

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**INFLUÊNCIA DO ÂNGULO DE ATRITO DA PARTÍCULA
NOS PARÂMETROS MACROSCÓPICOS DE RESISTÊNCIA
DO MEIO NO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES**

BERNARDO CASÇÃO PIRES E ALBUQUERQUE

ORIENTADOR: MÁRCIO MUNIZ DE FARIAS, PhD

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM GEOTECNIA

BRASÍLIA - DF: SETEMBRO/2016

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**INFLUÊNCIA DO ÂNGULO DE ATRITO DA PARTÍCULA
NOS PARÂMETROS MACROSCÓPICOS DE RESISTÊNCIA
DO MEIO NO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES**

BERNARDO CASÇÃO PIRES E ALBUQUERQUE

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE PÓS GRADUAÇÃO EM
GEOTECNIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE**

APROVADA POR:

**MÁRCIO MUNIZ DE FARIAS, PhD (UnB)
(ORIENTADOR)**

**MANOEL PORFÍRIO CORDÃO NETO, DSc. (UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**CARLOS ALEXANDER RE CAREY MORFA, PhD (UCLV)
(EXAMINADOR EXTERNO)**

DATA: BRASÍLIA/DF, 15 de SETEMBRO de 2016.

FICHA CATALOGRÁFICA

ALBUQUERQUE, BERNARDO CASÇÃO PIRES

Influência do ângulo de atrito da partícula nos parâmetros macroscópicos de resistência do meio no estado plano de deformações, Distrito Federal, 2016.

xvi, 87p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Geotecnia, 2016)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Método dos Elementos Discretos

2. Materiais granulares

3. Ângulo de atrito microscópico

4. Estado plano de deformações

I. ENC/FT/UnB

II. Mestre

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALBUQUERQUE, B.C.P. (2016). Influência do ângulo de atrito da partícula nos parâmetros macroscópicos de resistência do meio no estado plano de deformações, Distrito Federal. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM-276/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 87p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Bernardo Cascão Pires e Albuquerque

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Influência do ângulo de atrito da partícula nos parâmetros macroscópicos de resistência do meio no estado plano de deformações

GRAU: Mestre

ANO: 2016

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de Mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Bernardo Cascão Pires e Albuquerque

Brasília/DF - Brasil

bernardo.albuquerque@outlook.com

Aos meus amigos e família, pelo incentivo e bons momentos compartilhados.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Cleber e Mariângela, pelo suporte financeiro, emocional e intelectual ao longo de toda a minha vida. Minha educação somente chegou a esse ponto graças ao esforço e dedicação de vocês.

Ao meu orientador, Márcio Muniz de Farias, pelo incentivo e por toda a ajuda durante esse trabalho. Sua orientação foi extremamente valiosa.

Ao professor Carlos Recarey por compartilhar seu conhecimento e experiências no tema estudado.

Ao doutor Irvin Pérez pelo auxílio com o uso da ferramenta numérica e por toda sua contribuição com o trabalho realizado.

Ao todos os amigos que participaram direta e indiretamente dessa pesquisa. À Bruna Mota, que partilhou dos mesmos sucessos e dificuldades, pelo constante intercâmbio de conhecimento, resultados, *scripts* e por seu companheirismo ao longo dessa jornada. Aos amigos Darym Ferrari, Luan Ozelim e Vinícius Resende e Tiago Pimentel pelas ideias e discussões.

Aos colegas do Infralab, principalmente aos amigos David Chaparro e Liosber Medina

A todos os demais professores do departamento de Pós-Graduação em Geotecnia da Universidade de Brasília pelos ensinamentos transmitidos, em especial ao professor André Brasil por ter me incentivado a iniciar essa caminhada.

Aos técnicos e funcionários do departamento, notadamente à Cida por toda a atenção e zelo nessa etapa final.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante a execução desse trabalho.

RESUMO

O solo é um material granular que tem seu comportamento macroscópico dependente das propriedades dos grãos que o compõem e da forma com que esses grãos interagem com os demais ao seu redor. Portanto pode-se dizer que o solo se comporta de forma discreta. Por esse motivo a abordagem contínua geralmente utilizada não é capaz de prever algumas de suas respostas a determinadas solicitações, principalmente nos casos de carregamentos cíclicos ou quando se sai do regime de pequenas deformações. Além disso, existe uma grande dificuldade de estudar em escala tridimensional, no laboratório, o comportamento de cada um dos grãos que compõem uma dada amostra. Nesse contexto justifica-se a utilização do Método dos Elementos Discretos (DEM) para que se possa realizar simulações numéricas de ensaios convencionais da Geotecnia e entender como as propriedades e comportamento na escala dos grãos influenciam seus correspondentes na escala global.

Como parte do processo de entendimento da influência dos grãos no comportamento macroscópico é necessário, em primeiro lugar, calibrar os parâmetros do modelo numérico para que as simulações reflitam a realidade. Mais do que isso, é necessário saber qual conjunto de parâmetros das partículas irá levar a amostra a um dado comportamento previamente estipulado. Essa pesquisa foi focada na influência do atrito interparticular nas propriedades globais do meio, em especial no atrito macroscópico. Para isso ensaios oedométricos e triaxiais em estado plano de deformações foram simulados numericamente com o software de código aberto Yade. Observou-se que o atrito microscópico influencia o comportamento tensão-deformação do meio, em que um aumento do atrito interparticular leva a um aumento do módulo de Young e do atrito macroscópicos e a uma diminuição do coeficiente de Poisson global da amostra. Curvas e equações que mostram a relação entre esses parâmetros foram determinadas e um modelo do comportamento tensão-deformação foi proposto para solos compactos. O estado plano de deformações foi utilizado com o objetivo de minimizar o custo computacional do DEM, contudo a conjunção desse estado com o DEM apresentou uma desvantagem em termos de liberdade de rearranjo das partículas, que possuem dificuldade bastante maior de movimentação quando comparado a casos triaxiais. Por fim, o Método dos Elementos Discretos mostrou-se capaz de representar materiais granulares de forma realista.

Palavras-chave: Método dos Elementos Discretos, materiais granulares, Ângulo de atrito microscópico, estado plano de deformações.

ABSTRACT

Soil is a granular material which has its macroscopic behavior dependent on the properties of the grains that compose it and on the way that these grains interact with their neighbors. Therefore, it can be said that the soil behaves in a discrete manner. For this reason, the commonly used continuous approach is not able to predict some soil's responses in all the possible events, especially in the presence of cyclic loading or when it leaves the small strain regime. Furthermore, there is great difficulty studying the behavior of each of the grains that compose a given sample in three-dimensional laboratory tests. In this context it is appropriate to use the Discrete Element Method (DEM) in order to perform numerical simulations of conventional geotechnical tests and understand how the properties and behavior at the grain scale influence on the sample's global scale response.

As part of the process of understanding the influence of grains in the macroscopic behavior it first necessary to calibrate the numerical model parameters so that the virtual simulations behave as the laboratory tests. Furthermore, it is necessary to know which set of particle parameters will lead the virtual sample to a given previously stipulated behavior. This research was focused on the influence of interparticle friction in the overall properties of the soil, mainly in its macroscopic friction angle. For this, oedometric and triaxial tests were numerically simulated in plane strain state with the aid of the open source software Yade. It has been observed that that the microscopic friction angle influences soil's stress-strain behavior, in which an increase in interparticle friction leads to an increase of macroscopic Young's modulus and friction angle and to a decrease in the Poisson's ratio of the sample. Curves and equations that show the relationship between these parameters were determined and a model for the stress-strain behavior of compact soils was proposed. The plane strain state was used to minimize the computational cost of the DEM, but the conjunction of this state with the DEM presented a disadvantage in terms particles rearrangement freedom, which have greater difficulty in moving inside the packing when compared to triaxial simulations. Finally, the Discrete Element Method proved to be able to realistically represent granular material behavior.

Key-words: Discrete Element Method, granular materials, microscopic friction angle, plane strain state.

ÍNDICE

1.	Introdução.....	1
1.1	Identificação do problema	2
1.2	Justificativa	2
1.3	Hipótese	2
1.4	Objetivos.....	3
1.5	Metodologia de Pesquisa	3
1.6	Estrutura da Dissertação	4
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Método dos Elementos Discretos (DEM).....	5
2.1.1	Visão Geral do Método	8
2.1.2	Condições de Contorno	10
2.1.3	Condições Iniciais e Empacotamento.....	12
2.1.4	Contatos Entre Partículas	17
2.1.5	Cálculo das Forças.....	23
2.1.6	Integração Numérica	28
2.2	Estado Plano de Deformações	32
2.2.1	Lei de Hooke para o Estado Plano de Deformações	35
2.3	Deformações Localizadas em Materiais Granulares.....	35
3	Metodologia.....	36
3.1	Material Estudado	36
3.2	Simulações Numéricas.....	38
3.2.1	Software Utilizado.....	39
3.2.2	Modelo de Contato e Parâmetros da Partícula	40
3.2.3	Geração da Amostra	41
3.2.4	Ensaio Oedométrico	42
3.2.5	Ensaio Biaxial	43

4	Resultados e Análises	44
4.1	Ensaio Oedométrico	44
4.2	Ensaio Biaxiais.....	53
4.3	Comparativo Entre os Ensaio Numéricos e Valores Reais	64
5	Conclusões.....	68
5.1	Sugestões para Pesquisas Futuras.....	70
	Referências bibliográficas.....	71
	Anexos.....	75
	A – Script de Geração da Amostra.....	75
	B – Script do Ensaio Oedométrico	79
	C – Script do Ensaio Biaxial	83

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ciclo básico de cálculo do DEM (O' SULLIVAN, 2011 - modificado)....	6
Figura 2.2 – Número de partículas utilizadas em trabalhos publicados feitos com DEM (O'SULLIVAN, 2014).....	7
Figura 2.3 – Analogia entre sistema granular e malha de elementos finitos.....	8
Figura 2.4 - Célula Periódica (O' SULLIVAN, 2011 - modificado).....	11
Figura 2.5 – Interação das partículas próximas às fronteiras em células periódicas (O' SULLIVAN, 2011 - modificado).....	11
Figura 2.6 - Método da subcompactação de Jiang periódicas (O' SULLIVAN, 2011 - modificado)	15
Figura 2.7- Método da triangulação proposto por Cui & O'Sullivan (2003) - modificado	16
Figura 2.8 – Tipos de contatos (a) Contato não conforme(b) Contato conforme (c) Contato entre grãos de solo (d) Contato entre asperezas de partículas de solo (O' SULLIVAN, 2011).....	17
Figura 2.9 – Contato entre elementos esféricos (LUDING, 2009).....	18
Figura 2.10 – Agregados de partículas (KOZICKI & TEJCHMAN, 2011 - modificado)	19
Figura 2.11 – Partículas formadas por triângulos.....	20
Figura 2.12 – Tipos de contatos entre partículas triangulares. (a) Contato tipo A; (b) Contato tipo B; (c) Contato tipo C; (d) Contato tipo D (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005 - modificado)	20
Figura 2.13 – Algoritmo <i>Sweep and Prune</i> em 2D (ŠMILAUER, et al., 2015)	22
Figura 2.14 - Modelo de Contato linear (COETZEE & ELS, 2008 - modificado)	24
Figura 2.15 - Resposta mecânica do modelo linear em suas componentes normal (à esquerda) e tangencial (à direita) (KOZICKI & TEJCHMAN, 2011 - modificado)	25
Figura 2.16 – Modelo mola-amortecedor.....	27
Figura 2.17 – Diferenças entre ensaios triaxiais e no estado plano de deformações (MARACHI, et al., 1981).....	33
Figura 2.18 – Efeito do ângulo de repouso na tensão principal intermediária (ODA, et al., 1978).....	33
Figura 2.19 – Características da ruptura nos ensaios triaxial e biaxial no estado plano de deformações (CORNFORTH, 1961 - modificado)	34
Figura 3.1 – Distribuição granulométrica utilizada nas simulações.....	37
Figura 3.2 – Modelo utilizado nas simulações numéricas (FERREIRA, 2009).....	40
Figura 4.1 - Curva tensão-deformação do ensaio oedométrico	44
Figura 4.2 – Método de Pacheco Silva.....	45
Figura 4.3 – Valor de κ em função de ϕ_{micro}	46
Figura 4.4 – Valor de λ em função de ϕ_{micro}	47
Figura 4.5 – Relação entre as parcelas plástica e elástica em função de ϕ_{micro}	48
Figura 4.6 Relação entre σ_{ocr} e ϕ_{micro} para os valores de ν	48

Figura 4.7 – Relação média entre a tensão de pré-adensamento das amostras e ϕ_{micro}	49
Figura 4.8 – Módulo de Young da amostra em função da tensão confinante para $\phi = 30^\circ$	50
Figura 4.9 – Módulo de Young da amostra em função da tensão confinante	50
Figura 4.10 – Pontos e regressão dos parâmetros K e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios oedométricos	52
Figura 4.11 – Pontos e regressão dos parâmetros n e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios oedométricos	52
Figura 4.12 - Influência dos parâmetros a , b e c no comportamento da equação proposta	54
Figura 4.13 – Modelo proposto para o comportamento tensão-deformação axial	55
Figura 4.14 – Modelo proposto para o comportamento deformação vertical-deformação axial	56
Figura 4.15 – Deformações volumétricas em função da deformação axial para $\phi_{micro} = 45^\circ$ em várias tensões confinantes	57
Figura 4.16 – Deformação residual em função do ângulo de atrito microscópico para vários valores de tensão confinante	58
Figura 4.17 - Deformação residual em função da tensão confinante para vários valores de ângulo de atrito microscópico	58
Figura 4.18 – Tensões desviadoras em função da deformação axial para $\phi_{micro} = 45^\circ$ em várias tensões confinantes	59
Figura 4.19 – Módulos de Young Iniciais dos ensaios biaxiais em função da tensão confinante para vários valores de $\phi_{micro} = 45$	60
Figura 4.20 – Pontos e regressão dos parâmetros K e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios biaxiais	61
Figura 4.21– Pontos e regressão dos parâmetros n e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios biaxiais	61
Figura 4.22 – Relação entre os ângulos de atrito macroscópico e microscópico	62
Figura 4.23 Variação da tensão de pico com relação à tensão residual	63
Figura 4.24 – Comparativo entre valores medidos e calculados para o coeficiente de Poisson	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Comparativo dos métodos de empacotamento.....	13
Tabela 3.1 – Areia grossa em várias classificações.....	37
Tabela 3.2 – Granulometria utilizada nos ensaios.....	37
Tabela 3.3 – Ordem de grandeza das propriedades da areia (LOCK 2014 - modificado)	38
Tabela 3.4 – Parâmetros do modelo constitutivo	41
Tabela 3.5 – Parâmetros utilizados na geração das amostras.....	41
Tabela 3.6 - Parâmetros utilizados nos ensaios oedométricos	42
Tabela 3.7 - Parâmetros estudados nos ensaios triaxiais.....	43
Tabela 4.1 – Valores de κ em função de ν e ϕ_{micro}	45
Tabela 4.2 - Valores de λ em função de ν e ϕ_{micro}	46
Tabela 4.3 - Valores de σ_{ocr} em função de ν e ϕ_{micro}	49
Tabela 4.4 – Parâmetros da equação de proposta para os vários ângulos de atrito microscópicos do ensaio oedométrico.....	51
Tabela 4.5 – Módulos de Young tangentes iniciais obtidos dos ensaios biaxiais [kPa]	60
Tabela 4.6 - Parâmetros da equação de Janbu para os vários ângulos de atrito microscópicos do ensaio biaxial.....	60
Tabela 4.7 – Módulos oedométricos determinados para as mesmas tensões confinantes dos ensaios biaxiais	65
Tabela 4.8 – Coeficientes de Poisson calculados	65
Tabela 4.9 – Coeficientes de Poisson obtidos dos ensaios biaxiais	66

LISTA DE ABREVIACÕES E SIMBOLOS

ABREVIACÕES

AASHTO	American Association of State Highway and Transportation Office
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ASTM	American Society for Testing Materials
DEM	Discrete Element Method (Método dos Elementos Discretos)
MIT	Massachusetts Institute of Technology
USCS	Unified Soil Classification System
YADE	Yet Another Dynamic Engine

SÍMBOLOS

Letras Arbicas

a	Vetor de aceleração
a^t	Aceleração no tempo t
C	Matriz de amortecimento, coeficiente de amortecimento
C	Comprimento
E	Módulo de Young
E_i	Módulo de Young inicial
E_{biax}	Módulo biaxial
E_{oed}	Módulo oedométrico
e	ndice de vazios, coeficiente de restituição
F^t	Força resultante no tempo
F_c	Força no contato
F_N	Força normal
F_T	Força tangencial
F_R	Força resultante
F_T^*	Força tangencial em que se iniciou o descarregamento
F_T^{**}	Força tangencial em que se iniciou o recarregamento
\vec{F}_p	Vetor de forças translacionais atuantes na partícula
\vec{F}_p^{app}	Vetor de forças aplicadas diretamente nas partículas

\vec{F}_p^{con}	Vetor de forças atuantes na partícula devido à interação com outras partículas que estão em contato direto
\vec{F}_{pc}^f	Vetor de forças atuantes na partícula devido à interação com fluidos
\vec{F}_{pc}^g	Vetor de forças atuantes na partícula devido à gravidade
\vec{F}_p^{n-con}	Vetor de forças atuantes na partícula devido à interação com outras partículas que não estão em contato direto
G	Módulo de cisalhamento
I	Inércia rotacional
\vec{J}_p	Momento tensorial de inércia da partícula
K	Matriz de rigidez, parâmetro do modelo de Janbu
k_N	Rigidez da mola no sentido normal ao contato
k_T	Rigidez da mola tangente ao contato
L	Largura
M	Matriz de inércia
N	Número de partículas
n	Porosidade, parâmetro do modelo de Janbu
\vec{M}_p	Vetor de torques atuantes na partícula
m_p	Massa da partícula
Pa	Pressão atmosférica
\tilde{P}	Predicado
r	Raio da partícula
R^2	Medida estatística acurácia da regressão
\vec{r}_p	Vetor de posição da partícula
T_R	Torque resultante
t	Tempo
u	Vetor de deslocamentos
u^t	Posição no tempo t

V_S	Volume de sólidos
V_T	Volume de total
v	Vetor de velocidades
v^t	Velocidade no tempo t

Letras Gregas

α^t	Aceleração angular no tempo t
$\Delta\vec{F}$	Vetor de variação das forças
ΔF_d^t	Variação das forças de amortecimento
Δt_{cr}	Passo de tempo crítico
Δx_i	Variação na posição da partícula i no sentido do eixo x
δ	Compressão mútua entre as partículas
δ_N	Interpenetração no sentido normal ao contato
δ_T	Interpenetração tangente ao contato
ε_a	Deformação de aplicação da tensão desviadora
ε_{res}	Deformação volumétrica residual (a volume constante)
ε_{xx}	Deformação na direção x devido a uma força aplicada na direção x
κ	Inclinação do trecho de recompressão
λ	Inclinação do trecho de compressão virgem
λ_d	Coefficiente de amortecimento
μ	Coefficiente de fricção
ν	Coefficiente de Poisson
ν_i	Coefficiente de Poisson inicial
ρ	Densidade
σ_i	Tensão na direção i
σ_c	Tensão confinante
σ_d	Tensão desviadora

σ_{ocr}	Tensão de pré-adensamento
σ_{ult}	Tensão última do modelo hiperbólico
σ_{xx}	Tensão na direção x devido a uma força aplicada na direção x
$\vec{\varphi}_p$	Vetor de orientações angulares da partícula
φ^t	Orientação angular no tempo t
ϕ	Ângulo de atrito
ϕ_{micro}	Ângulo de atrito microscópico
$\vec{\omega}_p$	Vetor de velocidades angulares da partícula
ω^t	Velocidade angular no tempo t
ω_{max}	Máxima autofrequência do empacotamento

1. INTRODUÇÃO

Materiais granulares são de grande importância em muitos processos industriais, nas ciências naturais e no dia-a-dia. Diferentemente de outros materiais, comumente é muito difícil manusear matérias granulares, uma vez que se comportam de forma bastante diferente em circunstâncias variadas (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005). Materiais granulares consistem de grãos em contato e vazios circundantes, que podem mudar de arranjo dependendo de fatores externos. Seu comportamento micromecânico é inerentemente descontínuo, heterogêneo e não linear. Para descrever seu comportamento, duas abordagens são empregadas: contínua e descontínua. Na primeira, simulações são feitas com base em propriedades globais, por meio de métodos de elementos finitos, métodos de diferenças finitas ou métodos de elementos de contorno. A segunda envolve simulações na escala dos grãos, ou seja, cada partícula é modelada individualmente (WINDULIŃSKI, et al., 2009).

O uso de métodos de partículas exige um extenso processo de calibração antes que se possa começar a resolução de problemas de contorno. Em muitos casos, esse processo é mais demorado que a resolução do problema em si. Além disso, métodos discretos costumam efetuar simulações com grandes números de partículas, o que os torna computacionalmente intensos e naturalmente lentos. Faz-se necessário, portanto, abreviar a etapa de calibração por meio da formulação de equações que correlacionem o comportamento macroscópico, do meio, com os parâmetros microscópicos, das partículas.

Vários autores, como ŠMILAUER (2010), WINDULIŃSKI, et al. (2009), MISHRA & MURTY (2001), COETZEE & ELS (2008), GRIMA & WYPYCH (2010), dentre outros, fizeram tentativas de determinar as equações de calibração dos parâmetros microscópicos, contudo poucas abordagens tratam de forma detalhada a influência do ângulo de atrito interparticular na resposta global do meio. Em geral os procedimentos estão focados na calibração dos parâmetros elásticos (constantes de mola) dos modelos constitutivos, mas o atrito microscópico pode, além de aferir os parâmetros de resistência do meio, pode também impactar em sua deformabilidade, razão pela qual esse parâmetro deve receber atenção especial na etapa de ajuste ente as propriedades micro e macroscópicas.

A influência desse parâmetro no comportamento macroscópico do meio foi avaliada de forma bidimensional por meio de ensaios oedométrico e biaxial, ambos em estado plano de deformações. Os resultados obtidos são validados por meio de valores típicos encontrados na literatura. O projeto eventualmente deve continuar em nível mais avançado, incluindo situações tridimensionais e computação de alto desempenho.

1.1 IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA

O âmago do presente trabalho está no entendimento da influência das propriedades microscópicas do material em seu comportamento macroscópico. Em outras palavras, é a dificuldade de estimar parâmetros dos grãos que levem a comportamentos realistas do solo.

1.2 JUSTIFICATIVA

Meios granulares, quando submetidos à compressão deformam-se, principalmente, por meio de rearranjo de partículas. Essa deformação, e conseqüentemente as tensões necessárias para que ela ocorra, depende capacidade de movimentação das partículas. Essa capacidade é determinada pelo intertravamento, também chamado de embricamento, dos grãos e pela facilidade que uma partícula tem de deslizar sobre a outra. O primeiro dos fatores, o embricamento, é função da forma dos grãos e de sua distribuição granulométrica. O segundo dos fatores é determinado pelo atrito entre as superfícies que compõem as partículas. Portanto, para alcançar o entendimento do comportamento do meio é necessário determinar como a variação nesses fatores microscópicos impacta nos parâmetros macroscópicos. Do ponto de vista da prática da engenharia pode-se dizer que é necessário definir qual parâmetro do grão leva a um dado comportamento esperado para solo. Este trabalho se propõe a verificar a influência apenas do ângulo de atrito interparticular no comportamento macroscópico do meio.

1.3 HIPÓTESE

A hipótese desse trabalho é que o ângulo de atrito interparticular influencia significativamente o comportamento macroscópico de meios granulares. Essa hipótese se fundamenta no rearranjo das partículas como forma de deformação do solo. Alterando-se a facilidade de deslocamento relativo entre as partículas, muda-se a facilidade de que o meio tem de se deformar para absorver as solicitações impostas, levando a uma variação no comportamento tensão-deformação macroscópico dos materiais granulares. Acredita-se que o Método dos Elementos Discretos (DEM) seja a melhor ferramenta numérica para esse estudo, uma vez que ele trata as partículas, e sua interação, de forma individual.

1.4 OBJETIVOS

O objetivo geral dessa pesquisa é o entendimento da influência do ângulo de atrito microscópico no comportamento do solo. Para isso, serão feitas comparações entre simulações numéricas discretas e dados experimentais obtidos da literatura.

Dentre os objetivos específicos dessa pesquisa cita-se:

- Implementação computacional, via Método dos Elementos Discretos, de ensaios geotécnicos para a determinação da resposta macroscópica do meio;
- Avaliação da mudança no comportamento dos solos arenosos quanto à variação do ângulo de atrito microscópico;
- Determinação da possibilidade de extrapolação dos dados obtidos com as análises feitas com elementos discretos para que sejam utilizáveis em simulações feitas com elementos finitos.

Com o estudo no nível de partículas espera-se adquirir um maior entendimento do fenômeno físico em nível macroscópico, sendo possível, posteriormente, aplicar o Método dos Elementos Discretos para a resolução de problemas comerciais, uma vez que a calibragem de parâmetros é uma das etapas mais demoradas do processo

1.5 METODOLOGIA DE PESQUISA

A abordagem da pesquisa é a hipotética dedutiva, em que se parte da hipótese de que o atrito microscópico influencia enormemente nas propriedades macroscópicas do solo. Para que se possa comprovar essa hipótese, as seguintes etapas serão realizadas:

- Revisão bibliográfica do Método dos Elementos Discretos (DEM) e do estado plano de deformações, geometria em que serão feitos os ensaios;
- Implementação de um código DEM capaz de gerar os empacotamentos de partículas a serem estudados;;
- Implementação de um código DEM capaz de simular os ensaios oedométrico e biaxial de solos arenosos;
- Validação do código em comparação a resultados experimentais encontrados na literatura.

1.6 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está organizada em 5 capítulos. Este primeiro capítulo apresenta a motivação do trabalho bem como a metodologia de pesquisa utilizada. O segundo capítulo é focado na revisão bibliográfica, contemplando o funcionamento do Método dos Elementos Discretos e comportamento do solo no estado plano de deformações. O terceiro capítulo apresenta a metodologia de estudo do problema, bem como valores adotados para os parâmetros do DEM e dados do comportamento macroscópico de solos arenosos. O quarto capítulo contempla os resultados obtidos, sua análise e comparação com resultados esperados. Por fim, no último capítulo são feitas considerações finais sobre o trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS (DEM)

DEM (sigla em inglês para *Discrete Element Method*) é o nome dado ao método numérico usado para determinar o movimento e as interações de um grande número de partículas pequenas, ou seja, busca-se o entendimento macroscópico do comportamento de um fenômeno a partir de suas características microscópicas. O método foi desenvolvido originalmente por Cundall em 1971 para resolver problemas de mecânica das rochas, contudo sua base teórica data de 1697, com o trabalho de Sir Isaac Newton. Em 1985, Williams, Hocking e Mustoe demonstraram que o DEM pode ser visto como uma generalização do Método dos Elementos Finitos (FEM), por meio da transformação do sistema de partículas em uma malha equivalente. Sua aplicação é feita em várias áreas do conhecimento, da engenharia civil à farmácia, por meio de simulações com materiais granulares, blocos rochosos fraturados e articulados, materiais estocados em silos, pós (como o toner), soluções líquidas de proteínas ou açúcares, dentre outros.

Uma simulação em elementos discretos é a análise dinâmica ou transiente que considera a interação dinâmica de um sistema de partículas. Um modelo DEM particulado consiste em um sistema ideal de partículas livres para se mover, conectadas por molas, amortecedores e/ou blocos deslizantes que simulam as interações nos contatos. Com base na ideia de que o DEM é uma generalização do FEM por meio de uma malha equivalente, quando duas partículas se distanciam o contato entre elas é quebrado e molas, amortecedores e/ou blocos deslizantes são removidos; ao mesmo tempo, esses elementos serão adicionados sempre que houver a formação de novos contatos (O' SULLIVAN, 2011). A constante remoção e inserção de molas nos contatos, bem como o deslizamento relativo entre partículas, resulta em mudança na rigidez global do sistema, incorrendo em análises não-lineares. Por ser decorrente da mudança de arranjo entre as partículas, esse tipo de não-linearidade é classificado como geométrica, em distinção daquela classificada como física que é devida aos modelos constitutivos utilizados para descrever os contatos. Essas fontes de não-linearidade no nível de partículas contribuem para dar ao sistema um comportamento não-linear em escala macroscópica.

O ciclo básico de cálculo do DEM, apresentado na Figura 2.1, consiste em atualizar a cada passo de tempo as posições, velocidades e acelerações de cada partícula a partir das forças que atuam sobre elas. Como esse procedimento é feito para um número grande de partículas, o

método é bastante dispendioso computacionalmente, limitando a extensão das simulações. Caso se queira trabalhar com número elevado de partículas, deve-se reduzir a duração virtual da simulação. Por outro lado, se a intenção é simular grandes períodos de tempo, deve-se reduzir o número de partículas. Uma forma de aumentar a extensão das simulações é com o uso de computação de alto desempenho, utilizando *clusters* de processadores que se beneficiam da característica paralelizável do método para dividir a região em estudo entre os nós, ficando cada um responsável apenas pelos cálculos referentes à sub-região que lhe foi designada. Apesar disso, o número de partículas em uma simulação ainda é bastante limitado, como pode ser visto na Figura 2.2.

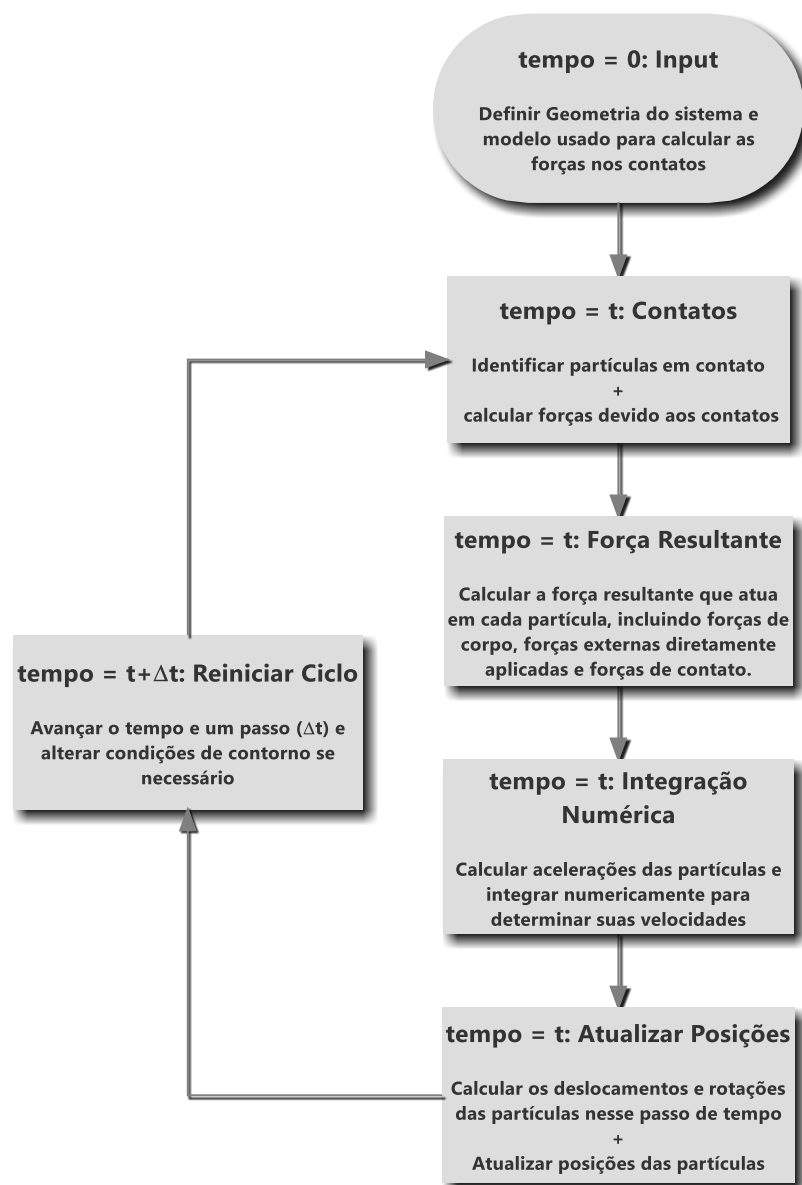


Figura 2.1 – Ciclo básico de cálculo do DEM (O' SULLIVAN, 2011 - modificado)

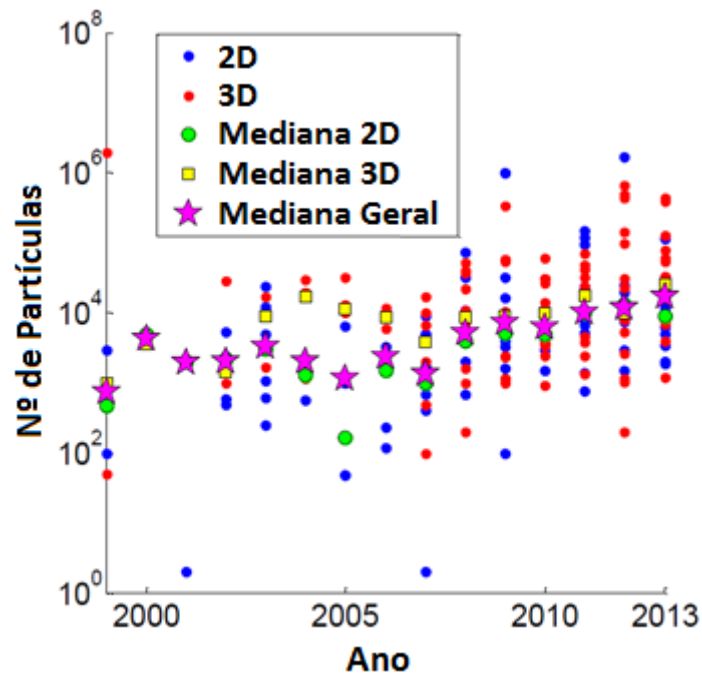


Figura 2.2 – Número de partículas utilizadas em trabalhos publicados feitos com DEM (O'SULLIVAN, 2014)

Para simular o comportamento de materiais granulares geralmente trabalha-se com grãos esféricos, contudo é possível o uso de partículas mais complexas, como poliedros e *clumps*, esses últimos também chamados de compósitos, agregados ou *clusters*. *Clumps* são comumente formados por esferas ou tetraedros unidos por barras, os primeiros gerando partículas suaves e os últimos definindo partículas angulosas.

Enquanto o modelo esférico permite a simulação eficiente de grandes sistemas, esse modelo é frequentemente insuficiente quando o comportamento estático dos sistemas é de interesse. Os problemas são decorrentes principalmente do fato de as propriedades de superfície serem modeladas incorretamente. O modelo de partículas compósitas apresenta uma estrutura geométrica mais complexa, o que permite a transmissão mais realista de torques durante as colisões, não sendo necessário fazer hipóteses artificiais para as forças tangenciais (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005)

O DEM pode ser dividido em duas abordagens, que consideram as partículas como rígidas ou suaves. No primeiro as partículas são indeformáveis e não apresentam interpenetração. Ele é usado nos casos em que a colisão entre partículas não é o grande interesse do modelo e pode ser assumida como instantânea. Essa hipótese é adequada para a simulação de fluxos rápidos de partículas, como deslizamentos de terra, mas fornece resultados não realistas nos casos em que o sistema evolui mais lentamente e as partículas apresentam muitos

contatos, como é de interesse desse trabalho. Para esses casos recomenda-se o uso de partículas suaves, livres para se interpenetrar, levando a contatos que se desenvolvem ao longo do tempo, permitindo uma modelagem mais realista da evolução do sistema.

2.1.1 VISÃO GERAL DO MÉTODO

Considerando o DEM da perspectiva da análise por elementos finitos, tem-se que as partículas são análogas aos graus de liberdade ou aos nós de uma malha de elementos finitos unidimensionais e os contatos são correspondentes às barras dessa malha, o que pode ser visto na Figura 2.3. Como dito anteriormente, nessa visão do método a malha deve ser refeita sempre que duas partículas entrarem em contato ou se distanciarem.

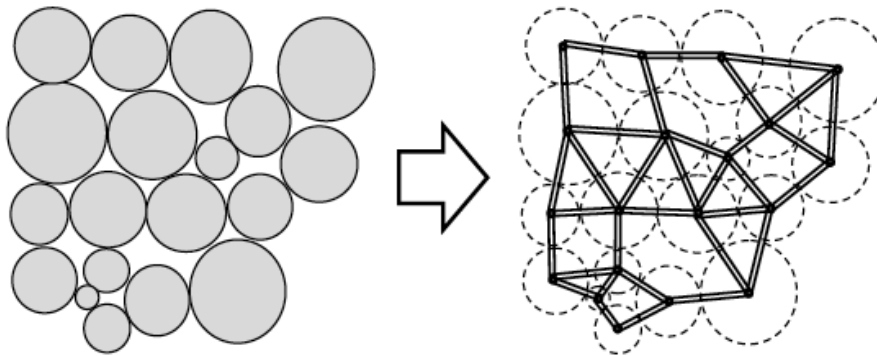


Figura 2.3 – Analogia entre sistema granular e malha de elementos finitos

Com base nessa analogia, a equação geral que governa o sistema de elementos discretos pode ser expressa pela equação de análise dinâmica de elementos finitos,

$$Ma + Cv + Ku = \Delta F \quad 2.1$$

em que M é a matriz de inércia (incluindo massa e inércia rotacional), C é a matriz de amortecimento e a , v , u e ΔF são os vetores de acelerações, velocidades, deslocamentos e forças (compostos tanto pelas parcelas translacionais quanto pelas rotacionais) para cada passo de tempo. A matriz de rigidez, K , depende da configuração do sistema, ou seja, dos contatos entre as partículas. Tendo em vista que as partículas em um modelo DEM são livres para girar, uma análise em duas dimensões possui 3 graus de liberdade (2 translacionais e 1 rotacional) enquanto uma análise tridimensional possui 6 graus de liberdade (3 translacionais e 3 rotacionais). O processo de construção da matriz de rigidez pode ser encontrado em ZIENKIEWICZ & TAYLOR (2006).

Softwares que se baseiam nessa metodologia para solucionar um problema de elementos discretos devem resolver o problema de inversão de matrizes muito grandes (por exemplo, com 36×10^6 entradas para uma pequena análise 3D de 1000 grãos), mesmo com algoritmos eficientes para solução de matrizes esparsas. Assim, muitas vezes prefere-se a metodologia descrita por CUNDALL & STRACK (1979), em que se evita a solução do sistema global de equações por meio do equilíbrio dinâmico das partículas individualmente. Essa metodologia também evita a formação e armazenamento da grande matriz de rigidez, permitindo que quantidades relativamente modestas de memória sejam utilizadas para se trabalhar com grandes populações de partículas. Os movimentos translacional e rotacional das N partículas do sistema são governados pela equação do movimento para corpos rígidos, expressa de acordo com a Segunda Lei de Newton. Para uma partícula p , de massa m_p , momento tensorial de inércia \hat{J}_p , centro de massa \vec{r}_p e orientação angular $\vec{\varphi}_p$, tem-se

$$m_p \frac{\partial^2 \vec{r}_p}{\partial t^2} = \vec{F}_p \quad 2.2$$

$$\hat{J}_p \frac{\partial^2 \vec{\varphi}_p}{\partial t^2} = \vec{M}_p \quad 2.3$$

A força \vec{F}_p e o torque \vec{M}_p que atuam na partícula são obtidos através da soma de todas as interações da partícula com o meio. A determinação dessas forças e torques é a parte central de cada simulação, uma vez que é a partir delas que se faz possível a previsão das novas posições e velocidades dos grãos do sistema. Segundo Zhu et al. (2007), a forma mais geral da equação que governa o equilíbrio dinâmico translacional de uma partícula é

$$m_p \frac{\partial^2 \vec{r}_p}{\partial t^2} = \sum_{c=1}^{N_{c,p}} \vec{F}_{pc}^{con} + \sum_{j=1}^{N_{nc,p}} \vec{F}_{pj}^{n-con} + \vec{F}_p^f + \vec{F}_p^g + \vec{F}_p^{app} \quad 2.4$$

em que F_{pc}^{con} são as forças na partícula devido aos contatos c , F_{pj}^{n-con} são as forças na partícula p devido à sua interação com outras partículas, j , que não estão diretamente em contato (como forças capilares em solos não saturados) e F_p^f , F_p^g e F_p^{app} representam, respectivamente, a força de interação com fluidos, a força gravitacional e forças diretamente aplicadas sobre a partícula.

O início da análise baseada em DEM consiste em definir um sistema de coordenadas global (fixo, inercial) e um sistema de coordenadas local para cada partícula, responsável por acompanhar seus deslocamentos e orientações. O próximo passo é a descrição do sistema de partículas, que pode somente ser considerada finalizada se as posições e velocidades iniciais de

cada uma das partículas forem dadas e se o seu comportamento junto ao contorno da região estudada for descrito.

2.1.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Em alguns casos, os comportamentos estático e dinâmico de sistemas granulares são substancialmente afetados pelas propriedades dos materiais que delimitam o contorno do sistema (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005). Um dos pontos chave de uma simulação com DEM é definir e descrever numericamente o contorno do domínio da análise (O' SULLIVAN, 2011). Dentre os principais tipos de condições de contorno existentes, os principais são as paredes rígidas e os contornos periódicos.

2.1.2.1 PAREDES RÍGIDAS

O tipo de contorno mais utilizado é a parede rígida. Esse tipo de contorno é feito, em geral, de superfícies, planas ou curvas, descritas analiticamente. Essas paredes não possuem inércia e as forças de contato determinadas na interação partícula-contorno são utilizadas somente para atualizar as coordenadas da partícula. Como as forças atuantes na parede rígida não influenciam seu movimento, seu deslocamento é feito por um controle explícito de suas velocidades translacional e rotacional. Quando as paredes são movimentadas, deformações e forças são impostas ao sistema de partículas. Em geral, forças de contato não são desenvolvidas entre paredes rígidas que se interceptam. (O' SULLIVAN, 2011) Dessa forma, as posições, orientações angulares e velocidades do contorno são independentes do esquema de integração e a interação entre contorno e material granular afeta apenas a movimentação do último (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005).

É bastante importante simular realisticamente a rugosidade da parede que contém os grãos, contudo a interação mecânica de um corpo deformável com uma parede rígida ainda não é muito bem entendida. Uma maneira eficiente de construir o contorno é fazendo uso de partículas que obedecem às mesmas regras das partículas do material a granular. A rugosidade da parede pode então ser ajustada pela escolha apropriada do tamanho e disposição das partículas que a formam. Além disso, esses contornos podem ser facilmente incorporados na simulação uma vez que não é necessário definir leis de contato partícula-parede (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005).

2.1.2.2 CONTORNOS PERIÓDICOS

O uso de contornos periódicos permite a simulação de grandes grupos de partículas, considerando-se apenas um subdomínio denominado célula periódica. Essa célula é contornada por cópias idênticas dela mesma de forma que cada partícula (e a geometria local ao redor da partícula) é repetida em intervalos de L_x na direção x , L_y na direção y e L_z na direção z . A célula periódica é tomada como um volume representativo do material e as deformações ocorridas nela são iguais às deformações médias do meio. (O' SULLIVAN, 2011). Um exemplo desse tipo de contorno pode ser visualizado na Figura 2.4

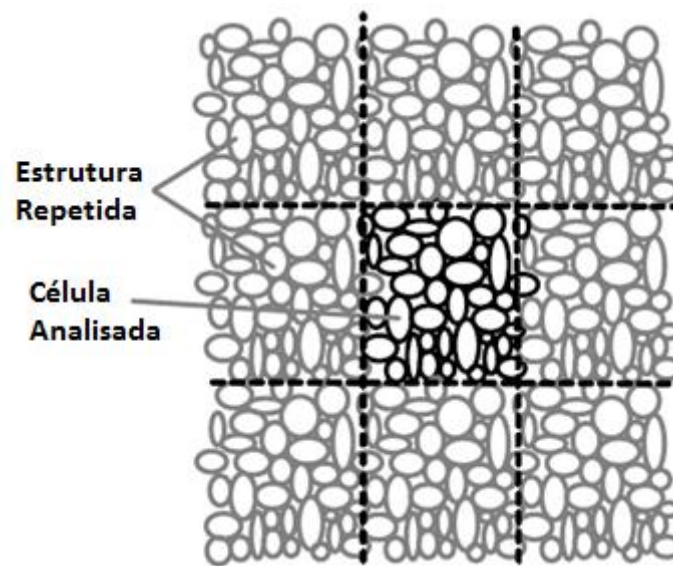


Figura 2.4 - Célula Periódica (O' SULLIVAN, 2011 - modificado)

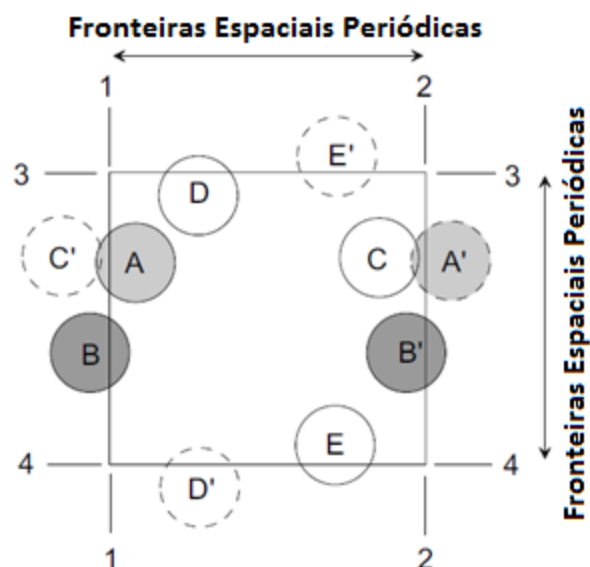


Figura 2.5 – Interação das partículas próximas às fronteiras em células periódicas (O' SULLIVAN, 2011 - modificado)

Nas células periódicas as partículas ao longo do contorno podem interagir com suas vizinhas imediatas e com as partículas próximas ao contorno do lado oposto. As partículas terão a tendência de sair da célula periódica como consequência das movimentações internas e do deslocamento dos contornos. Elas são, então, re-mapeadas de forma que adentrem a célula no local correspondente da fronteira oposta (O' SULLIVAN, 2011). A Figura 2.5 exemplifica as interações entre partículas de fronteiras opostas, como o ocorrido com os discos A e C e a reinserção de partículas que atravessam as fronteiras, discos B, D e E.

2.1.3 CONDIÇÕES INICIAIS E EMPACOTAMENTO

Em muitos problemas o comportamento do sistema a longo prazo independe das condições iniciais. Contudo, no meio geotécnico, algumas variáveis iniciais, como porosidade e granulometria, podem interferir bastante no comportamento do solo, à exemplo dos casos em que amostras densas apresentam dilatação quando cisalhadas, diferentemente das amostras fofas que não se dilatam quando submetidas a esse tipo de carregamento.

Uma simulação em elementos discretos é uma análise transiente em que a resposta do sistema em um determinado ponto do tempo é calculada a partir do estado do sistema em estágios anteriores. Da perspectiva da geomecânica, a resposta do sistema granular é altamente dependente de sua granulometria, de seu estado inicial (densidade do empacotamento e níveis de tensões), da anisotropia das partículas e das tensões e da orientação das tensões principais. (O' SULLIVAN, 2011).

As condições iniciais definem os valores das coordenadas, $\vec{r}_i(t = 0)$, orientações angulares $\vec{\varphi}_i(t = 0)$ e velocidades $\vec{v}_i(t = 0)$ e $\vec{\omega}_i(t = 0)$ de todas as N partículas que compõem o sistema. Para o caso especial de partículas esféricas, as orientações angulares não interferem nas forças de contato, portanto esse valor não é necessário (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005). Existem vários métodos para a geração de empacotamentos e condições iniciais, sendo eles divididos em duas classes: dinâmicos e construtivos. Os métodos dinâmicos se baseiam na movimentação das partículas ou de outros elementos do sistema para que se possa gerar o empacotamento. Em geral esses métodos consistem em simulações iniciais que visam apenas preencher o domínio, característica essa que torna essa classe de métodos muito lenta em comparação à outra. Por outro lado, os métodos construtivos se baseiam em algoritmos que posicionam as partículas geometricamente, sendo necessários apenas alguns passos de tempo para que a amostra atinja o equilíbrio. A Tabela 2.1 apresenta alguns dos métodos mais

conhecidos para a geração das condições iniciais, discutidos a seguir, juntamente com seus prós e contras do ponto de vista geotécnico.

Nos métodos dinâmicos, as simulações iniciais são geralmente realizadas com parâmetros não-reais das partículas, de forma a acelerar o processo ou facilitar o controle de alguma propriedade do empacotamento. Tão logo o método termine de gerar a amostra, espera-se o sistema se estabilizar, volta-se os parâmetros das partículas para seus valores reais e faz-se mais alguns ciclos até que o sistema se estabilize novamente. No caso dos métodos construtivos apenas a estabilização com parâmetros reais é necessária. Assim que o sistema se tornar estável, as coordenadas, orientações angulares e velocidades de todas as partículas são definidas como condições iniciais e o processo de geração da amostra é terminado.

Tabela 2.1 - Comparativo dos métodos de empacotamento.

Método	Classe	Velocidade	Densidade	Controle sobre porosidade	Controle sobre granulometria
Deposição Gravitacional	Dinâmico	Lento	Baixa a Média	Não	Sim
Geração Aleatória	Construtivo	Variável	Baixa a Média	Não	Sim
Geração Aleatória + Compressão de Paredes	Dinâmico	Lento	Média a Alta	Médio	Sim
Geração Aleatória + Expansão	Dinâmico	Rápido	Alta	Preciso	Não
Sub-Compactação de Jiang	Dinâmico	Muito lento	Média a Alta	Não	Sim
Triangulação	Construtivo	Muito rápido	Média a Alta	Não	Não
Avanço Frontal	Construtivo	Rápido	Alta	Sim	Sim

2.1.3.1 MÉTODO DA DEPOSIÇÃO GRAVITACIONAL

O método da deposição gravitacional tenta replicar um dos processos naturais de formação do solo, a sedimentação. Esse método consiste na geração de subsequentes camadas de partículas a uma certa altura, permitindo que elas se depositem por ação da gravidade. Esse processo envolve um alto custo computacional e demanda vários passos de tempo até que a amostra gerada esteja estável. É possível que se demore mais para gerar a amostra com esse método do que resolvendo o problema de contorno.

2.1.3.2 MÉTODO DA GERAÇÃO ALEATÓRIA

A geração aleatória, como o nome diz, consiste em gerar e posicionar randomicamente as partículas no interior do domínio. Sempre que uma nova partícula é criada é necessário conferir se ela não está interpenetrando (ou mesmo no interior) outra partícula existente. A velocidade desse método é proporcional ao nível de ocupação do espaço, ficando mais lenta a medida que o domínio é preenchido com grãos. Posteriormente são necessários alguns ciclos de simulação para que o sistema atinja o equilíbrio. Uma grande desvantagem desse método é que não deve ser utilizado para preencher recipientes, uma vez que, ao aplicar a gravidade as partículas irão se concentrar no fundo e haverá um espaço vazio na parte superior.

Uma forma de aumentar a densidade do empacotamento é a movimentação das fronteiras em direção ao interior, contudo essa abordagem pode consumir bastante tempo. Uma forma mais conveniente de aumentar a densidade da amostra é aumentar o tamanho das partículas (ITASCA, 2004). A cada nova expansão, devido à criação de novos contatos, deve-se simular alguns passos de tempo para permitir que o empacotamento atinja a estabilidade. Esse procedimento permite o controle preciso da porosidade do meio ao custo do controle sobre a granulometria.

2.1.3.3 MÉTODO DA SUB-COMPACTAÇÃO DE JIANG

Para poder construir amostras de partículas com baixas densidades, JIANG *et al.* (2003) desenvolveram uma metodologia que consiste em gerar aleatoriamente dentro de um domínio retangular, paralelepipedico ou cilindrico, uma camada de partículas (segundo uma dada distribuição granulométrica) e compactá-la verticalmente até que se atinja uma porosidade alvo. Esse processo é repetido até que todo o domínio seja preenchido pelas partículas. Cada camada

deve possuir porosidade menor que a camada anterior e maior que a porosidade alvo. Dessa forma as porosidades devem convergir monotonicamente para o valor alvo, ou seja, $n_1 > n_2 > n_3 > \dots > n_j > \dots > n_{alvo}$. A Figura 2.6 exemplifica esse método.

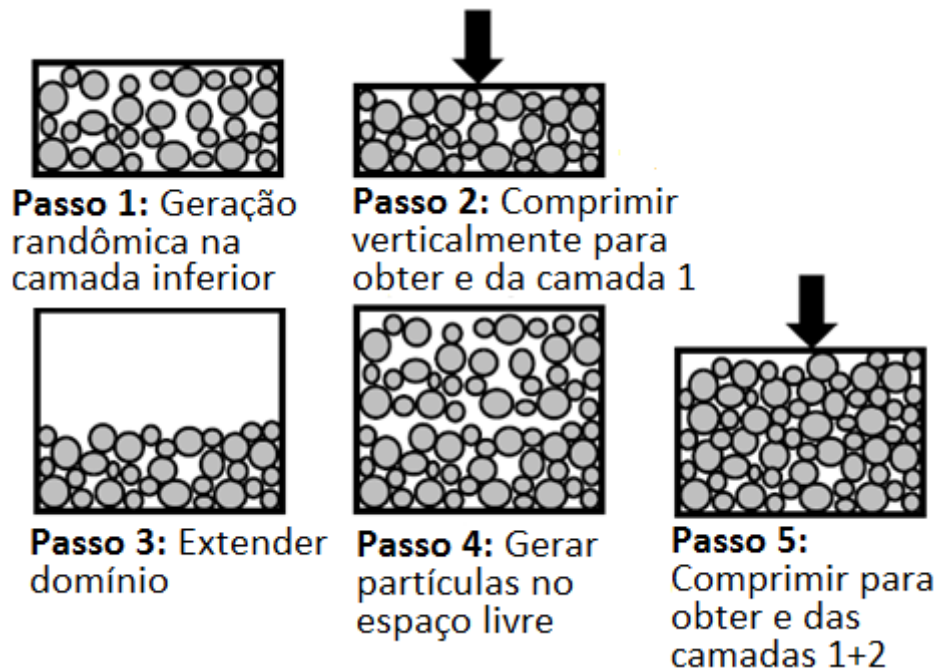


Figura 2.6 - Método da subcompactação de Jiang periódicas (O' SULLIVAN, 2011 - modificado)

2.1.3.4 TRIANGULAÇÃO

Cui e O'Sullivan (2003) propuseram um método, em que uma malha triangular é criada com base na triangulação de Delaunay em uma nuvem aleatória de pontos. A partir dessa malha insere-se esferas (discos) inscritos nos tetraedros (triângulos). Em seguida, como existem grandes vazios próximos aos vértices dos tetraedros (triângulos), adiciona-se esferas (círculos) centradas nos vértices e tangentes à partícula mais próxima. Esse procedimento é exemplificado na Figura 2.7. Suas principais desvantagens são a incapacidade de controle da porosidade e da distribuição granulométrica das partículas, além da formação de empacotamentos não estáveis e pouco densos quando os ângulos das figuras geométricas são inferiores a 30° , podendo apresentar grandes deformações na etapa de estabilização e não preenchendo o domínio de forma satisfatória. Essa desvantagem foi superada no trabalho de JERIER, et al. (2009), que otimizaram o método para que fosse possível gerar um empacotamento denso e isotrópico. O método apresenta como principais vantagens sua facilidade implementação e possibilidade de aplicação a problemas com condições de contorno complexas.

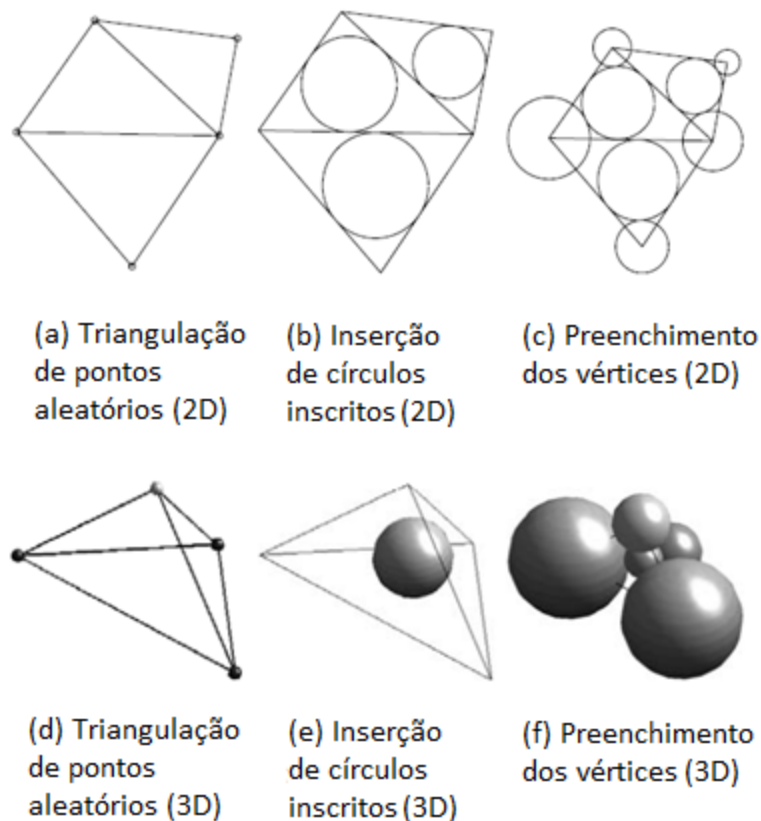


Figura 2.7- Método da triangulação proposto por Cui & O'Sullivan (2003) - modificado

2.1.3.5 AVANÇO FRONTAL

Esse procedimento foi proposto por FENG *et. al.* (2003). Inicialmente posiciona-se as duas (três) primeiras partículas de forma que elas sejam mutuamente tangentes. Em seguida adiciona-se o próximo disco (esfera) tangenciando as duas (três) partículas anteriores. Esse procedimento é repetido até que o domínio seja totalmente preenchido. A tangência entre as partículas é garantida com o Teorema dos Círculos de Descartes (Lagarias *et. al.*, 2002). O método foi dividido em duas abordagens, denominadas de forma aberta e forma fechada. Na forma aberta o empacotamento é construído camada por camada, a partir de uma geometria inicial. Na forma fechada o empacotamento cresce de dentro para fora, a partir de uma combinação inicial de esferas (discos) posicionada num ponto interior ao domínio. Esse método tem sido bastante estudado recentemente, uma vez é capaz de gerar rapidamente empacotamentos de partículas com amplo controle sobre suas propriedades. Recentes melhorias no método podem ser encontradas em MORALES, et al. (2016 a, b).

2.1.4 CONTATOS ENTRE PARTÍCULAS

As partículas do Método dos Elementos Discretos são completamente rígidas, contudo, partículas reais se deformam nos pontos de contato quando submetidas à compressão. Essa deformação é simulada numericamente no DEM por meio de uma pequena interpenetração entre as partículas. (O' SULLIVAN, 2011). O contato entre duas partículas ocorre, em geral, quando há a interpenetração mútua entre elas. As exceções à regra ocorrem em casos de partículas submetidas a tração ou a efeitos capilares, nos quais há forças de atração entre os grãos mesmo que eles não estejam se interpenetrando.

As superfícies em contato podem ser classificadas como conformes ou não-conformes. Superfícies conformes são aquelas que se encaixam perfeitamente antes de sofrerem deformação. Ao contrário, superfícies não-conformes são superfícies que possuem perfis distintos e irão interagir, inicialmente, em um único ponto. Neste último caso, a área de contato é pequena quando comparada às dimensões das partículas e, desta forma, as tensões são altamente concentradas na região de contato (JOHNSON, 1985). Essas definições podem ser visualizadas na Figura 2.8.

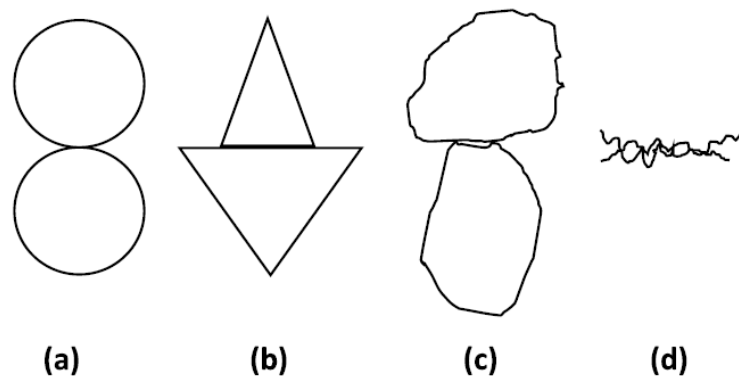


Figura 2.8 – Tipos de contatos (a) Contato não conforme (b) Contato conforme (c) Contato entre grãos de solo (d) Contato entre asperezas de partículas de solo (O' SULLIVAN, 2011)

A maior parte das simulações com DEM faz uso de esferas ou discos como tipo de partícula, portanto os contatos são não conformes. Um contato conforme teoricamente perfeito pode ser ilustrado na Figura 2.8 (b). Contudo, como pode ser visto na Figura 2.8 (c), a interação entre partículas reais possui condições complexas, com mais de um ponto de contato, devido à morfologia dos grãos. Qualquer superfície de partícula de interesse à geomecânica irá possuir asperezas. Como mostrado na Figura 2.8(d), inicialmente o contato entre as superfícies tende a

se dar de forma não conforme entre as asperezas, tornando-se conforme com o desgaste da rugosidade (O' SULLIVAN, 2011).

2.1.4.1 PARTÍCULAS ESFÉRICAS

Simulações com partículas esféricas são bastante eficientes uma vez que duas partículas estão em contato mecânico se a soma dos raios for maior que a distância entre seus centros, como pode ser visto na Figura 2.9. Isso pode ser escrito matematicamente por

$$\delta_{ij} \equiv r_i + r_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j| > 0 \quad 2.5$$

em que, δ_{ij} é chamado de compressão mútua das partículas i e j e R_i e R_j são os raios das partículas.

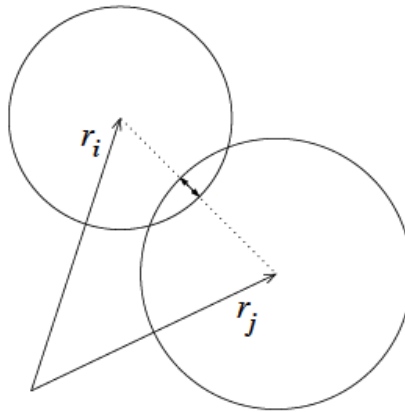


Figura 2.9 – Contato entre elementos esféricos (LUDING, 2009)

2.1.4.2 AGREGAÇÕES (CLUMPS)

A simulação de alguns fenômenos requer modelos de partículas mais realísticos que simples esferas. Enquanto modelos esféricos permitem simulações eficientes de sistemas com grandes quantidades de partículas, esse modelo é insuficiente quando o comportamento estático desses sistemas é almejado. Os problemas são causados principalmente pela modelagem incorreta da superfície das partículas, mas podem ser resolvidos com o uso de modelos geometricamente mais complexos. A forma mais simples de definir tais partículas é pela combinação de várias esferas em uma só partícula (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005). Essas esferas podem ser tangentes entre si ou se interpenetrar, uma vez que forças internas de contato não são desenvolvidas dentro de uma partícula. São possíveis inúmeras combinações de esferas

para formar as agregações, também chamadas de *clumps*, e alguns exemplos podem ser vistos na Figura 2.10.

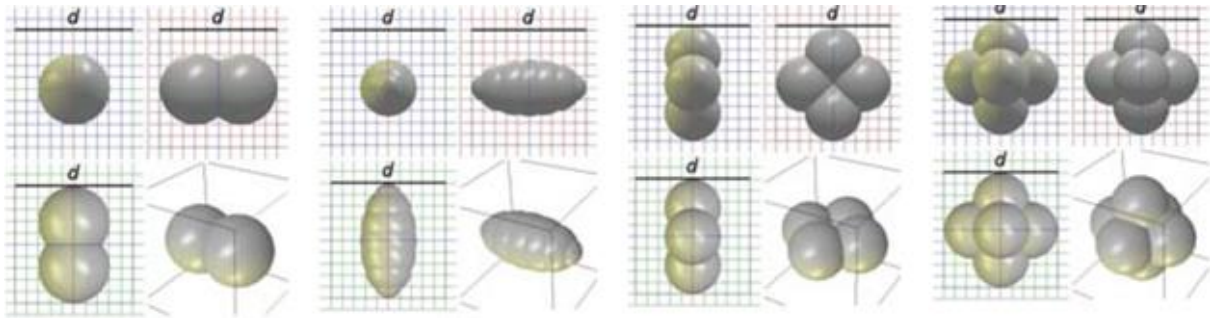


Figura 2.10 – Agregados de partículas (KOZICKI & TEJCHMAN, 2011 - modificado)

2.1.4.3 PARTÍCULAS ANGULARES

Um primeiro passo rumo a modelos de partículas mais fidedignos foi a substituição de partículas esféricas por agregações. Esses modelos permitem a simulação mais realista de sistemas granulares, mas seu potencial para aproximar partículas angulares é limitado (pode ser feito com descritores de forma de Fourier). No modelo de partículas angulares, os grãos são compostos por triângulos conectados entre si. Esse modelo é bastante flexível, ao que permite a modelagem de grande variedade de partículas, incluindo aquelas com formato côncavo (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005). Os elementos que ligam os triângulos podem ser rígidos ou flexíveis, permitindo o desenvolvimento de forças e deformações internas. Triângulos de uma mesma partícula interagem somente via elementos que os conectam e triângulos de partículas diferentes interagem por sua interpenetração. Exemplos de partículas formadas dessa forma estão ilustrados na Figura 2.11.

Dada a geometria desse tipo de partícula, existem 5 diferentes tipos de contatos que podem ser desenvolvidos entre as partículas, o que obriga o algoritmo de detecção de contatos a ser bastante complexo e, conseqüentemente, extremamente lento. Contatos do tipo A são aqueles em que a figura formada pela área interpenetrada tem a forma de um triângulo. Contatos do tipo B são aqueles em que essa forma geométrica é um quadrilátero ou um pentágono. Já no tipo C os vértices das duas partículas atingem ultrapassam a fronteira oposta, reemergindo do outro lado. Por fim, nos contatos do tipo D uma face inteira da partícula interpenetra a outra, com suas quinas reemergindo do outro lado. Esses contatos podem ser visualizados na Figura 2.12.



Figura 2.11 – Partículas formadas por triângulos

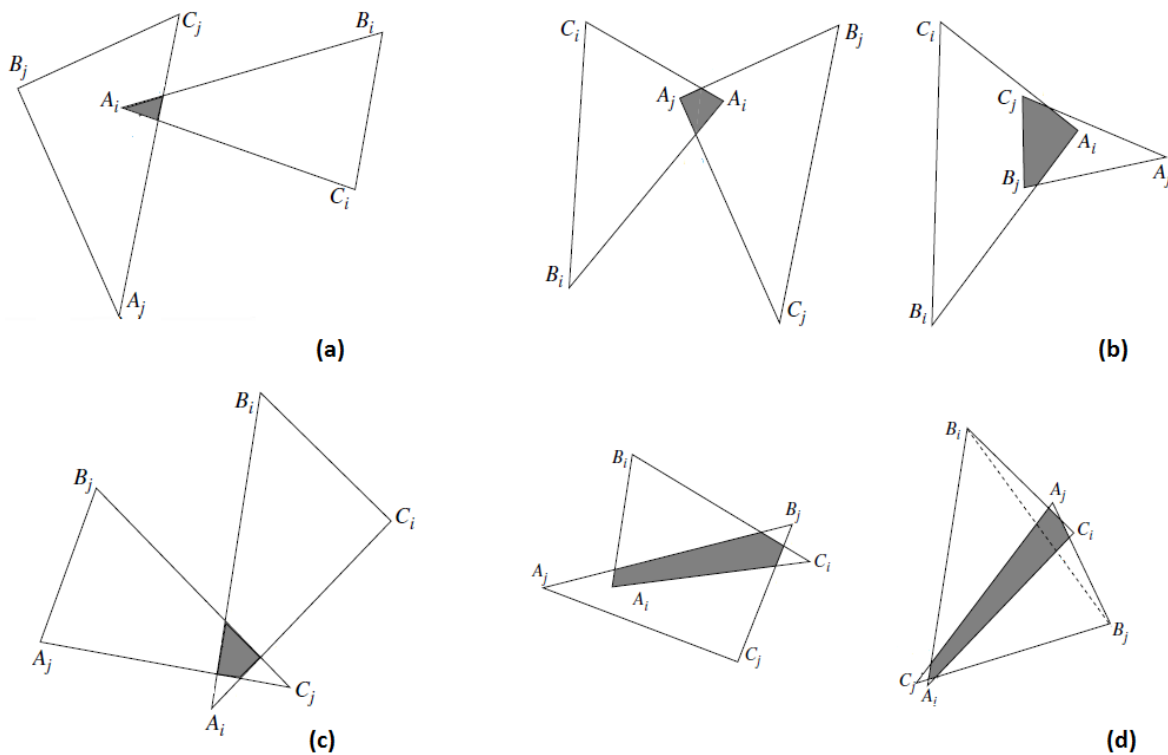


Figura 2.12 – Tipos de contatos entre partículas triangulares. (a) Contato tipo A; (b) Contato tipo B; (c) Contato tipo C; (d) Contato tipo D (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005 - modificado)

2.1.4.4 DETECÇÃO DE CONTATOS

O primeiro passo para que se possa calcular as forças entre partículas é identificar as partículas que estão em contato ou que devem entrar em contato no presente passo de tempo. Várias abordagens são possíveis, mas, independentemente do método utilizado, constrói-se uma lista de vizinhos (partículas em contato ou que irão entrar em contato) para cada partícula. Em

seguida, todos os pares de vizinhos serão levados em conta no cálculo da força de contato (O' SULLIVAN, 2011).

O cômputo exato da configuração da colisão entre duas partículas pode ser relativamente caro em termos computacionais. Levando em consideração um par de corpos e sua geometria exata, a detecção de contatos se procede em duas etapas, a primeira para uma rápida detecção de possíveis contatos e a segunda para filtrar colisões impossíveis (ŠMILAUER, et al., 2015).

Em partículas altamente irregulares é mais eficiente circunscrever o grão com círculos (esferas) ou retângulos (paralelepípedos) e verificar se essas geometrias circunscritas se interpenetram. Caso positivo, as partículas são adicionadas à lista de possíveis contatos. Alternativamente a distância entre os centroides das partículas pode ser levada em conta e se ela for inferior a um valor limite, denominado Distância de Verlet, as partículas são consideradas suficientemente próximas (O' SULLIVAN, 2011). Com essa primeira etapa de detecção grosseira dos contatos, os algoritmos descritos nas seções 2.1.4.1 a 2.1.4.3 são utilizados para eliminar as partículas que não estão se interpenetrando.

Algoritmos de detecção de contatos tem sido alvo de extensas pesquisas. Eles podem ser grosseiramente divididos em dois grupos. O primeiro, dos Algoritmos Hierárquicos, consiste em subdividir recursivamente o espaço e limitar o número de verificações em uma primeira etapa, baseando-se no fato que regiões hierarquicamente inferiores podem se interpenetrar apenas se fizerem parte da mesma região imediatamente superior. O segundo, dos Algoritmos Planos, consiste em trabalhar diretamente com os sólidos circunscritos às partículas, sem agrupá-los em hierarquias. Dentre os Algoritmos Planos ressalta-se dois tipos comumente utilizados em simulações, o da Varredura e Podagem (*Sweep and Prune*) e os algoritmos de Grade (*Grid algorithms*) (ŠMILAUER, et al., 2015).

Os algoritmos de Grade subdividem o espaço em um conjunto finito de retângulos (paralelepípedos) igualmente espaçados, fazendo a procura por contatos apenas no interior do retângulo (paralelepípedo) e em seus vizinhos. Cita-se alguns algoritmos como *Binning* (O' SULLIVAN, 2011), *Link Cell* e *Lattice* (PÖSCHEL & SCHWAGER, 2005), dentre outros.

Já o algoritmo de Varredura e Podagem opera em retângulos (paralelepípedos) circunscritos às partículas se, e somente se, eles se interpenetrarem em todos os eixos (ŠMILAUER, et al., 2015). Esse é o algoritmo codificado pelo Yade (software utilizado nessa dissertação), razão pela qual será descrito em detalhe.

Primeiramente, circunscreve-se a cada partícula, i , um retângulo (paralelepípedo), também chamado de predicado e denominado \tilde{P}_i . Esses predicados são descritos por suas coordenadas inicial, \tilde{P}_i^0 , e final, \tilde{P}_i^l , nos 3 eixos. A interpenetração entre dois predicados é determinada pela conjunção da interpenetração dos intervalos nos 3 eixos, Figura 2.13, e descrita pela seguinte equação (ŠMILAUER, et al., 2015):

$$(\tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j) \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigwedge_{w \in \{x,y,z\}} \left[((\tilde{P}_i^{w0}, \tilde{P}_i^{wl}) \cap (\tilde{P}_j^{w0}, \tilde{P}_j^{wl})) \neq \emptyset \right] \quad 2.6$$

em que (a, b) denota um intervalo em \mathbb{R} .

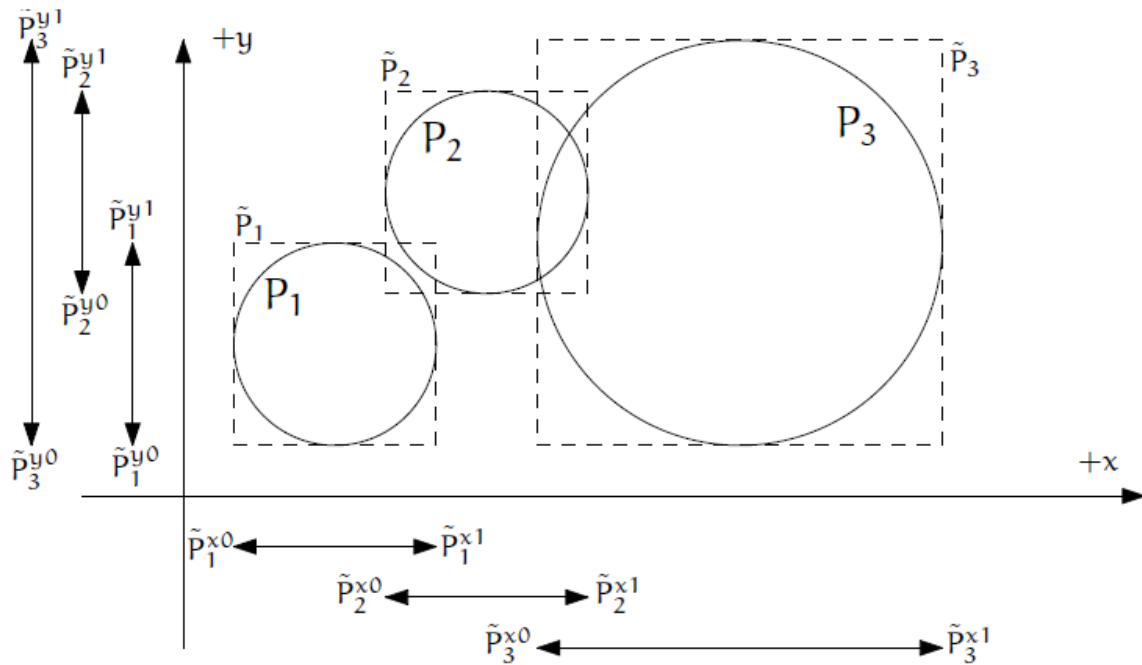


Figura 2.13 – Algoritmo *Sweep and Prune* em 2D (ŠMILAUER, et al., 2015)

O algoritmo mantém três listas separadas, uma para cada eixo. Essas listas são ordenadas de acordo com as coordenadas mínimas e máximas das partículas, juntamente com sua identificação. No passo inicial todas as listas são ordenadas em um eixo é utilizado para calcular as interações iniciais. Caso os limites de duas partículas se sobreponham, verifica-se nos outros eixos se também há sobreposição. A cada novo passo de tempo as listas já estão pré-ordenadas e devem ser atualizadas caso ocorram inversões (quando uma coordenada, inicial ou final, de uma partícula atravessa a coordenada de outra partícula). Inversões podem significar:

- Interpenetração de partículas no eixo em questão, quando o limite superior de uma partícula troca é enviado para posição posterior ao limite inferior de outra partícula. Neste caso o contato deve ser verificado nos outros eixos.
- Fim de um contato, quando o limite superior de uma partícula troca é enviado para posição anterior ao limite inferior de outra partícula.
- Nada, caso os limites que troquem de posição sejam ambos superiores ou inferiores.

Para cada inversão ocorrida, uma função determina se novos contatos foram criados ou se contatos antigos foram desfeitos.

2.1.5 CÁLCULO DAS FORÇAS

A discussão até agora foi focada na detecção dos contatos entre as partículas. Esse é o primeiro passo para que se possa determinar as forças devido à interação interparticular. No Método dos Elementos Discretos deve-se considerar grandes quantidades de partículas interagindo. Para determinar as forças de contato o procedimento de cálculo deve primeiro identificar quais partículas estão em colisão e, posteriormente, calcular de forma acurada as forças desenvolvidas entre as partículas em função de sua interpenetração e, em alguns casos, de sua movimentação tangencial (O' SULLIVAN, 2011).

Com o objetivo de atingir eficiência computacional, expressões analíticas relativamente diretas são utilizadas. Para facilitar a descrição de sua geometria, as partículas no DEM são quase sempre formadas por superfícies suaves e grande parte dos modelos simplifica o contato a um único ponto. As deformações sofridas pelas partículas e as distribuições de tensões não uniformes não são consideradas na simulação com elementos discretos (O' SULLIVAN, 2011).

As forças de contato são pensadas como a representação da integral das tensões atuantes ao longo da superfície do contato. A força resultante interparticular é determinada em suas duas componentes ortogonais, normais e tangenciais ao contato. Assim, o comportamento tensão deformação é representado por dois modelos constitutivos ortogonais. Esses modelos geralmente são compostos de molas, amortecedores e blocos deslizantes. O nível de realismo dos modelos de contato pode ser melhorado pelo uso de relações força-deslocamento não lineares para as molas ou pelas combinações de molas e amortecedores de diferentes maneiras (O' SULLIVAN, 2011). Os modelos constitutivos mais largamente utilizados são descritos a seguir.

2.1.5.1 MODELO LINEAR

Nesse modelo constitutivo cada contato é representado por uma mola de comportamento linear no sentido normal e por uma mola linear juntamente com um bloco deslizante no sentido tangencial, Figura 2.14. A rigidez das molas (k_N no sentido normal e k_T no tangencial) juntamente com a magnitude da interpenetração são utilizadas para calcular as forças de contato (COETZEE & ELS, 2008). A força de contato na direção normal é dada por:

$$F_N = k_N \delta_N \quad 2.7$$

em que k_N e δ_N são a rigidez da mola e a interpenetração na direção normal ao contato.

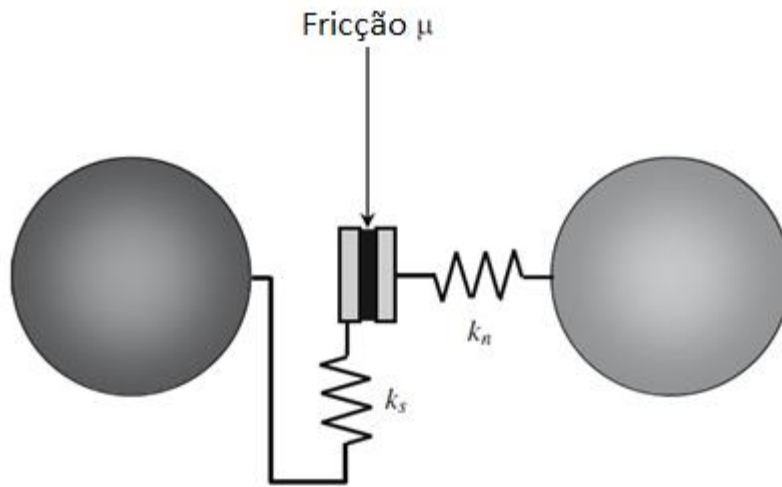


Figura 2.14 - Modelo de Contato linear (COETZEE & ELS, 2008 - modificado)

A rigidez da mola é um parâmetro de cada partícula e pode ser definido previamente ou calculado em função do módulo de Young do material que compõe a partícula:

$$k_N^i = 2 r^i E^i \quad 2.8$$

Em ambos os casos (k_N previamente definido ou calculado em função do módulo de Young do material que compõe a partícula) a rigidez do contato é dada por:

$$k_N^{contato} = \frac{k_N^i k_N^j}{k_N^i + k_N^j} \quad 2.9$$

Já para o caso tangencial tem-se:

$$F_T = \begin{cases} k_T \delta_T & |F_T| < |\mu F_N| \\ \mu F_N \text{ sign} \left(\sum \Delta \delta_T \right) & |F_T| \geq |\mu F_N| \end{cases} \quad 2.10$$

em que k_T e δ_T são rigidez da mola e o deslocamento na direção tangencial. Assim como no caso normal, a rigidez tangencial pode ser definida ou calculada em função de um parâmetro do material que compõe as partículas em contato, neste caso o módulo de Young e o coeficiente de Poisson.

$$k_T^i = 2 r^i E^i \nu^i \quad 2.11$$

Ainda, a rigidez do contato deve ser calculada pela média harmônica entre as rigidezes das partículas:

$$k_T^{contato} = \frac{k_T^i k_T^j}{k_T^i + k_T^j} \quad 2.12$$

As equações 2.7 e 2.10 descrevem, respectivamente, modelos linear elástico e elástico perfeitamente plástico, como representado na Figura 2.15. Nesse modelo não há amortecimento calculado a partir do contato entre partículas.

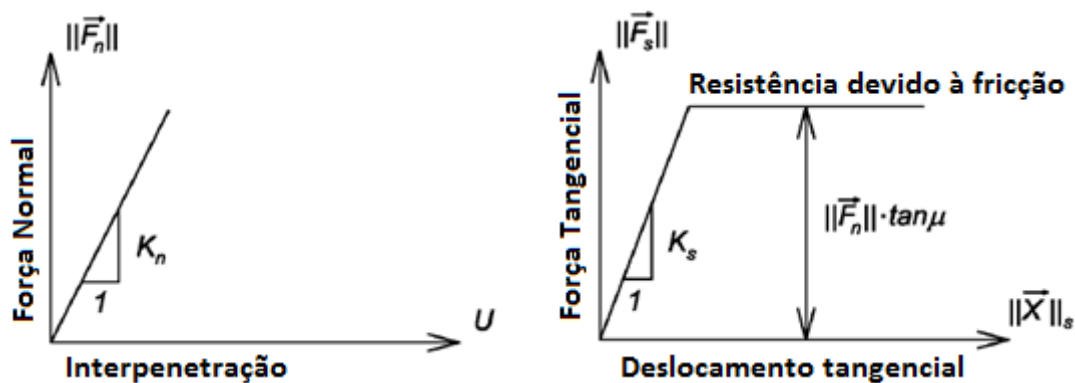


Figura 2.15 - Resposta mecânica do modelo linear em suas componentes normal (à esquerda) e tangencial (à direita) (KOZICKI & TEJCHMAN, 2011 - modificado)

2.1.5.2 MODELO DE HERTZ-MINDLIN

O modelo constitutivo de Hertz-Mindlin inclui elasticidade não linear na direção normal, como previsto por Hertz para o contato não-conforme de dois corpos. Na direção tangente ele se assemelha ao caso simplificado sem deslizamento discutido por MINDLIN & DERESIEWICZ (1953) em que uma relação linear entre a força cisalhante e o deslocamento tangencial é empregada. Por fim, o critério de Mohr-Coulomb é utilizado para estabelecer a máxima força de fricção que pode ser desenvolvida no contato. É possível, também, incluir os

efeitos do amortecimento viscoso (ŠMILAUER, et al., 2015). A força normal entre duas partículas é calculada pela equação 2.7, contudo, a rigidez do contato é definida como

$$k_N = \frac{4 E^i E^j \sqrt{\delta_N}}{3 \left(E^i (1 - \nu^j) + E^j (1 - \nu^i) \right)} \sqrt{\frac{r^i r^j}{r^i + r^j}} \quad 2.13$$

O modelo tangencial desenvolvido por MINDLIN & DERESIEWICZ (1953), por outro lado, não se assemelha ao modelo linear. A força tangencial é também dependente da magnitude da força normal e é calculada pela equação 2.10. Adotando uma abordagem incremental, o procedimento consiste em atualizar a força normal e o raio da área do contato e, a seguir, calcular a variação na força tangencial (THORNTON & YIN, 1991). A rigidez da mola é dada por

$$k_t = \frac{8 G^i G^j \theta \delta_N}{(G^i (2 - \nu^j) + G^j (2 - \nu^i))} \pm \mu (1 - \theta) \frac{\Delta F_N}{\Delta \delta_T} \quad 2.14$$

em que o sinal negativo ocorre durante o descarregamento e $G = E/2(1 + \nu)$. O parâmetro θ é dependente do estado de carregamento do contato

$$\theta^3 = \begin{cases} 1 - \frac{F_T + \mu \Delta F_N}{\mu \Delta F_N} & \text{carregamento} \\ 1 - \frac{F_T^* - F_T + 2\mu \Delta F_N}{2\mu \Delta F_N} & \text{descarregamento} \\ 1 - \frac{F_T - F_T^{**} + 2\mu \Delta F_N}{2\mu \Delta F_N} & \text{recarregamento} \end{cases} \quad 2.15$$

com F_T^* e F_T^{**} os pontos em que se iniciaram o descarregamento e o recarregamento, respectivamente. Esses pontos devem ser continuamente atualizados para que se possa incluir o efeito da variação na força normal (THORNTON & YIN, 1991). Isso se dá pelas equações

$$F_T^* = F_T^* + \mu \Delta F_N \quad 2.16$$

$$F_T^{**} = F_T^{**} - \mu \Delta F_N \quad 2.17$$

2.1.5.3 MODELO MOLA-AMORTECEDOR

Os modelos de mola-amortecedor incluem um amortecedor viscoso no ponto de contato para levar em conta a dissipação de energia cinética devido às deformações plásticas no contato.

(O' SULLIVAN, 2011). Esse modelo pode ser usado tanto para o caso normal quanto para o tangencial e sua relação força-deslocamento é dada por

$$F_{N,T} = k_{N,T} \delta_{N,T} + C_{N,T} \frac{\partial \delta_{N,T}}{\partial t} \quad 2.18$$

ou

$$F_{N,T} = k_{N,T} \delta_{N,T}^{3/2} + C_{N,T} \frac{\partial \delta_{N,T}}{\partial t} \delta_{N,T}^{3/2} \quad 2.19$$

em que $C_{N,T}$ é o termo dissipativo e as equações 2.23 e 2.24 contemplam molas lineares ou hertzianas, respectivamente. A Figura 2.16 ilustra esse tipo de modelo, bem como seu comportamento durante as fases de carga e descarga.

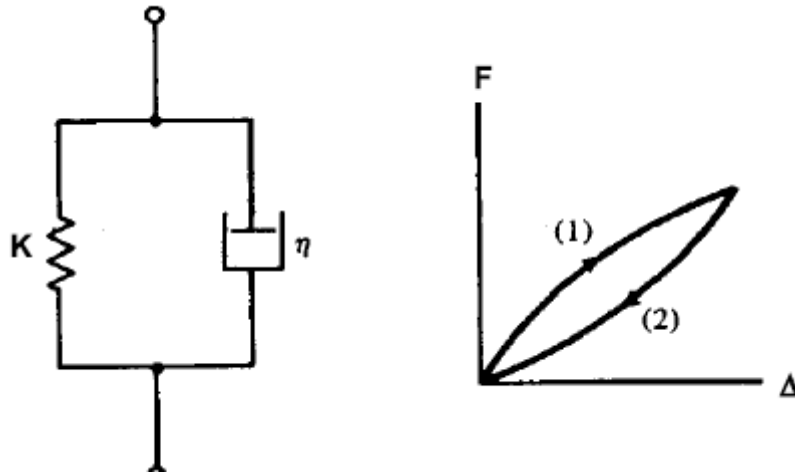


Figura 2.16 – Modelo mola-amortecedor.

Pode ser necessário determinar o amortecimento em função do coeficiente de restituição, e , do contato ou vice-versa. Como apontado por CLEARY (2000), a equação que relaciona esses parâmetros é

$$C_{N,T} = 2\gamma\sqrt{m k_{N,T}} \quad 2.20$$

em que m e γ são definidos por

$$m = \frac{m^i m^j}{m^i + m^j} \quad 2.21$$

$$\gamma = -\frac{\ln(e)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(e)^2}} \quad 2.22$$

2.1.6 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Cada partícula acumula forças generalizadas (forças e torques) dos contatos em que ela participa. Essas forças generalizadas são usadas para integrar as equações de movimento de cada partícula separadamente (ŠMILAUER, et al., 2015). A maior parte dos códigos de elementos discretos faz uso de uma abordagem de integração no tempo similar ao método das diferenças centrais, com incremento de tempo Δt (O' SULLIVAN, 2011). Essa abordagem é conhecida como integração *leapfrog* ou integração Verlet e será descrita a seguir.

2.1.6.1 POSIÇÃO

A integração do movimento de uma partícula consiste em usar sua aceleração no passo de tempo atual, a^t , para atualizar sua posição de u^t para $u^{t+\Delta t}$. Recordando as equações 2.2 e 2.4, a aceleração no passo de tempo atual é determinada por

$$a^t = \frac{F_R}{m_p} \quad 2.23$$

Utilizando diferenças finitas de segunda ordem, com passo de tempo Δt , obtém-se

$$a^t \simeq \frac{u^{t-\Delta t} - 2u^t + u^{t+\Delta t}}{\Delta t^2} \quad 2.24$$

Isolando a posição atualizada, $u^{t+\Delta t}$, em um lado da equação chega-se a

$$\begin{aligned} u^{t+\Delta t} &= 2u^t - u^{t-\Delta t} + a^t \Delta t^2 \\ &= u^t + \Delta t \left(\frac{u^t - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} + a^t \Delta t \right) \end{aligned} \quad 2.25$$

Usualmente $u^{t-\Delta t}$ não é guardado para passos de tempo posteriores, portanto é tratado como um valor desconhecido. Contudo, pode-se notar que

$$v^{t-\Delta t/2} \simeq \frac{u^t - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad 2.26$$

ou seja, obtém-se a velocidade média no passo de tempo anterior, que é conhecida. Observa-se também que:

$$v^{t+\Delta t/2} \simeq v^{t-\Delta t/2} + a^t \Delta t \quad 2.27$$

Substituindo a equação 2.26 na 2.25

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \Delta t(v^{t-\Delta t/2} + a^t \Delta t) = u^t + v^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad 2.28$$

O algoritmo, portanto, consiste em primeiramente calcular a velocidade média atual, parâmetro que será utilizado no próximo passo de tempo, por meio da equação 2.27 e então determinar a posição da partícula com a equação 2.28.

2.1.6.2 ORIENTAÇÃO

A atualização da orientação atual, θ^t , segue procedimento análogo ao descrito para a posição. Primeiramente se calcula a aceleração angular atual, α^t , a partir do Torque resultante nas partículas. Para partículas esféricas, em que o tensor de inércia é diagonal, com $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, tem-se

$$\alpha^t = \frac{T_R}{I_{11}} \quad 2.29$$

Com as mesmas aproximações utilizadas na secção anterior obtém-se

$$\omega^{t+\Delta t/2} = \omega^{t-\Delta t/2} + \alpha^t \Delta t \quad 2.30$$

e

$$\varphi^{t+\Delta t} = \varphi^t + \omega^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad 2.31$$

2.1.6.3 AMORTECIMENTO NUMÉRICO

Em simulações de fenômenos quase-estáticos é desejável dissipar a energia cinética das partículas. Como muitos modelos constitutivos não incluem amortecimento baseado na velocidade, é possível fazer uso de amortecimento numérico artificial (ŠMILAUER, et al., 2015). Quando modelos constitutivos que se comportam de forma elástica antes da ruptura são utilizados, a dissipação de energia do sistema granular não é alcançada. As consequências disso em uma simulação em elementos discretos é que as partículas irão vibrar constantemente, como um sistema altamente complexo de molas elásticas conectadas (O' SULLIVAN, 2011).

Um equilíbrio quase-estático do conjunto de partículas pode ser alcançado pela aplicação do amortecimento adequado. Esse parâmetro deve ser alto o suficiente para obter uma resposta global não-oscilatória para o sistema, mas, por outro lado, também não deve ser muito

alto. Um valor razoável para o amortecimento numérico deve ser próximo ao amortecimento crítico para a menor frequência natural do empacotamento, que pode ser estimado pelo período de resposta estrutural de um sistema não amortecido (OÑATE & ROJEK, 2004).

Contudo, apesar do amortecimento numérico compensar uma falha do modelo constitutivo, é difícil escolher um valor que tenha sentido físico ou relacionar os algoritmos utilizados com fenômenos da natureza. A principal forma de dissipação de energia nas simulações com DEM são o deslizamento friccional e a ruptura de contatos. Alterar o amortecimento numérico pode afetar a resposta do sistema, razão pela qual é aconselhável executar as simulações com valores baixos ou nulos para esse parâmetro. (O' SULLIVAN, 2011). As duas abordagens mais comuns para amortecimento numérico, discutidas a seguir, são realizá-lo em função da força atuante na partícula (não-viscoso) ou da massa da partícula (viscoso).

2.1.6.3.1 AMORTECIMENTO VISCOSO (NA MASSA)

Cundall & Strack (1979a) propuseram um sistema de amortecimento global que pode ser visto como amortecedor com êmbolo conectando todas as partículas a um ponto de referência. O amortecimento que a partícula sofre é proporcional à sua massa e é determinado segundo o seguinte procedimento (BARDET, 1998):

$$Ma^t + Cv^t = F^t \quad 2.32$$

em que M e C são as matrizes de massa e amortecimento e a^t , v^t e F^t são os vetores de aceleração, velocidade e forças. Assumindo que a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa,

$$C = \lambda_d M \quad 2.33$$

e aplicando o esquema de integração *leapfrog* tem-se

$$M \frac{(v^{t+\Delta t} - v^{t-\Delta t})}{\Delta t} + \alpha M \frac{(v^{t+\Delta t} - v^{t-\Delta t})}{2} = F^t \quad 2.34$$

que, segundo BARDET (1998), é equivalente à equação de relaxação dinâmica

$$v^{t+\Delta t} = v^{t-\Delta t} \left(\frac{1 - \lambda_d \Delta t/2}{1 + \lambda_d \Delta t/2} \right) + \left(\frac{\Delta t}{1 + \lambda_d \Delta t/2} \right) M^{-1} F^t \quad 2.35$$

Uma limitação dessa abordagem é que ela introduz forças de corpo, que podem ser errôneas em regiões de fluxo e podem influenciar os modos de falha. Outra desvantagem é que o valor ótimo de λ_d depende dos autovalores da matriz de rigidez. Por fim, o amortecimento é igualmente aplicado a todas as partículas, porém quantidades diferentes de amortecimento podem ocorrer em diferentes regiões (CUNDALL, 1987).

2.1.6.3.2 AMORTECIMENTO NÃO-VISCOSO (NA FORÇA)

A ideia básica dessa abordagem é diminuir as forças que aumentam as velocidades das partículas, e vice-versa, comparando os atuais sentidos da aceleração e da velocidade das partículas. Isso é feito nas três componentes ortogonais, o que o leva a um comportamento não físico dessa forma de amortecimento, já que não é invariante com respeito à rotação do sistema de coordenadas (ŠMILAUER, et al., 2015). Essa abordagem é calculada por

$$\frac{\Delta F_d^t}{F^t} = -\lambda_d \operatorname{sign} \left(F^t \left(v^{t-\Delta t/2} + \frac{a^t \Delta t}{2} \right) \right) \quad 2.36$$

em que λ_d é o coeficiente de amortecimento. Essa formulação apresenta as vantagens de atuar nas forças (acelerações) sem restringir o movimento uniforme; é independente das autofrequências da partícula, uma vez que são amortecidas igualmente; necessita apenas do parâmetro λ_d , que não precisa ter mudança de escala (ŠMILAUER, et al., 2015). Outra vantagem dessa abordagem é que não surgem forças de amortecimento errôneas (ITASCA, 2004).

2.1.6.4 CONSIDERAÇÕES DE ESTABILIDADE

De forma a garantir estabilidade para o esquema de integração explícito deve-se impor um limite superior ao passo de tempo:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad 2.37$$

em que ω_{max} é a maior autofrequência do empacotamento. Em sistemas massa-mola esse caso ocorre quando duas massas, m_i e m_j , interconectadas estão se movimentando em sentido contrário; supondo que elas apresentam velocidades iguais e estão conectadas por uma mola de

rigidez K_i , o deslocamento Δx_i da partícula i será acompanhado do deslocamento $\Delta x_j = -\Delta x_i$ na partícula j , o que leva a $\Delta F_i = -K_i(\Delta x_i - (-\Delta x_i)) = -2K_i\Delta x_i$ (ŠMILAUER, et al., 2015). Isso resulta em

$$\omega_{max} = \max \sqrt{\frac{2K_i}{m_i}} \quad 2.38$$

Assim, o passo de tempo crítico é determinado por

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\max \sqrt{\frac{2K_i}{m_i}}} = \sqrt{2} \min \sqrt{\frac{m_i}{K_i}} \quad 2.39$$

A equação 2.39 pode ser aplicada para todos os 6 graus de liberdade (3 de translação e 3 de rotação) pelo uso das matrizes generalizadas de massa e rigidez, M e K , e substituindo as frações m_i/K_i pelos autovalores da matriz $M K^{-1}$.

2.2 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Em vários problemas geotécnicos as condições de deformação do meio levam a considerar o caso como estado plano de deformações. Neste estado a deformação do solo é considerada como nula em uma direção e o solo é livre para se deformar nas outras duas direções (ALABDULLAH, 2010). Somado ao fato de que o estado de deformação de vários problemas pode ser aproximado a um plano, problemas desse tipo podem ser melhor entendidos em campo por meio de ensaios no estado plano de deformações (WANATOWSKI, 2005).

O uso dos parâmetros de cisalhamento advindos do ensaio triaxial axissimétrico levam, na maioria dos casos a resultados conservadores (KO & DAVIDSON, 1973). Mas, em alguns casos, os resultados não são tão conservadores quanto se acredita. Solos cisalhados em condições planas de deformação são altamente susceptíveis a imperfeições. Isso leva à instabilidade do material ou bifurcação, em que a ruptura repentina pode ocorrer muito mais cedo do que observado nos ensaios triaxiais axissimétricos. (MARACHI, et al., 1981; LEE, 1970; e PETERS, et al., 1988). A Figura 2.17 apresenta diferenças entre os dois estados de carregamento. ODA, et al. (1978), estudando o efeito do ângulo de repouso em areias, mediram a tensão principal intermediária e mostraram que ela cresce gradualmente até que o pico de resistência seja atingido, decrescendo após esse ponto, como mostrado na Figura 2.18.

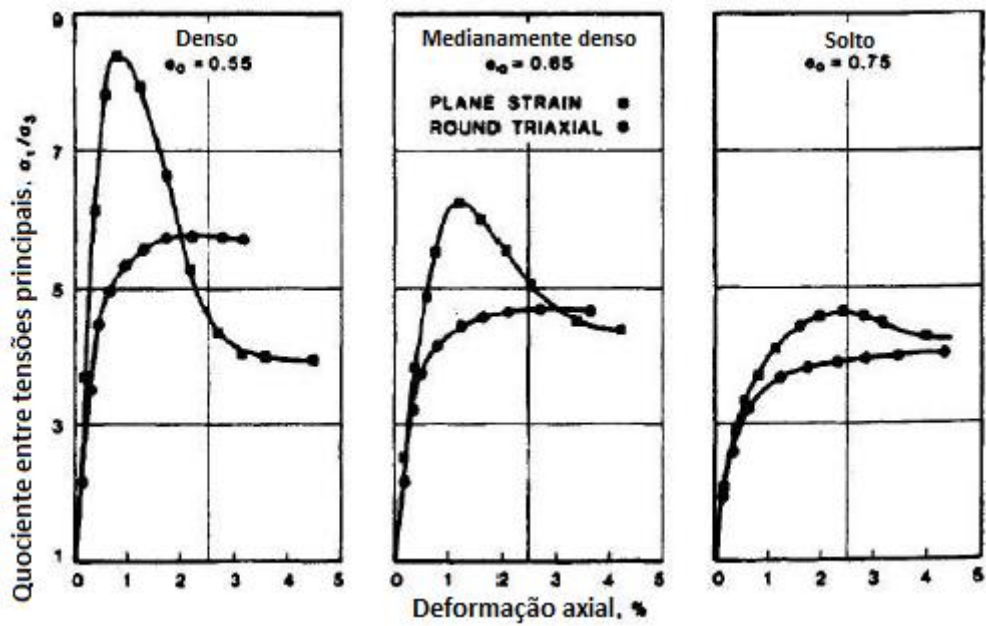


Figura 2.17 – Diferenças entre ensaios triaxiais e no estado plano de deformações (MARACHI, et al., 1981)

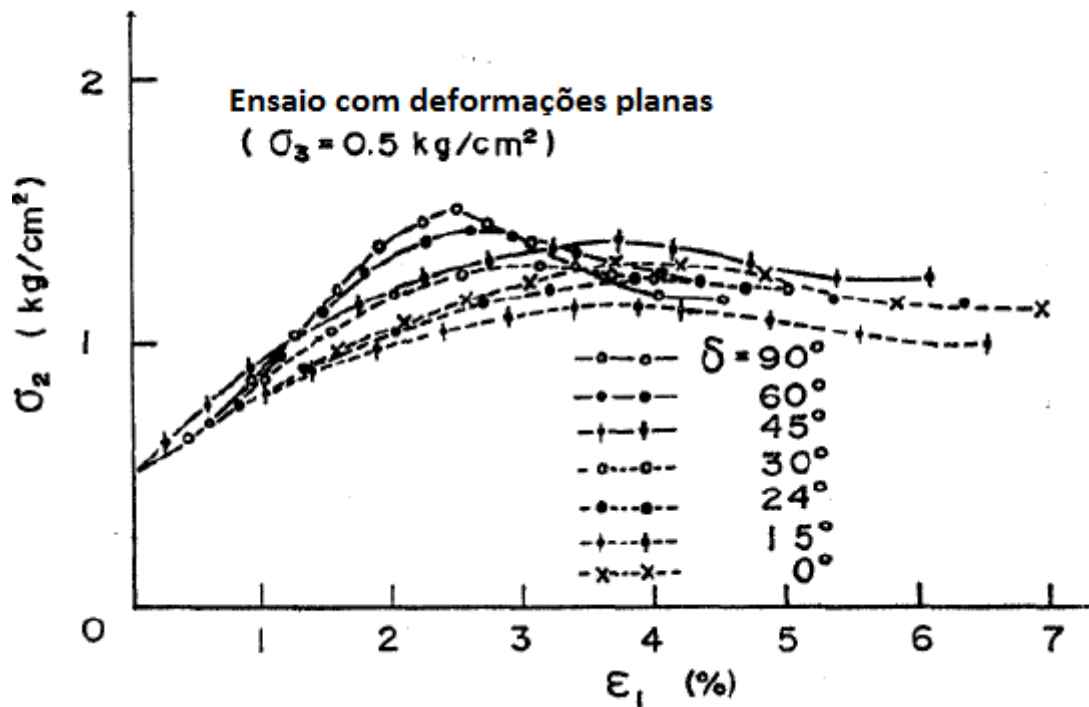


Figura 2.18 – Efeito do ângulo de repouso na tensão principal intermediária (ODA, et al., 1978)

Ensaio em areias densas e homogêneas sob condições planas de deformação apresentam maiores resistências e menores deformações axiais na ruptura quando comparados a ensaios triaxiais convencionais (MARACHI, et al., 1981). Vários autores, contudo,

observaram que as diferenças no ângulo de atrito do solo para os casos de compressão triaxial e deformação plana são pequenas ou nulas para solos soltos. A mesma observação vale para o ângulo de atrito no estado crítico (GEORGIADIS, et al., 2004).

Os resultados de CORNFORTH (1961), apresentados na Figura 2.19, também indicam que o pico de resistência, no estado plano de tensões, ocorre para valores menores de deformação axial e com valores maiores da tensão axial, além de mostrar que os ensaios triaxiais convencionais apresentam maior dilatância na ruptura e que a variação volumétrica das amostras tende a convergir para materiais mais soltos.

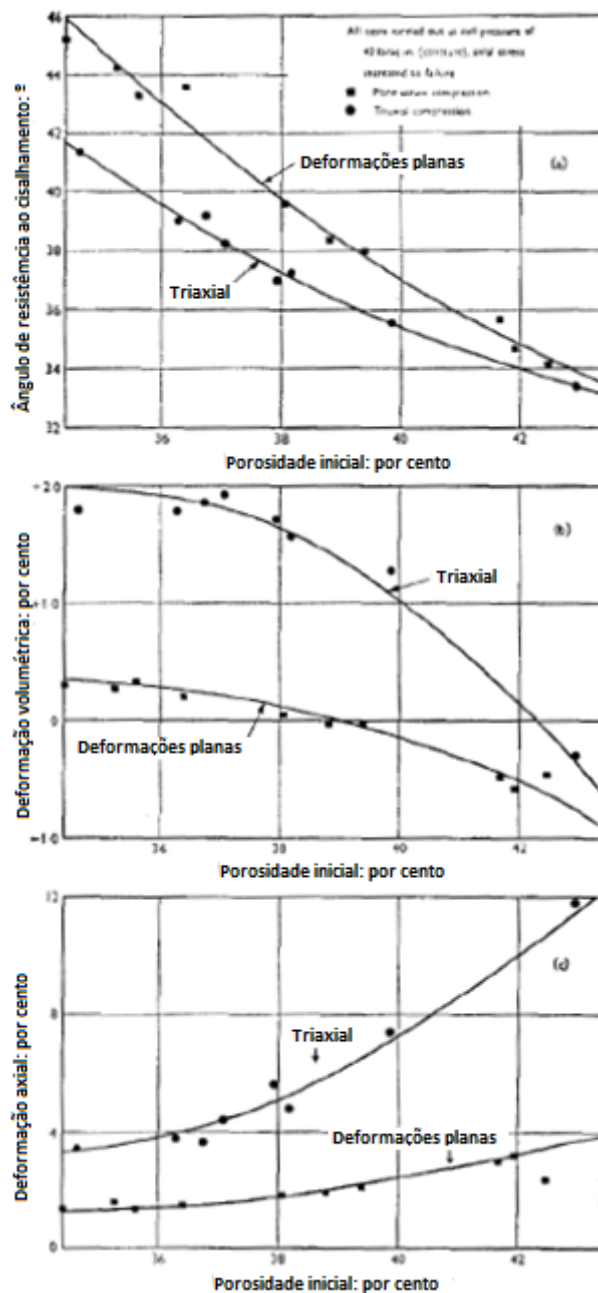


Figura 2.19 – Características da ruptura nos ensaios triaxial e biaxial no estado plano de deformações (CORNFORTH, 1961 - modificado)

2.2.1 LEI DE HOOKE PARA O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

De forma a permitir a análise no estado plano de deformações, em que as deformações na direção normal ao plano são consideradas desprezíveis ($\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$), a relação tensão-deformação de um material isotrópico é dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad 2.40$$

e sua inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad 2.41$$

O coeficiente de poisson, por sua vez, é equacionado por

$$\frac{d \varepsilon_{xx}}{d \varepsilon_{yy}} = \frac{-\nu}{1-\nu} \quad 2.42$$

2.3 DEFORMAÇÕES LOCALIZADAS EM MATERIAIS GRANULARES

Vários métodos teóricos e numéricos foram desenvolvidos para estudar a formação da banda de cisalhamento e de deformações localizadas em materiais granulares, como a teoria da bifurcação. Segundo essa teoria o contínuo se divide em três regiões ao início das deformações localizadas, sendo duas delas compostas por blocos de grãos e a outra caracterizada pela banda de cisalhamento. Quando o solo é cisalhado, as deformações usualmente se localizam em zonas finas e com forças cisalhantes muito intensas. Essas zonas são chamadas de bandas de cisalhamento e são geralmente descritas por sua espessura e ângulo de inclinação (ALABDULLAH, 2010; LO, et al., 2000).

Os trabalhos de WANATOWSKI (2005) e HAN & VARDOULAKIS (1991) mostram que bandas de cisalhamento não são observadas em amostras com altas porosidades. Contudo, outros trabalhos como ALABDULLAH (2010) apontam no outro sentido, em que as bandas de cisalhamento ocorrem em materiais granulares independentemente de sua porosidade.

3 METODOLOGIA

A natureza granular dos solos está por trás de suas características complexas e o completo entendimento desse material deve incluir análises na escala das partículas (O'SULLIVAN, 2014). Neste capítulo são abordados os dados e procedimentos utilizados nos ensaios numéricos. Primeiramente, gerou-se a amostra a ser estudada por meio de algoritmo dinâmico, a partir de granulometria e porosidade previamente definidas. Posteriormente realizou-se simulações numéricas em DEM de ensaios oedométricos com a finalidade de determinar a curva de consolidação do meio em função do ângulo de atrito da partícula. Por fim, a mesma amostra foi submetida a outra bateria de simulações numéricas com o DEM, desta vez por meio de ensaios biaxiais, para que suas propriedades macroscópicas fossem determinadas.

3.1 MATERIAL ESTUDADO

O primeiro passo antes de qualquer simulação numérica é a definição de todos os parâmetros de entrada do problema. Para tanto é necessário saber como o material estudado se comporta de forma macroscópica, tornando possível a calibração dos parâmetros do modelo para que as simulações resultem nos comportamentos esperados. Contudo, alguns dos dados de entrada das simulações (como granulometria, densidade dos grãos, densidade do meio e porosidade) são propriedades físicas do solo, o que torna desnecessária sua calibração uma vez que são facilmente obtidas em ensaios laboratoriais.

O material estudado nessa dissertação é uma areia grossa. Essa granulometria foi escolhida para que preenchesse a célula biaxial com número razoável de partículas do ponto de vista computacional. Segundo a NBR 6502:1995 da ABNT, uma areia grossa possui grãos com diâmetros entre 0,6 e 2mm. Contudo, esse valor pode ser ligeiramente diferente em outras classificações, como mostrado na Tabela 3.1. Esse intervalo está compreendido entre as peneiras números 10 (série intermediária) e 30 (série normal). Optou-se, contudo, por trabalhar apenas com peneiras da série normal, o que substitui a peneira nº 10 pela peneira nº 8 e limita a escala do material estudado a 0,6-2,4mm. Optou-se por utilizar uma distribuição com apenas 7 intervalos, igualmente espaçados, como mostrado na Tabela 3.2 e na Figura 3.1. Ressalta-se que a distribuição granulométrica utilizada não possui os diâmetros intermediários de partículas, razão pela qual seu formato não é suavizado e se assemelha a uma escada. Além

disso, ela possui coeficientes de curvatura e uniformidade iguais a 0.88 e 1.42, respectivamente, indicando que o meio é uniforme e mal graduado.

Tabela 3.1 – Areia grossa em várias classificações

Sistema	ABNT	MIT	ASTM	AASHTO	USCS
Areia grossa [mm]	0.6 – 2.0	0.6 – 2.0	2.0 – 4.75	0.425 – 2.0	2.0 – 4.75

Tabela 3.2 – Granulometria utilizada nos ensaios

Diâmetros	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
% Acumulada	0.1	7.3	41.3	76.8	93.5	98.5	100

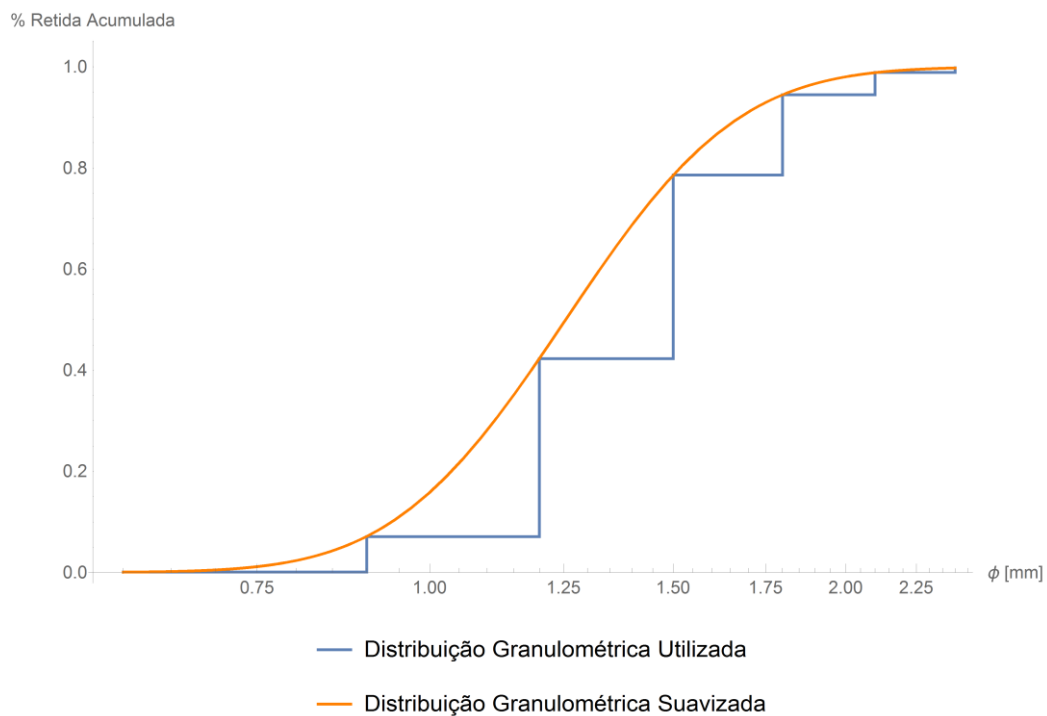


Figura 3.1 – Distribuição granulométrica utilizada nas simulações

As propriedades físicas (porosidade e densidade), de resistência (ângulo de atrito) e de deformação (módulo de Young e coeficiente de Poisson) esperadas para as areias são altamente variáveis. Vários pesquisadores buscam correlações entre esses parâmetros para baratear o custo da campanha de ensaios em projetos, mas as correlações apresentam dispersões muito

altas e, conseqüentemente, significância baixa. Apesar disso, é importante ter consciência da ordem de grandeza esperada para os parâmetros supracitados, razão pela qual essa dissertação fará uso das correlações apresentadas na literatura. Uma exceção a essa regra é o fato de a porosidade e a densidade do meio possuírem correlação direta por meio da densidade do grão, como mostrado na equação

$$\rho_{meio} = \rho_{grão}(1 - n) \quad 3.1$$

em que n é a porosidade. Como a densidade dos grãos de solos inorgânicos varia de 2.6 a 2.8 kN/m³, pode-se fixar seu valor e calcular a densidade do meio em função da porosidade ou vice-versa. A Tabela 3.3 a seguir, construída com dados encontrados em LOCK (2014) e com a hipótese de $\rho_{grão} = 2.6$ kN/m³, apresenta os valores esperados para as propriedades citadas.

Tabela 3.3 – Ordem de grandeza das propriedades da areia (LOCK 2014 - modificado)

Descrição	Densidade Seca [kN/m ³]	Porosidade	ϕ [°]	E [MPa]	ν
Areia muito solta	14	0.462	27-32	< 5	0.3
Areia solta	14 (uniforme)	0.384 - 0.462	27-32	3 - 10	0.3
	16 (bem graduada)				
Areia medianamente densa	17	0.346	32-37	8 – 30	0.3
Areia densa	18 (uniforme)	0.269 - 0.308	37-42	25 – 50	0.3
	19 (bem graduada)				
Areia muito densa	21	0.192	42-47	40 - 100	0.3

3.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para as simulações numéricas é necessário, primeiramente, definir o software responsável por sua execução. Em seguida, modela-se o problema de contorno no ambiente computacional, insere-se os valores dos parâmetros de entrada e inicia-se a simulação. As análises com elementos discretos possuem número elevado de *inputs*, tornando a calibração um

processo bastante lento, geralmente sendo a etapa que demanda mais tempo em resoluções de problemas de contorno.

3.2.1 SOFTWARE UTILIZADO

Para a execução das simulações numéricas optou-se pelo software de código aberto denominado Yade, sigla que vem do nome *Yet Another Dynamic Engine*. Este software, desenvolvido na linguagem C++, consiste num conjunto de bibliotecas que são utilizadas para formar os *scripts* que definem as simulações. Essa forma de codificação permite a implementação independente de novas funções, modelos e interfaces ao YADE. Apesar de desenvolvido em C++ o software possui suporte a Python, o que significa que os *scripts* podem ser escritos em qualquer uma das linguagens, inclusive com mistura das duas.

A escolha pelo Yade, em detrimento de outros softwares comerciais (como PFC, EDEM e STAR-CCM+) e não comerciais (LIGGGTHS e LAMMPS) foi baseada em 4 aspectos. O primeiro deles é a característica livre do software, o que permite sua instalação em vários computadores e, conseqüentemente, a simulação de vários casos em paralelo. Em segundo lugar, é possível alterar/implementar comportamentos para atender a demandas específicas que possam surgir. Essa implementação se faz em linguagem de fácil aprendizado, Python, sendo esse mais um motivo para a escolha desse software. Por fim, o Yade é bem documentado e conta com uma ampla comunidade para fins de suporte técnico e correção de partes defeituosas.

No software estão implementados vários dos algoritmos citados no capítulo 2. Dentre as condições de contorno, cita-se a possibilidade de uso de contornos periódicos e de paredes rígidas, com a adição de uma classe de partículas com formato paralelepípedo que, diferentemente das paredes rígidas, possui massa e pode sofrer a ação da gravidade ou de forças diretamente aplicadas, efeitos que não impactam nas paredes rígidas do software. Para a geração das amostras estão implementados os algoritmos de deposição gravitacional e de geração aleatória (com ou sem expansão). Quaisquer outros métodos precisam ser codificados em *script* específico para a geração de amostras ou mesmo executados em outros softwares e importados ao YADE posteriormente.

Dentre os modelos de partículas que podem ser utilizados estão as esferas, tetraedros, polígonos convexos e quaisquer agregados desses elementos. O principal algoritmo de detecção de contatos é o *Sweep and Prune*, contudo, também estão presentes algoritmos baseados em malhas (ainda não foram otimizados) e em triangulação. Quanto aos modelos de contato

implementados, 19 no total, estão presentes as formulações linear e de Hertz-Mindlin, além de outras que contemplam partículas de concreto, bolhas, comportamentos viscosos, inelasticidade e poliedros. A integração numérica é feita pelo método do *leapfrog*, como descrito na secção 2.1.6. O amortecimento numérico utilizado é do tipo não viscoso, e ocorre diretamente sobre as forças das partículas. Por fim, o passo de tempo é definido como uma porcentagem do passo crítico. Os dois principais algoritmos para tratar desse quesito se diferenciam apenas no fato de que um deles calcula o passo de tempo crítico ao começo da simulação e mantém esse valor até o final enquanto o outro o recalcula a intervalos pré-determinados, atualizando seu valor.

3.2.2 MODELO DE CONTATO E PARÂMETROS DA PARTÍCULA

Como dito anteriormente, o YADE conta com 19 tipos diferentes de modelos de contato. Optou-se pelo uso do modelo de Hertz-Mindlin com amortecimento nas duas direções, como representado na Figura 3.2. Nesse modelo as rigidezes das molas são calculadas pela formulação apresentada na secção 2.1.5.2. Já o comportamento do conjunto mola-amortecedor é determinado como na secção 2.1.5.3. A escolha desse modelo se embasou em dois critérios: o primeiro deles é o fato de o comportamento das molas ser não linear, incorrendo em um modelo de contato mais realista; o segundo é a presença elementos dissipadores de energia no contato, sendo possível diminuir a magnitude do amortecimento numérico utilizado no sistema. Para esse modelo são necessários os seguintes parâmetros: densidade, módulo de Young, coeficiente de Poisson, ângulo de atrito e coeficientes de restituição normal e tangencial. Esses dados de entrada, à exceção do ângulo de atrito, são os mesmos para todas as simulações numéricas e estão discriminados na Tabela 3.4. Os parâmetros dos contornos são os mesmos utilizados para as partículas, com exceção do módulo de Young que 10 vezes maior.

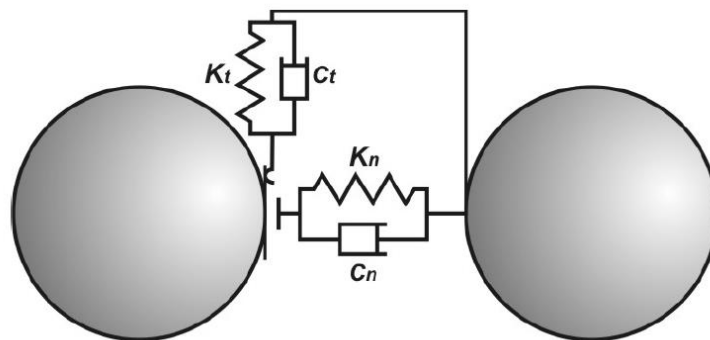


Figura 3.2 – Modelo utilizado nas simulações numéricas (FERREIRA, 2009)

Tabela 3.4 – Parâmetros do modelo constitutivo

Parâmetro		Geração da Amostra	Ensaio Oedométrico	Ensaio Biaxial
Densidade da partícula	ρ_p [kg/m ³]		2600	
Ângulo de atrito da partícula	ϕ_p [°]	15	{0, 5, 10, 15, 30, 45, 60, 75, 89}	
Módulo de Young da partícula	E_p [MPa]		800	
Coefficiente de Poisson da partícula	ν_p	0.25	{0, 0.25, 0.5}	0.25
Coefficientes de restituição normal e tangencial da partícula	e_p^N e_p^T		0.5 0.5	

3.2.3 GERAÇÃO DA AMOSTRA

O processo de geração da amostra, descrito no script do Anexo A, consistiu na aplicação do Método de Sub-Compactação de Jiang com algumas modificações. A primeira delas é o uso de um único índice de vazios alvo para cada camada, ao contrário da recomendação do uso de valores decrescentes. Além disso, no script desenvolvido, após a compactação da camada há uma etapa de descompressão lenta para que as esferas não sofram uma brusca variação de tensão, o que acarretaria no seu lançamento em direção contrária à da gravidade.

Os parâmetros numéricos utilizados para essa etapa estão descritos na Tabela 3.5. Todas as partículas geradas nesse processo estão alinhadas num mesmo plano, impedidas de se movimentar no sentido perpendicular ao plano, para que se possa trabalhar no estado plano de deformações. Ao final da etapa de geração e compactação das camadas executa-se tantos passos de tempo forem necessários para que o empacotamento se estabilize e então a amostra é exportada para que possa ser utilizada nos ensaios subsequentes. Com esse procedimento o empacotamento resultante é composto de exatas 3200 partículas e porosidade de 0.162.

Tabela 3.5 – Parâmetros utilizados na geração das amostras

Parâmetro		Valor
Amortecimento global	λ_d	0
Velocidade da compressão	v_{comp} [m/s]	10

Velocidade da descompressão	v_{desc} [m/s]	1
Dimensões da amostra	L [cm]	5
	C [cm]	10
Porosidade Alvo	n	0.16

3.2.4 ENSAIOS OEDOMÉTRICOS

A partir do empacotamento gerado iniciou-se a bateria de ensaios oedométricos. A codificação desses ensaios foi feita com o uso de três paredes fixas (inferior e laterais) e uma parede móvel (superior) utilizada para aplicar as cargas. O procedimento é semelhante a um ensaio convencional, em que se impõe uma tensão à amostra, espera-se a estabilização e impõe-se uma nova tensão de valor igual ao dobro da tensão anterior. Na simulação numérica a estabilidade é alcançada pela inexistência de forças desbalanceadas. Esse fator é calculado por

$$F_{desbalanceada} = \frac{\|\bar{F}_R\|}{\|\bar{F}_c\|} \quad 3.2$$

em \bar{F}_R é força resultante média atuante nas partículas e \bar{F}_c é a força média nos contatos. Em amostras estáveis a componente \bar{F}_R tende a zero, uma vez que as forças atuantes nas partículas se cancelam, portanto, menores valores de $F_{desbalanceada}$ significam maior estabilidade. Contudo, a força desbalanceada nunca chega a 0 devido à precisão finita dos computadores, o que leva à necessidade de definir um valor limite a partir do qual considera-se que a estabilidade foi atingida. Optou-se por considerar estáveis as amostras nas quais $F_{desbalanceada} \leq 0.01$.

Tabela 3.6 - Parâmetros utilizados nos ensaios oedométricos

Parâmetro	Valor
Amortecimento global	λ_d 0
Tensões aplicadas	σ_1 [kPa] $\left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 4, \\ \dots, 1024, \dots, \\ 16384, 32768 \end{array} \right\}$
Dimensões da amostra	L [cm] 5
	C [cm] 10

Todos ensaios foram iniciados com a tensão de 1 kPa e executados até a tensão de 32768 kPa ou 32.768 MPa, contemplando 16 estágios de carregamento. Com o objetivo de averiguar a influência do ângulo de atrito e do coeficiente de Poisson da partícula no comportamento do empacotamento, o ensaio foi executado variando-se esses parâmetros, como pode ser visto na Tabela 3.6. Foi possível, também determinar o módulo oedométrico, que será comparado com os valores obtidos nos ensaios biaxiais.

3.2.5 ENSAIOS BIAXIAIS

A última etapa, nessa dissertação, da avaliação da influência do ângulo de atrito dos grãos nos parâmetros macroscópicos do meio é a realização de ensaios biaxiais. Essa bateria de ensaios fez uso do mesmo empacotamento manipulado nos ensaios oedométricos. Nessas simulações as 4 paredes de contorno são móveis, permitindo que a tensão lateral (confinante) seja mantida constante enquanto aumenta-se o valor da tensão vertical. Este ensaio é composto de duas etapas: a primeira consiste em uma compressão hidrostática até que a tensão confinante seja atingida nas quatro paredes de contorno e a estabilidade seja assegurada; a segunda consiste no aumento gradual da tensão vertical até uma deformação de 25% da altura original do empacotamento. Neste ensaio são determinados o ângulo de atrito, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson macroscópicos do meio. A Tabela 3.7 apresenta os parâmetros utilizados nos ensaios biaxiais.

Tabela 3.7 - Parâmetros estudados nos ensaios triaxiais

Parâmetro		Valor
Amortecimento global	λ_d	0
Velocidade da compressão	v_{comp} [m/s]	0.1
Dimensões da amostra	L [cm]	5
	C [cm]	10
Tensões confinantes	$\sigma_c = \sigma_3$ [kPa]	{1, 5, 10, 50, 100, 500}

4 RESULTADOS E ANÁLISES

Neste capítulo serão apresentados e analisados os resultados das simulações numéricas e os valores macroscópicos calculados para as amostras serão comparados com resultados da literatura, apresentados na Tabela 3.3. Sempre que possível, correlações entre os parâmetros microscópicos e macroscópicos são equacionadas, permitindo o entendimento da influência do comportamento micro no macro.

4.1 ENSAIOS OEDOMÉTRICOS

Um total de 27 simulações oedométricas foi realizado. Uma primeira análise dos resultados dessa bateria de ensaios se faz por meio das curvas ϵ_y x σ_y , representadas pela Figura 4.1, construída a partir da média dos valores obtidos com os diferentes coeficientes de Poisson.

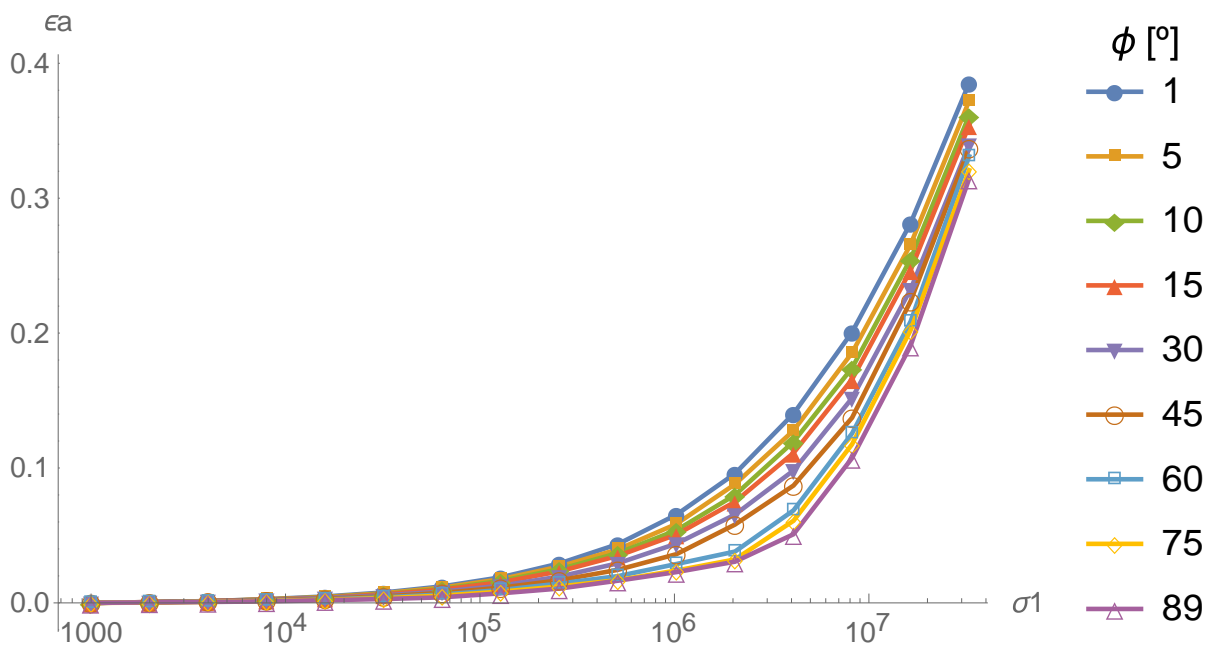


Figura 4.1 - Curva tensão-deformação do ensaio oedométrico

Como pode ser visto na Figura 4.1, a variação do ângulo de atrito impacta significativamente na deformação sofrida pela amostra. Isso se deve ao fato de as partículas necessitarem de maiores níveis de tensão para que o deslizamento relativo ocorra. Por outro lado, a variação no coeficiente de Poisson pouco afetou o resultado final, razão pela qual a influência desse parâmetro não foi estudada nos ensaios biaxiais. Observa-se, também, que a deformação vertical atingiu valores elevados, da ordem dos 40%. Na prática o nível de tensões

aplicado causaria a quebra dos grãos, que poderia resultar em valores ainda maiores para a deformação vertical, em função de uma maior capacidade de ocupação dos vazios pelos grãos pequenos. Assim, simulações envolvendo altos níveis de tensões devem incluir modelos de quebra de partículas para que os resultados sejam realistas. Exemplos desses modelos podem ser encontrados em CIANTIA, et al. (2015),

A partir das curvas de adensamento, e x σ_y é possível determinar os parâmetros κ ou C_r (inclinação do trecho de recompressão) e λ ou C_c (inclinação do trecho de compressão virgem) do material, assim como a tensão de pré-adensamento da amostra, esta última determinada pelo método de Pacheco Silva (1970), Figura 4.2. Os valores calculados para esses índices estão apresentados nas Tabela 4.1 e Tabela 4.2.

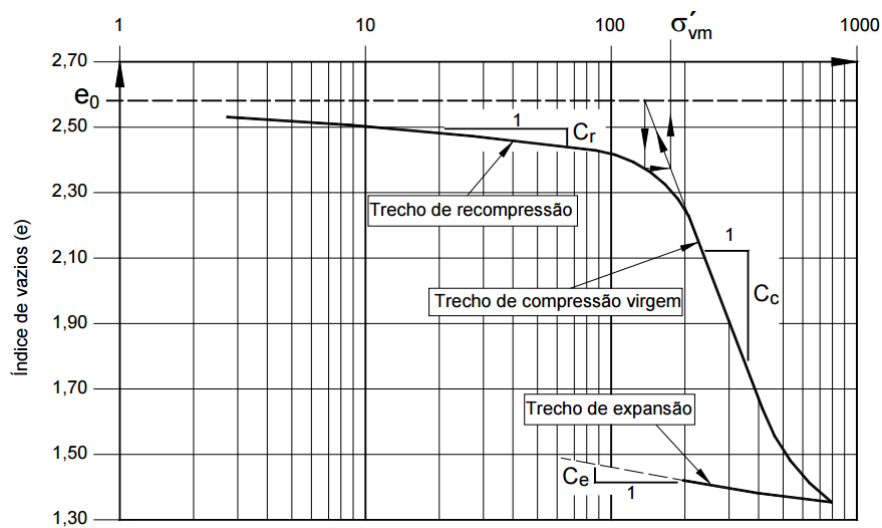


Figura 4.2 – Método de Pacheco Silva

Tabela 4.1 – Valores de κ em função de ν e ϕ_{micro}

$\phi [^\circ] \setminus \nu$	0	0,25	0,5
1	0.0021	0.0022	0.0017
5	0.0020	0.0019	0.0016
10	0.0019	0.0018	0.0016
15	0.0017	0.0017	0.0015
30	0.0016	0.0015	0.0015
45	0.0014	0.0013	0.0013
60	0.0010	0.0012	0.0010
75	0.0009	0.0010	0.0010
89	0.0009	0.0010	0.0006

Tabela 4.2 - Valores de λ em função de ν e ϕ_{micro}

$\phi [^\circ] \setminus \nu$	0	0,25	0,5
1	0.080	0.079	0.070
5	0.072	0.070	0.064
10	0.071	0.070	0.062
15	0.067	0.064	0.056
30	0.061	0.056	0.051
45	0.053	0.046	0.050
60	0.080	0.060	0.018
75	0.030	0.049	0.069
89	0.030	0.017	0.058

Como pode ser visto, os valores de κ são decrescentes quanto maiores o ângulo de atrito da partícula do material. Já para λ há um aumento do valor com o aumento do ângulo de atrito microscópico. A relação entre esses parâmetros pode ser vista nas Figura 4.3 e Figura 4.4 e é aproximada pelas equações 4.1 e 4.2, para valores de R^2 de 0.99 e 0.91 respectivamente.

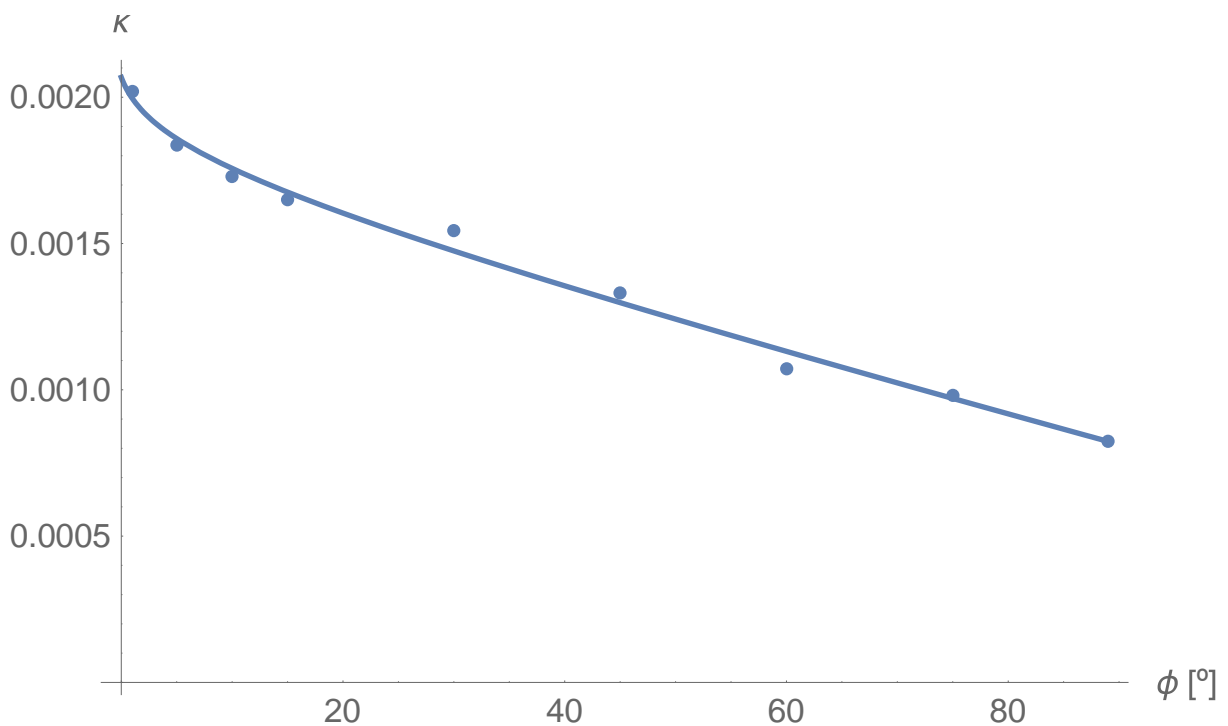


Figura 4.3 – Valor de κ em função de ϕ_{micro}

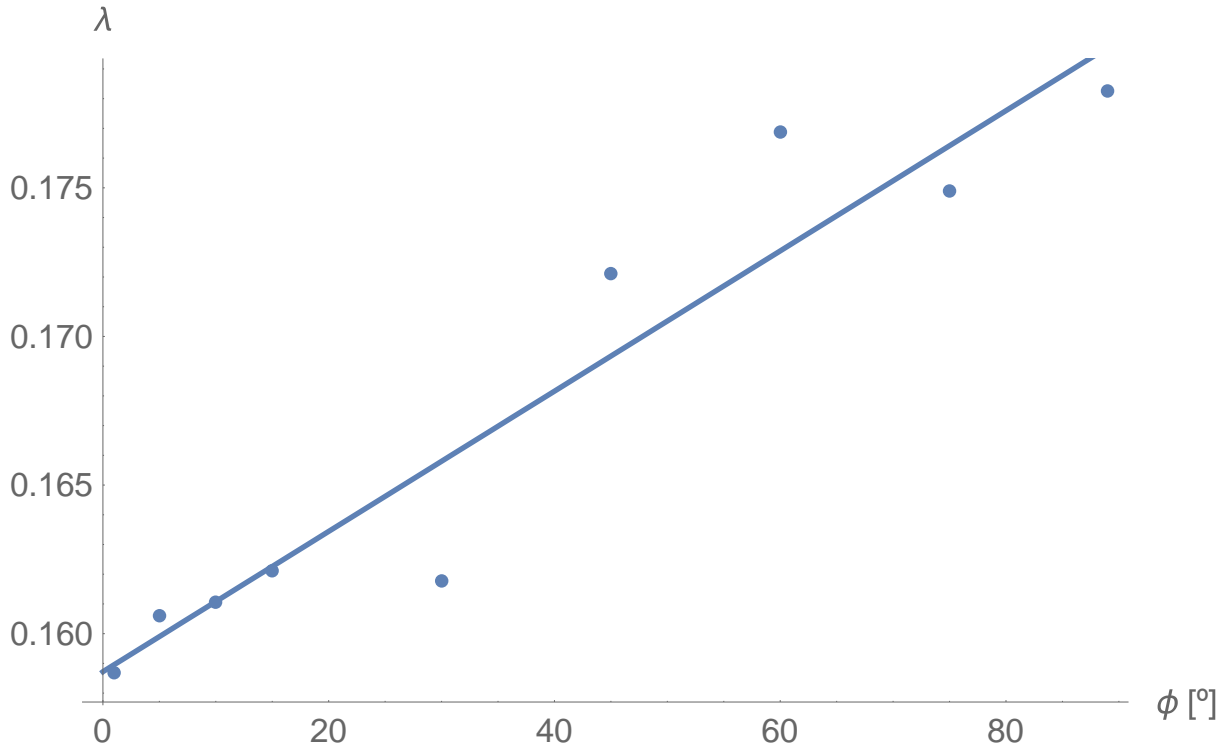


Figura 4.4 – Valor de λ em função de ϕ_{micro}

$$\kappa = 0.002 - 9.4 \times 10^{-6} \phi_{micro} + 9 \times 10^{-5} \text{Log}(\phi_{micro} + 1) \quad 4.1$$

$$\lambda = 0.1587 + 2.36 \times 10^{-4} \phi_{micro} \quad 4.2$$

O coeficiente κ é uma medida somente da compressibilidade elástica, enquanto que λ é uma medida elasto-plástica. Na Figura 4.5 mostra-se a relação $(\lambda - \kappa)/\kappa$, que dá uma medida da parcela plástica em relação à elástica. A relação entre esse fator e o ângulo de atrito microscópico, com R^2 de 0.97 é descrita por

$$\frac{\lambda - \kappa}{\kappa} = 73.174 + 1.466 \phi_{micro} \quad 4.3$$

Assim, a parcela de compressibilidade plástica é muito mais relevante que a elástica, e aumenta com o aumento do atrito interparticular. O valor inicial de 73.174 para $\phi_{micro} = 0^\circ$ provavelmente está relacionado ao rolamento irreversível entre as partículas. Vale ressaltar que nenhum atrito ao rolamento foi usado nessa dissertação.

Seguindo a mesma linha de parâmetros κ e λ tensão de pré-adensamento, apresentada na Tabela 4.3, possui relação direta com o ângulo de atrito microscópico, dada em média por

$$\sigma_{ocr} = 2233.35 + 24.60 \phi_{micro} \quad 4.4$$

com R^2 de 0.98. Isso indica que a tensão de pré-adensamento aumenta com o ângulo de atrito como ilustrado nas Figura 4.6 e Figura 4.7. Caso seja normalizada, a expressão 4.4 implica numa variação de 1,5% do valor tensão de pré-adensamento inicial para cada aumento de um grau no ângulo de atrito entre partículas. O índice de vazios inicial calculado foi de 0.193.

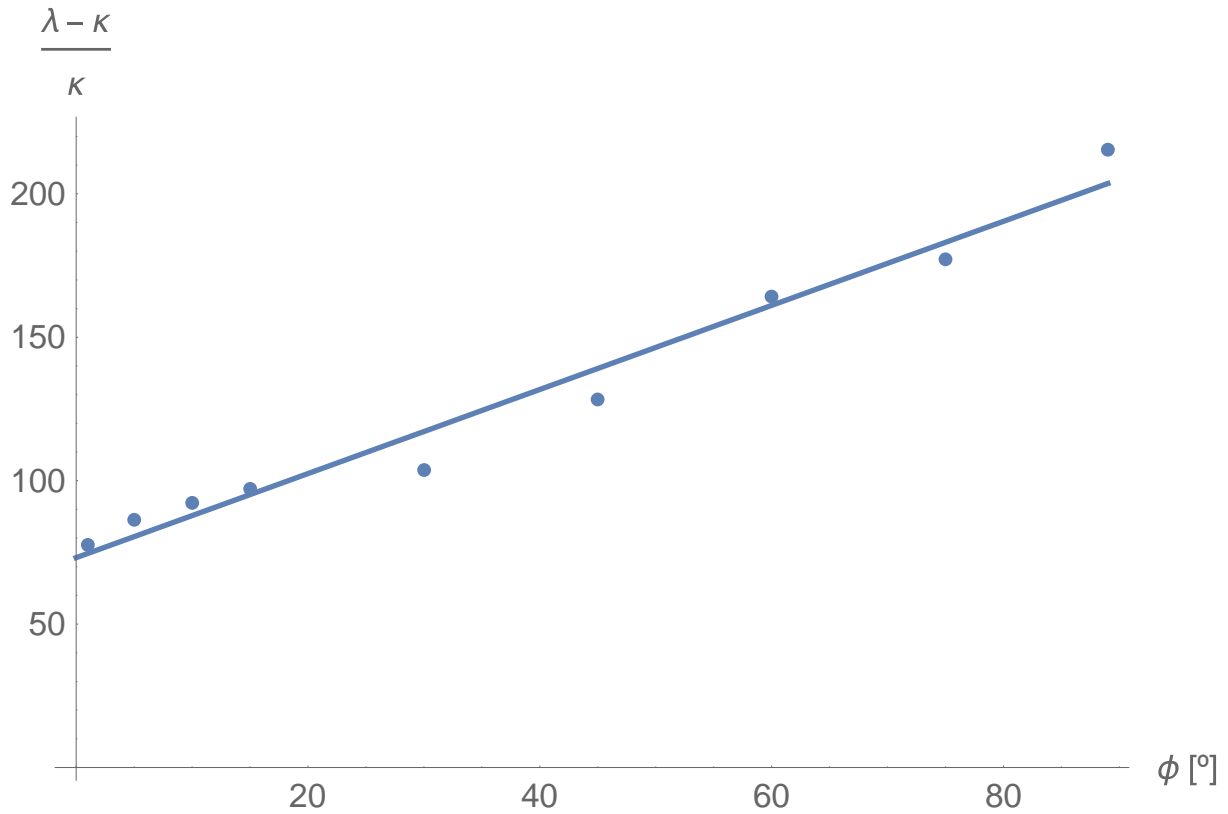


Figura 4.5 – Relação entre as parcelas plástica e elástica em função de ϕ_{micro}

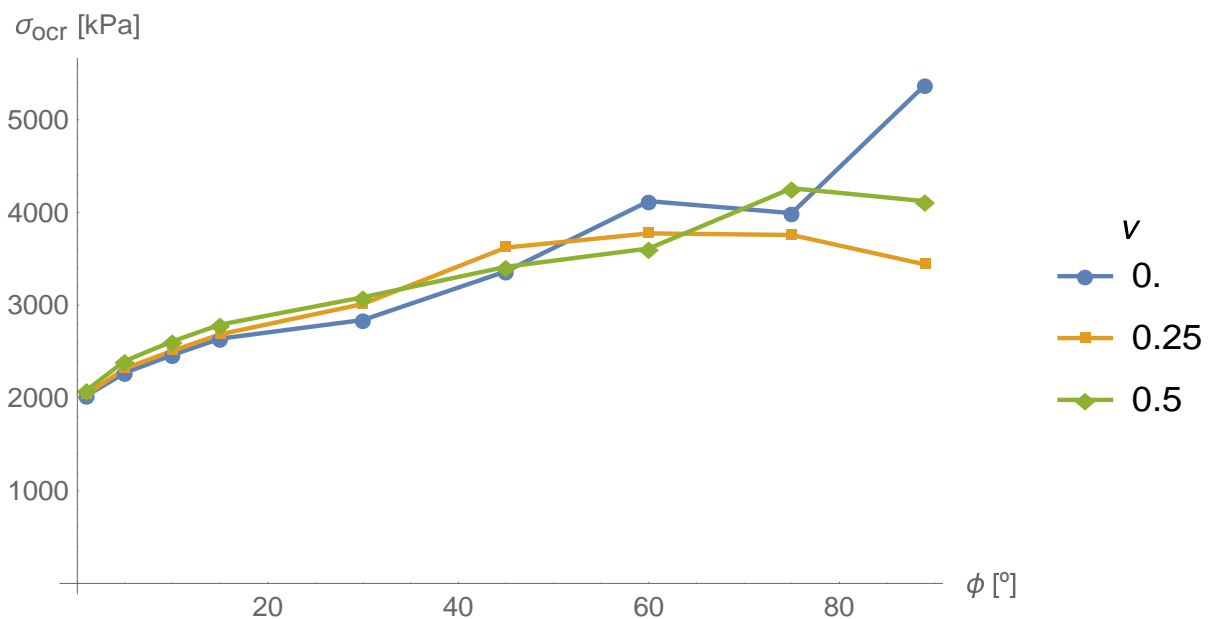


Figura 4.6 Relação entre σ_{ocr} e ϕ_{micro} para os valores de ν

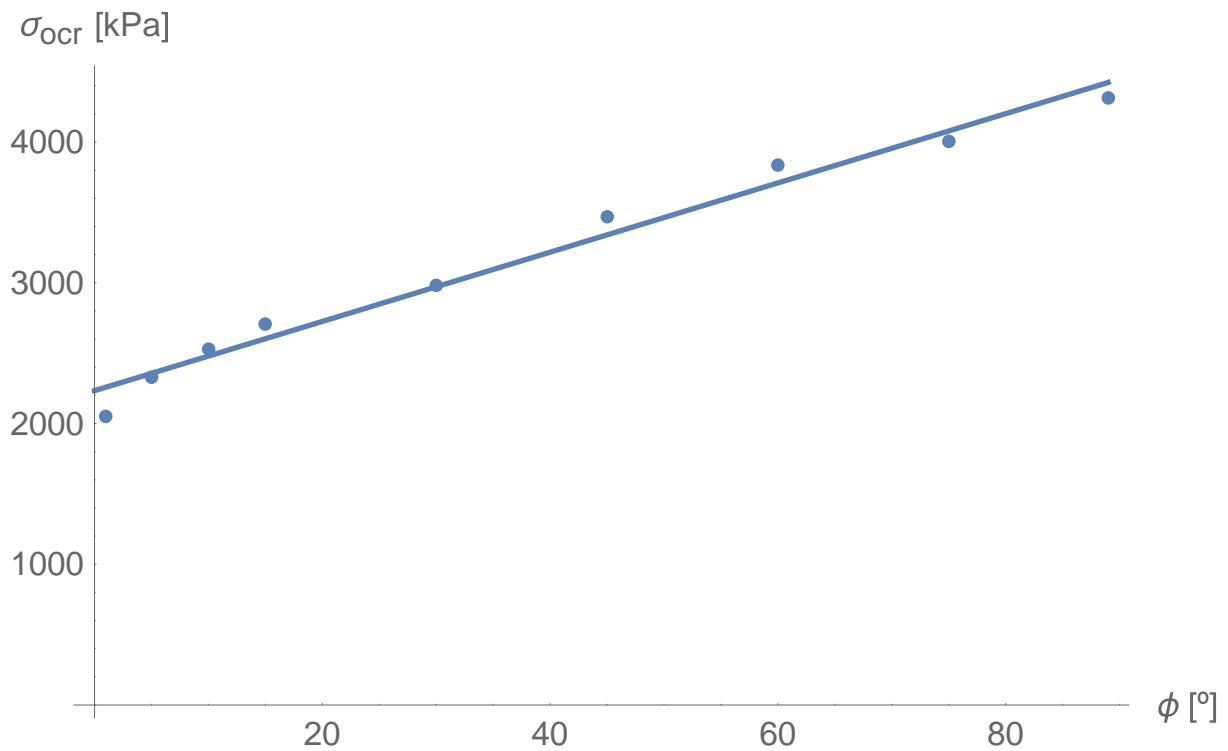


Figura 4.7 – Relação média entre a tensão de pré-adensamento das amostras e ϕ_{micro}

Tabela 4.3 - Valores de σ_{ocr} em função de ν e ϕ_{micro}

ϕ [°] \ ν	0	0,25	0,5
1	2712,9	2597,6	2879,0
5	3096,6	3125,0	3205,8
10	3232,2	3335,8	3538,7
15	3601,1	3414,6	3764,2
30	3588,7	4174,4	3955,5
45	4813,1	4632,2	3716,7
60	4335,5	6464,9	4931,7
75	5386,6	5561,6	4673,7
89	5190,2	5306,0	7101,9

Como as curvas tensão-deformação do ensaio oedométrico não possuem derivada constante, o módulo oedométrico não é único, variando ao longo da execução do ensaio. Janbu (1963), estudando a compressibilidade dos solos com ensaios oedométricos e triaxiais, propôs uma equação que correlaciona o módulo de Young tangente inicial do ensaio triaxial convencional com a tensão confinante. Essa equação tem a forma

$$\frac{E_i}{Pa} = K \left(\frac{\sigma_c}{Pa} \right)^n \quad 4.5$$

em que K e n são parâmetros adimensionais e Pa é a pressão atmosférica. Ao plotar os módulos oedométricos calculados nos pontos do ensaio em função da tensão confinante medida, observa-se que a relação semelhante à equação 4.5 também é válida para E_{oed} ao longo de toda a simulação, e não apenas para valores iniciais do ensaio triaxial, como mostrado nas Figura 4.8 e Figura 4.9.

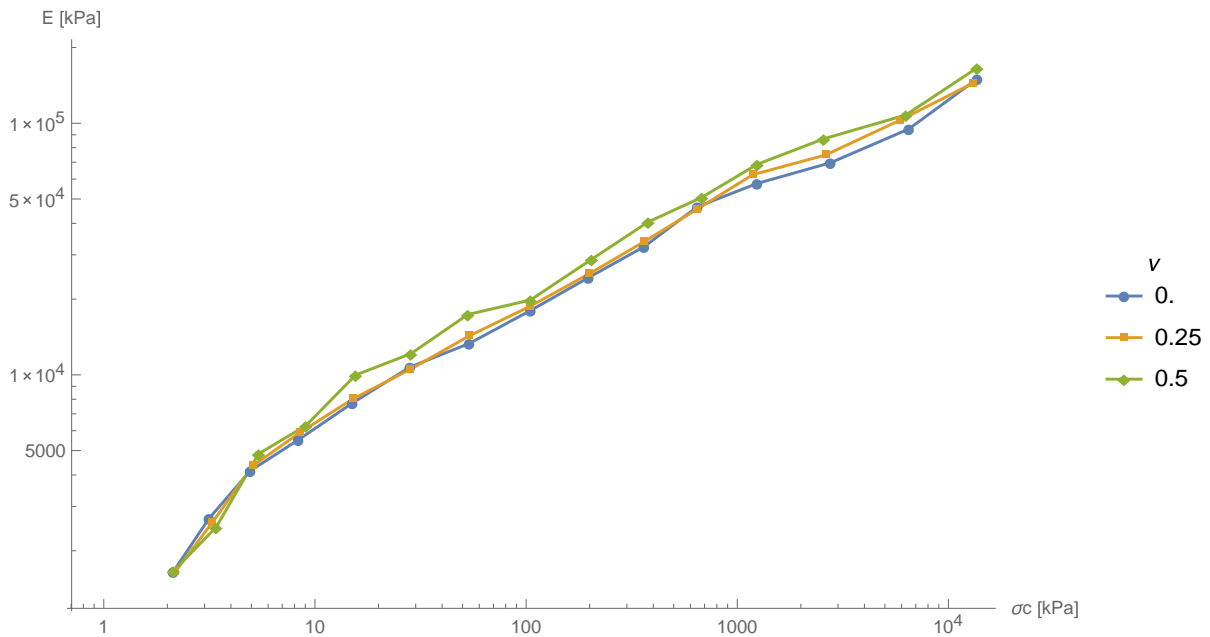


Figura 4.8 – Módulo de Young da amostra em função da tensão confinante para $\phi = 30^\circ$

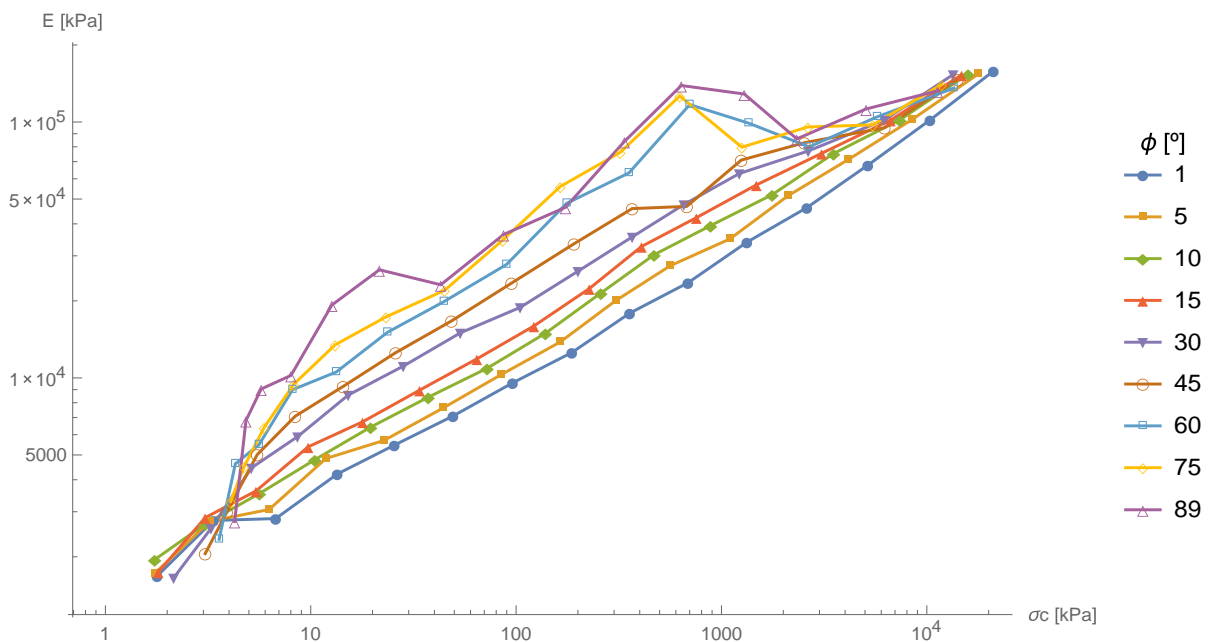


Figura 4.9 – Módulo de Young da amostra em função da tensão confinante

Aplicando essa equação aos conjuntos de pontos pode-se determinar os parâmetros \hat{K} e \hat{n} (o acento foi usado para distinguir dos parâmetros relativos ao módulo de Young) em função do ângulo de atrito microscópico, como mostrado na Tabela 4.4 juntamente com o coeficiente R^2 da regressão.

Tabela 4.4 – Parâmetros da equação de proposta para os vários ângulos de atrito microscópicos do ensaio oedométrico

ϕ [°]	1	5	10	15	30	45	60	75	89
\hat{K}	77.89	107.46	136.11	161.83	203.85	252.22	379.15	419.76	472.04
\hat{n}	0.560	0.513	0.478	0.451	0.409	0.353	0.270	0.262	0.242
R^2	0.996	0.996	0.996	0.994	0.993	0.980	0.868	0.869	0.816

A partir dos resultados apresentados na Aplicando essa equação aos conjuntos de pontos pode-se determinar os parâmetros \hat{K} e \hat{n} (o acento foi usado para distinguir dos parâmetros relativos ao módulo de Young) em função do ângulo de atrito microscópico, como mostrado na Tabela 4.4 juntamente com o coeficiente R^2 da regressão.

Tabela 4.4, é possível notar que há relação entre o ângulo de atrito microscópico e os parâmetros do modelo de adotado. Portanto, esses pares de pontos foram organizados em gráficos, Figura 4.10 e Figura 4.11, dos quais foi possível notar que a relação entre ϕ_{micro} e \hat{K} é linear e que a relação entre ϕ_{micro} e \hat{n} é ligeiramente curva. Regressões para encontrar as equações que correlacionam essas variáveis foram feitas e, para um R^2 de 0.986 em ambas, obteve-se as seguintes formulações

$$\hat{K} = 170.688 + 5.41 \phi_{micro} \quad 4.6$$

$$\hat{n} = 0.55 - 0.0023 \phi_{micro} - 0.0314 \text{Log}(\phi_{micro} + 1) \quad 4.7$$

Mais uma vez observa-se que o coeficiente de Poisson tem influência muito pequena nos resultados, com valor de 0.5 levando a módulos oedométricos ligeiramente maiores que nos outros casos.

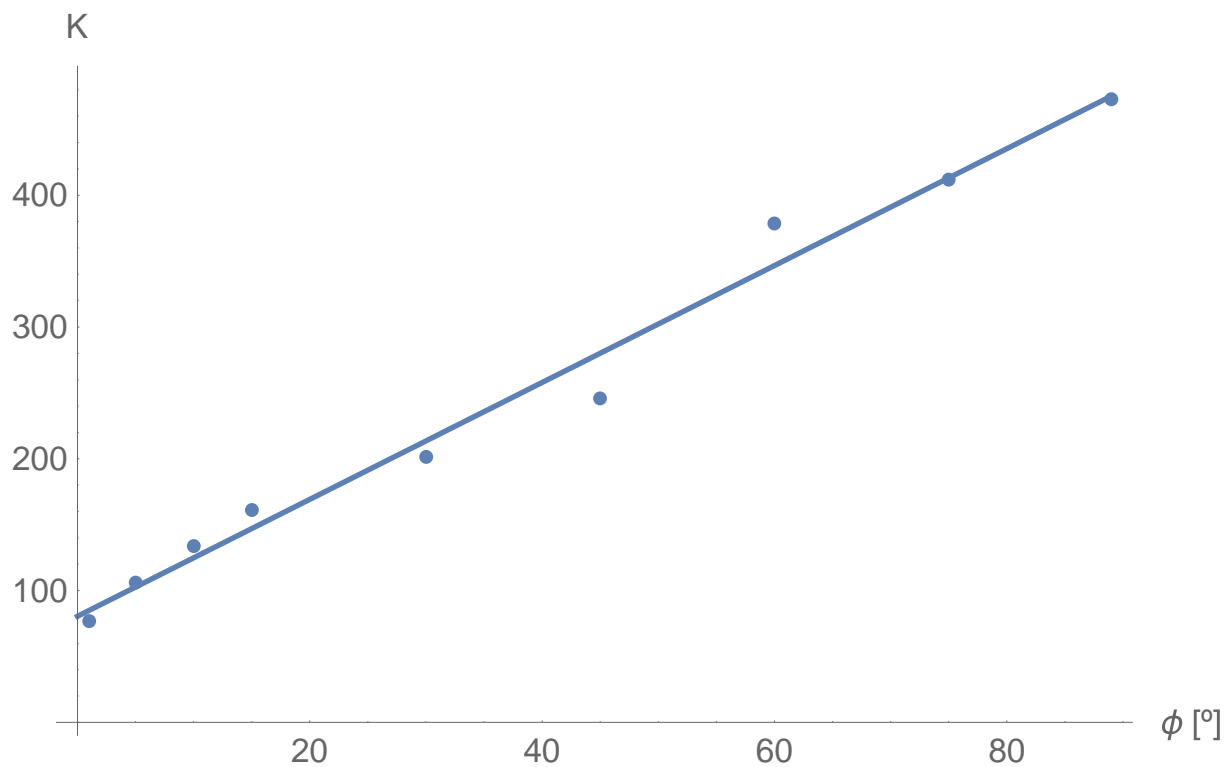


Figura 4.10 – Pontos e regressão dos parâmetros \hat{K} e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios oedométricos

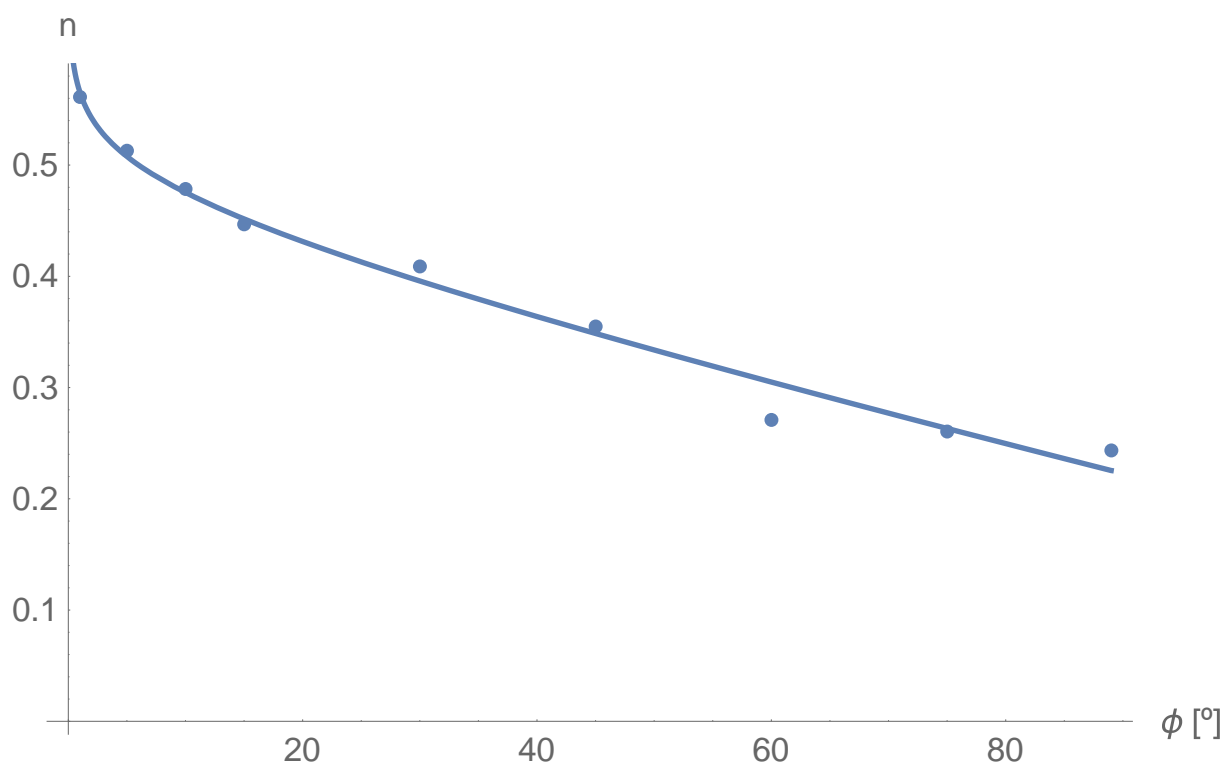


Figura 4.11 – Pontos e regressão dos parâmetros \hat{n} e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios oedométricos

Por fim, é interessante notar que para os casos de 60°, 75° e 89° a dispersão dos dados aumentou significativamente e a correlação da equação proposta diminuiu significativamente. Isso se deve ao fato de que para valores de ϕ_{micro} maiores que 45° a força tangencial precisa ser maior que a normal. Essa relação é de aproximadamente 1.73 vez para $\phi_{micro} = 60^\circ$, 3.73 vezes para $\phi_{micro} = 75^\circ$ e 57.29 vezes para $\phi_{micro} = 89^\circ$. Nesses casos, quando ocorre o deslizamento as partículas adquirem acelerações muito altas, causando perturbações locais e alterando a configuração do meio.

4.2 ENSAIOS BIAXIAIS

De forma semelhante aos ensaios oedométricos, executou-se uma bateria de 9 ensaios biaxiais, referentes aos valores dos ângulos de atrito estudados. O coeficiente de Poisson não foi variado uma vez que se mostrou que sua influência no resultado final não é significativa. Como o trecho de compressão virgem das amostras somente é atingido para valores de índice de vazios negativos, simulações biaxiais nessas condições são altamente instáveis e costumam apresentar grande fuga de partículas, que atravessam as paredes do contorno, razão pela qual não se realizou simulações para tensões confinantes superiores a 500 kPa.

Como as simulações apresentam ruído, provavelmente devido à velocidade do carregamento, foi necessário determinar curvas que se ajustassem aos dados para que valores de pico e residuais, bem como as inclinações das curvas, pudessem ser obtidos. Para solos soltos esse modelo é equacionado de tal forma que o ponto (0, 0) pertença à curva, que a derivada nesse ponto seja um valor finito positivo e que a curva seja assintótica à tensão residual. Um modelo que atende essas características é o modelo hiperbólico proposto por DUNCAN & CHANG (1970), que apresenta a seguinte formulação

$$\sigma_d = \frac{\varepsilon_a}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{\sigma_{ult}} \varepsilon_a} \quad 4.8$$

em que E_i é o módulo de Young tangente inicial, ε_a é a deformação axial da amostra e σ_{ult} e σ_d são as tensões última e desviadora respectivamente. Contudo, como solos densos apresentam dilatância e perda de resistência pós pico (amolecimento) esse modelo não é capaz de prever inteiramente o comportamento do material. Portanto, é necessário complementar o modelo hiperbólico com uma parcela que descreva a dilatância e o amolecimento do material. Essa parcela deve, assim como no modelo anterior, passar pelo ponto (0, 0) e possuir derivada finita

positiva nesse ponto. Além disso, deve ser sempre positivo e assintótico em $y = 0$. A equação proposta para essa finalidade é

$$\sigma_d = c \varepsilon_a \text{Exp} \left(- \left(\frac{\varepsilon_a}{b} \right)^a \right) \quad 4.9$$

em que a , b e c são parâmetros sem sentido físico, a priori. A abscissa do pico da curva, calculada no ponto em que sua derivada é igual a zero, é dada por b/a . O valor do pico é calculado por $b c \text{Exp} \left(- \frac{1}{a} \right)^a / a$, portanto os três parâmetros influenciam em seu valor. Além disso, essas variáveis controlam, a inclinação inicial da curva (parâmetro c), sua abertura (parâmetro b) e o amolecimento (parâmetro a), de modo que quanto maior o valor de a mais brusco será o amolecimento. A influência desses parâmetros no comportamento da equação pode ser vista na Figura 4.12.

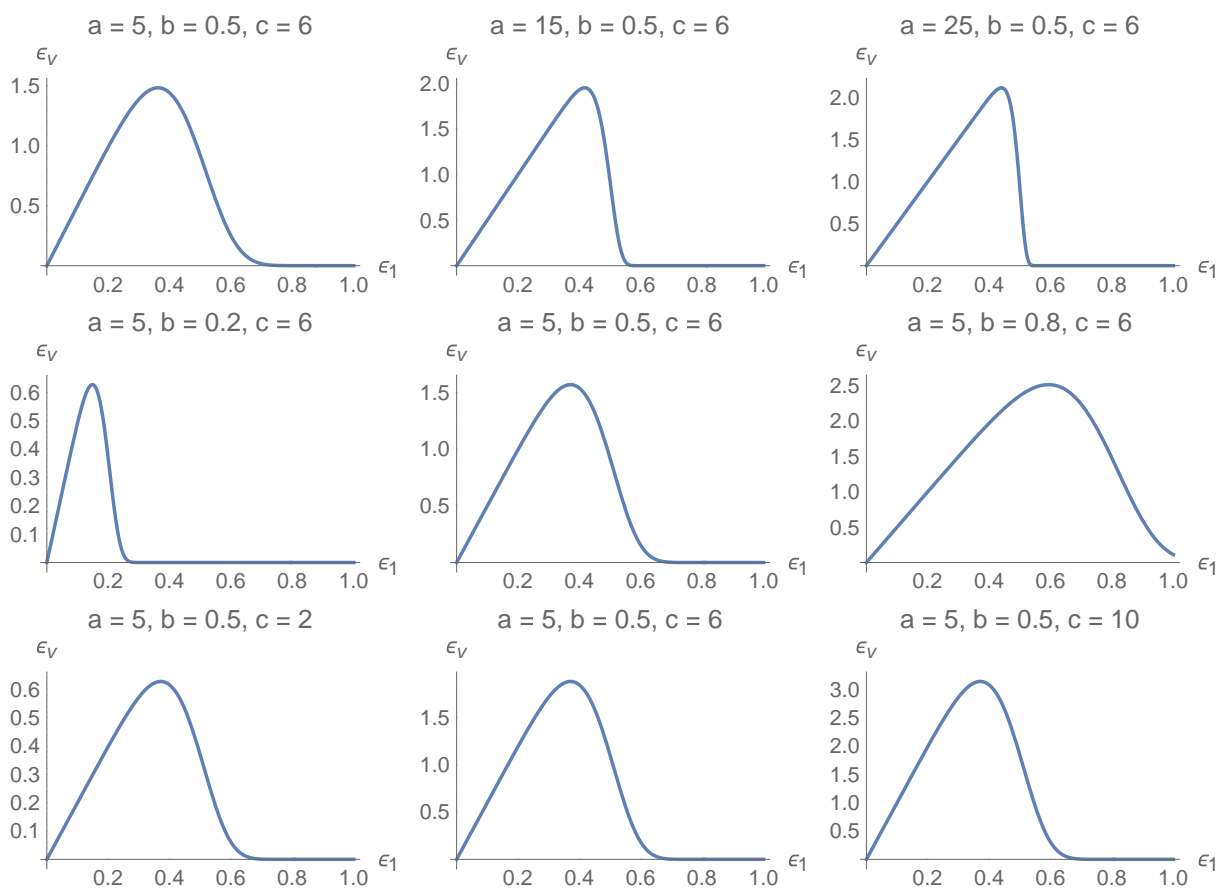


Figura 4.12 - Influência dos parâmetros a , b e c no comportamento da equação proposta

O modelo completo, formado pela soma das equações 4.8 e 4.9, tem a forma

$$\sigma_d = \frac{\varepsilon_a}{1/E_i + 1/\sigma_{res} \varepsilon_a} + c \varepsilon_a \text{Exp}\left(-\left(\frac{\varepsilon_a}{b}\right)^a\right) \quad 4.10$$

Nos casos em que o solo não apresenta amolecimento, faz-se $c = 0$ e tem-se o modelo hiperbólico. Caso contrário, c assume valor positivo. A Figura 4.13 representa o comportamento do modelo hiperbólico, do complemento proposto e do modelo completo, composto pela soma dessas duas partes.

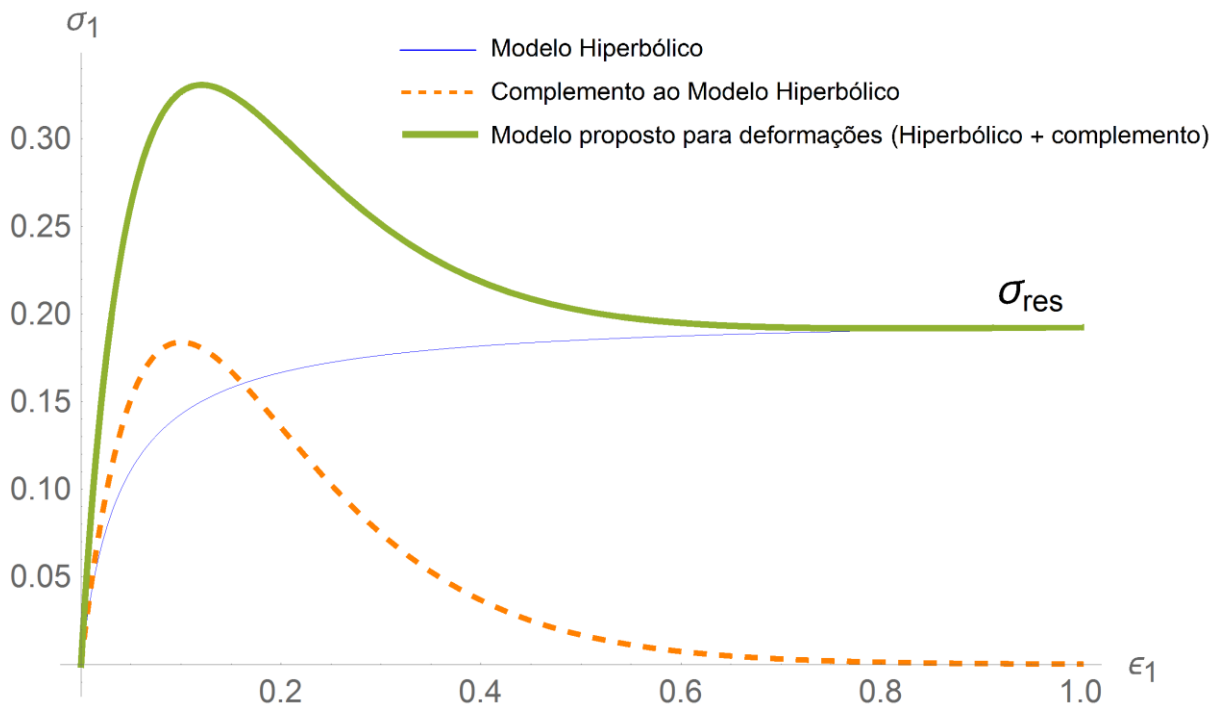


Figura 4.13 – Modelo proposto para o comportamento tensão-deformação axial

De forma análoga, para as deformações volumétricas em casos tridimensionais tem-se

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_a}{1/1 - 2\nu_i + 1/\varepsilon_{res} \varepsilon_a} + h \varepsilon_a \text{Exp}\left(-\left(\frac{\varepsilon_a}{g}\right)^f\right) \quad 4.11$$

em que ν_i é o coeficiente de Poisson inicial e ε_{res} é o valor da deformação volumétrica residual, que ocorre quando o solo muda de configuração sem variação no volume. Para materiais granulares pouco compactos $h = 0$, $\varepsilon_{res} > 0$. Já nos casos densos, $h < 0$, $\varepsilon_{res} < 0$ e o termo que controla a inclinação da curva, dado por $1 / (1 - 2\nu_i)$, deve ser substituído por $-1 / (1 - 2\nu_i)$. Além disso, para que a função apresente o comportamento esperado é necessário que o limite para $\varepsilon_a \rightarrow 0^+$ da derivada do complemento proposto seja maior ou igual, em valor

absoluto, ao limite da derivada do modelo hiperbólico para as mesmas condições. Dessa forma tem-se

$$\left| \lim_{\varepsilon_a \rightarrow 0^+} \frac{d}{d \varepsilon_a} \left(h \varepsilon_a \text{Exp} \left(-\frac{\varepsilon_a}{g} \right)^f \right) \right| \geq \left| \lim_{\varepsilon_a \rightarrow 0^+} \frac{d}{d \varepsilon_a} \left(\frac{\varepsilon_a}{1/1 - 2\nu_i + 1/\varepsilon_{res} \varepsilon_a} \right) \right| \quad 4.12$$

ou seja,

$$|h| \geq |1 - 2\nu_i| \quad 4.13$$

A Figura 4.14 apresenta o comportamento do modelo hiperbólico, do complemento proposto e do modelo completo, composto pela soma dessas duas partes.

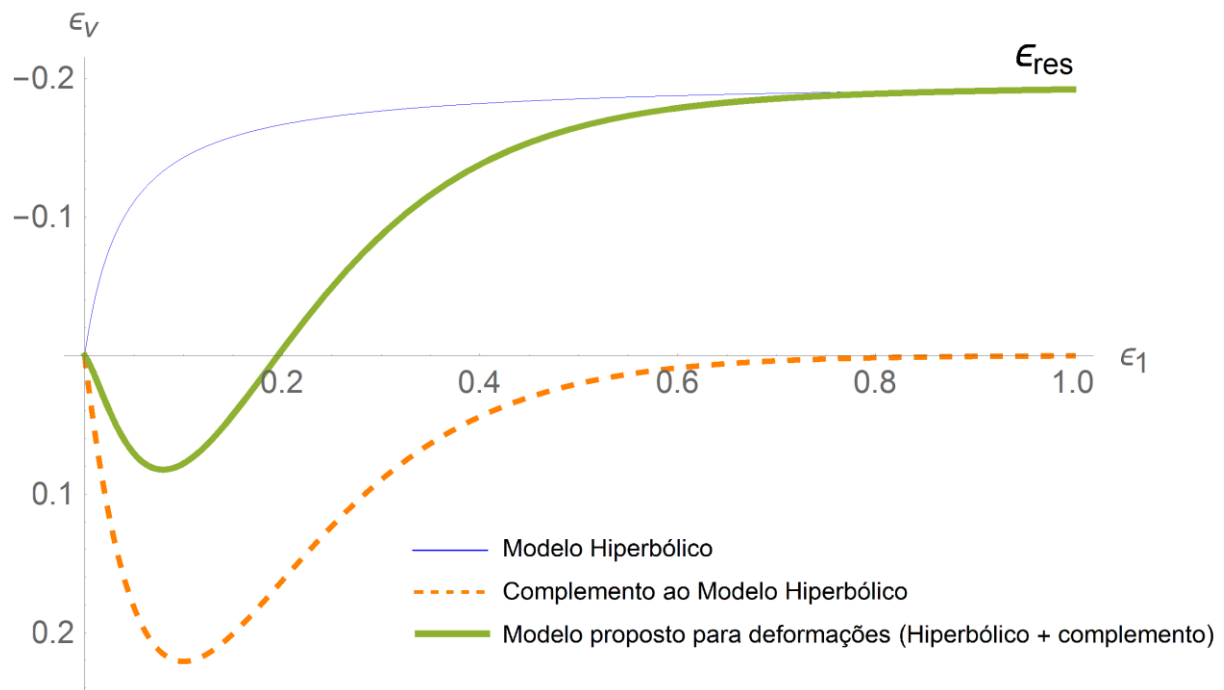


Figura 4.14 – Modelo proposto para o comportamento deformação vertical-deformação axial

A partir das curvas de deformação volumétrica em função da deformação axial, a exemplo da Figura 4.15, pode-se notar que para a grande maioria dos casos a amostra se comporta como uma areia densa, com dilatância. Esse comportamento não é observado somente para o caso de $\phi_{micro} = 0^\circ$ e tensão confinante, σ_c , de 500kPa. Para baixos valores de tensão confinante observa-se que o trecho em que a amostra está sendo comprimida, antes da ocorrência da dilatância, é muito curto. Isso se deve, provavelmente, ao ensaio ser realizado em

estado plano de deformações, o que leva a uma pequena liberdade de movimentação das partículas.

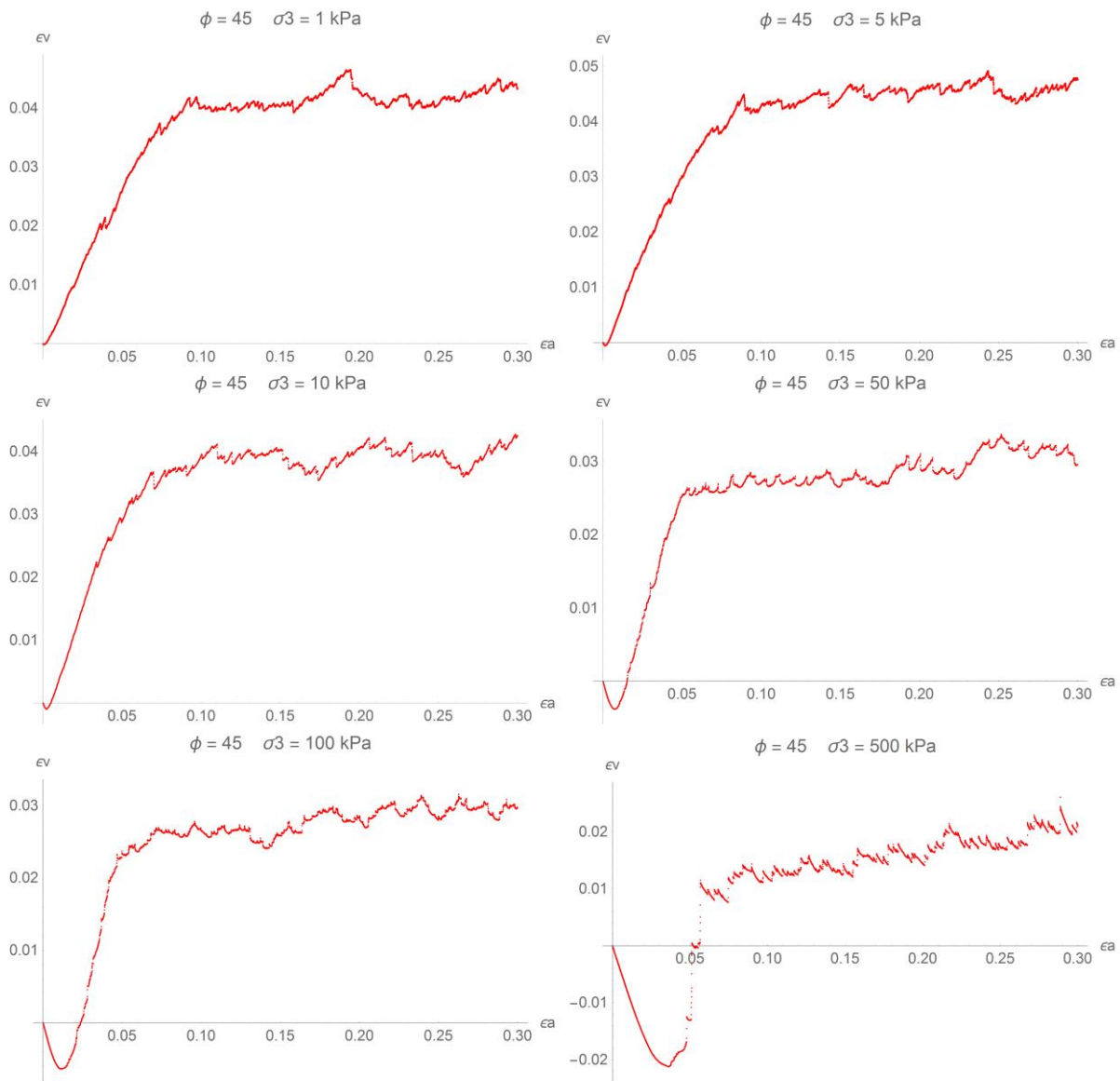


Figura 4.15 – Deformações volumétricas em função da deformação axial para $\phi_{micro} = 45^\circ$ em várias tensões confinantes

Ao plotar a deformação residual, obtida da equação 4.11, em relação ao ϕ_{micro} e em relação a σ_c observa-se que ambos estão correlacionados. Para ϵ_{res} e ϕ_{micro} , Figura 4.16, a deformação residual aumenta com o aumento do ângulo de atrito. Já para ϵ_{res} e σ_c , Figura 4.17, a correlação é inversa, com a deformação residual diminuindo com o aumento da tensão confinante. Com R^2 de 0.93 a equação que relaciona essas 3 variáveis é dada por

$$\varepsilon_{res} = 0.00656 - 0.012 \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_c}{82} \right) + 0.0249 \tan^{-1} \left(\frac{\phi_{micro}}{10} \right) \quad 4.14$$

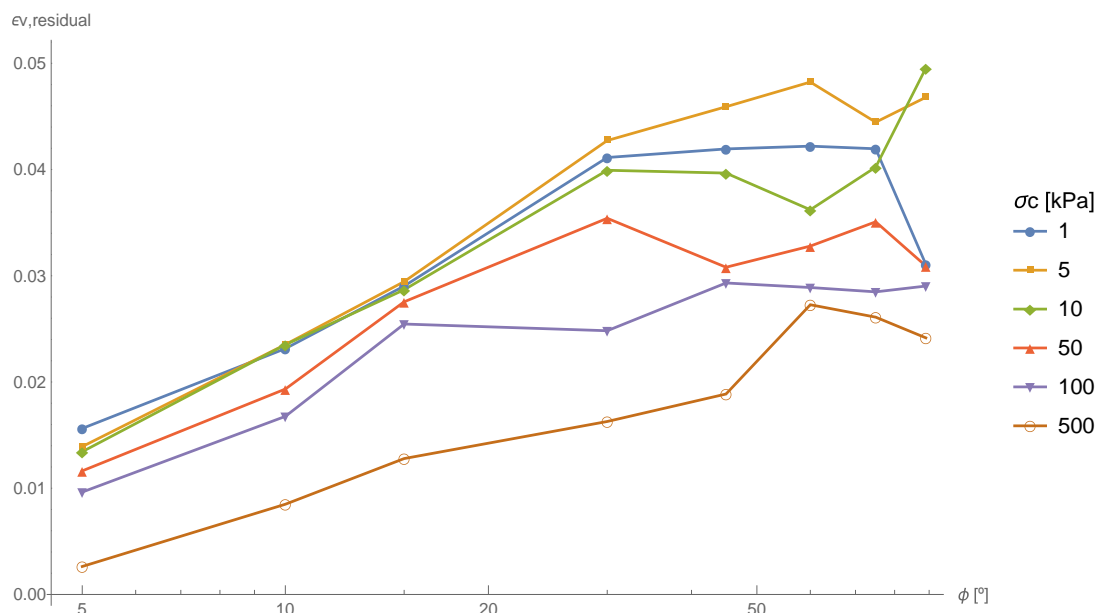


Figura 4.16 – Deformação residual em função do ângulo de atrito microscópico para vários valores de tensão confinante

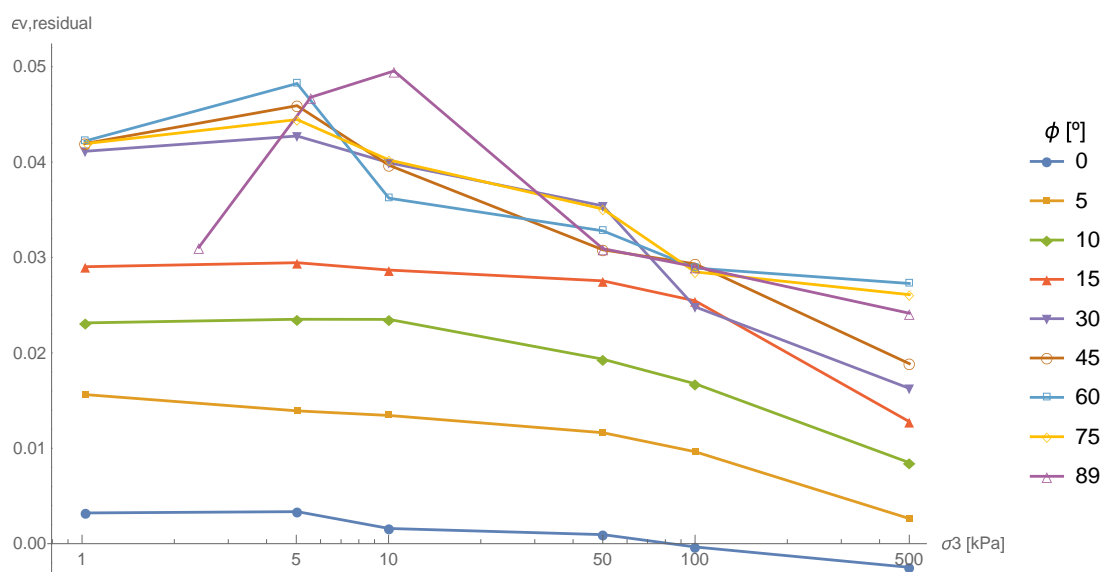


Figura 4.17 - Deformação residual em função da tensão confinante para vários valores de ângulo de atrito microscópico

Procedimento semelhante ao executado com as deformações volumétricas foi feito com as tensões desviadoras. Primeiramente observa-se que o aumento no ângulo de atrito confere caráter mais frágil ao empacotamento, com variações bruscas de tensão na ruptura. O aumento

da tensão confinante também tem o mesmo efeito, porém com menor intensidade. Essas constatações estão exemplificadas na Figura 4.18.

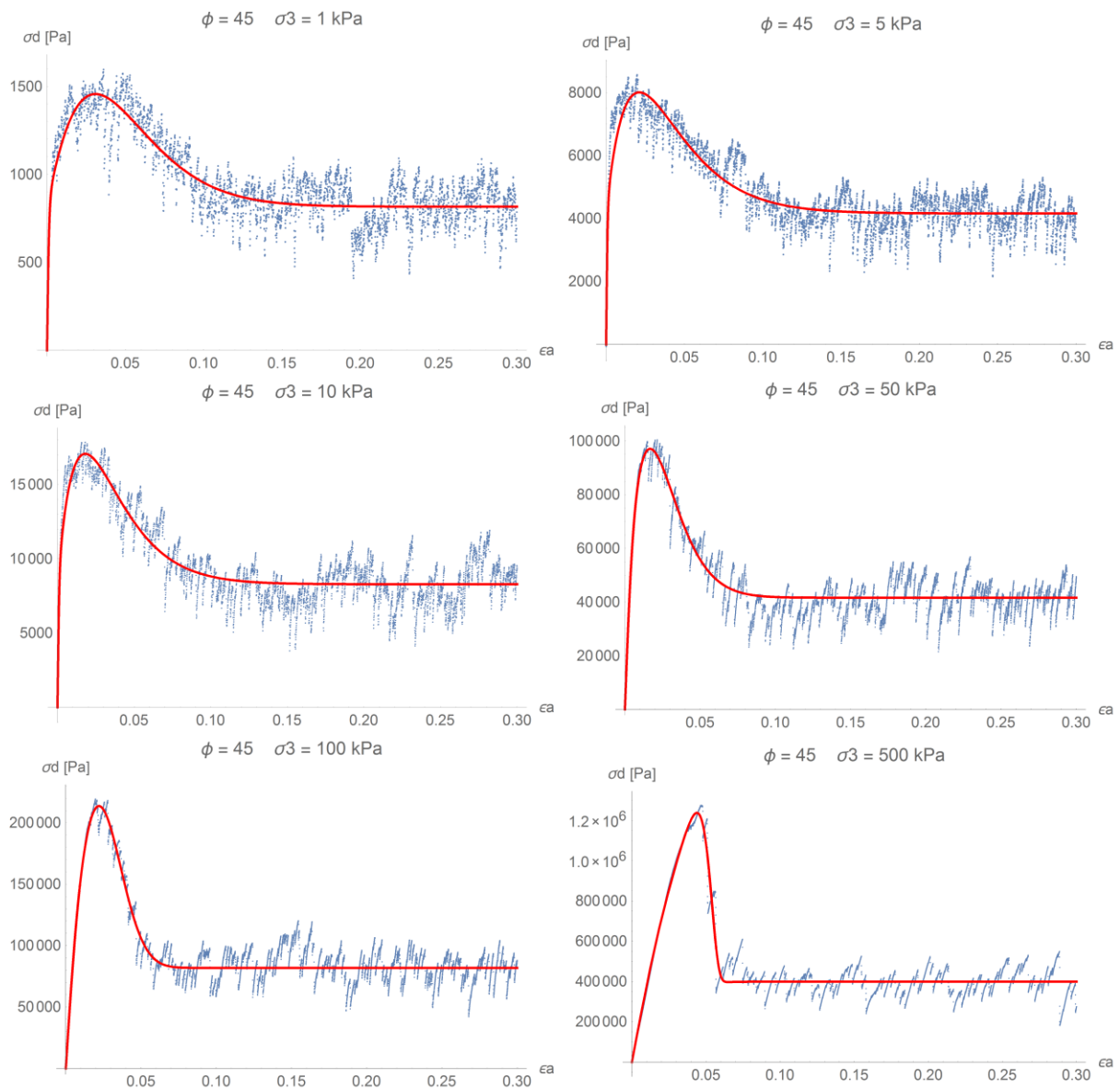


Figura 4.18 – Tensões desviadoras em função da deformação axial para $\phi_{micro} = 45^\circ$ em várias tensões confinantes

Ao plotar a o módulo de Young tangente inicial (obtido pela derivada da equação 4.10 para deformação tendendo a 0) em relação a σ_c , Figura 4.19, observa-se que a equação de Janbu (1963) é válida. Essa equação foi aplicada aos conjuntos de pontos, Tabela 4.5, para determinar os parâmetros K e n em função do ângulo de atrito microscópico, como mostrado na Tabela 4.6 juntamente com o coeficiente R^2 da regressão.

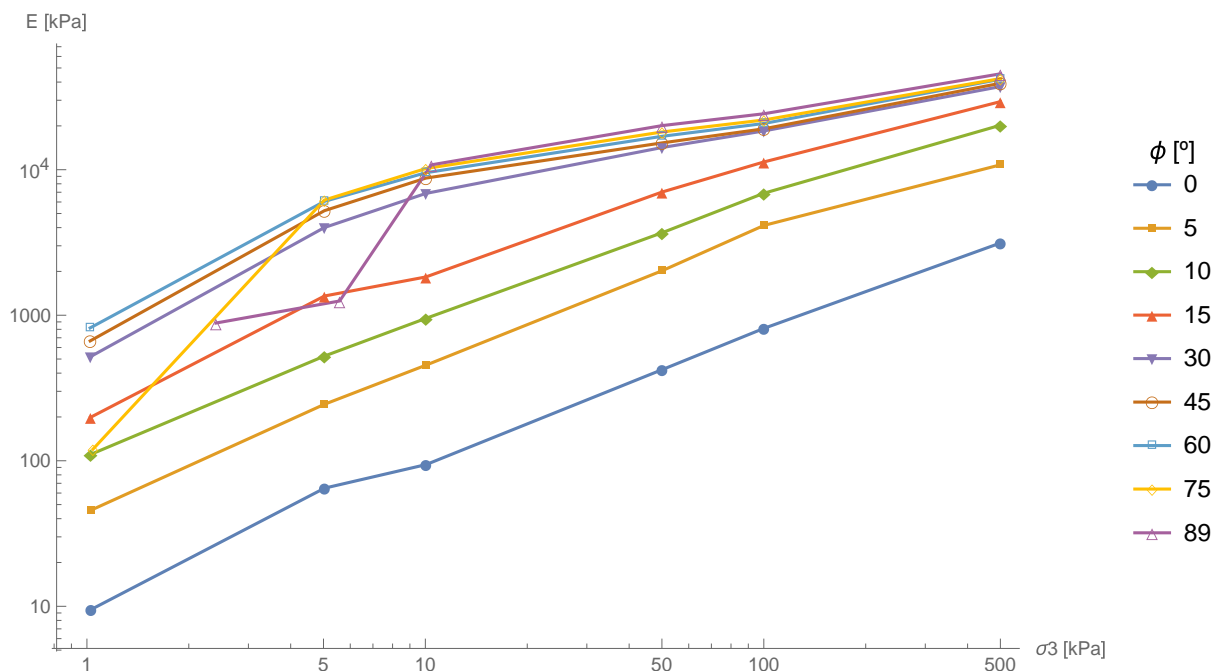


Figura 4.19 – Módulos de Young Iniciais dos ensaios biaxiais em função da tensão confinante para vários valores de $\phi_{micro} = 45$

Tabela 4.5 – Módulos de Young tangentes iniciais obtidos dos ensaios biaxiais [kPa]

$\phi [^\circ] \setminus \sigma_c$	1	5	10	50	100	500
0	9.50	64.85	94.11	422.66	812.38	3136.53
5	45.69	244.44	453.94	2022.02	4141.10	10797.85
10	110.58	524.49	951.71	3687.76	6890.11	20217.77
15	198.94	1355.68	1833.17	7025.05	11307.43	29365.87
30	518.75	4005.50	6872.55	14200.66	18463.87	37259.58
45	665.92	5226.22	8760.53	15286.05	19096.40	39251.99
60	818.07	6055.84	9533.01	16958.53	20777.62	41820.64
75	120.10	6183.63	10185.47	18163.11	21955.79	42262.77
89	883.83	1253.07	10799.77	20088.60	24230.03	45576.45

Tabela 4.6 - Parâmetros da equação de Janbu para os vários ângulos de atrito microscópicos do ensaio biaxial

$\phi [^\circ]$	0	5	10	15	30	45	60	75	89
K	0,022	0,333	0,465	1,401	8,140	10,150	12,053	13,671	11,067
n	0,854	0,679	0,713	0,628	0,449	0,428	0,416	0,403	0,438
R^2	0,9999	0,9965	0,9991	0,9990	0,9976	0,9968	0,9967	0,9943	0,9819

Regressões para encontrar as equações que correlacionam essas variáveis com o ângulo de atrito microscópico foram feitas e, para R^2 de 0.937 e 0.914 para as equações 4.15 e 4.16, respectivamente, obteve-se as seguintes formulações

$$K = 0.169 \phi_{micro} \quad 4.15$$

$$n = 0.884 - 0.108 \text{Log}(\phi_{micro} + 1) \quad 4.16$$

Os pares de pontos e suas regressões são apresentados nas Figura 4.20 e Figura 4.21

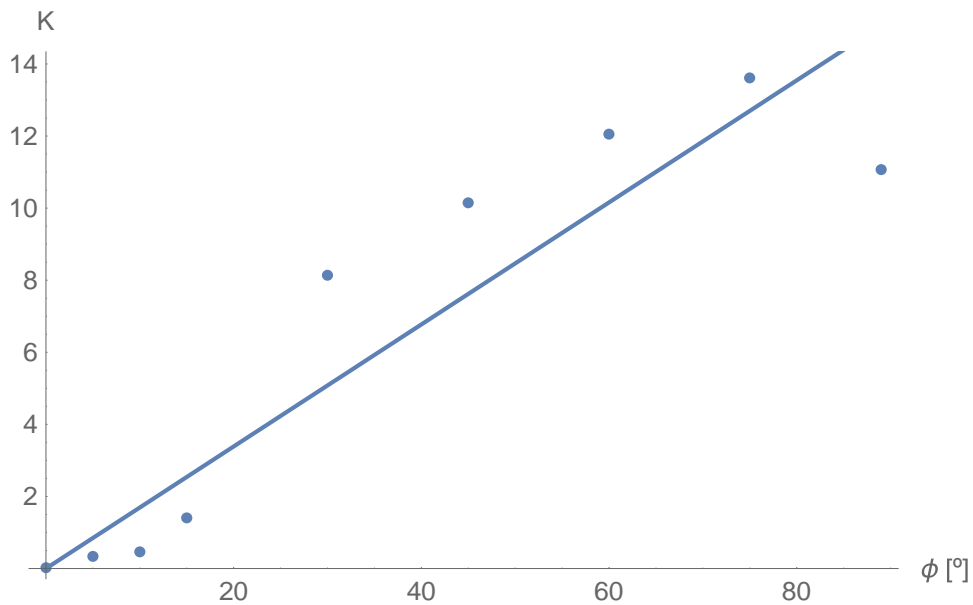


Figura 4.20 – Pontos e regressão dos parâmetros K e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios biaxiais

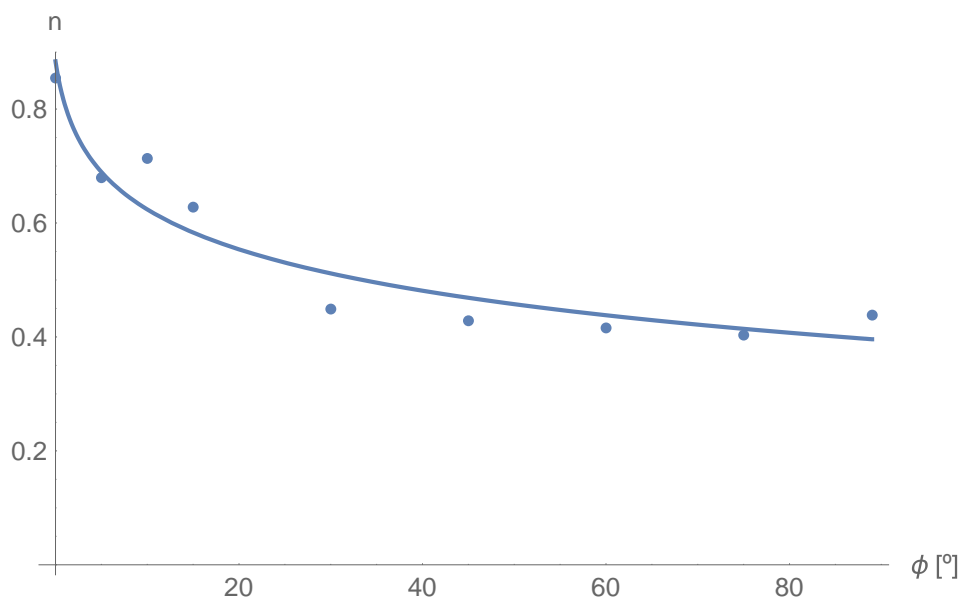


Figura 4.21 – Pontos e regressão dos parâmetros n e ϕ_{micro} do modelo de Janbu para os ensaios biaxiais

Em seguida as envoltórias de ruptura para as tensões de pico e residuais foram determinadas e, conseqüentemente, obteve-se os valores do ângulo de atrito e da coesão macroscópicas para ambos os casos. A coesão macroscópica, como esperado, resultou em valores muito baixos, da ordem de 0.5 kPa, razão pela qual foi considerada como nula. Já o ângulo de atrito macroscópico apresentou relação correlação crescente com seu correspondente microscópico, como pode ser visto na Figura 4.22. As seguintes expressões se ajustam bem aos resultados

$$\phi_{macro}^{Pico} = 4.97 + \frac{17.49 \phi_{micro}}{10.756 + 0.37 \phi_{micro}} \quad 4.17$$

para tensões de pico, com R^2 de 0.997 e como

$$\phi_{macro}^{Residual} = 5.00 + \frac{270.404 \phi_{micro}}{91.5 + 21.41 \phi_{micro}} \quad 4.18$$

para tensões residuais, com R^2 de 0.999. Observa-se que os valores iniciais dessas curvas são praticamente iguais, e muito próximos de 0. Isso se deve ao fato de que a falta de atrito entre partículas leva a um estado em que qualquer força tangencial a um contato deve vencer apenas a gravidade para que as esferas deslizem.

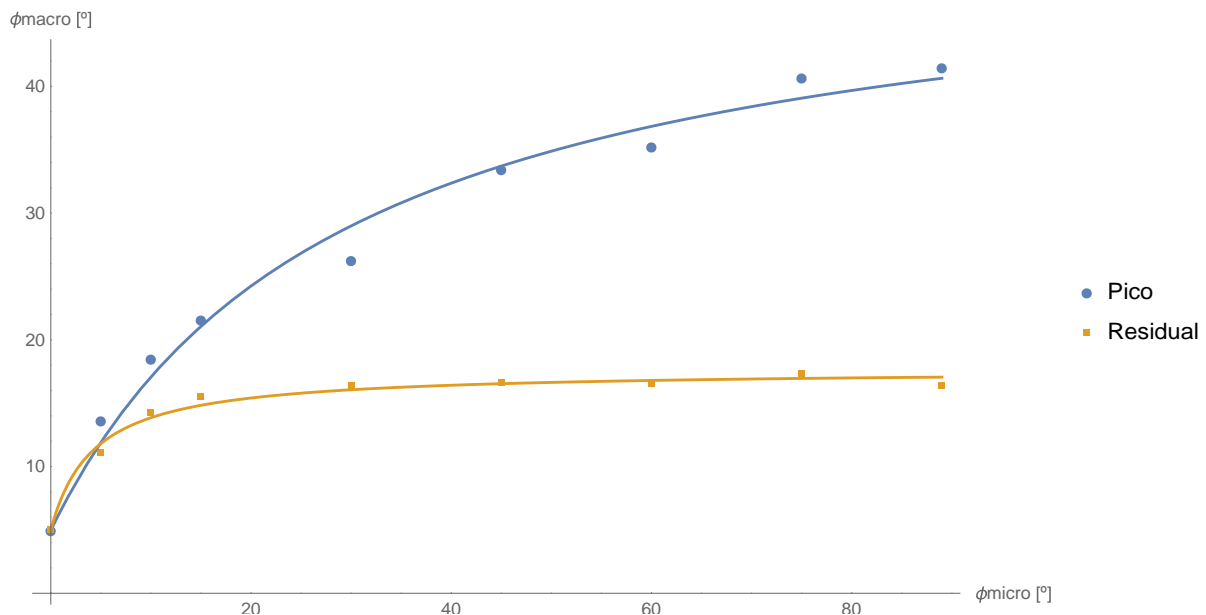


Figura 4.22 – Relação entre os ângulos de atrito macroscópico e microscópico

Por fim, a despeito do esperado para os casos triaxiais, não há diminuição na relação entre as tensões de pico e residual com o aumento do confinamento, Figura 4.23. Uma provável explicação para esse fato é o caráter bidimensional dos ensaios. Em empacotamentos

tridimensionais as partículas possuem liberdade para se rearranjar ocupando espaços vazios nas proximidades fora do plano. Contudo, para os casos em que a terceira dimensão é inexistente, uma esfera em movimento precisa afastar as vizinhas para que possa se deslocar. As vizinhas, por sua vez, precisam afastar as partículas que estão ao seu redor e esse processo continua até que se atinja o contorno. Como o contorno é rígido, não é possível afastá-lo e, portanto, o rearranjo da amostra se torna limitado. Como o confinamento a altas tensões se vale do rearranjo das partículas para conferir estado cada vez mais fofo ao solo, esse processo deixa de ocorrer.

Outra possível explicação para esse comportamento é a falta de modelo de quebra para as partículas submetidas a altas tensões. Caso esse modelo estivesse presente nas simulações, seria possível alcançar uma melhor ocupação do espaço, com a substituição das partículas grandes por outras menores, uma vez que a distribuição granulométrica do empacotamento seria alterada. Dessa forma, a granulometria ficaria cada vez menos uniforme, permitindo existência de porosidades cada vez menores, até um limite, por meio do o rearranjo das partículas com a aplicação do carregamento. Pouco se sabe sobre esse limite, contudo espera-se que seja função exclusiva da distribuição granulométrica e do formato das partículas em amostras isotrópicas e homogêneas.

Por outro lado, maiores tensões confinantes significam maior aproximação entre as partículas e, conseqüentemente, mais dilatante fica o material, comportamento observado na Figura 4.23. Portanto, para os casos bidimensionais, o aumento na tensão confinante resulta no distanciamento entre as tensões de pico e residual.

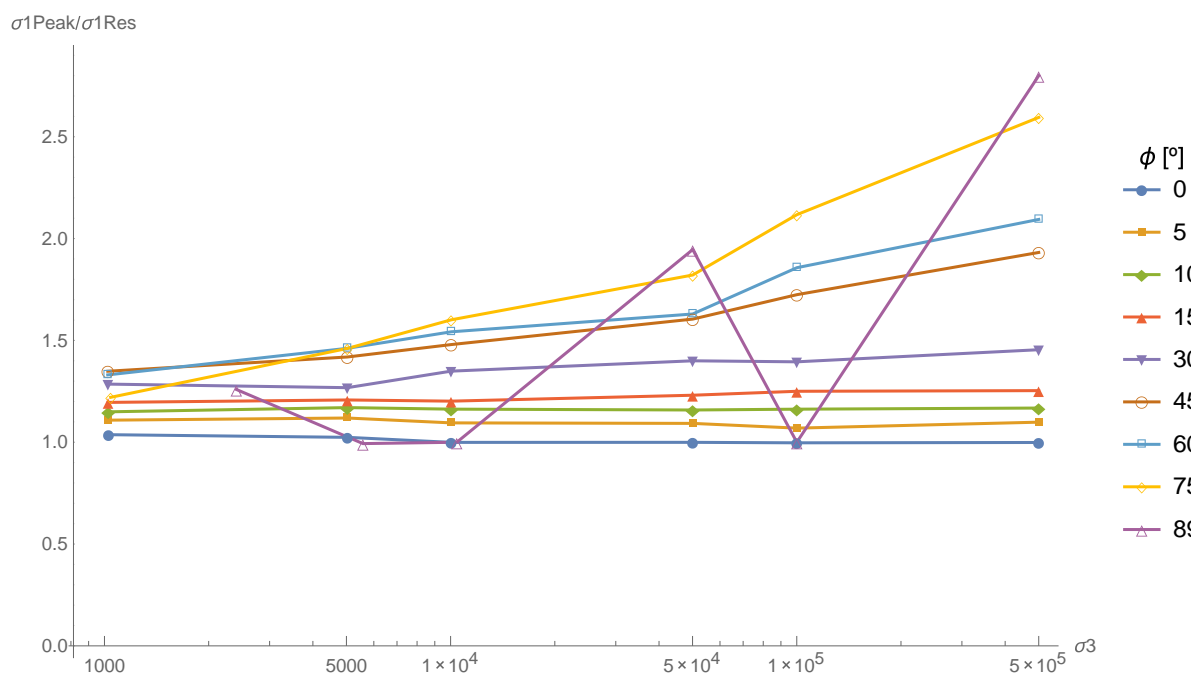


Figura 4.23 Variação da tensão de pico com relação à tensão residual

4.3 COMPARATIVO ENTRE OS ENSAIOS NUMÉRICOS E VALORES REAIS

Para amostras tridimensionais a densidade do empacotamento pode ser calculada em função da porosidade e da densidade do grão pela equação 3.1. Contudo, nos casos bidimensionais essa equação pode não ser válida. Optou-se, portanto, por medir a densidade do solo pela pressão que o mesmo faz no plano inferior que delimita os ensaios. O valor obtido por esse procedimento foi de 21,48 kN/m², muito próximo dos 21,79 calculados com a equação 3.1. Comparando esse valor com os intervalos de densidade volumétrica apresentados na Tabela 3.3, e assumindo que o valor bidimensional equivale a uma média de vários planos de uma amostra em três dimensões, pode-se classificar empacotamento como representativo de uma areia muito densa, com porosidade da ordem de 0.192.

Para areias com essas propriedades, o intervalo de valores para o ângulo de atrito macroscópico é de 42° a 47°. Para que o ângulo de atrito macroscópico atinja esse intervalo deve-se usar valores ϕ_{micro} muito próximos a 89°. É importante observar que apesar de levar o valor de ϕ_{micro} até próximo do limite não foi possível obter resultados de ângulo de atrito macroscópico superiores a 42°. Isso indica que, para melhor representar o comportamento macroscópico friccional do meio, são necessários complementos à configuração utilizada. Um desses complementos é a adição de atrito ao rolamento nos modelos constitutivos. Dessa forma seria possível dificultar ainda mais o deslocamento entre as partículas. Outra abordagem possível é o uso de partículas angulares ou agregados de partículas, de forma a permitir maior intertravamento entre os grãos que compõem o meio.

Sobre os parâmetros elásticos do meio, módulo de Young e coeficiente de Poisson, é possível determinar a relação entre E , ν e os módulos de deformação dos ensaios a partir das equações 2.40 e 2.41. Em ensaios oedométricos, com ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = 0$), o módulo de deformação (E_{oed}) é definido por

$$E_{oed} = \frac{d \sigma_y}{d \varepsilon_y} = \frac{E (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad 4.19$$

Já para o caso de ensaios biaxiais no estado plano de deformações ($d\sigma_{xx} = 0$), o módulo de deformação (E_{biax}) é calculado por

$$E_{biax} = \frac{d \sigma_y}{d \varepsilon_y} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad 4.20$$

Portanto, a relação entre esses módulos, no estado plano de deformações, se dá por

$$\frac{E_{biax}}{E_{oed}} = \frac{1 - 2\nu}{(1 - \nu)^2} \quad 4.21$$

Por sua vez, a relação entre as deformações lateral e vertical se dá por

$$\frac{d \varepsilon_x}{d \varepsilon_y} = \frac{-\nu}{1 - \nu} \quad 4.22$$

Comparando os dados dos módulos de Young inicial, Tabela 4.5, e oedométrico, Tabela 4.7, para os vários níveis de tensões e de ângulos de atrito microscópicos ensaiados, é possível calcular o coeficiente de Poisson pela equação 4.21 e verificar se o valor encontrado nas simulações, determinado a partir da equação 4.22 condiz com o calculado. Essa comparação está apresentada nas Tabela 4.8 e Tabela 4.9 e na Figura 4.24. Nessa figura colocou-se uma reta com inclinação de 1:1, equivalente a $\nu_{med} = \nu_{calc}$, para auxiliar na análise entre os valores calculados e medidos. A regressão linear dos pontos, com R^2 de 0.9, tem a forma

$$\nu_{med} = 0.897 \nu_{calc} \quad 4.23$$

Tabela 4.7 – Módulos oedométricos determinados para as mesmas tensões confinantes dos ensaios biaxiais

$\phi [^\circ] \setminus \sigma_c$	1	5	10	50	100	500
0	594.22	1463.43	2157.50	5313.41	7833.39	19291.81
5	1018.54	2325.68	3318.78	7577.92	10813.81	24691.66
10	1516.42	3272.85	4558.46	9838.43	13703.08	29575.07
15	2042.39	4220.60	5769.51	11922.69	16298.16	33680.16
30	3123.39	6032.60	8009.88	15470.51	20541.20	39673.88
45	5005.05	8833.75	11282.59	19913.39	25433.66	44889.55
60	11038.40	17046.21	20554.45	31741.53	38274.19	59105.49
75	12680.63	19331.74	23181.46	35340.36	42378.04	64605.72
89	15639.78	23087.74	27304.28	40307.10	47668.42	70369.02

Tabela 4.8 – Coeficientes de Poisson calculados

$\phi [^\circ] \setminus \sigma_c$	1	5	10	50	100	500
0	0.498	0.494	0.494	0.490	0.486	0.478
5	0.494	0.486	0.482	0.461	0.440	0.429

10	0.491	0.478	0.471	0.442	0.414	0.360
15	0.487	0.452	0.452	0.391	0.356	0.264
30	0.477	0.367	0.274	0.223	0.241	0.198
45	0.482	0.390	0.321	0.325	0.333	0.262
60	0.490	0.445	0.423	0.406	0.403	0.351
75	0.499	0.452	0.428	0.411	0.410	0.370
89	0.493	0.493	0.437	0.415	0.412	0.372

Tabela 4.9 – Coeficientes de Poisson obtidos dos ensaios biaxiais

$\phi [^\circ] \setminus \sigma_c$	1	5	10	50	100	500
0	0.489	0.483	0.478	0.488	0.482	0.445
5	0.477	0.477	0.463	0.419	0.374	0.269
10	0.491	0.462	0.448	0.344	0.250	0.235
15	0.509	0.485	0.434	0.322	0.236	0.159
30	0.544	0.509	0.444	0.232	0.168	0.124
45	0.563	0.519	0.448	0.184	0.158	0.123
60	0.565	0.526	0.423	0.173	0.152	0.123
75	0.684	0.533	0.397	0.168	0.153	0.120
89	0.583	0.536	0.372	0.165	0.154	0.121

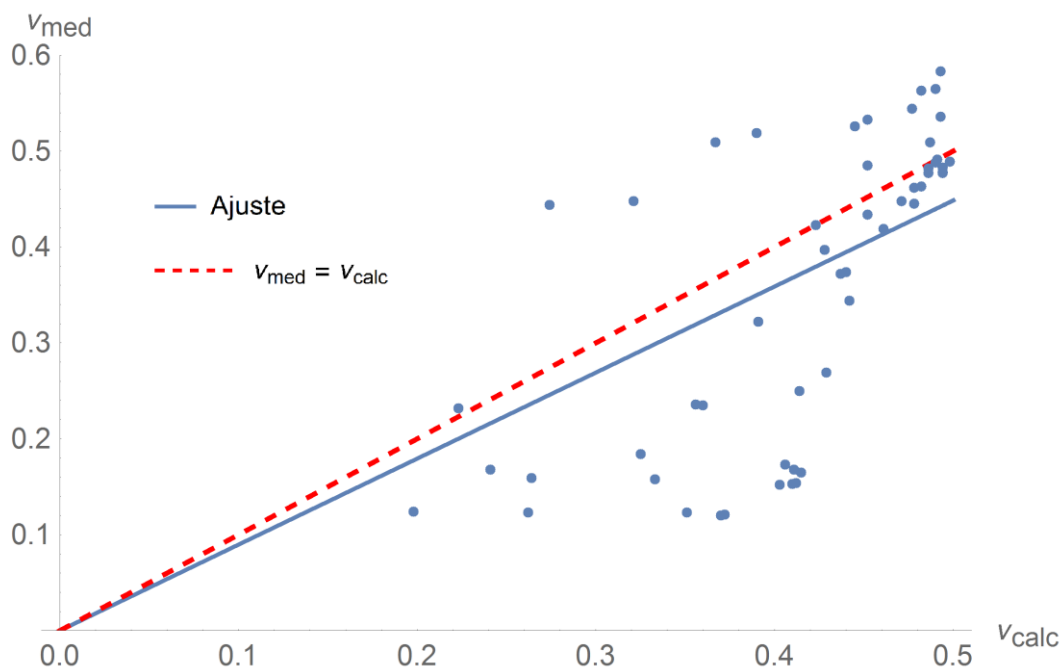


Figura 4.24 – Comparativo entre valores medidos e calculados para o coeficiente de Poisson

Nota-se que a maior parte dos pontos está abaixo da reta de auxílio, o que levanta a hipótese de que o equacionamento para o estado plano de deformações pode não ser adequado ao problema. ITASCA (2004), afirma que ensaios em discos não podem ser considerados estado plano de tensões ou deformações. Faz-se necessário, portanto, desenvolver arcabouço teórico que descreva esse tipo de condição. Observa-se também que alguns pontos medidos apresentam coeficiente de Poisson superior a 0,5. Isso pode ser explicado pela formação de empacotamento anisotrópico durante a etapa de geração da amostra.

Por fim, o intervalo esperado para o módulo de Young em areias com essa densidade é de 40 a 100 MPa. Esse intervalo não foi alcançado para os intervalos de ângulos de atrito e tensões confinantes simulados. Isso indica que o módulo de Young da partícula foi subestimado. Sugere-se reavaliar os resultados com valores superiores em uma ou duas ordens de grandeza para esse parâmetro, para que se possa atingir a magnitude esperada para esse parâmetro. Já o coeficiente de Poisson obtido dos ensaios biaxiais apresentou uma grande dispersão, com média de 0.36 e desvio padrão de 0.16. Em média, o valor do coeficiente de Poisson está acima do esperado para o material, indicando, novamente, uma escolha não realista dos parâmetros elásticos microscópicos ou a não adequabilidade da formulação para o estado plano de tensões. Observa-se também que esse parâmetro apresenta valores mais altos para valores mais baixos de σ_c e de ϕ_{micro} , diminuindo conforme esses parâmetros aumentam.

5 CONCLUSÕES

Como mostrado nessa dissertação, o ângulo de atrito microscópico influencia bastante nas propriedades macroscópicas do empacotamento. Alguns autores, como ŠMILAUER (2010), indicam que esse parâmetro deve ser calibrado em etapa posterior ao ajuste das rigidezes das molas, argumentando que seu valor pouco influencia as propriedades elásticas macroscópicas. Mostrou-se nessa dissertação que a variação de ϕ_{micro} pode levar à alteração de uma ordem de grandeza no módulo de Young macroscópico, portanto a calibragem dos parâmetros de rigidez das molas deve ser reavaliada ao final do ajuste do ângulo de atrito microscópico.

Para que as simulações pudessem ser executadas em escala, um número reduzido de partículas, com diâmetros relativamente grandes, foi utilizado. A granulometria da amostra foi composta de partículas cujos diâmetros variam entre 0,6 e 2,4 mm, representando apenas a fração grossa de uma areia. Para melhor representar as areias seria necessário incluir, no mínimo, o espectro das areias médias, que varia de 0,2 a 0,6 mm. Contudo, como a granulometria é dada em massa, o número de partículas esféricas cresce seguindo uma relação cúbica com a diminuição dos diâmetros, tornando as simulações ainda mais lentas.

Além disso, o empacotamento estudado é bastante denso. A primeira conclusão tirada desse fato é que não se utilizou o melhor método de geração. Enquanto o método da subcompactação de Jiang precisa de vários passos de tempo para gerar e compactar a amostra, métodos de avanço frontal são capazes de obter empacotamentos mais densos por meio de algoritmos rápidos, sendo necessários apenas alguns passos de tempo para estabilizar a amostra posteriormente. Em segundo lugar, empacotamentos densos em estados planos de deformações não permitem o rearranjo das partículas, uma vez que a ausência de grandes vazios leva à necessidade do afastamento das partículas vizinhas para que haja a movimentação de uma esfera. Isso implica na necessidade de rearranjo em uma grande região da amostra, e não apenas localmente.

Ainda sobre empacotamentos densos, observou-se que o quociente entre as tensões de pico e residual não diminuiu com o aumento da tensão confinante. Além disso, as rupturas ocorridas nos ensaios biaxiais foram bruscas tanto para elevados valores de tensões confinantes quanto para ϕ_{micro} acima de 45°. Como discutido anteriormente, uma possível forma de corrigir esse comportamento é com a inclusão de modelo de quebra para as partículas. Para baixos níveis de tensões a quebra dos grãos não é significativa e esse modelo não seria

necessário. Contudo, simulações com tensões confinantes de altas magnitudes podem se beneficiar desse tipo de modelo, uma vez que a substituição de esferas grandes por outras de menor diâmetro confere maior possibilidade de rearranjo de partículas e melhor redistribuição de tensões. Esses dois fatores conferem ao solo comportamento mais suave na ruptura, típico de materiais granulares, ao contrário das bruscas variações de tensões e volume, reações típicas de materiais pré-adensados e materiais cimentados.

Outra implicação da dificuldade de rearranjo das partículas no estado plano de deformações e da falta de modelo que quebra é que não foi possível atingir o trecho de compressão virgem no ensaio oedométrico. Estima-se que esse trecho ocorreria em valores quase nulos do índice de vazios, situação impossível do ponto de vista físico.

Um dos sucessos dessa dissertação foi o fato de que tanto a equação proposta para complementar o modelo hiperbólico quanto o modelo proposto para o comportamento dos dados das curvas ε_v versus ε_a se adequaram muito bem aos resultados. Esses modelos foram equacionados em virtude da dificuldade de análise advinda do ruído presente nos resultados das simulações numéricas. A obtenção dos parâmetros macroscópicos (como módulo de Young, coeficiente de Poisson, tensões residuais e de pico e deformações residuais e de pico) somente se tornou possível, de forma coerente, por meio desses modelos. Contudo, ainda é necessário determinar o significado físico dos parâmetros desses modelos para que possam ser utilizados para a previsão de comportamentos dos solos.

Como pôde ser visto na Figura 4.22, o ângulo de atrito macroscópico possui relação crescente com seu correspondente microscópico. Contudo, para as condições ensaiadas, observou-se que a variação do atrito interparticular consegue atingir valores de até 42° do ponto de vista macroscópico. Sabe-se que alguns materiais atingem valores superiores a essa, razão pela qual pode-se dizer que ϕ_{micro} pode não ser a única parcela a compor o atrito macroscópico. Para simulações em que o meio apresenta ϕ_{macro} de 20 a 35° pode ser mais simples utilizar apenas o atrito interparticular, por meio das equações 4.17 e 4.18. Contudo, em materiais em que o valor de ϕ_{macro} é muito alto é interessante fazer uso de abordagens que incluam geometrias mais complexas de partículas, para simular o efeito do embricamento ou de modelos que incluam nos contatos os efeitos de molas torcionais e atrito ao rolamento.

É interessante comentar que ao longo das simulações com ϕ_{micro} de 75° e 89° observou-se momentos em que uma partícula no interior da simulação adquiria velocidades muito altas, abrindo pequenas cavidades locais que eram novamente preenchidas com poucos passos de tempo. Atribui-se isso às altas forças desenvolvidas no deslocamento tangencial das partículas,

que são abruptamente liberadas quando acaba a área de contato que delimita a existência de interação entre as partículas.

Por fim, conclui-se que o Método dos Elementos Discretos aplicado de forma bidimensional não é completamente explicado pela teoria referente ao estado plano de deformações. Assim, o caso bidimensional deve ser melhor estudado antes que se possa aproveitar o reduzido número de partículas, decorrentes da execução de simulações no estado plano de deformações, na resolução de problemas mais complexos.

5.1 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Essa pesquisa é o passo inicial da determinação de uma metodologia robusta de calibração de Elementos Discretos. Para que essa metodologia seja concluída é necessário estudar o efeito de todos os parâmetros microscópicos, correspondentes aos dados de entrada necessários a uma simulação com DEM, no comportamento macroscópico do meio. Dentre essas variáveis de estudo, cita-se:

- Ângulo de atrito interparticular;
- Coesões normal e tangencial ao contato;
- Módulo de Young e coeficiente de Poisson do material que compõe a partícula;
- Ângulo de atrito ao rolamento;
- Forma das partículas;
- Distribuição Granulométrica;
- Coeficiente de amortecimento global;
- Coeficiente de amortecimento do contato (normal e tangencial), para modelos em que essa possibilidade se faz presente;
- Velocidade de aplicação do carregamento;
- Modelos de quebra de partículas.

Observa-se, ainda, que alguns desses parâmetros influenciam a amostra de formas diferentes, em função de seu significado dentro do modelo de contato adotado. Portanto, para que o DEM possa ser utilizado amplamente nas escalas comercial e de pesquisa, as relações entre essas variáveis e o comportamento macroscópico do empacotamento devem ser entendidas e, preferencialmente, equacionadas para os modelos mais utilizados, como o linear proposto por Cundall & Strack e o de Hertz-Mindlin.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALABDULLAH, J., 2010. *Testing Unsaturated Soil for Plane Strain Conditions: A New Double-Wall Biaxial Device*. Weimar: s.n.

Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), 1995. *NBR 6502 - Rochas e Solos*. s.l.:s.n.

BARDET, J., 1998. Introduction to computational granular mechanics. In: B. Cambou, ed. *Behaviour of granular materials*. s.l.:Springer-Verlag.

CIANTIA, M. O., ARROYO, M., CALVETTI, F. & GENS, A., 2015. An approach to enhance efficiency of DEM modelling of soils with crushable grains. Issue 65, pp. 91-110.

CLEARY, P., 2000. DEM simulation of industrial particle flows: case studies of dragline excavators, mixing in tumblers and centrifugal mills. *Powder Technology*, Issue 109, pp. 83-104.

COETZEE, C. J. & ELS, D. N. J., 2008. Calibration of granular material parameters for DEM modelling and numerical verification by blade–granular material interaction. *Journal of Terramechanics*, Issue 46, pp. 15-26.

CONDROMOS, E. M. & PAPADOUPOLOU, M. C., 2013. Explicit extension of the p-y method to pile groups in cohesive soils. *Computers and Geotechnics*, pp. 28-41.

CORNFORTH, D. H., 1961. *Plane strain failure characteristics of a saturated sand*. Londres: s.n.

COSTA, C. J. M., 2013. *Análise Topológica Experimental por Perfilometria Cíclica Indutiva de Superfícies de Paredes Estruturais*. Natal(Rio Grande do Norte): s.n.

CUI, L. & O'SULLIVAN, C., 2003. Analysis of a triangulation based approach for specimen generation for discrete element simulations. *Granular matter*, Issue 5, pp. 135-145.

CUNDALL, P., 1987. Distinct element models of rock and soil structure. In: E. Brown, ed. *Analytical and Computational Methods*. s.l.:Allen and Unwin.

CUNDALL, P. A. & STRACK, O. D. L., 1979. "A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, pp. 29-47.

DUNCAN, J. M. & CHANG, C. M., 1970. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, Volume 96, pp. 1629-1653.

FENG, Y., HAN, K. & OWEN, D., 2003. Filling domains with disks: An advancing front approach. *International journal for numerical methods in engineering*, 56(5), p. 699–731.

FERREIRA, S. T., 2009. *Estudo e implementação do Método dos Elementos Discretos em 3D*. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia.

GEORGIADIS, K., POTTS, D. M. & ZDRAVKOVIC, L., 2004. Modelling the shear strength of soils in the general stress space. *Computers and Geotechnics*, Volume 31, pp. 357-364.

GRIMA, A. P. & WYPYCH, P. W., 2010. Development and validation of calibration methods for discrete element modelling. *Granular Matter*, Volume 13, pp. 127-132.

HAN, C. & VARDOULAKIS, I. G., 1991. Plane-Strain Compression Experiments on Water-Saturated Fine-Grained Sand. *Géotechnique*, Volume 41, pp. 49-78.

HERTZ, H., 1882. Ueber die Beruehrung elastischer Koerper (On Contact Between Elastic Bodies). *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Issue 92, pp. 156-171.

ITASCA, 2004. *PFC2D 3.10 Particle Flow Code in Two Dimensions, Theory and Background volume*. 3rd ed. Minneapolis: s.n.

JANBU, N., 1963. *Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests*. Weisbaden, s.n., pp. 19-25.

JERIER, J., IMBAULT, D., DONZE, F. & DOREMUS, P., 2009. A geometric algorithm based on tetrahedral meshes to generate a dense polydisperse sphere packing. *Granular Matter*, Issue 11, pp. 43-52.

JIANG, M., KONRAD, J. & LEROUEIL, S., 2003. An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies. *Computers and Geotechnics*, Issue 30, pp. 579-597.

JOHNSON, K. L., 1985. *Contact Mechanics*. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press.

KO, H. Y. & DAVIDSON, L. W., 1973. Bearing capacity of footings in plane strain. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, Volume 99, pp. 1-23.

KOZICKI, J. & TEJCHMAN, J., 2011. Numerical Simulation of Sand Behaviour Using DEM with Two Different Descriptions of Grain Roughness. *II International Conference on Particle-based Methods – Fundamentals and Applications*.

LAGARIAS, J. C., MALLOWS, C. L. & WILKS, A. R., 2002. Beyond the Descartes Circle Theorem. *The American Mathematical Monthly*, Issue 109, pp. 338-361.

LEE, K. L., 1970. Comparison of Plane Strain and Triaxial Tests on Sand. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, Volume 96, pp. 901-923.

LOCK, B. G., 2014. *Handbook of geotechnical investigation and design tables*. Leiden: CRC Press.

LO, K. W., MITA, K. A. & THANGAYAH, T., 2000. *plane strain testing of overconsolidated clay*. Melbourne, Australia, s.n.

LUDING, S., 2009. From molecular dynamics and particle simulations towards constitutive relations for continuum theory. In: *Advanced Computational Methods in Science and Engineering*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, pp. 453-492.

MARACHI, N. D., DUNCAN, J. M., CHAN, C. K. & SEED, H. B., 1981. Plane-Strain Testing of Sand . In: R. N. Y. & F. C. Townsend, ed. *Laboratory Shear Strength of Soil, ASTM STP 740*. Chicago: American Society for Testing and Materials, pp. 294-302.

MINDLIN, R. D. & DERESIEWICZ, H., 1953. Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces. *Journal of Applied Mechanics*, Issue 20, pp. 327-344.

MISHRA, B. K. & MURTY, C. V. R., 2001. On the determination of contact parameters for realistic DEM simulations of ball mills. *Powder Technology*, Volume 115, pp. 290-297.

MORALES, I. P. et al., 2016a. Contributions to the generalization of advancing front particle packing algorithms. *Numerical Methods in Engineering*, Issue 107, pp. 993-1008.

MORALES, I. P., VALERA, R. R., MORFA, C. R. & de FARIAS, M. M., 2016b. Dense packing of general-shaped particles using a minimization technique. *Computational Particle Mechanics*.

O' SULLIVAN, C., 2011. *Particulate Discrete Element Modelling*. London and New York: Spon Press.

ODA, M., KOSHIKAWA, I. & HIGUCHI, T., 1978. Microstructure of shear bands and its relation to the mechanisms of dilatancy and failure of dense granular soils. *Géotechnique*, Volume 48, pp. 465-481.

OÑATE, E. & ROJEK, J., 2004. Combination of discrete element and finite element methods for dynamic analysis of geomechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Issue 193.

O'SULLIVAN, C., 2014. Advancing Geomechanics using DEM. In: K. K. K. B. G. K. M. Soga, ed. *Geomechanics from Micro to Macro*. s.l.:CRC Press, pp. 21-32.

PACHECO SILVA, F., 1970. *Uma nova construção gráfica para a determinação da pressão de pré-adensamento de uma amostra de solo*. Rio de Janeiro, s.n., pp. 219-223.

PETERS, J., LADE, P. & BRO, A., 1988. Shear band formation in triaxial and plane strain tests. In: R. C. & M. S. R. Donaghe, ed. *Advanced triaxial testing of soil and rock, ASTM STP 977*. West Conshohocken: American Society for Testing and Materials, pp. 604-627.

PÖSCHEL, T. & SCHWAGER, T., 2005. *Computacional Granular Dynamics*. Berlin: Springer.

ŠMILAUER, V., 2010. *Cohesive Particle Model using the Discrete Element Method on the Yade Platform*. Praga: s.n.

ŠMILAUER, V. et al., 2015. *Yade Documentation*. 2nd ed. s.l.:The Yade Project.

THORNTON, C. & YIN, K. K., 1991. Impact of elastic spheres with and without adhesion. *Powder Technology*, , Issue 65, pp. 153-166.

WANATOWSKI, D., 2005. *Strain Softening and Instability of Sand under plane-strain Conditions*. Nanyang: Nanyang Technology University.

WANATOWSKI, D., 2005. *Strain Softening and Instability of Sand under plane-strain Conditions*. Nanyang: Nanyang Technology University.

WINDULIŃSKI, Ł., KOZICKI, J. & TEJCHMAN, J., 2009. Numerical Simulations of Triaxial Test with Sand Using DEM. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, Volume 56, pp. 149-171.

ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L., 2006. *The Finite Element Method*. 6th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann.

ANEXOS

A – SCRIPT DE GERAÇÃO DA AMOSTRA

```
# -*- coding: utf-8 -*-

from yade import pack,utils,plot,export

import numpy as np
import operator,fractions

# TODAS AS UNIDADES ESTÃO NO S.I.

#####
### 1.PARÂMETROS DE ENTRADA ###
#####

# 1.1 IMPORT PARAMETERS FROM TABLE
nRead=readParamsFromTable(
    PoissonP = 0.25,
    AnguloAtritoP = 45.,
    Porosidade = 0.4,
    MatType = 'frict',
    TestType = '3D',
    PSD =
[[0.0006,0.0008,0.001,0.0012,0.0014,0.0016,0.0018,0.002],[0.01,0.05,0.15,0.35,0.75,0.94,0.99,1.]],
    verlet = 0.35,
    YoungP = 1000.e6,
    unknownOk=True
)
from yade.params import table

# 1.2 PARAMETROS DO MEIO (MACROSCÓPICOS)
DensidadeS = table.DensidadeS #tf/m³
YoungP = table.YoungP #kN/m²
PoissonP = table.PoissonP #Adimensional
AnguloAtritoP = radians(table.AnguloAtritoP)
PorosidadeS = table.Porosidade

# 1.3 DIMENSÕES DOS ELEMENTOS

# 1.3.1 CURVA GRANULOMETRICA DO SOLO - PSD=[[diâmetros],[Quantidade passante Acumulada]]
PSD = table.PSD

# 1.3.2 DADOS MÉDIOS DOS ELEMENTOS
rMeanElemento = ((PSD[0][0]+PSD[0][-1])/2)/2
rRelFuzzElemento = PSD[0][-1]/(2*rMeanElemento)-1
rMaxElemento = PSD[0][-1]/2
rMinElemento = PSD[0][0]/2

# 1.4 TIPO DE MATERIAL
MatType = table.MatType # 'frict', 'cohfrict', 'concrete'

# 1.5 TIPO DE AMOSTRA
TestType = table.TestType
```

1.6 NOME DA AMOSTRA

```
ExportName = 'Packing' + TestType + '-' + str(table.Porosidade)
```

```
#####  
### 2.MATERIAL ###  
#####
```

2.1 Material Meio

```
Material=FricMat(density=2600., frictionAngle=AnguloAtritoP, young=YoungP, poisson=PoissonP)  
O.materials.append(Material)
```

2.2 Material Contorno

```
MatContorno = FricMat(density=2600., frictionAngle=AnguloAtritoP, young=YoungP, poisson=PoissonP)  
O.materials.append(MatContorno)
```

```
#####  
### 3.GEOMETRIA ###  
#####
```

3.1 Triaxial

3.1.1 Dimensões

```
width = max(40.*rMaxElemento,0.05)  
height = 2.*width  
dx = 1.01*2.*rMaxElemento  
dy = width  
dz = height  
CorteTransversal = dy
```

3.1.2 Faces

```
mn,mx=(-.5*dx,-.5*dy,0),(.5*dx,.5*dy,dz)  
walls=aabbWalls([mn,mx],thickness=0,material=MatContorno)  
wallIds=O.bodies.append(walls)
```

```
base=O.bodies[4]  
topo=O.bodies[5]
```

```
#####  
### 4.CÁLCULOS ###  
#####
```

4.1 Factory Parameters

```
MassFlowRate = 220./(CorteTransversal*dz)  
VMAX = 0.1  
VMIN = 0.1  
FCenter = (0.,0.,height/2)  
FExtents2D = (0,width/2.,height/2.)  
FExtents3D = (width/2.,width/2.,height/2.)
```

```
factory = BoxFactory(  
    center = FCenter, extents = FExtents2D,  
    PSDsizes = PSD[0], PSDcum = PSD[1], PSDcalculateMass = True,  
    vMax = VMAX, vMin = VMIN, vAngle = 0., normal = (0.,0.,-1.),
```

```

        maxParticles = -1,
        massFlowRate = MassFlowRate,
        label = 'factory',
        blockedDOFs = 'xYZ',
        materialId = 0
    )

#4.2 Engines
O.engines=[
    ForceResetter(),
    InsertionSortCollider([
        Bo1_Sphere_Aabb(),
        Bo1_Box_Aabb(),
        Bo1_Wall_Aabb(),
        Bo1_Facet_Aabb()
    ], verletDist=table.verlet*2*rMeanElemento),
    InteractionLoop(
        [Ig2_Wall_Sphere_ScGeom(), Ig2_Sphere_Sphere_ScGeom(),
        Ig2_Box_Sphere_ScGeom(), Ig2_Facet_Sphere_ScGeom()],
        [Ip2_FrictMat_FrictMat_MindlinPhys(en=0.2, es=0.2)],
        [Law2_ScGeom_MindlinPhys_Mindlin()]),
    ),
    factory,
    DomainLimiter(lo=(-dx/2,-dy/2.,0.),hi=(dx/2,dy/2.,dz+5*rMeanElemento),iterPeriod=100),
    GlobalStiffnessTimeStepper(
        active=True,
        defaultDt=SpherePWaveTimeStep(radius=rMeanElemento,
density=O.materials[0].density, young=O.materials[0].young),
        timeStepUpdateInterval=10,timestepSafetyCoefficient=0.2
    ),
    NewtonIntegrator(damping=0.5, gravity=[0.,0.,-9.81], label='newton'),
    PyRunner(command='PreencherTriaxial()',iterPeriod=10,label='PrepararAmostra'),
]

```

```

#####
### 5.PyRunner ###
#####

```

```

def Porosity(Region):
    soma=0.
    for b in O.bodies:
        if isinstance(b.shape,Sphere):
            soma+=pi*(b.shape.radius**2)
    return (Region-soma)/Region

```

```

acelerador = 1
Compressao = False
Descompressao = False
AlturaPreenchida = 0

```

```

def PreencherTriaxial():
    global Compressao
    global Descompressao
    global topo
    global AlturaPreenchida
    if Compressao:
        if Porosity(CorteTransversal*topo.state.pos[2])<PorosidadeS:
            topo.state.vel = (0.,0.,1.*acelerador)

```

```

        Descompressao = True
        Compressao = False
        newton.damping = 0.95
    else:
        topo.state.vel = (0,0,-10.0*acelerador)
elif Descompressao:
    if abs(O.forces.f(topo.id)[2])==0:
        if topo.state.vel==(0,0,1.*acelerador):
            AlturaPreenchida=topo.state.pos[2]
        if topo.state.pos==(0,0,dz+rMaxElemento):
            Material.density=DensidadeS*100/(1-
Porosity(CorteTransversal*AlturaPreenchida))
            if AlturaPreenchida>height-rMeanElemento:
                topo.state.vel=(0,0,0)
                calm()
                Descompressao=False
                Material.frictionAngle=radians(35)
                newton.damping=0.0
                PrepararAmostra.command='EstabilizarTriaxial()'
                PrepararAmostra.iterPeriod=1
            else:
                topo.state.vel = (0,0,0)
                Descompressao = False
                factory.massFlowRate =
220/(CorteTransversal*(height-AlturaPreenchida))
                newton.damping = 0.0
        else:
            topo.state.vel=(0,0,0)
            topo.state.pos=(0,0,dz+rMaxElemento)
elif factory.massFlowRate==0:
    Compressao = True
    newton.damping = 0.
    plot.saveDataTxt(fileName='/home/bernardo/Mestrado/Dissertação/Yade
Linux/Triaxial/Resultados/'+ExportName+' - Ensaio.txt')

def EstabilizarTriaxial():
    if topo.state.pos[2]>height:
        topo.state.vel=(0,0,-25)
    else:
        topo.state.vel=(0,0,0)
        if utils.unbalancedForce()<0.005:
            PrepararAmostra.command='FinalizarPreparo()'

def FinalizarPreparo():
    export.textExt(ExportName,'x_y_z_r_matId')
    O.pause()

#####
### 7. RUN SIMULATION ###
#####

O.run()
utils.waitForBatch()

```

B – SCRIPT DO ENSAIO OEDOMÉTRICO

```
# -*- coding: utf-8 -*-
## This script details the simulation of a Oedometric test on sphere packings using Yade

from yade import pack,utils,plot,ympor
import math

# TODAS AS UNIDADES ESTÃO NO S.I.

#####
### 1.INPUTS ###
#####

# 1.1 IMPORT PARAMETERS FROM TABLE
nRead=readParamsFromTable(
    DensidadeP = 2600.,
    YoungP = 800.e6,
    PoissonP = .25,
    AnguloAtritoP = 1.,
    Porosidade = 0.15,
    MatType = 'frict',
    TestDim = '2D',
    PSD =
[[0.0006,0.0008,0.001,0.0012,0.0014,0.0016,0.0018,0.002],[0.01,0.05,0.15,0.35,0.75,0.94,0.99,1.]],
    verlet = 0.035,
    unknownOk=True
)
from yade.params import table

# 1.2 PARTICLE/MEDIUM PARAMETERS
mediumPorosity = table.Porosidade
mediumDensity = table.DensidadeS #kN/m³
particleDensity = table.DensidadeP #tf/m³
particleYoung = table.YoungP #Pa
particlePoisson = table.PoissonP #Adimensional
particleFricAng = radians(table.AnguloAtritoP)
particleNormalCohesion = table.CoesaoN #Pa
particleShearCohesion = table.CoesaoS #Pa

# 1.3 ELEMENTS DIMENSIONS

# 1.3.1 MEDIUM PARTICLE SIZE DISTRIBUTION - PSD=[[diameters],[cumulated retained quantity of
particles]]
PSD = table.PSD

# 1.3.2 SPHERES RADIUS
meanElementRadus = ((PSD[0][0]+PSD[0][-1])/2)/2
maxElementRadus=PSD[0][-1]/2
minElementRadus=PSD[0][0]/2

# 1.4 MATERIAL TYPE
materialType = table.MatType # 'frict', 'cohfrict', 'concrete'

# 1.5 DIMENSIONS (2D OR 3D)
testDimensions = table.TestDim
```

1.7 IMPORT/EXPORT NAMES

```
ImportName = 'Packing' + testDimensions + '-' + str(table.Porosidade)
ExportName = 'OedometricCic' + testDimensions + str(materialType) + '-Phi' + str(table.AnguloAtritoP) + '-Y' +
str(particleYoung/1.e6)+'MPa'+ '-Poisson' + str(particlePoisson) + '-' + str(mediumPorosity)
```

1.8. USER DEFINED FUNCTIONS

1.8.1. POROSITY

```
def Porosity(Region):
    soma=0.
    for b in O.bodies:
        if isinstance(b.shape,Sphere):
            soma+=pi*(b.shape.radius**2)
    return (Region-soma)/Region
```

```
#####
### 2.MATERIAL ###
#####
```

2.1 MEDIUM MATERIAL

```
spheresMaterial=FrictMat(density=particleDensity, frictionAngle=particleFricAng, young=particleYoung,
poisson=particlePoisson)
O.materials.append(spheresMaterial)
```

2.2 BOUNDARY MATERIAL

```
boundaryMaterial=FrictMat(density=particleDensity, frictionAngle=particleFricAng, young=10*particleYoung,
poisson=particlePoisson)
O.materials.append(boundaryMaterial)
```

```
#####
### 3.GEOMETRY ###
#####
```

3.1 PACKING DIMENSIONS

```
width = max(40.*maxElementRadus,0.05)
height = 2.*width
dx = 1.01*2*maxElementRadus
dy = width
dz = height
baseArea = dy
lateralAreaX = dy
lateralAreaY = 1.
```

3.2 BOUNDARIES

```
corner1,corner2 = (-.5*dx,-.5*dy,0.),(.5*dx,.5*dy,dz)
walls = aabbWalls([corner1, corner2], thickness=0., oversizeFactor=2, material=boundaryMaterial)
wallIds = O.bodies.append(walls)
```

3.3 IMPORT SPHERE PACKING

```
O.bodies.append(ympart.textExt(fileName = ImportName, format='x_y_z_r_matId'))
```

3.4. ASSIGN MATERIAL PROPERTIES TO THE SPHERES

```
for b in O.bodies:
    if isinstance(b.shape,Sphere):
        b.material=spheresMaterial
```

3.5. DEFINE BLOCKED DOFs


```

for b in O.bodies:
    if isinstance(b.shape,Sphere):
        b.state.blockedDOFs='xYZ'

#####
### 4.TEST EXECUTION ###
#####

# 4.1. TEST ENGINE
triax = TriaxialStressController(
    thickness = 0.,
    stressMask = 4, #ANDed: 1 for direction 1, 2 for direction 2,
4 for direction 3
    internalCompaction = False, # If true the confining pressure is generated by growing particles
    strainDamping = 0.9,
    stressDamping = 0.9,
)

# 4.2. TEST PARAMETERS
confiningStress = 1000.
testState = 'Unstable'
stabilityThreshold = 0.01

triax.goal1 = 0.
triax.goal2 = 0.
triax.goal3 = -confiningStress

# 4.3. TEST PROCEDURE
def testExecution():
    global testState
    unb=unbalancedForce()
    StressV = (triax.stress(4)[2]+triax.stress(5)[2])/2.
    if testState == 'Unstable':
        if unb<stabilityThreshold and abs(triax.goal3-StressV)/(max(confiningStress,1.))<0.01:
            triax.depth0 = triax.depth
            triax.height0 = triax.height
            triax.width0 = triax.width
            print 'Test Start'
            testState = 'Compression'
        elif testState == 'Compression':
            if unb<stabilityThreshold and abs(triax.goal3-StressV)/(max(confiningStress,1.))<0.01:
                addPlotData()
                print triax.goal3
                if triax.goal3 == -32768000.0:

                    plot.saveDataTxt(fileName='/home/bernardo/Mestrado/Dissertação/Yade
Linux/Oedometric/Resultados/'+ExportName+'.txt')
                    O.pause()

#####
### 5. RECORD AND PLOT DATA ###
#####

def addPlotData():
    E33 = (triax.depth-triax.depth0)/triax.depth0
    plot.addData(

```

```

        dzz = height-abs(O.bodies[triax.wall_front_id].state.pos[2]-
O.bodies[triax.wall_back_id].state.pos[2]),
        ezz = -E33,
        ev = -E33,
        sxx = -(triax.stress(triax.wall_right_id)[0]+triax.stress(triax.wall_left_id)[0])/2,
        syy = -(triax.stress(triax.wall_top_id)[1]+triax.stress(triax.wall_bottom_id)[1])/2,
        szz = -(triax.stress(triax.wall_front_id)[2]+triax.stress(triax.wall_back_id)[2])/2,
        sd = -
(triax.stress(triax.wall_front_id)[2]+triax.stress(triax.wall_back_id)[2])/2+(triax.stress(triax.wall_top_id)[1]+tria
x.stress(triax.wall_bottom_id)[1])/2,
        porosity = Porosity(triax.height*triax.depth),
        voidRatio = Porosity(triax.height*triax.depth)/(1-Porosity(triax.height*triax.depth)),
        CoordNum = utils.avgNumInteractions(),
        MechanicCoordNum = utils.avgNumInteractions(skipFree=True),
        time = O.time,
    )

plot.plots={'ezz':('sxx','syy','szz','sd',None,'porosity'),'time':('ezz',None,'CoordNum','MechanicCoordNum')}
plot.plot()

```

```

#####
### 6.SIMULATION PROCEDURE ###
#####

```

```

O.engines=[
    ForceResetter(),
    InsertionSortCollider([
        Bo1_Sphere_Aabb(),
        Bo1_Box_Aabb(),
        Bo1_Wall_Aabb(),
        Bo1_Facet_Aabb()
    ]), verletDist=table.verlet*2*meanElementRadius),
    InteractionLoop(
        [Ig2_Wall_Sphere_ScGeom(), Ig2_Sphere_Sphere_ScGeom(),
Ig2_Box_Sphere_ScGeom(), Ig2_Facet_Sphere_ScGeom()],
        [Ip2_FrictMat_FrictMat_MindlinPhys(en=0.5, es=0.5)],
        [Law2_ScGeom_MindlinPhys_Mindlin()],
    ),
    GlobalStiffnessTimeStepper(
        active=True,
        defaultDt=SpherePWaveTimeStep(radius=meanElementRadius,
density=O.materials[0].density, young=O.materials[0].young),
        timeStepUpdateInterval=100,timestepSafetyCoefficient=0.8
    ),
    triax,
    PyRunner(command='testExecution()',iterPeriod=100),
    NewtonIntegrator(damping=0.0, gravity=[0.,0.,0.], label='newton'),
]

```

```

#####
### 7. RUN SIMULATION ###
#####

```

```

O.run()
utils.waitForBatch()

```

C – SCRIPT DO ENSAIO BIAxIAL

```
# -*- coding: utf-8 -*-
## This script details the simulation of a Oedometric test on sphere packings using Yade

from yade import pack,utils,plot,ympport
import math

#####
### 1.INPUTS ###
#####

# 1.1 IMPORT PARAMETERS FROM TABLE
nRead=readParamsFromTable(
    DensidadeP = 2600.,
    YoungP = 800.e6,
    PoissonP = 0.25,
    AnguloAtritoP = 30.,
    Porosidade = 0.16,
    MatType = 'frict',
    TestDim = '2D',
    rate = .1,
    PSD =
[[0.0006,0.0009,0.0012,0.0015,0.0018,0.0021,0.0024],[0.001,0.073,0.413,0.768,0.935,0.985,1.]],
    TensaoIsotropica = 2.e6,
    verlet = 0.035,
    unknownOk=True
)
from yade.params import table

# 1.2 PARTICLE/MEDIUM PARAMETERS
mediumPorosity = table.Porosidade
particleDensity = table.DensidadeP          #kg/m³
particleYoung = table.YoungP                #Pa
particlePoisson = table.PoissonP           #Adimensional
particleFricAng = radians(table.AnguloAtritoP)

# 1.3 ELEMENTS DIMENSIONS

# 1.3.1 MEDIUM PARTICLE SIZE DISTRIBUTION
PSD = table.PSD

# 1.3.2 SPHERES RADIUS
meanElementRADIUS = ((PSD[0][0]+PSD[0][-1])/2)/2
maxElementRADIUS=PSD[0][-1]/2
minElementRADIUS=PSD[0][0]/2

# 1.4 MATERIAL TYPE
materialType = table.MatType   # 'frict', 'cohfrict', 'concrete'

# 1.5 DIMENSIONS (2D OR 3D)
testDimensions = table.TestDim

# 1.6 IMPORT/EXPORT NAMES
ImportName = 'Packing' + testDimensions + '-' + str(table.Porosidade)
ExportName = 'Triaxial' + testDimensions + str(materialType) + '-Phi' + str(table.AnguloAtritoP) + '-Y' +
str(particleYoung/1.e6)+'MPa'+ '-Poisson' + str(particlePoisson) + '-' + str(mediumPorosity) + '- Iso' +
str(table.TensaoIsotropica)
```

1.7. USER DEFINED FUNCTIONS

1.7.1. POROSITY

```
def Porosity(Region):
    soma=0.
    for b in O.bodies:
        if isinstance(b.shape,Sphere):
            soma+=pi*(b.shape.radius**2)
    return (Region-soma)/Region
```

```
#####
### 2.MATERIAL ###
#####
```

2.1 MEDIUM MATERIAL

```
materialType == 'frict':
    spheresMaterial=FrictMat(density=particleDensity, frictionAngle=particleFricAng,
    young=particleYoung, poisson=particlePoisson)
```

```
O.materials.append(spheresMaterial)
```

2.2 BOUNDARY MATERIAL

```
boundaryMaterial=FrictMat(density=particleDensity, frictionAngle=particleFricAng, young=10.*particleYoung,
    poisson=2*particlePoisson)
O.materials.append(boundaryMaterial)
```

```
#####
### 3.GEOMETRY ###
#####
```

3.1 PACKING DIMENSIONS

```
width = max(40.*maxElementRadus,0.05)
height = 2.*width
dx = 1.01*2*maxElementRadus
dy = width
dz = height
baseArea = dy
lateralAreaX = dy
lateralAreaY = 1.
```

3.2 BOUNDARIES

```
corner1,corner2 = (-.5*dx,-.5*dy,0),(.5*dx,.5*dy,dz)
walls = aabbWalls([corner1, corner2], thickness=0., oversizeFactor=2, material=boundaryMaterial)
wallIds = O.bodies.append(walls)
```

3.3 IMPORT SPHERE PACKING

```
O.bodies.append(ympart.textExt(fileName = ImportName, format='x_y_z_r_matId'))
```

3.4. ASSIGN MATERIAL PROPERTIES TO THE SPHERES

```
for b in O.bodies:
    if isinstance(b.shape,Sphere):
        b.material=spheresMaterial
```

3.5. DEFINE BLOCKED DOFs

```
for b in O.bodies:
    if isinstance(b.shape,Sphere):
        b.state.blockedDOFs='xYZ'
```

```
#####
### 4.TEST EXECUTION ###
#####
```

4.1. TEST ENGINE

```
triax=TriaxialStressController(
    thickness = 0.,
    stressMask = 6,
    internalCompaction = False,
    strainDamping = 0.9,
    stressDamping = 0.9
)
# ANDED: 1 for direction 1, 2 for direction 2, 4 for direction 3
# If true the confining pressure is generated by growing particles
```

4.2. TEST PARAMETERS

```
strainRate = -table.rate
confiningStress = table.TensaoIsotropica
testState = 'Compression'
stabilityThreshold = 0.01
maxVerticalStrain = 0.3
```

```
triax.goal1 = 0.
triax.goal2 = -confiningStress
triax.goal3 = -confiningStress
```

4.3. TEST PROCEDURE

```
def testExecution():
    global testState
    unbalancedForce()
    if testState == 'Compression':
        Stress1 = (triax.stress(0)[0]+triax.stress(1)[0])/2.
        Stress2 = (triax.stress(2)[1]+triax.stress(3)[1])/2.
        Stress3 = (triax.stress(4)[2]+triax.stress(5)[2])/2.
        if unbalancedForce() < stabilityThreshold and abs(triax.goal1-Stress1)/(max(confiningStress,1.)) < 0.01
and abs(triax.goal2-Stress2)/(max(confiningStress,1.)) < 0.01 and abs(triax.goal3-
Stress3)/(max(confiningStress,1.)) < 0.01:
            triax.depth0 = triax.depth
            triax.height0 = triax.height
            triax.width0 = triax.width
            testState = 'Rupture'
            newton.gravity=[0.,0.,-9.81]
            if testDimensions == '2D':
                triax.stressMask = 2
                triax.goal1 = 0.
                triax.goal2 = -confiningStress
                triax.goal3 = strainRate
                ## lateral stresses during the test
                ## lateral stresses during the test
                ## target strain rate
            elif testDimensions == '3D':
                triax.stressMask = 3
                triax.goal1 = -confiningStress
                triax.goal2 = -confiningStress
                triax.goal3 = strainRate
                ## lateral stresses during the test
                ## lateral stresses during the test
                ## target strain rate
            recorder.dead = False
```

```

elif testState == 'Rupture':

    plot.saveDataTxt(fileName='/home/bernardo/Mestrado/Dissertação/Yade/Triaxial/Resultados/'+ExportName+'.txt')
        axialStrain = abs(-(triax.depth-triax.depth0)/triax.depth0)
        if axialStrain > maxVerticalStrain:
            O.pause()

#####
### 5. RECORD AND PLOT DATA ###
#####

def addPlotData():
    E11 = (triax.width-triax.width0)/triax.width0
    E22 = (triax.height-triax.height0)/triax.height0
    E33 = (triax.depth-triax.depth0)/triax.depth0
    plot.addData(
        d11 = abs(O.bodies[triax.wall_right_id].state.pos[0]-
O.bodies[triax.wall_left_id].state.pos[0]),
        d22 = width - abs(O.bodies[triax.wall_top_id].state.pos[1]-
O.bodies[triax.wall_bottom_id].state.pos[1]),
        d33 = height-abs(O.bodies[triax.wall_front_id].state.pos[2]-
O.bodies[triax.wall_back_id].state.pos[2]),
        e33 = -E33,
        e22 = -E22,
        e11 = -E11,
        ev = E33 + E22 + E33*E22,
        s11 = -(triax.stress(triax.wall_right_id)[0]+triax.stress(triax.wall_left_id)[0])/2,
        s22 = -(triax.stress(triax.wall_top_id)[1]+triax.stress(triax.wall_bottom_id)[1])/2,
        s33 = -(triax.stress(triax.wall_front_id)[2]+triax.stress(triax.wall_back_id)[2])/2,
        sd = -
(triax.stress(triax.wall_front_id)[2]+triax.stress(triax.wall_back_id)[2])/2+(triax.stress(triax.wall_top_id)[1]+triax.stress(triax.wall_bottom_id)[1])/2,
        porosity = Porosity(triax.height*triax.depth),
        voidRatio = Porosity(triax.height*triax.depth)/(1-Porosity(triax.height*triax.depth)),
        CoordNum = utils.avgNumInteractions(),
        MechanicCoordNum = utils.avgNumInteractions(skipFree=True),
        time = O.time,
    )

plot.plots={'e33':('s11','s22','s33','sd',None,'ev'),'time':('CoordNum','MechanicCoordNum',None,'porosity')}
plot.plot()

#####
### 6.SIMULATION PROCEDURE ###
#####

O.engines=[
    ForceResetter(),
    InsertionSortCollider([
        Bo1_Sphere_Aabb(),
        Bo1_Box_Aabb(),
        Bo1_Wall_Aabb(),
        Bo1_Facet_Aabb()
    ]), verletDist=table.verlet*2.*meanElementRadius),
    InteractionLoop(

```

```

        [Ig2_Wall_Sphere_ScGeom(), Ig2_Sphere_Sphere_ScGeom(),
Ig2_Box_Sphere_ScGeom(), Ig2_Facet_Sphere_ScGeom().],
        [Ip2_FrictMat_FrictMat_MindlinPhys(en=0.2, es=0.2)],
        [Law2_ScGeom_MindlinPhys_Mindlin()],
    ),
    GlobalStiffnessTimeStepper(
        active=True,
        defaultDt=SpherePWaveTimeStep(radius=meanElementRadius,
density=O.materials[0].density, young=O.materials[0].young),
        timeStepUpdateInterval=1000,timestepSafetyCoefficient=0.5
    ),
    triax,
    PyRunner(command='testExecution()',iterPeriod=100),
    PyRunner(command='addPlotData()',iterPeriod=1000,label='recorder', dead = True),
    NewtonIntegrator(damping=0.0, gravity=[0.,0.,-9.81], label='newton'),
]

```

```

#####
### 7. RUN SIMULATION ###
#####

```

```

O.run()
utils.waitForBatch()

```

Corrigir gráfico índice de vazios negative (usar deformação)

Resumo, Abstract e agradecimentos