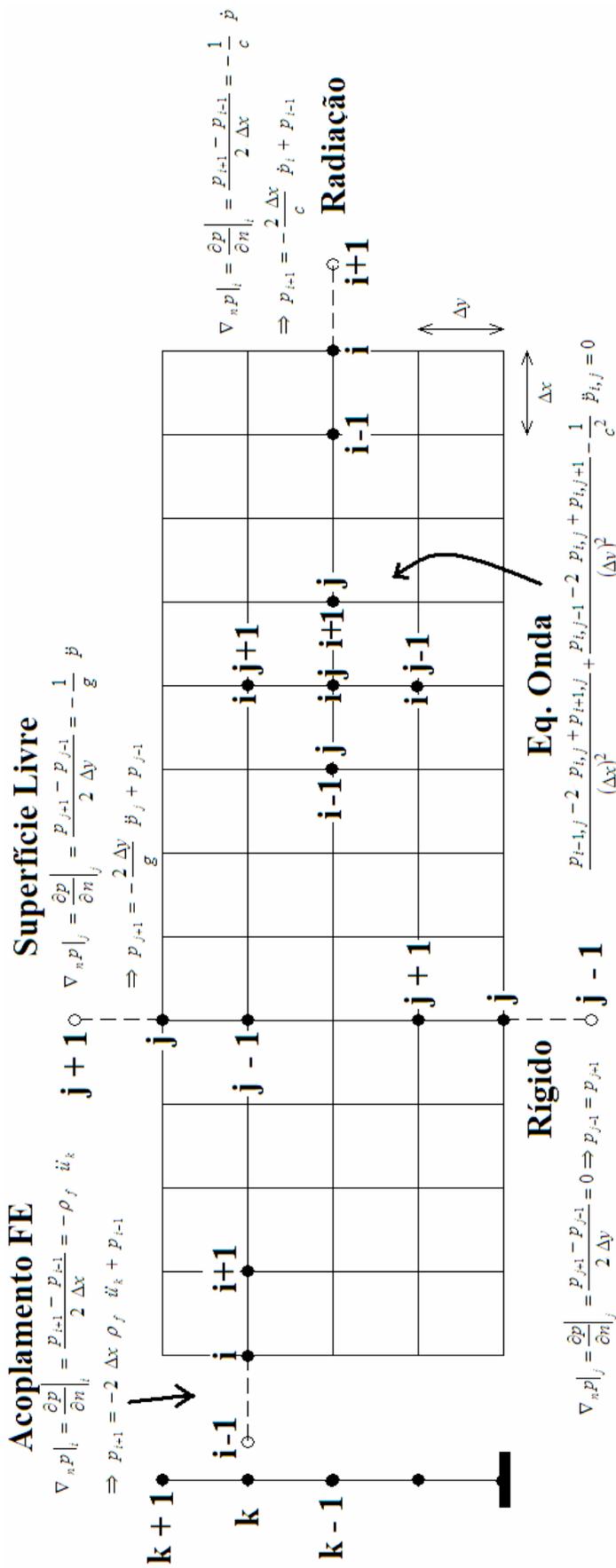
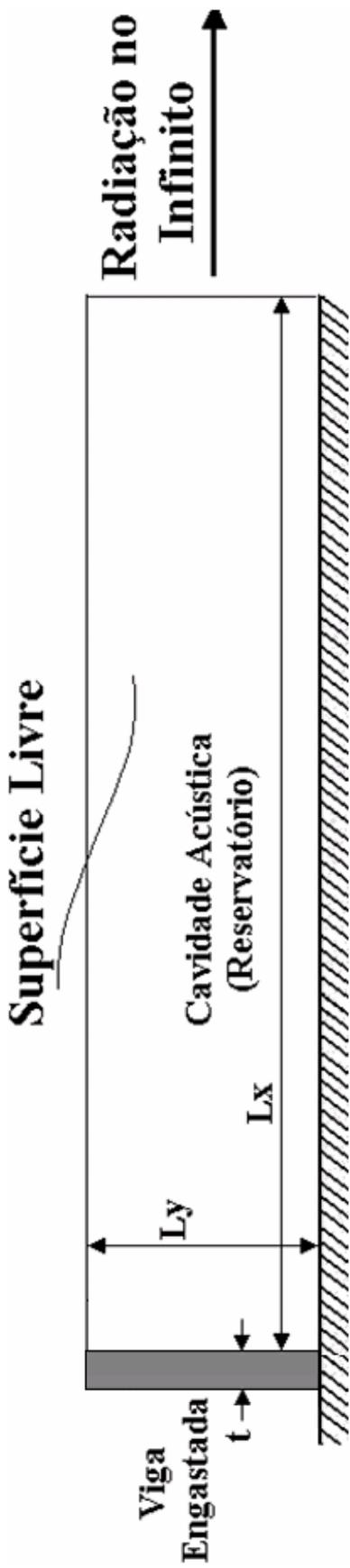


Figura 3.1 – Modelo numérico fluido-estrutura com discretização por Diferenças Finitas.

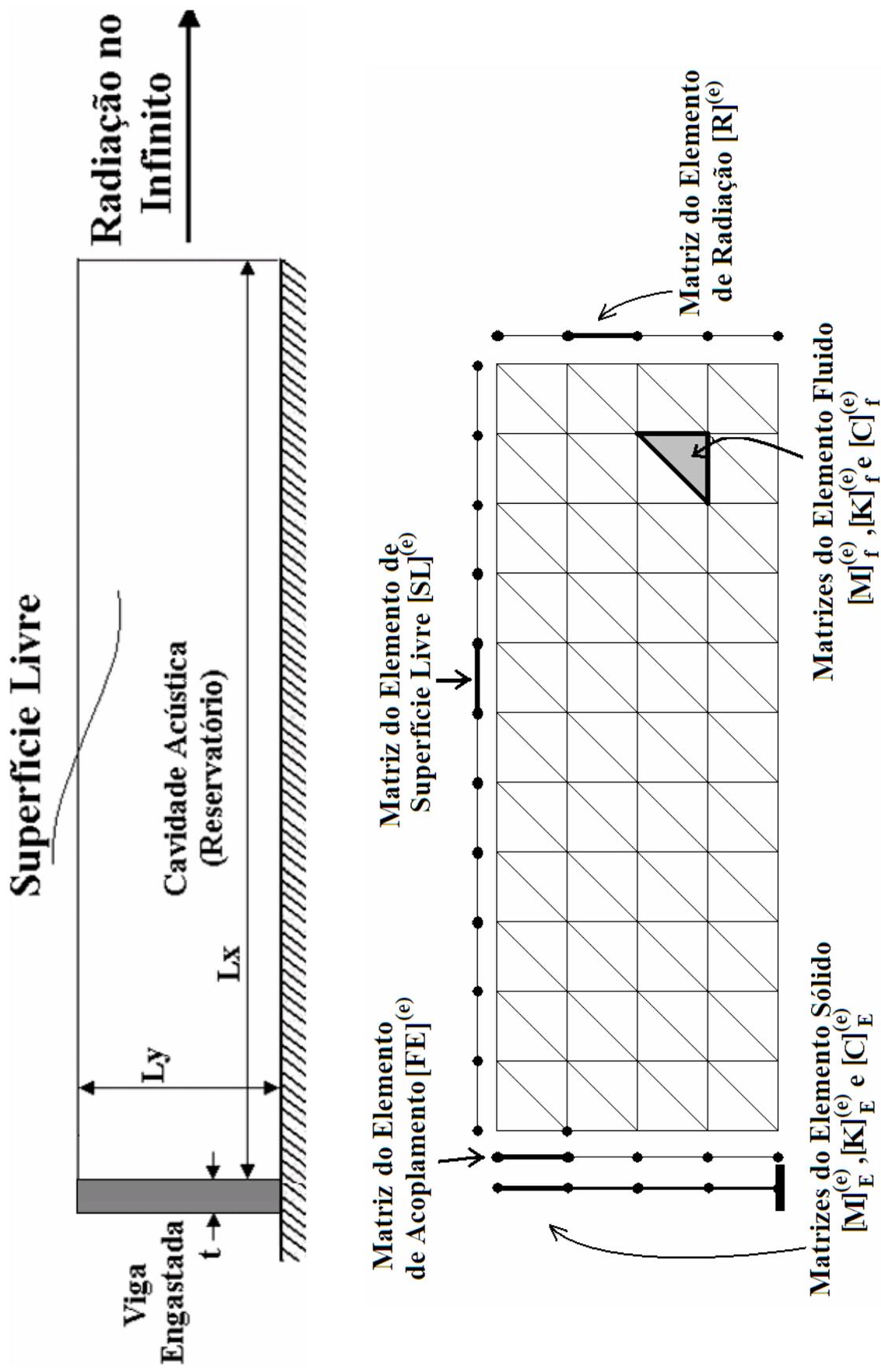


Figura 3.2 – Modelo numérico fluido-estrutura com discretização por Elementos Finitos.

De acordo com o exposto no item 2.6 do capítulo 2, a equação de movimento amortecida de um sistema IFE é:

$$\begin{bmatrix} [M_E] & 0 \\ \rho \cdot [FS_2] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_E] & 0 \\ 0 & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & -[FS_1] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou $[M_{FE}]\{\ddot{\delta}\} + [C_{FE}]\{\dot{\delta}\} + [K_{FE}]\{\delta\} = \{F_{FE}\}$ (3.1)

Na equação acima, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura (M_E , K_E e C_E) são quadradas e f é um vetor de forças, sendo que todos possuem dimensão igual ao número de graus de liberdade na estrutura (GLE). Da mesma forma, as matrizes do fluido (M_f , SL , R e K_f) são quadradas com dimensão igual ao número de graus de liberdade no fluido (GLF). A matriz de acoplamento fluido-estrutura (FS) tem dimensão igual a GLE linhas por GLF colunas, e possui números diferentes de zero na posições correspondentes aos nós da estrutura que estão na interface com o fluido. A variável “ u ” é um vetor com os graus de liberdade de deslocamento da estrutura e “ p ” o vetor com os graus de liberdade de pressão do fluido.

O procedimento geral para se chega à equação 3.1 é: 1) montar as matrizes de cada elemento de um dos domínios ou contornos baseado nas equações do capítulo 2; 2) somar nas posições corretas as matrizes de cada um dos elementos (matrizes elementares) e obter a matriz global; 3) substituir cada matriz na equação 3.1. A montagem das matrizes (etapa 3) do sistema acoplado pode ser feita segundo a rotina abaixo.

Forma geral da rotina de montagem do problema acoplado.

Entradas: M_E , C_E , K_E , f , M_f^* , R , K_f e ρ_f . Onde $M_f^* = M_f + SL$.

1. Cálculo de GLE e GLF.
2. Cálculo da matriz [FS].
3. Inicialização das matrizes quadradas M_{FE} , C_{FE} , K_{FE} com dimensão (GLE+GLF) e do vetor F_{FE} com a mesma dimensão.
4. Incorporação das matrizes M_E , C_E , K_E e f às matrizes M_{FE} , C_{FE} , K_{FE} e ao vetor F_{FE} .
5. Incorporação das matrizes M_f , R , K_f e f às matrizes M_{FE} , C_{FE} , K_{FE} .
6. Incorporação da matriz FS às matrizes M_{FE} e K_{FE} .

Saídas: M_{FE} , C_{FE} , K_{FE} e F_{FE} da equação 3.1.

A rotina acima está detalhada abaixo em pseudo-linguagem. Esse algoritmo procura representar a estrutura lógica de composição da equação 3.1 e pode ser transcrito para qualquer linguagem científica de programação.

Algoritmo de montagem da equação acoplada (em pseudo-linguagem).

| | |
|---|--|
| <pre> %PASSO 1. GLE = tamanho(Ke) GLF = tamanho(Kf) %PASSO 2 FS(GLE, GLF) = 0 Para i=1 até NGLfe Gr1 = CONTORNOfe(i, 1) Gr2 = CONTORNOfe(i, 2) Gr3 = CONTORNOfe(i, 3) Gr4 = CONTORNOfe(i, 4) X1 = COORDf(Gr1, 1) Y1 = COORDf(Gr1, 2) X2 = COORDf(Gr2, 1) Y2 = COORDf(Gr2, 2) L_{ij} = ((x2-x1)^2 + (y2-y1)^2)^0.5 FS(Gr3, Gr1) = FS(Gr3, Gr1) + L_{ij}/6*(2) FS(Gr3, Gr2) = FS(Gr3, Gr2) + L_{ij}/6*(1) FS(Gr4, Gr1) = FS(Gr4, Gr1) + L_{ij}/6*(1) FS(Gr4, Gr2) = FS(Gr4, Gr2) + L_{ij}/6*(2) Fim %PASSO 3 M_{FE}(GLE+GLF, GLE+GLF) = 0 C_{FE}(GLE+GLF, GLE+GLF) = 0 K_{FE}(GLE+GLF, GLE+GLF) = 0 </pre> | <pre> %PASSO 4 Para i=1 até GLE F_{FE}(i, 1) = f(i, 1) Para j=1 até GLE M_{FE}(i, j) = M_E(i, j) C_{FE}(i, j) = C_E(i, j) K_{FE}(i, j) = K_E(i, j) Fim Fim %PASSO 5 Para i=1 até GLF Para j=1 até GLF K_{FE}(GLE + i, GLE + j) = K_f(i, j) M_{FE}(GLE + i, GLE + j) = M_f(i, j) C_{FE}(GLE + i, GLE + j) = R(i, j) Fim Fim %PASSO 6 Para i=1 até GLE Para j=1 até GLF K_{FE}(i, GLE + j) = - FS(i, j) M_{FE}(GLE + j, i) = f * FS(i, j) Fim Fim </pre> |
|---|--|

Onde: NGLfe: número de graus de liberdade na interface fluido-estrutura; CONTORNOfe: matriz com as informações sobre a interface fluido-estrutura – graus de liberdade do

domínio fluido e estrutura na interface; X e Y: coordenadas dos nós do fluido sobre a interface ; COORDf: matriz com as coordenadas x e y de cada grau de liberdade do fluido; L_{ij} : comprimento do lado do elemento sobre a interface fluido-estrutura; ρ_f : massa específica do fluido.

No caso de matrizes montadas com diferenças finitas, há uma diferença entre a matriz de acoplamento do fluido e da estrutura, conforme comentado na seção 2.6 (eq. 2.97) do capítulo 2. O algoritmo pode ser adaptado no PASSO 6, fazendo:

%PASSO 6 para MDF

Para i=1 até GLE

Para j=1 até GLF

$$K_{FE}(i, GLE + j) = - FS_1(i,j)$$

$$M_{FE}(GLE + j, i) = \rho_f * FS_2(j,i)$$

Fim

Fim

3.2 - EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES ACOPLADAS

Com o intuito pedagógico e de elucidação da modelagem numérica abordada nesse trabalho, pretende-se por meio de exemplos simples, desenvolver passo-a-passo uma metodologia de abordagem de problemas de problemas acoplados em IFE. Acreita-se que essa metodologia possa ser assimilada através dos procedimentos utilizados, a despeito das dificuldades matemáticas envolvidas na questão.

Os exemplos que serão mostrados a seguir também têm por objetivo ilustrar a mecânica de funcionamento das metodologias numéricas apresentados nesse trabalho. O sistema acústico-mecânico proposto é uma cavidade retangular acoplada no fundo com um sólido elástico e com superfície superior aberta, conforme figura 3.3a. A superfície aberta é modelada de duas formas: inicialmente com pressão nula nos modelos 1D e com condição de ondas de gravidade nos modelos 2D.

Para cada um dos modelos (1D e 2D), são mostradas duas formas de solução/discretizado. A primeira solução se dá com DF e a posterior por EF.

Vale ressaltar que não serão utilizadas as matrizes de dissipação: amortecimento estrutura e radiação no fluido. A matriz de amortecimento estrutural pode ser calculada conhecendo-se o coeficiente de amortecimento (ξ) e a massa do SSUGL (M_E), de acordo com a equação 2.108.

3.2.1 - Modelo 1D – Solução Numérica com Diferenças Finitas

O objetivo é desenvolver um modelo unidimensional cuja cavidade acústica é discretizada ao longo do seu eixo de simetria vertical. A estrutura de fundo é idealizada como um sistema de um grau de liberdade (SSUGL). A figura 3.3b mostra o modelo numérico 1D e em 3.3c estão os dados de dimensões e constantes físicas do problema.

Um ponto fundamental nessa simulação é o número de nós em que se discretiza o domínio. Para que seja possível fazer um esquema passo-a-passo e não utilizar equações matriciais muito grandes, foi adotada um malha com apenas 3 nós, conforme mostrado na figura 3.3b.

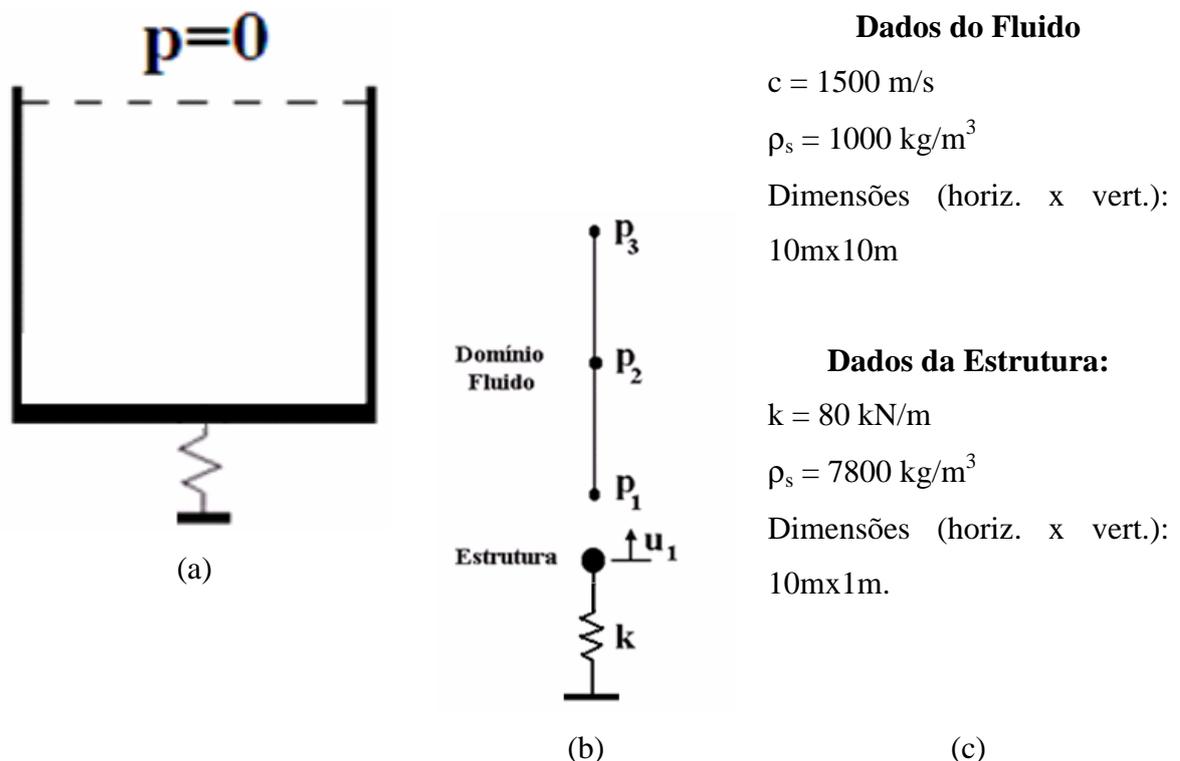
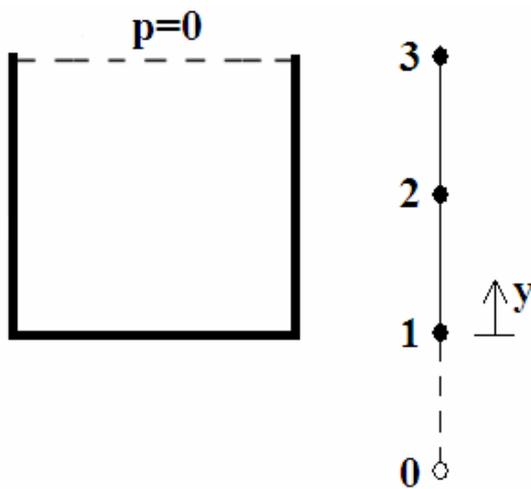


Figura 3.3 - Caso exemplo de acoplamento acústico-mecânico, (a) problema físico, (b) modelo numérico 1D, (c) dados de dimensões e constantes físicas.

De acordo com o que foi visto anteriormente, a equação que rege o comportamento vibratório do fluido da cavidade acústica é a equação da onda. Considerando que o fenômeno de variação de pressão ocorre exclusivamente ao longo do eixo y , ou seja, $d^2p/dx^2 = 0$, pode-se aplicar o operador diferencial de 2ª ordem na derivada segunda da pressão (Anexo A), resultando em:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{j-1} - 2p_j + p_{j+1}}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_j = 0 \quad (3.2)$$

A forma de recorrência de 3.2 deve ser aplicada em todos os nós da malha de DF ($j=1$ e 2) gerando as equações 3.3. Vale ressaltar que 3.2 não foi aplicado ao nó 3, porque a pressão nesse nó já é conhecida ($p=0$).



Passo da malha $\Delta y = 5\text{m}$

Aplicando 3.2 na malha:

$$j=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta y^2} (p_2 - 2p_1 + p_0) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_1 = 0$$

$$j=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta y^2} (p_3 - 2p_2 + p_1) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_2 = 0$$

(Eq. 3.3)

Condição de contorno no nó 1 (eq. 2.45):

$$\nabla_n p \Big|_{j=1} = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{j=1} = \frac{p_2 - p_0}{2\Delta y} = -\rho_f \ddot{u}$$

$$p_0 = 2\Delta y \rho_f \ddot{u} + p_2 \quad (\text{Eq. 3.4a})$$

Figura 3.4 – Modelo 1D para a cavidade.

Condição de contorno de pressão nula no nó 3:

$$p_3 = 0 \quad (\text{Eq. 3.4b})$$

Nas equações em 3.3 nota-se que ao fazer $j=1$ surge um nó artificial 0. Em $j=1$ também é preciso acoplar a pressão p_1 com a aceleração \ddot{u} do SSUGL. Para promover esse acoplamento e eliminar o nó 0 das equações é necessário aplicar o MDF também à condição de contorno, como foi feito na equação 3.4a.

Substituindo as equações do contorno (eq. 3.4a e b) no lugar de p_0 e p_3 em 3.3, chega-se a:

$$-\frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\rho_f/\Delta y \\ 0 \end{bmatrix} \{\ddot{u}\} + \frac{1}{\Delta y^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Ou, trocando os sinais fica:

$$\frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\rho_f/\Delta y \\ 0 \end{bmatrix} \{\ddot{u}\} + \frac{1}{\Delta y^2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

A estrutura flexível do fundo é um sistema simples de 1 grau de liberdade (SSUGL). Suas propriedades inerciais e elásticas são: $M_E = 78000$ Kg e $K_E = 80$ kN/m, respectivamente. Sobre o SSUGL existe uma força F que pode ser decomposta em duas outras: uma devido a pressão p_1 do fluido e outro devido a uma força externa qualquer (f) atuante no SSUGL.

Equação de movimento não amortecida da estrutura fica:

$$\begin{aligned} [M_E] \{\ddot{u}\} + [K_E] \{u\} &= F \\ [M_E] \{\ddot{u}\} + [K_E] \{u\} &= -Ap_1 + f \\ [78000] \{\ddot{u}\} + [80000] \{u\} + [10 \ 0] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} &= f \end{aligned} \quad (3.6)$$

Com as equações de movimento da estrutura e do fluido, 3.6 e 3.5 respectivamente, pode-se montar a equação do sistema acoplado. Para isso, basta recorrer a equação 3.1 e substituir nelas as equações 3.5 e 3.6 e usar as constantes físicas e geométricas do problema (figura 3.3c), ficando:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [M_E] & 0 \\ [FS_2] & [M_f] + [SL] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & [FS_1] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 78000 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{2\rho_f}{\Delta y}\right) & \left(\frac{1}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{c^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 80000 & A & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{\Delta y^2}\right) & \left(-\frac{2}{\Delta y^2}\right) \\ 0 & \left(-\frac{1}{\Delta y^2}\right) & \left(\frac{2}{\Delta y^2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} 78000 & 0 & 0 \\ -400 & 4.4444e-007 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4444e-007 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 80000 & 10 & 0 \\ 0 & 0.08 & -0.08 \\ 0 & -0.04 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.2.2 - Modelo 1D - Solução Numérica com Elementos Finitos

O modelo numérico em EF usa 2 elementos 1D ao longo do eixo vertical de simetria da cavidade. Existem 3 nós e 2 elementos de comprimento 5m e área de seção transversal de 10m². A figura 3.5 ilustra o modelo.

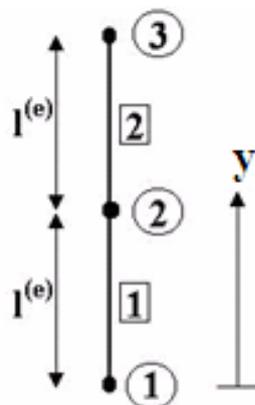
A conectividade dos elementos e as coordenadas dos nós estão mostradas nas tabelas 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1 - Coordenadas dos nós.

| Nó | x | y |
|----|---|----|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 5 |
| 3 | 0 | 10 |

Tabela 3.2. Conectividade dos elementos.

| Elemento | Nó 1 | Nó 2 | l(e) | Área (A(e)) |
|----------|------|------|------|-------------------|
| 1 | 1 | 2 | 5 m | 10 m ² |
| 2 | 2 | 3 | 5 m | 10 m ² |



Descrição da Malha:

$l^{(e)} = L/2 = 5$ metros.

2 elementos finitos unidimensionais de 2 nós.

3 nós.

Figura 3.5 - Modelo 1D com elementos finitos.

As matrizes M_f , K_f e FS do elemento finito 1D para o fluido estão descritas na seção 2.5.1. Segundo a equação 2.65, a matriz de rigidez para os dois elementos finitos do problema são:

$$[K_f^{(e)}] = \frac{A^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[K_f]^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} p_1 \quad \text{e} \quad [K_f]^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} p_2 \quad (3.9)$$

A matriz de rigidez do sistema é dada pela superposição das posições das matrizes elementares. Para a malha mostrada na figura 3.5, a matriz de rigidez global do sistema é:

$$[K_f] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ \text{sim.} & (K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ \text{sim.} & 4 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De acordo com a equação 2.71, a matriz de massa dos 2 elementos finitos são:

$$[M_f^{(e)}] = \frac{A^{(e)}l^{(e)}}{6c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$[M_f]^{(1)} = \frac{50}{6 \cdot 1500^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ddot{p}_1 \quad \text{e} \quad [M_f]^{(2)} = \frac{50}{6 \cdot 1500^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ddot{p}_2 \quad (3.12)$$

Superpondo as posições, da mesma maneira que foi feito na matriz de rigidez, obtém-se a matriz de massa global do sistema.

$$[M_f] = \begin{bmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} \\ \text{sim.} & (M_{22}^{(1)} + M_{22}^{(2)}) \end{bmatrix} = \frac{50}{6 \cdot 1500^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \text{sim.} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

A estrutura é a mesma da modelagem por DF (eq. 3.6), um SSUGL não amortecido. Suas propriedades inerciais e elásticas são:

$$[K_E] = [80000] \quad [M_E] = [780] \quad (3.14)$$

A matriz fluido-estrutura [FS] acopla a pressão p_1 com a aceleração \ddot{u}_1 da estrutura, e sua expressão é dada pela equação 2.61c. Para o caso de um elemento 1D, a matriz [FS] possui apenas uma posição, que é igual a projeção da área da seção transversal na direção perpendicular ao movimento do contorno.

Portanto, a matriz de acoplamento fluido-estrutura é:

$$[FS] = A[1 \ 0] = [10 \ 0] \quad (3.15)$$

Onde “A” é a área da seção transversal da cavidade.

Com as matrizes elementares acima é possível montar as equações de movimento do fluido e da estrutura.

$$\text{Equação equilíbrio da estrutura} \quad [M_E]\{\ddot{u}_1\} + [K_E]\{u_1\} - [FS]\{p_1\} = 0 \quad (3.16)$$

$$\text{Equação equilíbrio da estrutura} \quad \rho_f [FS]^T \{\ddot{u}_1\} + [M_f]\{\ddot{p}_1\} + [K_f]\{p_1\} = 0 \quad (3.17)$$

Escrevendo as equações 3.16 e 3.17 na forma matricial, é obtido:

$$\begin{bmatrix} [M_E] & [0] \\ \rho_f [FS]^T & [M_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & -[FS] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} 78000 & 0 & 0 \\ 10000 & 7.407e-6 & 3.704e-6 \\ 0 & 3.704e-6 & 14.815e-6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 80000 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

As equações 3.7 e 3.19 fornecem uma visão geral do problema numérico de autovalores e autovetores de um sistema fluido-estrutura. É possível perceber a não simetria do problema nas duas matrizes, ocasionada pela matriz de acoplamento [FS]

Outra característica observada é a proximidade entre números de ordem de grandeza muito diferentes. Na primeira matriz existem nas posições 1,1 e 2,1 números da ordem de 10^3 produzidos pela matriz de massa da estrutura $[M_E]$ e acoplamento $[FS]$, enquanto na posição 2,2 há um número da ordem de grandeza 10^{-7} , produzido pelo quadrado da velocidade do som no denominador. O mesmo acontece na 2ª matriz, há o parâmetro de rigidez na posição 1,1, com ordem de 10^5 , próximo de um número da ordem de 10^{-1} , na posição 2,2. Esse arranjo desbalanceado de valores e esparsidade nas matrizes, associada a existência de números negativos na diagonal, produz sistemas de autovalores de difícil solução e convergência, assim como é a fonte dos maiores problemas da questão (Pedroso 2004).

3.2.3 - Modelo 2D – Solução Numérica com Diferenças Finitas

Nas seções 3.2.1 e 3.2.2 a cavidade acústica foi modelada de forma unidimensional o sistema acoplado da figura 3.3a. Cada nó do modelo numérico da figura 3.3b tem um valor de pressão que representa uma seção da cavidade acústica. Nessa fase, o fluido será discretizado nas duas direções, ou seja, haverá nós ao longo dos eixos vertical e horizontal da figura 3.3a.

Da mesma forma que foi feito na seção 3.2.1, o sistema acoplado da figura 3.3a será modelado com o MDF (seção a) e em seguida com o MEF (seção b).

a) Estrutura

A placa de fundo é uma viga de cisalhamento, conforme modelo estrutural apresentado no Anexo B (item A.2). A figura 3.6 mostra a viga e o modelo numérico em DF.

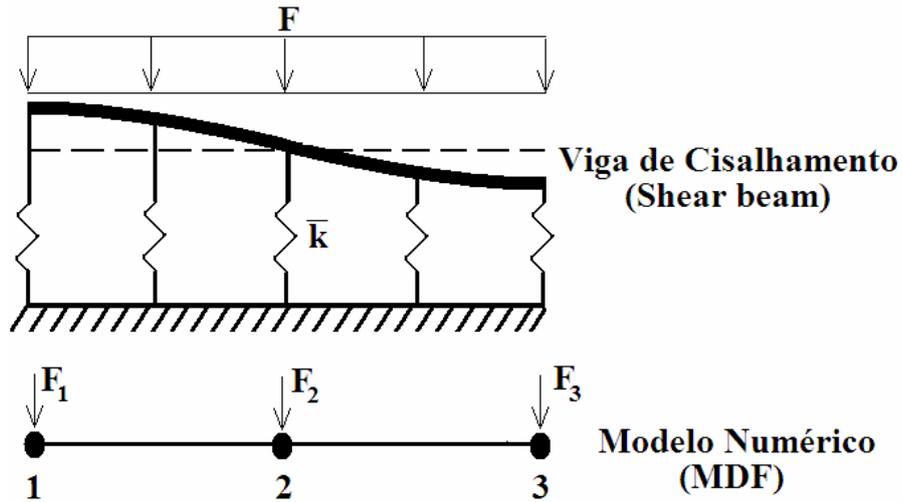


Figura 3.6 – Viga de Cisalhamento e modelo numérico com MDF.

A equação de movimento da estrutura da figura 3.6 é também demonstrada no Anexo B. Ela pode ser discretizada aplicando os operadores discretos do MDF em cada um dos nós do malha. O operador de 2ª ordem para a derivada da equação 3.20 é encontrado no anexo A.

$$KAG \frac{d^2 u}{dx^2} + \bar{k}u + \bar{m}\ddot{u} = F$$

Ou na forma discretizada (MDF): $KAG \frac{(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}))}{\Delta x^2} + \bar{k}u_i + \bar{m}\ddot{u}_i = F_i$ (3.20)

Onde KAG é a rigidez ao cisalhamento; \bar{k} é a rigidez distribuída do apoio elástico sob a viga; \bar{m} é a massa distribuída da viga; u é o deslocamento da viga em relação ao seu eixo central; F é o vetor de forças sobre a estrutura; e Δx é o passo da malha de nós (=5m).

Aplicando a regra de recorrência 3.20 nos pontos da figura 3.6 chega-se às equações:

$$i=1 \quad \frac{KAG}{\Delta x^2} (u_0 - 2u_1 + u_2) + \bar{k}u_1 + \bar{m}\ddot{u}_1 = F_1 \quad (3.21)$$

$$i=2 \quad \frac{KAG}{\Delta x^2} (u_1 - 2u_2 + u_3) + \bar{k}u_2 + \bar{m}\ddot{u}_2 = F_2 \quad (3.22)$$

$$i=3 \quad \frac{KAG}{\Delta x^2} (u_2 - 2u_3 + u_4) + \bar{k}u_3 + \bar{m}\ddot{u}_3 = F_3 \quad (3.23)$$

Os nós 0 e 4 que surgiram nas equações 3.21 a 3.23 não existem na viga numérica. A forma de eliminar os nós virtuais em DF é discretizar também as equações das condições de contorno e escrever os nós virtuais em função dos nós reais (dentro da malha da viga numérica). Nos dois extremos da viga a derivada do deslocamento deve ser zero, devido a hipótese de não rotação da seção da Viga de Cisalhamento.

$$\begin{aligned}
 \text{Parede rígida esquerda} \quad \frac{du}{dx} \Big|_{i=1} &= \frac{u_2 - u_0}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow u_0 = u_2 \\
 \frac{du}{dx} \Big|_i = 0 & \quad \frac{du}{dx} \Big|_{i=3} = 0 \Rightarrow u_4 = u_2
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

O vetor de carregamento na viga (F) pode ser separado em duas partes, um vetor associado às pressões nos nós do fluido da região de interface e um outro vetor de carga genérico.

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta x}{2} p_1 \\ \Delta x p_2 \\ \frac{\Delta x}{2} p_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta x}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

Aplicando 3.24 e 3.25 em 3.21 a 3.23, reagrupando os termos para a forma matricial, chega-se a equação de movimento da viga numérica.

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{KAG}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \bar{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \bar{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = \\
 & \quad - \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta x}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \\
 & \left(2.69 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} + 80 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + 78 \cdot 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = \\
 & \quad - \begin{bmatrix} 2.50 & 0 & 0 \\ 0 & 5.00 & 0 \\ 0 & 0 & 2.50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

b) Fluido

A cavidade acústica 2D foi discretizada em 9 nós, sendo que desses, apenas o nó 5 não está sobre um contorno. Os nós 1, 2 e 3 estão sobre a condição de acoplamento fluido-estrutura; os nós 1, 4, 7, 3, 6 e 9 estão sobre a condição de parede rígida e os nós 7, 8 e 9 estão sobre a condição de superfície livre.

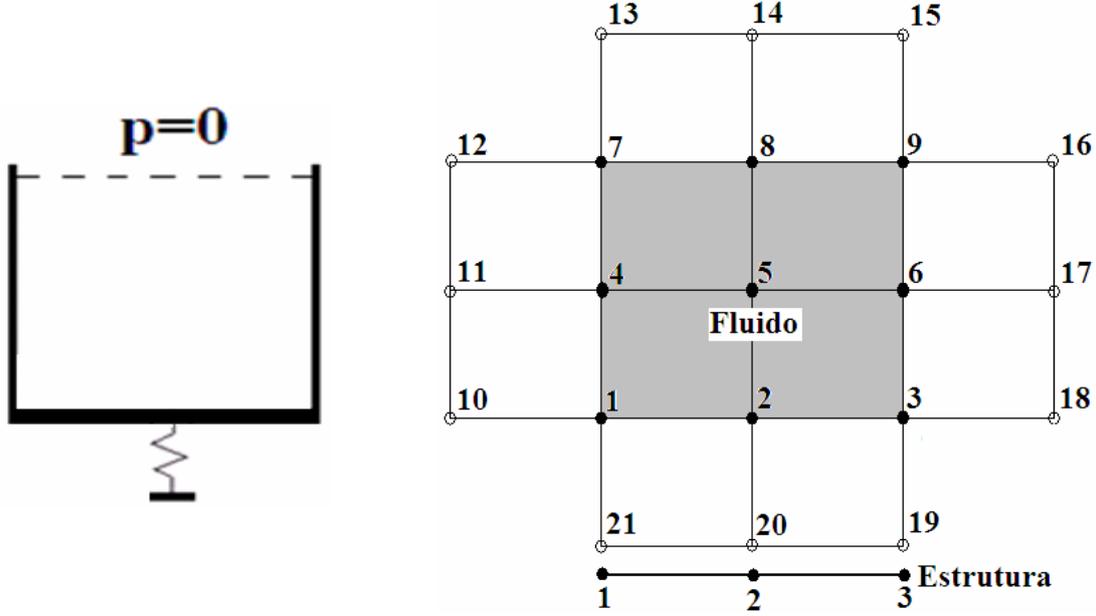


Figura 3.7 – Modelo numérico bidimensional de DF para o sistema acoplado da fig. 3.6.

Além dos nós reais, ou seja, que estão sobre o domínio real da cavidade ou contorno, existem nós virtuais que surgirão com o uso dos operadores discretos no contorno.

Aplicando a forma discretizada da equação da onda 2D nos pontos de 1 a 9 da figura 3.7 chega-se a um grupo de equações.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 p}{dy^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (p_{i,j-1} - 2p_{i,j} + p_{i,j+1}) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_{i,j} = 0$$

$$j=1 \quad \frac{1}{\Delta x^2} (p_{10} - 2p_1 + p_2) + \frac{1}{\Delta y^2} (p_{21} - 2p_1 + p_4) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_1 = 0$$

$$j=2 \quad \frac{1}{\Delta x^2} (p_1 - 2p_2 + p_3) + \frac{1}{\Delta y^2} (p_{20} - 2p_2 + p_5) - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
j=3 \quad & \frac{1}{\Delta x^2}(p_2 - 2p_3 + p_{18}) + \frac{1}{\Delta y^2}(p_{19} - 2p_3 + p_6) - \frac{1}{c^2}\ddot{p}_3 = 0 \\
j=4 \quad & \frac{1}{\Delta x^2}(p_{11} - 2p_4 + p_5) + \frac{1}{\Delta y^2}(p_1 - 2p_4 + p_7) - \frac{1}{c^2}\ddot{p}_4 = 0 \\
j=5 \quad & \frac{1}{\Delta x^2}(p_4 - 2p_5 + p_6) + \frac{1}{\Delta y^2}(p_2 - 2p_5 + p_8) - \frac{1}{c^2}\ddot{p}_5 = 0 \\
j=6 \quad & \frac{1}{\Delta x^2}(p_5 - 2p_6 + p_{17}) + \frac{1}{\Delta y^2}(p_3 - 2p_6 + p_9) - \frac{1}{c^2}\ddot{p}_6 = 0 \\
j=7 \quad & \frac{1}{\Delta x^2}(p_{12} - 2p_7 + p_8) + \frac{1}{\Delta y^2}(p_4 - 2p_7 + p_{13}) - \frac{1}{c^2}\ddot{p}_7 = 0 \\
j=8 \quad & \frac{1}{\Delta x^2}(p_7 - 2p_8 + p_9) + \frac{1}{\Delta y^2}(p_5 - 2p_8 + p_{14}) - \frac{1}{c^2}\ddot{p}_8 = 0 \\
j=9 \quad & \frac{1}{\Delta x^2}(p_8 - 2p_9 + p_{16}) + \frac{1}{\Delta y^2}(p_6 - 2p_9 + p_{15}) - \frac{1}{c^2}\ddot{p}_9 = 0
\end{aligned}$$

(3.27)

Condições de contorno:

| | |
|----------------------------------|--|
| Parede rígida esquerda | $\nabla_n p _1 = \frac{\partial p}{\partial x} _1 = \frac{p_2 - p_{10}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow p_{10} = p_2$ |
| $\nabla_n p = -\rho_f \ddot{u}$ | $\nabla_n p _4 \Rightarrow p_{11} = p_5$ |
| | $\nabla_n p _7 \Rightarrow p_{12} = p_8$ |
| | $\nabla_n p _9 \Rightarrow p_{16} = p_8$ |
| Parede rígida direita | $\nabla_n p _6 \Rightarrow p_{17} = p_5$ |
| | $\nabla_n p _3 \Rightarrow p_{18} = p_2$ |
| Superfície Livre | $\nabla_n p _7 = \frac{\partial p}{\partial y} _7 = \frac{p_4 - p_{13}}{2\Delta y} = -\frac{1}{g}\ddot{p}_7$ |
| | $\Rightarrow p_{13} = \frac{2\Delta y}{g}\ddot{p}_7 + p_4$ |
| | $\nabla_n p _8 \Rightarrow p_{14} = \frac{2\Delta y}{g}\ddot{p}_8 + p_5$ |
| | $\nabla_n p _9 \Rightarrow p_{15} = \frac{2\Delta y}{g}\ddot{p}_9 + p_6$ |

3.2.4 - Modelo 2D - Solução Numérica com Elementos Finitos

O sistema acoplado fluido-estrutura da figura 3.8 é um modelo em EF. A cavidade acústica é discretizada por elementos triangulares para acústica de 3 nós e a viga de fundo por elementos triangulares de estado plano, conforme seção 2.5.

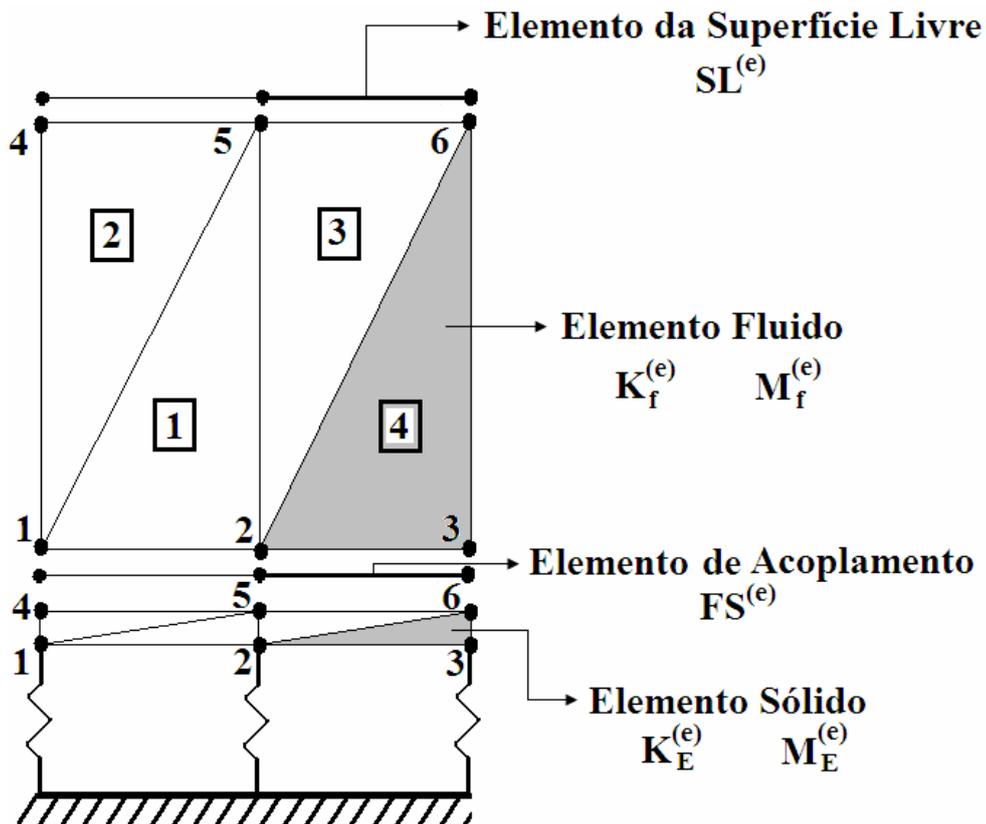


Figura 3.8 – Modelo numérico bidimensional com EF para o sistema acoplado da fig. 3.6a.

a) Estrutura

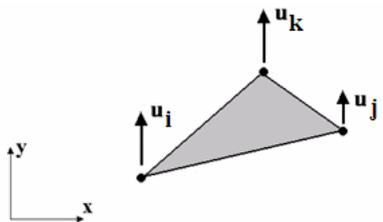
Cada nó do elemento da estrutura possui originalmente 2 graus de liberdade, um deslocamento horizontal e um vertical. No entanto, o modelo estrutural da estrutura de fundo é de uma viga de cisalhamento e para atender esse comportamento é necessário restringir os graus de liberdade de deslocamento horizontal. Assim, uma seção transversal imaginária da viga só pode deslocar na vertical, não sendo possível o giro da mesma.

A partir das coordenadas dos nós de um elemento e das equações apresentadas na seção 2.5.3, principalmente a equação 2.92, pode-se montar a equação de um elemento finito. Além disso, deve-se restringir os graus de liberdade horizontais, eliminando as linhas e colunas 1, 3 e 5 (figura 2.10) da matriz de rigidez elementar.

Matriz de rigidez de um elemento triangular da figura 3.8.

$$[K_E]^{(e)} = \begin{bmatrix} 2.3077 & 0.0000 & -2.3077 & 3.4615 & 0.0000 & -3.4615 \\ & 0.8077 & 4.0385 & -0.8077 & -4.0385 & 0.0000 \\ & & 22.5000 & -7.5000 & -20.192 & 3.4615 \\ & & & 58.5000 & 4.0385 & -57.7692 \\ & \text{sim.} & & & 20.1920 & 0.0000 \\ & & & & & 57.7692 \end{bmatrix} 10^{10}$$

Restringindo os graus de liberdade vertical.



$$[K_E]^{(e)} = \begin{bmatrix} 0.8077 & -0.8077 & 0.0000 \\ & 58.5000 & -57.7692 \\ \text{sim.} & & 57.7692 \end{bmatrix} 10^{10} \begin{matrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{matrix} \quad (3.32)$$

As conectividades dos elementos da malha da figura 3.8 estão na tabela abaixo.

Tabela 3.3 – Conectividade dos elementos dos elementos da viga de fundo (fig. 3.8).

| Elemento | Nó I | Nó J | Nó K |
|----------|------|------|------|
| 1 | 1 | 2 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 5 | 4 | 1 |
| 4 | 6 | 5 | 2 |

Somando as matrizes elementares adequadamente chega-se a matriz global da estrutura.

$$[K_E] = 10^{10} \begin{bmatrix} 58.5000 & -0.8077 & 0 & -57.6920 & 0 & 0 \\ & 117.000 & -0.8077 & 0 & -115.3800 & 0 \\ & & 58.5000 & 0 & 0 & -57.6920 \\ & & & 58.5000 & -0.8077 & 0 \\ & \text{sim} & & & 117.000 & -0.8077 \\ & & & & & 58.5000 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

A matriz de rigidez acima ainda tem que ser somada, nos elementos da diagonal, ao valor de $K/6$, onde K é a rigidez total do apoio elástico ($= \bar{k} \cdot L$).

Da mesma forma pode-se proceder para montar a matriz de massa. Calculando uma matriz elementar com deslocamentos horizontais restringidos e somando adequadamente as contribuições dessas matrizes elementares na matriz global, chega-se a matriz de massa da placa de fundo.

Matriz de Massa Elementar

$$[M_E]^{(e)} = \begin{bmatrix} 3250 & 1625 & 1625 \\ & 3250 & 1625 \\ \text{sim.} & & 3250 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Matriz de Massa Global da Viga

$$[M_E] = 10^3 \begin{bmatrix} 6.5000 & 1.6250 & 0 & 1.6250 & 3.2500 & 0 \\ & 9.7500 & 1.6250 & 0 & 3.2500 & 3.2500 \\ & & 3.2500 & 0 & 0 & 1.6250 \\ & & & 3.2500 & 1.6250 & 0 \\ \text{sim} & & & & 9.7500 & 1.6250 \\ & & & & & 6.5000 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

b) Fluido

Na seção 2.5.2 foi demonstrada a equação para o cálculo da matriz de rigidez do fluido K_f (equação 2.75). Com as coordenadas de cada um dos três nós de um elemento da figura 3.8, a área plana do elemento finito obtém-se:

Matriz Elementar.

$$[K_f]^{(e)} = \begin{bmatrix} 1.00 & -1.00 & 0.00 \\ & 1.25 & -0.25 \\ \text{sim} & & 0.25 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Somando as matrizes elementares nas posições corretas chega-se a matriz de rigidez global.

$$[K_f] = \begin{bmatrix} 1.25 & -1.00 & 0.00 & -0.25 & 0.00 & 0.00 \\ & 2.50 & -1.00 & 0.00 & -0.50 & 0.00 \\ & & 1.25 & 0.00 & 0.00 & -0.25 \\ & & & 1.25 & -1.00 & 0.00 \\ & sim. & & & 2.50 & -1.00 \\ & & & & & 1.25 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

A matriz de massa de um elemento do fluido é dada pela equação 2.82. Essa equação é função exclusiva da área plana do elemento finito e da velocidade do som.

$$[M_f]^{(e)} = \begin{bmatrix} 1.8519 & 0.9259 & 0.9259 \\ & 1.8519 & 0.9259 \\ sim. & & 1.8519 \end{bmatrix} 10^{-6} \quad (3.38)$$

Somando as matrizes dos 4 elementos nas posições corretas chega-se a matriz global de massa.

$$[M_f] = 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.7037 & 0.9259 & 0.0000 & 0.9259 & 1.8519 & 0.0000 \\ & 5.5556 & 0.9259 & 0.0000 & 1.8519 & 1.8519 \\ & & 1.8519 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9259 \\ & & & 1.8519 & 0.9259 & 0.0000 \\ & & & & 5.5556 & 0.9259 \\ sim. & & & & & 3.7037 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Os nós 4, 5 e 6 do fluido estão sob a condição de contorno da superfície livre com ondas de gravidade. Nesse contorno deve ser adicionado elementos finitos 1D em linha entre os nós 4 e 5, e 5 e 6 para representar tal condição. A equação 2.87 permite calcular a matriz de superfície livre de um desses elementos.

$$[SL]^{(e)} = \frac{L_{ij}^{(e)}}{6g} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{5}{6 \cdot 9.81} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$L_{ij}=5\text{m}$ e $g=9.81\text{m/s}^2$ (3.40)

$$[SL]^{(e)} = \begin{bmatrix} -169895 & 84947 \\ sim. & 169895 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Somando as contribuições dos dois elementos finitos no contorno chega-se a matriz que representa a superfície livre.

$$[SL] = 10^{-6} \begin{bmatrix} & \ddot{p}_4 & \ddot{p}_5 & \ddot{p}_6 \\ 169895 & 84947 & 0 & \\ & \left(\begin{array}{c} 169895 + \\ +169895 \end{array} \right) & 84947 & \\ sim. & & 169895 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_4 \\ \ddot{p}_5 \\ \ddot{p}_6 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

c) Sistema Acoplado

No fundo da cavidade há uma interface entre o fluido e a viga de fundo. As pressões nos pontos 1, 2 e 3 do fluido devem ser acoplados com o movimento dos nós da estrutura. A matriz de acoplamento FS, dada pela equação 2.85, de um dos dois elementos de acoplamento fica.

$$[FS]^{(e)} = \frac{L_{ij}^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$[FS]^{(e)} = \begin{bmatrix} 1.6667 & 0.8333 \\ sim. & 1.6667 \end{bmatrix}$$

Onde $L_{ij}=5m$ (comprimento de um elemento de acoplamento).

Agrupando os graus de liberdade comuns chega-se a matriz geral de acoplamento.

$$[FS] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 1.6667 & 0.8333 & 0 \\ & 3.3333 & 0.8333 \\ sim. & & 1.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

O acoplamento se dá de maneira semelhante ao que foi feito no MDF. A equação abaixo representa simultaneamente as equações de movimento da estrutura e do fluido.

$$\begin{bmatrix} [M_E] & [0] \\ \rho_f [FS]^T & [M_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_E] & -[FS_1] \\ 0 & [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Substituindo as matrizes da estrutura e do fluido, mostradas anteriormente, na equação 3.44 chega-se a equação de movimento acoplada 3.45.

Uma observação importante quanto ao exemplo adotado é a simetria geométrica e de condições de contorno em relação ao eixo vertical da cavidade acústica. Esse fato gera instabilidades numéricas nos autovetores das equações 3.31 e 3.45. As deformadas dos modos de vibração unidimensionais (como será descrito no capítulo 4) não têm a mesma forma da solução analítica, no entanto, quanto aos autovalores não há problema. Para eliminar esse efeito indesejado basta aumentar ligeiramente uma das dimensões da cavidade fazendo $L_y = 1.01 * L_x$, ou resolver o problema com o auxílio de propriedades de simetria / anti-simetria.

Vale aqui ressaltar que em problemas na qual não é observada simetria geométrica e/ou de condições de contorno, o problema não ocorre e o método pode ser usado diretamente com as dimensões reais do problema.

Os autovalores (frequências) das equações 3.7 e 3.19 estão na tabela 3.4. É comparado o valor analítico com o MDF (eq. 3.7) e MEF (eq. 3.19). A diferença nos resultados é reduzida com o uso de malhas com maior número de elementos.

Tabela 3.4 – Comparação das frequências acopladas analíticas e numéricas (MDF e MEF) para os 2 primeiros modos – valores em Hertz.

| Modo acoplado | Autovalor analítico* | Modelo 1D | | Modelo 2D | |
|---------------|----------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | MDF Autovalores da eq. 3.7 | MEF Autovalores da eq. 3.19 | MDF Autovalores da eq. 3.31 | MEF Autovalores da eq. 3.45 |
| 1 | 0.11** | 0.11 | 0.16 | 0.13 | 0.16 |
| 2 | 0.28* | **** | | 0.29 | 0.42 |
| 3 | 0.40* | | | 0.37 | 0.81 |
| 4 | 50.51*** | 49.81 | 62.00 | 60.60 | 61.76 |

*Frequência da superfície livre com fundo rígido no fundo; **Frequência de massa adicional; ***Frequência prevista com a equação 4.6; ****Não existem modos de superfície livre nos modelos 1D, o contorno foi modelado com pressão nula.

Para melhor entender o comportamento físico do exemplo estudado nesse capítulo vide capítulo 4 (seção 4.1). Mesmo considerando que a malha utilizada foi muito grosseira, os resultados das frequências não foram muito bons. Conforme será visto no capítulo 4, malhas mais adensadas produzem excelente resultados.

O objetivo desse capítulo é esclarecer como as equações do problema acoplado são montadas e dessa forma poder auxiliar engenheiros que venham a desenvolver simuladores computacionais para o problema IFE, e não buscar boa performance dos resultados.

3.3 - DISCURSÃO SOBRE O PROBLEMA DE VALORES PRÓPRIOS

As equações 2.96 ou 3.45 para o MEF e 2.97 ou 3.31 para o MDF representam o caso mais completo para o problema acústico fluido-estrutura. No entanto, para simplificar a obtenção dos valores próprios, pode-se eliminar a matriz $[C^*]$ que envolve o amortecimento estrutural e a condição de radiação no infinito no fluido, e ao mesmo tempo fazer $f^* = 0$.

Além disso, no caso de vibrações naturais, os deslocamentos na estrutura e as pressões no fluido variam harmonicamente no tempo, como uma mesma frequência circular ω . Dessa maneira, é possível (transformando por Fourier) escrever a derivada segunda temporal δ em função de δ , ou seja, $\ddot{\delta} = -\omega^2 \cdot \delta$. Então a equação (2.96 ou 2.97) fica,

$$([K^*] - \omega^2 [M^*]) \{ \delta \} = 0 \quad (3.46)$$

A equação 3.46 está na forma de um problema de autovalores e autovetores (direções principais da matriz). A solução dessa equação fornece as frequências naturais de vibração do sistema e as respectivas deformadas modais. O grande inconveniente da equação 3.46 é que as matrizes M^* e K^* não são simétricas, o que leva a necessidade de utilização de sofisticados solucionadores.

A linguagem de computação científica MATLAB[®] resolve o problema clássico de autovalores ($Ax=\lambda x$) com o algoritmo QR2, além de outros algoritmos auxiliares. O caso geral $Ax=\lambda Bx$ é resumido ao caso clássico por meio de inversão da matriz B, logo a equação passa a ser:

$$(B^{-1}A) x = \lambda x \quad (3.47)$$

No entanto, essa técnica de solução exige que B seja inversível, o que não acontece em muitos sistemas fluido-estrutura. Para esse caso mais geral ($Ax=\lambda Bx$), o MATLAB[®] usa o algoritmo geral QZ. Tanto a rotina QZ como QR2 é acompanhada de um algoritmo de balanceamento de matrizes.

Para eliminar o grande inconveniente das matrizes M^* e K^* não serem simétricas, pode-se introduzir uma modificação sugerida por Irons (1965): da segunda linha da equação 3.46 (sem as matrizes $[C^*]$ e $\{f^*\}$) obtém-se “ $p = K_f^{-1} \omega^2 (\rho.[FS]^T \cdot \{u\} + [M_f] \cdot \{p\})$ ”, que é substituída na segunda coluna, multiplicando as duas por equações $[K_f]$. Tem-se um novo sistema, que é simétrico.

$$\left(\begin{array}{cc} \rho_f [K_E] & 0 \\ 0 & [M^*_f] \end{array} \right) - \omega^2 \left(\begin{array}{cc} \rho_f [M_E] + \rho_f^2 [FS][K_f]^{-1}[FS]^T & \rho_f [FS][K_f][M^*_f]^{-1} \\ [M^*_f][K_f]^{-1}\rho_f [FS]^T & [M^*_f][K_f]^{-1}[M^*_f] \end{array} \right) \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.48)$$

Onde $[M^*_f] = [M_f] + [SL]$.

A equação 3.48 recai num problema típico de valores próprios, com matrizes simétricas. No entanto, a inversibilidade da matriz $[K_f]$ nem sempre ocorre. No caso de cavidades acústicas fechadas, ou seja, sem contorno com pressão nula, a matriz $[K_f]$ não é inversível, como foi mostrado no item 2.7 – “Caso Particular: Fluido Incompressível”.

3.4 - MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO

Uma etapa importante da simulação em dinâmica de estruturas é a solução das equações matriciais de múltiplos graus de liberdade no tempo. Em termos práticos, o que se deseja é obter o “time history” do vetor $X(t)$ no tempo. Clough 1960 e Rao 1989 descrevem alguns métodos de resolução no tempo das equações de movimento do tipo:

$$[A]\ddot{\bar{X}} + [B]\dot{\bar{X}} + [C]\bar{X} = \bar{F} \quad (3.49)$$

Onde $[A]$, $[B]$ e $[C]$ são matrizes características do sistema físico (massa, amortecimento e rigidez no caso de estruturas); \bar{F} é o vetor de forças que pode variar no tempo; e \bar{X} é o vetor de deslocamentos dos múltiplos graus de liberdade do sistema (é o que se deseja conhecer no tempo).

Existem duas metodologias de solução da equação 3.49 no tempo (Rao 1989). Uma delas é o Método da Superposição Modal, que baseia-se no conhecimento dos autovalores e autovetores do sistema (ou pelo menos os primeiros). A outra são os métodos diretos de integração no tempo, que é um procedimento passo-a-passo no tempo.

Os métodos de integração no tempo mais conhecidos são: diferenças finitas, Houbolt, Wilson θ e Newmark. A idéia básica é dividir o tempo total de análise em intervalos de tempo Δt , no qual procura-se satisfazer a equação de 3.49 em cada instante discreto de tempo.

Qualquer um desses métodos poderia ser utilizado na integração no tempo das equações das formulações em EF e DF desse trabalho, inclusive a superposição modal, visto que o problema é linear e podem ser obtidos os autovalores/autovetores do sistema. Em função do amplo uso do método de Newmark e da sua generalidade, foi adotado este método nas análises transientes do presente trabalho.

O método de Newmark assume uma variação suave da derivada segunda de X no tempo. A figura 3.9 mostra algumas possibilidades para a evolução de \ddot{X} no tempo. Na figura 3.9^a, a derivada segunda \ddot{X} varia linearmente entre os instantes “i” e “i+1”, enquanto nas figuras 3.9b e 3.9c estão duas propostas para uma evolução constante e em “escada” para \ddot{X} , respectivamente. No presente trabalho foi utilizado a opção da figura 3.9b.

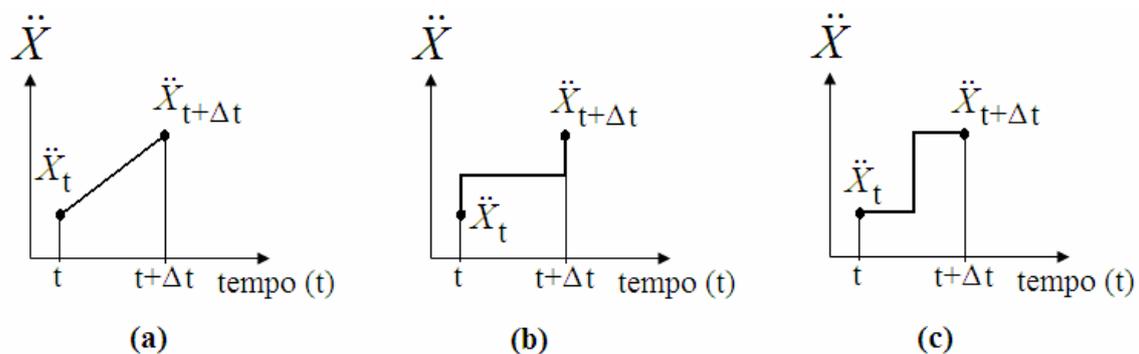


Figura 3.9 – Aproximação para a variação da derivada segunda entre dois instantes de tempo; (a) variação linear ($\beta = 1/6$), (b) constante ($\beta = 1/4$) e (c) variação em “escada” ($\beta = 1/8$).

As equações básicas para o cálculo da variável X e sua derivada primeira num instante subsequente (i+1) são:

$$\dot{X}_{t+\Delta t} = \dot{X}_t + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{X}_t + \Delta t \gamma \ddot{X}_{t+\Delta t} \quad (3.50)$$

$$(3.51)$$

$$\vec{X}_{t+\Delta t} = \vec{X}_t + \Delta t \dot{\vec{X}}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \gamma \ddot{\vec{X}}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{\vec{X}}_{t+\Delta t}$$

Onde β e γ são parâmetros que são determinados em função da estabilidade e precisão requerida. Newmark (Rao 1989) sugere $\gamma=1/2$ para um amortecimento artificial. O valor de β depende do modelo adotado para a variação da derivada segunda \ddot{X} , conforme figura 3.9. Em cada instante de tempo a equação de movimento deve ser plenamente satisfeita, ou seja:

$$[A]\ddot{\vec{X}}_{t+\Delta t} + [B]\dot{\vec{X}}_{t+\Delta t} + [C]\vec{X}_{t+\Delta t} = \vec{F}_{t+\Delta t} \quad (3.52)$$

A partir das três equações anteriores (3.50, 3.51 e 3.52), pode-se obter as três incógnitas $\vec{X}_{t+\Delta t}$, $\dot{\vec{X}}_{t+\Delta t}$ e $\ddot{\vec{X}}_{t+\Delta t}$. A rotina abaixo mostra de forma explícita como calcular essas três variáveis.

Rotina para o método de integração no tempo.

Entradas: A, B, C, $\vec{F}(t)$, $\vec{X}_{t=0}$, $\dot{\vec{X}}_{t=0}$ e $\ddot{\vec{X}}_{t=0}$

1. Cálculo dos parâmetros do método:

$$\gamma = 1/2$$

$$\beta = 1/4$$

$$\Delta t = TT/n;$$

$$a_0 = 1/(\beta * \Delta t^2);$$

$$a_1 = \gamma/(\beta * \Delta t);$$

$$a_2 = 1/(\beta * \Delta t);$$

$$a_3 = 1/(2 * \beta) - 1;$$

$$a_4 = \gamma/\beta - 1;$$

$$a_5 = \Delta t/2 * (\gamma/\beta - 2);$$

$$a_6 = \Delta t * (1 - \gamma);$$

$$a_7 = \gamma * \Delta t;$$

2. Calcular a matriz auxiliar K_{EQ} .

$$K_{EQ} = C + a_0 A + a_1 B$$

3. Para cada instante de tempo (n passos) calcular:

[matriz auxiliar]

$$F_{EQ} = F_t + A(a_0 \vec{X}_t + a_2 \dot{\vec{X}}_t + a_3 \ddot{\vec{X}}_t) + B(a_1 \vec{X}_t + a_4 \dot{\vec{X}}_t + a_5 \ddot{\vec{X}}_t)$$

[Deslocamento]

$$\vec{X}_{t+\Delta t} = [K_{EQ}]^{-1} P_{EQ}$$

[Aceleração]

$$\ddot{\vec{X}}_{t+\Delta t} = a_0 (\vec{X}_{t+\Delta t} - \vec{X}_t) - a_2 \dot{\vec{X}}_t - a_3 \ddot{\vec{X}}_t$$

[Velocidade]

$$\dot{\vec{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\vec{X}}_t + a_6 \ddot{\vec{X}}_t + a_7 \ddot{\vec{X}}_{t+\Delta t}$$

Onde TT é o tempo total de integração e “n” é o número de passos de tempo.

Algoritmo em pseudo-linguagem para o método de integração no tempo.

```
%PASSO 1
g = 1/2
b = 1/4
Dt = TT/n
ao = 1/(b*Dt^2)
a1 = g/(b*Dt)
a2 = 1/(b*Dt)
a3 = 1/(2*b) - 1
a4 = g/b - 1
a5 = Dt/2*(g/b - 2)
a6 = Dt*(1 - g)
a7 = g*Dt

%PASSO 2
Keq = C + ao*A + a1*B

%PASSO 3
Para I=1 até n
    Peq = p(:, I) + A*(ao*U(:, I) + a2*dU(:, I) + a3*ddU(:, I)) + B*(a1*U(:, I) +
        + a4*dU(:, I) + a5*ddU(:, I))
    U(:, I+1) = inv(Keq) * Peq
    ddU(:, I+1) = ao*(U(:, I+1) - U(:, I)) - a2*dU(:, I) - a3*ddU(:, I)
    dU(:, I+1) = dU(:, I) + a6*ddU(:, I) + a7*ddU(:, I+1)
Fim
```

Onde “I” é um contador, “:” indica todas as linhas do vetor (igual ao número de graus de liberdade).

3.5 - CONSIDERAÇÃO DO AMORTECIMENTO ESTRUTURAL

Ao vibrar, uma estrutura dotada de velocidade está sujeita a uma força de origem viscosa que dissipa a energia do sistema, reduzindo a amplitude de vibração e/ou levando a estrutura à condição estática. Clough (1975) expõe uma forma de considerar o amortecimento estrutura muito usada pelos engenheiros estruturais. Este texto é fundamentalmente calcado nessa referência.

A força viscosa é assumida como sendo o produto de uma constante (C) pela velocidade \dot{u} .

$$f_A = C \dot{u} \quad (3.53)$$

Existe um valor crítico da constante C em que a estrutura não oscila quando sujeita a uma condição inicial (u_0 e/ou \dot{u}_0). Para um SSUGL esse valor é

$$C_C = 2 m \omega \quad (3.54)$$

Onde “m” é a massa da estrutura e ω é a frequência natural da estrutura ($\omega=(k/m)^{1/2}$).

Nos sólidos comuns da Construção Civil, a constante de amortecimento C é bem inferior ao valor crítico C_C (equação 3.54). Os valores comuns para a constante C estão em torno de 5% do valor crítico. É conveniente neste caso, expressar o amortecimento como uma fração (ξ) do valor crítico.

$$\xi = \frac{C}{C_C} = \frac{C}{2m\omega} \quad \text{ou} \quad C = \xi 2m\omega \quad (3.55)$$

Para sistemas com múltiplos graus de liberdade, Rayleigh mostrou que a matriz de amortecimento $[C_E]$ pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes de massa $[M_E]$ e rigidez $[K_E]$.

$$[C_E] = a_0 [M_E] + a_1 [K_E] \quad (3.56)$$

$$\text{Onde } \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1/\omega_1 & \omega_1 \\ 1/\omega_2 & \omega_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}$$

Em que ω_1 e ω_2 são as frequências dos 2 primeiros modos de vibração (rad/seg); ξ_1 e ξ_2 são as frações de amortecimento dos 2 primeiros modos de vibração da estrutura.

A equação do SSUGL 3.55 pode ser obtida da equação de Rayleigh. Bastando para isso reduzir a ordem da equação 3.56 (eliminar 2ª linha e 2ª coluna), de onde se obtém $a_0 = 2\omega_1\xi_1$.

4- RESULTADOS NUMÉRICOS

O objetivo deste capítulo é explorar a formulação U-p (MDF e MEF) em exemplos de acoplamento acústico-mecânico. Os casos estudados são resolvidos com modelos numéricos comparando seus resultados com soluções analíticas.

Os primeiros estudos são cálculos de valores próprios de sistemas acoplados e desacoplados. Inicialmente é analisada uma coluna de fluido com uma viga de fundo sobre base elástica (pistão aberto). O segundo exemplo é uma viga esbelta engastada-livre acoplada com um reservatório semi-infinito e o último exemplo é uma barragem de grande porte (87 metros) de altura acoplada com um reservatório semi-infinito. Em todos os casos são estudados os modos desacoplados da estrutura, da superfície livre, da cavidade e os modos acoplados. Nesse último, procura-se identificar o mecanismo dominante de cada modo (estrutura, fluido ou superfície livre).

Sempre que possível são comparadas soluções numéricas e analíticas. É observada a relação entre as frequências naturais de vibração e os parâmetros governantes do fenômeno (compressibilidade principalmente).

Na última seção do capítulo são apresentados os estudos transientes. Cada um dos sistemas acoplados é submetido a uma condição dinâmica de velocidade inicial com vibração livre ou um carregamento senoidal. São comparados modelos numéricos de diferentes graus de complexidade com soluções de modelos simplificados baseados no conceito de massa adicional.

Os casos de autovalores e autovetores estudados nas seções 4.1 a 4.3 são:

- Caso “eig1”: pistão flexível de fundo acoplado com reservatório quadrado aberto para a atmosfera;
- Caso “eig2a”: Viga engastada acoplada com reservatório semi-infinito;
- Caso “eig2b”: Viga rígida-movel acoplada com reservatório semi-infinito;
- Caso “eig3”: barragem acoplada com reservatório longo.

4.1- RESERVATÓRIO CURTO (2D) COM VIGA FLEXÍVEL DE FUNDO E SUP. LIVRE (Caso eig1)

O esquema da figura 4.1 ilustra o exemplo estudado neste momento. Trata-se de um sistema acoplado com uma cavidade quadrada de paredes laterais rígidas, fundo composto por uma viga sobre base elástica. A superfície oposta à estrutura móvel é aberta para a atmosfera (superfície livre), onde podem ser desenvolvidas ondas de gravidade.

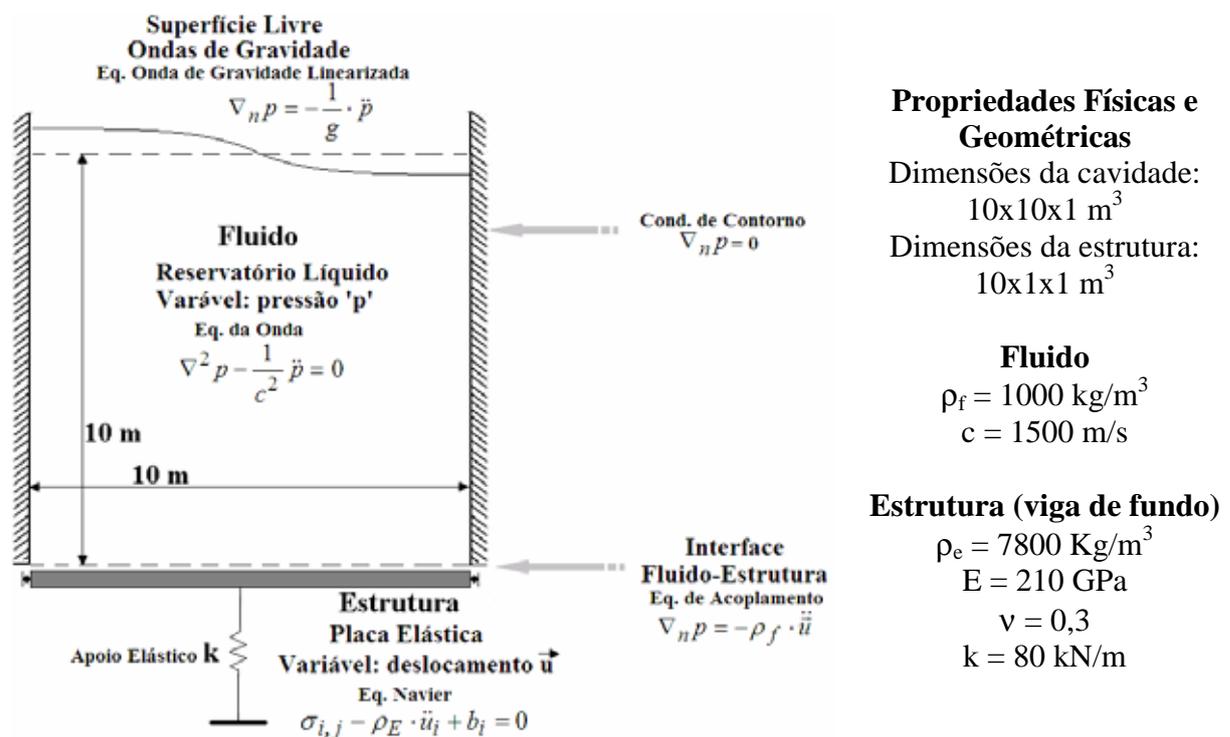


Figura 4.1 – Reservatório curto aberto com fundo flexível.

4.1.1. Modos naturais da estrutura – Viga de fundo

A viga de cisalhamento permite apenas movimentos verticais das seções transversais da viga, ou seja, não é permitido giro desta seção. A viga está apoiada sobre uma base elástica, ou seja, os nós da viga ao movimentarem verticalmente excitam molas que atuam no sentido contrário ao movimento.

a) Solução Analítica

O primeiro modo de vibração da viga pode ser obtido supondo que a estrutura se move como corpo rígido excitando a base elástica (molas). Portanto, o modo fundamental (primeiro) é igual ao modo de um SDOF:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\rho_E \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1}} = 0,161 \text{ Hz} \quad > \text{Período: } 6.20\text{seg} \quad (4.1)$$

Uma solução mais completa para o problema de vibrações naturais da viga de fundo em questão é apresentada no Anexo B – Dinâmica de Vigas. As equações para as frequências (f - Hz) e deformadas modais (ϕ) são:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{KAG}{\bar{m}} \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\bar{k}}{KAG} \right]} \quad \phi(x) = A \cdot \cos \left(\sqrt{\left(\frac{\bar{m}}{KAG} 2\pi f \right)^2 - \frac{\bar{k}}{KAG}} \cdot x \right) \quad (4.2)$$

Onde KAG é a rigidez ao cisalhamento ($5/6 \cdot 1\text{m}^2 \cdot 80.8\text{GPa}$), \bar{m} é a massa por unidade de comprimento da viga (7800 Kg/m), L é o comprimento da viga (10m), \bar{k} é a rigidez distribuída do apoio elástico (80kN/m/10m), “x” é a ordenada sobre o eixo da viga (m), “n” o número do modo. Vale observar que para n=0 (1º modo) recai no caso da frequência de corpo rígido (equação 4.1).

A figura 4.2 abaixo mostra as formas modais e as frequências analíticas dos cinco primeiros modos de vibração da viga de fundo.

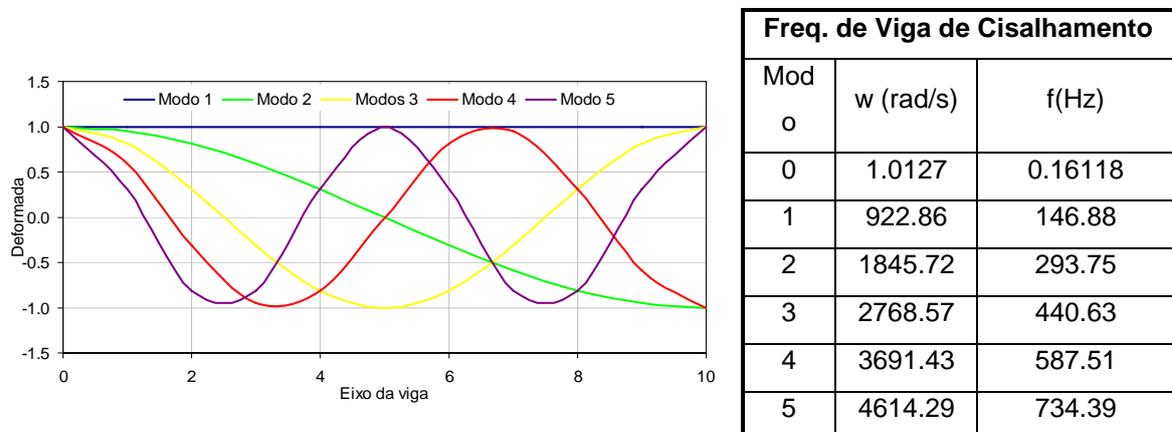


Figura 4.2 – Deformadas e frequências analíticas dos modos naturais da viga de fundo.

b) Solução Numérica

A rigidez total do apoio elástico é distribuída entre os nós da estrutura. Os graus de liberdade correspondentes aos deslocamentos horizontais são restringidos em todos os nós da malha de elementos finitos. Dessa maneira, o sólido terá comportamento muito próximo de uma viga de cisalhamento, visto a impossibilidade de movimento horizontal dos nós da malha e conseqüentemente não rotação das seções da viga.

Foi feito um estudo preliminar de convergência de malha. A figura 4.3 abaixo mostra 7 malhas adotadas e a convergência dos valores das freqüências numéricas com relação às analíticas (tabela da figura 4.2) dos 5 primeiros modos da viga de fundo.

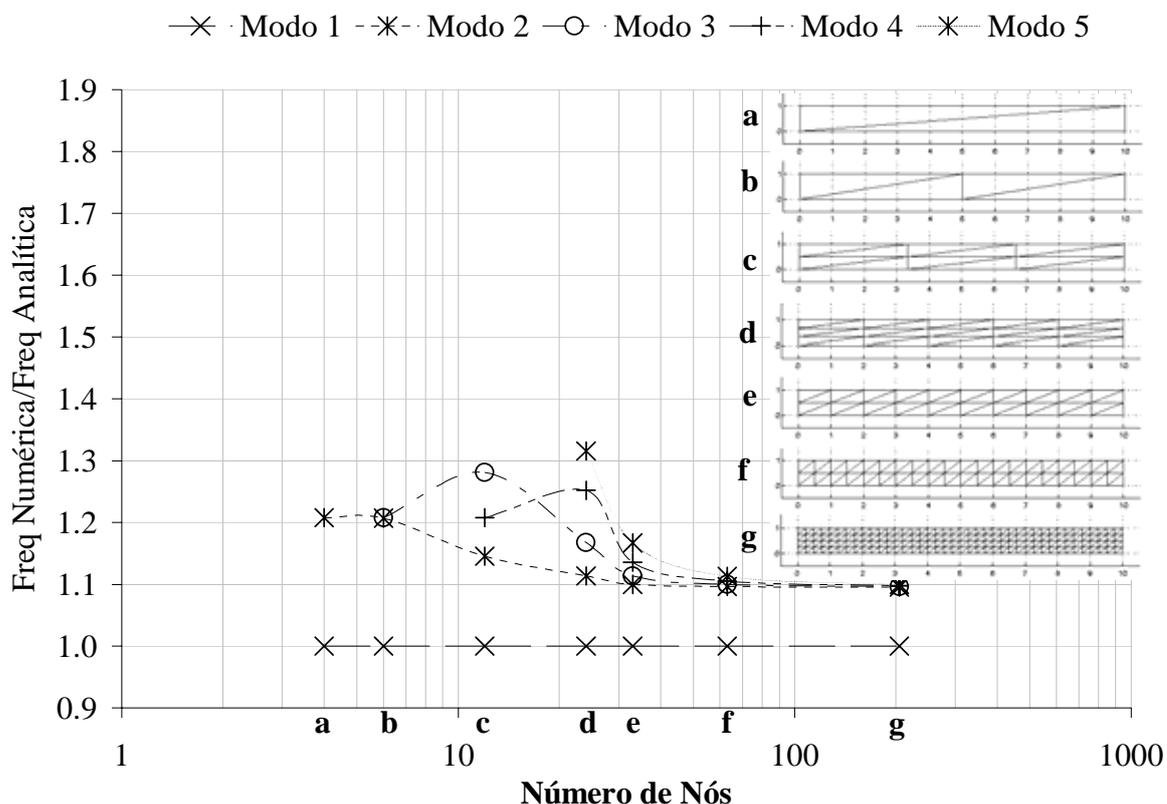


Figura 4.3 – Estudo de convergência das freqüências numéricas da viga de fundo (MEF).

A malha adotada para a viga de fundo possui 63 nós e 80 elementos. As deformadas modais e freqüências naturais (4 primeiras) estão mostradas na figura 4.4 abaixo. Comparando com a figura 4.2, observa-se a concordância dessas 4 deformadas numéricas com as respectivas analíticas, apesar de uma pequena discrepância nas freqüências.

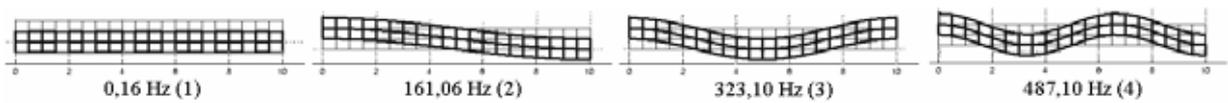


Figura 4.4 - Modos numéricos de vibração da viga de fundo sobre base elástica (MEF).

4.1.2. Modos Naturais da Cavidade

Para estudar o reservatório líquido separadamente é necessário eliminar a estrutura de fundo e adotar um contorno rígido em seu lugar. A superfície livre é modelada com EF especiais que permitem que ondas de gravidade suaves se formem. A figura 4.5 ilustra a cavidade em estudo e o modelo numérico em EF.

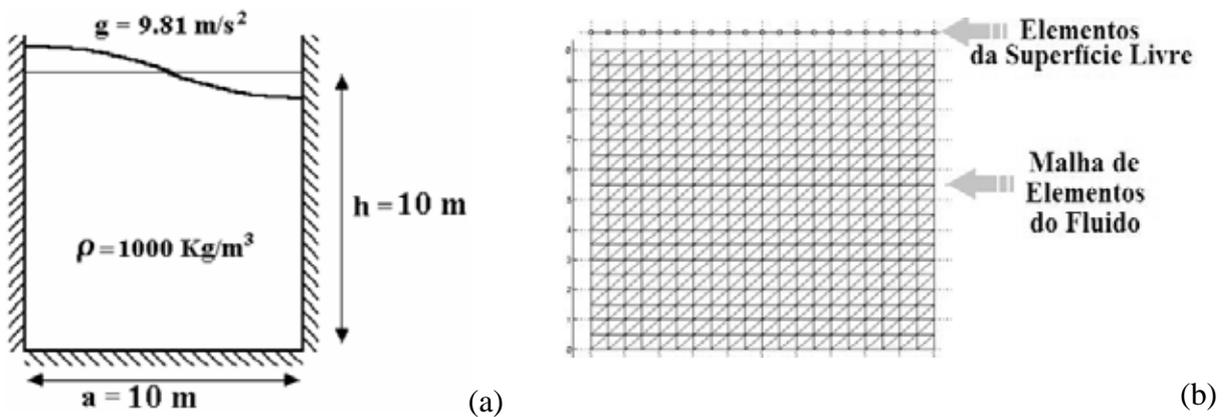


Figura 4.5 – Reservatório retangular com superfície livre, (a) problema físico, (b) malha numérica.

a) Solução Analítica

Os modos naturais de vibração do fluido contido na cavidade acústica da figura 4.5 dividem-se em dois grupos: os modos de superfície livre e os modos da cavidade. Os primeiros ocorrem devido à condição de contorno existente na superfície superior do fluido, estes são, em geral, de frequências mais baixas. Já os modos de cavidade possuem frequências mais altas, e podem ser previstos, com boa precisão, colocando-se pressão nula na superfície livre.

Superfície Livre

As frequências da superfície livre são dadas pela equação D.15 do Anexo D. A frequência do modo fundamental é:

$$\omega_1^2 = \frac{9.81 \cdot 3.14}{10} \cdot \tanh\left(\frac{3.14 \cdot 10}{10}\right) \quad \omega_1 = 1.75 \text{ rad/s} \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0.279 \text{ Hz} \quad (4.3)$$

As deformadas modais e frequências correspondentes aos 4 primeiros modos de superfície estão mostradas na figura 4.6 no plano x-z. As imagens dos modos foram obtidos com as equações D.19 e D.20 do Anexo D.

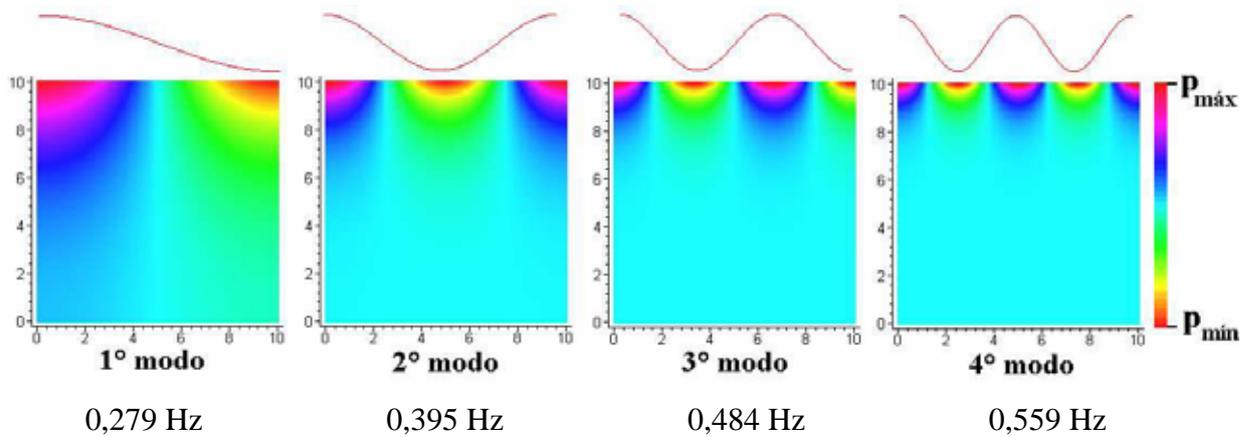


Figura 4.6 – Deformadas modais analíticas da superfície livre.

Cavidade

Para efeito de cálculo de frequências analíticas a superfície livre é assumida com pressão nula. Dessa forma a solução dada pelo Método da Matriz de Transferência (Pedroso 2004) é:

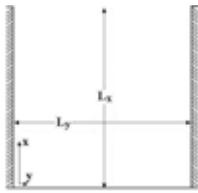
$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2L_y}\right)^2} \quad (4.4)$$

$$p(x, y) = \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \cos\left(\frac{(2m+1) \cdot \pi \cdot y}{2L_y}\right) \quad (4.5)$$

$$n=0,1,2,3,\dots \quad m=0,1,2,3,\dots$$

Substituindo as constantes físicas e geométricas da figura 4.1, monta-se a tabela abaixo com os valores das frequências naturais da cavidade acústica.

Tabela 4.1 - Freqüências e modos de vibrações livres analíticas de uma cavidade curta (2D), aberta na extremidade superior e fechada na inferior.



Freqüências Naturais

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{(2m+1)}{2L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_x}\right)^2}$$

m=0,1,2,3... n=0,1,2,3...

Deformadas Modais

$$\tilde{p}(x) = \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2L_y} y\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L_x}\right)$$

m=0,1,2,3... n=0,1,2,3...

| Modo (m - n) | Freqüência | Descrição | Deformada 2D | Deformada 3D (a direção "y" da cavidade está invertida) |
|--------------|------------|--|--------------|---|
| 0 - 1 | 37,50 Hz | Modo unidimensional na direção "x". Corresponde ao 1º modo do caso 1c (fig. 3.5). | | |
| 1 - 1 | 83,85 Hz | A deformada final é o produto de um quarto de seno (x) e uma meia onda de co-seno (y). | | |
| 0 - 2 | 112,50 Hz | 2º modo transversal na direção "x". Corresponde ao 2º modo do caso 1b (fig. 3.5). | | |
| 1 - 2 | 135,21 Hz | Produto de ¾ de um seno (x) com um meio co-seno (y) | | |
| 2 - 2 | 154,62 Hz | Produto de duas ondas co-senos completas nas direções "x" e "y". | | |

b) Solução Numérica

Superfície Livre

A figura 4.5b ilustra a malha de elementos finitos. São utilizados 800 elementos triangulares 2D de 3 nós e 20 elementos 1D de 2 nós para a superfície livre.

Para averiguar a acurácia da formulação numérica em EF fez-se um estudo de convergência do autovalor numérico com relação à frequência analítica dos 5 primeiros modos de vibração da superfície livre. Foram utilizadas 5 malhas regulares, na qual houve uma grande variação do número de nós, representado no eixo horizontal do gráfico. O eixo vertical é uma relação entre a frequência numérica e a frequência analítica da equação D.15.

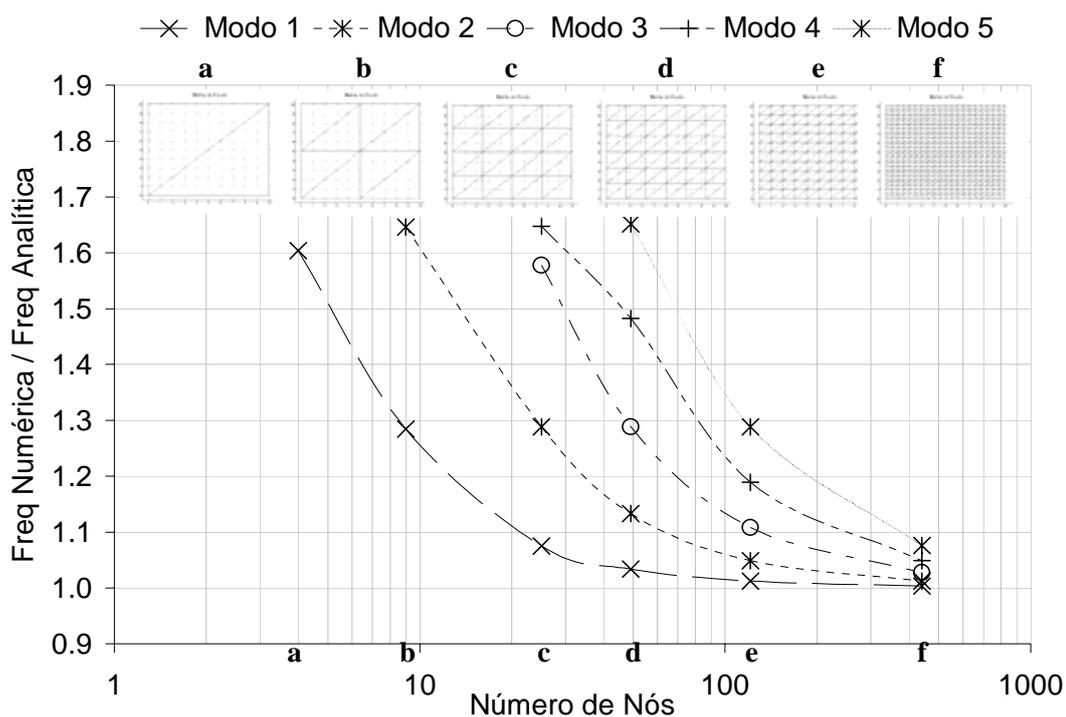
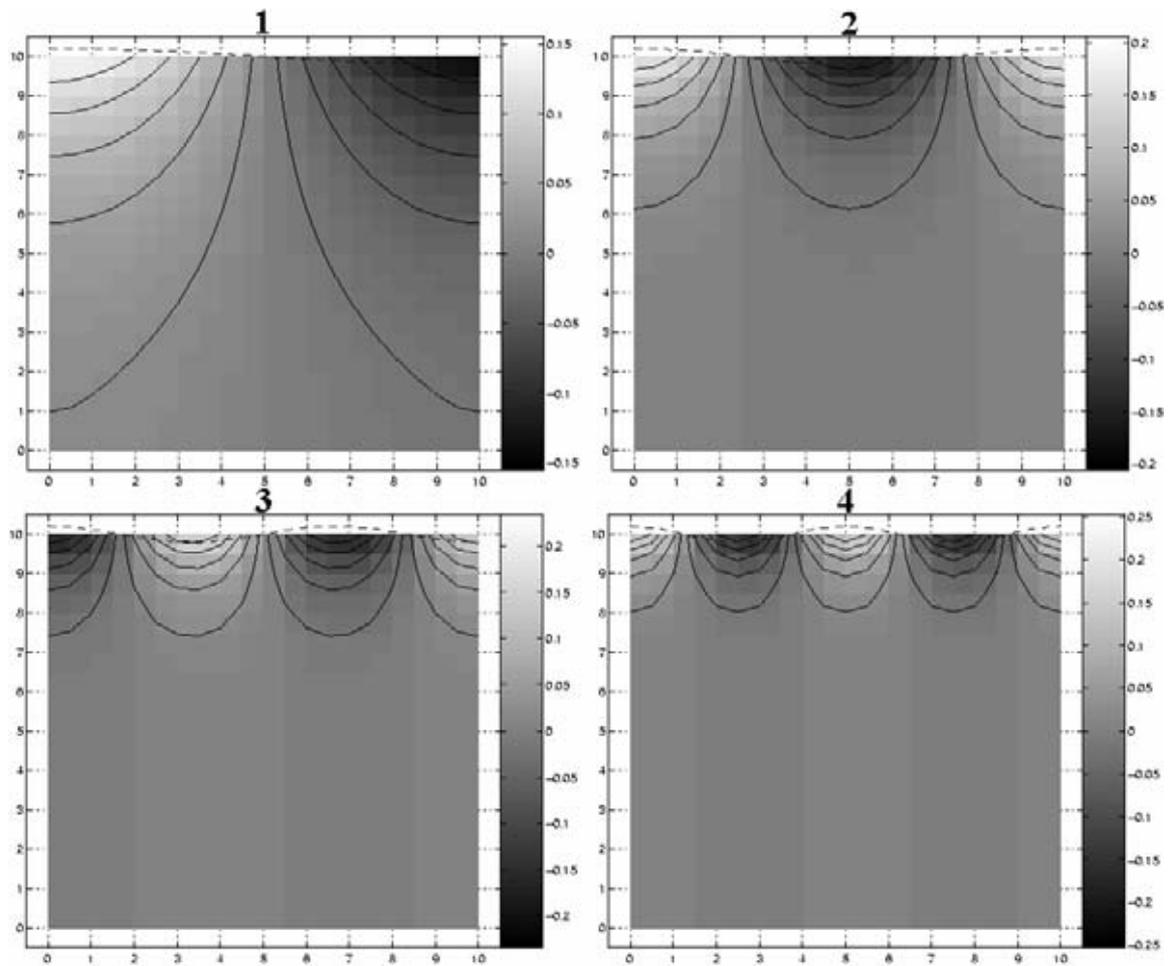


Figura 4.7 – Estudo de convergência dos modos numéricos de vibração da superfície livre (MEF).

As deformadas modais numéricas para a malha adotada estão mostradas na figura 4.8. As frequências numéricas estão também indicadas nessa mesma figura.



(0.280Hz , 0.400Hz, 0.497Hz, 0.586Hz)

Figura 4.8 – Modos numéricos de vibração da superfície livre (MEF).

Cavidade

Para os modos da cavidade também foi feito um estudo de convergência do modelo numérico em EF com relação à solução analítica para as frequências dos 5 primeiros modos (tabela 4.1) - as curvas estão na figura 4.9. Observa-se uma convergência mais rápida do que nos modos da superfície livre (figura 4.7).

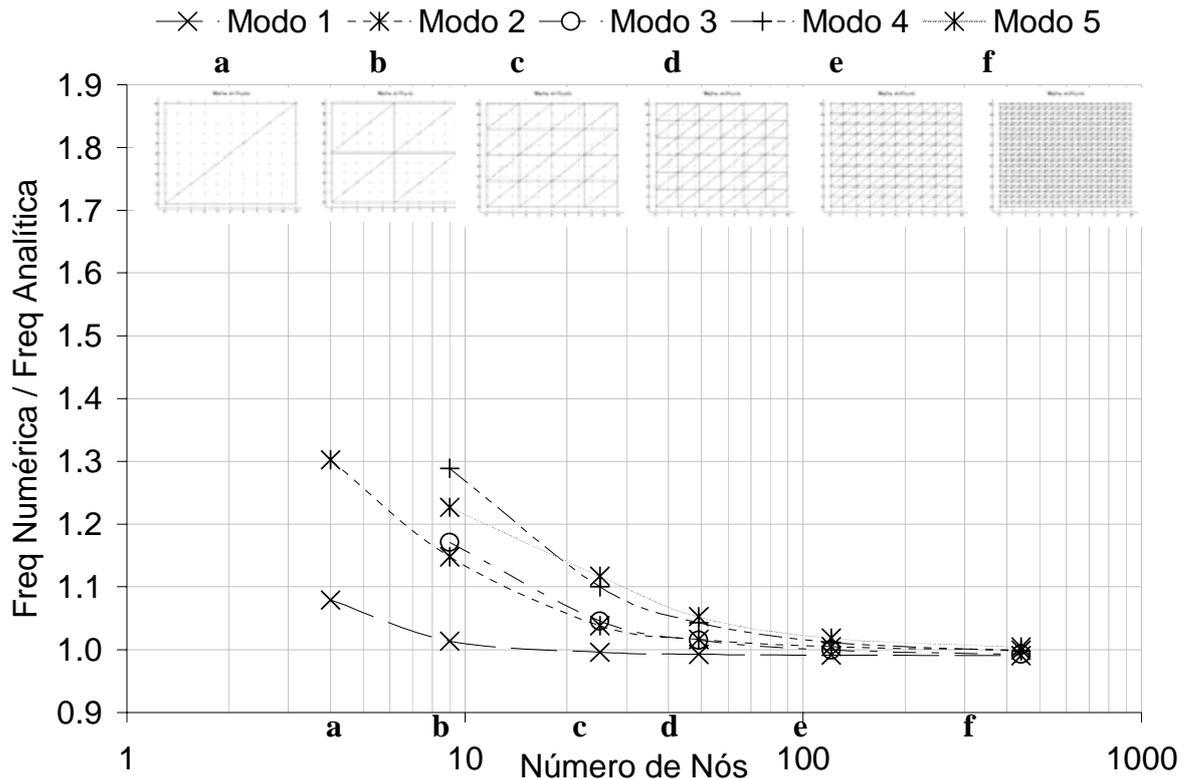


Figura 4.9 – Convergência dos modos da cavidade (MEF).

A figura 4.10 mostra os modos típicos da cavidade, e as respectivas frequências naturais. Observa-se uma boa concordância das frequências numéricas com as analíticas (tabela 4.1). Verifica-se que a superfície livre pouco influencia nos modos de cavidade (Morais 2000, Sousa Jr 2003), pois são reproduzidas praticamente as frequências e deformadas modais de uma cavidade fechada em três lados e aberta na parte superior ($p=0$) (tabela 4.1).

O primeiro modo da cavidade corresponde ao 22º modo da seqüência completa. Os primeiros modos (1º ao 21º) são todos de superfície livre. Vale observar que existem 21 nós, ou graus e liberdade, na superfície livre da malha da figura 4.5.

Como o pacote de modos de Superfície Livre está muito distante dos modos acústicos da cavidade, aqueles praticamente não afetam estes da cavidade.

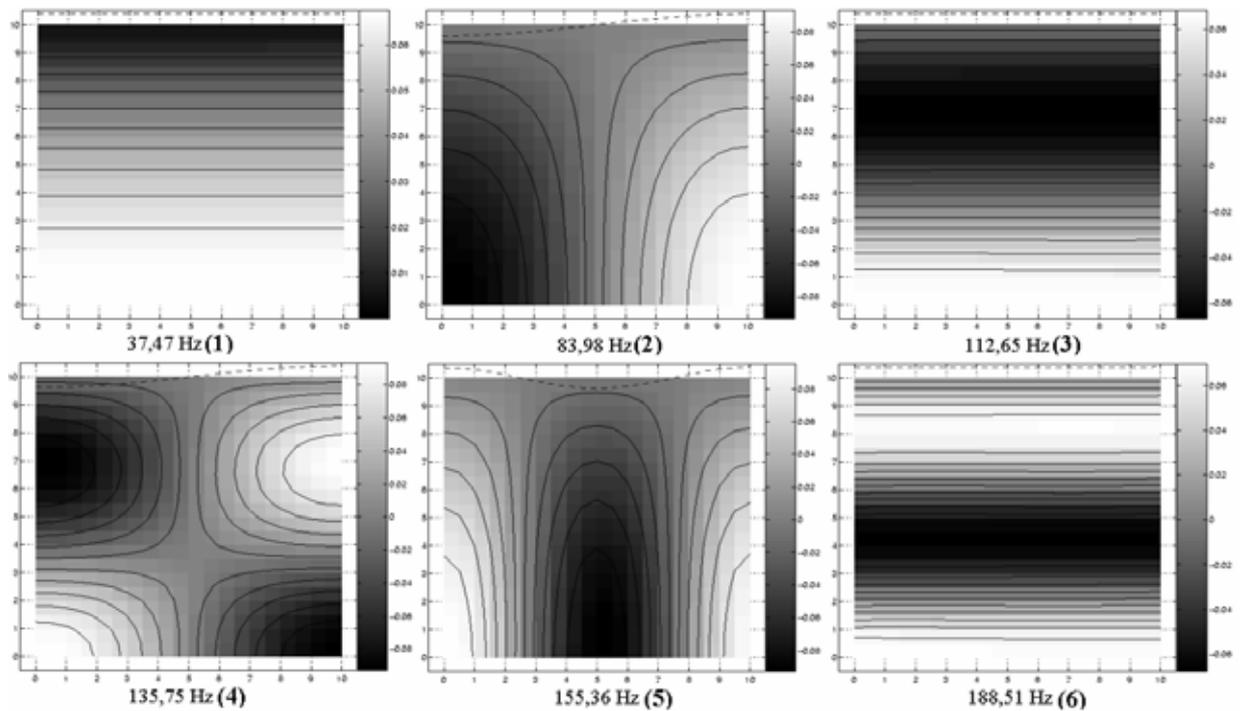


Figura 4.10 – Seis primeiros modos numéricos de vibração de cavidade com efeito da superfície livre (MEF).

4.1.3. Modos Acoplados

a) Solução Analítica

As frequências naturais são as raízes da seguinte equação transcendental.

$$\alpha - \left(\frac{\omega L}{c}\right)^2 \cdot \mu - \frac{\omega L}{c} \cdot \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \quad (4.6)$$

Onde α , μ e $\omega L/c$ são importantes parâmetros adimensionais que governam os fenômenos fluido-elásticos. Suas expressões e significados estão apresentados abaixo.

| | |
|---|--|
| $\alpha = \frac{k}{\rho_f \cdot c^2 \cdot L/A}$ | Parâmetro de rigidez: é a relação entre a rigidez da estrutura e da cavidade acústica, devido à compressibilidade do fluido. |
| $\mu = \frac{m_E}{\rho_f \cdot A \cdot L}$ | Parâmetro de massa: relação entre a massa da estrutura e a massa da cavidade acústica. |
| $\frac{\omega L}{c}$ | Parâmetro de compressibilidade - também pode ser entendida como uma espécie de número de Mach. |

Para os dados do problema em estudo contidos na figura 4.1, os valores das frequências calculadas estão apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Valores analíticos das frequências unidimensionais – analogia do pistão.

| Modo de pistão | Parâmetros Adimensionais | | | Frequência (Hz) ($=\omega/2\pi$) |
|----------------|--------------------------|-------|--------------|------------------------------------|
| | α | μ | $\omega L/c$ | |
| 1 | 3.56E-05 | 0.78 | 0.0046 | 0,11 |
| 2 | | | 2.116 | 50,51 |
| 3 | | | 4.965 | 118,53 |

O modo fundamental de vibração do pistão acoplado pode ser previsto facilmente pelo conceito de Massa Adicional. Basta adicionar toda a massa do reservatório (cavidade) à estrutura, assim a frequência será:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_E + m_{AD}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{80000}{\rho_E \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 + \rho_f \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1}} = 0,11 \text{ Hz} \quad (4.7)$$

Onde m_E é a massa da estrutura e m_{AD} a massa adicional (igual a massa de líquido do reservatório).

b) Solução Numérica

A malha de elementos finitos está representada na figura 4.11. A malha do fluido e da estrutura são as mesmas que foram adotadas nos casos desacoplados: 441 nós, 800 elementos triangulares 2D e 20 elementos lineares 1D (sup. livre) para o fluido; 63 nós e 80 elementos triangulares 2D para a estrutura; 20 elementos lineares 1D para a interface fluido-estrutura.

Algumas deformadas modais estão na figura 4.12. Nessa figura, não estão os modos tipicamente de superfície livre, visto que estes possuem deformadas modais que reproduzem praticamente o caso desacoplado (figura 4.8). O primeiro modo foi suprimido dessa seqüência, ele é de frequência nula e pressão constante em toda a cavidade.

Numa primeira observação nos modos, nota-se que o modo de massa adicional teve frequência superior ao previsto analiticamente. Esta discrepância deve-se a contribuição do efeito da superfície livre nesse modo, uma vez que estes possuem frequências próximas à frequência de massa adicional.

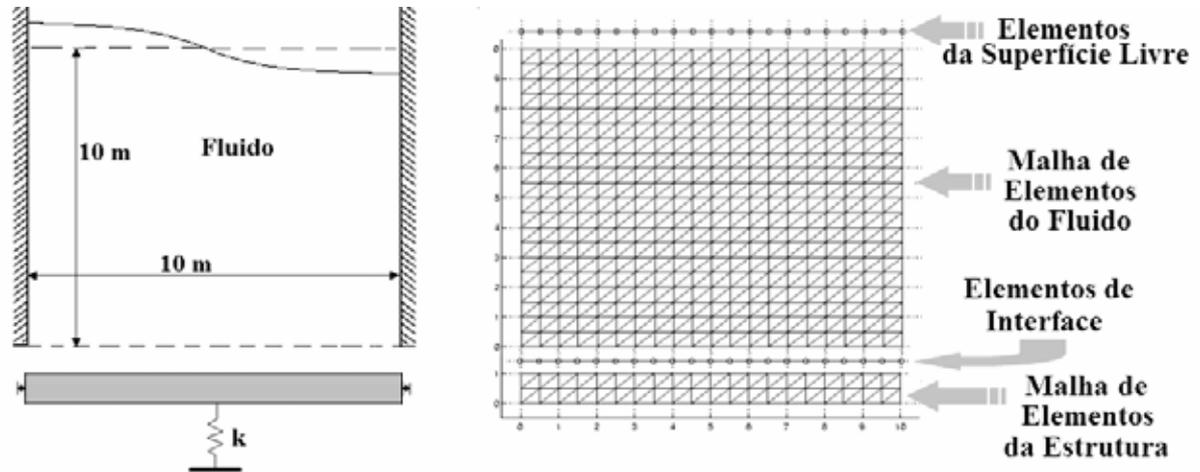


Figura 4.11 – Modelo numérico para o problema acoplado (MEF).

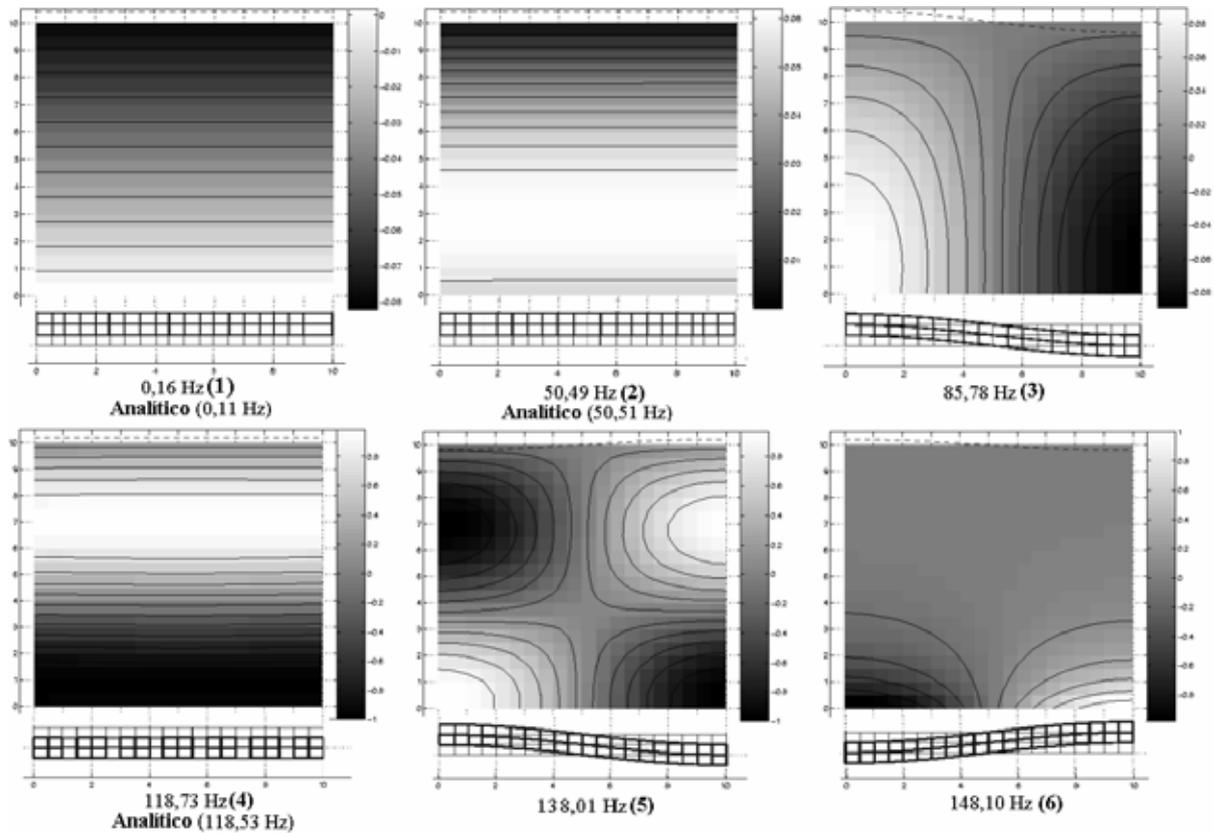


Figura 4.12 - Modos de vibração acoplados (MEF).

4.1.4. Modelagem com Diferenças Finitas

O modelo em DF é igual ao mostrado no capítulo 3, porém com uma maior quantidade de nós, que por sua vez é a mesma do modelo em EF (figura 4.11). A metodologia de estudo do caso é a mesma praticada anteriormente. Primeiramente, obtém-se os modos dos meios de forma separada e posteriormente do sistema acústico-mecânico acoplado. Os modos de vibração do reservatório líquido são também separados em grupos: os modos dominados pelo fenômeno de vibração da superfície livre, os modos característicos da cavidade e os modos dominados pela estrutura.

Para todos os casos também são realizados estudos de convergência, que mostra a sensibilidade da razão entre a frequência numérica - analítica com o refinamento da malha (número de nós).

As figuras a seguir estão na seguinte seqüência:

- Modos de vibração da estrutura: figuras 4.13 (estudo de convergência das frequências naturais da viga) e 4.14 (modos de vibração da viga).
- Modos de vibração do reservatório: figuras 4.15 (estudo de convergência das frequências naturais da superfície livre), 4.16 (estudo de convergência das frequências naturais da cavidade) e 4.17 (deformadas modais da superfície livre e cavidade).
- Modos de vibração acoplados: figura 4.14.

Comparando as deformadas modais numéricas da figura 4.14 com as analíticas da figura 4.2, observa-se um bom acordo do método numérico. Quanto às frequências, também é evidente a boa concordância entre simulação numérica e os valores analíticos.

Esse bom desempenho do MDF no problema de vibração de vigas de cisalhamento sobre base elástica é também justificado pelo fato da derivada do operador de rigidez da equação de movimento ser de segunda ordem no deslocamento. No caso de uma viga em flexão pura, a derivada é de quarta ordem e o método não é tão eficiente, como será mostrado na seção 4.2.

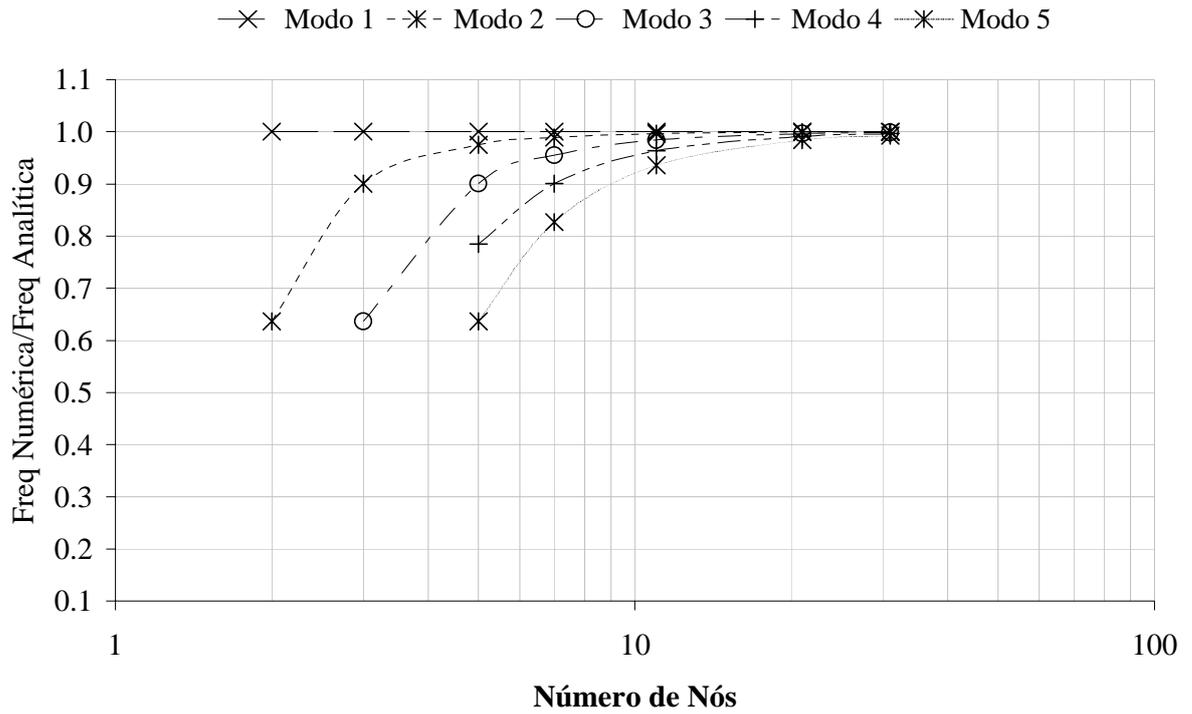


Figura 4.13 - Convergência das 5 primeiras freqüências naturais da estrutura (MDF).

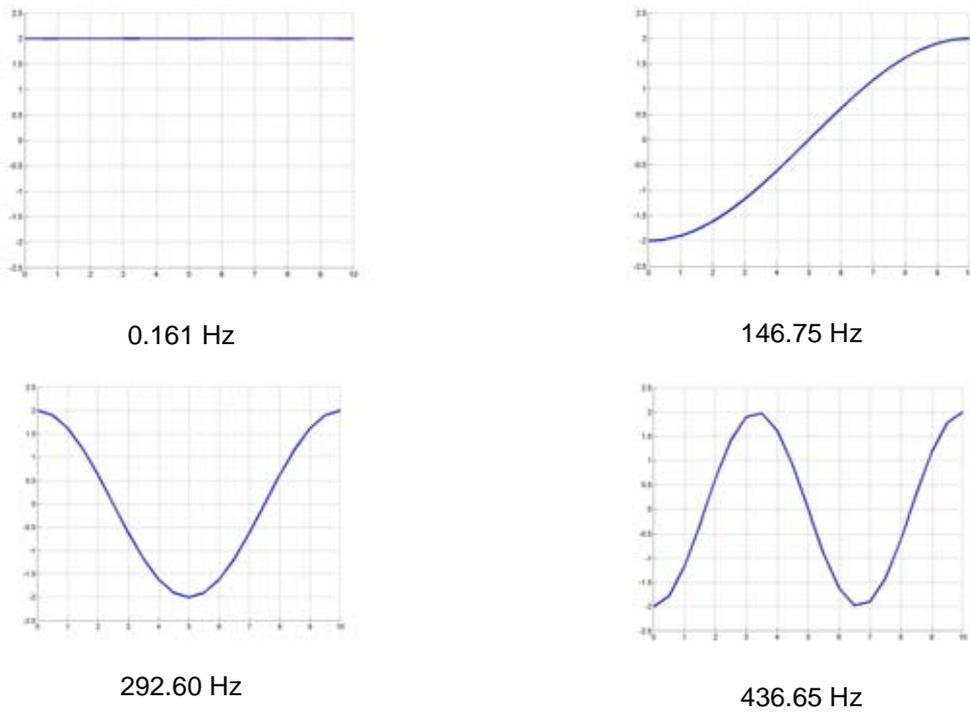


Figura 4.14 – Modos naturais da viga de cisalhamento (MDF).

O modelo MDF também apresentou rápida convergência na modelagem da superfície livre do reservatório. E quando se compara os gráficos das figuras 4.7 e 4.15, nota-se que o MDF tem convergência melhor que o MEF na predição das frequências de vibração da superfície livre da cavidade.

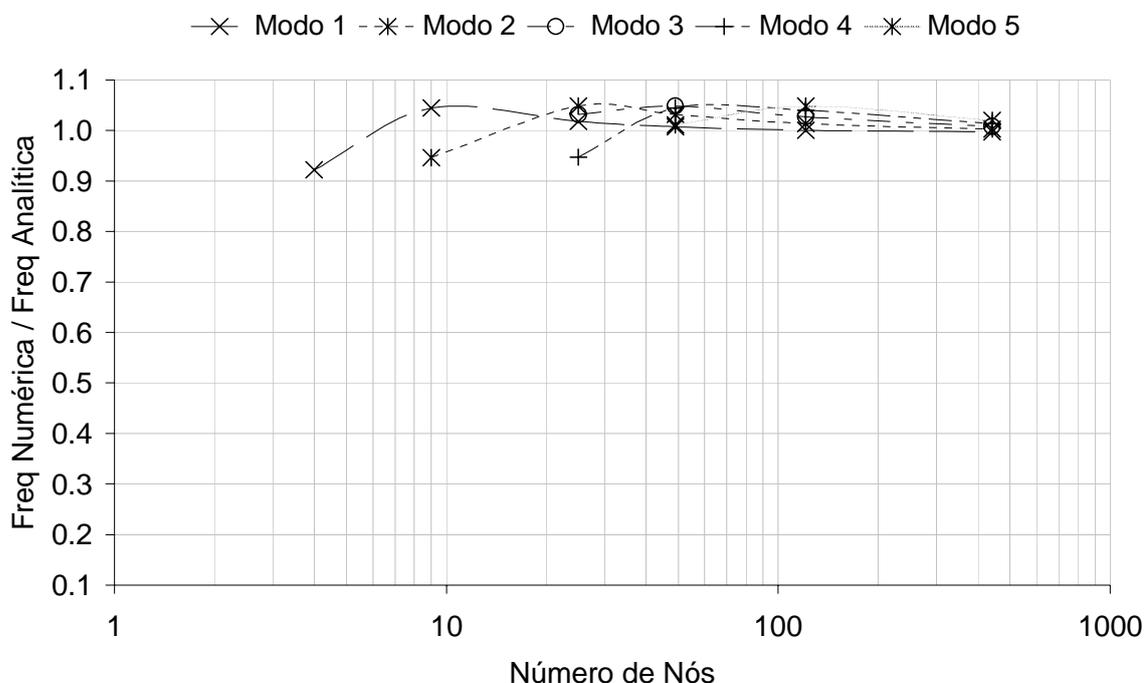


Figura 4.15 – Convergência das 5 primeiras frequências naturais da superfície livre (MDF).

Fazendo a mesma comparação para os gráficos de convergência dos modos da cavidade (figuras 4.9 – MEF, e 4.16 – MDF), pode-se também atestar desempenho semelhante do MDF frente ao MEF na predição de frequências naturais desses modos.

Quanto as deformadas modais do fluido (superfície livre e cavidade) calculadas pelo MDF (figura 4.18), pode-se afirmar que eles são idênticos aos modos analíticos e numérico via MEF (figura 4.17).

Os modos acoplados do modelo em Diferenças Finitas também são consistentes, em frequências e deformadas modais, com resultados analíticos e numéricos via Elementos Finitos.

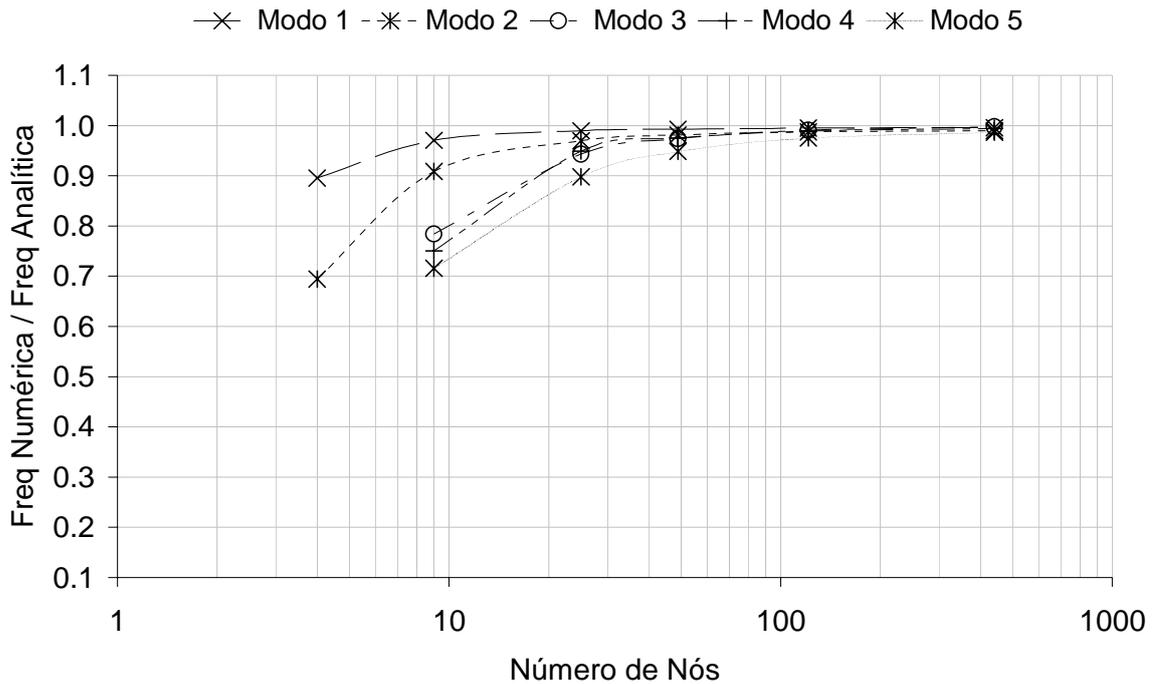


Figura 4.16 – Estudo de convergência das 5 primeiras frequências naturais da cavidade (MDF).

4.1.5. Discussão dos Resultados

O primeiro modo de vibração da cavidade acústica é um modo com frequência nula e campo de pressão constante. Este modo também aparece nos resultados acoplados, ele é equivalente a um “modo de vibração” de corpo rígido das estruturas hipostáticas.

Os modelos numéricos apresentaram um bom acordo com as soluções analíticas. O MDF conseguiu reproduzir adequadamente as frequências de superfície livre, convergindo para a frequência analítica com malhas menos densas que o MEF. No entanto, pode-se usar malha com diferentes graus de refinamento na região próxima a superfície livre, para melhorar a resposta numérica com menos esforço computacional, principalmente no caso do MEF.

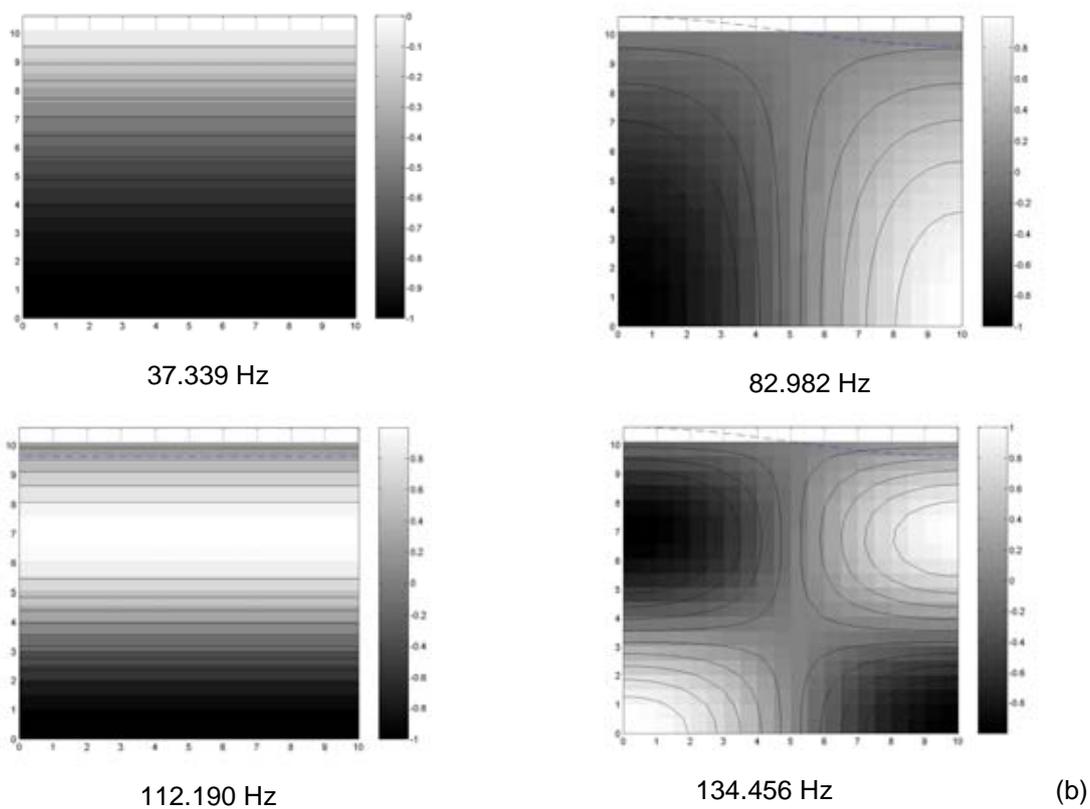
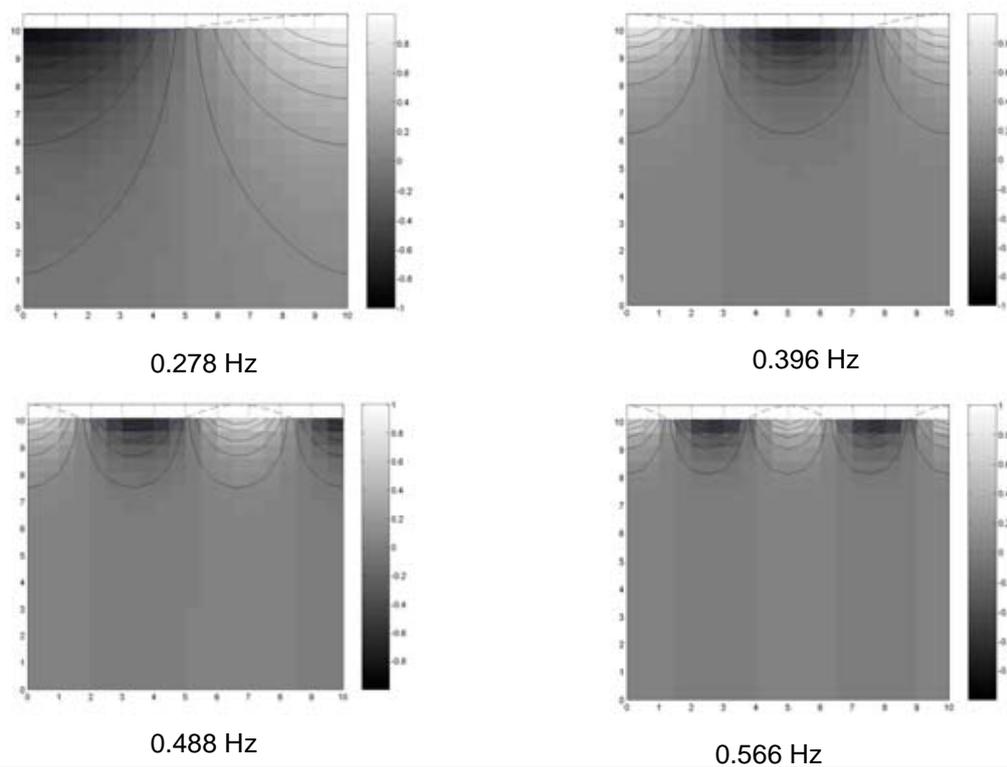


Figura 4.17 – Modos naturais do reservatório (MDF). (a) Modos da superfície livre; (b) Modos cavidade e estrutura.

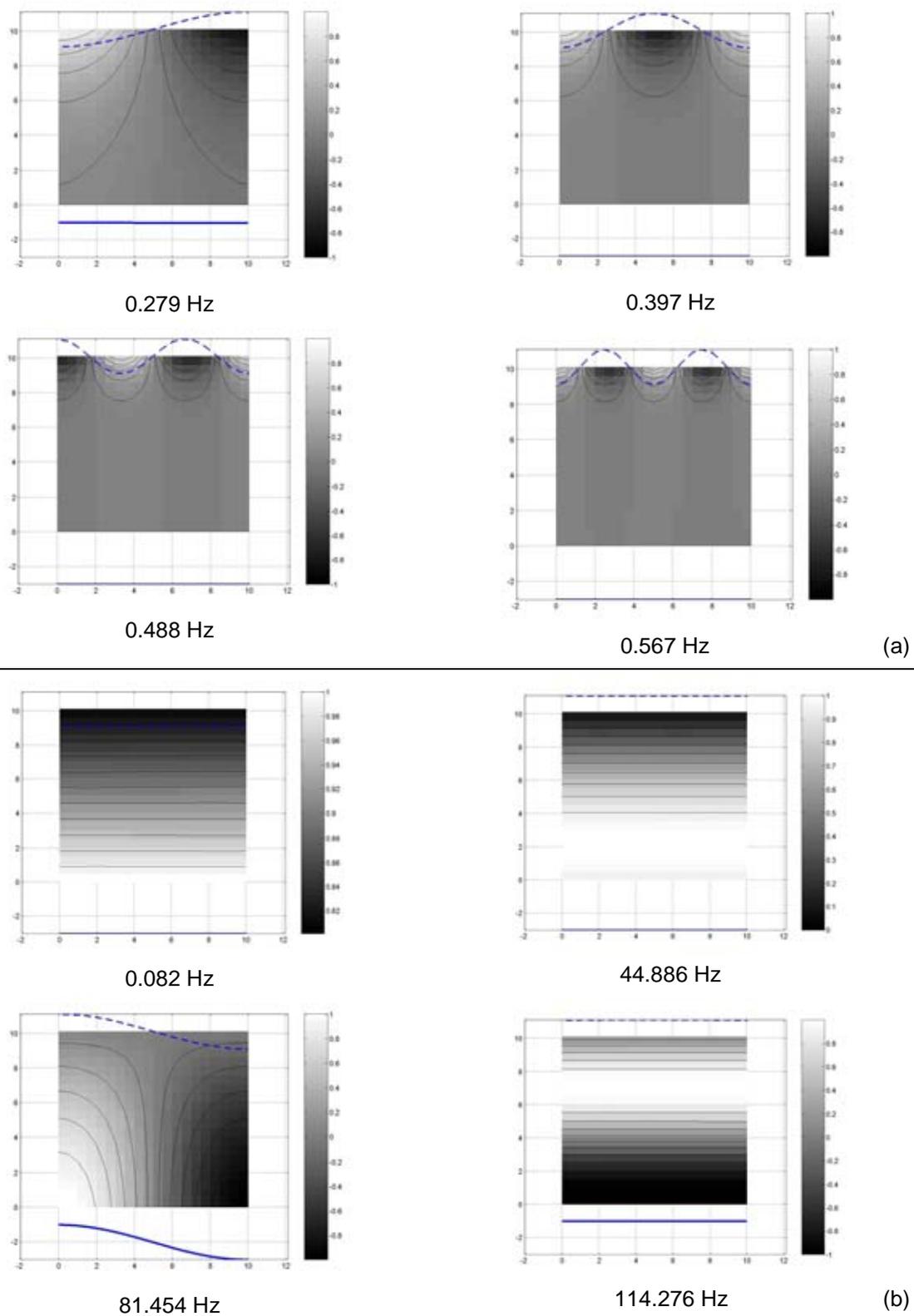


Figura 4.18 – Modos naturais acoplados (MDF). (a) dominados pela superfície livre; (b) dominados pela cavidade e estrutura.

A figura 4.19 mostra a distribuição de pressões normalizada sobre a parede vertical do reservatório no primeiro modo de vibração. São comparadas as respostas analíticas (equação 8c) e numéricas (MEF e MDF). Observa-se um bom acordo entre as soluções numéricas e analítica.

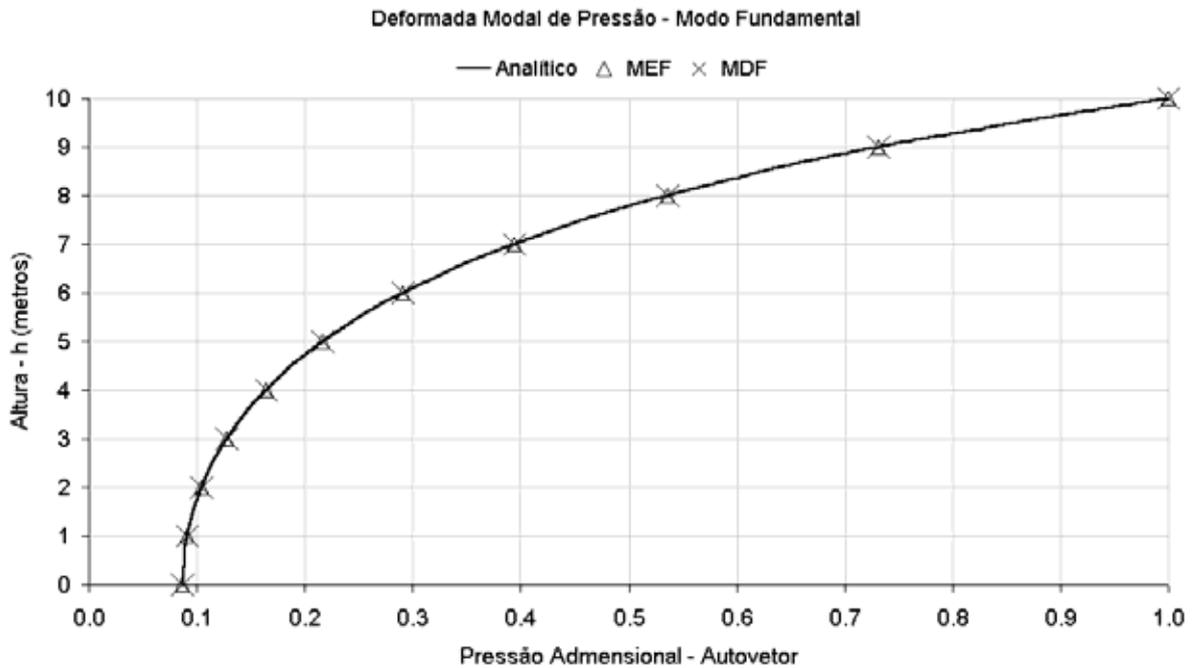


Figura 4.19 – Distribuição de pressões na parede vertical do reservatório – modo fundamental.

O modo fundamental de vibração de superfície livre pode ser bem aproximado pela equação D.17 para uma altura do nível da água inferior a 2 metros ($h/a = 0,2$) – águas rasas – conforme mostra o gráfico da figura 4.20. Neste gráfico existem duas curvas teóricas: uma da equação analítica exata para a frequência da superfície livre (equação D.15) e uma outra para a equação aproximada das frequências (equação D.17) – águas rasas. Também aparecem alguns pontos sobre o gráfico (triângulos) que mostram resultados numéricos dados pelo Método dos Elementos Finitos. Na verdade, estas malhas tentam simular o comportamento do primeiro modo de superfície livre para várias razões altura de água-largura do reservatório (h/a).

Observa-se também, que a frequência fundamental da superfície livre é limitada a um valor em torno de 0,28 Hz, para profundidades do nível da água superiores a 1m ($h/a > 0,1$).

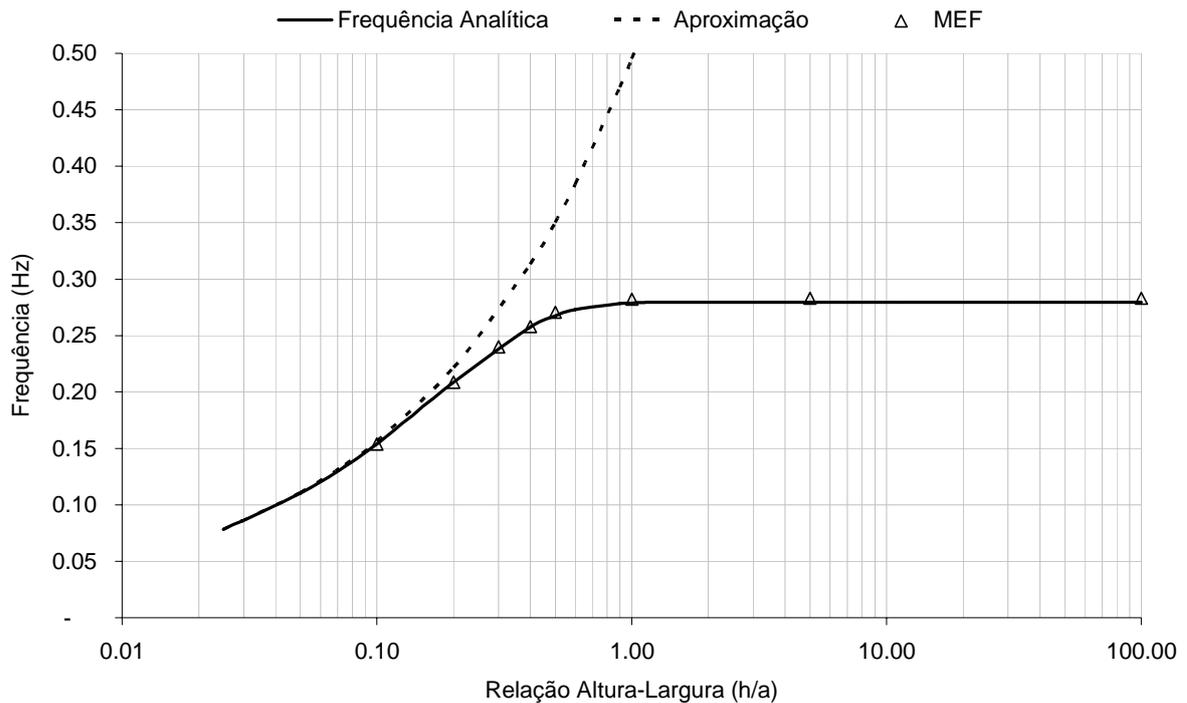


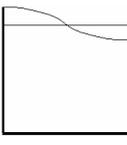
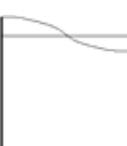
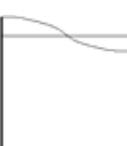
Figura 4.20 – Frequência natural de vibração (1º modo) em função da relação nível da água-largura do reservatório (h/a).

Para as diferentes alturas do nível da água houve também um bom acordo entre as soluções analíticas e numéricas. Isso só ocorre porque o parâmetro de compressibilidade do fenômeno de vibração de superfície livre é baixo, ou seja, a solução analítica incompressível é válida para o exemplo estudado.

$$\text{Parâmetro de Compressibilidade} \Rightarrow \frac{\omega L}{c} \approx \frac{1\text{Hz} \cdot 2\pi \cdot 10}{1500} = 0,04 \text{ (incompressível)}$$

Os primeiros modos de vibração acoplados reproduzem os modos de superfície livre, em que a estrutura pouco influencia. Após esta seqüência surgem os modos típicos da cavidade e estrutura de fundo. Nestes, a influência da superfície livre é pequena, com exceção do primeiro modo de massa adicional que tem frequência próxima as frequências de vibração da superfície livre. A tabela 4.3 resume as frequências acopladas e desacopladas estudadas nesse exemplo.

Tabela 4.3 - Resumo com as frequências naturais do pistão curto com fundo flexível.

| Caso Estudado | | Modo 1 | Modo 2 | Modo 3 | Modo 4 | Modo 5 | Método | |
|--|---|---|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| Desacoplado |  | 0.16 (E) | 161.06 (E) | 323.1 (E) | 487.10 (E) | 654.02 (E) | Numérico | |
| | | 0.16 (D) | 146.75 (D) | 292.60 (D) | 436.65 (D) | 578.00 (D) | | |
| | | 0.16 | 146.88 | 293.75 | 440.63 | 587.51 | Analítico | |
| |  | Superf. | 0.00 (E) | 0.28 (E) | 0.40 (E) | 0.50 (E) | 0.58 (E) | Numérico |
| | | Livre | 0.00 (D) | 0.28 (D) | 0.40 (D) | 0.50 (D) | 0.58 (D) | |
| | | 0.00 | 0.28 | 0.40 | 0.48 | 0.56 | Analítico | |
| |  | Cavidade | 37.51 (E) | 83.99 (E) | 112.75 (E) | 135.84 (E) | 188.68 (E) | Numérico |
| | | | 37.31 (D) | 82.77 (D) | 111.41 (D) | 133.68 (D) | 150.75 (D) | |
| | | 37.50 | 83.85 | 112.50 | 135.21 | 154.50 | Analítico | |
| | Acoplado |  | Superf. | 0.00 (E) | 0.28 (E) | 0.40 (E) | 0.50 (E) | 0.59 (E) |
| Livre | | | 0.00 (D) | 0.28 (D) | 0.40 (D) | 0.49 (D) | 0.57 (D) | |
| | | - | - | - | - | - | Analítico | |
|  | | Cavidade | 0.16 (E) | 50.49 (E) | 85.78 (E) | 118.73 (E) | 148.10 (E) | Numérico |
| | | e | 0.08 (D) | 44.89 (D) | 81.45 (D) | 114.28 (D) | 135.19 (D) | |
| | | Estrutura | 0.11 | 50.51 | - | 118.53 | - | Analítico |

Onde: (E) indicam valores obtidos pelos modelos em Elementos Finitos e (D) indicam valores obtidos pelos modelos em Diferenças Finitas.

No modo de massa adicional houve uma significativa diferença entre o modo previsto na teoria (0,11Hz) e o modo numérico 0,16 Hz (figura 4.12). Fazendo uma nova simulação numérica com pressão nula nos nós da superfície, o resultado encontrado é 0,11 Hz. Logo, conclui-se que a diferença deve-se ao efeito de superfície livre que altera o modo de massa adicional. Isso pode ser justificado pelo fato da frequência de massa adicional ter a mesma ordem de grandeza das frequências dos modos de vibração da superfície livre (situam-se muito próximas).

A frequência do 1º modo acoplado em Diferenças Finitas também não coincide com o valor analítico. O valor numérico (MDF) para o 1º modo acoplado é 0.08Hz, ao passo que o valor analítico é 0.11Hz. Fazendo uma simulação numérica com 41x41 nós, contra a anterior que possuía 21x21 nós, a nova frequência obtida para esse modo é 0.1172Hz, coincidente com o valor analítico 0.11Hz. Portanto, pode-se concluir que o desempenho do

modelo acoplado em Diferenças Finitas requer um refinamento de malha maior que o refinamento exigido nos sistemas acoplados.

O 1°, 2° e 4° modos acoplados podem ser previstos com a teoria do pistão unidimensional (equação 4.6). Além desses modos, o 3° e o 5° possuem frequência e deformadas modais semelhantes aos modos da cavidade acústica desacoplada.

4.2- INTERAÇÃO PLACA-RESERVATÓRIO SEMI-INFINITO COM SUPERFÍCIE LIVRE (Caso eig2)

Westergaard (1931) foi um dos primeiros a estudar a interação entre uma estrutura rígida-móvel e um reservatório infinito com superfície livre. A principal aplicação de seus estudos era avaliar as forças hidrodinâmicas envolvidas na interação entre uma barragem e seu reservatório durante um sismo. Esse estudo analítico é apresentado no Anexo C.

O exemplo estudado nessa seção é semelhante ao de Westergaard, sendo que as principais diferenças é que a estrutura é uma viga engastada-livre e o reservatório não tem a condição de radiação no infinito, mas pressão nula numa região distante da estrutura. Ao final são comparadas as duas modelagens.

O problema consiste em uma viga (sólido elástico) engastada-livre em contanto com um reservatório (cavidade acústica) com condições de contorno de superfície livre, fundo rígido e aberta, conforme ilustrado na figura 4.21.



Figura 4.21 - Esquema do problema acoplado placa – reservatório semi-infinito.

Dados do problema:

Estrutura

$L_y = 1,0\text{m}$

$t = 0,1\text{ m}$

$E = 20\text{ GPa}$

$\rho_e = 2500\text{ Kg/m}^3$

$\nu = 0,25$

Fluido:

$L_x = 10\text{m}$

$c = 1500\text{ m/s}$

$\rho_e = 1000\text{ Kg/m}^3$

$g = 9.81\text{ m/s}$

Sendo o problema 2D, a largura é unitária na direção perpendicular a figura 4.21.

A superfície livre foi modelada da mesma forma que o caso anterior eig1 (seção 4.1 e capítulo 4), com elementos lineares típicos para a condição de contorno de ondas de gravidade. O comprimento horizontal da cavidade (L_x) muito maior que o comprimento vertical (L_y) (10 vezes) e a pressão é nula na extremidade oposta a estrutura. Essa modelagem simplificada foi também utilizada no trabalho de Moraes (2000) e traduz de uma forma simples de representar o domínio distante (“farfield”).

O modelo numérico em EF está mostrado na figura 4.22. A malha é composta por 105 nós na estrutura e 2121 nós no fluido. O modelo ainda tem 20 elementos de interface fluido-estrutura e 100 elementos na superfície livre.

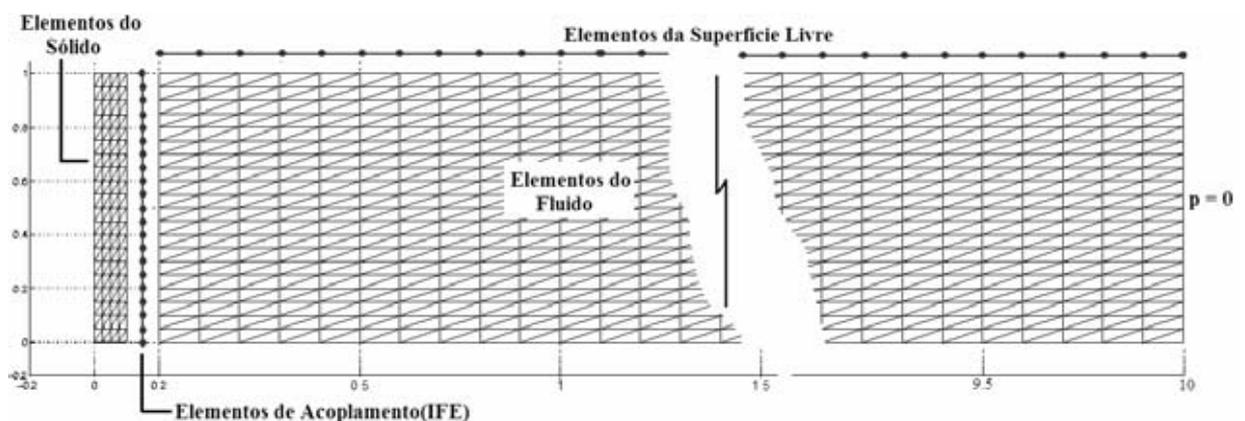


Figura 4.22 – Malha de elementos finitos da estrutura – viga engastada - livre; Fluido – reservatório semi-infinito e interfaces fluido-estrutura e superfície livre.

4.2.1. Modos Naturais de Vibração da Estrutura

a) Solução Analítica

A viga engastada livre tem um comportamento típico de flexão, visto que a relação entre o comprimento (L_x+t) e a largura (t) é pequena (menor que 20%). Os efeitos de cisalhamento e inércia de rotação são negligenciáveis nesse tipo de estrutura, e a solução de flexão pura se aplica adequadamente conforme já foi demonstrado em estudos anteriores (Sousa Jr e Pedroso 2003).

Além dos modos naturais de flexão, existem os modos axiais, que isoladamente são irrelevantes quanto ao acoplamento fluido – estrutura, pois não produzem deslocamento na direção do reservatório.

As frequências naturais de flexão e normais (axial) de uma viga engastada - livre são dadas pelas equações:

$$\omega_f = \lambda_{if}^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} \quad \text{e} \quad \omega_N = \lambda_{iN}^2 \sqrt{\frac{EA}{\bar{m}L^2}} \quad (4.8)$$

Onde E é o módulo de elasticidade; I é o momento de inércia da seção transversal ($1 \cdot 10^{-3} / 12 \text{ m}^4$); A é a área da seção transversal ($0,1 \text{ m}^2$); \bar{m} é a massa por unidade de comprimento da estrutura (250 kg/m); λ_f e λ_N são parâmetros adimensionais dependentes do número do modo. Para a viga em estudo os primeiros valores de (λ) são:

$$\begin{aligned} \lambda_{1f} = 1,8751 \quad \lambda_{2f} = 4,6340 \quad \lambda_{iN}^2 = i \cdot \pi \\ \lambda_{3f} = 7,8548 \quad \lambda_{4f} = 10,995 \quad n = 1,2,3,4,5\dots \end{aligned}$$

Logo, as primeiras frequências de vibração estão apresentadas na tabela abaixo.

Tabela 4.4 – Frequências naturais de vibração da viga engastada - livre.

| Freq. da Estrutura – flexão | | | Freq. da Estrutura – normal ou axial | | |
|-----------------------------|-----------|---------|--------------------------------------|-----------|---------|
| modo | w (rad/s) | f(Hz) | modo | w (rad/s) | f(Hz) |
| 1 | 287.08 | 45.69 | 1 | 4442.88 | 707.11 |
| 2 | 1753.34 | 279.05 | 2 | 8885.77 | 1414.21 |
| 3 | 5037.61 | 801.76 | 3 | 13328.65 | 2121.32 |
| 4 | 9870.63 | 1570.96 | 4 | 17771.53 | 2828.43 |

b) Solução Numérica

No modelo numérico, foi feito um estudo de convergência comparando as frequências analíticas e numéricas em 5 malhas com diferentes graus de refinamento. O gráfico da

figura 4.23 mostra uma relação entre o número de nós da malha da estrutura e a razão entre a frequência numérica e a analítica. Observa-se que o 3º modo (modo axial) tem convergência alcançada independente do grau de refinamento. A malha adotada (4ª da seqüência) tem bom acordo com as frequências analíticas dos três primeiros modos flexionais de vibração.

As deformadas modais e as respectivas frequências naturais dos quatro primeiros modos de vibração da viga em estudo estão mostradas na figura 3.24. Observa-se um bom acordo da deformada numérica com as equações analítica contidas no anexo C (equação B.20) e no caso do 3º modo (axial) com a literatura - Clough (1960).

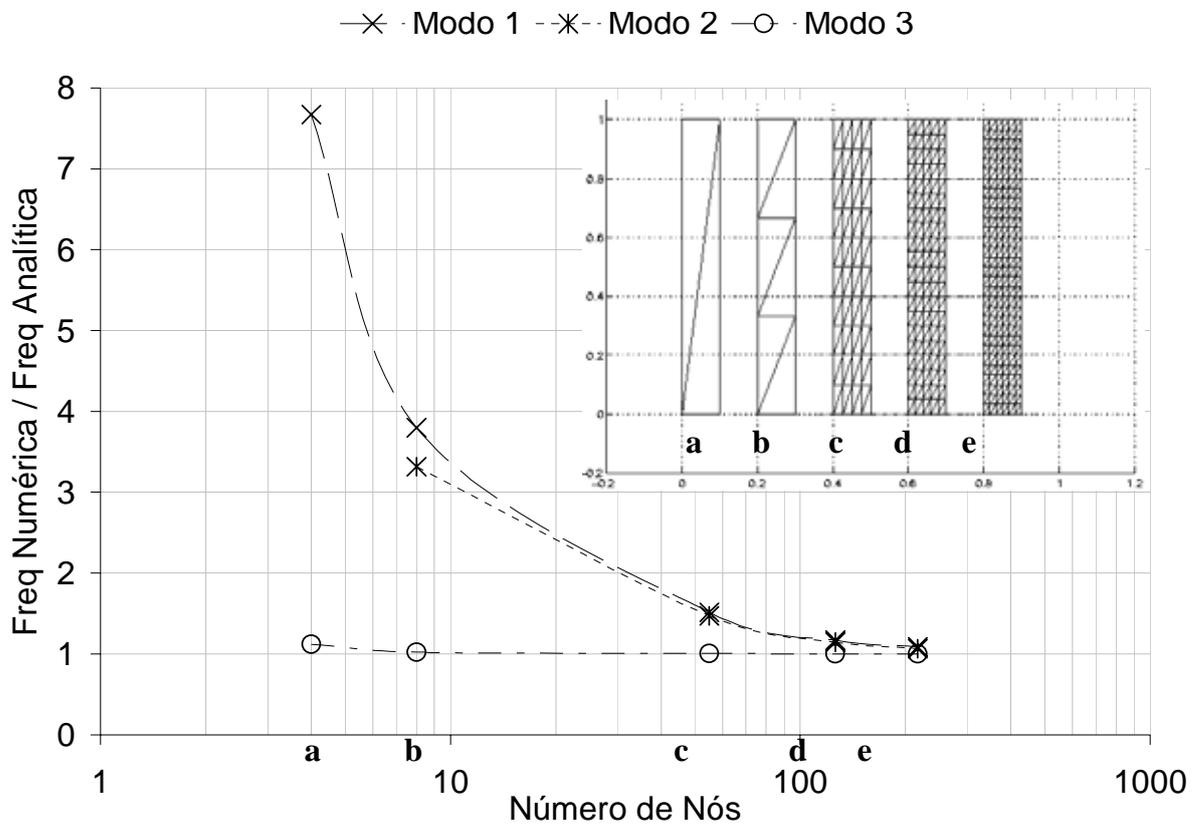


Figura 4.23 – Estudo de convergência para a viga engastada – livre (MEF).

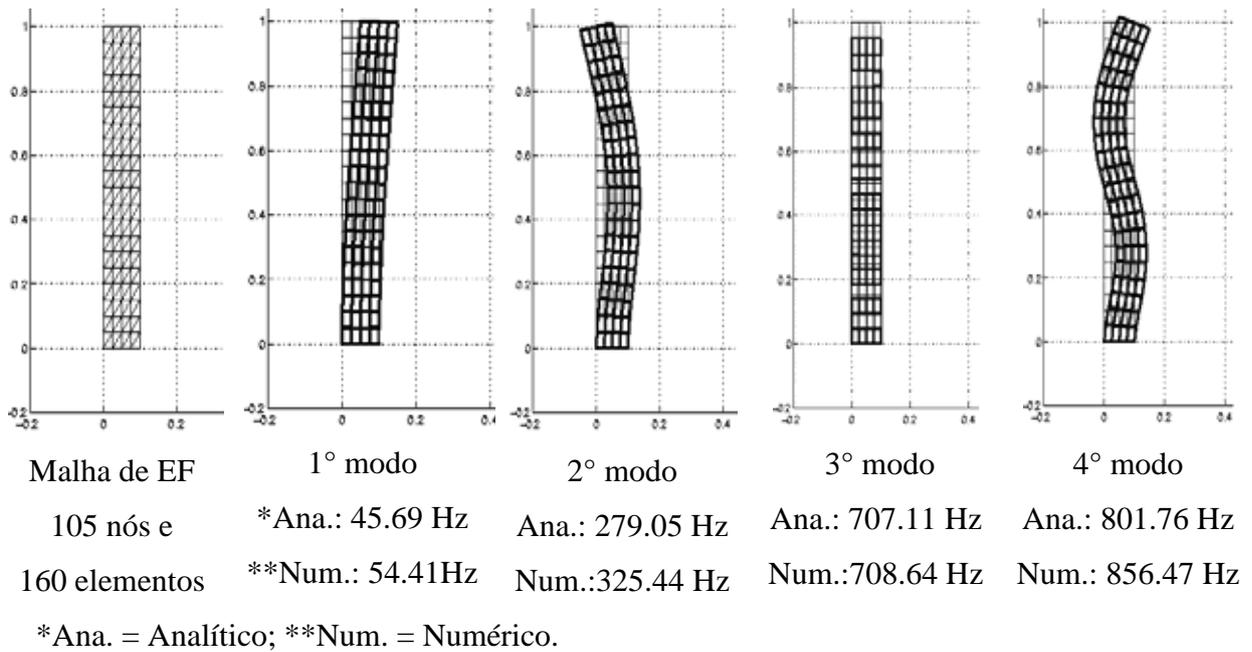


Figura 4.24. Frequências e modos de vibração desacoplados da estrutura (MEF).

4.2.2. Modos Naturais do Reservatório Semi-infinito

a) Solução Analítica

Considera-se as paredes da cavidade como uma estrutura rígida. O reservatório passa a ter condições de contorno de superfície livre, pressão nula no infinito e contornos rígidos, de acordo com o ilustrado na figura 4.25.

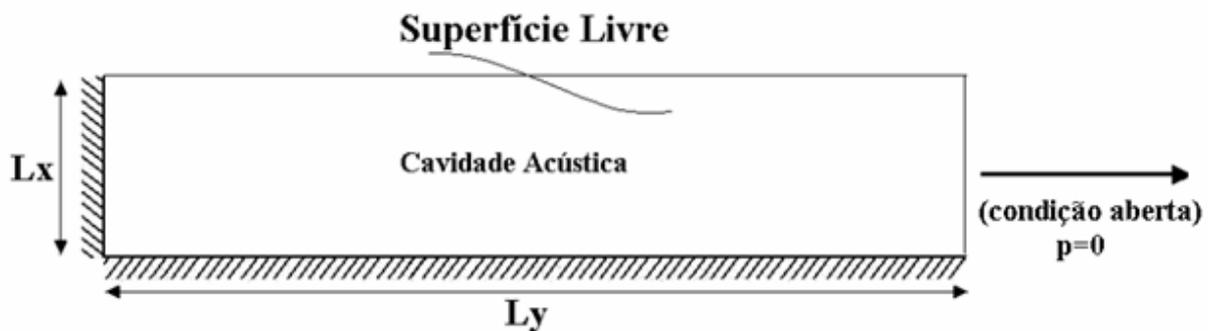


Figura 4.25 - Esquema da cavidade do reservatório.

Utilizando a idéia do espaço de frequências, a cavidade da figura 4.25 pode ser entendida como a composição de duas cavidades 1D de condições de contorno fechada-aberta, nas

direções horizontal e vertical. Isso é válido na consideração de $p=0$ na simulação da condição de radiação no infinito.

Segundo a teoria do Método da Matriz de Transferência descrito em Pedroso 2004, as frequências e deformadas modais da cavidade 1D aberta-fechada são:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{(2m+1)\pi}{2L_x} c & \text{e} & \quad \tilde{p}_x(x) = \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2L_x} x\right) \\ \omega_y &= \frac{(2n+1)\pi}{2L_y} c & \text{e} & \quad \tilde{p}_y(y) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L_y} y\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$m \text{ e } n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Onde \tilde{p} é a pressão normalizada (máximo=1) da deformada modal.

Utilizando-se as equações 4.9 obtém-se as frequências e deformadas modais da cavidade.

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad \text{e} \quad p(x, y) = A \cdot p_x(x) \cdot p_y(y) \quad (4.10)$$

Substituindo 4.9 em 4.10 chega-se as expressões finais:

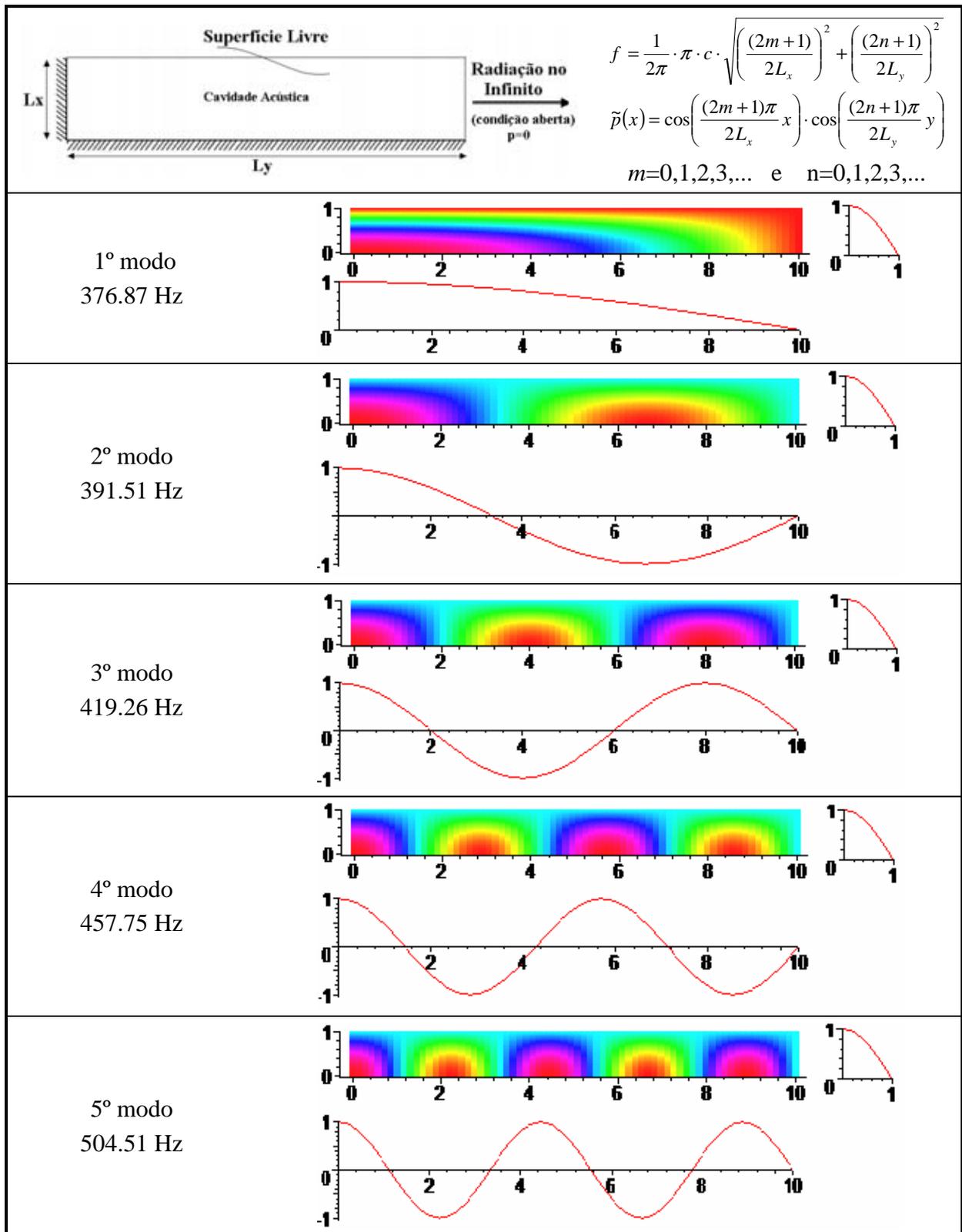
$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{(2m+1)}{2L_x}\right)^2 + \left(\frac{(2n+1)}{2L_y}\right)^2} \\ \tilde{p}(x) &= \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2L_x} x\right) \cdot \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L_y} y\right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$m=0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$

Se o reservatório for considerado como infinito ($L_y \rightarrow \infty$) então sua frequência pode ser simplificada para $f = c \cdot (2m+1)/(4L_x)$.

As deformadas modais e os valores das frequências naturais analíticas estão mostrados na tabela 4.5. É também ilustrada as curvas unidirecionais que compõem as deformadas bidimensionais.

Tabela 4.5 – Solução analítica para os modos naturais de vibração do reservatório.



b) Solução Numérica

A malha numérica adotada para o reservatório está na figura 4.22. Também foi feito um estudo de convergência da malha do fluido, com curvas que relacionam a razão frequência numérica – analítica e o número de nós da malha. Este estudo está na figura 4.26.

A malha adotada na simulação foi a mais refinada, dentre as presentes na figura 4.26. Observa-se que há uma rápida convergência das frequências numéricas para o valor das frequências analíticas. Vale aqui ressaltar que o estudo foi feito para os modos típicos da cavidade, ou seja, foram suprimidos os modos de vibração da superfície livre.

A tabela 4.6 mostra os 4 primeiros modos numéricos de vibração do reservatório, com deformadas modais e frequências naturais. São apresentados dois grupos de modos, os modos de superfície livre e os modos de cavidade. Comparando com a tabela 4.5 observa-se um bom acordo dos resultados numéricos para a cavidade com os seus respectivos valores analíticos.

O primeiro grupo de resultados (para a superfície livre) não foi comparado com os valores analíticos.

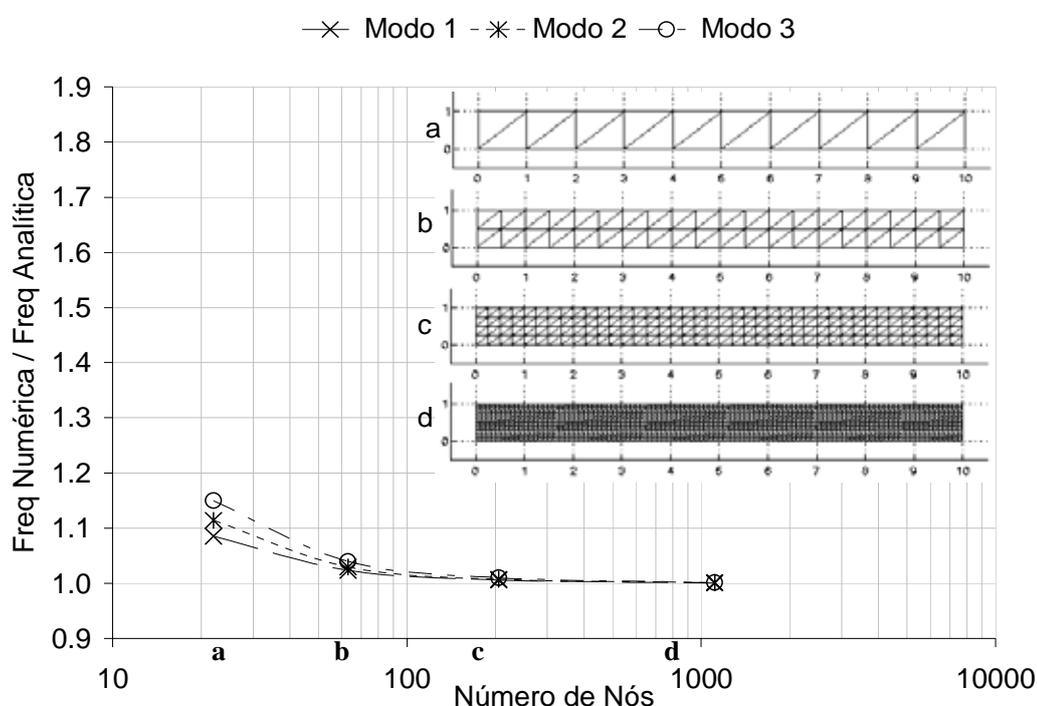
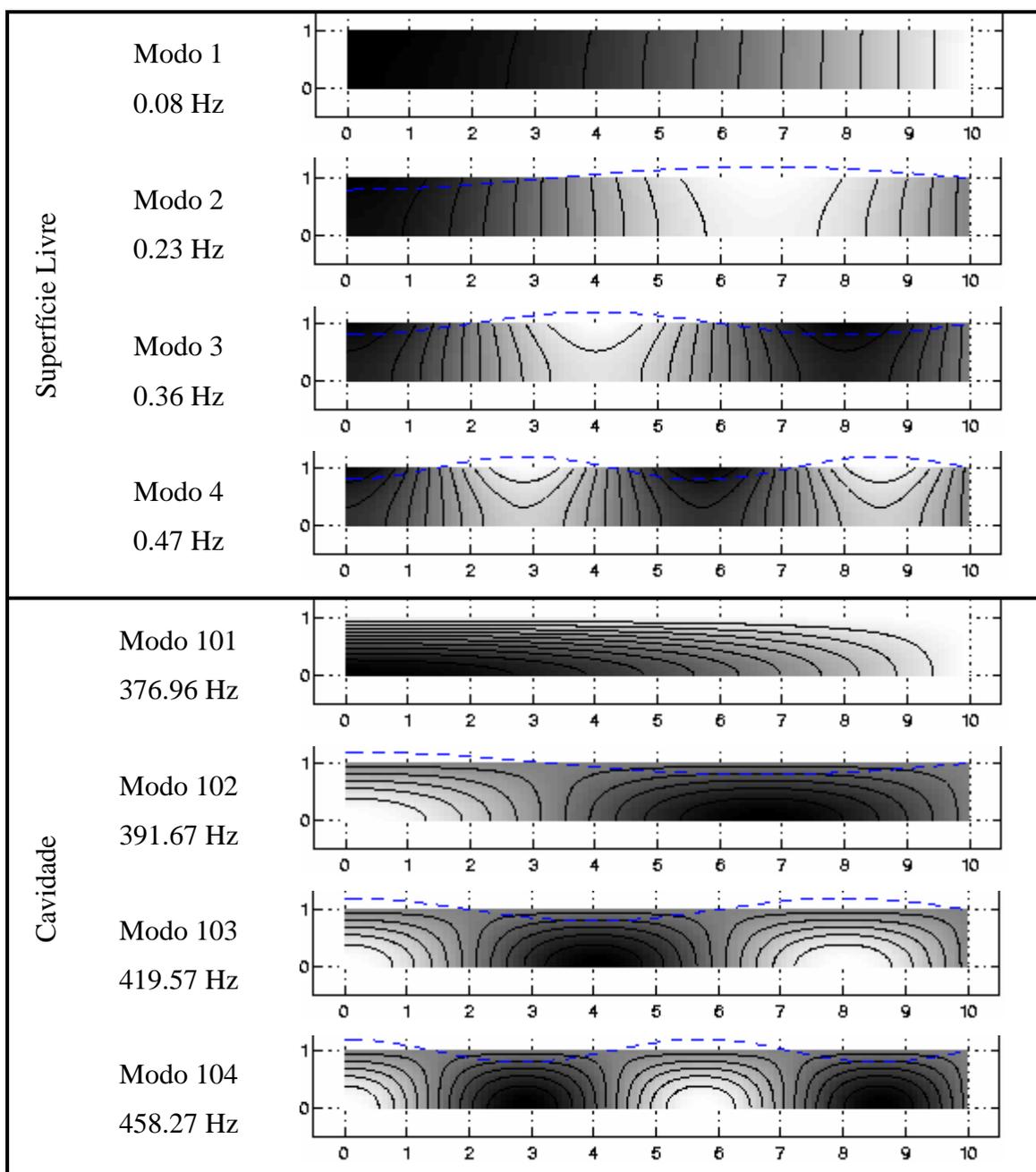


Figura 4.26 – Estudo de convergência para o reservatório semi-infinito.

Tabela 4.6 – Modos de vibração numéricos do reservatório.

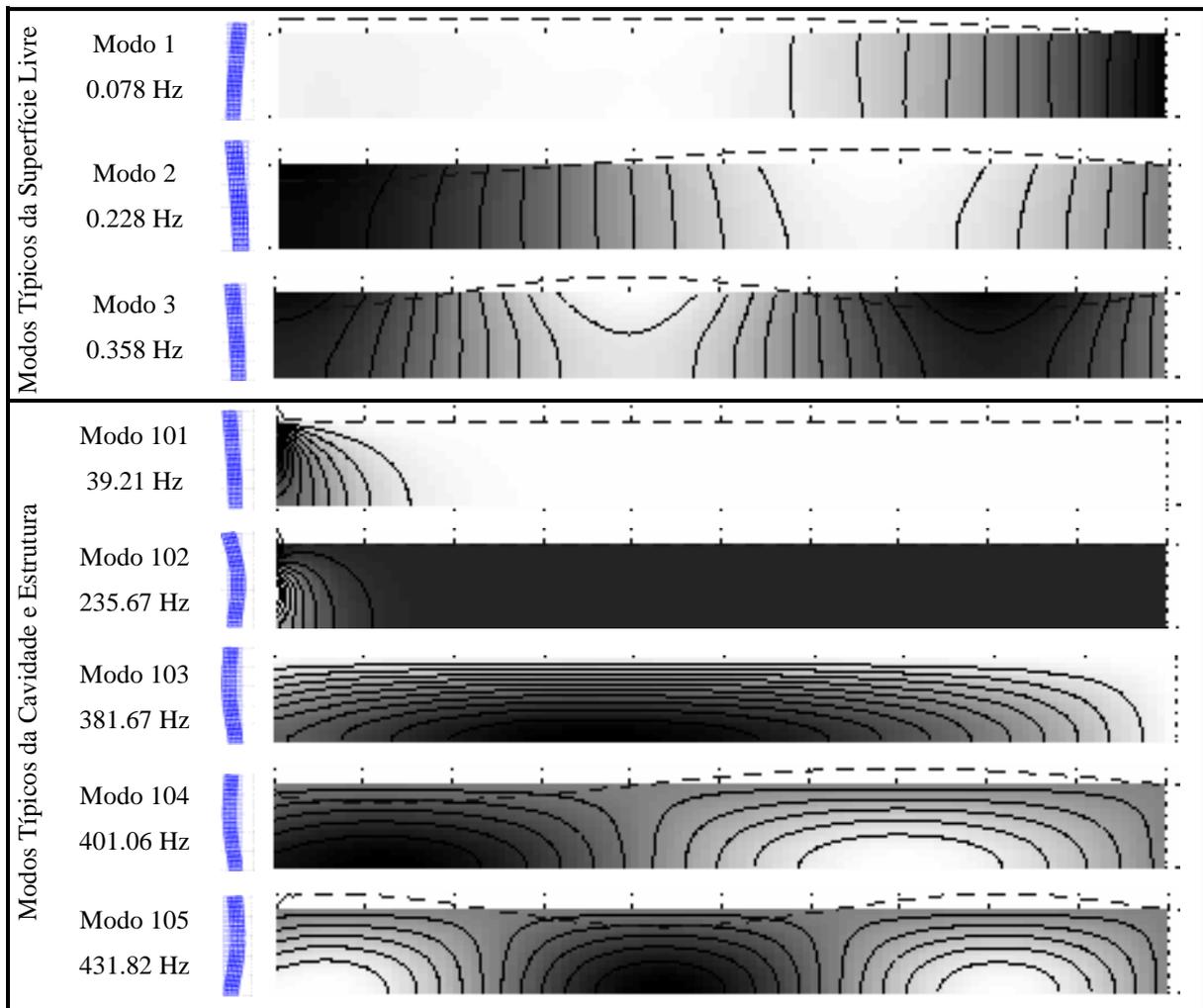


4.2.3. Modos Naturais Acoplados – Numérico

A tabela 4.7 mostra alguns dos modos de vibração da malha do sistema acoplado da figura 4.22. Os modos são divididos em dois grupos: os modos dominados pela vibração da superfície livre e os modos dominados pelo reservatório e estrutura.

O modo 101, também conhecido como modo de massa adicional, corresponde a uma frequência próxima da frequência fundamental de vibração da estrutura. Neste, o efeito do fluido sobre a estrutura pode ser traduzido por uma massa acoplada na interface. O parâmetro de compressibilidade ($\omega L/c$) para este modo vale 0.06, logo, o modo é de fato incompressível para fluido e a aplicação da massa adicional reproduz a frequência acoplada esperada.

Tabela 4.7 – Modos de vibração acoplados da viga engastada/livre e reservatório semi-infinito.



Ainda no modo 101 (1º modo de flexão da estrutura com fluido), a forma de distribuição de pressões no paramento de montante da barragem reproduz tendências já observadas em estudos análogos sistematizados por Pedroso 2000. No entanto, uma pequena divergência é esperada com relação ao modelo de pressões hidrodinâmica de Westergaard (1931), pois

nesse modelo parede rígida-móvel, a estrutura se move como um corpo rígido na direção do reservatório (figura 4.27), aspecto não reproduzido por uma estrutura vinculada (engaste) na base, que apresenta suas formas modais características envolvendo um deslocamento de massa de fluido mais complexo, ou seja, um modelo de massa adicional mais complexo.

Nos modos 102 e 112, a estrutura apresenta deformadas modais iguais as deformadas desacopladas correspondentes ao 2º e 4º modos da estrutura (figura 4.24), inclusive os valores das frequências são próximas. Nesses dois modos o campo de pressão no fluido se adequa a deformada da estrutura, com rápida redução dos valores no sentido da fronteira semi-infinita.

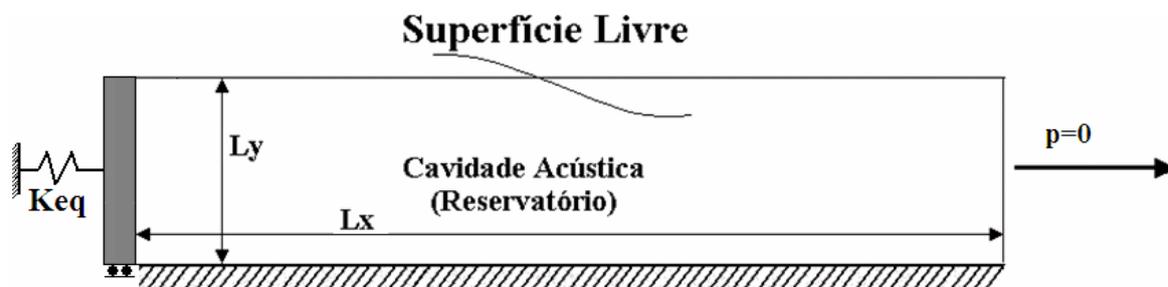


Figura 4.27 – Modelo de interação pistão-reservatório.

Para permitir uma comparação adequada com o modelo pistão-reservatório (figura 4.27), foi feita uma simulação numérica considerando a estrutura livre para se movimentar na horizontal e apoiada sobre molas com rigidez equivalente à viga engastada, ou seja, que reproduz a mesma frequência do primeiro modo de vibração. A malha de elementos finitos é a mesma da figura 4.22.

Para que esse modelo represente o problema da viga engastada com o reservatório, é necessário que a mola proporcione uma rigidez tal que a frequência do pistão seja a mesma da viga engastada. Os cálculos abaixo mostram as propriedades físicas do sistema. Portanto, a diferença das frequências acopladas no caso da viga-pistão (eig2b) e viga engastada (eig2a) está na sua forma modal que desloca uma massa de fluido de forma diferente. Como nesta frequência o fluido é incompressível, a viga-pistão desloca muito mais massa adicional (583kg) do que uma viga em flexão (89kg).

| | | | | |
|--|-----------------|------------------|--------------|-----------------|
| Rigidez da mola do pistão | Keq = | 2.060E+07 | N/m | |
| Massa do pistão (igual a placa) | Massa = | 2.500E+02 | Kg | |
| Massa adicional ($14/24 * \rho_f / L_y^2$) | Mad = | 5.833E+02 | Kg | |
| Frequência no ar | W seco = | 2.871E+02 | rad/s | 45.69 Hz |
| Frequência com massa adicional | W mad = | 1.572E+02 | rad/s | 25.03 Hz |
| Parâmetro de compressibilidade | WL/c = | 0.10 | | |

A figura 4.28 mostra o modo de massa adicional obtido da simulação numérica. A frequência numérica (25.75 Hz) se aproxima bastante da frequência prevista pela equação da massa adicional (25.03 Hz), mostrando uma perfeita adequação da formulação numérica com a analítica.

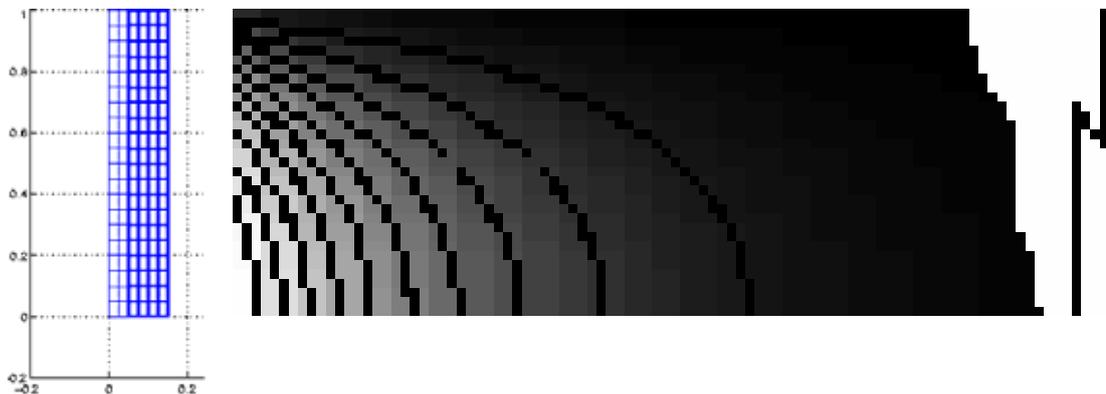


Figura 4.28 – Modo de vibração de massa adicional do sistema pistão-reservatório semi-infinito: 25.75Hz (MEF).

4.2.4. Modelagem com Diferenças Finitas

O exemplo eig 1, da seção 4.1, mostrou que é possível obter os autovalores e autovetores acoplados com EF ou DF. Nesse exemplo também foi feita uma modelagem com DF para comparar com os resultados obtidos anteriormente via MEF.

O modelo em DF utiliza a mesma malha de nós do fluido do modelo em EF (figura 4.22). A viga engastada-livre é discretizada em 11 nós, conforme mostrado na figura 4.29.

Os modos de vibração axiais não foram considerados no modelo MDF. O método permite considerar este efeito com graus de liberdades de deslocamento axial e pela discretização da equação de movimento “normal” (descrito em Clough 1960) de forma conjugada com o modelo flexional (seção B.1 do Anexo B). Mas devido ao fato desses modos não serem relevantes nesse problema, eles serão desconsiderados na análise.

O estudo de convergência para a malha da estrutura apresentado na figura 4.30 mostrou que o método reproduz as frequências analíticas dos 3 primeiros modos de vibração flexionais. Essa convergência ocorre visivelmente para malhas com mais de 11 nós.

As deformadas modais dos 5 primeiros modos de vibração estão apresentados da figura 4.31. Conforme dito anteriormente a malha adotada é a da figura 4.29.

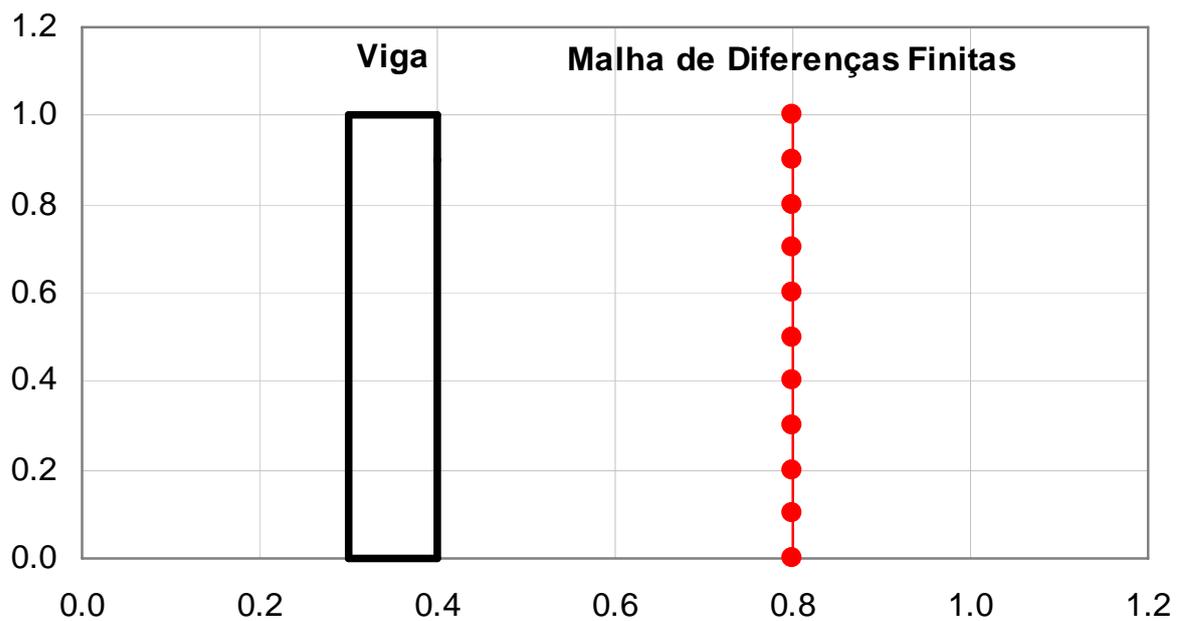


Figura 4.29 – Malha de DF para a viga.

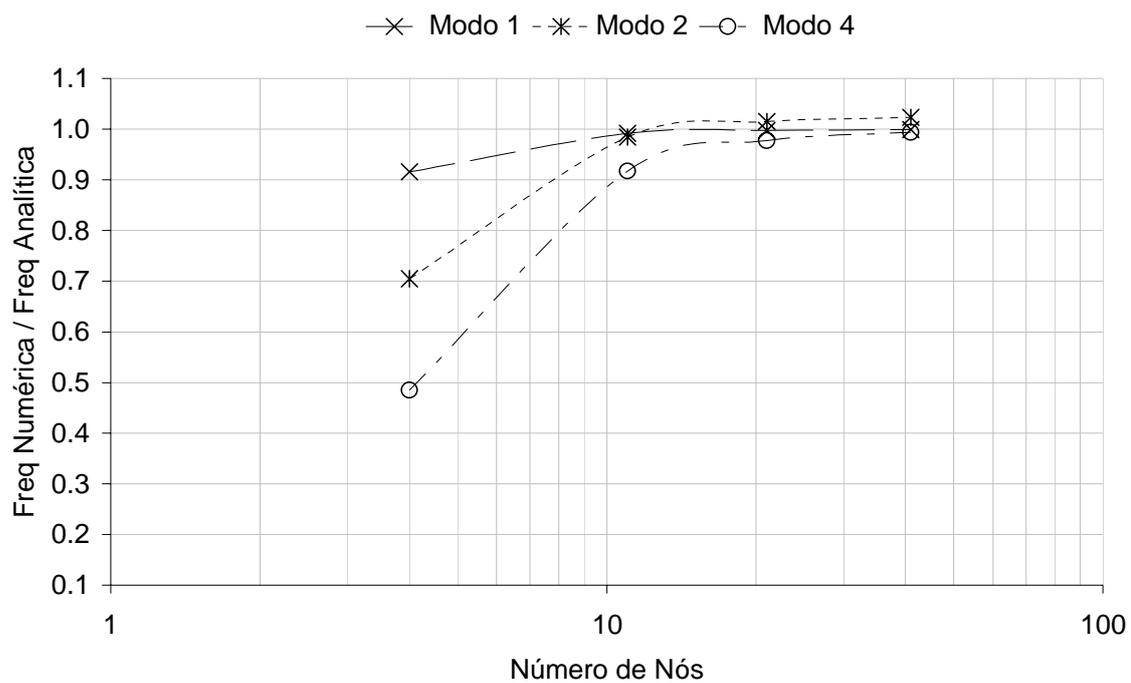


Figura 4.30 – Estudo de convergência da malha da viga engastada-livre (MDF).

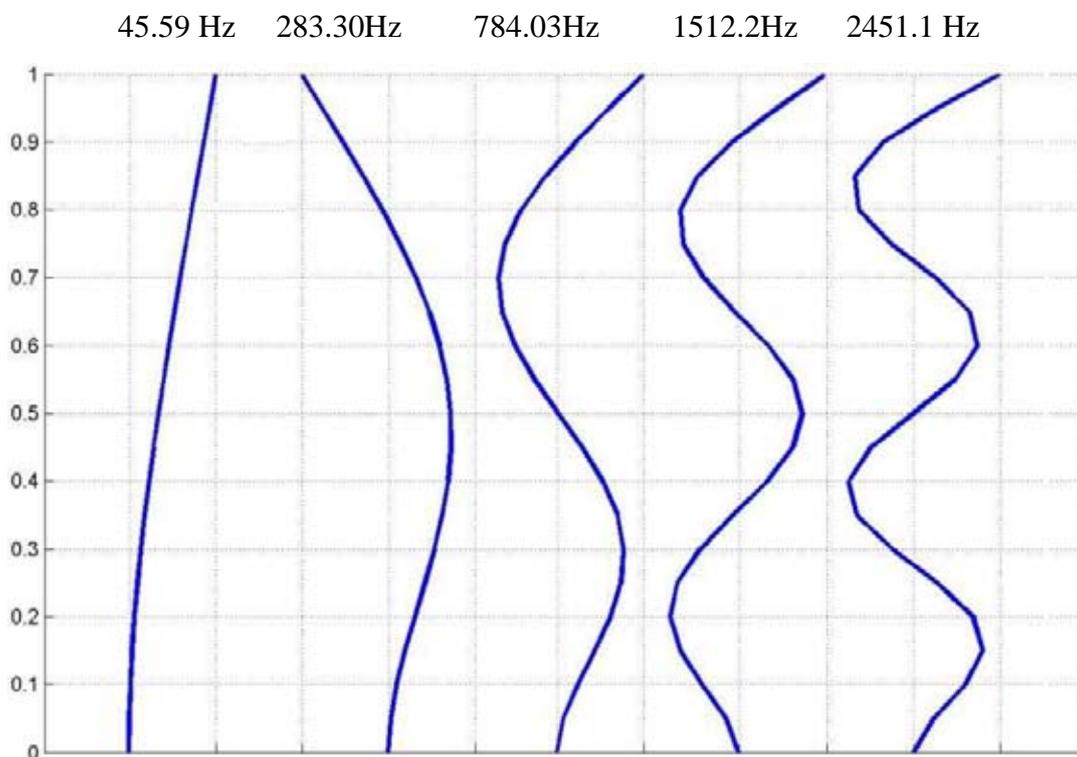


Figura 4.31 – Cinco primeiros modos naturais flexionais da viga (MDF).

Um estudo similar de sensibilidade das frequências naturais do reservatório em função do refinamento da malha do fluido foi realizado, e o resultado está disposto na figura 4.32. Observa-se que a convergência das frequências numéricas dos três primeiros modos é alcançada com mais de 95% para malha com mais de 100 nós.

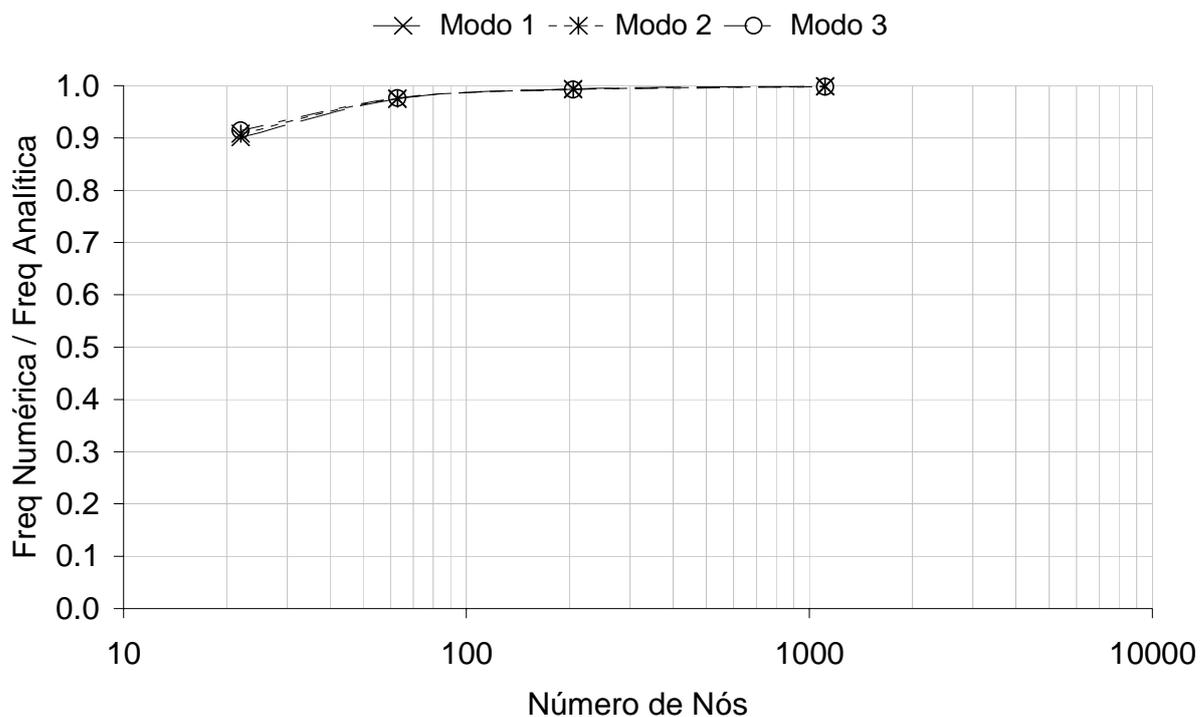


Figura 4.32 – Estudo de convergência dos três primeiros modos do reservatório.

4.2.5. Discussão de Resultados

Houve um bom acordo dos resultados numéricos em relação aos analíticos. Assim como no caso eig1 (seção 4.1), o MDF se mostrou como uma alternativa interessante ao estudo do acoplamento acústico-mecânico. O modelo mecânico da estrutura pode ser representado por uma teoria simples (viga em flexão). Vale ainda ressaltar que o modelo em DF tem um custo computacional menor, devido o menor número de nós e graus de liberdade do modelo numérico da estrutura.

A superfície livre mostrou ter pouca influencia nos modos acoplados dominados pela estrutura e cavidade. Os modos acoplados de superfície livre e da cavidade praticamente reproduziram os modos desacoplados, ressaltando novamente a necessidade de um estudo prévio dos meios contínuos em separado. No entanto, a relevância da modelagem do efeito da superfície livre se dá quando uma vibração forçada ocorre em frequência próxima a esses modos de vibração.

Tabela 4.8 – Modos naturais numéricos de vibração do reservatório (MDF).

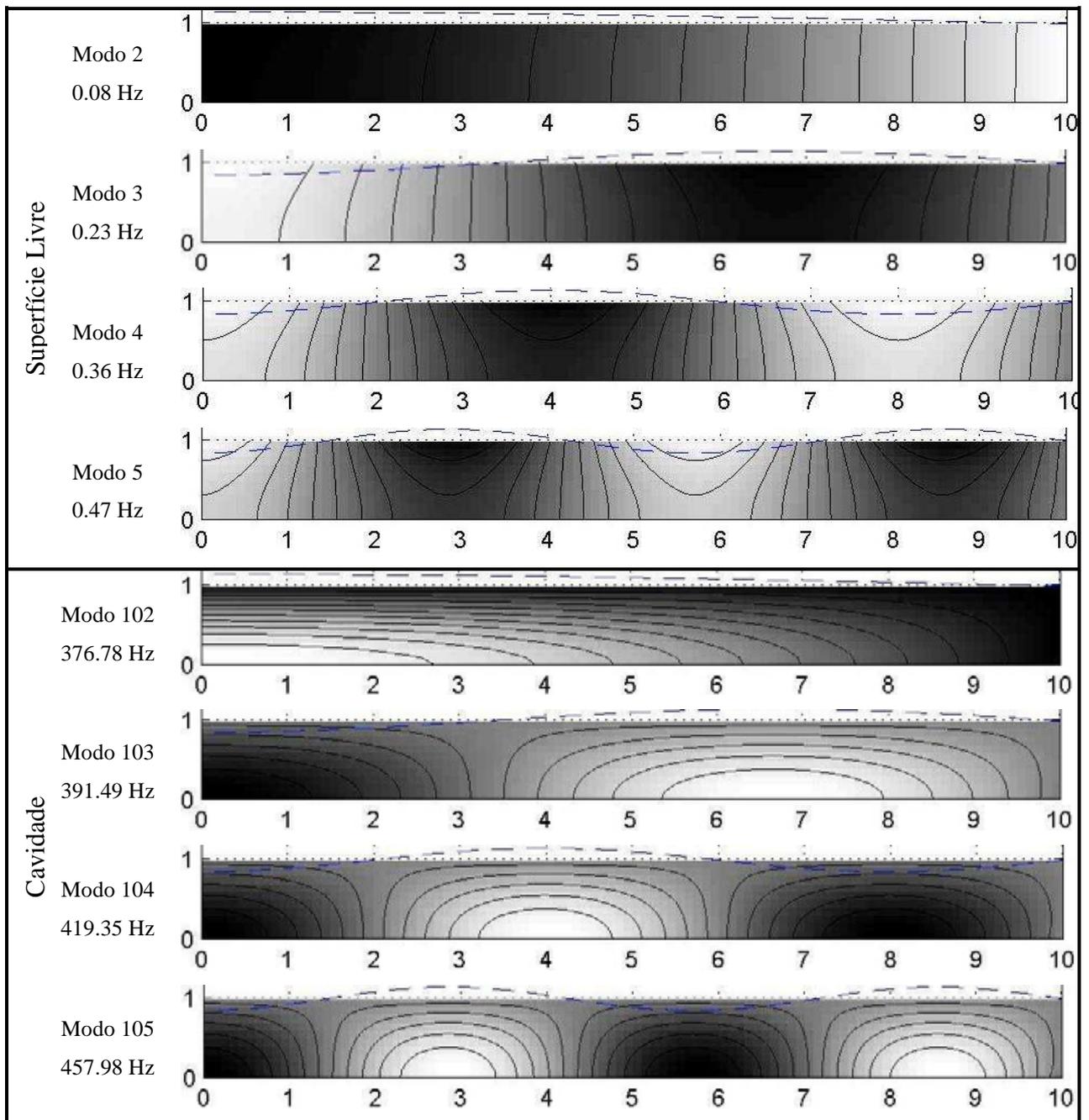
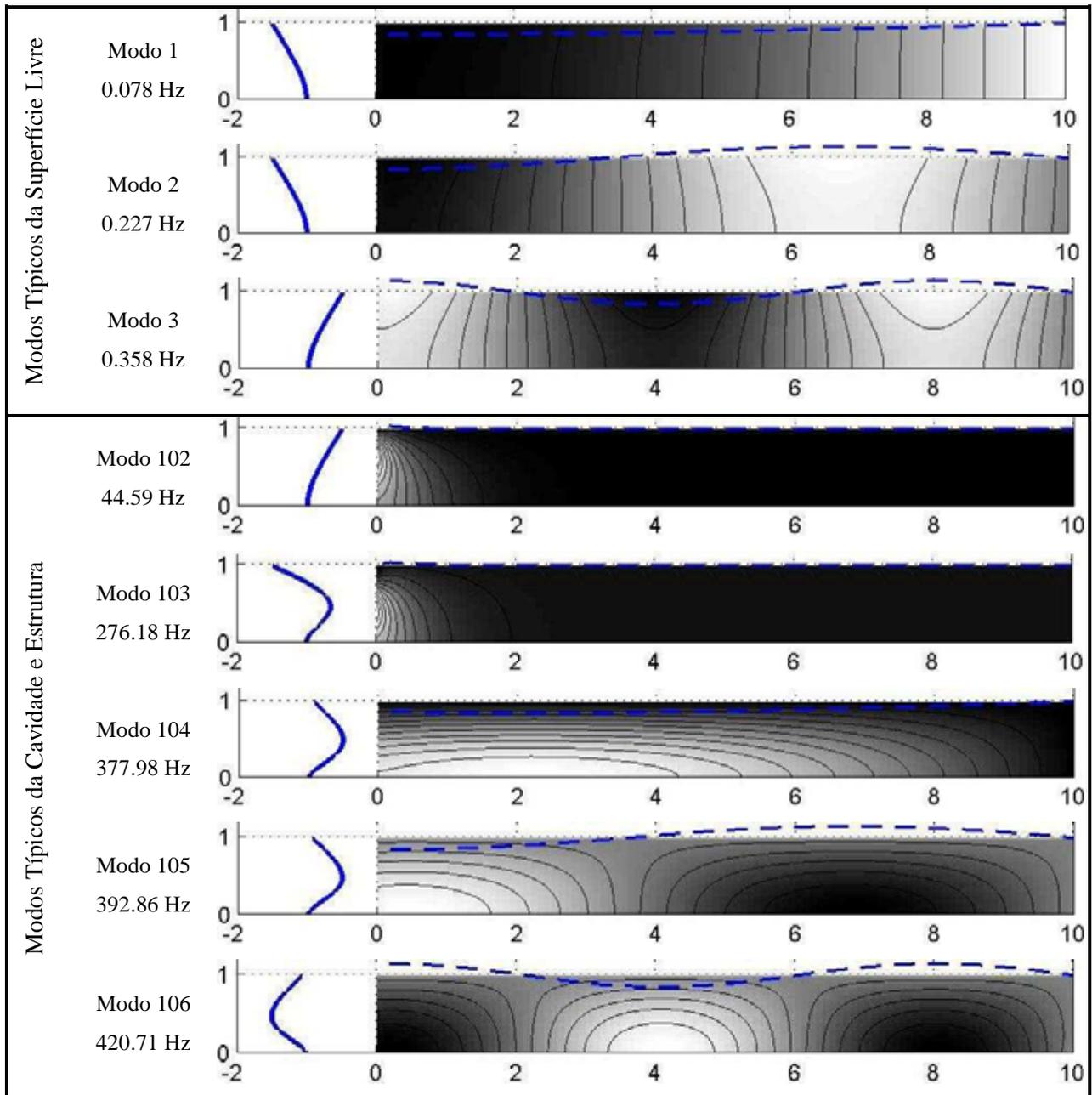


Tabela 4.9 – Modos naturais acoplados (MDF).



Foram novamente observados dois grupos (pacotes) de autovalores acoplados: os primeiros, de frequências mais baixas dominados pela vibração da superfície livre; o segundo dominado pelas frequências da cavidade e estrutura. Nesses últimos está o modo de massa adicional.

O modelo de Westergaard (1931) mostrou-se um poderoso processo de previsão da frequência do modo fundamental acoplado (massa adicional). Essa metodologia foi válida

nesse caso devido ao baixo fator de compressibilidade do problema em estudo. Para valores significativos de fator de compressibilidade ($\omega L/c \geq 1.0$) o processo de massa adicional deixa de ser verificado.

4.3- INTERAÇÃO BARRAGEM RESERVATÓRIO LONGO PARA O CASO TÍPICO DE BARRAGEM REAL (Caso eig3)

No capítulo 1 foram mostradas aplicações práticas da IFE em Engenharia, com destaque à área de Barragens. Fenômenos como sismos, geração de ondas no reservatório por ruptura de barragens a montante ou encostas, escoamento de fluido sobre seções da barragem (como vertedores) podem excitar dinamicamente o sistema acoplado barragem-reservatório.

O caso dessa seção visa tratar de maneira preliminar o acoplamento de uma seção 2D de uma barragem e um reservatório semi-inifinito. A geometria da seção se assemelha a um perfil típico de barragem brasileira, tal como Tucuruí – Pará - ELETRONORTE. Essa importante barragem fica na região norte do Brasil e barra o Rio Tocantins e tem grande relevância para a matriz energética nacional além da importância ambiental. A Fig. 4.33 abaixo mostra uma imagem da parte de concreto da barragem.



Figura 4.33 – Imagem de uma parte em concreto da barragem de Tucuruí/Pará/Brasil - ELETRONORTE. Fonte: site da Camargo Correa.

O perfil aproximado da barragem está ilustrado na Fig. 4.34. As propriedades físicas adotadas para o problema foram típicas do concreto e o fluido tem as mesmas constantes usadas nos problemas das seções anteriores.

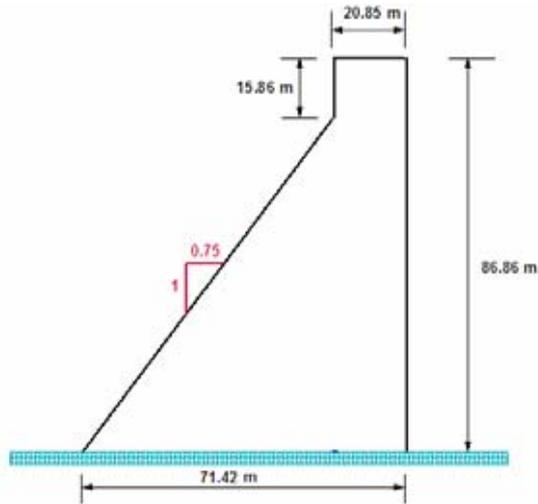


Figura 4.34 - Perfil aproximado da barragem em estudo.

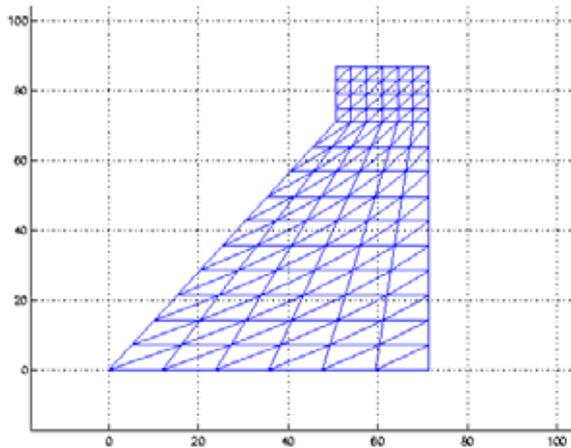
Dados do problema:

Estrutura : $H = 86.86\text{m}$; $L_{\text{base}} = 71.42\text{m}$; $E = 20\text{ Gpa}$; $\rho_e = 2500\text{ Kg/m}^3$; $\nu = 0.25$.

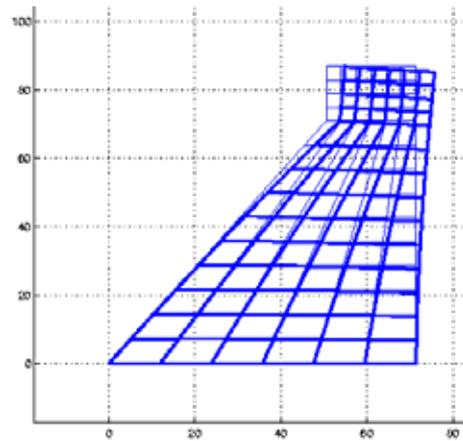
Fluido: $L_y = H = 71.00\text{m}$; $L_x = 5 * L_y$; $c = 1500\text{m/s}$; $\rho = 1000\text{ Kg/m}^3$; $g = 9.81\text{ m/s}^2$.

As malhas de elementos finitos utilizada para a barragem e reservatório estão na Fig. 4.35 e tabela 4.10, respectivamente. Foram suprimidos os elementos lineares da interface fluido-estrutura e da superfície livre. A malha do reservatório tem comprimento horizontal igual a 5 vezes a lâmina d'água. A condição de contorno na extremidade do reservatório oposta a barragem é de pressão nula, para simular de forma aproximada a condição de fronteira longínqua (“farfield”).

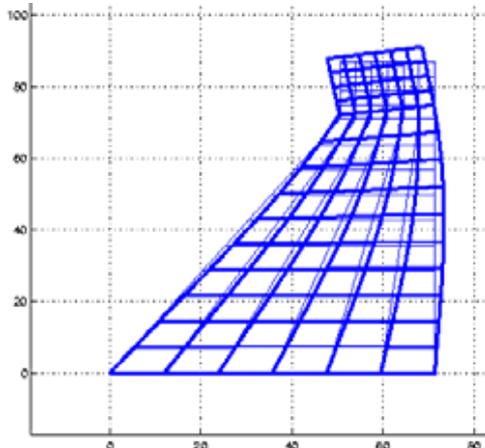
Os modos desacoplados estão na Tabela 4.10. A tabela 4.11 mostra alguns modos naturais de vibração acoplados. Estes últimos foram separados nos grupos controlados pela superfície livre, cavidade acústica e estrutura. Foram tomados os 3 primeiros modos de cada grupo desses. O 1º modo acoplado típico da estrutura (51) deveria ser o modo de massa adicional, no entanto, o parâmetro de compressibilidade ($\omega H/c = 23.69 * 71/1500 = 1.12$) indica que há influência da compressibilidade do fluido no modo.



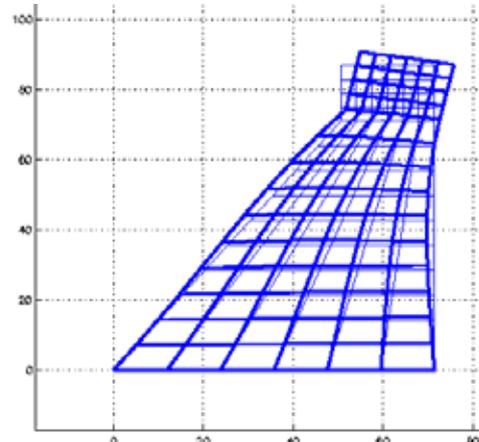
Malha de Elementos Finitos



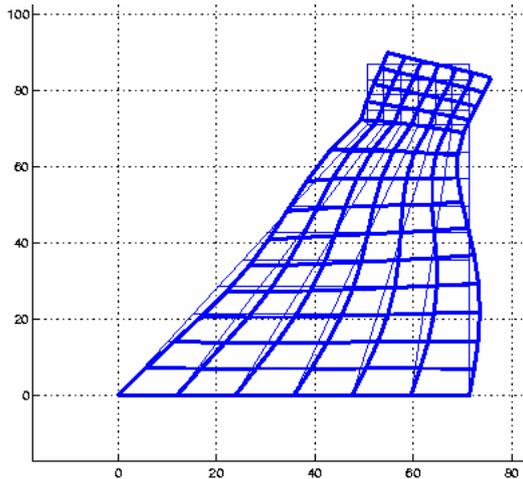
1º modo: 3.9364 Hz



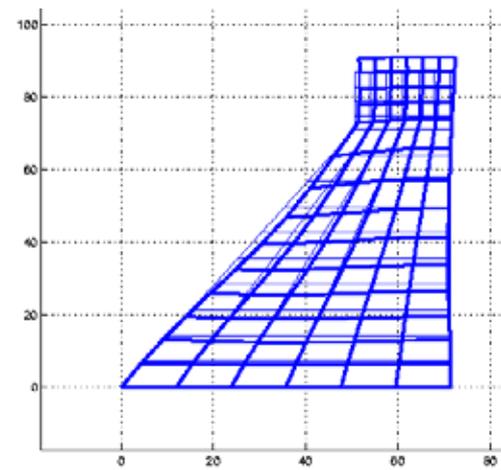
2º modo: 9.8350 Hz



3º modo: 10.4030 Hz



4º modo: 18.883 Hz



5º modo: 23.8269 Hz

Figura 4.35 – Malha e modos naturais de vibração da barragem.

Tabela 4.10 – Malha de EF e modos do reservatório.

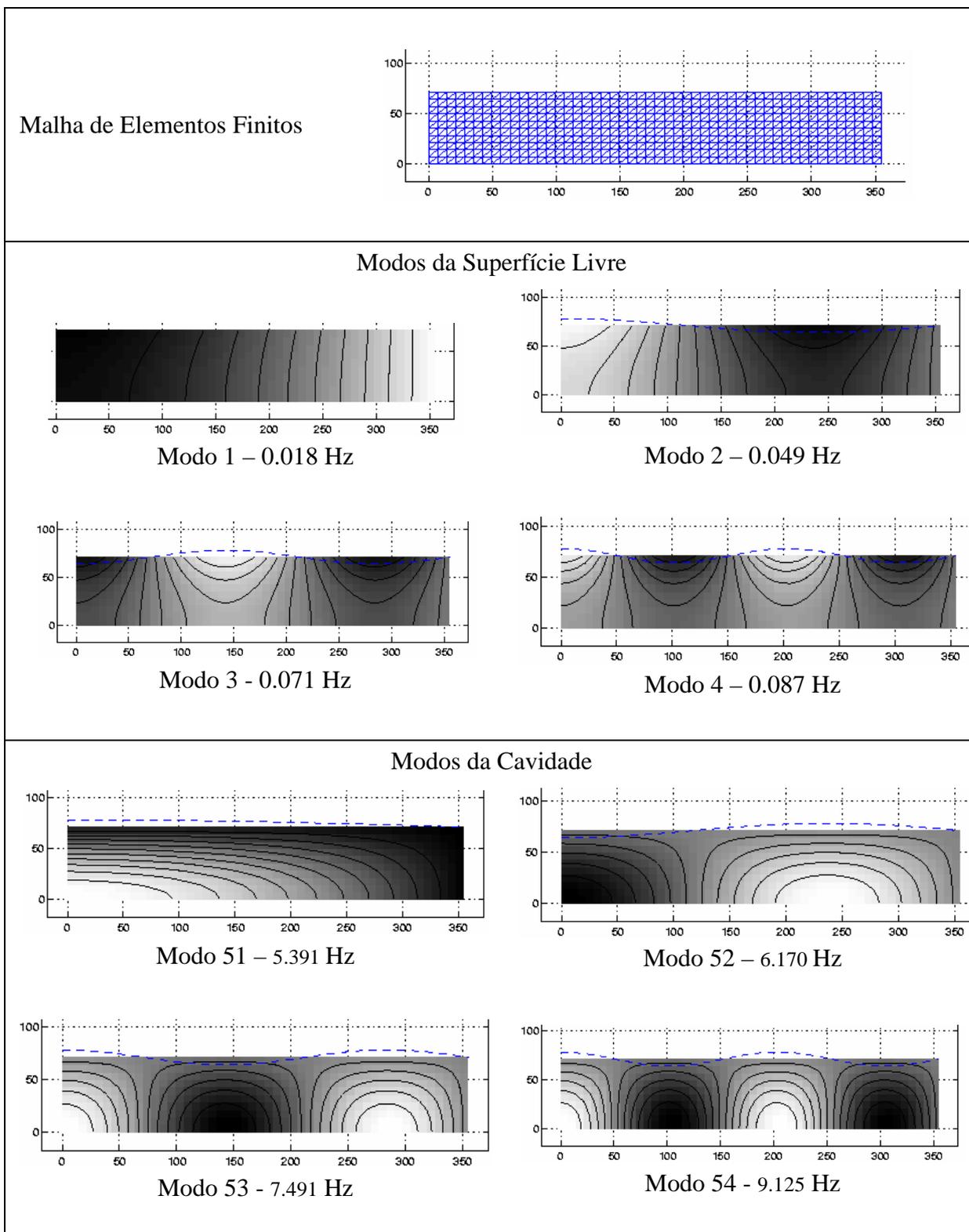
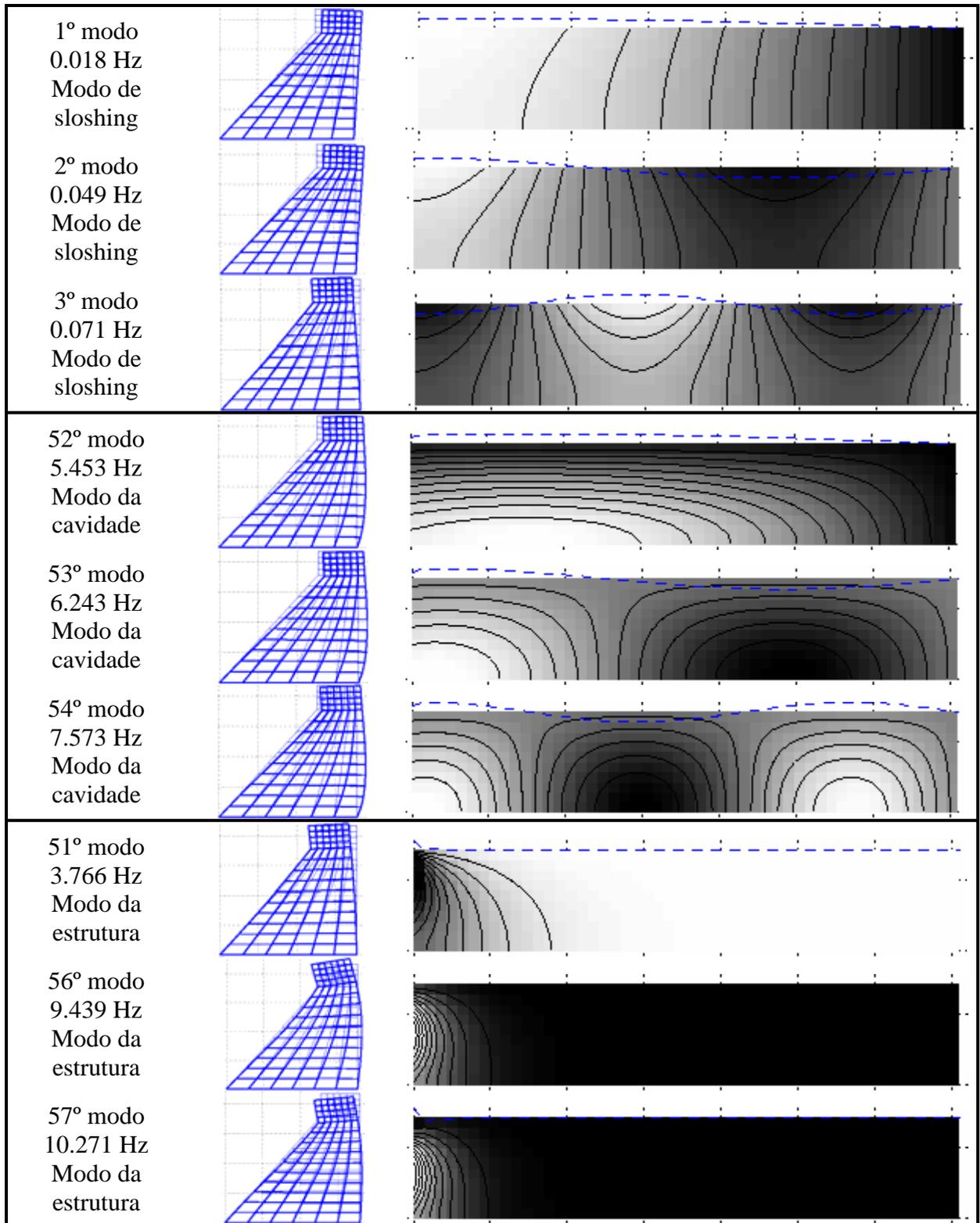


Tabela 4.11 – Modos naturais de vibração acoplados.



4.3.1. Discussão de Resultados

A maioria das observações feitas para os exemplos de base das seções 4.1 e 4.2 são estendidas a este caso real. Novamente foram observados dois grupos de modos acoplados: dominados pelo efeito de superfície livre, dominados pela compressibilidade/inércia da cavidade e estrutura. Houve uma separação na faixa de frequência desses grupos.

Os modos de superfície livre foram de frequência inferior aos modos da cavidade. O efeito de superfície livre pouco influenciou nos modos acoplados, assim como ocorreu nos casos das seções 4.1 e 4.2. No entanto, vale ressaltar que fenômenos dinâmicos que ocorram em frequências mais baixas (menores ou próximas a 1Hz) podem excitar a superfície livre e produzir carregamentos hidrodinâmicos significativos no paramento da barragem e/ou estruturas auxiliares.

Foi observada uma perfeita concordância entre o campo de pressões no fluido e as deformadas modais da estrutura, conforme tabela 4.11.

O modo de massa adicional não ocorreu como previsto na literatura, pois o fator de compressibilidade do modo 51 é alto (da ordem da unidade). Nessa situação, o uso das equações de Westergaard (1931) no dimensionamento estrutural de uma barragem incorre em erro. Vale ressaltar que o uso de metodologias que consideram o fluido incompressível e reduzem o reservatório ao um carregamento hidrodinâmico no paramento da barragem é comum no dimensionamento estrutural dessas estruturas. Logo, a falta de um estudo prévio do comportamento dinâmico dos sistemas acoplados sugere que muitas barragens existentes poderão não estar, sob certas circunstâncias, suficientemente seguras contra carregamentos dinâmicos, como sismos.

4.4- ESTUDOS TRANSIENTES

O cálculo das frequências e deformadas modais de vibração são fundamentais na compreensão do comportamento dinâmico de uma estrutura, fluido ou um sistema acoplado. No entanto, a resposta dinâmica é obtida por meio de uma análise transiente via integração no tempo ou superposição modal.

Nessa seção serão mostrados alguns resultados de simulações transientes realizados nos sistemas acoplados estudados nas seções 4.1, 4.2 e 4.3 (eig1, eig2a, eig2b e eig3). As estruturas são submetidas a velocidades iniciais e depois experimentam uma vibração livre. Em outras aplicações, as estruturas são postas a vibrar mediante ação de forças variáveis no tempo (senoidais). O movimento acelerado da estrutura induz um campo de pressões no fluido que por sua vez interage com a estrutura, suscitando a IFE.

O exemplo básico estudado é o pistão da seção 4.1 (eig1 - Fig. 4.1). São comparadas as repostas dinâmicas de modelos numéricos 1D e 2D com soluções analíticas clássicas para um SSUGL (Clough 1960).

Em seguida são mostradas simulações transientes da placa acoplada a um reservatório, igual ao exemplo da seção 4.2 (eig2 - Fig. 4.21). Novamente compara-se a reposta transiente de alguns modelos numéricos com solução analítica construída a partir de um SSUGL com massa adicional calculada pela teoria de Westergaard (1931) (Anexo C). Estudos semelhantes são feitos para o sistema acoplado barragem-reservatório.

As simulações transientes são feitas utilizando-se EF. As matrizes de massa, rigidez e amortecimento obtidos do modelo em EF de discretização espacial. O vetor de velocidades iniciais ou vetor de força são levados ao algoritmo de integração no tempo (Newmark). Este procedimento foi explicado nos capítulos 2 e 3.

O resumo das simulações está na tabela 4.12.

Em todos os exemplos foi considerado um fator de amortecimento estrutural $\xi=5\%$. A matriz de amortecimento da estrutura foi considerada como uma combinação linear entre a matriz de massa e a de amortecimento, de acordo com a teoria mostrada na seção 3.5 do capítulo 2.

No fluido não foram considerados efeitos dissipativos, com exceção do resultado expresso no gráfico da Fig. 4.43. Nesse caso, fez-se uma simulação considerando elementos de radiação no lado oposto ao da barragem, para simular a fronteira distante (“farfield”). No gráfico dessa mesma figura são comparados os modelos com pressão nula e radiação.

Tabela 4.12 – Resumo das simulações transientes.

| Caso | Descrição | Parâmetros de simulação transiente | Resultado |
|--------|---|---|------------------|
| Trans1 | Pistão (modelo da seção 4.1 – eig1) submetido a uma velocidade inicial. | Velocidade inicial $\dot{u}_0 = 0.1\text{m/s}$ $k=80\text{kN/m}$; $m_e=78\text{E}3\text{kg}$; $m_f=1\text{E}5\text{ kg}$; $m_{ad}=1\text{E}5\text{kg}$; $f_{mad}=0.11\text{Hz}(0.67\text{rad/s})$; $T_{mad}=9.37\text{s}$ | Fig. 4.36 e 4.37 |
| Trans2 | Pistão (modelo da seção 4.1 – eig1) submetido a uma força variável. | $F = F_0 * \text{sen}(\omega*t)$ $F_0 = 10000\text{ N}$ e $\omega = 0.536\text{ rad/s}$ $k=80\text{kN/m}$; $m_e=78\text{E}3\text{kg}$; $m_f=1\text{E}5\text{ kg}$; $m_{ad}=1\text{E}5\text{kg}$; $f_{mad}=0.11\text{Hz}(0.67\text{rad/s})$; $T_{mad}=9.37\text{s}$ | Fig. 4.38 |
| Trans3 | Placa rígida-móvel acoplada com reservatório semi-infinito (modelo da seção 4.2 – eig2b). | $F = F_0 * \text{sen}(\omega*t)$ $F_0 = 245.25\text{ N}$ e $\omega = 15.0\text{Hz}(94.2\text{rad/s})$; $k=2.06\text{E}7\text{kN/m}$; $m_e=250\text{kg}$; $m_{ad}=583\text{kg}$; $f_{mad}=25.\text{Hz}(157.\text{rad/s})$; $T_{mad}=0.040\text{s}$ | Fig. 4.39 e 4.40 |
| Trans4 | Viga acoplada com reservatório semi-infinito (modelo da seção 4.2 – eig2a). | $F = F_0 * \text{sen}(\omega*t)$ $F_0 = 245.25\text{ N}$ e $\omega = 15.0\text{Hz}(94.2\text{rad/s})$; $k=2.06\text{E}7\text{kN/m}$; $m_e=250\text{kg}$; $m_{ad}=583\text{kg}$; $f_{mad}=39.2.\text{Hz}(246.\text{rad/s})$; $T_{mad}=0.0255\text{s}$ | Fig. 4.41 |
| Trans5 | Barragem rígida - móvel acoplada com reservatório longo (modelo da seção 4.3 – eig3). | $F = F_0 * \text{sen}(\omega*t)$ $F_0=0.1*9.81*2500*T(y)$ Newtons e $\omega = 15.0\text{Hz}(94.2\text{rad/s})$; $f_{mad}=3.76\text{Hz}$ (23.7rad/s); $T_{mad}=0.265$ | Fig. 4.42 |
| Trans6 | Barragem acoplada com reservatório infinito – condição de radiação. | $F = F_0 * \text{sen}(\omega*t)$ $F_0=0.1*9.81*2500*T(y)$ Newtons e $\omega = 15.0\text{Hz}(94.2\text{rad/s})$; $f_{mad}=3.76\text{Hz}$ (23.7rad/s); $T_{mad}=0.265$ | Fig. 4.43 |

Onde $T(y)$ é a largura da seção horizontal da barragem a uma altura “y” do solo.

Os passos de tempo foram estabelecidos em função das constantes de tempo do fenômeno que se quer observar, do tempo total de integração para evitar excessos de passos de tempo e da acurácia da resposta dinâmica do simulador transiente. Os parâmetros de análise transiente estão listados na tabela 4.13.

O gráfico da Fig. 4.36 representa o deslocamento do pistão modelado de 3 formas diferentes para a condição inicial de velocidade igual a 0.1m/s, a saber: (a) SSUGL sem fluido na cavidade, (b) SSUGL com representação do fluido na cavidade por uma massa adicional, (c) SSUGL com representação da cavidade por EF 1D (problema acoplado).

Tabela 4.13 – Parâmetros da análise transiente.

| Caso | Descrição | Tempo de Integração (segundo) | Passo de tempo (segundo) | Período* (segundo) |
|------------------|--|--------------------------------------|---------------------------------|---------------------------|
| Trans1 Trans2 | Pistões das Fig. 4.36 a 4.38. | 20.0 | 0.02 | 9.1 |
| Trans3 Trans4 | Viga acoplada com reservatório das Fig. 4.39 a 4.41. | 4.00 | 1.33E-4 | 0.0255 0.0388 |
| Trans5 Trans6 | Barragem acoplada com reservatório das Fig. 4.42 a 4.44. | 1.20 | 4.00E-4 | 0.265 |

*Período natural acoplado de vibração do modo fundamental.

Comparando-se as curvas da Fig. 4.36, observa-se que o efeito de reservatório altera o período de vibração do sistema, em relação ao sistema no ar (a), assim como aumenta as amplitudes da resposta. O amortecimento da resposta dinâmica foi menos severo no modelo numérico em EF 1D (c) comparado ao modelo SSUGL com massa adicional (b). Isso se deve ao fato da força do amortecimento no SSUGL com massa adicional (b), ter sido calculada considerando a massa da estrutura mais a massa do fluido, ou seja, fazendo $F = \xi \cdot 2 \cdot (m_E + m_{AD}) \cdot \omega_{AD} \cdot \dot{u}$ (conforme seção 3.5). Dessa forma o amortecimento estrutural é ligeiramente maior que nos outros casos.

Na Fig. 4.36 também evidencia-se os períodos naturais de vibração desacoplado (SSUGL (a)), massa adicional (b) e acoplados (c) (6.2seg, 9.4seg e 9.4seg, respectivamente).

Na figura 4.37 compara-se os modelos numéricos em elementos finitos 1D (mesmo do gráfico 4.36) com um 2D, igual ao caso eig1 da seção 4.1. Devido ao movimento predominantemente axial do pistão, há um perfeito acordo entre as respostas dos modelos.

A Fig. 4.38 submete três modelos, utilizados anteriormente nas Fig. 4.36 e 4.37, a uma força variável no tempo. Foram simulados: (a) SSUGL com massa adicional; (b) numérico EF 1D; numérico EF 2D com a força distribuída nos nós. Novamente houve uma exatidão entre as respostas das simulações que tiveram um período de aproximadamente 10 seg. A frequência da carga senoidal foi escolhida de modo a ser aproximadamente 80% da frequência fundamental do sistema acoplado. A figura mostra o início do fenômeno de batimento (Clough 1960, Pedroso 2004).

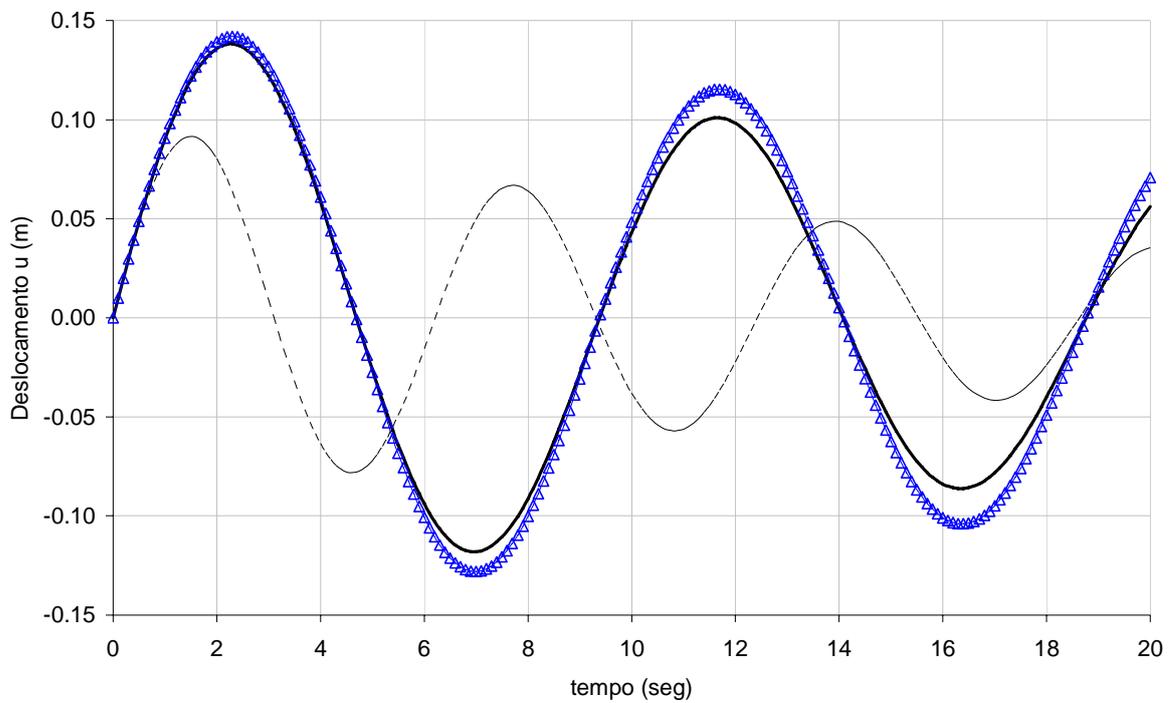
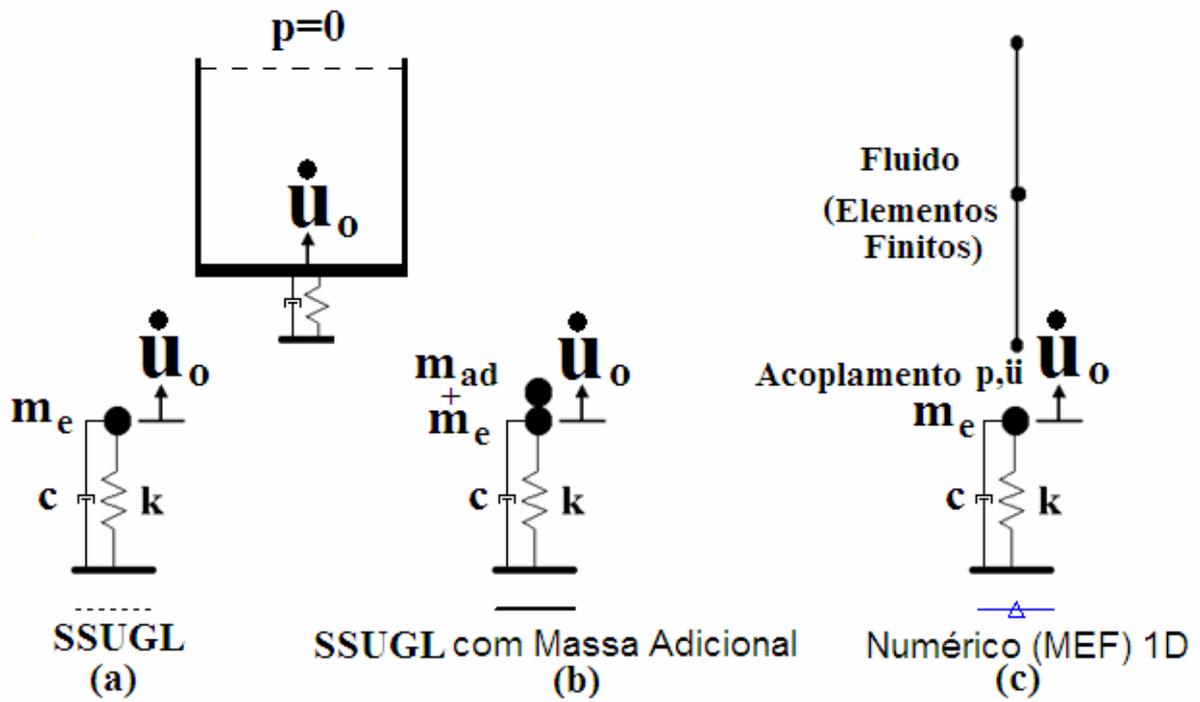


Figura 4.36 – Simulação transiente do caso da seção 4.1 (eig1).

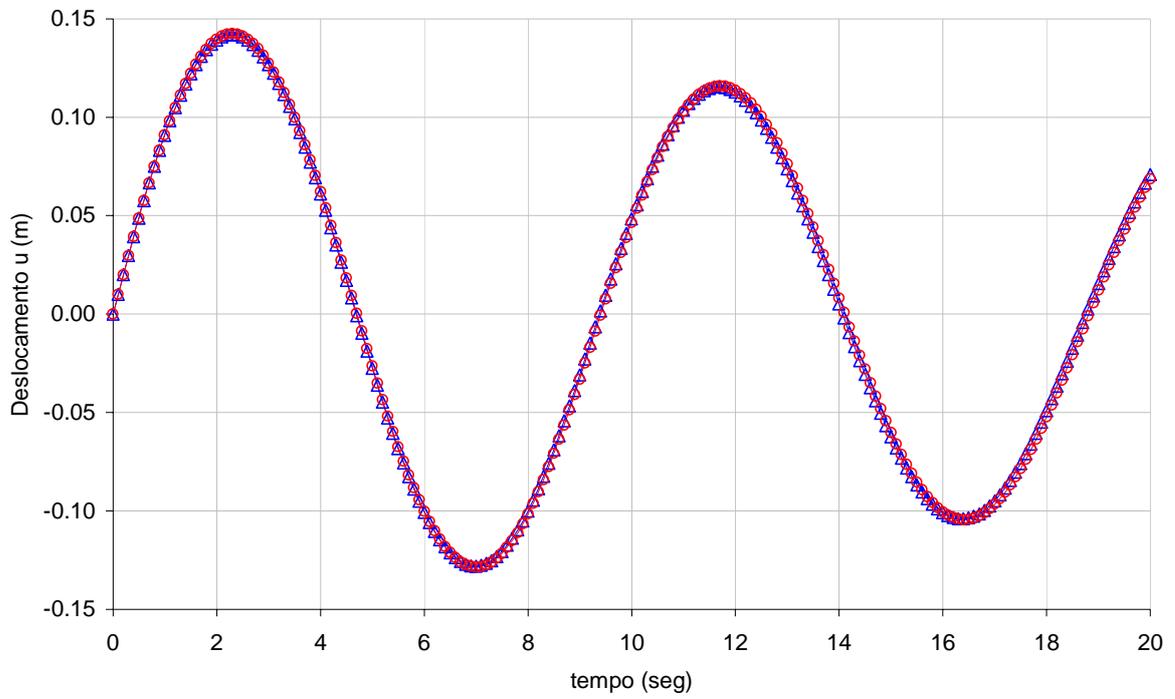
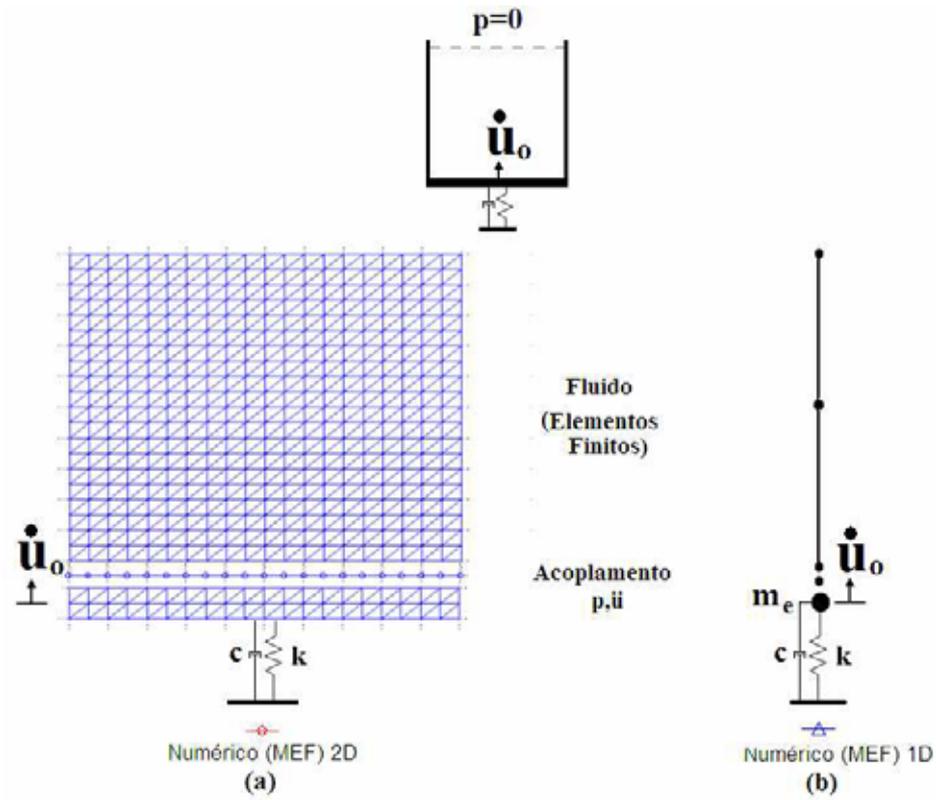


Figura 4.37 – Simulação transiente do caso da seção 4.1 (eig1) (continuação).

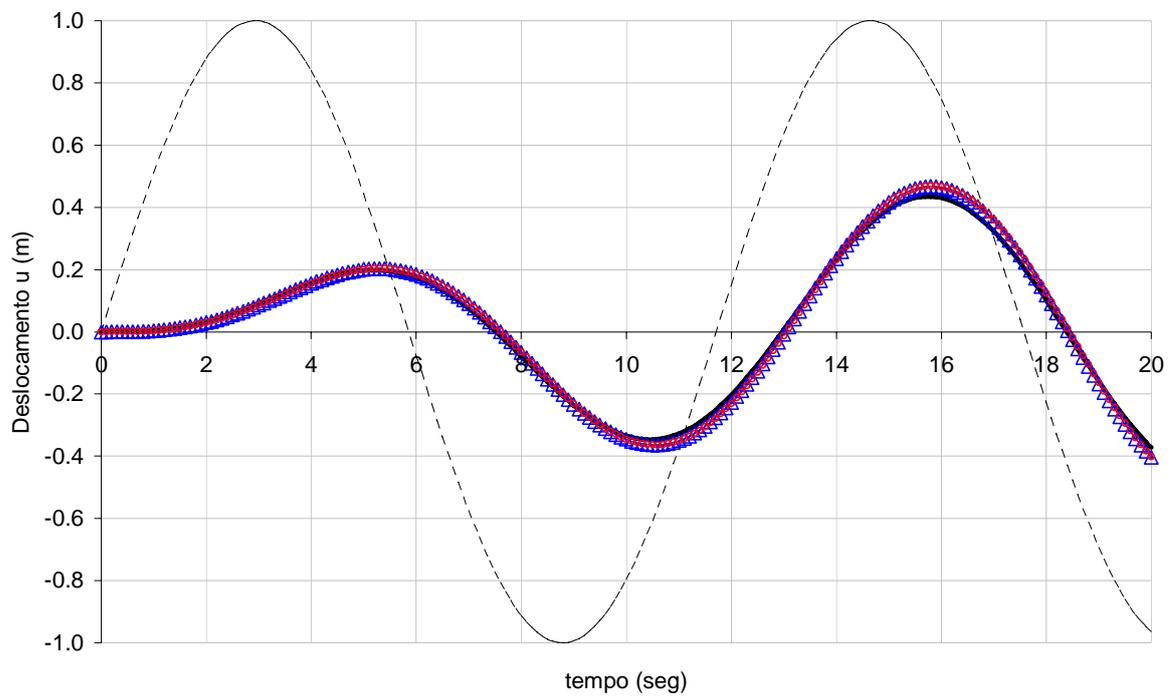
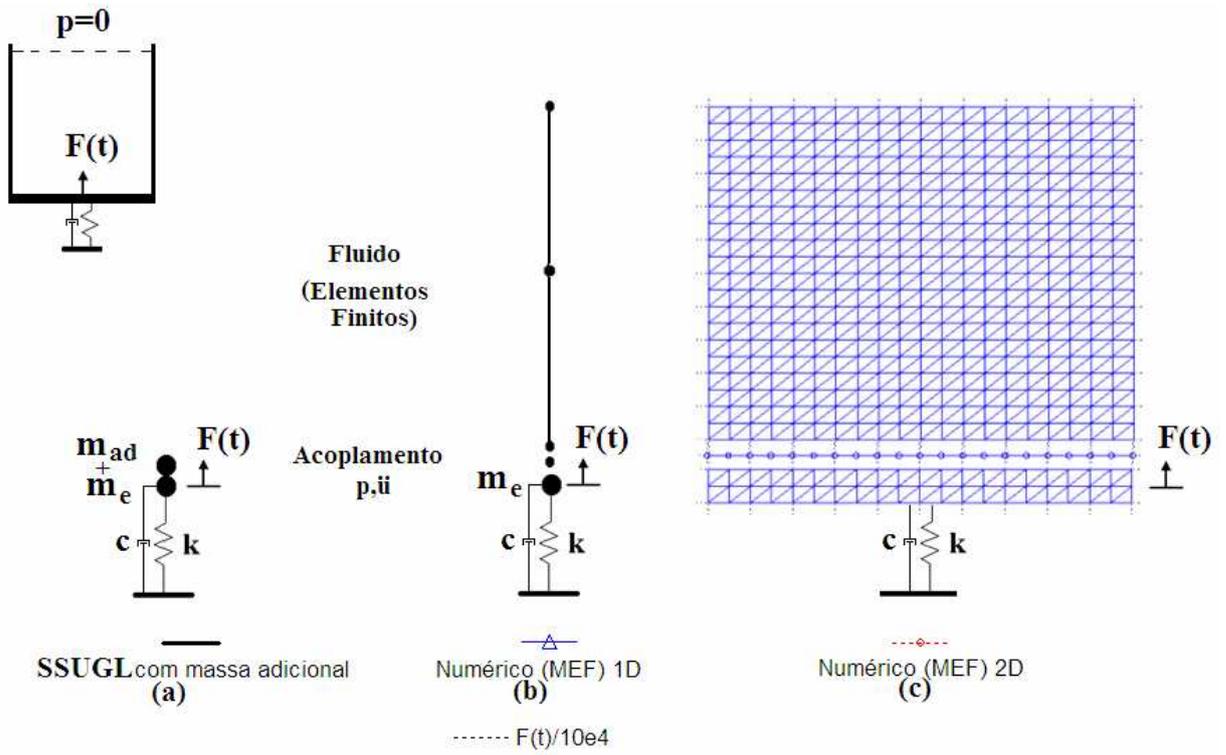


Figura 4.38 – Simulação transiente do caso da seção 4.1 (eig1) (continuação).

A Fig. 4.39 mostra 4 sistemas SSUGL e numéricos 2D capazes de modelar o problema da viga rígida-móvel desacoplada e acoplada com reservatório semi-infinito (caso eig2b da seção 4.2) sujeita a uma carregamento senoidal. Os sistemas são: (a) SSUGL com a massa da viga; (b) SSUGL com massa da estrutura e adicional; (c) modelo em EF para a viga rígida-móvel; (d) modelo em EF para a viga rígida-móvel com massa adicional analítica acoplada. Esses exemplos tiveram o objetivo de validar o programa MEF para a viga rígida-móvel. Observa-se que houver um bom acordo dos casos numéricos com os equivalentes SSUGL (“a” com “c” e “b” com “d”) e as respostas acompanharam a fase do carregamento (período de 0.07s). Alguma diferença surgiu entre os modelos SSUGL (b) e numérico com massa adicional (d), o motivo é o mesmo apresentado anteriormente, ou seja, a força de amortecimento considerou a frequência acoplada e a massa adicional.

A Fig. 4.40 compara as respostas do modelo numérico em EF para a viga rígida-móvel com massa adicional (a) com um modelo numérico em EF acoplado (b), este último semelhante ao caso eig2 da seção 4.2. Considerando as simplificações de modelo (a), pode-se dizer que houve um bom acordo entre as simulações. Novamente, as respostas estão em fase com o carregamento (período de 0.07seg.).

A Fig. 4.41 mostra a grande distância existente entre o modelo real de acoplamento FE (b) - para o problema de Westergaard (1931) (Apêndice B) – e a solução analítica para a massa adicional e um SSUGL equivalente a viga (a). A grande diferença entre o modelo de deformação da viga engastada-livre e o movimento do SSUGL justifica a discrepância das respostas transientes.

O estudo transiente da barragem típica da seção 4.3 (caso eig3) está presente nas figuras 4.42, 4.43 e 4.44. A estrutura é submetida ao um carregamento harmônico distribuído e vibra de maneira forçada. Na figura 4.43 compara-se o modelo barragem rígida-móvel acoplada ao um reservatório longo (c) com o modelo semelhante, mas com a barragem engastada na base (d) e SSUGL com (a) e sem massa adicional (b). Observa-se diferença significativa, principalmente nos primeiros instantes, entre o caso (d) e os demais. Vários períodos podem ser observados nas respostas dinâmicas dos sistemas, dentre eles cabe destacar: 0.06seg. do carregamento; 0.25seg. da frequência acoplada de massa adicional (a). Além disso, observam-se diferenças mais acentuadas das curvas a partir do instante

0.47seg., que é o tempo de retorno da onda que reflete na fronteira distante do modelo (a) - sem dissipação por radiação.

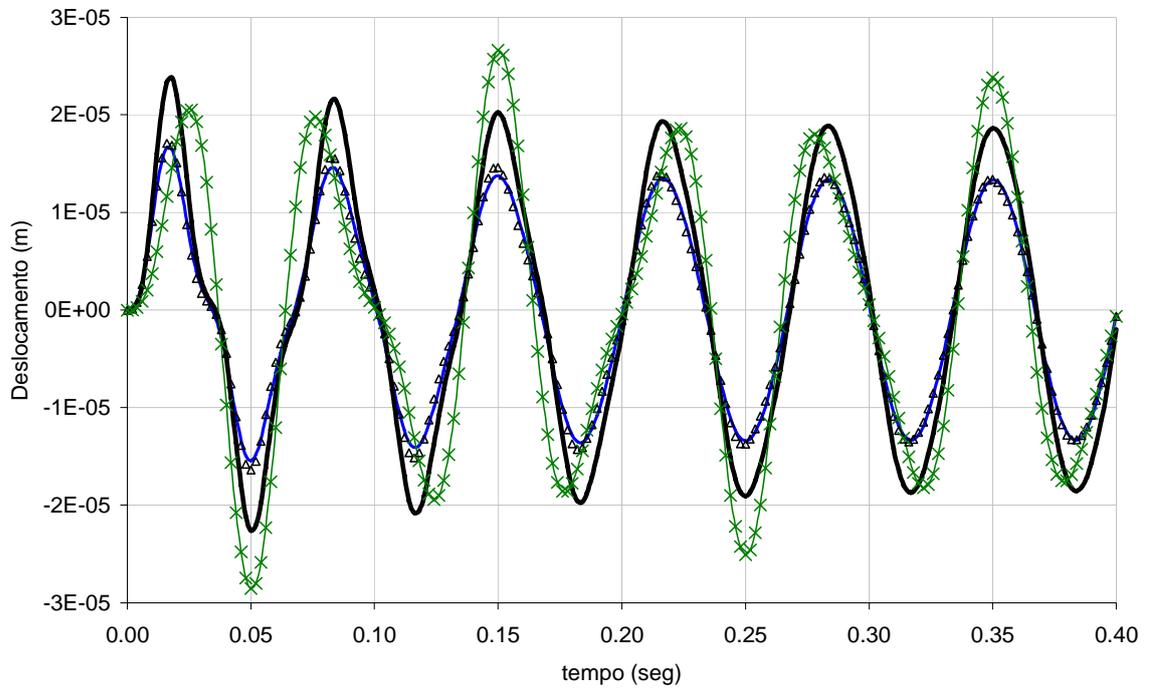
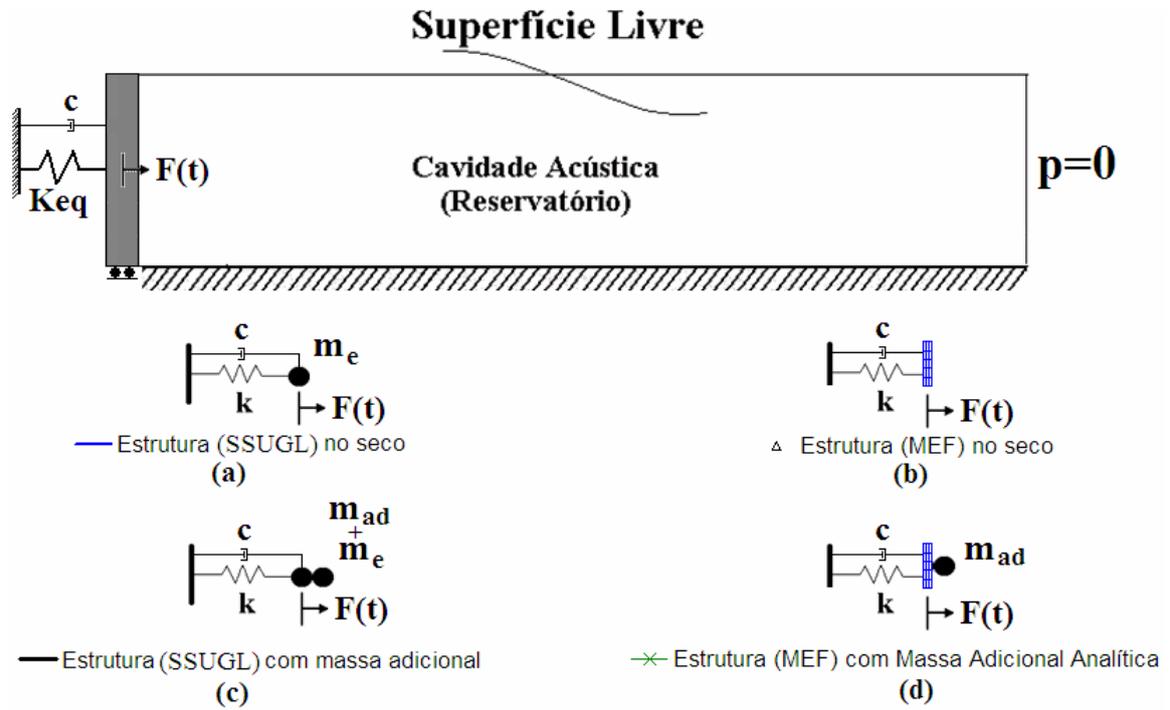
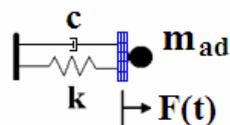
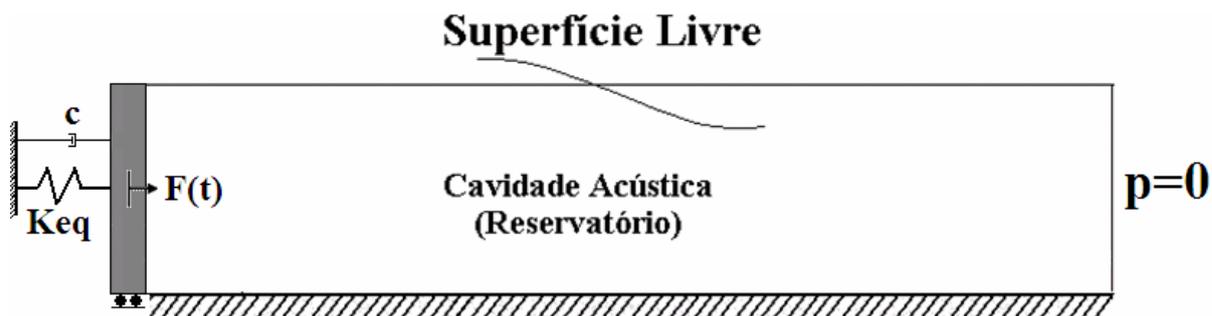
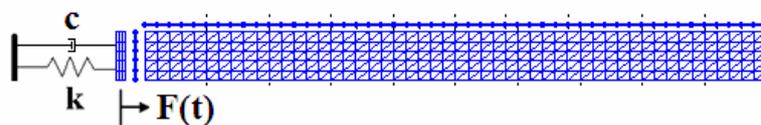


Figura 4.39 – Simulação transiente do caso da seção 4.2 (eig2b).



(a) —x— Estrutura (MEF) com Massa Adicional Analítica



(b) —o— Modelo IFE (MEF) do pistão de Westergaard

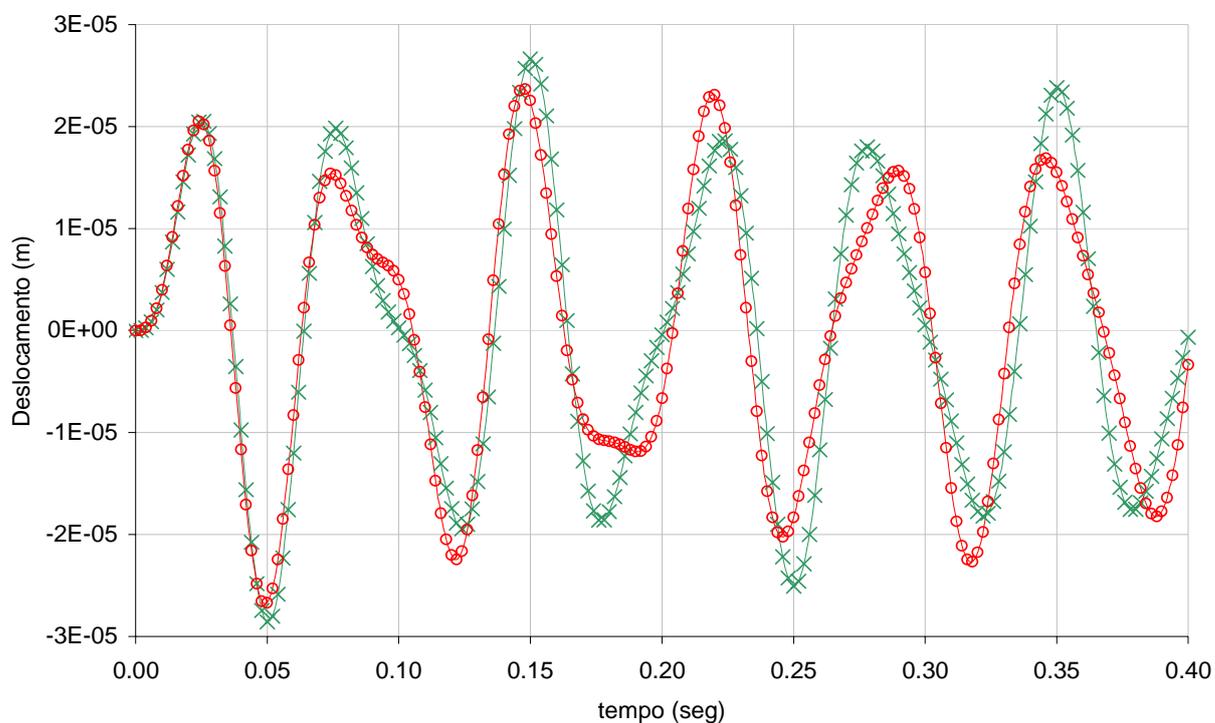


Figura 4.40 – Simulação transiente do caso da seção 4.2 (eig2b) (continuação).

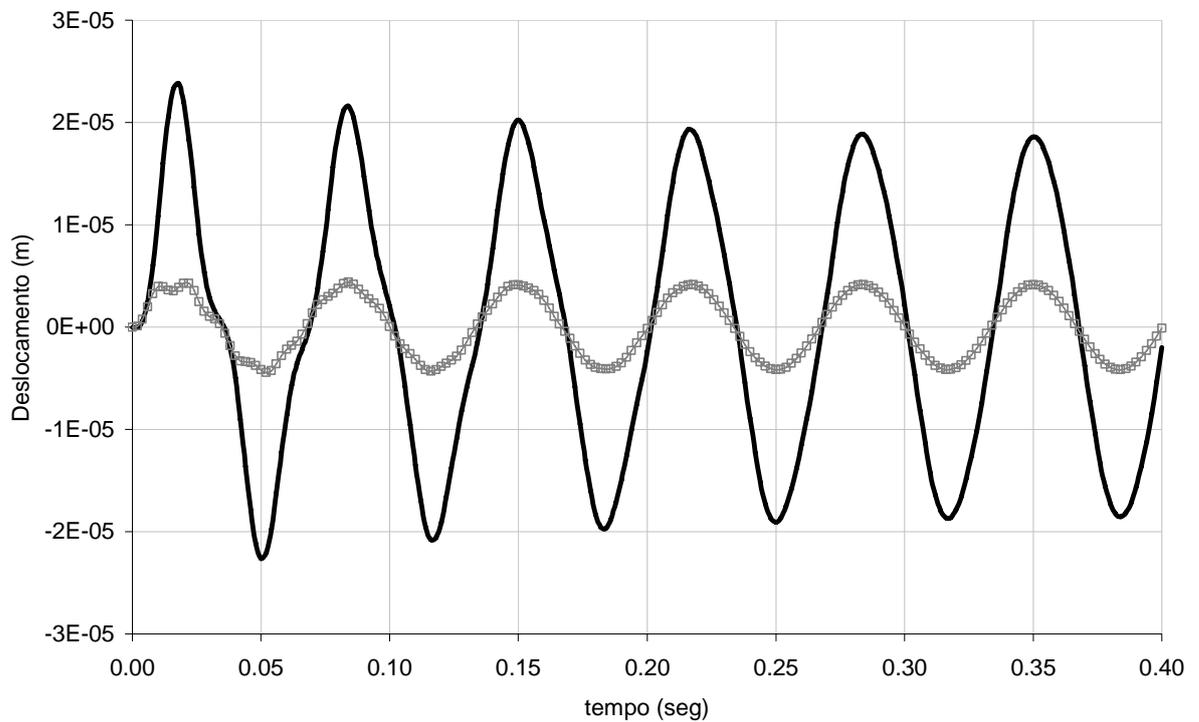
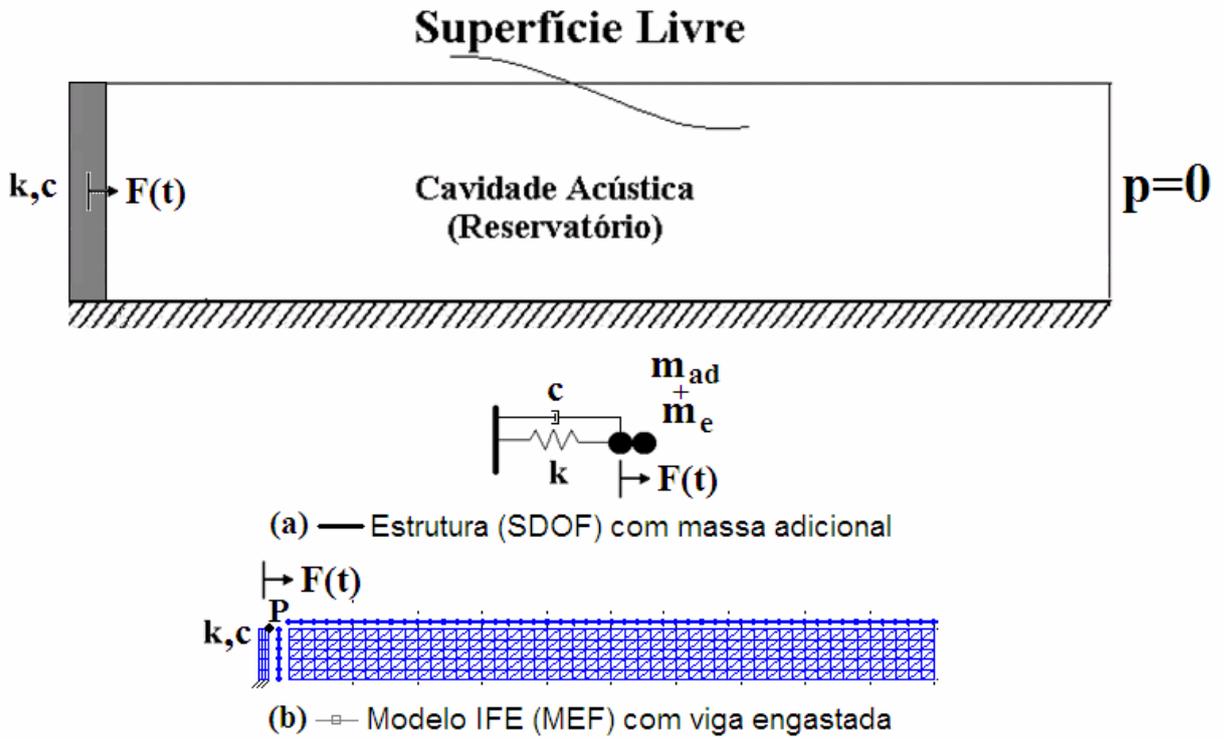


Figura 4.41 – Simulação transiente do caso da seção 4.2 (eig2a) (continuação).

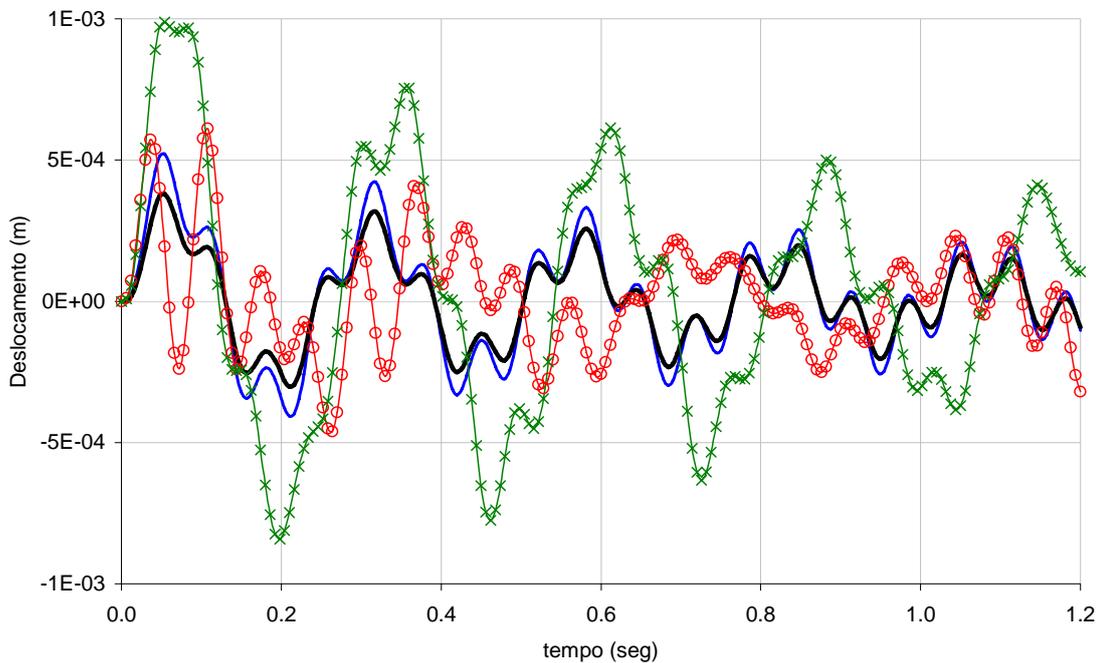
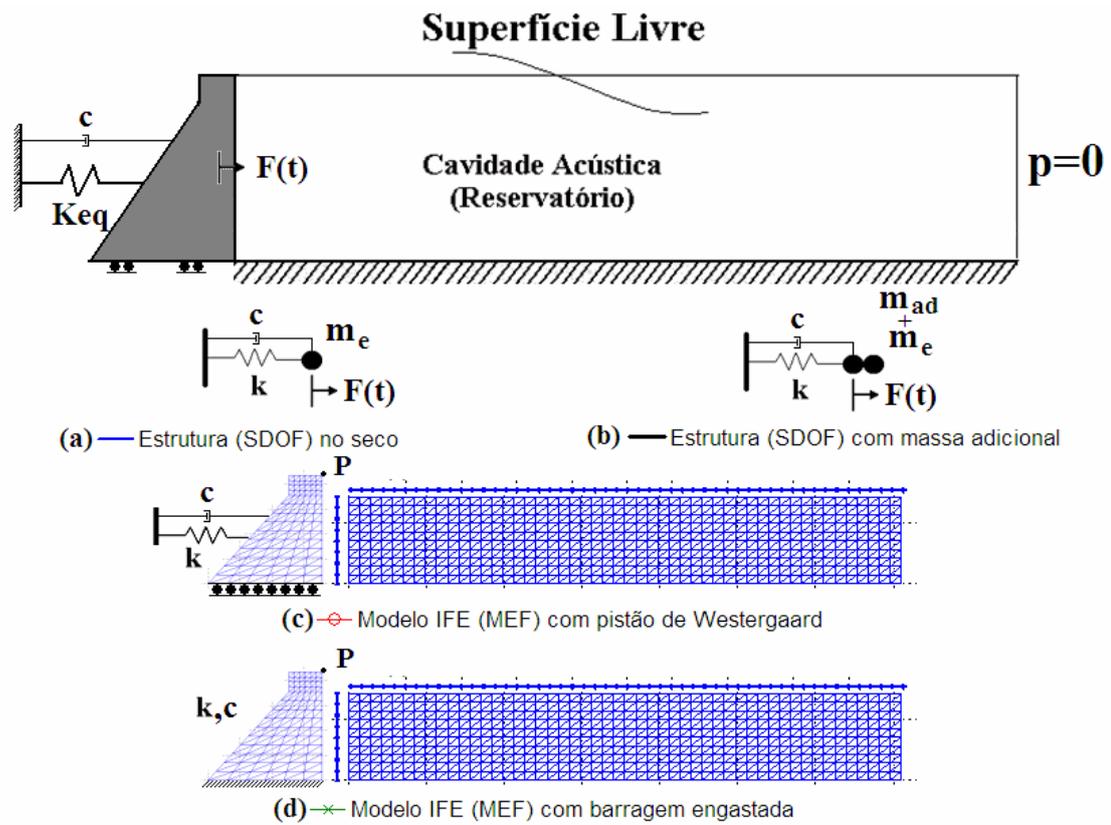


Figura 4.42 – Simulação transiente do caso da seção 4.3 (eig3).

Obs: no modelo IFE (MEF) com barragem engastada foi analisado o deslocamento horizontal do nó mais alto a montante da barragem.

A Fig. 4.43 compara dois casos para a barragem rígida-móvel, um com pressão nula no final do reservatório (a) e outra com elementos finitos 1D para a condição de radiação no infinito (b). Observa-se uma mudança no período de resposta transiente, a curva do sistema com radiação (b) se adianta com relação ao caso com pressão nula (a). Também é constatado um maior pico de resposta para o caso com radiação (b).

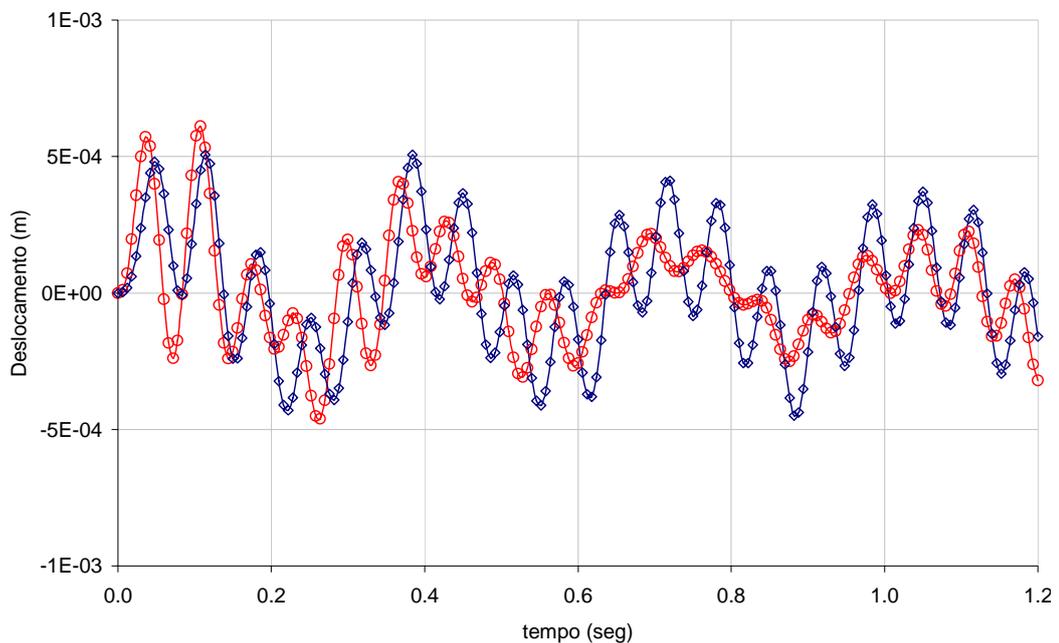
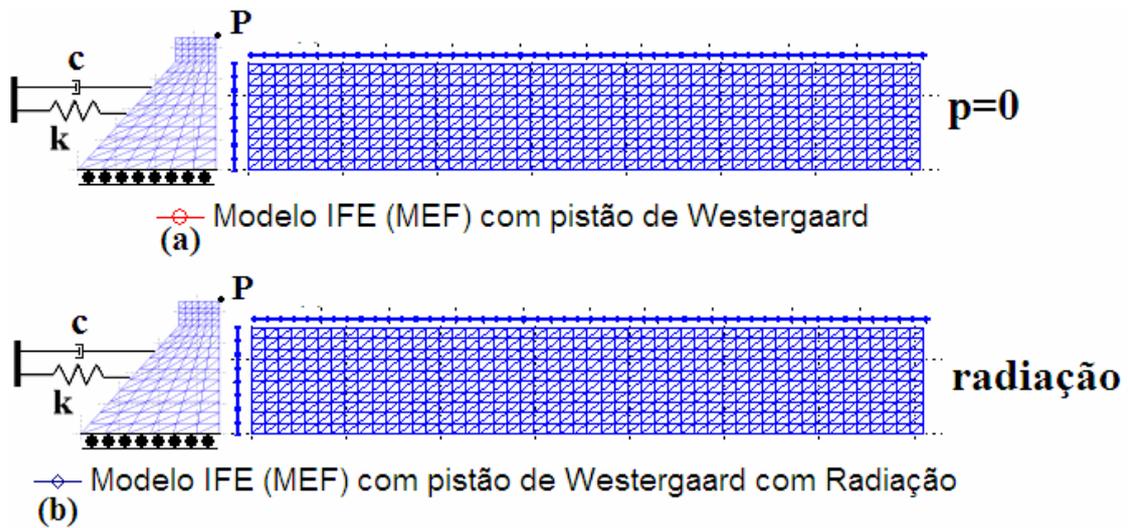
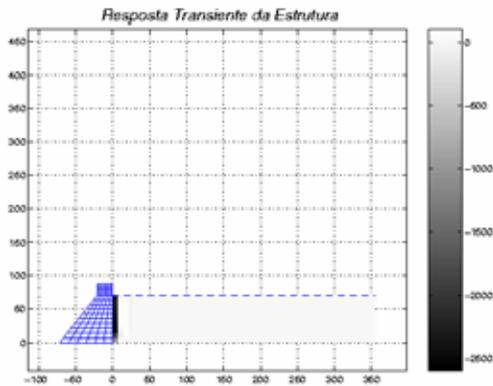
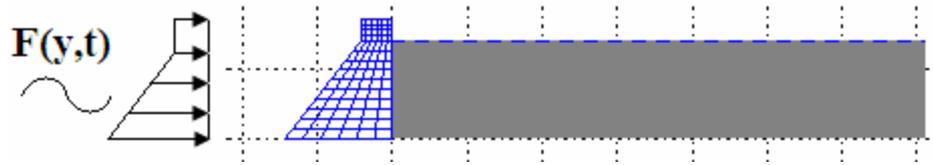
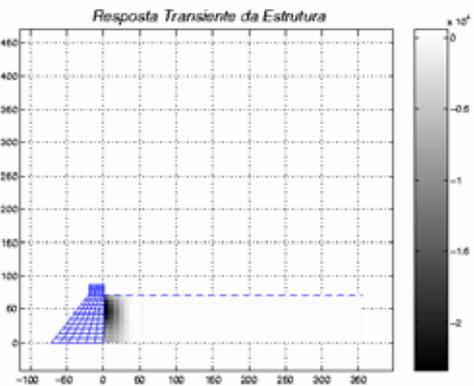


Figura 4.43 – Simulação transiente do caso da seção 4.3 (eig3) (continuação).

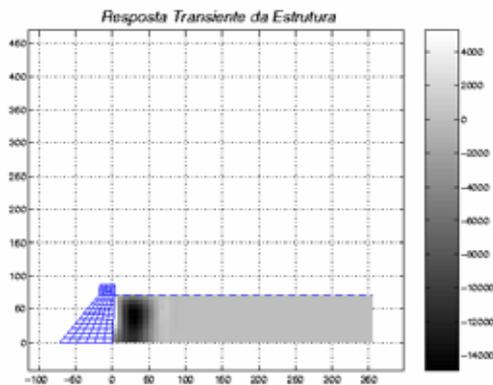
A Fig. 4.44 mostra a evolução das pressões no reservatório durante a análise transiente forçada apresentada no caso (a) da figura anterior (4.43).



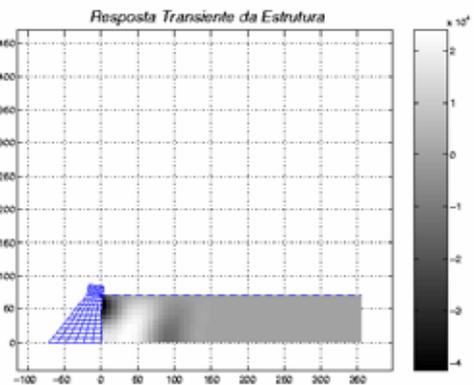
0.0060 seg



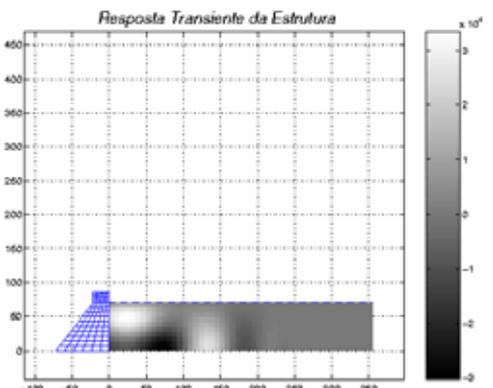
0.0240 seg



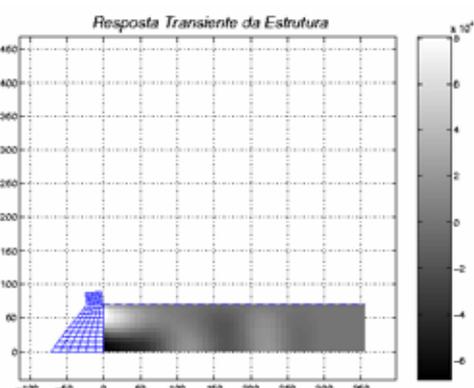
0.0420 seg



0.0840 seg



0.1380 seg



0.1920 seg

Figura 4.44 – Resposta transiente do sistema acoplado barragem-reservatório.

Para as simulações transientes 2D foram construídos modelos simplificados de 1 grau de liberdade (SSUGL). Esses modelos são importantes, pois permitem a interpretação e validação dos resultados transientes acoplados em EF. Além disso, eles fornecem uma resposta rápida e de boa precisão que pode atender a muitos problemas práticos de engenharia.

No caso das simulações presentes nas Fig. 4.36 a 4.38 observa-se uma perfeita concordância entre os modelos numéricos (1D e 2D) e o analítico. O fator de compressibilidade calculado ($\omega L/c$) é muito menor que a unidade (<0.1), indicando que o fluido é praticamente incompressível no modo fundamental. Logo, a resposta transiente é bem prevista com o modelo de massa adicional.

No caso da placa rígida-móvel acoplada com o reservatório (Fig. 4.39 a 4.41), o SSUGL com a massa adicional, calculada pela teoria de Westergaard (1931), mostrou-se muito eficiente na predição da resposta dinâmica acoplada do sistema equivalente. No entanto, o modelo da viga engastada acoplada com o reservatório apresentou discrepância nos resultados em função da grande diferença entre o modelo estrutural de viga engastada-livre e a viga rígida-móvel. O mesmo se verifica para o caso da barragem acoplada com o reservatório.

O efeito da condição de radiação mostrou-se pouco influente na resposta transiente do acoplamento barragem – reservatório. Mas este efeito poderia ser mais significativo numa simulação com parâmetros, constantes de tempo e características do transiente mais propícios a influência dos mesmos.

não foi explorada ao máximo com exemplos de geometria mais complexa e malhas não estruturadas. A formulação em diferenças finitas foi usada em caráter didático, por ser um métodos de mais fácil compreensão, e também por ter grande aceitação na comunidade de Mecânica dos Fluidos. Na foi abordada modelagem via operadores discretos com malhas não estruturadas em diferenças finitas.

O capítulo 3 foi uma iniciativa de transcrever as formulações matemáticas numéricas para o raciocínio computacional. As metodologias foram exemplificadas com um caso prático. É evidente que os procedimentos numéricos são essencialmente computacionais, mas a montagem de um acoplamento de forma manual contribui para o entendimento da modelagem. Essa é uma prática correntemente entre alguns autores clássicos da área de elementos finitos (Rao, 1989).

A obtenção dos valores próprios dos sistemas acoplados é um dos desafios da formulação. Devido a não simetria das matrizes, a escolha do algoritmo de cálculo dos autovalores e autovetores se torna uma tarefa crítica. Nas simulações desse trabalho foi utilizado o algoritmo QZ, que se mostrou muito estável para os problemas estudados, mas o esforço computacional é muitas vezes excessivo, visto que foi utilizado um PC nas análises. A impossibilidade de uso de formas otimizadas de armazenamento de matrizes (banda, semi-banda e skyline) contribui para o alto tempo de processamento. Futuras pesquisas podem se pautar no desenvolvimento de metodologias para o cálculo dos autovalores e autovetores com essas matrizes.

Com os valores próprios é possível fazer uma análise transiente via método no domínio da frequência, no entanto as análises foram realizadas com um algoritmo de integração no tempo passo a passo (Newmark - descrito por Clough 1960). A escolha deve-se a robustez e versatilidade do método e a possibilidade futura de consideração de aspectos não lineares. A boa concordância das respostas dinâmicas transientes dos modelos numéricos mais complexos com modelos conceituais mais simples permitiu concluir que o método é capaz de fazer os cálculos transientes nas matrizes acopladas da formulação estudada.

Em algumas simulações transientes considerou-se uma matriz de amortecimento estrutural, calculada como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez da estrutura. Nos exemplos estudados, foi usado um amortecimento de 5%. Observou-se que a atenuação da

vibração foi pequena, mas vale ressaltar que os tempos de observação do fenômeno foram curtos, da ordem de 1 segundo.

Os exemplos numéricos do capítulo 4 cumpriram com os objetivos a que se propuseram. O principal intuito era analisar a capacidade da formulação numérica em prever as frequências e deformadas modais naturais de vibração (problema de valores próprios) e realizar análises transientes, via aplicação de algoritmo clássico de integração no tempo (Newmark) nas matrizes acopladas.

Os resultados numéricos obtidos reproduziram com grande precisão os valores previstos pelas soluções analíticas, assim como, forneceram importantes informações relativas à compreensão da fenomenologia e dos mecanismos envolvidos nos problemas de interação fluido-estrutura.

Nas análises transientes, os modelos analíticos simplificados (massa-mola) e numéricos unidimensionais apresentaram resposta dinâmica muito próximas dos valores calculados com os modelos em EF 2D acoplados. Essa boa concordância foi possível devido a escolha adequada de dimensões e constantes físicas do problema, de modo que o conceito de massa adicional fosse válido.

No entanto, vale a alerta que em muitos casos da prática, a construção de modelos simplificados pode não ser tarefa muito simples. Nesses casos, o engenheiro certamente terá que recorrer a uma ferramenta capaz de realizar análises fluido-estrutura acopladas, com discretização da estrutura e fluido.

O exemplo 1 (reservatório com fundo flexível e superfície livre) é um caso de interação dinâmica acústico-mecânica amplamente explorado pelo GDFE em trabalhos anteriores. As soluções numérica via MEF e MDF se ajustaram adequadamente às soluções analíticas para cavidades acústicas, pistões unidimensionais e superfície livre. A escolha dos parâmetros do problema permitiu a aplicação do conceito de massa adicional.

O quadro resumo geral da tabela 4.3 permitiu observar as tendências nas frequências e modos acoplados. Ao analisá-los é possível perceber qual dos meios (sistemas) controla em cada um dos modos acoplados, ou seja, por vezes há modos acoplados que reproduzem a assinatura dos modos desacoplados.

Nos três exemplos estudados, foram observados dois grupos de autovalores/autovetores acoplados: os primeiros de frequências mais baixas dominados pela vibração da superfície livre; o segundo dominados pelas frequências da cavidade e estrutura. Nesses últimos, se encontra o modo de massa adiciona, quando o conceito é aplicável (incompressibilidade do fluido no modo).

O exemplo 2 é uma placa (viga) engastada acoplada com reservatório longo, também um sistema acoplado para verificação da teoria clássica de Westergaard (1931) – Modelo Pistão-Reservatório (MPR). Procurou-se, neste caso, abordar os aspectos teóricos relativos a interação barragem-reservatório. O modelo MPR foi explorado analiticamente e numericamente, mostrando resultados coerentes. O aspecto da não compressibilidade do fluido no modo de massa adicional foi o fator que permitiu o sucesso na comparação entre os vários modelos de interação.

O terceiro exemplo é uma tentativa preliminar de aplicação das teorias estudadas a uma barragem real. A rigor, a modelagem poderia ser mais precisa com relação aos detalhes do problema (3D, tamanho do reservatório, interação barragem-fundação, dissipação etc), mas a proposta era estudar de maneira mais geral o caso. Houve uma adequação das soluções analíticas e numéricas para os modos naturais de vibração do reservatório. Foi observado que o modo fundamental do sistema acoplado não se adequa ao conceito de massa adicional, portanto, estudos que considerem as pressões hidrodinâmicas de Westergaard (1931) podem incorrer em erro.

Os casos transientes mostraram que, para os carregamentos escolhidos, houve pouca influencia da superfície livre nos modos acoplados. Foi ainda observado que o amortecimento estrutural atenuou as vibrações reduzindo os picos de resposta de deslocamentos, mesmo em curtos instantes de observação. Deve ser destacado a importância da construção de modelos simplificados (pistão, modelo 1D etc) na predição do comportamento dinâmico de sistemas acústico-mecânicos. No entanto, o MPR de Westergard não funcionou adequadamente para a barragem, como já havia sido previsto no estudo de valores próprios.

O efeito da condição de contorno do tipo radiação, para o caso e parâmetros da cavidade, mostrou-se pouco influente na resposta transiente do sistema acoplado barragem-

5- CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Obras civis de grande porte, como barragens, podem estar sujeitas a carregamentos dinâmicos que induzem movimentos vibratórios tanto na estrutura quanto no fluido do reservatório. O tratamento adequado do fenômeno de interação entre os dois meios contínuos é imprescindível na análise da segurança estrutural dessas construções.

Um dos objetivos do trabalho foi mostrar aplicações da Interação Fluido-Estrutura na Engenharia Civil. Procurou-se também explorar alguns aspectos relativos a complexidade do fenômeno associado ao acoplamento fluido-estrutura.

Foi dado ênfase aos aspectos conceituais e computacionais básicos relativos ao assunto. Foram abordadas as equações da Mecânica dos Sólidos, Fluidos e Métodos de Solução. Estudos avançados podem ser realizados dando continuidade a este trabalho, como por exemplo, não linearidades estruturas, interação barragem-reservatório-fundação, efeitos de dissipação, cavitação no reservatório durante sismos dentre outros.

Um dos aspectos mais explorados nesse trabalho foi a “mecânica” do acoplamento entre as equações de movimento de uma estrutura elástica e a equação de um fluido acústico. Além desse aspecto, também procurou-se mostrar teoricamente as equações dos meios contínuos e dos contornos, inclusive o contorno de acoplamento.

Foi explorada uma formulação clássica de Interação Acústico-Mecânica apresentada por Zienkiewicz e Newton 1969, que se mostrou como uma poderosa base teórica que permite o desenvolvimento de eficientes ferramentas de análise. A sua estabilidade e convergência foram aspectos confirmados por esse trabalho. Acredita-se, que em função desse desempenho comprovado a mais de três décadas, muitos programas comerciais ainda se baseiam nessa formulação (ANSYS®). No entanto, muitos desenvolvimentos foram feitos nas últimas décadas e a elaboração formulações mais robustas e versáteis para Interação Fluido-Estrutura ainda é um campo vasto para pesquisas.

Além da formulação numérica baseada em Elementos Finitos (Zienkiewicz e Newton 1969) foi elaborada um outra em Diferenças Finitas. O MEF apresentou convergência mais acelerada para a grande maioria dos casos. A versatilidade da malha de elementos finitos

reservatório. Mas este efeito eventualmente pode ser mais significativo em outras simulações que apresentem condições que favoreçam a evidencia desta influencia. Uma sugestão de análise para futuras pesquisas é o estudo do efeito de truncamento da condição de radiação em casos em que a malha do reservatório seja mais curta.

A metodologia de análise dos casos apresentados se mostrou adequada. Primeiramente, foi estudado os modos naturais de vibração acoplados e desacoplados dos sistemas independentes, cujos autovalores (frequências ou períodos) serviram de parâmetros para posterior simulação transiente. A aplicação imediata do conhecimento prévio dos autovalores foi a definição do passo de integração e do tempo total de análise transiente. Os resultados indicaram que o passo de tempo deve ser menor ou igual ao menor período de vibração do sistema acoplado, e o tempo total de integração deve ser maior que o período do modo fundamental de vibração do sistema. É evidente que outros aspectos podem contribuir na escolha dos parâmetros de simulações transientes.

Futuros trabalhos de pesquisa também podem explorar o uso de elementos finitos de alta ordem/isoparamétricos. O uso dessa técnica pode representar um ganho de precisão e desempenho da formulação.

Também cabe no assunto a aplicação de outras técnicas numéricas como elementos de contorno para modelagem de reservatórios infinitos e interação barragem-fundação infinita.

Um trabalho de pesquisa mais amplo deve conter uma campanha de instrumentação de barragens com acelerômetros e medição de pressões no reservatório com hidrofones, para validação de simuladores computacionais. Em casos de experimentos é possível forçar vibrações em barragens por meio de sistema giratório com massas desbalanceadas.

Em outras indústrias, como a do petróleo, é comum a construção de simuladores permanentes para plataformas flutuantes. Como vantagem, os operadores da estrutura podem a qualquer momento simular uma condição climática ou analisar uma possibilidade emergente de acidente. Grandes barragens brasilienses de grande porte também poderiam ter seus “bancos de ensaio numéricos” no qual estudos de estabilidade e desempenho poderiam ser realizados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abramson, H. Norman: Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers. *Appl. Mech. Revs.*, vol.16, No.7, July 1963, pp.501-506.
- Abramson, H. Norman: Some Current Aspects of the Dynamic Behavior of Liquids in Rocket Propellant Tanks. *Applied Mechanics Surveys*, Spartan Books, Inc., Washington, D.C.,1966.
- Abramson H.N., Hydroelasticity Some Problems and Some Solutions. In: *Proceedings Fluid-Solid Interaction Symposium*, Pennsylvania, ASME, pp.189-192, 210-212, nov.(1967)
- ANSYS 5.2. “User’s Manual”, Volumes 1, 2, 3, 4 e 5 (1995).
- Barbosa, AN e Pedroso, LJ – “Uma Formulação Potencial Simétrica para o Cálculo Estático e Dinâmico de problemas de Interação Fluido-Estrutura”. Dissertação de Mestrado em Estruturas – UnB-FT/ENC, E.DM 008A/98.
- Barbosa, A.N.; Sousa, S.M.; Pedroso, L.J. – Apresentação de Casos Envolvendo Exemplos de Acoplamento Fluido-Estrutura. *XXXII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*; paper code: JOR0568; Proceedings CD-ROM, Campinas, Brasil, maio/2006.
- Bauer H.F. &, Eidel W. - “Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and a partly elastically covered free surface”. *Journal of Fluids and Structures* 19 (2004) 209–220.
- Blagoveschchensky, S.N.: Theory of Ship Motions. English ed. Dover Publications, New York, 1962.
- Blevins, RD – “Flow-Induced Vibration”. Ed. VNR. Ed 2, Nova York (1990).
- Blevins, R.D. – “Formulas dor Natural Frequency and Mode Shape” – Ed. V.N.R , New York (1979).
- Bouaanani, N. – “Étude de L’Efect D’un Couvert de Glace Sur Le Comportement Dynamique Des Barrages-Poids. Tèse de doctorat ès sciences appliquées, Spécialité: génie civil. Sherbrooke (CA), 2002.
- Clough, R.W. & Penzien, J. - Dinamic of Structures”. MacGrow-Hill, 2a ed, New York (1960).
- Cook, R. D., Malkus D. S. e Plesha, M. E. – Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons (1989).

- Enciclopédia Encarta 1996. Digital (CD).
- Faltinsen, O.M., Rognebakke, O.F., Timokha, A.N. – “Classification of three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base tank with finite depth”. *Journal of Fluids and Structures* 20 (2005) 81–103.
- Fortuna, A.O. – Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações, EDUSP, 426pp (2000).
- Galli, L. e Pavanello, R. – “Formulação simétrica e modelagem por elementos finitos de problemas de interação fluido-estrutura”, *XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Brasília, (1993).
- Galli, L. e Pavanello, R. – “Modelos de elementos finitos aplicados a problemas de interação fluido-estrutura”. *8º Simpósio Brasileiro Sobre Tubulações e Vasos de Pressão*, Gramado (1994)
- Ghrib F., Léger P., Tinawi R., Lupien R., Veilleux M., Seismic Safety Evaluation of Gravity Dams. *Hidropower & Dams*, pp. 126 - 138, Vol. IV, Issue II, 1997.
- Gibert, RJ – “Vibrations des structures – Interactions avec les fluids – Sources d’excitation aléatoires”. Ed. Eyrolles, Paris, França (1988).
- Goldsborough, G.R.: The Tydal Oscillation in an Elliptic Basin of Variable Depth. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, 130,1930, pág. 157-167.
- Guam, F.& Moore, J.D. – “New Techniques for modelling reservoir-dam and foundation interaction”. *Soil dynamics an Earthquake Engineering* 16 (1997) 285-291.
- Housner, G.W.: Dynamic Pressures on Acelerated Fluid Containers. *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol. 47, 1957,pág. 15-35.
- ICOLD - International Commission on Large Dams, “A review of earthquake resistant design of dams, Committee on Earthquakes” - *ICOLD*, Bulletin 27, 106 p., 1975.
- Irons, B.M. – “The role of part inversion in fluido-structure problema with mixed variables”. *JAIAA*, 7, 568, 1970.
- Jacobsen, L. S.: Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of Fluid Surrounding a Cylindrical Pier. *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol. 39, 1949, pág. 189-204.
- Kuçukarslan, S. – “An exact truncation boundary condition for incompressible–unbounded infinite fluid domains”. *Applied Mathematics and Computation* 163 (2005) 61–69.
- Kyung H.C., Moon K.K., Yun M.L., Seong Y.C. – “Seismic response of base-isolated liquid storage tanks considering fluid–structure–soil interaction in time domain”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 24 (2004) 839–852.
- Lamb, M.A.H. – “Hydrodynamics”, ed. Dover Publications (1945).

- Léger, P. e Tinawi, R, 2000, “Lecture Notes of the Seminars on Research and Development of Security and Structural Integrity of Concrete Dams” .-UM/Poly – Montreal- CA.
- MATLAB – “Computer Visualization Programming” – User’s Manual. Math Works Inc.
- Morais, M. V. – “Modelização Numérica pelo Método dos Elementos Finitos de Problemas de Interação Fluido-Estrutura” - Tese de M.Sc. em Estruturas;Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UnB-FT/ENC, Brasília, 2000.
- Myung J. Jhung. “Hydrodynamic effects on dynamic response of reactor vessel internals”. *Int. J. Pres. Ves. & Piping* 69 (1996) 65-74.
- Oskouei A.V. & A.A. Dumanoglu. – “Nonlinear dynamic response of concrete gravity dams: cavitation effect”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 21 (2001) 99±112.
- Olson, LG and Bathe, K-J – “Analysis of Fluid-Structure Interactions. A Direct Summetric Coupled Formulation Based on the Fluido Velocity Potencial. *Computers & Structures*, Vol. 21, N° 1/2, pp21-32 (1985).
- Pedroso, L.J.- Alguns Aspectos da Interação Fluido-Estrutura em Estruturas "Off-Shore" - Tese de M.Sc.COPPE/UFRJ, 338 p.(1982).
- Pedroso, L.J, Tinawi, R & Léger, P.- On the Prospects of Computational Fluid Dynamics in Concrete Dam Engineering. *8th Conference on Computational Fluid Dynamics (CFD2K) - SCCFD*, Montréal – Ca, 11-13/06/2000, CD-Rom, & Vol.I pp.471-478.
- Pedroso, L.J – Análise da Estabilidade global de Barragens – Gravidade de Concreto Submetidas a Solicitações Estáticas e Dinâmicas –UnB-FT/ENC- Projeto de Pesquisa – Maio de 2001.
- Pedroso, L.J. - Analytical solutions for the study of the acoustic behaviour of cavities with rigid and flexible walls - An approach for dams-reservoir interaction - Part II. Relatório de Estudos de Pós-Doutorado, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structural Division (2000).
- Pedroso, L.J.- Fluid-Structure Interaction and Earthquake Analysis In Concrete Dams. Relatório de Estudos de Pós-Doutorado, University of Montreal, École Polytechnique, Civil Engineering Department, Structural Division (2000).
- Pedroso, L.J, TINAWI, R & LÉGER, P.- On the Prospects of Computational Fluid Dynamics in Concrete Dam Engineering. *8th Conference on Computational Fluid Dynamics (CFD2K) - SCCFD*, Montréal – Ca, 11-13/06/2000, CD-Rom, & Vol.I pp.471-478.

- Pedroso, L.J. - “Sistemas Simples com Múltiplos Graus de Liberdade – Parte 2”. Apostila Didática. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – UnB (2001).
- Pedroso, L.J. - “Introdução a Dinâmica de Estruturas – Publicação Didática (Parte I)”. Vs.4 09/00, UnB-FT/ENC.
- Pedroso, L.J. - “Dinâmica de Estruturas II – Sistemas Contínuos, Vigas Profundas, Análise Sísmica, Dinâmica de Cascas, Propagação de Ondas. Publicação Didática (Parte I)”. Vs.1 09/03, UnB-FT/ENC.
- Pedroso, L.J.- Interação Fluido-Estrutura – Publicação Didática (Apostila interna do curso). Vs.3 – 08/03, UnB/FT/ENC.
- Pedroso, L.J. & Sousa Jr, L.C. – Aspectos Relevantes na Análise Dinâmica Acoplada Barragem-Reservatório. Anais do XXVI Seminário Nacional de Grandes Barragens. Goiânia-GO, 11-15/042005. Paper T.97 A34; 14p.; CD-ROM.
- Pedroso, L.J., Sousa Jr, L.C. – “Simplify Treatment to Seismic Evaluation of Concrete Gravity Dams – Pseudo Static Method”. *Fifth Latin-American Congress: Electricity Generation and Transmition (V GLAGTEE)*, 16 a 20 de novembro de 2003, Rio de Janeiro.
- Pulino, A.R. – Notas de Aula do Curso de Operadores Discretos – UnB/FT/ENC/PECC - Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – 2004.
- Rao, S.S. (1989). “The Finit Element Method in Engeneering”. Publicação Pergamon Press, 2ed.
- SENC 2001 – Anais da Semana da Engenharia Civil 2001. Programa Especial de Treinamento – PET – ENC – UnB.
- Shames, I. H. – Mechanics of Deformable Solids, Prentice-Hall, Inc (1964).
- Silva, S.F. & L.J. Pedroso – Estudo Analítico-Numérico do Campo de Pressões e da Massa Adicional em Barragens Durante Terremotos. *XXXII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*; paper code: JOR0524; Proceedings CD-ROM, Campinas, Brasil, maio/2006.
- Sousa Jr., L.C. – “Estudos Analíticos e Numéricos de Vibrações em Barragens Gravidade de Concreto”. Relatório Técnico Final de Iniciação Científica/PIBIC – 2002/2003. UnB-FT/ENC, p.p.20, (2003).
- Sousa Jr, L.C. e Pedroso, L.J. – “Estudos Analíticos e Modelagem Numérica via MDF de Vibrações Livre de Vigas Profundas”. Relatório Técnico de Pesquisa, UnB/FT/ENC – RTP –3/03 – PJ/PQ-1, 09/03, pp.50.

- Sousa Jr, L.C., Neves, C.E.V, Pedroso, L..J. - Um Estudo Analítico e Numérico para o Efeito de Superfície (Sloshing) em Tanques Contendo Líquidos. *XXV CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, UFPE, Recife-PE, 10-12/11/2004, paper code: 01-046, Proceedings CD.
- Sousa Jr, L.C., Neves, C.E.V, Pedroso, L..J. – Estudos de Vibrações Livres de Cavidade Acústica pelo Método das Diferenças Finitas – *XXXI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*; CD-ROM, Mendoza, Argentina maio/2004.
- Sousa Jr, L.C. & Pedroso, L..J. – Acoplamento Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas – *XXXI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*; CD-ROM, Mendoza, Argentina maio/2004.
- Sousa Jr, L.C. & Pedroso, L.J. - “Estudo Analítico-Numérico de vibrações Livres de Cavidades Acústicas 2D e 3D”. *XXIV Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE*. Ouro Preto - MG/Brasil, 3-5/11/2003. CIL293-24-ISBN Proceedings CD: 85-288-0040-7 e ISBN Book of Abstracts: 85-288-0041-5.
- Sousa Jr, L.C.; Pedroso, L.J.; Barbosa, A.N. – Estudo Analítico-Numérico de Vibrações Livres Acopladas Fluido-Estrutura em Barragens de Concreto. *XXXII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*; paper code: JOR0607; Proceedings CD-ROM, Campinas, Brasil, maio/2006.
- Schotte, J.-S., Ohayon, R. – “Incompressible hydroelastic vibrations: finite element modelling of the elastogravity operator”. *Computers and Structures* 83 (2005) 209–219.
- Stewartson, K.: On the Stability of a Spinning Top Containing Liquid. *J. Fluid Mech.*, vol.5 , part 4 , 1959.
- Timoshenko, S. P. e Gere, J. E. (1994). “Mecânica dos Sólidos 1”. LTC Editora.
- Tinawi R., Léger P., Leclerc M., Cipolla, G., “Shake Table Tests for the Seismic Response of Concrete Gravity Dams”. *XI European Conference on Earthquake Engineering*. Paris, September, 1998.
- Trifunac M.D, Brady A.G., “On the correlation of seismic intensity scales with the peaks of recorded strong motion”. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 65(1), 139-162 pp., 1975.
- USCOLD (US Commission of Large Dams) – Guidelines for Earthquake Design and Evaluation of Structures Appurtenant to Dams (1995).
- Vanoni, V. A.; and Carr, J.H.: Harbor Surging. *Proc. First Conf. Coastal Engineering*, Long Beach, Calif., 1951, pág. 60-68.

- Viotti C.B., Sismicidade induzida por reservatórios: barragens de terra e a sismicidade brasileira, *Revista Construção Pesada*, (118), 100-110 pp., 1980.
- Xing, J.T., Price, W.G., Pomfret, M.J. e Yam, L.H. – “Natural Vibration of a Beam-Water Interaction System”. *Journal of Sound and Vibration* (1997) 199(3), 491-512.
- Wang, X. and Bathe, K-J – “Displacement/Pressure Based Mixed Finit Element Formulations For Acoustic and Fluid-Structure Interactions Problems”. *Int. Journal of Numerial Methods in Engineering*, vol.40, 2001-20017 (1997).
- Werner, P.W.; and Sundquist, K.J.: On Hydrodynamic Earthquake Effects. *Trans. Am. Geophysical Union*, vo. 30, no.5 , Oct. 1949, pág. 636-657.
- Westergaard, H. M. – Water Pressures on Dams During Earthquakes, *Trans. Of ASCE*, Vol 98, (1931).
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, Fourth Edition, McGraw-Hill Pub. Co. Ltd. UK (1989), Vol.2.
- Zienkiewicz, O.C. e Newton, R.E. – “Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid”. *Symposium on Finite Element Techniques*, Stuttgart (1969).

APÊNDICES

APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO DE DERIVADAS POR DIFERENÇAS FINITAS

Na engenharia dificilmente se conhece a solução matemática analítica dos fenômenos físicos. As equações diferenciais que regem esses fenômenos são muitas vezes complicadas e em geral não lineares. Diante disso, torna-se necessário utilizar procedimentos numéricos para montar soluções na forma de equações algébricas.

O uso da técnica de Diferenças Finitas procura escrever os operadores diferenciais em sua forma discreta, ou seja, em função de valores pontuais da solução. O conhecimento da solução, mesmo que de forma aproximada, em alguns pontos do domínio dá uma boa idéia da solução contínua. A medida que essa nuvem de pontos é adensada o valor da resposta numérica se aproxima do valor real.

A.1. OPERADORES DO MDF

Para aproximar a derivada de uma função ϕ o longo de um ponto “i”, basta tomar o valor da mesma função em pontos adjacentes “i+1” e “i-1”, espaçados de Δx do ponto “i”.

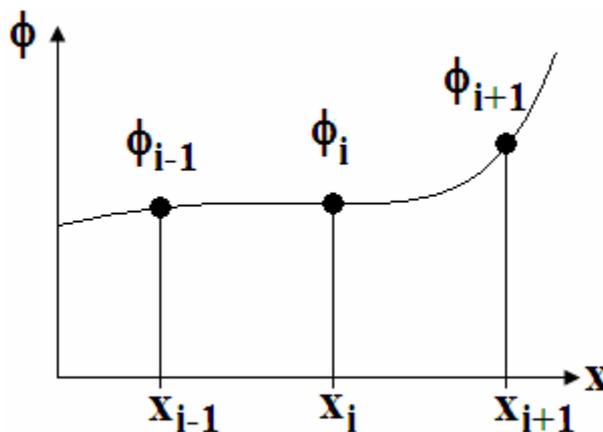


Figura A.1 – Pontos discretos de uma função.

A representação da derivada central da função ϕ fica:

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i \approx \frac{1}{\Delta x} \cdot (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \quad (\text{A.1})$$

Onde Δx é o espaçamento entre os 2 nós (passo), ϕ é a função a ser aproximada, i é o índice do nó, $\phi_{i+1} = \phi(x + \Delta x)$ e $\phi_{i-1} = \phi(x - \Delta x)$.

De acordo com a figura A1, fica claro que quanto mais próximos forem os três pontos, melhor será a aproximação sugerida pela equação A.1.

A derivada 2ª da função ϕ pode ser entendida como a variação da derivada primeira, matematicamente isso corresponde a:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \cdot (\phi'_{i+1} - \phi'_{i-1}) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)}{\Delta x} - \frac{(\phi_i - \phi_{i-1})}{\Delta x} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \cdot (\phi_{i+1} - 2 \cdot \phi_i + \phi_{i-1})$$

O mesmo pode ser feito para as derivadas de 3ª e 4ª ordem. O resultado é:

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} \approx \frac{1}{2\Delta x^3} \cdot (\phi_{i+2} - 2 \cdot \phi_{i+1} + 2 \cdot \phi_{i-1} - \phi_{i-2}) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} \approx \frac{1}{\Delta x^4} \cdot (\phi_{i-2} - 2 \cdot \phi_{i-1} + 6 \cdot \phi_i - 2 \cdot \phi_{i+1} + \phi_{i+2}) \quad (\text{A.4})$$

A.2. ERRO NA APROXIMAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS

Para se ter uma idéia do erro cometido pelo MDF, pode-se utilizar uma expansão em série de Taylor da função $\phi(x)$.

$$\phi_{i+1} = \phi(x + \Delta x) = \phi(x)_i + \frac{\Delta x}{1!} \cdot \phi'(x)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \phi''(x)_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \phi'''(x)_i + \dots \quad (\text{A.5})$$

Isolando o termo $\phi'(x)$ na expressão A.5 chega-se a:

$$\begin{aligned}\phi'(x)_i = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i &\approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \left(\frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \phi''(x)_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \phi'''(x)_i \dots\right. \\ \phi'(x)_i = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_i &\approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \varepsilon\end{aligned}\tag{A.6}$$

Onde ε é o erro de truncamento correspondente aos termos negligenciados.

Generalizando, o erro cometido pela k-ésima derivada da aproximação de diferenças finitas é:

$$\varepsilon_k = \sum_k \frac{\Delta x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \phi^{(k)}(x)\tag{A.7}$$

Da equação A.7 acima, é possível concluir que quanto maior o passo da malha (Δx), maior será o erro associado a aproximação da derivada por sua forma discreta.

No entanto, o tempo computacional aumenta significativamente com o adensamento do número de nós, e o ganho com precisão matemática é contrabalanceado com o erro de máquina, agravado pelo maior número de cálculos. Uma boa prática em métodos numéricos é fazer testes de convergência para otimizar o passo da malha de forma que seja minimizado o erro matemático, erro de máquina e tempo computacional.

APÊNDICE B - DINÂMICA DE VIGAS

Este capítulo tem por objetivo, apresentar as equações de movimento do problema de vibrações livres em vigas. São obtidas as equações a partir de três teorias distintas: vigas esbeltas (flexão) e vigas de cisalhamento (“shear beam”).

A técnica de separação de variáveis é aplicada nas equações de movimento para a obtenção de duas outras equações, uma no domínio da frequência (no espaço) e uma no domínio do tempo. Esta última nada mais é do que a equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade (SSUGL).

Ao final do capítulo (item B.3 e B.4) é feita uma discussão sobre a faixa de aplicabilidade da teoria de flexão, ressaltando o limite em que essa teoria deve ser substituída pela teoria de vigas profundas para representar melhor o fenômeno.

B.1. TEORIA DE VIGAS DE FLEXÃO

B.1.1. Equação de Movimento

A teoria de flexão de vigas supõe que as seções transversais da viga permanecem planas após a flexão. Portanto as deformações cisalhantes são desprezíveis.

Para a obtenção da equação diferencial de movimento transversal considere um elemento infinitesimal de comprimento “ dx ” na viga. Sobre este elemento atuam forças externas ($p(x)$), esforços cortantes (V) e momentos (M), conforme mostra a figura B.1 abaixo.

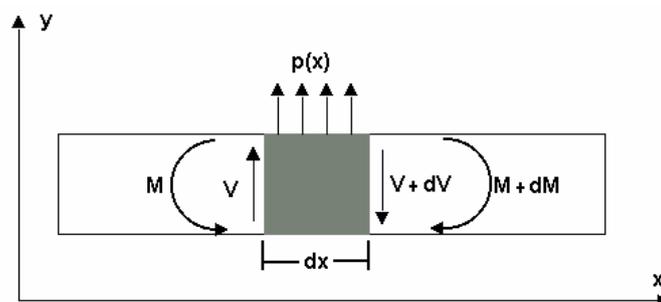


Figura B.1. Forças atuando no elemento infinitesimal da viga.

A demonstração da equação de movimento baseia-se no equilíbrio de forças verticais e de momentos do elemento descrito acima (figura B.1).

| | |
|--|--|
| <p>Equilíbrio de Forças Verticais (y)</p> $\sum \vec{F}_y = m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ $V - (V + dV) + p(x) \cdot dx = \rho \cdot A \cdot dx \cdot \ddot{y}$ $-dV + p(x) \cdot dx = \rho \cdot A \cdot dx \cdot \ddot{y}$ $\therefore \frac{dV}{dx} = p(x) - \rho \cdot A \cdot \ddot{y} \quad (\text{Eq. B.1})$ | <p>Equilíbrio de Momentos (face direita)</p> $\sum M = -M + (M + dM) - V \cdot dx - p(x) \cdot \frac{(dx)^2}{2} = 0$ $dM - V \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot p(x) \cdot (dx)^2 = 0$ <p>Na equação acima é desprezível o produto de diferenciais $(dx)^2$</p> $dM - V \cdot dx = 0$ $\therefore \frac{dM}{dx} = V \quad (\text{Eq. B.2})$ |
|--|--|

Onde m: massa do elemento; ρ : massa específica do material (Kg/m^3); A: área da seção transversal da viga; y: deformada da viga.

A equação B.2 pode ser derivada em relação a “x” e substituída na equação B.1.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} \quad \text{Eq. B.3}$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p(x) - \rho \cdot A \cdot \ddot{y}$$

Na equação B.3 acima pode ser introduzido o conceito de momento-curvatura da Resistência dos Materiais, representado pela equação B.4 abaixo.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot EI = M \quad \text{Eq. B.4}$$

Onde E: módulo de elasticidade; I: momento de inércia da seção transversal; EI: rigidez a flexão da viga.

Substituindo a equação B.4 no lugar do momento na equação B.3, chega-se a seguinte equação.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - p(x) + \rho \cdot A \cdot \ddot{y} = 0 \quad \text{Eq. B.5}$$

Considerando a viga com rigidez a flexão (EI) constante, fazendo $p(x)=0$ para o caso de vibrações livres e substituindo “ $\rho \cdot A$ ” por \bar{m} que é a massa por unidade de comprimento da viga (Kg/m), então a equação de movimento transversal de flexão da viga fica:

$$EI \cdot y^{iv} + \bar{m} \cdot \ddot{y} = 0 \quad \text{Eq. B.6}$$

B.1.2. Equação no Domínio da Freqüência

Para encontrar uma função para “y” que atenda a equação diferencial B.6 e as condições de contorno, separa-se “y” em duas funções, uma dependente do tempo e outra da abscissa (x) do eixo da viga.

$$y(x, t) = \phi(x) \cdot Y(t) \quad \text{Eq. B.7}$$

Sendo que $\phi(x)$ é a função de forma que depende apenas da abscissa da viga; enquanto $Y(t)$ é uma função dependente do tempo.

Aplicando a função de $y(x)$ (eq. B.7) na equação de movimento (eq. B.6) obtém-se:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \bar{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} (\phi(x) \cdot Y(t)) + \bar{m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\phi(x) \cdot Y(t)) &= 0 \\ Y(t) \cdot \phi^{iv}(x) + \frac{\bar{m}}{EI} \cdot \phi(x) \cdot \ddot{Y}(t) &= 0 \\ \frac{\phi^{iv}(x)}{\phi(x)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \cdot \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} &= a^4 \end{aligned} \quad \text{Eq. B.8}$$

A constante “ a^4 ” foi assim definida apenas por conveniência matemática, que será justificada posteriormente (Clough 1960). A equação B.8 produz duas outras equações.

$$\phi^{iv}(x) - a^4 \cdot \phi(x) = 0 \quad \text{Eq. B.9}$$

$$\ddot{Y}(t) + a^4 \cdot \frac{EI}{m} \cdot Y(t) = 0 \quad \text{Eq. B.10}$$

Além da forma da solução é possível extrair da equação B.10, através da transformada de Fourier, a relação entre o parâmetro “a⁴” e a frequência circular “ω”.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{EI}{m} \cdot a^4 \quad \text{Eq. B.11}$$

A solução da equação B.9 fornece as frequências e as formas dos modos naturais de vibração. Essa é a chamada equação no domínio da frequência. A sua solução geral possui a seguinte forma (Clough 1960):

$$\phi(x) = G \cdot e^{st} \quad \text{Eq. B.12}$$

Introduzindo a equação B.12 em B.9, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4} (G \cdot e^{st}) - a^4 \cdot (G \cdot e^{st}) &= 0 \\ G \cdot s^4 \cdot (G \cdot e^{st}) - a^4 \cdot (G \cdot e^{st}) &= 0 \\ (s^4 - a^4) \cdot (G \cdot e^{st}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. B.13}$$

Como na equação acima (eq. B.13) a constante G não pode ser igual a zero, é imposto que (s⁴ - a⁴) seja zero.

$$\begin{aligned} s^4 - a^4 &= 0 \\ s^4 &= a^4 \\ \therefore \begin{cases} s = \pm i \cdot a \\ s = \pm a \end{cases} \end{aligned} \quad \text{Eq. B.14}$$

Por fim, substituindo as soluções de “s” (eq.B.14) na solução geral (eq. B.12) e fazendo as respectivas transformações trigonométricas, obtém-se a solução da função de forma.

$$\phi(x) = A \cdot \cos(ax) + B \cdot \sin(ax) + C \cdot \cosh(ax) + D \cdot \sinh(ax) \quad \text{Eq. B.15}$$

As constantes A, B, C e D são obtidas das condições de contorno da viga (deslocamento, inclinação, momento e esforço cortante), que as reduzem a apenas uma delas. Então a

equação da frequência pode ser obtida, determinado-se o parâmetro da frequência “a” (Clough 1960).

B.1.3. Solução para a Viga de Flexão

Esta equação B.15 possui 4 constantes reais que devem ser obtidas em função das condições de contorno. Dessa forma obtém-se a forma dos modos de vibração da viga e a frequência circular de vibração “ ω ”, que depende do parâmetro de frequência “a”.

No entanto, de forma geral a equação para as frequências de uma viga vibrando por flexão e com seções transversais permanecendo retas possui a seguinte forma:

$$\omega = \left(\frac{\lambda_i}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad \text{B.16}$$

Onde L: comprimento da viga; EI: rigidez a flexão da seção transversal; \bar{m} : massa por unidade de comprimento; λ_i : parâmetro que depende do número do modo e das condições de contorno.

Observa-se que a frequência circular é inversamente proporcional ao quadrado do comprimento da viga e diretamente proporcional a raiz da relação rigidez a flexão e massa distribuída. Esta é a expressão geral para as frequências circulares de uma viga pela teoria de flexão clássica.

B.1.4. Solução para uma Viga Esbelta Engastada-Livre

As condições de contorno são deslocamento e tangente à elástica igual a zero em $x=0$, momento e cortante igual a zero na extremidade $x=L$, onde L é o comprimento da viga.



Figura B.2 - Viga engastada-livre.

$$\phi(0) = 0$$

$$M(L) = EI \cdot \phi''(L) = 0 \quad \phi(L) = 0$$

$$\phi'(0) = 0$$

$$V(L) = EI \cdot \phi'''(L) = 0$$

Primeiramente deve-se obter a derivada segunda da função $\phi(x)$.

$$\phi''(x) = -A \cdot a^2 \cdot \cos(ax) - B \cdot a^2 \cdot \sin(ax) + C \cdot a^2 \cdot \cosh(ax) + D \cdot a^2 \cdot \sinh(ax) \quad \text{B.17}$$

$$\phi'''(x) = A \cdot a^3 \cdot \sin(ax) - B \cdot a^3 \cdot \cos(ax) + C \cdot a^3 \cdot \sinh(ax) + D \cdot a^3 \cdot \cosh(ax) \quad \text{B.18}$$

Aplicando as condições de contorno obtém-se.

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\rightarrow B = -D & \phi'(0) = 0 &\rightarrow A = -C \\ \phi''(0) = 0 & & & \\ \phi(0) = 0 & \rightarrow C = -\frac{\sin(aL) + \sinh(aL)}{\cos(aL) + \cosh(aL)} A & & \end{aligned} \quad \text{B.19}$$

$$\phi(x) = A \cdot \left(\sin(ax) - \sinh(ax) + \frac{\sin(aL) + \sinh(aL)}{\cos(aL) + \cosh(aL)} (\cosh(ax) - \cos(ax)) \right) \quad \text{B.20}$$

B.2. TEORIA DE VIGAS DE CISALHAMENTO

B.2.1. Equação de Movimento

As vigas podem vibrar transversalmente por flexão ou cisalhamento, como mostrado na figura abaixo. Na deformação por flexão as seções transversais giram e permanecem planas. A vibração de cisalhamento é semelhante a uma gelatina retangular, por isso essa viga também é conhecida como viga “gelatina”.

A figura abaixo mostra os dois tipos de vibração livre de uma viga – flexão e cisalhamento.

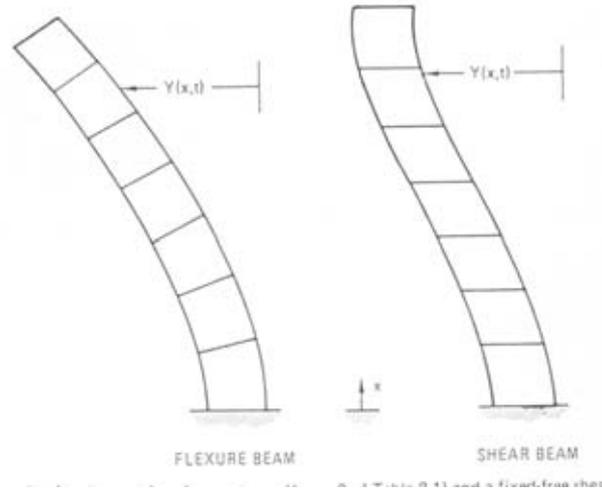
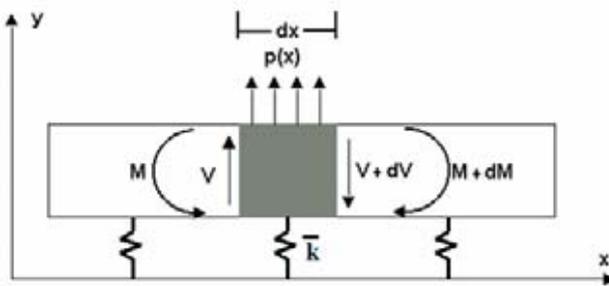


Figura B.3 - Primeiro modo de vibração de uma viga engastada-livre de uma viga de flexão (esquerda) e uma de cisalhamento (Blenvis 1979, pp171).

As deformações cisalhantes ganham importância nas vigas mais altas, ou seja, de altura da seção transversal alta em relação ao comprimento da viga. As vigas consideradas nessa seção (B.2) não consideram as deformações de flexão.

Para a obtenção da equação de movimento retoma-se o equilíbrio de forças do elemento diferencial da figura B.4. Aplicando a 2ª Lei de Newton para as forças verticais que atuam no elemento diferencial obtém-se a seguinte expressão:



$$\sum Fy = m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$V - (V + dV) - \bar{k} \cdot dx \cdot y + p(x) \cdot dx = m \cdot \ddot{y}$$

$$-dV - \bar{k} \cdot dx \cdot y + p(x) \cdot dx = \rho \cdot A \cdot dx \cdot \ddot{y}$$

$$-\frac{dV}{dx} - \bar{k} \cdot y + p(x) = \bar{m} \cdot \ddot{y}$$

Figura B.4 – Elemento infinitesimal da viga de cisalhamento sobre base elástica.

Rearranjando equação acima obtém-se:

$$\frac{dV}{dx} + \bar{k} \cdot y + \bar{m} \cdot \ddot{y} = p(x) \tag{B.21}$$

Introduzindo a relação entre esforço cisalhante e deformação cisalhante.

$$V = KAG \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{B.22}$$

Onde K: constante de cisalhamento da seção transversal da viga; A: área da seção transversal; G: módulo de elasticidade transversal.

Substituindo a equação B.3 em B.2 obtém-se:

$$\begin{aligned} KAG \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \bar{k} \cdot y + \bar{m} \cdot \ddot{y} &= p(x) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}}{KAG} \cdot y + \frac{\bar{m}}{KAG} \cdot \ddot{y} &= p(x) \end{aligned} \quad \text{B.23}$$

B.2.2. Equação no Domínio da Freqüência

De maneira análoga ao que foi feito no item B.2.4, a função $y(x,t)$ pode ser separada em duas outras funções, equação B.7. Substituindo-a na equação de movimento (eq. B.23) obtém-se as expressões:

$$\begin{aligned} Y(t) \cdot \phi''(x) + \frac{\bar{k}}{KAG} \cdot Y(t) \cdot \phi(x) + \frac{\bar{m}}{KAG} \cdot \phi(x) \cdot \ddot{Y}(t) &= 0 \\ \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} + \alpha &= -\beta \cdot \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = a^2 \end{aligned} \quad \text{B.24}$$

Onde: $\alpha = \bar{k}/KAG$ e $\beta = \bar{m}/KAG$.

A equação B.24 é a composição de duas equações. Uma delas é a equação de um SSUGL (Sistema Simples de um grau de liberdade - eq. B.26 - abaixo) e a outra é a equação no domínio da freqüência para os modos de vibração (equação B.25 - abaixo).

$$\phi''(x) - a^2 \cdot \phi(x) + \alpha = 0 \quad \text{B.25}$$

$$-\beta \cdot \ddot{Y}(t) + a^2 \cdot Y(t) = 0 \quad \text{B.26}$$

A equação B.26 fornece a relação entre “a²” e a frequência circular “ω”.

$$a^2 = \beta \cdot \omega^2 \quad \text{B.27}$$

A solução da equação B.25 fica:

$$\phi(x) = A \cdot \cos(\sqrt{a^2 - \alpha} \cdot x) + B \cdot \sin(\sqrt{a^2 - \alpha} \cdot x) \quad \text{B.28}$$

As constantes reais A e B são determinadas segundo as condições de contorno da viga.

B.2.3. Solução para a Viga de Cisalhamento

Da mesma forma que no caso da vibração por flexão, a frequência circular de vibração possui uma forma geral, que é descrita abaixo.

$$\omega = \lambda_i \cdot \sqrt{\frac{KAG}{\bar{m}L^2}} \quad \text{B.29}$$

Onde L: comprimento da viga; KAG: rigidez ao cisalhamento da seção transversal; \bar{m} : massa por unidade de comprimento; λ_i : parâmetro que depende do número do modo e das condições de contorno.

A diferença para o caso anterior é que agora a frequência circular depende do inverso do comprimento da viga, e não do quadrado do inverso do comprimento como no caso da flexão.

Outra diferença é a rigidez ao cisalhamento (KAG) no lugar da rigidez a flexão (EI).

B.2.4. Solução para uma Viga de Cisalhamento sobre Base Elástica

Considerando uma viga de cisalhamento apoiada sobre base elástica, as condições de contorno do problema é que o cortante é nulo nas extremidades ($x=0$ e $x=L$). O cortante é proporcional a derivada da elástica (ϕ), logo tem-se que:

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= 0 \rightarrow B = 0 \\ \phi'(L) &= 0 \rightarrow -A \cdot \sqrt{a^2 - \alpha} \cdot \text{sen}(\sqrt{a^2 - \alpha} \cdot L) = 0\end{aligned}\tag{B.30}$$

Para que $\phi'(L)$ seja zero, $\sqrt{a^2 - \alpha}$ e/ou $\text{sen}(\sqrt{a^2 - \alpha} \cdot L)$ deve ser nulo, sendo que a primeira solução está incorporada a segunda. Observando os valores para o qual a função seno é nula, chega-se a:

$$a^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \alpha \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{KAG}{\bar{m}} \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \alpha \right]}, \text{ para } n=0, 1, 2, B\dots\tag{B.31}$$

Substituindo a equação acima na deformada é obtida as deformadas dos modos de vibração.

B.3. APLICABILIDADE DA TEORIA DE FLEXÃO

A teoria de flexão simples, mostrada no item B.1, considera as seções como retas, ou seja, que não há distorções das mesmas. Para vigas esbeltas em que a altura da seção é pequena em relação ao comprimento (aproximadamente <20%) e o erro cometido a se desprezar a deformação cisalhante é relativamente pequeno. Porém quando essa relação não é tão pequena as deformações cisalhantes devem ser consideradas e a teoria clássica não se aplica mais.

A figura B.5, abaixo, ilustra o efeito de empenamento da seção devido o esforço cortante. Observa-se que as seções não permanecem mais planas e o modelo clássico de vigas em flexão não se aplica mais.

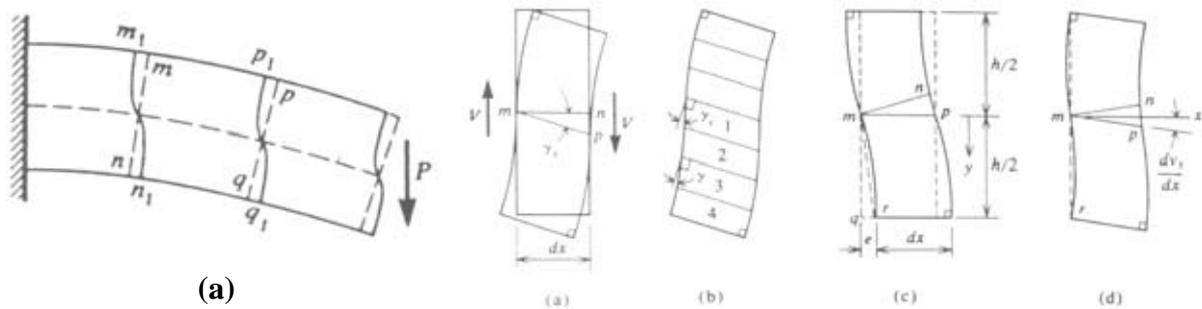


Figura B.5 - (a) Empenamento da seção devido o esforço V ; (b) Mudança no ângulo devido á deformação cisalhante (Timoshenko e Gere 1994).

Em termos de freqüências naturais de vibração ocorre uma redução destas quando se considera o efeito das deformações cisalhantes. Para incluir o efeito dessa deformação deve-se corrigir a inclinação da seção com o ângulo de cisalhamento.

Nas vigas de grande relação altura da seção/ comprimento deve-se utilizar a teoria de vigas profundas, descritas nos trabalhos de Shames 1964, Clough 1960, Sousa Jr & Pedroso 2003, Pedroso 2003.

B.4. RELAÇÃO ENTRE A FREQUÊNCIA DE FLEXÃO E CISALHAMENTO

A discussão sobre deformação de cisalhante também envolve o efeito da inércia de rotação. Esta última também é associada com a rotação local da seção transversal durante a flexão. Porém as teorias de cisalhamento e flexão de vigas não consideram esse efeito inercial (Blevins 1979).

Aqui serão produzidas algumas comparações entre as freqüências vibração livre segundo as teorias de flexão e cisalhamento, já apresentadas nas seções anteriores.

Para estudar analiticamente a relação entre a freqüência circular de cisalhamento e a de flexão basta dividir a equação B.29 pela equação B.16.

$$\frac{\omega_C}{\omega_F} = \frac{L}{n \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{KAG}{EI}} \quad \text{B.32}$$

Para uma viga de seção constante e retangular, pode-se fazer as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{bh^3}{12} \\
 A &= bh \\
 K &= \frac{10 \cdot (1+\nu)}{12+11 \cdot \nu} \\
 G &= \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}
 \end{aligned}
 \tag{B.33}$$

Substituindo B.33 em B.32 obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_C}{\omega_F} &= \frac{L}{n \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot (1+\nu)}{12+11 \cdot \nu} \cdot bh \cdot \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{\frac{bh^3}{12}}} \\
 \frac{\omega_C}{\omega_F} &= \frac{L}{n \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10}{12+11 \cdot \nu} \cdot \frac{6}{h^2}} \\
 \frac{\omega_C}{\omega_F} &= \frac{L}{n \cdot \pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{60}{12+11 \cdot \nu}} \\
 \frac{\omega_C}{\omega_F} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(h/L)} \cdot \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{60}{12+11 \cdot \nu}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{B.34}$$

Para uma viga de material com Poisson 0,2 a equação B.34 fica.

$$\frac{\omega_C}{\omega_F} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{h/L} \cdot 0,654
 \tag{B.35}$$

Para ilustrar a relação obtida em B.35 pode-se plotar a relação “ $\omega_C/(\omega_F)$ ”. O resultado está mostrado no gráfico abaixo.

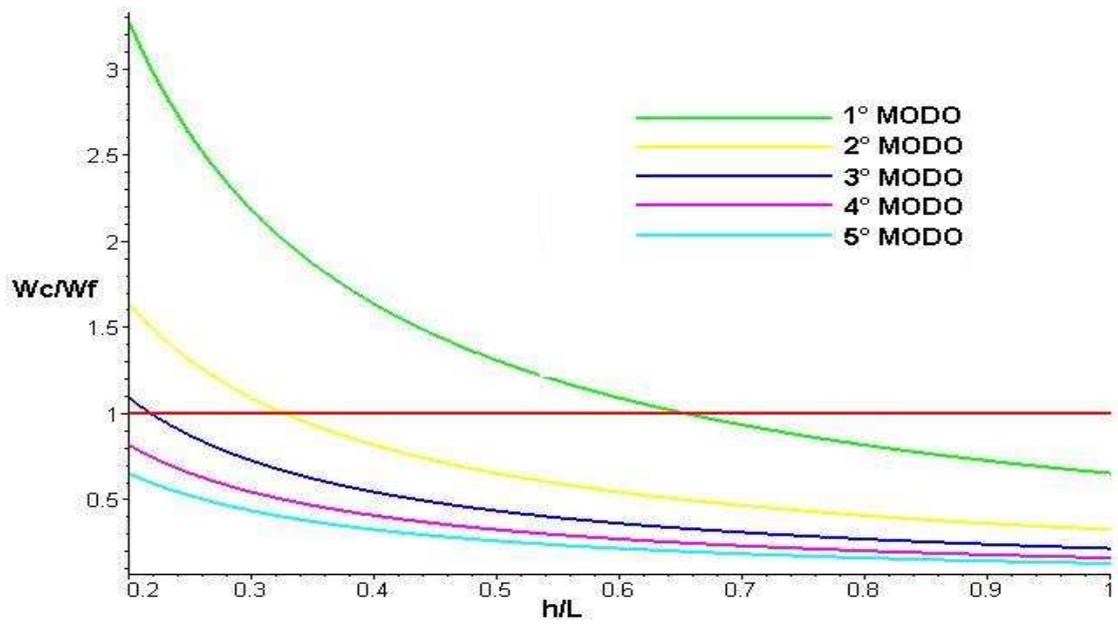


Figura B.6 - Relação entre as frequências de cisalhamento e flexão – bi-engastada.

APÊNDICE C - MODELAGEM ANALÍTICA DA INTERAÇÃO DINÂMICA BARRAGEM-RESERVATÓRIO (IBR) DURANTE UM SISMO

Uma das formas mais tradicionais de estocar água é a construção de barreiras em rios que apresentem potencial hidráulico, ou seja, vazão adequada que permita a acumulação de água. Essas barreiras são conhecidas como barragens. Segundo *Canadain Dam Association* “barragens são barreiras construídas para o propósito de armazenar ou verter água”.

As barragens são estruturas de grande porte, pois quanto maior a elevação do nível da água, maiores serão as potencialidades de utilização do reservatório. Por esse motivo essas robustas e elevadas estruturas exigem grande rigor no projeto e execução.

Desde o surgimento da primeira barragem em 2900 A.C. até os dias de hoje, muitos acidentes ocorreram, desde pequenos incidentes até grandes catástrofes com perdas de vidas. Com a preocupação de evitar essas falhas, totais ou parciais, os métodos de avaliação de segurança dessas estruturas evoluíram de cálculos intuitivos de tensões até sofisticados métodos numéricos popularizados nas últimas décadas.

Uma grande preocupação quanto às barragens é a sua segurança contra abalos sísmicos naturais ou induzidos pelo reservatório. Mesmo em regiões onde a probabilidade de ocorrência desse fenômeno é baixa, é desejável projetar estruturas estáveis dinamicamente. Isso se deve aos altos investimentos dispensados na construção de um barramento, a forte dependência de energia elétrica gerada hidraulicamente (caso brasileiro) e a preocupação com catástrofes ambientais e em cidades a jusante.

Um dos primeiros a propor um modelo para a IBR foi Westergaard (1931). Em seu trabalho original ele resolveu a equação de Laplace com as condições de contorno: fechada no fundo do reservatório, pressão nula na superfície aberta, radiação (reservatório infinito) e fronteira móvel. Esta última condição procurava representar o movimento da barragem devido a aceleração do sismo. O trabalho baseia-se em várias simplificações (como será notado nesse anexo), mas foi muito bem aceito por engenheiros projetistas dessas

estruturas. Pedroso (2000) faz uma revisão das metodologias de modelagem da IBR, inclusive do referido trabalho.

C.1. ESTRATÉGIAS PARA A SOLUÇÃO

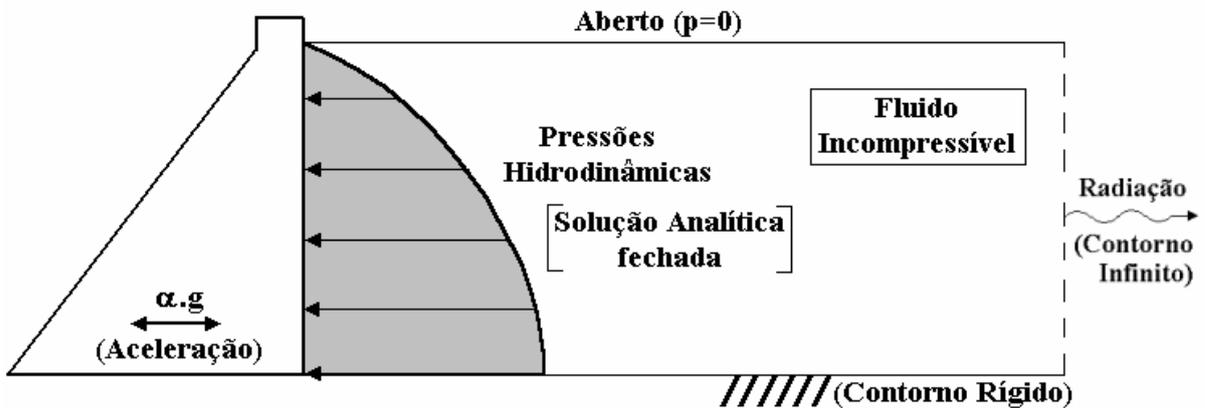
Duas estratégias são utilizadas no estudo da IBR:

- Solução analítica: O fluido é incompressível e o efeito do reservatório sobre a barragem durante um movimento da base (sismo) resume-se a um diagrama de pressões hidrodinâmicas, que é contabilizado como uma força estática para a análise de tensões e estabilidade da barragem. Uma análise dinâmica simplificada do problema pode ser feita colocando-se massas concentradas nos nós da interface da estrutura com o reservatório (massa adicional), daí calcula-se a resposta dinâmica da estrutura com os métodos tradicionais. Essa massa adicional é calculada integrando as pressões hidrodinâmicas na barragem e dividindo pela aceleração do movimento da base (rocha da fundação).
- Solução numérica (MEF): A estrutura é malhada com elementos finitos sólidos e o fluido com elementos de fluido acústico. São também implementados elementos de interface fluido-estrutura que acoplam o movimento da barragem com as pressões no reservatório, e também elementos para os contornos com radiação para o infinito (Sammerfeld) e ondas de gravidade (teoria linearizada). Em geral a estrutura é descrita por variáveis de deslocamento e o fluido por variáveis escalares (pressão, potencial de velocidades etc) – Formulação Euleriana para o fluido.

Existem outras possibilidades de abordagem numérica do problema IBR, com a inserção de elementos de contorno ou aplicação da técnica de diferenças finitas. Também é possível utilizar diferentes processos de discretização para o fluido e estrutura.

A figura C1 ilustra as duas formas de estudo do problema.

Solução analítica de massa adicional – Westergaard.



Solução numérica – Elementos Finitos e/ou Diferenças Finitas.

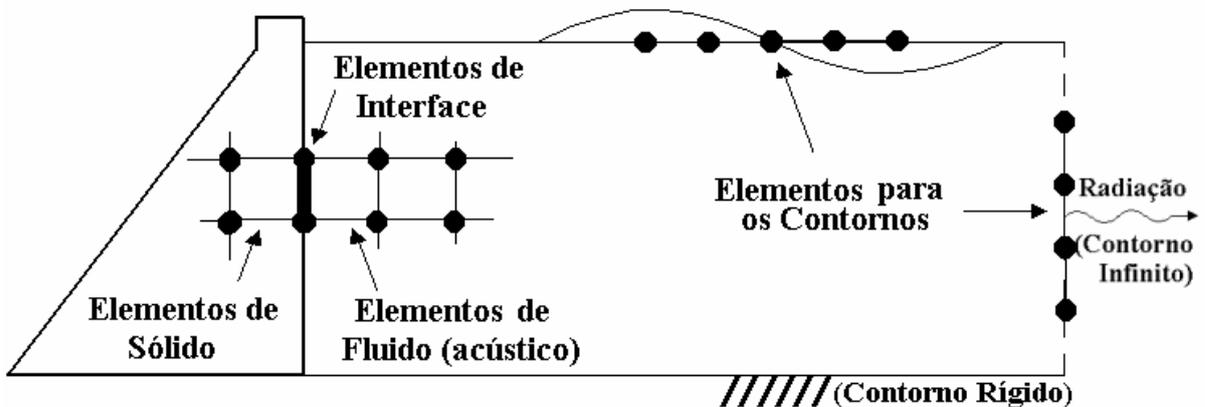


Figura C.1 – Estratégias para a solução do problema de interação barragem-reservatório.

C.2. SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O PROBLEMA IBR – MASSA ADICIONAL

Para esta solução são adotadas as seguintes hipóteses:

- Fluido não viscoso, irrotacional e incompressível;
- Problema adiabático;
- Pressão nula ao longo da superfície livre;
- Reservatório infinito;
- Fundação rígida.

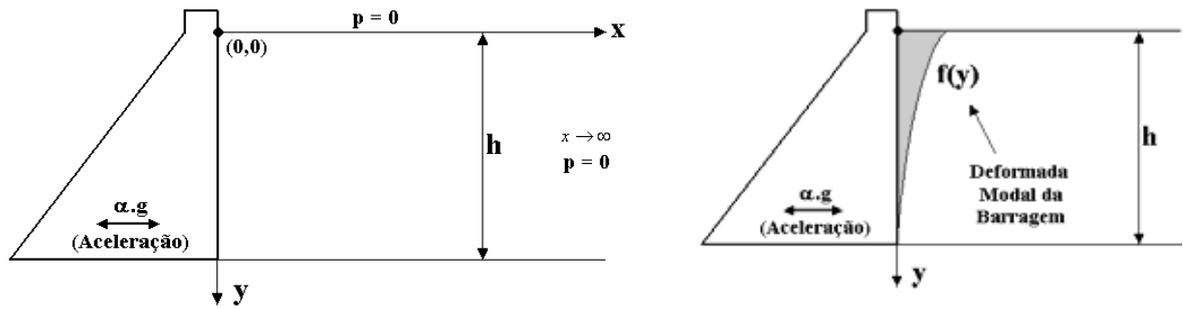


Figura C.2 – Problema analítico de Interação Barragem-Reservatório.

Equação para o campo de pressões no fluido (incompressível):

$$\nabla^2 p(x, y, t) = 0 \quad (C1)$$

Condições de contorno:

- | | |
|---|--|
| A. Reservatório infinito ($x \rightarrow \infty$) | $p=0$ (simplificado) |
| B. Superfície livre ($y=0$) | $p=0$ (simplificado) |
| C. Contorno rígido ($y=h$) | $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ |
| D. Interação fluido-estrutura ($x=0$) | $\frac{\partial p}{\partial n} = -\ddot{u} \cdot \rho_f$ |

Movimento do paramento de montante da barragem:

$$u(y, t) = f(y) \cdot T(t) \quad (C2)$$

Onde $f(y)$ é a deformada modal da barragem e $\ddot{T}(t) = \alpha \cdot g$
(C3)

Solução por separação de variáveis: $p(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot G(t)$. Substituindo esta expressão na equação de Laplace:

$$\nabla^2 p = \Delta p = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \cdot p = 0$$

$$X''(x) \cdot Y(y) \cdot G(t) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot G(t) = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

Da equação acima, são montadas as seguintes Equações Diferenciais Ordinárias (EDO):

$$\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \quad (\text{C4})$$

$$\frac{X''}{X} = +\lambda^2 \quad (\text{C5})$$

A equação em “y” (C4) é do tipo EDO com coeficientes constantes, e sua solução é:

$$Y(y) = A_1 \cdot \cos(\lambda \cdot y) + A_2 \cdot \text{sen}(\lambda \cdot y)$$

$$Y'(y) = -A_1 \cdot \lambda \cdot \text{sen}(\lambda \cdot y) + A_2 \cdot \lambda \cdot \cos(\lambda \cdot y)$$

Substituindo a condição de contorno B, temos que:

$$Y(0) = A_1 = 0$$

Substituindo a condição de contorno C, temos que:

$$Y'(h) = A_2 \cdot \lambda \cdot \cos(\lambda \cdot h) = 0$$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{2h}, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\boxed{Y(y) = A_n \cdot \text{sen}\left(\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2h} \cdot y\right)} \quad (\text{C6})$$

A equação em “x” (C5) também é do tipo EDO com coeficientes constantes, e sua solução é:

$$X(x) = B_1 \cdot e^{\lambda_n \cdot x} + B_2 \cdot e^{-\lambda_n \cdot x}$$

Aplicando a condição de contorno A, temos que B_1 deve ser zero para a solução se anular no infinito. Logo a solução em “x” será:

$$X(x) = B_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot x}$$

Agora podemos compor a solução final como sendo: $p(x,y,t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot G(t)$

$$p(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot y\right) \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot x} \cdot G(t) \quad (C7)$$

Aplicando, agora a condição de parede móvel D, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_f \cdot \ddot{u} \Big|_{x=0} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot y\right) \cdot \left(-\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right) \cdot e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot x} \cdot G(t) \Big|_{x=0} &= -\rho_f \cdot \ddot{u} \Big|_{x=0} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot y\right) \cdot \left(-\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right) \cdot G(t) &= -\rho_f \cdot \ddot{u} \end{aligned}$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função seno, podemos multiplicar os dois lados da equação por $\text{sen}((2k+1) \cdot \pi \cdot y / 2h)$ e integrar em y de “0” a “h”, obtendo:

$$\begin{aligned} a_n \cdot \left(\frac{1}{2}h\right) \cdot \left(-\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right) \cdot G(t) &= -\rho_f \cdot \int_0^h \ddot{u} \cdot \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot y\right) \cdot dy \\ a_n \cdot \left(\frac{1}{2}h\right) \cdot \left(-\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right) \cdot G(t) &= -\rho_f \cdot \ddot{T} \cdot \int_0^h f(y) \cdot \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot y\right) \cdot dy \end{aligned}$$

Onde $\ddot{u}(y, t) = f(y) \cdot \ddot{T}(t)$.

Na expressão acima, pode-se definir a integral como “ β_n ”. Assim, isolando “ a_n ” nesta equação obtém-se:

$$a_n = \frac{4 \cdot \rho_f}{(2n+1) \cdot \pi} \cdot \frac{1}{G(t)} \cdot \ddot{T} \cdot \beta_n \quad (C8)$$

Substituindo esta expressão (C8) na série da pressão hidrodinâmica (C7), chega-se a:

$$p(x, y, t) = \frac{4 \cdot \rho_f}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \text{sen} \left(\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2h} \cdot y \right) \cdot e^{\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2h} \cdot x} \cdot \beta_n \cdot \ddot{T} \quad (C9)$$

Podemos considerar que a barragem se movimenta como um corpo rígido com a aceleração do sismo ($\alpha \cdot g \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t)$). Nesse caso o fator “ β_n ” fica:

$$\beta_n = \int_0^h 1 \cdot \text{sen} \left(\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2h} \cdot y \right) \cdot dy$$

$$\beta_n = -\frac{2h}{(2n+1) \cdot \pi}$$

Então a pressão hidrodinâmica fica:

$$p(x, y, t) = -\frac{8 \cdot \alpha \cdot \rho_f \cdot g \cdot h}{\pi^2} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \text{sen} \left(\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2h} \cdot y \right) \cdot e^{\frac{(2n+1) \cdot \pi}{2h} \cdot x} \quad (C10)$$

onde $\bar{\omega}$ é a frequência circular do movimento do solo ($= 2\pi / \bar{T}$).

C.3. FÓRMULAS APROXIMADAS

Westergaard apresenta algumas expressões aproximadas para as pressões sobre o paramento da barragem.

$$p(y, 0) = C \cdot \alpha \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{y} \quad (C11)$$

Onde α é a relação entre o pico de aceleração do solo e a aceleração da gravidade (g), e C é uma constante que não varia muito, dada em função da altura da barragem.

$$C = 0,92 \text{ ton/m}^3$$

Para $h < 95 \text{ m}$

$$C = 0,95 \text{ ton/m}^3$$

Para $95 \text{ m} < h < 165 \text{ m}$

$$C = 0,99 \text{ ton/m}^3$$

Para $165 \text{ m} < h < 208 \text{ m}$

O Gráfico abaixo compara as soluções completas, em série, e aproximada. As equações foram aplicadas a barragem de 87 metros. Ainda foi usado $g=9.81\text{m/s}^2$ e $C=0.92 \text{ ton/m}^3$.

— Sol. Simplificada — serie com 1 termo — serie com 2 termos — serie com 3 termos
— serie com 4 termos — serie com 5 termos — serie com 6 termos

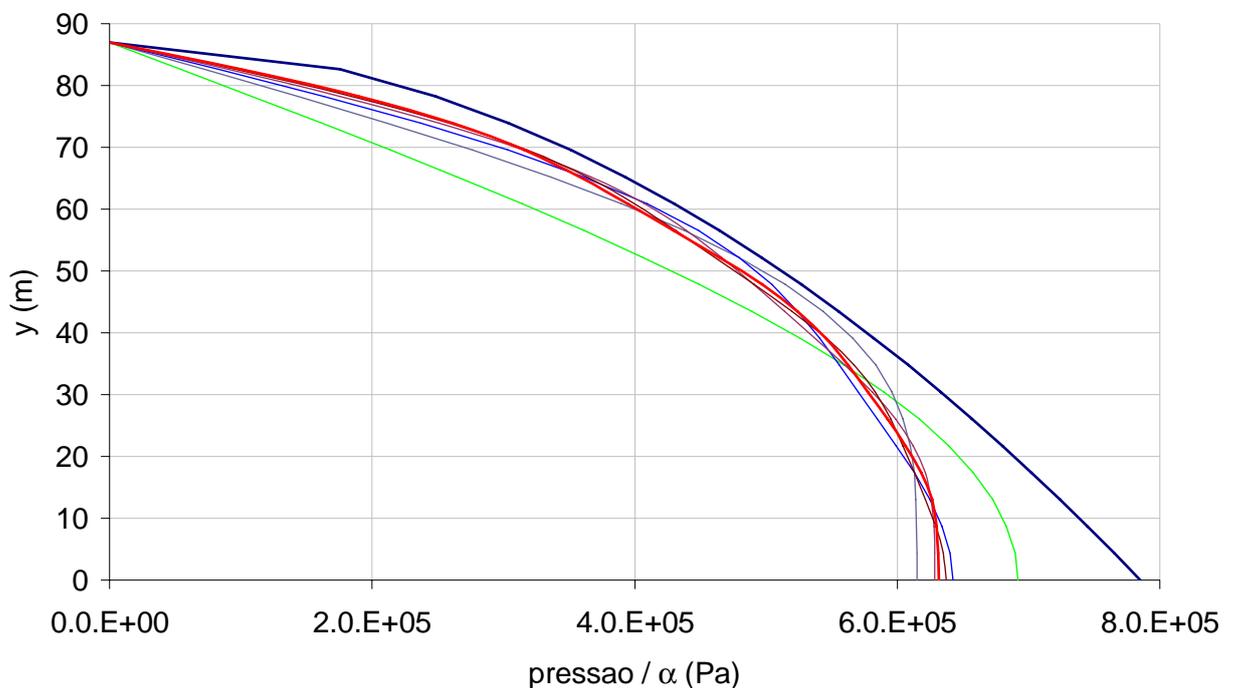


Figura C.3 – Pressão no paramento de montante para as soluções aproximada e séries de 1 a 6 termos.

C.4. MASSA ADICIONAL

Uma das formas de analisar o mecanismo de interação barragem-reservatório é se valer na teoria de massa adicional, no qual o fluido é considerado incompressível.

O efeito de compressibilidade de um fenômeno dinâmico fluido-estrutura é medida por um parâmetro definido como:

$$\frac{\omega \cdot L}{c} = \frac{2\pi f \cdot L}{c} \quad (C12)$$

Onde ω é a frequência circular do fenômeno (rad/s) ou $f(\text{Hz}) \cdot 2\pi$, “L” um comprimento característico da cavidade (nesse caso é a própria altura da barragem) e “c” é a velocidade do som na água (1500 m/s).

Assim, pode-se determinar as relações entre a altura da barragem (h) e a frequência fundamental de vibração (f) para o qual o fluido é incompressível, ou seja, o intervalo onde o conceito de massa adicional é válido. O gráfico da figura C4 abaixo mostra a relação entre altura (h), frequência (f) e o parâmetro de compressibilidade.

Para a utilização simplificada da equação ou gráfico da figura C4, pode ser usado (como uma primeira aproximação) o 1º modo de vibração da barragem “no ar”, ou seja, sem presença do reservatório. No gráfico da figura C4, para valores de fator de compressibilidade menores que 0.4 o fenômeno pode ser considerado incompressível, e a aplicação do conceito da massa adicional é válida. De uma forma mais precisa, Pedroso (2000) afirma que o limite para o parâmetro de compressibilidade é 0.33.

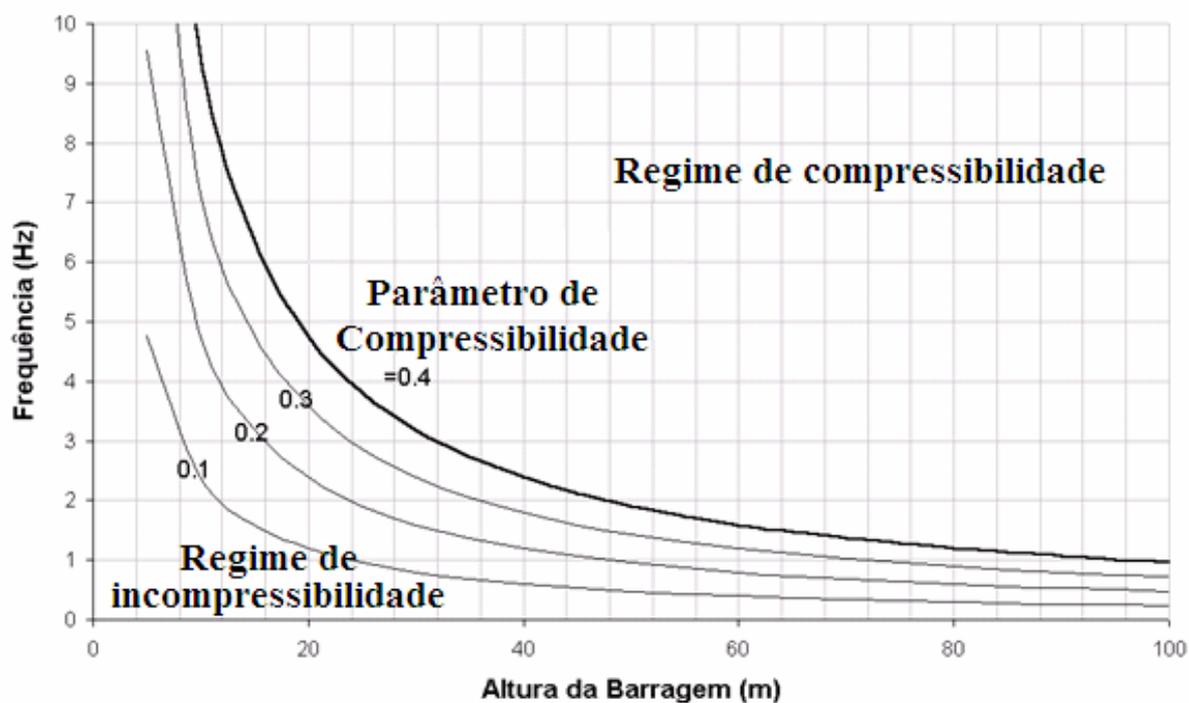


Figura C.4 – Relação altura – frequência natural da barragem e parâmetro de compressibilidade do fluido.

A pressão hidrodinâmica que o reservatório faz sobre a barragem é a mesma que a barragem faz sobre o reservatório, e essa reação faz com que uma certa massa de água se mova juntamente com a barragem durante o sismo.

Pode-se supor que o fluido é constituído de camadas horizontais, e que essas camadas não trocam forças entre si, pois o fluido não é viscoso. A figura abaixo ilustra essa situação.

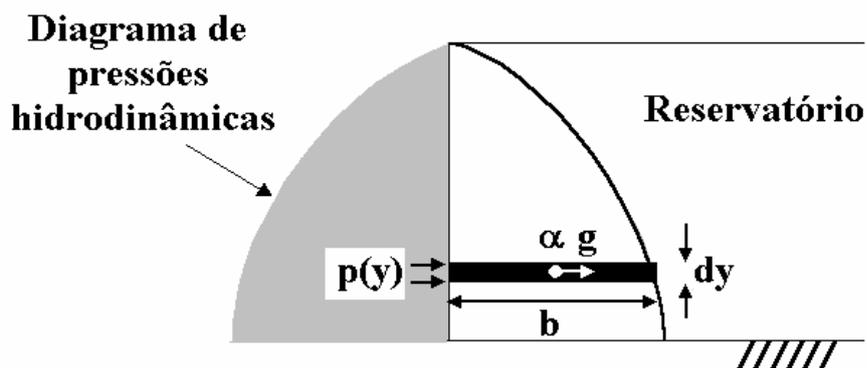


Figura C.5 – Pressões hidrodinâmicas e massa adicional.

O equilíbrio de forças na camada de fluido mostrada na figura acima é dado por:

$$dF = dm \cdot a$$

$$p(x = 0, y, t) \cdot dy = (\rho_f \cdot b \cdot dy) \cdot (\alpha \cdot g \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t))$$

$$b(y) = \frac{p(x = 0, y, t)}{\rho_f \cdot g \cdot \alpha \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t)}$$

Obs: na análise considera-se 1 metro de largura da barragem.

Logo, a massa adicional tem o mesmo formato do diagrama de pressões da água. Pode-se aqui, utilizar a expressão da pressão completa ou aproximada para obter “b(y)”.

$$b(y) = -\frac{8 \cdot h}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2h} \cdot y\right) \quad (C13)$$

$$\text{Ou } b(y) = \frac{C \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{y}}{\rho_f \cdot g} \quad (C14)$$

Utilizando C=0,9655 ton/m³ e $\rho_f \cdot g = 1 \text{ ton/m}^3$, chega-se a seguinte relação prática:

$$b(y) = \frac{7 \cdot \sqrt{h}}{8} \cdot \sqrt{y} \quad (\text{C15})$$

A equação acima pode ser integrada de modo a fornecer a massa adicional total sobre o corpo da barragem:

$$M_{AD} = \int_0^h \rho_f \cdot b(y) dy$$
$$M_{AD} = \frac{14}{24} \cdot \rho_f \cdot h^2 \quad (\text{C16})$$

APÊNDICE D - VIBRAÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE EM TANQUES RETANGULARES

Em muitos casos práticos de Engenharia, o movimento da superfície livre pode introduzir esforços importantes em estruturas que compõem ou sustentam um reservatório. O conhecimento dos modos naturais de vibração da superfície livre é fundamental para os engenheiros que projetam estruturas que estão em contato ou dentro do reservatório líquido.

A seguir será apresentada a dedução das equações de frequências e deformadas modais da superfície livre de um tanque líquido retangular (2D), que também pode ser encontrado em Pedroso 2000 e 2003.

O fluido é incompressível, inviscido e o movimento se dá em regime de pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio, ou seja, não há escoamento médio.

D.1. MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE UM TANQUE RETANGULAR 3D

O primeiro passo no estudo da resposta dinâmica do líquido contido em um reservatório é a obtenção dos modos naturais de vibração (frequências e deformadas modais). Em particular, porque as frequências naturais indicam ressonâncias do movimento do fluido e também porque os períodos naturais são um importante parâmetro para definição de passos de tempo em simuladores do tipo “time-step”.

Para iniciar a discussão, considerar-se-á um reservatório prismático em forma de paralelepípedo, com dimensões “a, b e h” (figura D1). Todas as paredes são rígidas, com exceção da “tampa” superior, que é aberta para a atmosfera onde ondas de gravidade podem se formar.

A obtenção dos modos naturais de vibração se dá com a resolução da equação de Laplace (solução homogênea Φ_H), pelo Método de Separação de Variáveis.

Equação governante do problema:

$$\nabla^2 \Phi_H = 0 \quad (D.1)$$

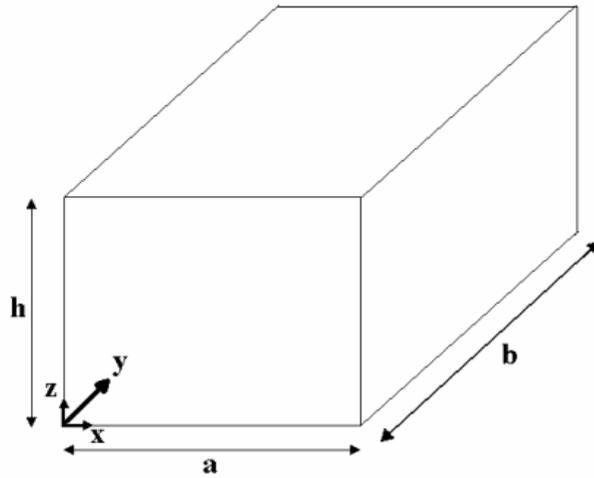


Figura D.1 – Tanque retangular 3D.

Condições de contorno: $\frac{\partial \Phi_H}{\partial n} = 0$, em $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ e $z = 0$

$$\frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial t^2}, \text{ em } z = h \quad (\text{D.2})$$

Onde:

$$\Phi_H(x,y,z,t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (\text{D.3})$$

Aplicando a equação D.3 em D.1:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (\text{D.4})$$

A equação D.4 pode ser resolvida separadamente (nas 3 direções).

Em “x” temos que:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda_1^2 \quad (\text{D.5})$$

A solução de D.5 é dada por:

$$X(x) = A_1 \cdot \cos(\lambda_1 \cdot x) + A_2 \cdot \text{sen}(\lambda_1 \cdot x) \quad (\text{D.6})$$

Aplicando condições de contorno em x, chega-se:

$$\mathbf{X}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_n \cdot \cos(\lambda_n \cdot \mathbf{x}); \lambda_n = n \cdot \pi / a \quad (\text{D.7})$$

Procedendo de maneira semelhante na direção 'y' obtém-se:

$$\mathbf{Y}_m(\mathbf{y}) = \mathbf{B}_m \cdot \cos(\lambda_m \cdot \mathbf{y}) \text{ e } \lambda_m = m \cdot \pi / a \quad (\text{D.8})$$

Da equação D.4 temos a seguinte equação em 'z':

$$\begin{aligned} Z''/Z &= \lambda_m^2 + \lambda_n^2 = \pi^2 [n^2/a^2 + m^2/b^2] = \lambda_{nm}^2 \\ Z(z) &= C_1 \cdot e^{\lambda_{nm} \cdot z} + C_2 \cdot e^{-\lambda_{nm} \cdot z} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Aplicando a condição de contorno em z=0, obtém-se

$$\mathbf{Z}(z) = \mathbf{C}_{mn} \cdot \cosh(\lambda_{nm} \cdot z) \quad (\text{D.10})$$

Onde

$$\lambda_{nm}^2 = \pi^2 \left[\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right] \quad (\text{D.11})$$

Juntando as equações (D.7), (D.8) e (D.10) em (1c) obtém-se:

$$\Phi_H(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \cosh(\lambda_{nm} \cdot z) \cdot T(t) \quad (\text{D.12})$$

A equação acima contém o somatório de todas as soluções que satisfazem a equação de Laplace.

Por último, aplica-se a condição de contorno de superfície livre em z=h.

$$\frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial t^2} \Big|_{z=h} \quad (\text{D.13})$$

Supondo que a função $T(t)$ seja harmônica, ou seja $\ddot{T}(t) = -\omega^2 \cdot T(t)$, e substituindo (D12) em (D13) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \lambda_{nm} \cdot \text{senh}(\lambda_{nm} \cdot h) \cdot T(t) = \\ & = -\frac{1}{g} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cdot \text{cosh}(\lambda_{nm} \cdot h) \cdot (-\omega_{nm} T(t)) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Na equação acima, pode-se eliminar os somatórios fazendo uso da propriedade de ortogonalidade das funções trigonométricas. Multiplica-se os dois lados por “ $\cos(n' \cdot \pi \cdot x/a) \cdot \cos(m' \cdot \pi \cdot y/b)$ ” e integra nos intervalos “ $0 - a$ ” e “ $0 - b$ ”.

Os únicos termos da série que serão diferentes de zero serão os termos em que $n'=n$ e $m'=m$.

$$\int_0^a \cos\left(\frac{n' \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot dx = \begin{cases} = 0, & \text{se } n' \neq n \\ = 0.5 \cdot a, & \text{se } n' = n \end{cases} \quad (\text{o mesmo vale para } y)$$

Utilizando a propriedade acima temos que (D14) fica:

$$\begin{aligned} & A_{nm} \cdot 0.5 \cdot a \cdot 0.5 \cdot b \cdot \lambda_{nm} \cdot \text{senh}(\lambda_{nm} \cdot h) \cdot T(t) = \\ & = \frac{1}{g} \cdot A_{nm} \cdot 0.5 \cdot a \cdot 0.5 \cdot b \cdot \text{cosh}(\lambda_{nm} \cdot h) \cdot \omega_{nm}^2 \cdot T(t) \\ & \omega_{nm}^2 = g \cdot \lambda_{nm} \cdot \text{tanh}(\lambda_{nm} \cdot h) \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

onde λ_{nm} é dado pela equação D11.

Para obter as deformadas modais em termos de pressão, basta usar a equação de Bernoulli.

A pressão hidrodinâmica é:

$$p_{\text{HIDR}} = p - \rho g z = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{D.16})$$

Logo, a distribuição de pressões tem a mesma forma do potencial de velocidades (Φ), com uma diferença apenas na fase (tempo) e amplitude. Então, as deformadas modais são as mesmas para as pressões.

D.2. DISCUSSÃO SOBRE AS DEFORMADAS MODAIS E FREQUÊNCIAS NATURAIS

Por vezes os parâmetros λ_{nm} é chamado de número da onda. No caso de “ $\lambda_{nm} \cdot h$ ” pequeno, pode-se aproximar “ $\tanh(\lambda_{nm} \cdot h)$ ” por “ $\lambda_{nm} \cdot h$ ”. Observando o gráfico da figura D2 nota-se que para “ $\lambda_{nm} \cdot h$ ” menor que 0.5 a precisão na aproximação é muito boa. Nesse caso, a equação (D15) fica:

$$\omega_{nm}^2 = \lambda_{nm}^2 \cdot g \cdot h \quad (\text{D.17})$$

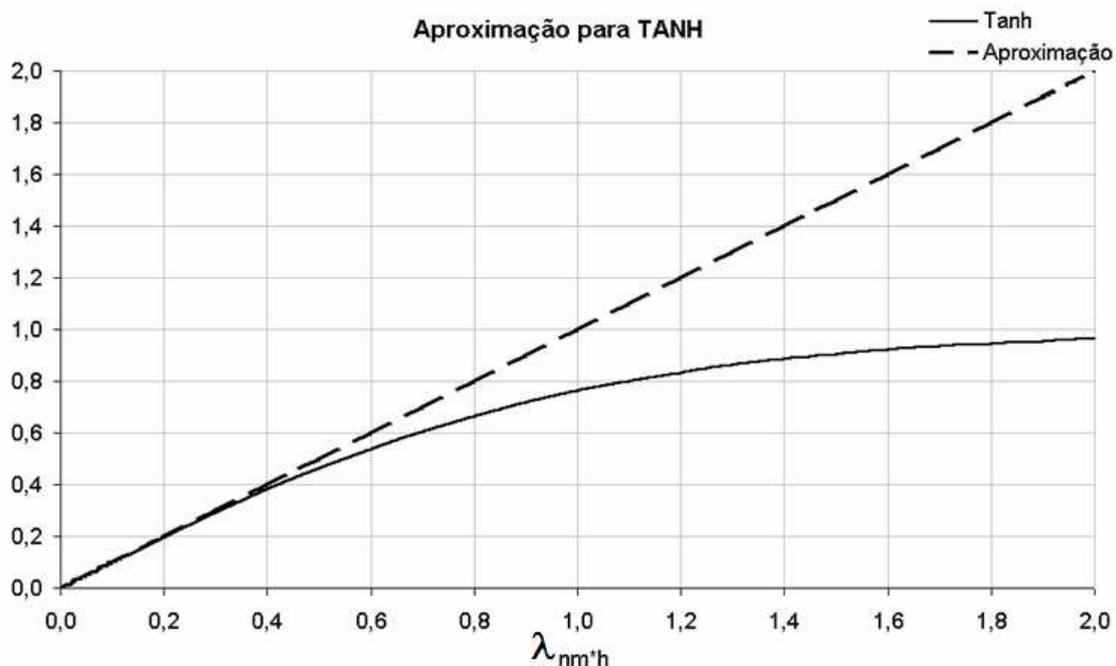


Figura D.2 – Gráfico da tangente hiperbólica e sua aproximação.

Se $a > b$, então o primeiro modo de vibração não nulo (frequência mais baixa) ocorre quando $n=1$ e $m=0$. Então as equações D11 e D15 ficam:

$$\omega_{10}^2 = g \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \tanh\left(\frac{\pi \cdot h}{a}\right) \quad (\text{D.18})$$

Ou para “ $\pi h/a$ ” pequeno ($<0,5$):
$$\omega_{10}^2 = \frac{\pi^2 \cdot g \cdot h}{a^2}$$

Na equação (D12) temos a representação da deformada modal da superfície livre. Essa equação pode ser separada em dois planos: um plano x-y (função f_1) e um plano vertical (função f_2).

$$f_1(x, y) = \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad (\text{D.19})$$

$$f_2(z) = \cosh(\lambda_{nm} \cdot z) \quad (\text{D.20})$$

A equação (4b) representa a elevação da superfície livre do reservatório, e a equação (D.20) representa a variação dessa pressão ao longo da profundidade. Os gráficos das figuras D3 e D4 mostram as formas dessas duas equações.

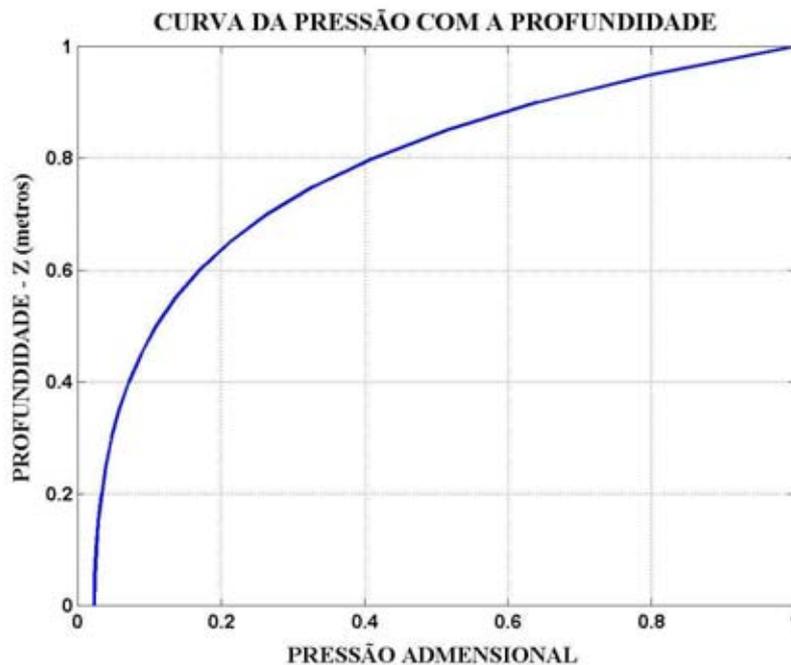
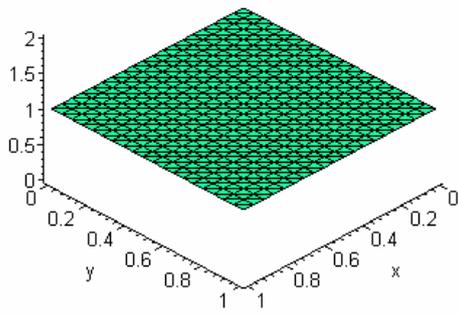
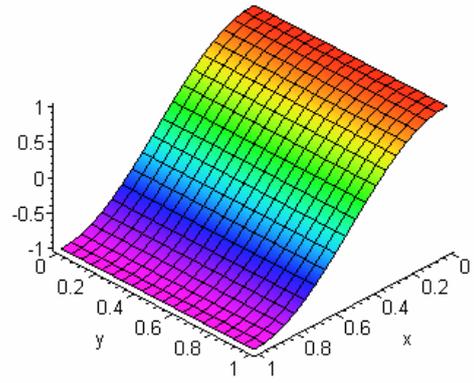


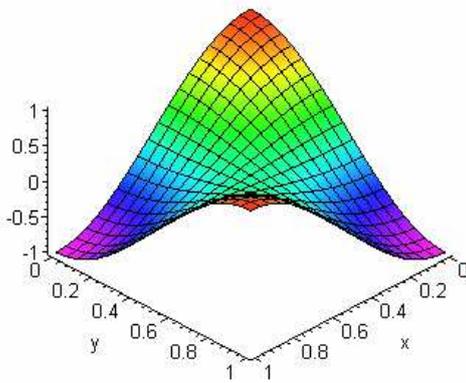
Figura D.3 - Variação da pressão com a profundidade. Evolução da função $f_2(z)$ para $a=b=h=1\text{m}$.



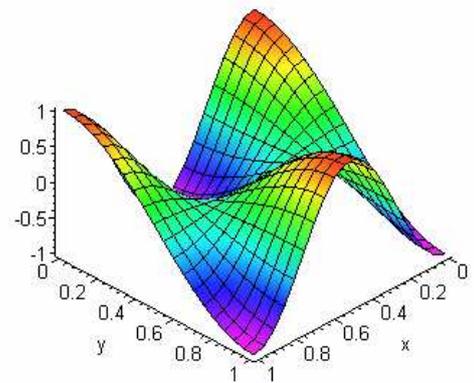
Modo 0-0



Modo 1-0



modo 1-1



Modo 2-1

Figura D.4 – Deformadas modais de superfície livre – evolução da função $f_I(x,y)$.

APÊNDICE E - A SISMICIDADE BRASILEIRA

Uma das excitações mais importantes e de efeitos desconhecidos para uma barragem e suas estruturas auxiliares é o sismo. Um sismo coloca essas estruturas em vibração, que em contato com um fluido, interage suscitando a Interação Fluido-Estrutura (IFE).

Há uma idéia cultuada de que no Brasil não existe atividade sísmica significativa. A principal justificativa é o fato de o Brasil estar situado no centro de uma placa, a placa Sul-Americana, longe dos bordos leste – Cadeia Meso-Atlântica – e oeste – subducção Andina [*site observatório sismológico UnB - Obsis*].

No entanto, com o advento de postos de observação mais bem equipados, como o “Observatório Sismológico da Universidade de Brasília”, foi possível detectar um número maior de sismos no Brasil e principalmente em regiões de segurança, como em reservatórios de barragens.

Dezenas de relatos históricos sobre abalos de terra sentidos em diferentes pontos do país e eventos como o do Ceará (1980/mb=5.2) e João Câmara, RN (1986/mb=5.1) mostram que os sismos podem trazer danos materiais, ocasionar transtornos à população e chegar, em alguns casos, a levar pânico incontrollável às pessoas. Afortunadamente, tremores maiores como o de Mato Grosso (1955/mb=6.6), litoral do Espírito Santo (1955/mb=6.3) e Amazonas (1983/mb=5.5) ocorreram em áreas desabitadas [*Obsis*].

A figura E.1 ilustra os principais tremores de terras detectados no Brasil. O mapa contém os tremores com magnitude superior a 3.0 ocorridos no Brasil até 1996. Os pontos com triângulos correspondem a informações históricas obtidas de relatos da literatura.

No mapa da figura E.1, vale ressaltar a ocorrência de importantes sismos em regiões de grandes barragens. É o caso de Tucuruí – PA, Eduardo Magalhães – TO, barragens existentes na fronteira sudeste de São Paulo com o Mato Grosso do Sul e Paraná, barragens em Minas Gerais como Furnas, dentre outras.

Uma nova modalidade de sismos pesquisada mais recentemente é o *sismo induzido*. Uma forte explosão nuclear ou um lago artificial podem promover pequenos tremores de terra.

No caso de reservatórios de barragens, a fase de enchimento é a mais drástica, pois a acomodação de esforços na rocha da fundação produz deslizamentos relativos que induzem sismos que podem ser de média magnitude.

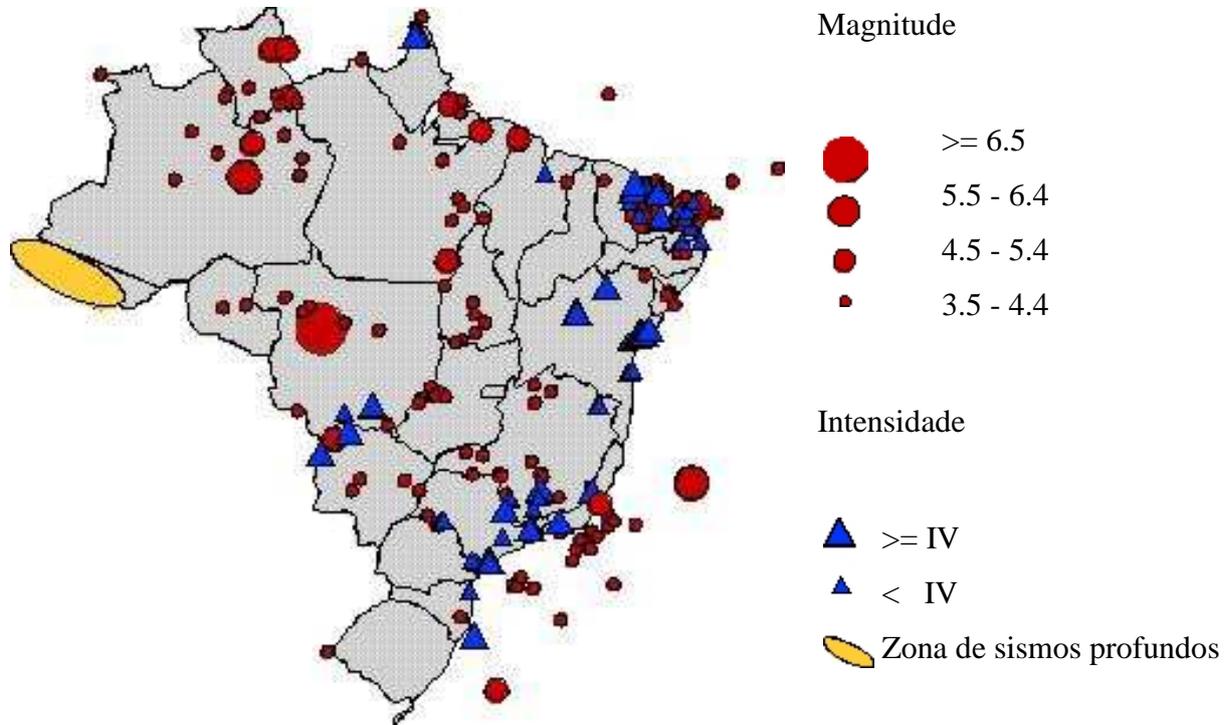


Figura E.1 - Sismicidade no Brasil (*Obsis-UnB*).

A figura E.2 ilustra os esforços acrescentados à rocha devido a carga criada pelo reservatório.

Os sismos têm também uma componente de imprevisibilidade. Em outras regiões do mundo com características semelhantes a brasileira, como por exemplo, a costa leste americana, houve importantes sismos de magnitude 8.0, no século passado.

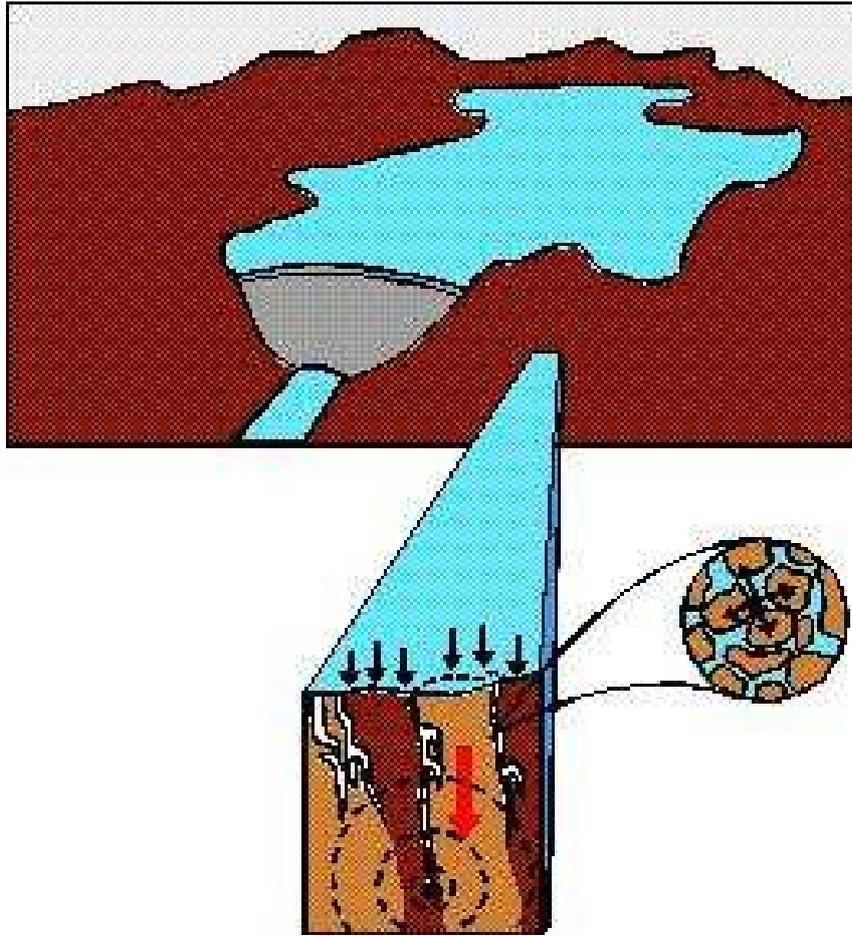


Figura E.2 - Esforços induzidos pelo reservatório (*Obsis UnB*).