# Distribuição de Renda e Riqueza à Luz dos Novos Fatos Estilizados

**Mauro Patrão**

Brasília-DF

Fevereiro-2017

Universidade de Brasília

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Programa de Pós-Graduação em Economia

# Distribuição de Renda e Riqueza à Luz dos Novos Fatos Estilizados

**Mauro Patrão**

Orientador: Ricardo Araújo

Dissertação de Mestrado em Economia

Brasília-DF

Fevereiro-2017

À minha mãe, por ter sempre me ensinado
a importância de nos excentrarmos

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Ricardo Araújo, pela ampla liberdade que me deu na definição dos rumos da dissertação.

À minha mãe, Isa Helena, pelo enorme amor recebido, eternamente grato!

Ao meu pai, João, pela leitura conjunta da obra magna do Piketty!

À minha irmã, Ana Luiza, ao meu irmão, Rafael, e à mãe dele, Maria Nilda, completando minha família mais próxima!

Aos meus amigos da Matemática, Adail, Jorge e Lucas, valeu por terem me prestigiado na minha defesa!

A@s amig@s da Economia, Allan, André, Érica, Heitor, Natália e Pedro, muito grato por todo apoio!

À minha super amiga, Alessandra, e ao meu super amigo, Jansler, pelo enorme carinho!

*Of the tendencies that are harmful to sound economics, the most seductive, and in my opinion the most poisonous, is to focus on questions of distribution.*

R. Lucas JR. (2004). The Industrial Revolution: Past and Future. FED of Minneapolist.

*Theoretical models, abstract concepts, and equations (such as r > g, to which I return in greater detail below) also play a certain role in my analysis. However this role is relatively modest—as I believe the role of theory should generally be in the social sciences—and it should certainly not be exaggerated. Models can contribute to clarifying logical relationships between particular assumptions and conclusions but only by oversimplifying the real world to an extreme point. Models can play a useful role but only if one does not overestimate the meaning of this kind of abstract operation. All economic concepts, irrespective of how "scientific" they pretend to be, are intellectual constructions that are socially and historically determined, and which are often used to promote certain views, values, or interests. Models are a language that can be useful only if solicited together with other forms of expressions, while recognizing that we are all part of the same conflict-filled, deliberative process.*

T. Piketty (2015). Putting Distribution Back at the Center of Economics: Reflections on Capital in the Twenty-First Century. *Journal of Economic Perspectives.*

DISTRIBUIÇÃO DE RENDA E RIQUEZA À LUZ DOS NOVOS FATOS ESTILIZADOS

# Resumo

Nessa dissertação, apresentamos uma introdução concisa e auto-contida ao extenso assunto da evolução da desigualdade das distribuições de renda e riqueza. Além de apresentar no primeiro capítulo um resumo dos principais fatos empíricos e das explicações teóricas oferecidas por Piketty sobre esse assunto, bem como apresentar com certo detalhe as principais controvérsias relacionadas no último capítulo, a dissertação procura apresentar de forma auto-contida as definições, os modelos e os resultados analíticos que fornecem o fundamento teórico para esse debate. No terceiro capítulo da dissertação, introduzimos um novo modelo de crescimento neoclássico com agentes heterogêneos que generaliza e aperfeiçoa os modelos apresentados em (Piketty e Zucman, 2015) e em (Nirei, 2009; S. Aoki e M. Nirei, 2015a). Também apresentamos um resultado novo relacionando as desigualdades de renda total, de riqueza e de salários.

**Palavras-chave:** Fatos estilizados de Piketty, Modelo de Crescimento Neoclássico, Agentes heterogêneos, Processo de Kesten, Distribuição de Pareto, Curva de Lorenz, Coeficiente de Gini.

# DISTRIBUIÇÃO DE RENDA E RIQUEZA À LUZ DOS NOVOS FATOS ESTILIZADOS


## Abstract

In this thesis, we present a concise and self-contained introduction to the extensive subject of the evolution of income and wealth distributions. Besides presenting in the first chapter a summary of the main empirical facts and theorethical explanations given by Piketty, as well presenting with some detail the main controversies in the final chapter, the thesis try to present in a self-contained way the definitions, the models and the analytical results which provide the theoretical background for this debate. In the third chapter of the thesis, we introduce a new neoclassical growth model with heterogeneous agents which generalizes and improve the models presented in (Piketty and Zucman, 2015) and in (Nirei, 2009; S. Aoki and M. Nirei, 2015a). We also present a new result relating total income, wealth and wage inequalities.



**Keywords:** Piketty's stylized facts, Neoclassical growth model, Heterogeneous agents, Kesten process, Pareto distribution, Lorenz curve, Gini index.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

O recente crescimento da desigualdade de renda e riqueza entre indivíduos e o aumento da parcela da renda do capital na renda nacional nos países desenvolvidos desencadearam a retomada do interesse por esse assunto tanto no meio acadêmico, quanto entre o público em geral. Como mencionado em Foster e Yates (2014, nota 18), nos arquivos do jornal The New York Times, o número de artigos classificados sob o nome “desigualdade de renda” saltou de 2660, entre Janeiro de 1977 e Janeiro de 2007, um período de 30 anos, para 4260, entre Janeiro de 2007 e Janeiro de 2014, um período de apenas 7 anos.

Houve uma retomada do interesse em modelos que expliquem a distribuição da renda entre os fatores e também a distribuição da riqueza entre indivíduos, à luz dos novos fatos estilizados. Além disso, esses modelos podem ser muito importantes no correto entendimento da relação das outras variáveis macroeconômicas com as distribuições de renda e riqueza e com o grau de mobilidade social. Isso é fundamental na correta avaliação de políticas de redistribuição baseadas, por exemplo, na tributação ou na regulação do mercado de trabalho, como a definição do valor do salário mínimo. Num país com o nível de desigualdade existente no Brasil, essas preocupações se tornam ainda mais relevantes, sendo também importante adaptar as teorias gerais às eventuais características específicas de países em desenvolvimento.

As teorias de crescimento e distribuição da segunda metade do século XX foram no geral fortemente influenciadas, além dos trabalhos de Harrod (1939), Domar (1946), Solow (1956) e Swan (1956), pelo trabalho de Kaldor (1961; Jones e Romer, 2010), que foi responsável por sintetizar os assim denominados *Fatos Estilizados de Kaldor*:

1. A produtividade do trabalho cresce a uma taxa sustentável;
2. O capital por trabalhador cresce a uma taxa sustentável;
3. A taxa real de retorno do capital se mantém estável;
4. A razão capital sobre produto se mantém estável;
5. A parcela da renda do capital sobre a renda nacional se mantém estável.

Mais recentemente, principalmente devido aos trabalhos empíricos de Thomas Piketty e seus colaboradores, o aumento da amplitude temporal e espacial nos dados coletados permite termos uma visão mais ampla da evolução das principais variáveis no longo prazo e entre diversos países. À luz desses novos dados, alguns desses fatos estilizados foram confirmados, enquanto outros tiveram que ser revistos (Piketty, 2014 e 2015; Piketty e Zucman, 2015):

1. A taxa real de retorno do capital se manteve em torno de 5% ao ano nos últimos dois milênios.

2. A razão capital sobre produto pode variar substancialmente. Por exemplo na França, ela caiu de cerca de 7, em 1900, para cerca de 2, em 1950, para voltar a subir para cerca de 5, em 2000;

3. A parcela da renda do capital sobre a renda nacional pode variar substancialmente. Por exemplo na França, ela caiu de cerca de 40%, em 1925, para cerca de 25%, em 1955, e depois para cerca de 15%, em 1985, para retornar para cerca de 25%, em 2000.

Observamos que a notável estabilidade da taxa real de retorno do capital recebeu atenção especial por Piketty na sua tentativa de explicar os dados encontrados e também nos seus prognósticos e preocupações sobre a evolução das desigualdades da renda e da riqueza no século XXI. Por outro lado, a denominada *Lei de Bowley*, que afirma a constância da parcela da renda do capital sobre a renda nacional, está claramente em contradição com os dados. Além disso, além da distribuição da renda entre os fatores de produção, os novos dados apresentados nos fornecem um visão sobre a distribuição da renda e da riqueza entre indivíduos (Piketty, 2014; Piketty e Zucman, 2015; Stiglitz, 2015):

1. Aumento da desigualdade entre salários;

2. A desigualdade da riqueza maior do que a desigualdade da renda;

3. Nos EUA, o salário médio permaneceu estagnado nas últimas décadas, mesmo com o aumento da produtividade.

Esse novos fatos contradizem a hipótese formulada por Kuznets (1955), denominada *Lei de Kuznets*, de que a desigualdade de renda aumentaria nos primeiros estágios do desenvolvimento econômico e diminuiria após o pleno desenvolvimento econômico ser atingido.

As explicações apresentadas por Piketty foram alvo de diversas análises, tanto por autores ortodoxos (Acemoglu e Robinson, 2015; Bonnet et ali, 2014; Bjork, 2014; Cowell, 2014; Homburg, 2015; Jones, 2015; Krussel e Smith, 2015; Ray, 2014; Rognlie, 2014; Solow, 2014), quanto por autores heterodoxos (Barbosa-Filho, 2016; Foster e Yates, 2014; Galbraith, 2014; López-Bernardo et ali, 2016; Michl, 2016; Rowthorn, 2014; Semieniuk, 2014; Taylor, 2014; Varoufakis, 2014), tornando essa área bastante efervescente nos últimos anos. A obra magna de Piketty é comparada por muitos à obra magna de Marx, seja pela escolha provocativa do título, seja pela identificação de leis gerais do capitalismo (Acemoglu e Robinson, 2015). Entretanto alguns autores da tradição Marxista preferem estabelecer o paralelo entre a obra de Piketty e a de Keynes, onde o último afirma a não validade da *Lei de Say*, a ausência de limites naturais para o desemprego no capitalismo, o primeiro afirma a não validade da *Lei de Kuznets*, a ausência de limites naturais para a desigualdade no capitalismo (Foster e Yates, 2014).

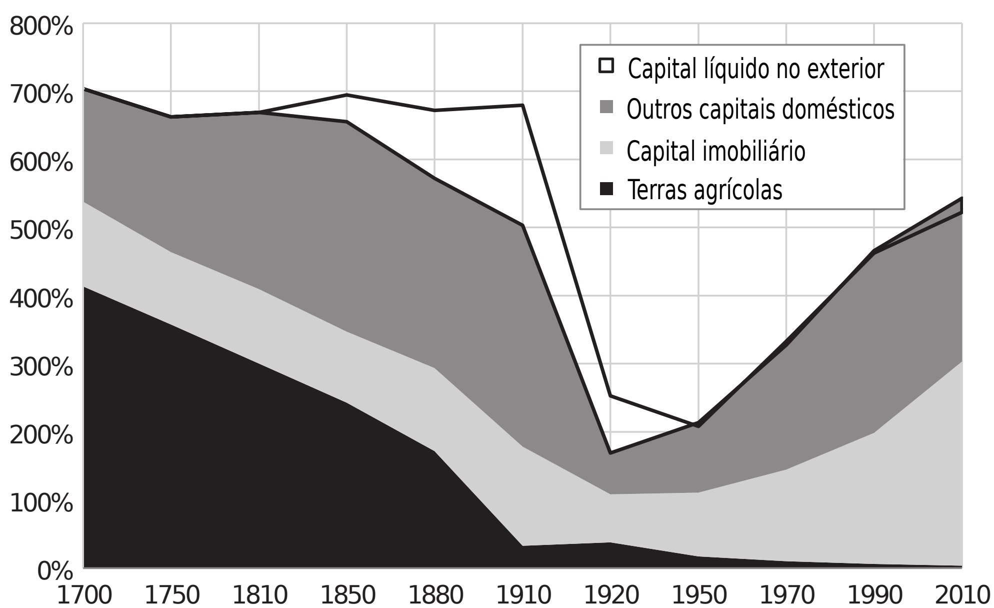
Essas explicações apresentadas por Piketty para os novos fatos empíricos, tanto em (Piketty, 2014), quanto principalmente em (Piketty e Zucman, 2015), dividem-se em duas partes. A primeira, procura explicar a evolução da razão capital sobre produto e também a evolução da distribuição da renda entre os fatores de produção, através de numa versão do modelo de crescimento de Solow-Swan, onde a função de Cobb-Douglas é substituída por uma função de produção com elasticidade de substituição constante e onde tanto o produto, quanto o investimento são quantidades líquidas de depreciação e a taxa líquida de poupança é considerada constante. A segunda, procura estabelecer a relação entre a desigualdade de riqueza entre indivíduos e o diferencial entre a taxa real de retorno do capital e a taxa real de crescimento do produto através de um modelo onde agentes heterogêneos estão sujeitos a choques aleatórios idiossincráticos nas suas taxas líquidas de poupança.

Neste capítulo, para se evitar repetições desnecessárias, as proposições da presente dissertação serão citadas entre parênteses, sem maiores referências.

## 1.1 Distribuição Funcional da Renda

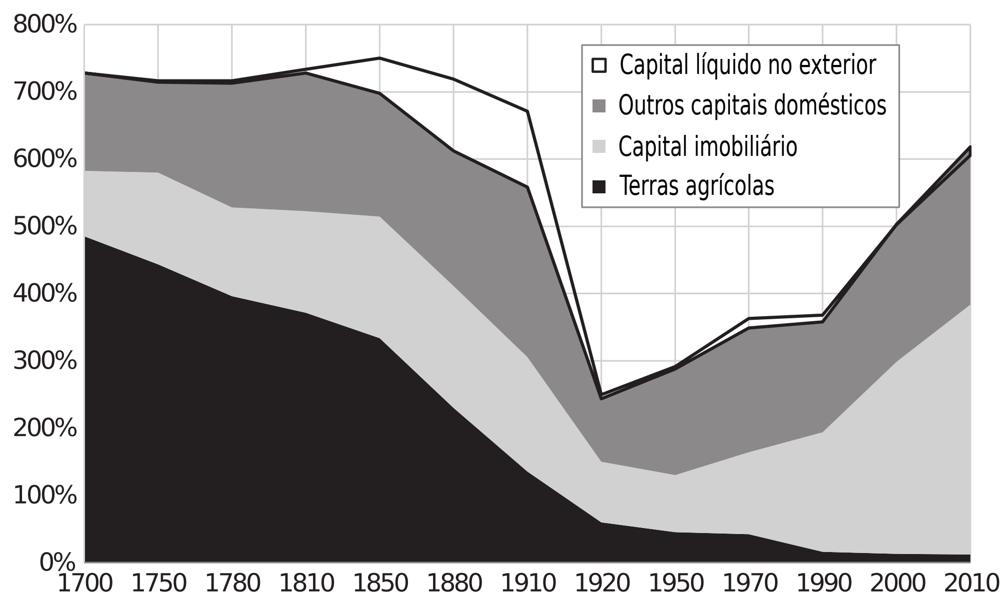
Nesta seção, apresentamos os principais dados empíricos e as principais explicações teóricas dadas por Piketty sobre a evolução da distribuição da renda entre os fatores de produção.

Figura 1.1: Evolução de $\widetilde{\beta}_t$ na Inglaterra



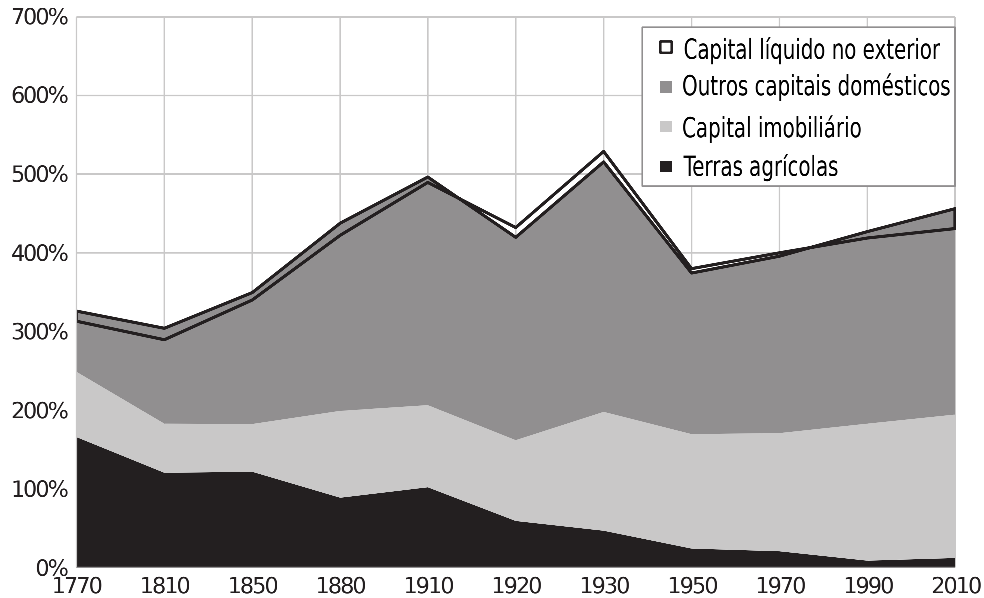
Iniciamos considerando a evolução de longo prazo da razão capital pelo produto líquido $\widetilde{\beta}_t$ e sua decomposição em terras agrícolas, capital imobiliário, outros capitais domésticos e o capital líquido no exterior. Durante toda essa dissertação, o capital acumulado é medido em termo do seu valor a preços de mercado, de modo que adotaremos a identificação utilizada por Piketty entre capital e riqueza. Questionamentos em relação a esse procedimento são abordados em detalhes na segunda seção do último capítulo da presente dissertação. Os gráficos das Figuras 1.1, 1.2, 1.3 foram elaborados a partir dos gráficos, respectivamente, 15.1, 15.2, 15.3 de (Piketty e Zucman, 2015).

Figura 1.2: Evolução de $\widetilde{\beta}_t$ na França




É nítida a similaridade da evolução de $\widetilde{\beta}_t$ ocorrida na França e na Inglaterra, um tanto diferente do que ocorreu nos Estados Unidos. Os dois primeiros já eram economias desenvolvidas no século XIX, enquanto o último ainda

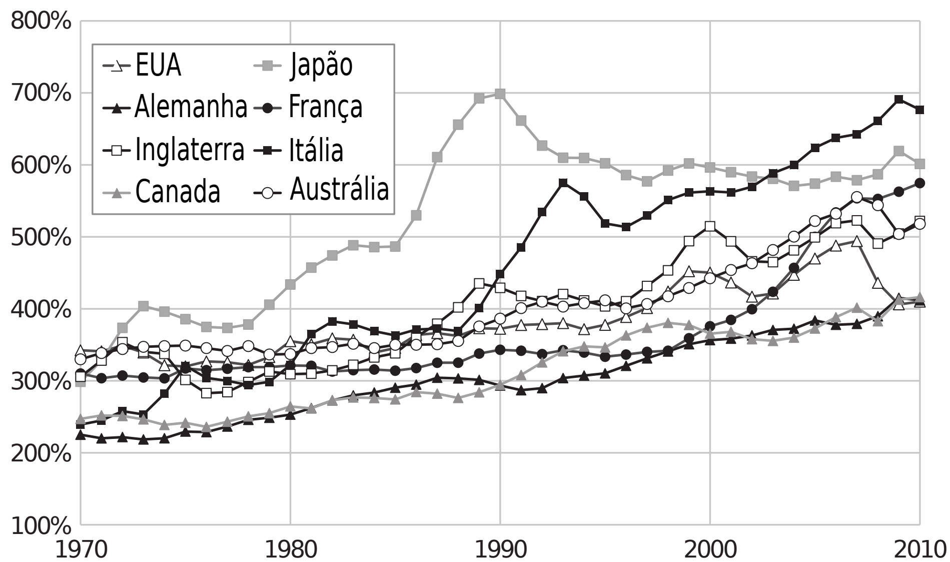
Figura 1.3: Evolução de $\widetilde{\beta}_t$ nos Estados Unidos




se desenvolvia, e foram muito mais duramente afetadas pela Primeira Guerra Mundial, que foi uma guerra essencialmente europeia. Entretanto, em todos os três exemplos, é nítida a diminuição da importância relativa das terras agrícolas em relação ao crescente papel do capital imobiliário e dos outros capitais domésticos. Também é nítida a diminuição da participação do capital líquido no exterior na França e na Inglaterra com o desmantelamento dos seus impérios coloniais, com a Primeira Guerra Mundial, no caso da França, e com a Segunda Guerra Mundial, no caso da Inglaterra.

Vamos agora considerar a evolução nas últimas quatro décadas da razão capital pelo produto líquido $\widetilde{\beta}_t$, fração do produto líquido que remunera o capital $\widetilde{\alpha}_t$ e da taxa real de retorno líquida do capital $\widetilde{r}_t$ de um conjunto de oito países desenvolvidos. Os gráficos das Figuras 1.4, 1.5, 1.6 foram elaborados a partir dos gráficos 15.8, 15.25, 15.26 de (Piketty e Zucman, 2015).

Figura 1.4: Evolução de $\widetilde{\beta}_t$ em oito países desenvolvidos

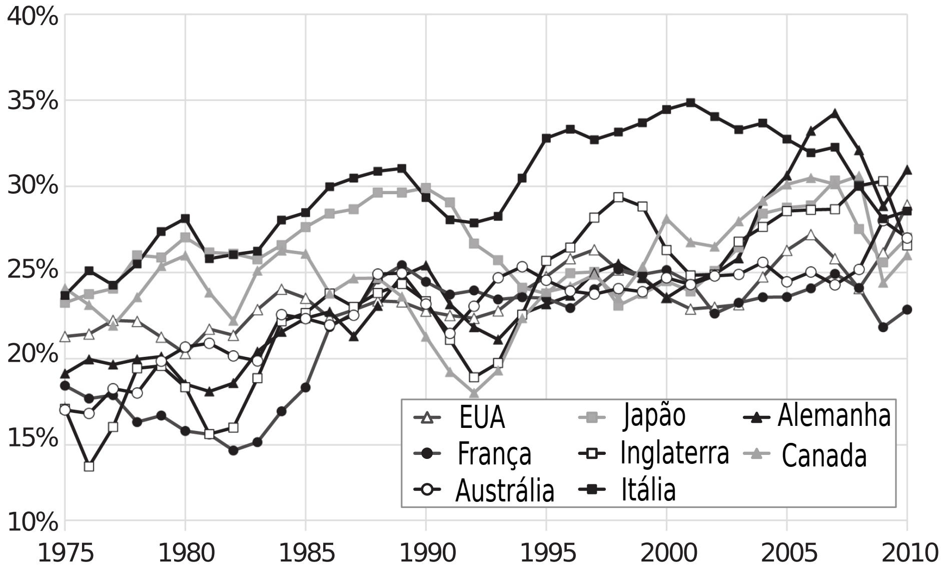



Em linhas gerais, a explicação apresentada por Piketty para esses dados se baseia nos choques exógenos produzidos pela duas Guerras Mundiais e pela Grande Depressão e pelas denominadas Leis Fundamentais do Capitalismo, introduzidas por ele. A *Primeira Lei Fundamental* é de fato uma identidade contábil (confira a Proposição 2.1), que relaciona as variáveis dos três gráficos:

$$\widetilde{r}_t = \frac{\widetilde{\alpha}_t}{\widetilde{\beta}_t} \tag{1.1}$$

A *Segunda Lei Fundamental* pode ser obtida através de alguma versão do modelo de crescimento neoclássico, onde tanto o produto, quanto o investimento são quantidades líquidas de depreciação (confira as Proposições 2.2 e 2.6). Nesse

Figura 1.5: Evolução de $\widetilde{\alpha}_t$ em oito países desenvolvidos

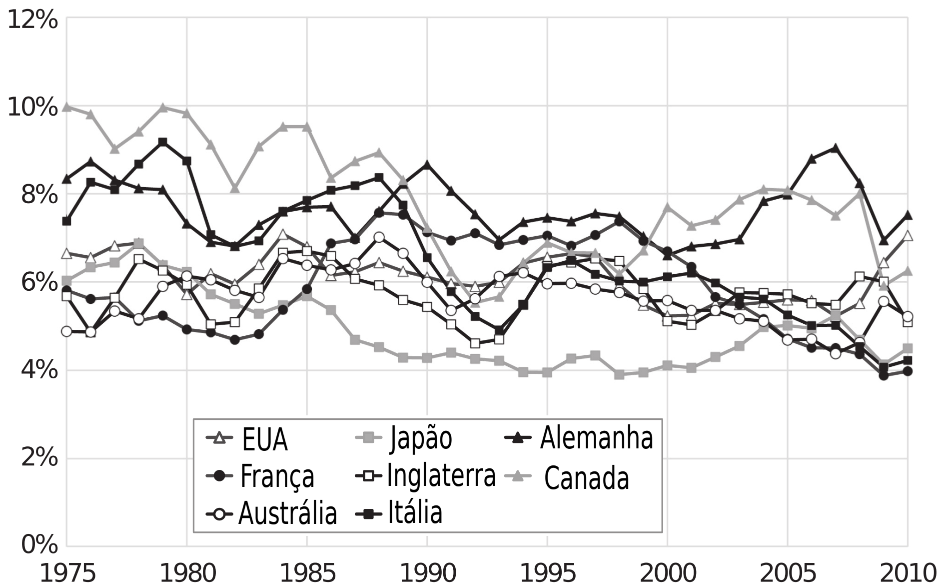



caso, a razão capital pelo produto líquido $\widetilde{\beta}_t$ se aproxima no longo prazo de

$$\widetilde{\beta} = \frac{\widetilde{s}}{g} \tag{1.2}$$

onde $\widetilde{s}$ é a taxa líquida de poupança no estado estacionário e $g$ é a taxa de crescimento do produto também no estado estacionário, dada essencialmente pela taxa de crescimento demográfico mais a taxa de crescimento da produtividade do trabalho. Após os choques ocorridos na primeira metade do século XX, a razão capital pelo produto líquido $\widetilde{\beta}_t$ volta a se aproximar do valor dado pela Segunda Lei. Além disso, a taxa de crescimento $g$ se reduz substancialmente do período entre 1945 e 1975, a denominada *Era Dourada do Capitalismo*, para o período subsequente entre 1975 e 2010, principalmente devido a uma forte redução do crescimento demográfico. Essa redução em $g$ e uma certa estabilidade em $\widetilde{s}$ explicariam então o crescimento de $\widetilde{\beta}_t$ para patamares próximos

Figura 1.6: Evolução de $\widetilde{r}_t$ em oito países desenvolvidos




aos registrados antes da Primeira Guerra Mundial. Como a derivada taxa real de retorno líquida do capital pela razão capital pelo produto líquido é dada por

$$\frac{d\widetilde{r}_t}{d\widetilde{\beta}_t} = -\frac{\widetilde{r}_t}{\widetilde{\sigma}_t \widetilde{\beta}_t} \tag{1.3}$$

de modo que é sempre negativa, então esse crescimento de $\widetilde{\beta}_t$ explicaria o decrescimento de $\widetilde{r}_t$ (confira a Proposição 2.9). Finalmente, como a derivada da fração do produto líquido que remunera o capital pela razão capital pelo produto líquido é dada por

$$\frac{d\widetilde{\alpha}_t}{d\widetilde{\beta}_t} = (\widetilde{\sigma}_t - 1)\frac{\widetilde{r}_t}{\widetilde{\sigma}_t} \tag{1.4}$$

o crescimento simultâneo de $\widetilde{\alpha}_t$ e $\widetilde{\beta}_t$ seria explicado pela elasticidade de substituição líquida $\widetilde{\sigma}_t$ ser maior do que a unidade no longo prazo. Esse é um dos pontos de maior controvérsia nas explicações dadas por Piketty, como abordado em detalhes na terceira seção do último capítulo da presente dissertação. Outro ponto controvertido é que Piketty realiza estáticas comparativas assumindo que a taxa líquida de poupança no estado estacionário $\tilde{s}$ é constante em relação a $g$. Como observado em (Krusell e Smith, 2015) e abordado em detalhes na quarta seção do último capítulo da presente dissertação, essa hipótese pressupõe uma teoria de poupança muito pouco defensável, principalmente nas extrapolações feitas por Piketty para o século XXI.

## 1.2 Distribuição Individual da Renda e da Riqueza

Nesta seção, apresentamos os principais dados empíricos e as principais explicações teóricas dadas por Piketty sobre a evolução da distribuição da renda e da riqueza entre os indivíduos.

Tabela 1.1: Desigualdade nas Distribuições dos Salários

| Extratos | Escandinávia (1970-80) | Europa (2010) | EUA (2010) |
|---|---|---|---|
| 10% de cima | 20% | 25% | 35% |
| 1% superior | 5% | 7% | 12% |
| 9% seguintes | 15% | 18% | 23% |
| 40% do meio | 45% | 45% | 40% |
| 50% de baixo | 35% | 30% | 25% |
| Gini | 19% | 26% | 36% |

Iniciamos apresentando a seguintes tabelas, elaboradas a partir das tabelas 7.1-7.3 de (Piketty, 2014), que são versões simplificadas utilizadas por Piketty das curvas de Lorenz das distribuições dos salários, da renda total e do capital acumulado, e incluem seus respectivos coeficientes de Gini. Informações sobre curva de Lorenz e coeficiente de Gini se encontram no primeiro capítulo do apêndice da presente dissertação. Piketty utiliza a seguinte terminologia para os diferentes extratos sociais: os 10% de cima formam a "classe alta", os 40% do meio formam a "classe média" e os 50% de baixo formam a "classe baixa". A classe alta, por sua vez, pode ser subdividida nos 1% superior, que formam a "classe dominante", e nos 9% seguintes, denominados simplesmente de "abastados".

Tabela 1.2: Desigualdade nas Distribuições da Renda Total

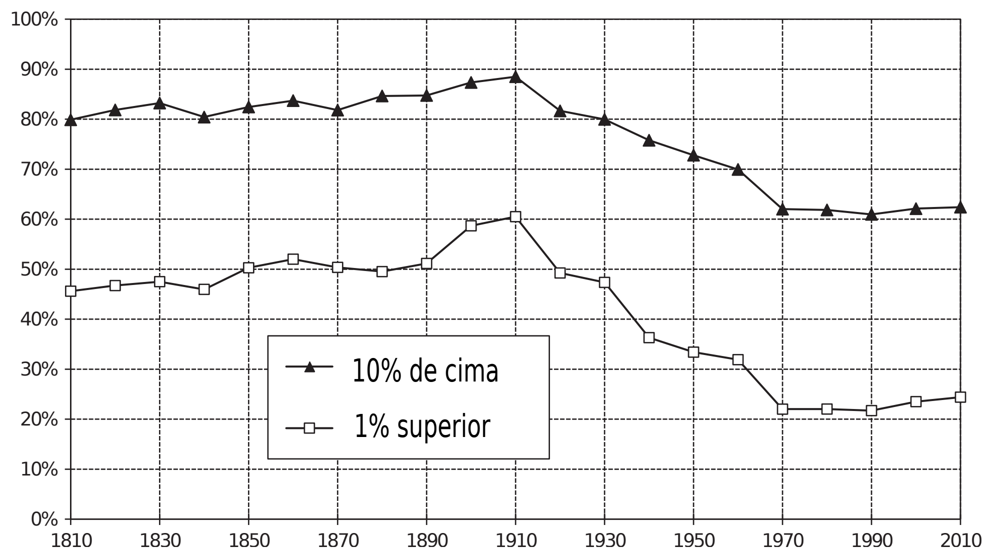
| Extratos | Escandinávia (1970-80) | Europa (2010) | EUA (2010) |
|---|---|---|---|
| 10% de cima | 25% | 35% | 50% |
| 1% superior | 7% | 10% | 20% |
| 9% seguintes | 18% | 25% | 30% |
| 40% do meio | 45% | 40% | 30% |
| 50% de baixo | 30% | 25% | 20% |
| Gini | 26% | 36% | 49% |

Podemos identificar dois padrões claros em relação aos níveis de desigualdade. Primeiro, em relação às três distribuições, a Escandinávia na década de 1970 possui as menores desigualdades, seguida pela Europa em 2010, que por sua vez é seguida pelos Estados Unidos também em 2010, a mais desigual das regiões. Segundo, em relação às três regiões, a distribuição dos salários possui as menores desigualdades, seguida da distribuição da renda total, que por sua vez é seguida pela distribuição do capital acumulado, a mais desigual entre as distribuições.

Tabela 1.3: Desigualdade nas Distribuições do Capital Acumulado

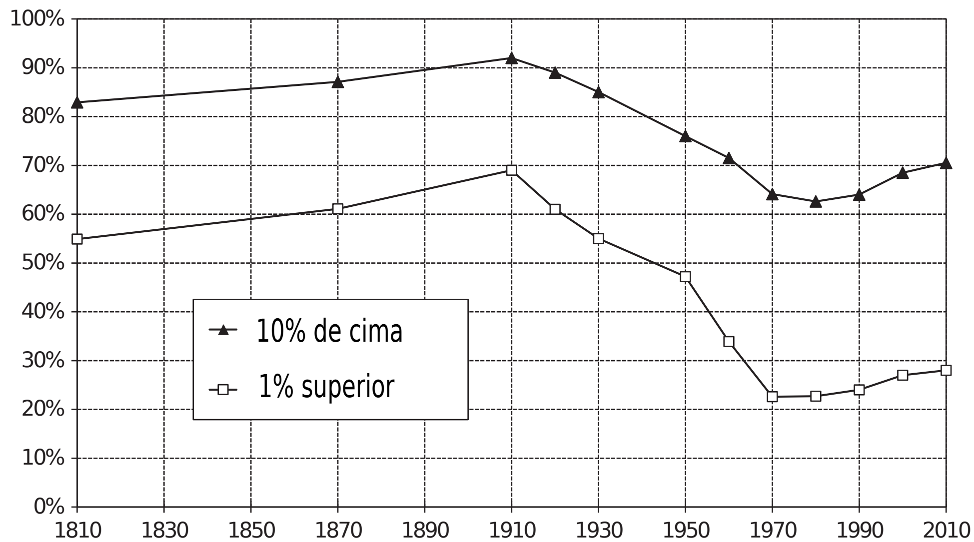
| Extratos | Escandinávia (1970-80) | Europa (2010) | EUA (2010) |
|---|---|---|---|
| 10% de cima | 50% | 60% | 70% |
| 1% superior | 20% | 25% | 35% |
| 9% seguintes | 30% | 35% | 35% |
| 40% do meio | 40% | 35% | 25% |
| 50% de baixo | 10% | 5% | 5% |
| Gini | 58% | 67% | 73% |

Figura 1.7: Evolução de parcelas do capital acumulado na França




Agora apresentamos a evolução nos últimos dois séculos da distribuição do capital acumulado, focando na classe alta (os 10% de cima) e na classe dominante (os 1% de cima). Como uma regra prática, o percentual acumulado pelos 10% de cima fornece uma razoável aproximação para o coeficiente de Gini. Os gráficos das Figuras 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 foram elaborados a partir dos gráficos 15.11, 15.13-15.15 de (Piketty e Zucman, 2015).

Figura 1.8: Evolução de parcelas do capital acumulado na Inglaterra




É nítida a similaridade da evolução da participação das classes alta e dominante na distribuição do capital acumulado ocorrida na França, na Inglaterra e na Suécia, um pouco diferente do que ocorreu nos Estados Unidos. Nos países europeus, a participação das classes alta e dominante na distribuição do capital acumulado foi extremamente elevada até 1910 (80%-90% e 50%-70%), quando se inicia uma persistente redução até 1970, atingindo um patamar substancialmente menor (60%-70% e 20%), e depois um ligeiro crescimento até 2010. Nos Estados Unidos, essa participação das classes alta e dominante saiu de um patamar não muito elevado em 1810 (60% e 25%) para valores bem mais elevados em 1930 (80% e 40%), ainda que menores do que os níveis extremos prevalecentes nos países europeus no século XIX, quando se inicia uma persistente

Figura 1.9: Evolução de parcelas do capital acumulado na Suécia

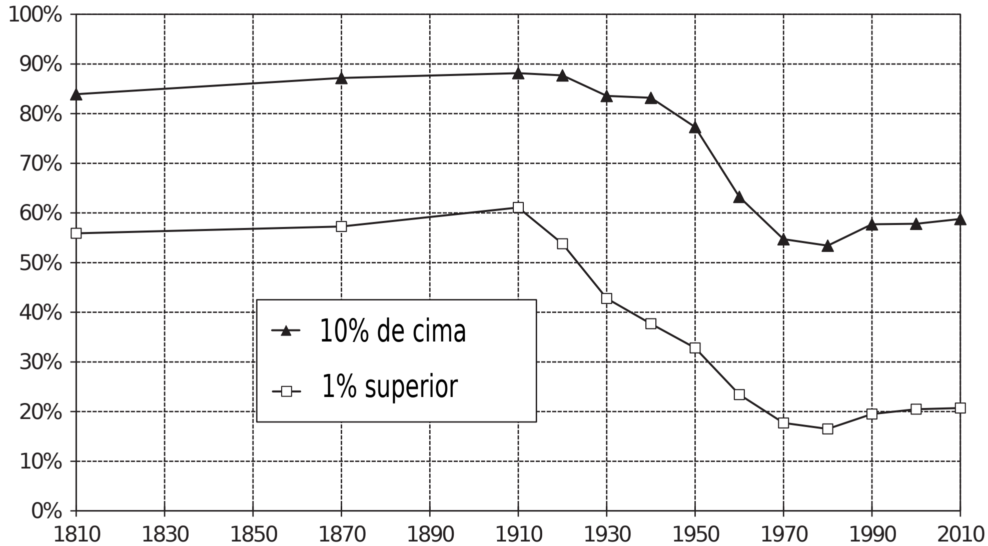
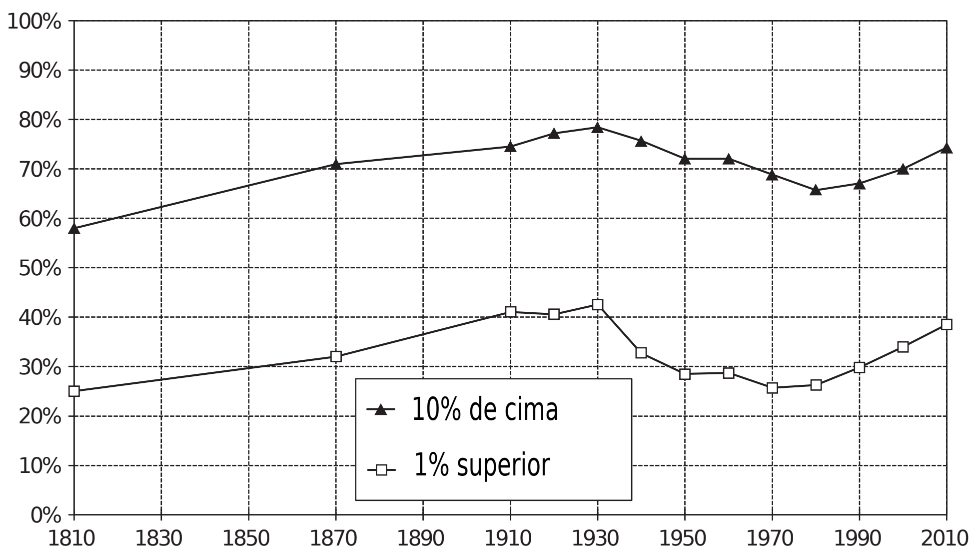



Figura 1.10: Evolução de parcelas do capital acumulado nos EUA



redução até 1970, essencialmente retornando aos valores de 1810, e depois um substancial crescimento até 2010, voltando ao patamar de 1930.

A explicação apresentada por Piketty para esses dados também se baseia nos choques exógenos produzidos pela duas Guerras Mundiais e pela Grande Depressão, mas devido a sua influência tanto na destruição de capital, quanto na criação da tributação progressiva sobre a renda e a herança. Esses fatores provocaram a substancial redução do diferencial $\widetilde{r}_t - g$ entre a taxa real de retorno líquida do capital e a taxa real de crescimento do produto e a consequente redução na desigualdade da distribuição do capital acumulado, como explicado abaixo. Se levarmos em conta os efeitos da tributação, esse diferencial passou a ser negativo nos últimos cem anos, período que coincide com a redução da participação das classes alta e dominante na distribuição do capital acumulado. Uma das principais preocupações expressas na obra magna de Piketty é que reduções da tributação, devido a dispustas globais pela atração de capitais, e também reduções nas taxas de crescimento demográfico e do crescimento da produtividade do trabalho possam levar a um aumento do diferencial $\widetilde{r}_t - g$, com o consequente retorno da desigualde da distribuição do capital acumulado a níveis próximos aos prevalecentes antes da Primeira Guerra Mundial. Os gráficos das Figuras 1.11 e 1.12 foram elaborados a partir dos gráficos 15.27 e 15.28 de (Piketty e Zucman, 2015).

A justificativa teórica para a ligação entre o diferencial $\widetilde{r}_t - g$ e a participação das classes alta e dominante na distribuição do capital acumulado se dá através de um modelo de crescimento e distribuição relativamente simples, com agentes heterogêneos, onde a taxa de retorno líquida do capital $\widetilde{r}$ é constante e dada exogenamente e a taxa de poupança líquida pode variar entre os indiví-

Figura 1.11: Evolução de $\tilde{r}_t$ e $g$ pré-tributação no mundo

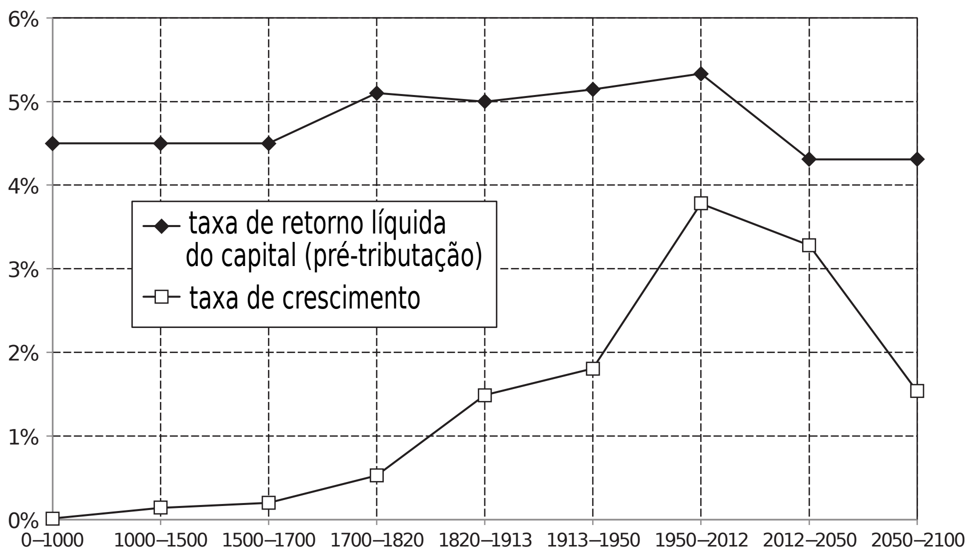
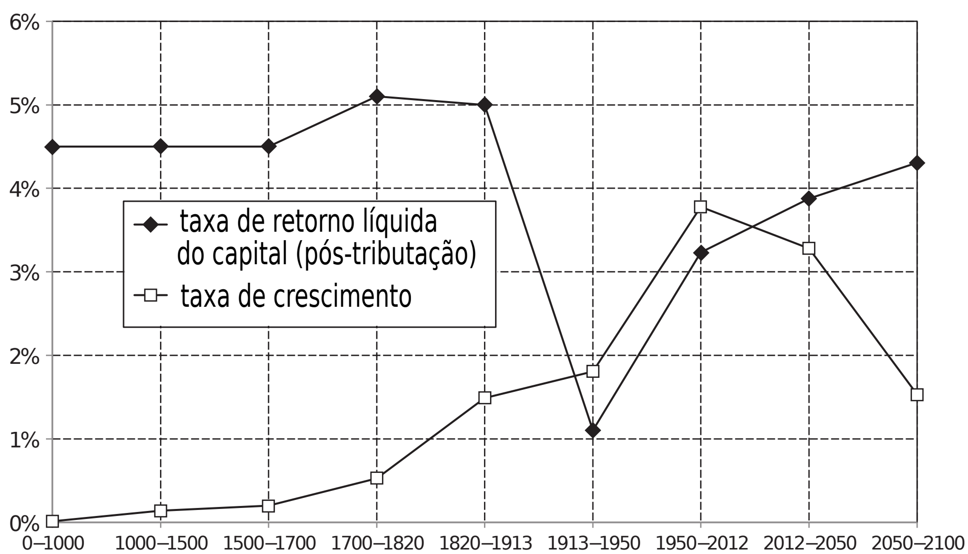



Figura 1.12: Evolução de $\tilde{r}_t$ e $g$ pós-tributação no mundo



duos através de choques aleatórios idiossincráticos. O capital acumulado pelos indivíduos satisfaz o que é conhecido na literatura como *processo de Kesten* e sua distribuição converge para uma distribuição estacionária cuja cauda superior se aproxima assintoticamente de uma distribuição de Pareto (Kesten, 1973, 1974; Goldie, 1991). Se a distribuição da taxa de poupança líquida é igual a $\widetilde{s}/p$ com probabilidade $p$ e é igual a zero com probabilidade $1-p$, o correspondente expoente de Pareto é dado por

$$P = \frac{\log(1/p)}{\log\left(\dfrac{\widetilde{s}}{p}\dfrac{1+\widetilde{r}}{1+g}\right)} \tag{1.5}$$

que está inversamente relacionado à desigualdade (confira a Proposição 3.8). Nesse caso mais simples, segue então que um aumento no diferencial $\widetilde{r}-g$ diminui o expoente $P$, consequentemente aumentando a desigualdade. Os detalhes desse modelo de Piketty são apresentados na última seção do terceiro capítulo da presente dissertação, enquanto informações sobre processo de Kesten e distribuição de Pareto se encontram no primeiro capítulo do apêndice da presente dissertação.

O fato de Piketty apresentar um modelo macroeconômico onde a taxa de retorno líquida do capital $\widetilde{r}$ é constante e dada exogenamente, foi alvo de críticas por parte de alguns autores (Stiglitz, 2015). Uma possível resposta a essas críticas é a versão do modelo de Solow-Swan com agentes heterogêneos apresentada em (Nirei, 2009; S. Aoki e M. Nirei, 2015a), onde cada agente tem acesso à mesma tecnologia dada por uma função de Cobb-Douglas está sujeito a choques aleatórios idiossincráticos na produtividade do trabalho. Nesse modelo, o capital acumulado pelos indivíduos também é um processo de Kesten, de modo que sua distribuição também converge para uma distribuição estacionária cuja cauda superior se aproxima assintoticamente de uma distribuição de Pareto, cujo coeficiente também depende do diferencial $\tilde{r}_t - g$. Os detalhes desse modelo de Nirei são apresentados na penúltima seção do terceiro capítulo da presente dissertação. Uma detalhada panorâmica sobre modelos econômicos que produzem distribuições do capital acumulado com cauda superior de Pareto é apresentada em (Benhabib e Bisin, 2016). Como veremos na próxima seção, uma das principais contribuições da presente dissertação é generalizar e aperfeiçoar os modelos de Nirei e de Piketty.

## 1.3 Principais Resultados

O primeiro objetivo dessa dissertação sempre foi o de fornecer uma introdução clara e concisa a esse assunto extenso e de fundamental importância, sobre a evolução da desigualdade das distribuições de renda e riqueza. Além de apresentar um resumo dos principais fatos empíricos sobre esse assunto e das explicações oferecidas por Piketty na introdução, bem como apresentar com certo detalhe as principais controvérsias relacionadas no último capítulo, a dissertação procura apresentar de forma auto-contida, as definições, os modelos e os resultados analíticos que fornecem o fundamento desse debate. Por exemplo, diversas fórmulas relacionando as principais variáveis nas suas versões líquida e bruta, muito utilizadas nas argumentações, são apresentadas de forma organizada e com suas respectivas demonstrações. Além desse objetivo prioritário, alguns resultados novos aparecem nos dois capítulos técnicos da parte principal, como também no apêndice. Cada um dos dois capítulos técnicos possui um respectivo capítulo no apêndice, de modo que todas as demonstrações que envolvem técnicas de cálculo diferencial e integral são deixadas para o respectivo capítulo do apêndice, enquanto demonstrações que envolvem apenas técnicas algébricas, como manipulação com expoentes, permanecem no corpo principal da dissertação. Vamos agora apresentar os principais resultados novos que aparecem na dissertação.

No segundo capítulo, apresentamos uma versão um pouco mais geral do modelo de crescimento neoclássico, onde a taxa de poupança bruta pode ser uma função do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo. A dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo é dada por

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s(k_t)f(k_t) \tag{1.6}$$

onde $g$ é a taxa de crescimento da quantidade de tempo de trabalho efetivo, $\delta$ é a taxa de depreciação, $k_t$ é estoque de capital por tempo de trabalho efetivo no tempo $t$, $s(k_t)$ taxa de poupança bruta no período entre $t$ e $t+1$ e $y_t = f(k_t)$ é a renda bruta por tempo de trabalho efetivo no período entre $t$ e $t+1$. Nesse modelo mais geral, também obtemos a Segunda Lei Fundamental do Capitalismo de Piketty, mencionada na primeira seção desta introdução (confira a Proposição 2.6). O interessante dessa abordagem mais geral, é que conseguimos uma descrição concisa e unificada do modelo neoclássico padrão, onde a taxa de poupança bruta é constante e dada por $s(k_t) = s$ (confira a Proposição 2.12), do modelo implícito utilizado por Piketty, conforme a interpretação dada em (Krusell e Smith, 2015), onde a taxa de poupança líquida $\widetilde{s}$ é constante e taxa de poupança bruta é dada por

$$s(k_t) = \widetilde{s} + \delta(1-\widetilde{s})\frac{k_t}{f(k_t)} \tag{1.7}$$

(confira as Proposições 2.13 e 2.14), bem do como do modelo que surge da agregação do modelo desagregado apresentado no terceiro capítulo da presente dissertação e descrito a seguir.

No terceiro capítulo, apresentamos um modelo de distribuição que pode ser considerado a versão desagregada do modelo agregado apresentado no capítulo anterior. Esse modelo generaliza e aperfeiçoa os modelos apresentados em (Piketty e Zucman, 2015) e em (Nirei, 2009; S. Aoki e M. Nirei, 2015a) nos seguintes aspectos:

1. Os estoques de capital associados às famílias são introduzidos explicitamente como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, o que torna mais precisa a ligação entre o modelo e a realidade e facilita futuras simulações computacionais. Esse ponto não é sequer mencionado nos modelos de Nirei e de Piketty.

2. O processo de herança e o crescimento populacional são introduzidos explicitamente no modelo, de modo micro-fundamentado, e interconectados. Nos modelos de Nirei e de Piketty os indivíduos vivem infinitamente, não havendo portanto processo de herança, enquanto que o crescimento é introduzido de maneira ad hoc no nível agregado.

3. Assim como no modelo de Nirei e diferentemente do modelo de Piketty, a taxa de retorno do capital é determinada endogenamente através de uma função de produção.

4. A função de produção possui elasticidade de substituição bruta constante e maior ou igual a um ($\sigma \geq 1$). No modelo de Nirei, a função de produção é Cobb-Douglas, de modo que a elasticidade de substituição é igual a um ($\sigma = 1$).

5. Assim como no modelo de Nirei, o processo de produção está sujeito à choques de produtividade introduzidos como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com esperança igual a um. No modelo de Nirei, esses choques de produtividade são conhecidos antes do processo de produção, de modo que a possibilidade de prejuízos é completamente excluída do modelo. No modelo desenvolvido na presente dissertação, esse choques são conhecidos apenas depois do processo produtivo. A inspiração concreta para esse modelo vem de uma economia agrária, onde os produtores sofrem, em cada período, choques de produtividade aleatórios devido, por exemplo, a questões climáticas ou ao aparecimento de pragas. Além de um maior realismo, o modelo desenvolvido na presente dissertação evita inconsistências internas presentes no modelo de Nirei e apresentadas ao final da penúltima seção do terceiro capítulo.

6. Diferentemente do modelo de Nirei, as taxas de depreciação do capital associadas às famílias são introduzidas como variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com esperança constante.

7. Assim como no modelo de Piketty e diferentemente do modelo de Nirei, as taxas de poupança associadas às famílias são introduzidas como um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Essas as taxas de poupança podem estar correlacionadas com os choques de produtividade.

8. Diferentemente do modelo de Nirei, ao se introduzir a tributação da renda e da herança, os efeitos no estado estacionário do modelo agregado são

corretamente considerados.

A agregação do modelo desagregado descrito acima é um caso particular do modelo geral apresentado no segundo capítulo da presente dissertação com as seguintes características:

1. A taxa de poupança bruta agregada é dada por

$$s(k_t) = s^y - (1 - s^w)(1 - \alpha) f(k_t)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{1.8}$$

   onde $s^w$ e $s^y$ são as esperanças das taxas de poupança associadas, respectivamente, aos salários e à produção (confira a Proposição 3.2).

2. Mesmo sem a hipótese do agente representativo e sem a existência de mercado de capitais, a taxa média real de retorno bruto do capital é aproximadamente igual a $r_t = f'(k_t)$, coincidindo com a esperança da taxa real de retorno bruto do capital obtida por uma dada família no período entre $t$ e $t+1$ (confira a Proposição 3.1).

3. Obtemos expressões explícitas para o estoque de capital por tempo de trabalho efetivo no tempo no estado estacionário para os seguintes valores da elasticidade de substituição $\sigma = 1$ e 2 (confira a Proposição 3.3).

Em relação às distribuição estacionárias do modelo desagregado, além de verificar sua existência, mostramos que elas apresentam as seguintes características:

1. A cauda superior da distribuição estacionária do estoque de capital das famílias por tempo de trabalho efetivo é aproximadamente igual à cauda

de uma distribuição de Pareto, cujo expoente $P$ é uma função decrescente do diferencial $\widetilde{r}_t - g$ (confira a Proposição 3.4). Assim como no modelo de Piketty, um aumento no diferencial $\widetilde{r} - g$ diminui o expoente $P$, consequentemente aumentando a desigualdade.

2. Temos a seguinte relação entre as curvas de Lorenz das distribuições, respectivamente, da renda líquida total e do estoque de capital

$$L_{\widetilde{Y}}(x) = \widetilde{\alpha}_t L_K(x) + (1 - \widetilde{\alpha}_t)x \tag{1.9}$$

e também a seguinte relação entre seus coeficientes de Gini

$$G_{\widetilde{Y}} = \widetilde{\alpha}_t G_K \tag{1.10}$$

onde $\widetilde{\alpha}_t$ é a fração do produto líquido que remunera o capital (confira a Proposição 3.5). O mesmo resultado vale trocando-se as variáveis líquidas pelas variáveis brutas. Esse resultado mostra que, no modelo desenvolvido na presente dissertação, a desigualdade na distribuição do capital acumulado é muito maior do que a desigualdade na distribuição da renda total, o que é corroborado pelos fatos empíricos apresentados nas tabelas da segunda seção da presente introdução. Em particular, está incorreta a afirmação apresentada em (Nirei, 2009, página 10) de que as distribuições do capital acumulado e da renda total seriam as mesmas.

O último resultado apresentado acima em relação ao modelo segue de fato da seguinte proposição mais geral demonstrada nas Proposições A.1 e A.3.

**Proposição 1.1** *Se as ordens do capital acumulado e dos salários coincidem e se a taxa real de retorno líquido do capital $\widetilde{r}_t$ é constante em relação ao estoque de capital acumulado, então*

$$L_{\widetilde{Y}}(x) = \widetilde{\alpha}_t L_K(x) + (1 - \widetilde{\alpha}_t) L_w(x) \tag{1.11}$$

*e*

$$G_{\widetilde{Y}} = \widetilde{\alpha}_t G_K + (1 - \widetilde{\alpha}_t) G_w \tag{1.12}$$

*onde $L_{\widetilde{Y}}, L_K, L_w$ são as curvas de Lorenz e $G_{\widetilde{Y}} Y, G_K, G_w$ são os coeficientes de Gini das distribuições das distribuições, respectivamente, da renda líquida total, do capital acumulado e dos salários e $\widetilde{\alpha}_t$ é a fração do produto líquido que remunera o capital.*

Esse resultado é verificado aproximadamente pelo dados empíricos, conforme mostram as seguintes tabelas, elaboradas a partir das tabelas apresentadas na segunda seção da presente introdução, e onde as médias são calculadas a partir da proposição acima.

Tabela 1.4: Desigualdade na Escandinávia (1970-80)

| Extratos | Salários | Capital | Renda Total | Média ($\widetilde{\alpha}_t = 20\%$) |
|---|---|---|---|---|
| 10% de cima | 20% | 50% | 25% | 26% |
| 1% superior | 5% | 20% | 7% | 8% |
| 9% seguintes | 15% | 30% | 18% | 18% |
| 40% do meio | 45% | 40% | 45% | 44% |
| 50% de baixo | 35% | 10% | 30% | 30% |
| Gini | 19% | 58% | 26% | 27% |

Tabela 1.5: Desigualdade na Europa (2010)

| Extratos | Salários | Capital | Renda Total | Média ($\widetilde{\alpha}_t = 30\%$) |
|---|---|---|---|---|
| 10% de cima | 25% | 60% | 35% | 35% |
| 1% superior | 7% | 25% | 10% | 12% |
| 9% seguintes | 18% | 35% | 25% | 23% |
| 40% do meio | 45% | 35% | 40% | 42% |
| 50% de baixo | 30% | 5% | 25% | 23% |
| Gini | 26% | 67% | 36% | 38% |

Tabela 1.6: Desigualdade nos EUA (2010)

| Extratos | Salários | Capital | Renda Total | Média ($\widetilde{\alpha}_t = 30\%$) |
|---|---|---|---|---|
| 10% de cima | 35% | 70% | 50% | 46% |
| 1% superior | 12% | 35% | 20% | 19% |
| 9% seguintes | 23% | 35% | 30% | 27% |
| 40% do meio | 40% | 25% | 30% | 35% |
| 50% de baixo | 25% | 5% | 20% | 19% |
| Gini | 36% | 73% | 49% | 47% |

## 1.4 Próximos Passos

Nesta seção, apresentamos de forma concisa e não exaustiva alguns próximos passos que podem ser interessantes em futuras pesquisas:

1. Realizar as estáticas comparativas a partir dos resultados apresentados na Proposição 3.3, o que não foi feito na presente dissertação.

2. Desenvolver uma versão multi-setorial do modelo apresentado, como defendido em (Stiglitz, 2015) e em (Piketty, 2015, página 81). Iniciar incluindo um bem não produzido e que não se deprecia, como a terra.

3. Desenvolver uma versão do modelo apresentado que leve em conta algum tipo de grau de monopólio, de modo a explicar, por exemplo, a estagnação do salário médio, mesmo com o aumento da produtividade do trabalho, como defendido em (Stiglitz, 2015).

4. Desenvolver uma versão do modelo apresentado em economia aberta, de modo a se analisar os possíveis efeitos da globalização na evolução das desigualdades.

5. Aperfeiçoar a modelagem do processo de herança e determinar o grau de mobilidade social na distribuição estacionária dos modelos, ou seja, a parcela do estoque de capital de origem hereditária. Diversos trabalhos podem ser interessantes neste ponto, tais como (Becker e Tomes 1979; Becker et ali, 2015; Benabou e Ok, 2001; Bevan, 1979; Cowell, 1998; Fields e Ok, 1999).

6. Realizar simulações computacionais para se determinar o que ocorre fora da cauda superior das distribuições e fazer comparações com resultados empíricos e teóricos apresentados, por exemplo, em (Moura e Ribeiro, 2009, 2013), onde essa parte da distribuição da renda total é descrita pela denominada *curva de Gompertz*, e em (Moura, Ribeiro e Soares, 2016), onde a distribuição inteira da renda total é descrita em termos da denominada *estatística de Tsallis*. Neste ponto, talvez seja interessante conhecer melhor os métodos da Física-Estatística utilizados para analisar

as distribuições de renda e de riqueza, como apresentados em (Aoki e Yoshikawa, 2007; Chakrabarti et ali, 2013).

7. Analisar se os dados empíricos confirmam aproximadamente as hipóteses da Proposição 1.1 e, no caso dessa confirmação, analisar as possíveis explicações teóricas.

Diversos outros trabalhos recentes desenvolvem modelos com agentes heterogêneos e podem ser fonte de boas ideias para o desenvolvimento de novos modelos. Por exemplo, em (Aoki e Nirei, 2015a), onde uma versão do modelo de Ramsey é construído, em (Benhabib, Bisin e Zhu, 2011), onde um modelo com agentes com vida finita é desenvolvido, em (Benhabib, Bisin e Zhu, 2015), onde uma versão do modelo de Bewley é apresentado, e em (Aoki e Nirei, 2015b), onde um modelo explicando conjuntamente a *Lei de Zipf* e a *Lei de Pareto* pode ser encontrado.

# Capítulo 2

# Distribuição Funcional da Renda

## 2.1 Leis Fundamentais do Capitalismo de Piketty

Nesta seção, consideramos uma economia fechada e sem governo e uma dinâmica de tempo discreto, onde $t$ pode estar descrevendo, por exemplo, anos, trimestres, ou meses. A denominada *Primeira Lei Fundamental do Capitalismo* de Piketty é apenas uma identidade contábil. Denotando o *produto líquido no período entre* $t$ *e* $t+1$ por $\widetilde{Y}_t$, o *estoque de capital no tempo* $t$ por $K_t$ e a *fração do produto líquido que remunera o capital no período entre* $t$ *e* $t+1$ por $\widetilde{\alpha}_t$, temos que a *taxa real de retorno líquida do capital no período entre* $t$ *e* $t+1$ é dada por

$$\widetilde{r}_t = \frac{\widetilde{\alpha}_t \widetilde{Y}_t}{K_t} \tag{2.1}$$

Denotando a *razão capital pelo produto líquido no período entre* $t$ *e* $t+1$ por

$$\widetilde{\beta}_t = \frac{K_t}{\widetilde{Y}_t} \tag{2.2}$$

e dividindo o numerador e o denominador da equação (2.1) por $\widetilde{Y}_t$, o seguinte resultado segue imediatamente.

**Proposição 2.1** *Vale a seguinte identidade contábil*

$$\widetilde{r}_t = \frac{\widetilde{\alpha}_t}{\widetilde{\beta}_t} \tag{2.3}$$

Já a denominada *Segunda Lei Fundamental do Capitalismo* de Piketty do seguinte modelo simples de acumulação de capital onde o produto líquido é dado exogenamente. Denotando a *poupança líquida no período entre $t$ e $t+1$* por $\widetilde{S}_t$, temos que

$$K_{t+1} = K_t + \widetilde{S}_t \tag{2.4}$$

uma vez que poupança líquida é igual ao investimento líquido numa economia fechada. A *taxa de poupança líquida no período entre $t$ e $t+1$* é dada por

$$\widetilde{s}_t = \frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{Y}_t} \tag{2.5}$$

enquanto a *taxa de crescimento do produto líquido entre o período entre $t$ e $t+1$ e o período entre $t+1$ e $t+2$* é dada por

$$\widetilde{g}_t = \frac{\widetilde{Y}_{t+1} - \widetilde{Y}_t}{\widetilde{Y}_t} \tag{2.6}$$

de modo que

$$\widetilde{Y}_{t+1} = (1 + \widetilde{g}_t)\widetilde{Y}_t \tag{2.7}$$

Finalmente, dividindo a equação (2.4) por $\widetilde{Y}_{t+1}$, obtemos que

$$\widetilde{\beta}_{t+1} = \frac{\widetilde{\beta}_t + \widetilde{s}_t}{1 + \widetilde{g}_t} \tag{2.8}$$

O resultado seguinte é a *Segunda Lei Fundamental do Capitalismo* de Piketty.

**Proposição 2.2** *Se a taxa de poupança líquida $\widetilde{s}_t$ é uma constante $\widetilde{s} \geq 0$ e a taxa de crescimento do produto líquido $\widetilde{g}_t$ é uma constante $\widetilde{g} > 0$, então a razão capital pelo produto líquido $\widetilde{\beta}_t$ se aproxima no longo prazo da razão $\widetilde{s}/\widetilde{g}$.*

**Prova:** Pela equação (2.8), temos que

$$\widetilde{\beta}_{t+1} - s/\widetilde{g} = \frac{\widetilde{\beta}_t + \widetilde{s}}{1+\widetilde{g}} - \frac{\widetilde{s}}{\widetilde{g}} = \frac{\widetilde{g}\widetilde{\beta}_t + \widetilde{s}\widetilde{g} - \widetilde{s}\widetilde{g} - \widetilde{s}}{\widetilde{g}(1+\widetilde{g})} = \frac{\widetilde{\beta}_t - \widetilde{s}/\widetilde{g}}{1+\widetilde{g}} \tag{2.9}$$

Dessa equação, segue então, por uma indução imediata, que

$$\widetilde{\beta}_t - \widetilde{s}/\widetilde{g} = \frac{\widetilde{\beta}_0 - \widetilde{s}/\widetilde{g}}{(1+\widetilde{g})^t} \tag{2.10}$$

que tende para zero, quando $t$ tende para o infinito, uma vez que $1+\widetilde{g} > 1$, mostrando que $\widetilde{\beta}_t$ se aproxima no longo prazo de $\widetilde{s}/\widetilde{g}$. □

## 2.2 Modelo de Distribuição Agregado

Uma das principais críticas ao modelo por trás da Leis Fundamentais de Piketty é que ele é simples demais, uma vez que as principais variáveis são exógenas, deixando de considerar importantes relações entre elas. Nessa seção, apresentamos o denominado *modelo de crescimento neoclássico*, que procura endogeneizar algumas das variáveis do modelo anterior. Novamente consideramos uma economia fechada e sem governo e uma dinâmica de tempo discreto e agora também uma função de produção

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t) \tag{2.11}$$

onde $Y_t$ é a *renda bruta no período entre* $t$ *e* $t+1$, $K_t$ é o *estoque de capital no tempo* $t$, $A_t$ é o *fator de produtividade de uma unidade de tempo de trabalho no período entre* $t$ *e* $t+1$, $L_t$ é a *quantidade de tempo trabalho no período entre* $t$ *e* $t+1$ e $A_t L_t$ é denominado *quantidade tempo de trabalho efetivo*. Vamos supor que a função de produção possui retornos de escala constantes, de modo que

$$F(\lambda K_t, \lambda A_t L_t) = \lambda F(K_t, A_t L_t) \tag{2.12}$$

para todo fator de escala $\lambda > 0$. Denotando a *renda bruta por tempo de trabalho efetivo no período entre $t$ e $t+1$* por $y_t$, o *estoque de capital por tempo de trabalho efetivo no tempo $t$* por $k_t$, e dividindo a equação (2.11) pelo tempo de trabalho efetivo, obtemos que

$$y_t = f(k_t) \tag{2.13}$$

onde

$$f(k_t) = F(k_t, 1) \tag{2.14}$$

de modo que

$$F(K_t, A_t L_t) = A_t L_t f(k_t) \tag{2.15}$$

Denotando a *poupança bruta no período entre $t$ e $t+1$* por $S_t$, temos que

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + S_t \tag{2.16}$$

onde $\delta$ é a *taxa de depreciação*, uma vez que poupança bruta é igual ao investimento bruto numa economia fechada. A *taxa de poupança bruta no período entre $t$ e $t+1$* é dada por

$$s_t = \frac{S_t}{Y_t} = s(k_t) \tag{2.17}$$

onde estamos supondo que a taxa de poupança bruta é uma função do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo. Assim como no caso da Primeira Lei Fundamental do Capitalismo de Piketty, existe uma relação contábil entre a *fração do produto bruto que remunera o capital no período entre $t$ e $t+1$*, denotada por $\alpha_t$, a *taxa real de retorno bruta do capital no período entre $t$ e $t+1$*, dada por

$$r_t = \frac{\alpha_t Y_t}{K_t} \tag{2.18}$$

e a *razão capital pelo produto bruto no período entre $t$ e $t+1$*, dada por

$$\beta_t = \frac{K_t}{Y_t} \tag{2.19}$$

O seguinte resultado segue da equação (2.18), bastando dividir o numerador e o denominador por $Y_t$.

**Proposição 2.3** *Vale a seguinte identidade contábil*

$$r_t = \frac{\alpha_t}{\beta_t} \tag{2.20}$$

O próximo resultado relaciona as principais variáveis nas suas versões líquidas e brutas.

**Proposição 2.4** *A razão entre as frações do produto líquido e bruto que remuneram o capital é dada por*

$$\frac{\widetilde{\alpha}_t}{\alpha_t} = \frac{1-\delta r_t^{-1}}{1-\delta\beta_t} \tag{2.21}$$

*a razão entre as razões capital pelo produto líquido e bruto é dada por*

$$\frac{\widetilde{\beta}_t}{\beta_t} = \frac{1}{1-\delta\beta_t} \tag{2.22}$$

*a razão entre as taxas reais de retorno líquido e bruto do capital é dada por*

$$\frac{\widetilde{r}_t}{r_t} = 1-\delta r_t^{-1} \tag{2.23}$$

*e a razão entre as taxas de poupança líquida e bruta é dada por*

$$\frac{\widetilde{s}_t}{s_t} = \frac{1-\delta\beta_t s_t^{-1}}{1-\delta\beta_t} \tag{2.24}$$

*Além disso, temos que*

$$r_t = \widetilde{r}_t + \delta \tag{2.25}$$

*e também que*

$$\beta_t^{-1} = \widetilde{\beta}_t^{-1} + \delta \tag{2.26}$$

**Prova:** A relação entre as poupanças líquida e bruta é dada por

$$\widetilde{S}_t = S_t - \delta K_t \tag{2.27}$$

enquanto que a relação entre os produtos líquido e bruto é dada por

$$\widetilde{Y}_t = Y_t - \delta K_t \tag{2.28}$$

A razão entre as razões capital pelo produto líquido e bruto é obtida através das seguintes igualdades

$$\widetilde{\beta}_t = \frac{K_t}{Y_t - \delta K_t} = \frac{\beta_t}{1 - \delta \beta_t} \tag{2.29}$$

onde a última igualdade é obtida dividindo-se o numerador e o denominador por $Y_t$. Já a razão entre as taxas reais de retorno líquido e bruto do capital é obtida através das seguintes igualdades

$$\widetilde{r}_t K_t = \widetilde{\alpha}_t \widetilde{Y}_t = \alpha_t Y_t - \delta K_t \tag{2.30}$$

Dividindo-se essa equação por $K_t$, segue que

$$\widetilde{r}_t = \frac{\alpha_t}{\beta_t} - \delta = r_t - \delta \tag{2.31}$$

onde a última igualdade é obtida através da equação (2.20). A razão entre as frações do produto líquido e bruto que remuneram o capital é obtida através das seguintes igualdades

$$\frac{\widetilde{\alpha}_t}{\alpha_t} = \frac{\widetilde{r}_t \widetilde{\beta}_t}{r_t \beta_t} = \frac{\widetilde{r}_t}{r_t} \frac{\widetilde{\beta}_t}{\beta_t} \tag{2.32}$$

onde a primeira igualdade é obtida através das equações (2.3) e (2.20). A equação (2.21), segue então das equações (2.22) e (2.23). A razão entre as taxas de poupança líquida e bruta é obtida através das seguintes igualdades

$$\widetilde{s}_t = \frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{Y}_t} \qquad \text{e} \qquad s_t = \frac{S_t}{Y_t} \tag{2.33}$$

dadas pelas equações (2.5) e (2.17), de modo que, usando as equações (2.27) e (2.28), segue que

$$\widetilde{s}_t = \frac{s_t Y_t - \delta K_t}{Y_t - \delta K_t} = \frac{s_t - \delta\beta_t}{1 - \delta\beta_t} \tag{2.34}$$

onde a última igualdade é obtida dividindo o numerador e o denominador por $Y_t$. Finalmente, a equação (2.25) segue diretamente da equação (2.31), enquanto a equação (2.26), segue invertendo-se os dois lados da equação (2.29). □

Vamos agora supor que o fator de produtividade de uma unidade de tempo de trabalho $A_t$ possui uma taxa de crescimento constante igual a $a$ e que a quantidade de tempo de trabalho $L_t$ possui uma taxa de crescimento constante igual a $l$, de modo a obter o seguinte resultado.

**Proposição 2.5** *A dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo é dada por*

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s(k_t)f(k_t) \tag{2.35}$$

*onde*

$$g = a + l + al \tag{2.36}$$

*é a taxa de crescimento constante da quantidade de tempo de trabalho efetivo.*

**Prova:** Substituindo a equação (2.17) na equação (2.16), obtemos que

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + s(k_t)Y_t \tag{2.37}$$

Dividindo essa equação pela quantidade de tempo de trabalho efetivo $A_t L_t$, segue que

$$\frac{K_{t+1}}{A_t L_t} = (1-\delta)k_t + s(k_t)y_t \tag{2.38}$$

Como

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1+a, \qquad \frac{L_{t+1}}{L_t} = 1+l \tag{2.39}$$

segue que

$$\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_t L_t} = (1+a)(1+l) = 1+g \tag{2.40}$$

mostrando que $g$ é de fato a taxa de crescimento constante da quantidade de tempo de trabalho efetivo. Substituindo essa equação na equação (2.38), obtemos que

$$(1+g)\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = (1-\delta)k_t + s(k_t)y_t \tag{2.41}$$

que é equivalente a equação (2.35), uma vez que $y_t = f(k_t)$. □

Agora vamos apresentar alguns resultados que fornecem condições suficientes para a existência e unicidade de equilíbrios da dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo, que corresponde a existência e unicidade de estados estacionários da dinâmica de estoque de capital.

**Proposição 2.6** *Suponha que $s(k_t)$ e $f(k_t)$ são funções contínuas de $k_t$ e que existem contantes $k > \bar{k} > 0$ tais que*

$$k_t < k_{t+1} < k \tag{2.42}$$

*sempre que $\bar{k} \leq k_t < k$, e também que*

$$k < k_{t+1} < k_t \tag{2.43}$$

*sempre que $k_t > k$. Então então o estoque de capital por tempo de trabalho efetivo $k_t$ se aproxima no longo prazo de $k$, sempre que o estoque inicial de capital por tempo de trabalho efetivo satisfizer $k_0 \geq \bar{k}$. Temos que $k$ é o único equilíbrio da dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo e é caracterizado como sendo a única solução da equação*

$$(\delta + g)k = s(k)f(k) \tag{2.44}$$

*para $k \geq \bar{k}$. Além disso, a razão capital pelo produto bruto $\beta_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\beta = \frac{s(k)}{\delta + g} \tag{2.45}$$

*a taxa de poupança líquida $\widetilde{s}_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\widetilde{s} = \frac{s(k)g}{\delta(1 - s(k)) + g} \tag{2.46}$$

*e a razão capital pelo produto bruto $\widetilde{\beta}_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\widetilde{\beta} = \frac{\widetilde{s}}{g} \tag{2.47}$$

**Prova:** Vamos primeiro mostrar que $k$ é a única solução da equação (2.44). Subtraindo $(1+g)k_t$ em ambos os lados da equação (2.35), segue que

$$(1+g)(k_{t+1} - k_t) = s(k_t)f(k_t) - (\delta + g)k_t \tag{2.48}$$

Essa identidade junto com as desigualdades (2.42) e (2.43) mostram então que $k$ é a única possível solução da equação (2.44). De fato, fazendo $k_t$ se aproximar de $k$ pela direita, pela desigualdade (2.43), temos que $k_{t+1}$ também se aproxima de $k$, de modo que, pela equação (2.48) e pela continuidade de $s(k_t)f(k_t)$, segue que

$$0 = s(k)f(k) - (\delta + g)k \tag{2.49}$$

mostrando que $k$ é de fato a única solução da equação (2.44). Pela equação (2.48), $k_t = k$ é o único equilíbrio da dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo.

Vamos agora mostrar que o estoque de capital por tempo de trabalho efetivo $k_t$ se aproxima no longo prazo de $k$. Se $\bar{k} \le k_0 < k$, então segue da desigualdade (2.42), por uma indução imediata, que a sequência $k_t$ é crescente e limitada superiormente por $k$. Logo $k_t$ se aproxima de uma constante $k^*$ tal que $\bar{k} < k^* \le k$. Pela equação (2.48) e pela continuidade de $s(k_t)f(k_t)$, segue que

$$0 = s(k^*)f(k^*) - (\delta + g)k^* \tag{2.50}$$

mostrando que $k^*$ é solução da equação (2.44), de modo que $k^* = k$, pois já mostramos que a solução é única. Se $k_0 > k$, a demonstração é completamente análoga.

Pela continuidade de $s(k_t)$ e $f(k_t)$, segue que

$$\beta_t = \frac{k_t}{f(k_t)} \tag{2.51}$$

se aproxima no longo prazo de

$$\beta = \frac{k}{f(k)} = \frac{s(k)}{\delta + g} \tag{2.52}$$

onde a última igualdade segue da equação (2.44). Pela equação (2.34), temos que

$$\widetilde{s}_t = \frac{s(k_t) - \delta\beta_t}{1 - \delta\beta_t} \tag{2.53}$$

que se aproxima no longo prazo de

$$\widetilde{s} = \frac{s(k) - \delta\beta}{1 - \delta\beta} = \frac{s(k)g}{\delta(1 - s(k)) + g} \tag{2.54}$$

onde a última igualdade segue da equação (2.45). Pela equação (2.29), temos que

$$\widetilde{\beta}_t = \frac{\beta_t}{1-\delta\beta_t} \tag{2.55}$$

que se aproxima no longo prazo de

$$\widetilde{\beta} = \frac{\beta}{1-\delta\beta} = \frac{s(k)}{\delta(1-s(k))+g} \tag{2.56}$$

onde a última igualdade segue da equação (2.45). A equação (2.47) segue então diretamente da equação (2.46).

□

A equação (2.47) é equivalente à Segunda Lei Fundamental do Capitalismo de Piketty, uma vez que no estado estacionário, as taxas de crescimento líquida e bruta coincidem. O próximo resultado, cuja demonstração se encontra na Proposição (B.1), fornece condições que implicam nas condições da proposição anterior e que são mais fáceis de serem verificadas em exemplos concretos.

**Proposição 2.7** *Suponha que existem constantes $\hat{k} > \bar{k} > 0$ tais que*

$$s(\bar{k})f(\bar{k}) - (\delta+g)\bar{k} > 0 \tag{2.57}$$

*e que*

$$s(\hat{k})f(\hat{k}) - (\delta+g)\hat{k} < 0 \tag{2.58}$$

*Se $s(k_t)$ e $f(k_t)$ são funções deriváveis de $k_t$ e se a função $s(k_t)f(k_t)$ possui derivada primeira positiva e derivada segunda negativa para todo $k_t \geq \bar{k}$, então existe uma constante $k > \bar{k}$ tal que as condições da Proposição 2.6 são satisfeitas.*

A análise da distribuição funcional da renda no modelo agregado é geralmente realizada sob a denominada *hipótese do agente representativo* e da existência de mercados de capitais e de trabalho sob concorrência perfeita. Essas duas hipóteses são difíceis de serem acomodadas conjuntamente, uma vez que o mesmo agente deve atuar simultaneamente como comprador e vendedor de capital e de trabalho. Esse tipo de dificuldade desaparece no modelo no modelo desagregado apresentado no próximo capítulo, onde a hipótese do agente representativo não é utilizada, uma vez que o modelo é desenvolvido a partir de agentes heterogêneos. A demonstração do próximo resultado se encontra na Proposição (B.2).

**Proposição 2.8** *Sob a hipótese do agente representativo e supondo que existem mercados de capitais e de trabalho sob concorrência perfeita e que a função de produção é uma função derivável, temos que a taxa real de retorno bruto do capital é dada por*

$$r_t = f'(k_t) \tag{2.59}$$

*de modo que a fração do produto bruto que remunera o capital é dada por*

$$\alpha_t = \frac{k_t f'(k_t)}{f(k_t)} \tag{2.60}$$

*Se função de produção é crescente em relação ao estoque de capital e em relação ao número de trabalhadores efetivos, temos que* $r_t > 0$ *e também que* $0 < \alpha_t < 1$.

Quando a função de produção é uma função derivável, o comportamento da fração do produto bruto que remunera o capital $\alpha_t$ em relação ao estoque de capital por tempo de trabalho efetivo $k_t$ depende da denominada *elasticidade de substituição bruta*, dada por

$$\sigma_t = \frac{M_t / k_t}{dM_t / dk_t} \tag{2.61}$$

onde

$$M_t = \frac{F_{A_t L_t}}{F_{K_t}} \tag{2.62}$$

é denominada *taxa marginal de substituição técnica*. A denominada *elasticidade de substituição líquida* é definida de forma análoga, bastanto trocar a função de produção bruta $F(K_t, A_t L_t)$, pela função de produção líquida $\widetilde{F}(K_t, A_t L_t) = F(K_t, A_t L_t) - \delta K_t$. A demonstração do próximo resultado se encontra na Proposição (B.3).

**Proposição 2.9** *Sob a hipótese do agente representativo e supondo que existem mercados de capitais e de trabalho sob concorrência perfeita e que a função de produção é uma função derivável, temos que elasticidade de substituição bruta é dada por*

$$\sigma_t = \frac{f'(k_t)(k_t f'(k_t) - f(k_t))}{k_t f(k_t) f''(k_t)} = \frac{r_t(\alpha_t - 1)}{k_t f''(k_t)} \tag{2.63}$$

*que a derivada da fração do produto bruto que remunera o capital pelo capital por tempo de trabalho efetivo é dada por*

$$\frac{d\alpha_t}{dk_t} = -f''(k_t)\beta_t(\sigma_t - 1) \tag{2.64}$$

*que a derivada da fração do produto bruto que remunera o capital pela razão capital pelo produto bruto é dada por*

$$\frac{d\alpha_t}{d\beta_t} = (\sigma_t - 1)\frac{r_t}{\sigma_t} \tag{2.65}$$

*e também que a derivada taxa real de retorno bruta do capital pela razão capital pelo produto bruto é dada por*

$$\frac{dr_t}{d\beta_t} = -\frac{r_t}{\sigma_t \beta_t} \tag{2.66}$$

*O mesmo resultado vale trocando-se as variáveis brutas pelas variáveis líquidas. Além disso, a razão entre as elasticidades de substituição líquida e bruta é dada por*

$$\frac{\widetilde{\sigma}_t}{\sigma_t} = \frac{1 - \delta r_t^{-1}}{1 - \delta \beta_t} \tag{2.67}$$

Vamos nos concentrar em modelos onde a função de produção possui elasticidade de substituição (bruta) constante, denominadas *CES*, do inglês *Constant Elasticity of Substitution*. A proposição seguinte, caracteriza esse tipo de função de produção. Nesse caso, a fração do produto bruto que remunera o capital $\alpha_t$ é crescente, ou decrescente ou constante em relação ao estoque de capital por tempo de trabalho efetivo $k_t$ se a elasticidade de substituição é, respectivamente, maior, ou menor, ou igual a um. Observamos que sempre podemos escolher uma unidade para medir o capital por tempo de trabalho efetivo tal que $f(1) = 1$, o que será feito de agora em diante. A demonstração do próximo resultado se encontra na Proposição (B.4).

**Proposição 2.10** *Uma função de produção derivável com retornos de escala constantes possui elasticidade de substituição constante* $\sigma_t = \sigma$ *se e somente se existe uma constante* $0 < \alpha < 1$ *tal que*

$$f(k_t) = \left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{2.68}$$

*quando* $\sigma \neq 1$, *ou*

$$f(k_t) = k_t^{\alpha} \tag{2.69}$$

*quando* $\sigma = 1$. *Em particular, a taxa real de retorno bruto do capital é dada por*

$$r_t = \alpha \beta_t^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{2.70}$$

*de modo que a fração do produto bruto que remunera o capital é dada por*

$$\alpha_t = \alpha \beta_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{2.71}$$

*Além disso, temos que* $f'(k_t) > 0$ *e também que* $f''(k_t) < 0$ *para todo* $k_t > 0$.

O próximo resultado segue direto da proposição anterior e da equação (2.15).

**Proposição 2.11** *Uma função de produção derivável com retornos de escala constantes possui elasticidade de substituição constante* $\sigma_t = \sigma$ *se e somente se existe uma constante* $0 < \alpha < 1$ *tal que*

$$F(K_t, A_t L_t) = \left( \alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{2.72}$$

*quando* $\sigma \neq 1$*, ou*

$$F(K_t, A_t L_t) = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha} \tag{2.73}$$

*quando* $\sigma = 1$*, denominada* função de Cobb-Douglas.

## 2.3 Taxa de Poupança Bruta Constante

Nesta seção, vamos considerar o denominado *modelo de Solow-Swan*, que aqui será tratado como um caso particular do modelo apresentado na seção anterior, onde a função de produção é derivável e possui elasticidade de substituição contante $\sigma > 0$ e a taxa de poupança bruta também é uma constante $s > 0$.

**Proposição 2.12** *No modelo de Solow-Swan, o estoque de capital por tempo de trabalho efetivo* $k_t$ *se aproxima no longo prazo de*

$$k = \left( \frac{1-\alpha}{\left(\frac{\delta+g}{s}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{2.74}$$

*quando* $\sigma \neq 1$*, ou de*

$$k = \left(\frac{s}{\delta + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.75}$$

*quando* $\sigma = 1$*, sempre que*

$$\left(\frac{\delta + g}{s}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} > \alpha \tag{2.76}$$

*e sempre que o estoque inicial de capital por tempo de trabalho efetivo for positivo. Em particular, a razão capital pelo produto bruto* $\beta_t$ *se aproxima no longo prazo de*

$$\beta = \frac{s}{\delta + g} \tag{2.77}$$

*a taxa real de retorno bruto do capital* $r_t$ *se aproxima no longo prazo de*

$$\alpha \left(\frac{s}{\delta + g}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{2.78}$$

*e a fração do produto bruto que remunera o capital* $\alpha_t$ *se aproxima no longo prazo de*

$$\alpha \left(\frac{s}{\delta + g}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{2.79}$$

*Além disso, a taxa de poupança líquida* $\widetilde{s}_t$ *se aproxima no longo prazo de*

$$\widetilde{s} = \frac{sg}{\delta(1-s) + g} \tag{2.80}$$

*e a razão capital pelo produto líquido* $\widetilde{\beta}_t$ *se aproxima no longo prazo de*

$$\widetilde{\beta} = \frac{s}{\delta(1-s) + g} \tag{2.81}$$

**Prova:** A demonstração de que $s(k_t) = s$ e $f(k_t)$ satisfazem as hipóteses da Proposição 2.7 se encontra na Proposição B.5. As equações (2.77), (2.80) e (2.81) seguem então diretamente da Proposição 2.6 e 2.7, uma vez que estamos supondo que $s(k_t) = s$. As expressões dadas pelas equações (2.78) e (2.79) seguem então da equação acima e das equações (2.70) e (2.71).

Para a determinação da equação (2.74), quando $\sigma \neq 1$, basta notar que, nesse caso, a equação (2.44) é dada por

$$s\left(\alpha k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}=(\delta+g)k \tag{2.82}$$

de modo que

$$\alpha k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha=\left(\frac{\delta+g}{s}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{2.83}$$

Segue então que

$$k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}=\frac{1-\alpha}{\left(\frac{\delta+g}{s}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}-\alpha} \tag{2.84}$$

de modo que a equação (2.74) é obtida elevando os dois lados a $\frac{\sigma}{\sigma-1}$.

Para a determinação da equação (2.75), quando $\sigma = 1$, basta notar que, nesse caso, a equação (2.44) é dada por

$$sk^{\alpha}=(\delta+g)k \tag{2.85}$$

de modo que

$$k^{1-\alpha}=\frac{s}{\delta+g} \tag{2.86}$$

A equação (2.75) é então obtida elevando os dois lados a $\frac{1}{1-\alpha}$. □

## 2.4 Taxa de Poupança Líquida Constante

Krussell e Smith (2015) interpretam as explicações apresentadas por Piketty (2014) através de um modelo de distribuição onde é a taxa de poupança líquida que é mantida constante. Esse modelo também pode ser tratado como um caso particular do modelo apresentado na segunda seção desse capítulo. O próximo resultado mostra que, se a taxa de poupança líquida é mantida constante, então a taxa de poupança bruta é uma função do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo.

**Proposição 2.13** *Se a taxa de poupança líquida é um constante $\widetilde{s}_t = \widetilde{s}$, então a taxa de poupança bruta $s_t$ é dada por*

$$s(k_t) = \widetilde{s} + \delta(1-\widetilde{s})\frac{k_t}{f(k_t)} \tag{2.87}$$

**Prova:** Pela equação (2.34), segue que

$$\widetilde{s} - \delta\widetilde{s}\beta_t = s_t - \delta\beta_t \tag{2.88}$$

de modo que

$$s_t = \widetilde{s} + \delta(1-\widetilde{s})\beta_t = \widetilde{s} + \delta(1-\widetilde{s})\frac{k_t}{f(k_t)} \tag{2.89}$$

□

A dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo com a taxa de poupança líquida mantida constante é equivalente à dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo com a taxa de poupança bruta mantida constante, onde a taxa de depreciação é modificada adequadamente.

**Proposição 2.14** *Se a taxa de poupança líquida é um constante $\widetilde{s}_t = \widetilde{s}$, então a dinâmica do estoque de capital por tempo de trabalho efetivo é dada por*

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta\widetilde{s})k_t + \widetilde{s}f(k_t) \tag{2.90}$$

**Prova:** Pela equação (2.35), temos que

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s(k_t)f(k_t) \tag{2.91}$$

Pela equação (2.87), segue então que

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \left(\widetilde{s} + \delta(1-\widetilde{s})\frac{k_t}{f(k_t)}\right) f(k_t) \tag{2.92}$$

de modo que

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \widetilde{s} f(k_t) + \delta(1-\widetilde{s})k_t \tag{2.93}$$

é equivalente a equação (2.90). □

Supondo que a função de produção é derivável e possui elasticidade de substituição contante $\sigma > 0$, o resultado seguinte segue diretamente das Proposições 2.12 e 2.14.

**Proposição 2.15** *Se a função de produção é derivável e possui elasticidade de substituição contante $\sigma > 0$ e a taxa de poupança líquida é um constante $\widetilde{s}_t = \widetilde{s}$, então o estoque de capital por tempo de trabalho efetivo $k_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$k = \left( \frac{1-\alpha}{\left(\frac{\delta\widetilde{s}+g}{\widetilde{s}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{2.94}$$

*quando $\sigma \neq 1$, ou de*

$$k = \left(\frac{\widetilde{s}}{\delta\widetilde{s}+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.95}$$

*quando $\sigma = 1$, sempre que*

$$\left(\frac{\delta\widetilde{s}+g}{\widetilde{s}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} > \alpha \tag{2.96}$$

*e sempre que o estoque inicial de capital por tempo de trabalho efetivo for positivo. Em particular, a razão capital pelo produto bruto $\beta_t$ se aproxima no longo* *prazo de*

$$\beta = \frac{\widetilde{s}}{\delta\widetilde{s} + g} \tag{2.97}$$

*a taxa real de retorno bruto do capital $r_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\alpha\left(\frac{\widetilde{s}}{\delta\widetilde{s} + g}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{2.98}$$

*a fração do produto bruto que remunera o capital $\alpha_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\alpha\left(\frac{\widetilde{s}}{\delta\widetilde{s} + g}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{2.99}$$

*e a taxa de poupança bruta $s_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$s = \frac{\widetilde{s}(\delta + g)}{\delta\widetilde{s} + g} \tag{2.100}$$

**Prova:** A menos da última equação, todas as demais seguem imediatamente das equações da Proposição 2.12, bastando substituir $s$ por $\widetilde{s}$ e também $\delta$ por $\delta\widetilde{s}$. Para a última, pela equação (2.87), temos que $s_t$ se aproxima no longo prazo de

$$s = \widetilde{s} + \delta(1 - \widetilde{s})\frac{k}{f(k)} \tag{2.101}$$

Como, pela equação (2.97), temos que

$$\frac{k}{f(k)} = \beta = \frac{\widetilde{s}}{\delta\widetilde{s} + g} \tag{2.102}$$

segue que

$$s = \widetilde{s} + \delta(1 - \widetilde{s})\frac{\widetilde{s}}{\delta\widetilde{s} + g} \tag{2.103}$$

de modo que

$$s = \frac{\widetilde{s}(\delta\widetilde{s} + g) + \delta(1 - \widetilde{s})\widetilde{s}}{\delta\widetilde{s} + g} \tag{2.104}$$

que, após cancelamentos, é equivalente à equação (2.100). □

# Capítulo 3

# Distribuição Individual da Renda e da Riqueza

## 3.1 Modelo de Distribuição Desagregado

Nessa seção, vamos apresentar um modelo de distribuição que pode ser considerado a versão desagregada do modelo agregado apresentado no capítulo anterior. Vamos supor que as unidades econômicas são famílias que se formam assim que seus respectivos pais se aposentam. Os casamentos se dão entre pares de indivíduos com os mesmos estoques de capital, herdados dos seus respectivos pais assim que eles se aposentam. Vamos considerar o *estoque de capital de cada família $i$ no tempo $t$* como sendo uma variável aleatória $K_{i,t}$. Como veremos mais à frente, a dinâmica do modelo é tal que, se os *estoques iniciais de capital acumulado pelas famílias $K_{i,0}$* são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas entre as famílias, os estoques de capital das famílias $K_{i,t}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas entre as famílias para todo tempo $t$. Com isso, se o número de famílias é grande, então o sorteio de todas essas variáveis aleatórias $K_{i,t}$ apresentará uma distribuição muito próxima da distribuição comum entre elas, o que permite inclusive simular o modelo numericamente.

Vamos supor que não existe desemprego e que o mercado de trabalho se desenvolve sob concorrência perfeita, de modo que todos os indivíduos recebem o mesmo salário $w_t$. Todas as famílias tem acesso à mesma tecnologia dada por uma função de produção derivável e com elasticidade de substituição contante $\sigma$, de modo que o *produto bruto obtido pela família $i$ no tempo $t$* é dado por

$$Y_{i,t} = \varepsilon_{i,t}\left(\alpha K_{i,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_{i,t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{3.1}$$

quando $\sigma \neq 1$, ou

$$Y_{i,t} = \varepsilon_{i,t} K_{i,t}^{\alpha}(A_t L_{i,t})^{1-\alpha} \tag{3.2}$$

quando $\sigma = 1$, onde $A_t$ é o *fator de produtividade de uma unidade de tempo de trabalho*, $L_{i,t}$ é a *quantidade de trabalho contratado pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$* e $\varepsilon_{i,t}$ é o *choque de produtividade sofrido pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$*, e esses choques formam uma sequência de variáveis aleatórias não negativas, independentes e identicamente distribuídas entre as famílias e entre os tempos, e possuem esperança um. Cada família $i$ contrata uma *quantidade de trabalho $L_{i,t}$* de modo a maximizar a esperança de seus lucros, dada por

$$Z_{i,t} - w_t L_{i,t} \tag{3.3}$$

onde

$$Z_{i,t} = \left(\alpha K_{i,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_{i,t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{3.4}$$

quando $\sigma \neq 1$, ou

$$Z_{i,t} = K_{i,t}^{\alpha}(A_t L_{i,t})^{1-\alpha} \tag{3.5}$$

quando $\sigma = 1$, sujeito a *restrição orçamentária*

$$w_t L_{i,t} \leq (1-\delta_{i,t})K_{i,t} \tag{3.6}$$

onde $\delta_{i,t}$ é a *taxa de depreciação do capital sofrida pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$*, e essas taxas formam uma sequência de variáveis aleatórias entre zero e um, independentes e identicamente distribuídas entre as famílias e entre os tempos, e possuem esperança $\delta$. A depreciação do capital pode ocorrer devido a fatores físicos ou devido a decisões por parte da família de se utilizar parte da riqueza para o consumo. A inspiração concreta para esse modelo vem de uma economia agrária, onde os produtores sofrem, em cada período, choques de produtividade aleatórios devido, por exemplo, a questões climáticas ou ao aparecimento de pragas. Cada família fornece uma unidade de tempo de trabalho por período, de modo que a quantidade de tempo trabalho agregado disponível na economia no tempo $t$ é igual ao número de famílias $L_t$ no tempo $t$. Como $\sum_{i=1}^{L_t} L_{i,t}$ deve ser aproximadamente igual a $L_t$, temos que a esperança de $L_{i,t}$ deve ser igual a um. Seja $y_t$ a esperança do *produto bruto obtido pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$ pelo fator de produtividade* $y_{i,t} = Y_{i,t}/A_t$, e seja $k_t$ a esperança do *estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade* $k_{i,t} = K_{i,t}/A_t$.

**Proposição 3.1** *Suponha que $k_t \geq 1$ e que $\varepsilon_{i,t}$ e $K_{i,t}$ são variáveis aleatórias independentes. Se $\sigma \geq 1$ e $\delta_{i,t} < \alpha$, então a quantidade de trabalho contratada pela família $i$ no tempo $t$ é dada por*

$$L_{i,t} = \frac{k_{i,t}}{k_t} \tag{3.7}$$

*sua restrição orçamentária é atendida estritamente*

$$w_t L_{i,t} < (1-\delta_{i,t}) K_{i,t} \tag{3.8}$$

*enquanto o produto obtido pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$ pelo fator de produtividade é dado por*

$$\frac{y_{i,t}}{y_t} = \varepsilon_{i,t} \frac{k_{i,t}}{k_t} \tag{3.9}$$

*a taxa real de retorno bruto do capital obtida pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$ é dada por*

$$r_{i,t} = \frac{Y_{i,t} - w_t L_{i,t}}{K_{i,t}} = \frac{\varepsilon_{i,t} y_t A_t - w_t}{k_t A_t} \tag{3.10}$$

*o salário pelo fator de produtividade é dado por*

$$\frac{w_t}{A_t} = (1-\alpha) y_t^{\frac{1}{\sigma}} \tag{3.11}$$

*e também*

$$y_t = f(k_t) \tag{3.12}$$

*onde*

$$f(k_t) = \left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{3.13}$$

*quando $\sigma > 1$, ou por*

$$f(k_t) = k_t^{\alpha} \tag{3.14}$$

*quando $\sigma = 1$. Além disso, temos que $y_t$ é aproximadamente igual ao produto agregado por tempo de trabalho efetivo*

$$\frac{1}{A_t L_t} \sum_{i=1}^{L_t} Y_{i,t} \tag{3.15}$$

*enquanto $k_t$ é aproximadamente igual ao estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo*

$$\frac{1}{A_t L_t} \sum_{i=1}^{L_t} K_{i,t} \tag{3.16}$$

*e, mesmo sem a hipótese do agente representativo e sem a existência de mercado de capitais, a taxa média real de retorno bruto do capital é aproximadamente igual a*

$$r_t = f'(k_t) \tag{3.17}$$

*que coincide com a esperança da taxa real de retorno bruto do capital $r_{i,t}$ obtida pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$.*

**Prova:** Na Proposição C.1, mostramos que, no caso da restrição orçamentária ser atendida estritamente, a condição de primeira ordem para o problema de maximização resolvido pela família $i$ implica que

$$\frac{Z_{i,t}}{A_t L_{i,t}} = \left(\frac{w_t}{(1-\alpha)A_t}\right)^{\sigma} = \mu_t \tag{3.18}$$

Além disso, quando $\sigma > 1$, pela equação (3.4), temos que

$$\mu_t = \left(\alpha\left(\frac{K_{i,t}}{A_t L_{i,t}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{3.19}$$

de modo que

$$\frac{K_{i,t}}{A_t L_{i,t}} = \left(\frac{1}{\alpha}\mu_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \nu_t \tag{3.20}$$

e, quando $\sigma = 1$, pela equação (3.5), temos que

$$\mu_t = \left(\frac{K_{i,t}}{A_t L_{i,t}}\right)^{\alpha} \tag{3.21}$$

de modo que

$$\frac{K_{i,t}}{A_t L_{i,t}} = \mu_t^{\frac{1}{\alpha}} = \nu_t \tag{3.22}$$

Como a experança de $L_{i,t}$ é igual a um, pelas equações (3.20) e (3.22), segue então que $k_t = \nu_t$.

As equações (3.20) e (3.22) são então equivalentes à equação (3.7), uma vez que $k_{i,t} = K_{i,t}/A_t$. Além disso, pela equação (3.18) e como $Y_{i,t} = \varepsilon_{i,t} Z_{i,t}$, segue que $y_{i,t} = \mu_t \varepsilon_{i,t} L_{i,t}$, de modo que $y_t = \mu_t$. De fato, temos que $L_{i,t}$ é independente de $\varepsilon_{i,t}$, pois é uma função de $K_{i,t}$. Segue então que a esperança de $\varepsilon_{i,t} L_{i,t}$ é o produto das esperanças de $\varepsilon_{i,t}$ e $L_{i,t}$, que são ambas iguais a um. A equação (3.9) segue então das equações (3.18), (3.20) e (3.22), enquanto a equação (3.10) segue das equações (3.7) e (3.9), a equação (3.11) segue da equação (3.18) e a equação (3.12) segue das equações (3.19) e (3.21).

Agora vamos mostrar que a restrição orçamentária é atendida estritamente. Pela equação 3.11, temos

$$\frac{w_t}{A_t} = (1-\alpha) y_t^{\frac{1}{\sigma}} \tag{3.23}$$

Quando $\sigma > 1$, pela equação (3.13), segue que

$$\frac{w_t}{A_t} = (1-\alpha)\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tag{3.24}$$

Se $k_t \geq 1$, temos que $k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \geq 1$, de modo que

$$\frac{w_t}{A_t} \leq (1-\alpha)\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} = (1-\alpha) k_t^{\frac{1}{\sigma}} \leq (1-\alpha) k_t \tag{3.25}$$

Quando $\sigma = 1$, pela equação (3.14), segue que

$$\frac{w_t}{A_t} = (1-\alpha) k_t^{\alpha} \tag{3.26}$$

Se $k_t \geq 1$, temos então que

$$\frac{w_t}{A_t} \leq (1-\alpha) k_t \tag{3.27}$$

Segue então que

$$\frac{w_t}{A_t k_t} \leq 1 - \alpha < 1 - \delta_{i,t} \tag{3.28}$$

de modo que a desigualdade (3.8) segue então da desigualdade acima e da equação (3.7).

As aproximações de $y_t$ e $k_t$ seguem direto da Lei dos Grandes Números. Agora vamos determinar a taxa média real de retorno bruto do capital. Temos que a fração do produto bruto que remunera o capital é dada por

$$\alpha_t = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{L_t} w_t L_{i,t}}{\sum_{i=1}^{L_t} Y_{i,t}} \simeq 1 - \frac{w_t L_t}{y_t A_t L_t} \tag{3.29}$$

onde $\simeq$ denota a relação de uma quantidade ser aproximadamente igual a outra quantidade. Pela equação (3.11), segue então que

$$\alpha_t \simeq 1 - (1-\alpha) y_t^{\frac{1}{\sigma}-1} = y_t^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left( y_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - (1-\alpha) \right) \tag{3.30}$$

Quando $\sigma > 1$, pela equação (3.13), segue então que

$$\alpha_t \simeq \alpha \left( \frac{k_t}{y_t} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \alpha \beta_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{3.31}$$

que também é evidentemente válida, quando $\sigma = 1$. Segue então que

$$r_t = \frac{\alpha_t}{\beta_t} \simeq \alpha \beta_t^{-\frac{1}{\sigma}} = f'(k_t) \tag{3.32}$$

onde a última igualdade segue da demonstração da Proposição B.4. Pela equação (3.10), a esperança da taxa real de retorno bruto do capital obtida pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$ é dada por

$$\frac{y_t A_t - w_t}{k_t A_t} = \frac{1}{\beta_t} \left( 1 - (1-\alpha) y_t^{\frac{1}{\sigma}-1} \right) = \frac{1}{\beta_t} \alpha \beta_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = f'(k_t) \tag{3.33}$$

onde usamos a equação (3.11) na primeira igualdade e a equação (3.13) na segunda igualdade como acima. □

O *processo de acumulação ou de herança de capital* é dado por

$$\lambda_{i,t}K_{i,t+1} = (1-\delta_{i,t})K_{i,t} - w_t L_{i,t} + s^y_{i,t}Y_{i,t} + s^w_{i,t}w_t \tag{3.34}$$

onde $\lambda_{i,t}$ está ligado ao processo de herança, como explicado mais abaixo, enquanto $s^y_{i,t}$ e $s^w_{i,t}$ são, respectivamente, as *taxas de poupança do produto e do salário* escolhidas pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$, e essas taxas formam duas sequências de variáveis aleatórias entre zero e um, independentes e identicamente distribuídas entre as famílias e entre os tempos, e possuem, respectivamente, esperanças $s^y$ e $s^w$. Observe que as taxas de poupança $s^y_{i,t}$ e $s^w_{i,t}$ podem estar correlacionadas e até mesmo ser funções dos choques de produtividade $\varepsilon_{i,t}$, o que seria esperado que ocorresse em situações concretas. Os $\lambda_{i,t}$ também formam uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas entre as famílias e entre os tempos e estão relacionado ao processo de acumulação ou herança de capital da seguinte forma. Se não ocorre aposentadoria, então o processo é apenas de acumulação simples e $\lambda_{i,t} = 1$. Se ocorre aposentadoria, então o processo é de herança e $\lambda_{i,t} = \frac{n_{i,t}}{2}$, onde $n_{i,t} \geq 1$ é o número de filhos da família $i$ no tempo $t$. Como $\sum_{i=1}^{L_t} \lambda_{i,t}$ deve ser aproximadamente igual a $L_{t+1}$, temos que a esperança de $\lambda_{i,t}$ deve ser igual a $L_{t+1}/L_t$.

Vamos agora analisar a dinâmica do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo. Como no capítulo anterior, vamos supor que o fator de produtividade de uma unidade de tempo de trabalho $A_t$ possui uma taxa de crescimento constante igual a $a$ e que a quantidade de tempo trabalho agregado $L_t$ possui uma taxa de crescimento constante igual a $l$, de modo a obter o seguinte resultado.

**Proposição 3.2** *Se $\sigma \geq 1$, $\delta_{i,t} < \alpha \leq 1/2$ e também $k_t \geq 1$, então a dinâmica do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo é dada por*

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s(k_t)f(k_t) \tag{3.35}$$

*onde a taxa de crescimento da quantidade tempo de trabalho agregado efetivo é dada por*

$$g = a + l + al \tag{3.36}$$

*e a taxa de poupança bruta agregada é dada por*

$$s(k_t) = s^y - (1-s^w)(1-\alpha)f(k_t)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{3.37}$$

*Além disso, o estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo $k_t$ se aproxima no longo prazo da única solução $k \geq 1$ da equação*

$$(\delta+g)k = s(k)f(k) \tag{3.38}$$

*sempre que*

$$s^y - (1-s^w)(1-\alpha) > \delta + g > 0 \tag{3.39}$$

*que*

$$\frac{s^y}{1-s^w} > \frac{\sigma-1}{\sigma} \tag{3.40}$$

*e sempre que o estoque inicial de capital agregado por tempo de trabalho efetivo for maior ou igual a um.*

**Prova:** Pelo processo de acumulação ou de herança de capital, temos que $K_{i,t}$ é função de $K_{i,t-1}$, de $L_{i,t-1}$ e de $Y_{i,t-1}$ e portanto é função dos choques aleatórios que ocorreram em tempos anteriores a $t$. Segue então que $\varepsilon_{i,t}$ e $K_{i,t}$ são variáveis aleatórias independentes, de modo que podemos utilizar a Proposição 3.1. Dividindo a equação (3.34) por $A_t$ e usando que $A_{t+1} = (1+a)A_t$, segue que

$$\lambda_{i,t}(1+a)\frac{K_{i,t+1}}{A_{t+1}} = (1-\delta_{i,t})\frac{K_{i,t}}{A_t} - w_t\frac{L_{i,t}}{A_t} + s^y_{i,t}\frac{Y_{i,t}}{A_t} + s^w_{i,t}\frac{w_t}{A_t} \tag{3.41}$$

Tomando-se a esperança em ambos os lados da equação, usando que $\lambda_{i,t}$ e $K_{i,t+1}$, que $\delta_{i,t}$ e $K_{i,t}$ e que $s^y_{i,t}$ e $Y_{i,t}$ são pares de variáveis aleatórias independentes e que a esperança de $\lambda_{i,t}$ é dada por

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1+l \tag{3.42}$$

segue que

$$(1+l)(1+a)k_{t+1} = (1-\delta)k_t - w_t\frac{1}{A_t} + s^y_t y_t + s^w_t\frac{w_t}{A_t} \tag{3.43}$$

Usando a equação (3.11) e que $(1+l)(1+a) = 1+g$, segue que

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t - (1-\alpha)y_t^{\frac{1}{\sigma}} + s^y_t y_t + s^w_t(1-\alpha)y_t^{\frac{1}{\sigma}} \tag{3.44}$$

que é equivalente à equação (3.35), se observarmos que

$$s(k_t)f(k_t) = s^y y_t - (1-s^w)(1-\alpha)y^{\frac{1}{\sigma}} \tag{3.45}$$

A demonstração de que as funções $s(k_t)$ e $f(k_t)$ satisfazem as hipóteses da Proposição 2.7 se encontra na Proposição C.2. A última afirmação do enunciado segue então das Proposições 2.6 e 2.7. □

O próximo resultado fornece fórmulas explícitas do estoque de capital por família por tempo de trabalho efetivo de equilíbrio em termos dos parâmetros exógenos do modelo para alguns valores de elasticidade de substituição.

**Proposição 3.3** *Suponha que $\sigma \geq 1$, que $\delta_{i,t} < \alpha \leq 1/2$, que as desigualdades (3.39) e (3.40) são satisfeitas e que o estoque inicial de capital agregado por tempo de trabalho efetivo for maior ou igual a um. Então o estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo $k_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$k = \left( \frac{s^y - (1 - s^w)(1 - \alpha)}{\delta + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.46}$$

*quando $\sigma = 1$, se aproxima no longo prazo de*

$$k = \left( \frac{1 - s^w - s^y}{2s^y - (1 - s^w)} \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^2 \tag{3.47}$$

*quando $\sigma = 2$ e também $\delta + g = s^y \alpha^2$, e se aproxima no longo prazo de*

$$k = \left( \frac{(2s^y - (1 - s^w))\alpha + \sqrt{(1 - s^w)^2 \alpha^2 - 4(\delta + g)(1 - s^w - s^y)}}{2(\delta + g - s^y \alpha^2)} (1 - \alpha) \right)^2 \tag{3.48}$$

*quando $\sigma = 2$ e também $\delta + g \neq s^y \alpha^2$.*

**Prova:** Quando $\sigma = 1$, a equação (3.38) é dada por

$$(\delta + g)k = (s^y - (1 - s^w)(1 - \alpha))k^\alpha \tag{3.49}$$

de modo que

$$k^{1-\alpha} = \frac{s^y - (1 - s^w)(1 - \alpha)}{\delta + g} \tag{3.50}$$

que é equivalente à equação (3.46). Quando $\sigma = 2$, a equação (3.38) é dada por

$$(\delta + g)k = s^y f(k) - (1 - s^w)(1 - \alpha) f(k)^{\frac{1}{2}} \tag{3.51}$$

Como nesse caso $f(k) = (\alpha x + 1 - \alpha)^2$, onde $x = k^{\frac{1}{2}}$, segue que a equação acima é equivalente a

$$(\delta + g)x^2 = s^y(\alpha x + 1 - \alpha)^2 - (1 - s^w)(1 - \alpha)(\alpha x + 1 - \alpha) \tag{3.52}$$

que pode ser escrita como

$$(\delta + g - s^y\alpha^2)x^2 + (1 - s^w - 2s^y)\alpha(1-\alpha)x + (1 - s^w - s^y)(1-\alpha)^2 = 0 \tag{3.53}$$

Se $\delta + g = s^y\alpha^2$, essa é uma equação do primeiro grau cuja solução é dada por

$$x = \frac{1 - s^w - s^y}{2s^y - (1 - s^w)}\frac{1-\alpha}{\alpha} \tag{3.54}$$

Se $\delta + g \neq s^y\alpha^2$, essa é uma equação do segundo grau cuja solução é dada por

$$x = \frac{(2s^y - (1 - s^w))\alpha + \sqrt{(1 - s^w)\alpha^2 - 4(\delta + g)(1 - s^w - s^y)}}{2(\delta + g - s^y\alpha^2)}(1-\alpha) \tag{3.55}$$

obtida através da fórmula de Bhaskara. As equações (3.47) e (3.48) são obtidas elevando-se ao quadrado as equações, respectivamente, (3.54) e (3.55), uma vez que $k = x^2$. □

## 3.2 Distribuições da Renda e da Riqueza

Vamos agora analisar a dinâmica da distribuição entre as famílias do estoque de capital pelo fator de produtividade.

**Proposição 3.4** *Se $\sigma \geq 1$ e $\delta_{i,t} < \alpha$, então a dinâmica da distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ é dada por*

$$(1+a)\lambda_{i,t}k_{i,t+1} = \left(1 - \delta_{i,t} - \frac{w_t}{A_t k_t} + s^y_{i,t}\varepsilon_{i,t}\frac{y_t}{k_t}\right)k_{i,t} + s^w_{i,t}\frac{w_t}{A_t} \tag{3.56}$$

*Além disso, supondo também que $\alpha \leq 1/2$, então a distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ se aproxima no* *longo prazo de uma única distribuição estacionária, independentemente da distribuição inicial do estoque de capital desagregado pelo fator de produtividade, sempre que as desigualdades (3.39) e (3.40) forem satisfeitas e sempre que o estoque inicial de capital agregado por tempo de trabalho efetivo for maior ou igual a um. A cauda superior dessa distribuição estacionária é aproximadamente igual à cauda de uma distribuição de Pareto, cujo expoente $P$ é a única constante positiva tal que a variável aleatória*

$$\left(\frac{1-\delta_{i,t}-\dfrac{w/A}{k}+s^{y}_{i,t}\varepsilon_{i,t}\dfrac{y}{k}}{(1+a)\lambda_{i,t}}\right)^{P} \tag{3.57}$$

*possui esperança igual a um, onde as constantes $y$, $k$ e $w/A$ são os valores de equilíbrio, respectivamente, do produto bruto agregado por tempo de trabalho efetivo, do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo e do salário pelo fator de produtividade. Essa condição é aproximadamente equivalente ao expoente $P$ ser a única constante positiva tal que a variável aleatória*

$$\left(\frac{1-\delta_{i,t}+r-\left(1-s^{y}_{i,t}\varepsilon_{i,t}\right)\beta^{-1}}{(1+a)\lambda_{i,t}}\right)^{P} \tag{3.58}$$

*possui esperança igual a um, onde as constantes $r$ e $\beta$ são os valores de equilíbrio, respectivamente, da taxa média real de retorno bruto do capital e da razão capital pelo produto bruto.*

**Prova:** Dividindo a equação (3.34) por $A_t$, usando que $A_{t+1}=(1+a)A_t$ e também as equações (3.7) e (3.9), segue que

$$(1+a)\lambda_{i,t}k_{i,t+1}=(1-\delta_{i,t})k_{i,t}-\frac{w_t}{A_t k_t}k_{i,t}+s^{y}_{i,t}\varepsilon_{i,t}\frac{y_t}{k_t}k_{i,t}+s^{w}_{i,t}\frac{w_t}{A_t} \tag{3.59}$$

que é equivalente à equação (3.56). Para a segunda parte, vamos supor que a desigualdade (3.39) é satisfeita e que o estoque inicial de capital agregado por tempo de trabalho efetivo é maior ou igual a um. Para a convergência de $k_{i,t}$, primeiro observamos que a equação (3.56) pode ser escrita como

$$k_{i,t+1} = \mu_{i,t} k_{i,t} + \nu_{i,t} \tag{3.60}$$

onde

$$\mu_{i,t} = \frac{1 - \delta_{i,t} - \dfrac{w_t/A_t}{k_t} + s^y_{i,t} \varepsilon_{i,t} \dfrac{y_t}{k_t}}{(1+a)\lambda_{i,t}} \tag{3.61}$$

e

$$\nu_{i,t} = \frac{s^w_{i,t}(w_t/A_t)}{(1+a)\lambda_{i,t}} \tag{3.62}$$

Como $k_t$ se aproxima de $k$ no longo prazo, pelas equações (3.11) e (3.12), temos que, no longo prazo, $y_t$ se aproxima de $y$ e que $w_t/A_t$ se aproxima de $w/A$. Logo $\mu_{i,t}$ converge em média para

$$\bar{\mu}_{i,t} = \frac{1 - \delta_{i,t} - \dfrac{w/A}{k} + s^y_{i,t} \varepsilon_{i,t} \dfrac{y}{k}}{(1+a)\lambda_{i,t}} \tag{3.63}$$

enquanto $\nu_{i,t}$ converge em média para

$$\bar{\nu}_{i,t} = \frac{s^w_{i,t}(w/A)}{(1+a)\lambda_{i,t}} \tag{3.64}$$

Tomando a esperança da equação (3.60), temos que

$$k_{t+1} = \mu_t k_t + \nu_t \tag{3.65}$$

onde $\mu_t$ e $\nu_t$ são as esperanças, respectivamente, de $\mu_{i,t}$ e $\nu_{i,t}$. Segue então que

$$\mu_t = \frac{k_{t+1}}{k_t} - \frac{\nu_t}{k_t} \tag{3.66}$$

Por um lado, temos então que $\mu_t$ converge para a esperança $\bar{\mu}$ de $\bar{\mu}_{i,t}$. Por outro lado, temos que $\mu_t$ converge para $1-\bar{v}/k$, onde $\bar{v}$ é a esperança de $\bar{v}_{i,t}$. Isso mostra que $k_{i,t}$ é um processo de Kesten assintótico, como definido no apêndice. Pelas Proposições A.5, A.6 e A.7, segue que a distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ se aproxima no longo prazo de uma única distribuição estacionária, independentemente da distribuição inicial do estoque de capital desagregado pelo fator de produtividade e que a cauda superior dessa distribuição estacionária é aproximadamente igual à cauda de uma distribuição de Pareto, cujo expoente $P$ é a única constante positiva tal que a esperança de $\bar{\mu}_{i,t}^P$ é igual a um. Basta então observar que essa condição é equivalente à equação (3.57) para a distribuição estacionária. A expressão (3.58) segue então da equação (3.29), uma vez

$$\frac{w_t/A_t}{k_t} = \frac{w_t}{y_t A_t}\frac{y_t}{k_t} \simeq (1-\alpha_t)\beta_t^{-1} = \beta_t^{-1} - r_t \tag{3.67}$$

Substituindo o correspondente valor de equilíbrio

$$\frac{w/A}{k} \simeq \beta^{-1} - r \tag{3.68}$$

na equação (3.57) e observando que $y/k = \beta^{-1}$, obtemos a equação (3.58). □

Observe que o expoente $P$ dado pela proposição anterior é uma função decrescente do diferencial $\tilde{r}_t - g$. De fato, temos que $1+\tilde{r}_t = 1 + r - \delta_{i,t}$ aparece no numerador e $(1+a)\lambda_{i,t}$, que possui esperança $1+g$, aparece no denominador da base da variável aleatória que determina o expoente $P$. Assim como no modelo de Piketty, um aumento no diferencial $\tilde{r} - g$ diminui o expoente $P$, consequentemente aumentando a desigualdade. Agora vamos determinar a relação, no modelo desagregado, entre as curvas de Lorenz e os coeficientes de Gini das distribuições de estoque de capital acumulado e de renda total.

**Proposição 3.5** *Temos que*

$$L_Y(x) = \alpha_t L_K(x) + (1-\alpha_t)x \tag{3.69}$$

*e também que*

$$G_Y = \alpha_t G_K \tag{3.70}$$

*onde $L_Y, L_K$ são as curvas de Lorenz e $G_Y, G_K$ são os coeficientes de Gini das distribuições, respectivamente, da renda total e do estoque de capital acumulado e $\alpha_t$ é a fração do produto bruto que remunera o capital. O mesmo resultado vale trocando-se as variáveis brutas pelas variáveis líquidas.*

**Prova:** Pela equação (3.10), a taxa real de retorno bruto do capital obtida pela família $i$ no período entre $t$ e $t+1$ é independe estoque de capital $K_{i,t}$ da família $i$ no tempo $t$ e o conjunto dessas taxas formam uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas entre as famílias e entre os tempos. Agora considere o conjunto das famílias cujo estoque de capital $K_{i,t}$ é aproximadamente igual a um dado $K$. A soma das respectivas rendas do capital é então dada por $\sum r_{i,t}K$, enquanto a soma dos respectivos capitais acumulados é dada por $NK$, onde $N$ é o número dessas famílias. A taxa média real de retorno bruto dessas famílias é então dada por

$$\frac{\sum r_{i,t}K}{NK} = \frac{\sum r_{i,t}}{N} \tag{3.71}$$

que, pela Lei dos Grandes Números é aproximadamente igual a esperança de $r_{i,t}$, dada por $r_t = f'(k_t)$ pela equação (3.17). Segue então que a taxa real de retorno do capital $r_t$ é constante em relação ao estoque de capital acumulado. Além disso, como o salário é o mesmo para todas as famílias, segue que as ordens do capital acumulado e dos salários coincidem, que $L_w(x) = x$ e também que $G_w = 0$. O resultado segue então das Proposições A.1 e A.3. □

## 3.3 Tributação da Renda e da Herança

Nessa seção, introduzimos as políticas de distribuição da renda e da riqueza baseadas na tributação da renda e da herança. O imposto de renda incide apenas sobre os lucros, de modo que a família $i$ paga

$$\tau^y \left( Y_{i,t} - w_t L_{i,t} \right) \tag{3.72}$$

de imposto de renda no tempo $t$, onde $\tau^y$ é *taxa única de imposto de renda*. Observamos que o imposto de renda não altera as decisões de contratação de quantidade de trabalho, uma vez que o novo problema de maximização possui a mesma solução que original. Além disso, quando a família sofre um prejuízo, o imposto de renda funciona como uma espécie de seguro parcial, atenuando choques de produtividade muito desfavoráveis. Já o imposto de herança incide sobre a riqueza herdada, de modo que os herdeiros da família $i$ pagam

$$\tau^b b_{i,t} K_{i,t} \tag{3.73}$$

de imposto de herança no tempo $t$, onde $\tau^b$ é *taxa única de imposto de herança* e $b_{i,t}$ é igual a um quando o processo é de herança e é igual a zero quando o processo é de acumulação simples, formando uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas entre as famílias e entre os tempos. O processo de redistribuição afeta tanto a dinâmica do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo, quanto a dinâmica da distribuição entre as famílias do estoque de capital pelo fator de produtividade.

**Proposição 3.6** *Suponha que $\sigma \geq 1$, que $\delta_{i,t} + \tau^b b_{i,t} < \alpha$ e que $\tau^y < s^y_{i,t}$, sempre que $\varepsilon_{i,t} \geq \frac{w_t}{A_t y_t}$. Se a arrecadação dos impostos de renda e de herança é distribuída igualmente entre as famílias e poupada com uma taxa de poupança $s^\tau_{i,t}$, então a dinâmica da distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ é dada por*

$$\begin{aligned}(1+a)\lambda_{i,t}k_{i,t+1} &= \left(1-\delta_{i,t}-\tau^b b_{i,t}-\frac{\tau^y}{k_t}\left(\varepsilon_{i,t}y_t-\frac{w_t}{A_t}\right)-\frac{w_t}{A_t k_t}+s^y_{i,t}\varepsilon_{i,t}\frac{y_t}{k_t}\right)k_{i,t}+ \\ &\quad +s^\tau_{i,t}\left(\tau^b b k_t+\tau^y\left(y_t-\frac{w_t}{A_t}\right)\right)+s^w_{i,t}\frac{w_t}{A_t} \qquad (3.74)\end{aligned}$$

*onde $b$ é a esperança de $b_{i,t}$, que é igual à probabilidade de haver o processo de herança, enquanto a dinâmica do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo é similar à dinâmica descrita pela Proposição 3.2, devendo-se apenas substituir a esperança das taxas de depreciação do capital e de poupança do produto e do salário, respectivamente, por*

$$\begin{aligned}\delta_\tau &= \delta+(1-s^\tau)\tau^b b \\ s^y_\tau &= s^y-(1-s^\tau)\tau^y \\ s^w_\tau &= s^w+(1-s^\tau)\tau^y \qquad (3.75)\end{aligned}$$

*onde $s^\tau$ é a esperança de $s^\tau_{i,t}$. Além disso, supondo também que $\alpha \leq 1/2$, então a distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ se aproxima no longo prazo de uma única distribuição estacionária, independentemente da distribuição inicial do estoque de capital desagregado pelo fator de produtividade, sempre que as desigualdades (3.39) e (3.40)* *forem satisfeitas e sempre que o estoque inicial de capital agregado por tempo de trabalho efetivo for maior ou igual a um. A cauda superior dessa distribuição estacionária é aproximadamente igual à cauda de uma distribuição de Pareto, cujo expoente $P$ é a única constante positiva tal que a variável aleatória*

$$\left( \frac{1-\delta_{i,t}-\tau^b b_{i,t}-\frac{\tau^y}{k_\tau}\left(\varepsilon_{i,t}y_\tau - w_\tau/A_\tau\right)-\frac{w_\tau/A_\tau}{k_\tau}+s^y_{i,t}\varepsilon_{i,t}\frac{y_\tau}{k_\tau}}{(1+a)\lambda_{i,t}} \right)^P \tag{3.76}$$

*possui esperança igual a um, onde as constantes $y_\tau$, $k_\tau$ e $w_\tau/A_\tau$ são os valores de equilíbrio sob a presença da tributação, respectivamente, do produto bruto agregado por tempo de trabalho efetivo, do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo e do salário pelo fator de produtividade. Em particular, quando $s^\tau = 1$, a desigualdade de riqueza na cauda superior da distribuição é uma função decrescente da taxa de imposto de herança.*

**Prova:** Como a arrecadação de impostos é distribuída igualmente entre as famílias, além do salário $w_t$, cada família recebe

$$\frac{1}{L_t}\sum_{i=1}^{L_t}\tau^y\left(Y_{i,t}-w_tL_{i,t}\right) \tag{3.77}$$

devido ao imposto de renda redistribuído e também

$$\frac{1}{L_t}\sum_{i=1}^{L_t}\tau^b b_{i,t}K_{i,t} \tag{3.78}$$

devido ao imposto de herança redistribuído. Pela Lei dos Grandes Números, essas rendas devidas à redistribuição são aproximadas pelas respectivas esperanças, que são dadas, respectivamente, por

$$\tau^y\left(A_t y_t - w_t\right) \qquad \text{e} \qquad \tau^b b A_t k_t \tag{3.79}$$

Levando-se em conta o que a família $i$ paga e recebe devido ao processo redistributivo, o processo de acumulação ou de herança de capital é dado por

$$\begin{aligned}\lambda_{i,t}K_{i,t+1} &= (1-\delta_{i,t})K_{i,t}-\tau^{b}b_{i,t}K_{i,t}-w_tL_{i,t}+s^{y}_{i,t}Y_{i,t}-\tau^{y}\left(Y_{i,t}-w_tL_{i,t}\right)+\\ &\quad +s^{w}_{i,t}w_t+s^{\tau}_{i,t}\left(\tau^{b}bA_tk_t+\tau^{y}\left(A_ty_t-w_t\right)\right) \qquad (3.80)\end{aligned}$$

de modo que a dinâmica da distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ é obtida dividindo-se a equação acima por $A_t$, lembrando-se das equações (3.7) e (3.9) e de que $A_{t+1}=(1+a)A_t$. Tomando-se a esperança da equação (3.74), obtemos que

$$\begin{aligned}(1+a)(1+l)k_{t+1} &= \left(1-\delta-\tau^{b}b-\frac{\tau^{y}}{k_t}\left(y_t-\frac{w_t}{A_t}\right)-\frac{w_t}{A_tk_t}+s^{y}\frac{y_t}{k_t}\right)k_t+\\ &\quad +s^{\tau}\left(\tau^{b}bk_t+\tau^{y}\left(y_t-\frac{w_t}{A_t}\right)\right)+s^{w}\frac{w_t}{A_t} \qquad (3.81)\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}(1+g)k_{t+1} &= \left(1-\delta-(1-s^{\tau})\tau^{b}b\right)k_t+\left(s^{y}-(1-s^{\tau})\tau^{y}\right)y_t-\\ &\quad -\left(1-s^{w}-(1-s^{\tau})\tau^{y}\right)\frac{w_t}{A_t} \qquad (3.82)\end{aligned}$$

de modo que, usando as equações (3.11) e (3.12), a dinâmica do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo é então dada por

$$(1+g)k_{t+1}=(1-\delta_{\tau})\,k_t+s(k_t)f(k_t) \qquad (3.83)$$

onde

$$s(k_t)=s^{y}_{\tau}-\left(1-s^{w}_{\tau}\right)(1-\alpha)f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1} \qquad (3.84)$$

Finalmente, quando $s^{\tau}=1$, temos que $y_{\tau}=y$, que $k_{\tau}=k$ e que $w_{\tau}/A_{\tau}=w/A$, de modo que o expoente $P$ é uma função crescente da taxa de imposto de herança, de modo que a desigualdade de riqueza na cauda superior da distribuição é então uma função decrescente da taxa de imposto de herança. □

## 3.4 Modelo de Nirei

O modelo apresentado na seção anterior pode ser visto como uma evolução do modelo introduzido em (Nirei, 2009; S. Aoki e M. Nirei, 2015a). A seguir apresentamos as principais diferenças entre os modelos:

1. No modelo de Nirei, a função de produção é Cobb-Douglas, de modo que a elasticidade de substituição é sempre $\sigma = 1$.

2. Os choques ocorrem na produtividade do trabalho e não na produtividade total.

3. O agentes conhecem os choques na produtividade do trabalho antes de resolverem seu respectivo problema de maximização, de modo que as famílias nunca sofrem prejuízos.

4. As taxas de poupança do produto e do salário são constantes e iguais entre si e a taxa de poupança do produto incide sobre o lucro, que é sempre não negativo.

5. A taxa de depreciação do capital também é constante.

6. Os agentes possuem vida infinita e a quantidade de tempo de trabalho agregado tem crescimento nulo, de modo que $g = a$.

Quando a função de produção é Cobb-Douglas, é equivalente os choques ocorrerem na produtividade do trabalho ou na produtividade total, uma vez que

$$Y_{i,t} = K_{i,t}^{\alpha}(\epsilon_{i,t} A_t L_{i,t})^{1-\alpha} \tag{3.85}$$

se e só se

$$Y_{i,t} = \varepsilon_{i,t} K_{i,t}^{\alpha} (A_t L_{i,t})^{1-\alpha} \tag{3.86}$$

onde

$$\varepsilon_{i,t} = \epsilon_{i,t}^{1-\alpha} \tag{3.87}$$

Cada família $i$ contrata uma quantidade de trabalho $L_{i,t}$ de modo a maximizar seus lucros, dados por

$$Y_{i,t} - w_t L_{i,t} \tag{3.88}$$

A equação de acumulação de capital é dada por

$$K_{i,t+1} = (1-\delta) K_{i,t} + s(Y_{i,t} - w_t L_{i,t}) + s w_t \tag{3.89}$$

**Proposição 3.7** *No modelo de Nirei, a dinâmica da distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ é dada por*

$$(1+a) k_{i,t+1} = \left(1 - \delta + s\alpha \left(\frac{\epsilon_{i,t}}{y_t}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) k_{i,t} + s\frac{w_t}{A_t} \tag{3.90}$$

*enquanto a dinâmica do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo é da por*

$$(1+a) k_{t+1} = (1-\delta) k_t + s y_t \tag{3.91}$$

*onde*

$$y_t = \epsilon k_t^{\alpha} \tag{3.92}$$

*onde $\epsilon$ é a esperança de $\epsilon_{i,t}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ elevada a $\alpha$. A distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ se aproxima no longo prazo de uma única distribuição estacionária, independentemente da distribuição inicial do estoque de capital desagregado pelo fator de produtividade. A cauda superior dessa distribuição estacionária é aproximadamente igual à cauda de uma* *distribuição de Pareto, cujo expoente P é a única constante positiva tal que a variável aleatória*

$$\left(\frac{1-\delta+s\alpha\left(\frac{\epsilon_{i,t}}{y}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1+a}\right)^{P} \tag{3.93}$$

*possui esperança igual a um, onde a constante y é o valor de equilíbrio do produto bruto agregado por tempo de trabalho efetivo.*

**Prova:** Na Proposição C.3, mostramos que a condição de primeira ordem para o problema de maximização resolvido pela família $i$ implica que

$$\frac{y_{i,t}}{L_{i,t}} = \frac{w_t}{(1-\alpha)A_t} = y_t \tag{3.94}$$

onde a última igualdade segue multiplicando a equação por $L_{i,t}$ e tomando a esperança. Por outro lado, dividindo a equação (3.85) por $A_t L_{i,t}$, obtemos que

$$\frac{y_{i,t}}{L_{i,t}} = \left(\frac{k_{i,t}}{L_{i,t}}\right)^{\alpha} \epsilon_{i,t}^{1-\alpha} \tag{3.95}$$

de modo que, igualando as equações (3.94) e (3.95), segue que

$$\epsilon_{i,t}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{k_{i,t}}{L_{i,t}} = y_t^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.96}$$

Multiplicando essa equação por $L_{i,t}$ e tomando a esperança, segue que

$$\epsilon^{\frac{1}{\alpha}} k_t = y_t^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.97}$$

que é equivalente à equação (3.92). Dividindo a equação (3.94) pela equação (3.96), obtemos que

$$\frac{y_{i,t}}{k_{i,t}} = \epsilon_{i,t}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} y_t^{1-\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\epsilon_{i,t}}{y_t}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{3.98}$$

Dividindo a equação de acumulação de capital por $A_t$, segue que

$$(1+a)k_{i,t+1} = (1-\delta)k_{i,t} + s\left(y_{i,t} - \frac{w_t}{A_t}L_{i,t}\right) + s\frac{w_t}{A_t} \tag{3.99}$$

Pela equação (3.94), essa equação é equivalente a

$$(1+a)k_{i,t+1} = (1-\delta)k_{i,t} + s\alpha y_{i,t} + s\frac{w_t}{A_t} \tag{3.100}$$

de modo que a equação (3.90) segue então da equação (3.98). As demais afirmações seguem das Proposições 2.12, A.5, A.6 e A.7, como na demonstração da Proposição 3.4. □

Além da hipótese dos agentes conhecerem os choques de produtividade antes de resolverem seu respectivo problema de maximização não ser muito realista, o modelo de Nirei sofre da seguinte inconsistência. Seja $d$ é a *taxa de depreciação do capital quando o capital não é utilizado na produção*. Como $d < \delta$, se o choque de produtividade for suficientemente adverso, poderia ocorrer que

$$(1-d)K_{i,t} > (1-\delta)K_{i,t} + Y_{i,t} - w_t L_{i,t} \tag{3.101}$$

de modo que seria racional não contratar qualquer quantidade de trabalho, nem utilizar qualquer quantidade de capital, o que modificaria completamente o modelo, dando origem a não linearidades. De fato, basta que

$$\epsilon_{i,t} < \left(\frac{\delta-d}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y_t \tag{3.102}$$

Concluímos essa seção observando que, em (Nirei, 2009, página 15), a tributação é introduzida no modelo de forma incorreta, de modo que a tributação não afeta o estado estacionário do modelo agregado, diferentemente do que se verifica na Proposição 3.6.

## 3.5 Modelo de Piketty

Nesta seção, apresentamos o modelo introduzido em Piketty (2015), cujas principais características são apresentadas a seguir:

1. A taxa de retorno líquida do capital $\widetilde{r}$ é constante e dada exogenamente.
2. O salário $w_t$ tem crescimento igual ao do fator de produtividade $A_t$.
3. A taxa de poupança $\widetilde{s}_{i,t}$ incide sobre todo o capital acumulado e formam uma sequência de variáveis aleatórias entre zero e um, independentes e identicamente distribuídas entre as famílias e entre os tempos.
4. Os agentes possuem vida infinita e a quantidade de tempo de trabalho agregado tem crescimento nulo, de modo que $g = a$.

A equação de acumulação de capital é dada por

$$K_{i,t+1} = \widetilde{s}_{i,t}\left((1+\widetilde{r})\,K_{i,t} + w_t\right) \tag{3.103}$$

**Proposição 3.8** *No modelo de Piketty, a dinâmica da distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ é dada por*

$$(1+a)k_{i,t+1} = \widetilde{s}_{i,t}\,(1+\widetilde{r})\,k_{i,t} + \widetilde{s}_{i,t}\frac{w_t}{A_t} \tag{3.104}$$

*Se a esperança de variável aleatória*

$$\frac{\widetilde{s}_{i,t}\,(1+\widetilde{r})}{1+a} \tag{3.105}$$

*é menor do que um, então a distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ se aproxima no longo prazo de uma* *única distribuição estacionária, independentemente da distribuição inicial do estoque de capital desagregado pelo fator de produtividade. A cauda superior da distribuição estacionária é aproximadamente igual à cauda de uma distribuição de Pareto, cujo expoente P é a única constante positiva tal que a variável aleatória*

$$\left(\frac{\widetilde{s}_{i,t}(1+\widetilde{r})}{1+a}\right)^P \tag{3.106}$$

*possui esperança igual a um, que é similar à condição (3.58). Quando* $\widetilde{s}_{i,t}$ *é igual a* $\widetilde{s}/p$ *com probabilidade p e é igual a zero com probabilidade* $1-p$*, então*

$$P = \frac{\log(1/p)}{\log\left(\dfrac{\widetilde{s}}{p}\dfrac{1+\widetilde{r}}{1+a}\right)} \tag{3.107}$$

**Prova:** A dinâmica da distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ é obtida dividindo-se a equação de acumulação de capital por $A_t$. As duas afirmações seguintes seguem das Proposições A.5, A.6 e A.7, uma vez que $w_t/A_t$ se aproxima de uma constante. Quando $\widetilde{s}_{i,t}$ é igual a $\widetilde{s}/p$ com probabilidade $p$ e é igual a zero com probabilidade $1-p$, a esperança da variável aleatória

$$\left(\frac{\widetilde{s}_{i,t}(1+\widetilde{r})}{1+a}\right)^P \tag{3.108}$$

é dada por

$$\left(\frac{\widetilde{s}}{p}\frac{(1+\widetilde{r})}{1+a}\right)^P p \tag{3.109}$$

A última afirmação segue igualando-se a expressão acima a um e isolando $P$. □

# Capítulo 4

# Críticas aos Resultados de Piketty

Neste capítulo, a principal fonte de citações será a obra magna de Pikety, o livro *Capital in the 21st Century*. Por essa razão, para se evitar repetições desnecessárias, apenas no caso dessa obra, suas páginas serão citadas entre parênteses, sem maiores referências.

## 4.1 Controvérsias do Capital

Uma das críticas mais comumente apresentadas por autores heterodoxos à abordagem teórica utilizada por Piketty é sua opção em adotar a teoria macroeconômica neoclássica para explicar seus dados empíricos, passando por cima das diversas objeções apresentadas nas denominadas *Controvérsias do Capital* da década de 1960 (Barbosa-Filho, 2016; Galbraith, 2014; López-Bernardo et ali, 2016; Michl, 2016; Taylor, 2014; Varoufakis, 2014). Em particular, Piketty adota modelos macroeconômicos neoclássicos, onde existe apenas um único bem, cuja produção $Y$ é determinada tecnicamente por uma função da quantidade acumulada $K$ do próprio bem e da quantidade trabalho empregada $L$, denominada *função de produção* e denotada por $Y = F(K, L)$. Piketty não ignora as Controvérsias do Capital da década de 1960, dedicando uma seção inteira do sexto capítulo do seu livro a esse assunto. No entanto, afirma equivocadamente que o debate se restringia à crítica de que o modelo neoclássico ignorava os descompassos entre as decisões de poupança e investimento e as decorrentes flutuações de curto prazo no emprego, e conclui erroneamente que o modelo neoclássico foi o grande vitorioso ao final do debate (página 231):

*Controversy continued, however, in the 1950s and 1960s between economists based primarily in Cambridge, Massachusetts (including Solow and Samuelson, who defended the production function with substitutable factors) and economists working in Cambridge, England (including Joan Robinson, Nicholas Kaldor, and Luigi Pasinetti), who (not without a certain confusion at times) saw in Solow's model a claim that growth is always perfectly balanced, thus negating the importance Keynes had attributed to short-term fluctuations. It was not until the 1970s that Solow's so-called neoclassical growth model definitively carried the day.*

Mais do que isso, Piketty acredita que o debate ocorreu em grande medida pela deficiência de dados empíricos disponíveis na época (página 232):

*In my view, the virulence—and at times sterility—of the Cambridge capital controversy was due in part to the fact that participants on both sides lacked the historical data needed to clarify the terms of the debate.*

Na verdade, o principal ponto em disputa nesse debate era sobre a possibilidade ou impossibilidade em se definir os conceitos de capital agregado e de função de produção agregada de modo logicamente independente da taxa de retorno do capital. Como explicado em (López-Bernardo et ali, 2016, página 200):

*More technically, the question was whether a multi-sector economy with a rich set of possible input technologies, which profit-maximising capitalists can choose from, can in a meaningful way be described by a (well-behaved) aggregate production function. The main result was that it cannot: the same technology can be used by a profit maximising economy at both high and low wages (known as capital reswitching and capital reversal). A rise in wages can lead to a decrease or an increase in the observed capital-labour ratio. No general negative relationship between techniques (capital-labour ratio) and the profit rate can be derived.*

Em 1966, o próprio Samuelson reconheceu a circularidade lógica da abordagem macroeconômica neoclássica. Esse ponto é particularmente importante, pois a função de produção é utilizada por Piketty justamente na explicação dos movimentos da razão capital pelo produto, da taxa real de retorno do capital e da fração do produto que remunera o capital.

Apesar de utilizar a teoria da produtividade marginal para explicar a remuneração do capital (página 213), Piketty é explicitamente crítico em se aplicar essa teoria para se explicar os super-salários, devido a presença de informações imperfeitas, que impossibilitam a própria definição de produtividade marginal do trabalho.

A visão dessa dissertação é que modelos macroeconômicos neoclássicos, no seu atual estágio de desenvolvimento, não se constituem boas aproximações da realidade, pois necessitam de um nível maior de desagregação setorial e também de incorporar algum grau de poder de barganha para se obter uma teoria que explique melhor a remuneração dos diversos fatores produtivos. Entretanto, esses modelos macroeconômicos extremamente idealizados podem ser úteis em esclarecer alguns pontos em debate, especialmente auxiliando a descartar certas proposições econômicas que podem ser verdadeiras em certos modelos de equilíbrio parcial, mas que não são válidas em modelos de equilíbrio geral, mesmo se utilizando das hipóteses mais irrealistas. O próprio Piketty parece ter uma opinião semelhante, como revelado em (López-Bernardo et ali, 2016, página 199):

*However, in an email exchange to the authors, Piketty himself has made very clear his position regarding the use of the neoclassical production model:*

*[a]ll I am saying is that even if the world was working as in the one-sector neoclassical model with perfect competition, then this would certainly not imply that we live in an harmonious or desirable place in any meaningful sense.*

## 4.2 Capital e Riqueza

Um outro ponto muito criticado, agora tanto por autores heterodoxos (Foster e Yates, 2014; López-Bernardo et ali, 2016; Rowthorn, 2014; Semieniuk, 2014; Varoufakis, 2014), quanto por autores ortodoxos (Bonnet et ali, 2014; Homburg, 2015; Rognlie, 2014), é a identificação entre os conceitos de capital e riqueza utilizada por Piketty para estabelecer a ligação entre a teoria e os dados empíricos. Esse ponto é de fato estreitamente ligado à impossibilidade da agregação do capital de modo logicamente independente da taxa de retorno do capital, que foi mencionada na seção anterior. Para Piketty e para os autores ortodoxos, a questão é se determinar qual medida empírica do capital se aproximaria melhor do conceito de capital utilizado nos modelos macroeconômicos neoclássicos. Piketty argumenta que, no longo prazo, o valor nominal de todos os bens acumulados é uma boa aproximação para o valor empírico do capital (página 211):

*Make no mistake: I am obviously not denying that inflation can in some cases have real eff ects on wealth, the return on wealth, and the distribution of wealth. The effect, however, is largely one of redistributing wealth among asset categories rather than a long-term structural effect.*

Essa parece ser também a opinião do próprio Solow num artigo de 2014:

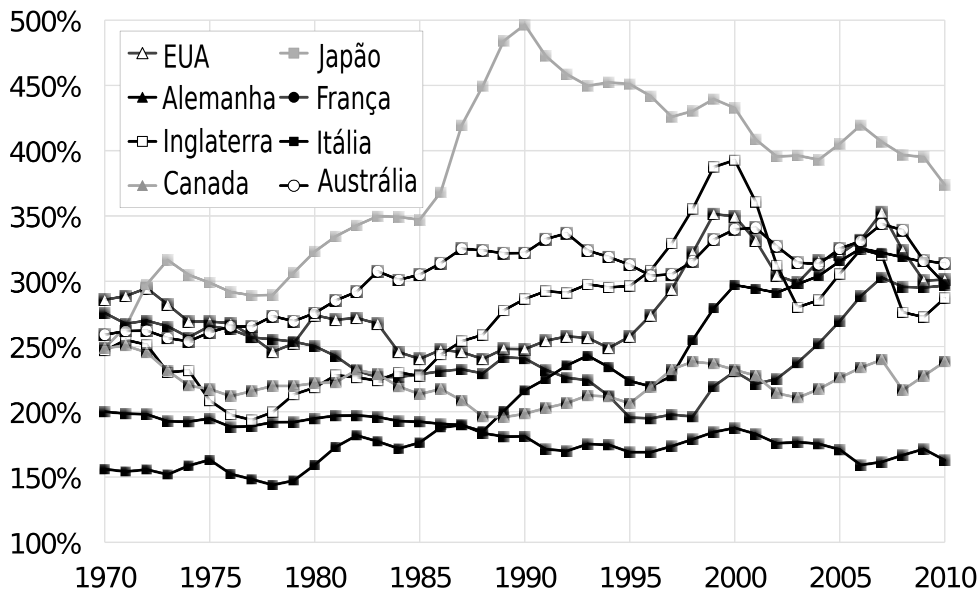
*There is a small ambiguity here. Piketty uses "wealth" and "capital" as interchangeable terms. ... In a recession, the wealth-income ratio may fall noticeably, although the stock of productive capital, and even its expected future earning power, may have changed very little or not at all. But as long as we stick to longer-run trends, as Piketty generally does, this difficulty can safely be disregarded.*

Outros autores argumentam que os efeitos de ganho de capital deveriam ser descontados para a correta determinação do valor empírico de $K$. Piketty observa corretamente que (página 211):

*But it would not make much sense to deduct inflation from the return on all forms of capital without adding capital gains, which on average amply make up for the effects of inflation.*

Por exemplo, em (Bonnet et ali, 2014) a parcela da riqueza referente ao setor imobiliário é multiplicada pela razão entre os índices de aluguel e de preços de imóveis, de modo a se corrigir os efeitos de ganho de capital. Entretanto esse procedimento é problemático, pois essa razão fornece a taxa de retorno médio do capital imobiliário, de modo que a sua multiplicação pelo capital imobiliário fornece a remuneração anual do capital imobiliário e não o capital imobiliário propriamente dito. Uma abordagem alternativa é realizada em (Rognlie, 2014), onde os efeitos de ganho de capital são corrigidos medindo-se a riqueza através do seu valor contábil. Aqui parece haver uma inconsistência entre os modos como são medidos o numerador e o denominador, uma vez que o produto é fortemente influenciado pelas variações de preços excluídas da mensuração da riqueza.

Figura 4.1: Evolução de $\widetilde{\beta}_t$ excluindo os bens imobiliários




Devido aos substanciais efeitos de ganho de capital nos bens imobiliários, alguns autores (Rognlie, 2014; Semieniuk, 2014) analisam os efeitos da completa exclusão dos bens imobiliários na determinação do valor empírico de $K$. Com essa exclusão e a partir dos dados empíricos, concluem que a razão capital sobre o produto teve um crescimento muito mais modesto do que o anunciado por Piketty. Por exemplo, em (Rognlie, 2014, página 16) os seguintes dados são apresentados, relacionados ao gráfico da Figura 4.1:

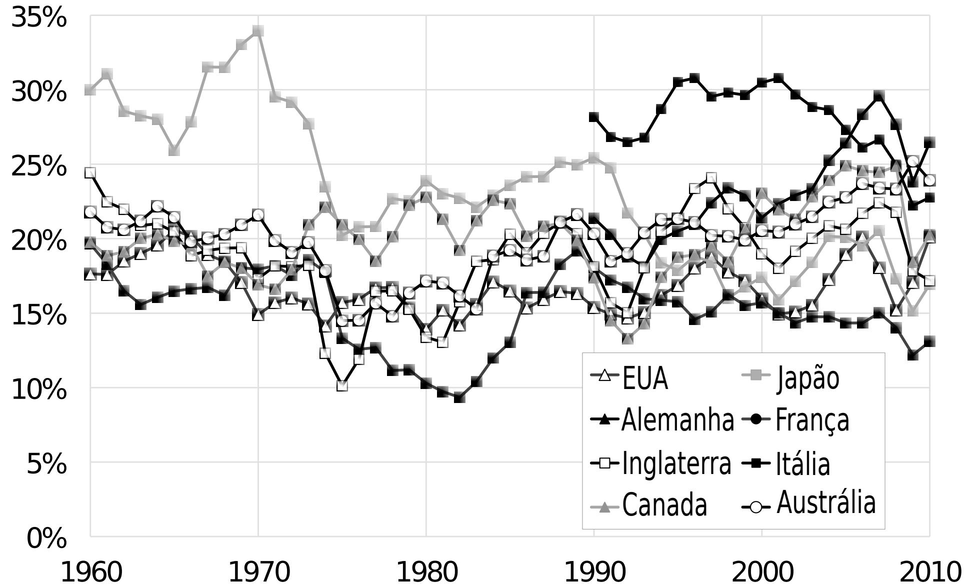
*Using data from Piketty and Zucman (2013), Figures 8 and 9 break the domestic capital/income ratio from 1970 to 2010 into two components: housing capital and all other forms of capital. Figure 8 shows an increase in the housing capital/income ratio of over 100 percentage points for all countries in the sample except the US, which had a 43pp increase. By contrast, the other capital/income ratio in Figure 9 only increased by over 100pp in Japan, and actually decreased in Canada and Germany. Across all eight countries in the sample, the average increase in housing capital/income was 186pp, while the average increase in other capital/income was only 44pp—making housing responsible for roughly 80pp of the overall increase.*

Esse procedimento também é problemático, pois excluir os bens imobiliários apenas do numerador, enquanto sua contribuição ao denominador permanece inalterada, reduz artificialmente a razão capital sobre o produto. Isso é comprovado pelos próprios dados apresentados em (Rognlie, 2014, página 17), relacionados ao gráfico da Figura 4.2:

*For the sample as a whole, the average increase in the housing share from 1970 to 2010 is 3.4pp, while the non-housing capital share has shown an average decrease of 1.9pp. Net housing income thus accounts for over 100pp of the increase in the net capital share in this period.*

O mais correto, nesse caso, parece ser proceder como sugerido por Stiglitz 2015 e reformular o modelo macroeconômico neoclássico, desagregando bens escassos que não são produzidos, como a terra, do capital $K$ e estabelecer a relação precisa entre a fração do produto que remunera a riqueza, a razão riqueza

Figura 4.2: Evolução de $\widetilde{\alpha}_t$ excluindo os bens imobiliários




pelo produto e a taxa real de retorno da riqueza.

## 4.3 Elasticidades de Substituição

A explicação neoclássica de Piketty para os dados empíricos encontrados, o crescimento tanto da fração do produto que remunera o capital, quanto da razão capital pelo produto, e o decrescimento da taxa real de retorno do capital, depende da elasticidade de substituição entre capital e trabalho ser maior do que 1. De fato, como Piketty trabalha com a variáveis líquidas $\widetilde{\alpha}_t$, $\widetilde{\beta}_t$ e $\widetilde{r}_t$, é a elasticidade líquida $\widetilde{\sigma}_t$ que deve ser maior do que 1. Piketty não apresenta uma estimativa numérica, mas afirma (página 221):

*It is obviously quite difficult to predict how much greater than one the elasticity of substitution of capital for labor will be in the twenty-first century. On the basis of historical data, one can estimate an elasticity between 1.3 and 1.6.*

Como apresentado em (Rognlie 2014 página 5) e demonstrado na Proposição 2.9, a razão entre as elasticidades líquida e bruta é dada por

$$\frac{\widetilde{\sigma}_t}{\sigma_t} = \frac{1-\delta r_t^{-1}}{1-\delta\beta_t} \tag{4.1}$$

Essa razão é sempre menor do 1, uma vez que $r_t\beta_t = \alpha_t < 1$ e o valor estimado para os EUA em 2013 é igual a $0,66$. Portanto, para que a elasticidade líquida $\widetilde{\sigma}_t$ seja maior do que 1, a elasticidade bruta $\sigma_t$ deve ser maior do que $1,5$, o que parece contradizer os resultados obtidos em diversos trabalhos anteriores. Por exemplo, em (Rognlie, 2014, página 7) encontramos a seguinte afirmação:

*Chirinko (2008) provides an excellent summary of the empirical literature, listing estimates from many different sources and empirical strategies. Of the 31 sources listed for the gross elasticity, fully 30 out of 31 show $\sigma_t < 2$, 29 out of 31 show $\sigma_t < 1.5$, and 26 out of 31 show $\sigma_t < 1$. The median is $\sigma_t = 0.52$, and Chirinko concludes that "the weight of the evidence suggests that $\sigma_t$ lies in the range between 0.40 and 0.60".*

Em seguida esses resultados são qualificados (Rognlie, 2014, página 7):

*Clearly, the literature is imperfect and inconclusive, and not all estimates directly correspond to the aggregate elasticity that interests us. Furthermore, if some substitution between labor and capital only takes place in the very long term, it is possible that the studies in Chirinko (2008) systematically understate the true long-run elasticity.*

Por outro lado, em (Acemoglu e Robinson, 2015, página 10), afirma-se o seguinte:

*However, the vast majority of existing estimates indicate a short-run elasticity of substitution significantly less than one... Though this elasticity could be higher in longer horizons... In this context, it is worth noting that the only recent paper estimating an elasticity of substitution greater than one, Karabarbounis and Neiman (2014), uses long-run cross-country variation related to changes in investment prices, making their estimates much more likely to correspond to endogenous-technology elasticities.*

As estimativas feitas a partir dos próprios dados empíricos apresentados por Piketty sofrem de dois problemas. Primeiro, a exclusão dos bens imobiliários apenas do numerador, enquanto sua contribuição ao denominador permanece inalterada, reduz artificialmente a razão capital sobre o produto, como apontado na seção anterior, e por consequência reduz artificialmente a elasticidade de substituição. Segundo, a hipótese de elasticidade líquida constante implica que a função de produção tenha a forma

$$f(k_t) = \left(\alpha k_t^{\frac{\tilde{\sigma}-1}{\tilde{\sigma}}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}-1}} + \delta k_t \tag{4.2}$$

Em (Semieniuk, 2014, página 12), a equação

$$\log(\beta_t) = -\sigma_t \log(r_t) + c_t + \varepsilon_t \tag{4.3}$$

que segue direto da equação (2.70) aplicando-se o logaritmo, é utilizada para se estimar tanto a elasticidade líquida, quanto a elasticidade bruta. Parece que o mais correto seria estimar primeiro a elasticidade bruta e depois utilizar a equação (4.1) para se determinar a elasticidade líquida. Conhecendo-se o valor de $\delta$, é possível passar facilmente dos valores líquidos para os valores brutos, como apresentado na Proposição 2.4. Além disso, dois resultados são apresentados, denotados, respectivamente, por $\sigma_W$ e $\sigma_K$, dependendo de $\beta_t$ ser calculado com e sem os bens imobiliários. Além da exclusão dos bens imobiliários apenas do numerador, enquanto sua contribuição ao denominador permanece inalterada, reduzir artificialmente a elasticidade de substituição, a taxa de retorno $r_t = \alpha_t / \beta_t$ é em ambos casos determinada com $\beta_t$ calculado com os bens imobiliários (Semieniuk, 2014, página 13), o que é outra inconsistência.

## 4.4 Teorias de Poupança

Nas análises de estática comparativa apresentados por Piketty, a taxa de poupança líquida é mantida constante (página 167):

*For example, given a savings rate of 12 percent, if the rate of growth falls to 1.5 percent a year (instead of 2 percent), then the long-term capital/income ratio $\widetilde{\beta} = \widetilde{s}/g$ will rise to eight years of national income (instead of six). If the growth rate falls to 1 percent, then $\widetilde{\beta} = \widetilde{s}/g$ will rise to twelve years, indicative of a society twice as capital intensive as when the growth rate was 2 percent. In one respect, this is good news: capital is potentially useful to everyone, and provided that things are properly organized, everyone can benefit from it. In another respect, however, what this means is that the owners of capital - for a given distribution of wealth - potentially control a larger share of total economic resources. In any event, the economic, social, and political repercussions of such a change are considerable.*

Algumas das previsões mais sombrias formuladas por Piketty dependem dessa hipótese (páginas 195 e 196):

*The most interesting question concerns the extrapolation of this curve into the future. Here I have used the demographic and economic growth predictions* *presented in Chapter 2, according to which global output will gradually decline from the current 3 percent a year to just 1.5 percent in the second half of the twenty-first century. I also assume that the savings rate will stabilize at about 10 percent in the long run. With these assumptions, the dynamic law* $\widetilde{\beta} = \widetilde{s}/g$ *implies that the global capital/income ratio will quite logically continue to rise and could approach 700 percent before the end of the twenty-first century, or approximately the level observed in Europe from the eighteenth century to the Belle Époque. In other words, by 2100, the entire planet could look like Europe at the turn of the twentieth century, at least in terms of capital intensity. Obviously, this is just one possibility among others. As noted, these growth predictions are extremely uncertain, as is the prediction of the rate of saving. These simulations are nevertheless plausible and valuable as a way of illustrating the crucial role of slower growth in the accumulation of capital.*

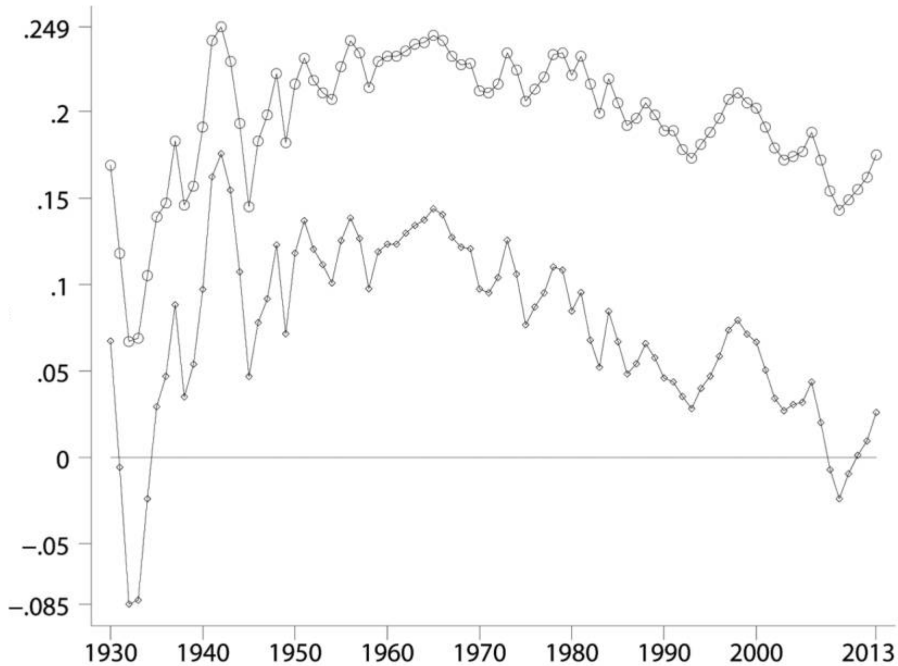
Como bem observado em (Krussel e Smith, 2014), a hipótese da constância da taxa de poupança líquida é uma teoria de poupança problemática por duas razões principais. Em primeiro lugar, os dados empíricos fornecem muito mais suporte à hipótese da constância da taxa de poupança bruta, implícita na teoria de poupança do modelo clássico de Sollow-Swan, que é em geral apresentado nos livro-textos. Os gráficos das Figuras 4.3 e 4.4 foram retirados de (Krussel e Smith, 2014, gráficos 2 e 3).

Em segundo lugar, sob a hipótese da constância da taxa de poupança líquida, pela equação (2.100), a taxa de poupança bruta no longo prazo é dada por

$$s = \frac{\widetilde{s}(\delta + g)}{\delta\widetilde{s} + g} \tag{4.4}$$

que se aproxima de 1, quando a taxa de crescimento se aproxima de 0, que é

Figura 4.3: Evolução de $s$ (acima) e de $\widetilde{s}$ (abaixo) nos EUA

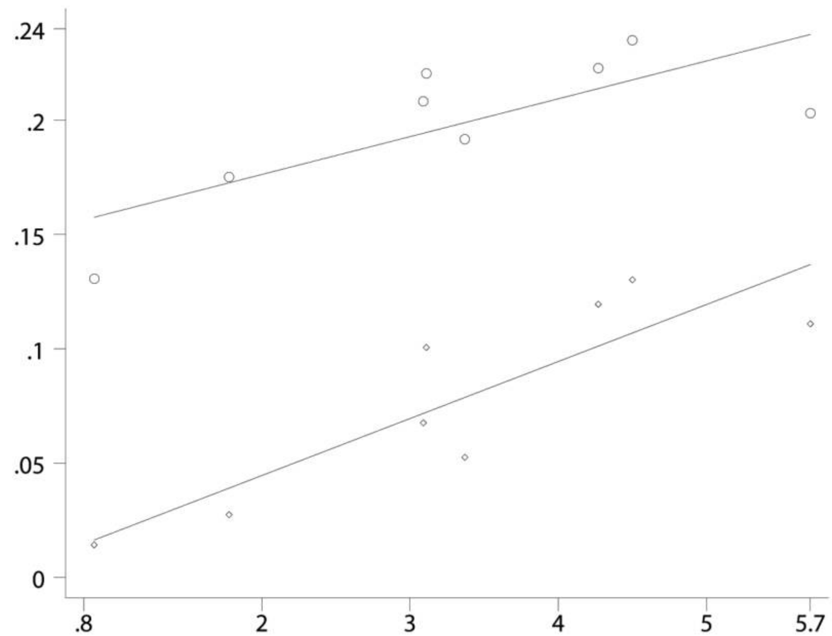



justamente o caso limite de maior interesse para Piketty (páginas 227 a 279):

*For Marx, the central mechanism by which "the bourgeoisie digs its own grave" corresponded to what I referred to in the Introduction as "the principle of infinite accumulation": capitalists accumulate ever increasing quantities of capital, which ultimately leads inexorably to a falling rate of profit (i.e., return on capital) and eventually to their own downfall. Marx did not use mathematical models, and his prose was not always limpid, so it is difficult to be sure what he had in mind. But one logically consistent way of interpreting his thought is to consider the dynamic law* $\widetilde{\beta} = \widetilde{s}/g$ *in the special case where the growth rate* $g$ *is zero or very close to zero.*

*...*

Figura 4.4: Regressão de $s$ (acima) e de $\widetilde{s}$ (abaixo) em relação a $g$ nos EUA




*Where there is no structural growth, and the productivity and population growth rate g is zero, we run up against a logical contradiction very close to what Marx described. If the savings rate* $\widetilde{s}$ *is positive, meaning the capitalists insist on accumulating more and more capital every year in order to increase their power and perpetuate their advantages or simply because their standard of living is already so high, then the capital/income ratio will increase indefinitely. More generally, if g is close to zero, the long-term capital/income ratio* $\widetilde{\beta} = \widetilde{s}/g$ *tends toward infinity. And if* $\widetilde{\beta}$ *is extremely large, then the return on capital* $\widetilde{r}$ *must get smaller and smaller and closer and closer to zero, or else capital's share of income,* $\widetilde{\alpha} = \widetilde{r}\widetilde{\beta}$*, will ultimately devour all of national income.*

*The dynamic inconsistency that Marx pointed out thus corresponds to a real* *difficulty, from which the only logical exit is structural growth, which is the only way of balancing the process of capital accumulation (to a certain extent). Only permanent growth of productivity and population can compensate for the permanent addition of new units of capital, as the law* $\widetilde{\beta} = \widetilde{s}/g$ *makes clear. Otherwise, capitalists do indeed dig their own grave: either they tear each other apart in a desperate attempt to combat the falling rate of profit ..., or they force labor to accept a smaller and smaller share of national income, which ultimately leads to a proletarian revolution and general expropriation. In any event, capital is undermined by its internal contradictions.*

Entretanto, como observado acima, a hipótese da constância da taxa de poupança líquida é inconsistente com uma taxa de crescimento nula, pois nesse caso o consumo também seria nulo. Por outro lado, sob a hipótese clássica da constância da taxa de poupança bruta, pelas equações (2.80) e (2.81), a taxa de poupança líquida e a razão capital pelo produto líquido no longo prazo são dadas, respectivamente, por

$$\widetilde{s} = \frac{sg}{\delta(1-s)+g} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\beta} = \frac{s}{\delta(1-s)+g} \tag{4.5}$$

de modo que, se a taxa de crescimento for nula, então

$$\widetilde{s} = 0 \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\beta} = \frac{s}{\delta(1-s)} \tag{4.6}$$

ou seja, a taxa de poupança líquida seria nula e a a razão capital pelo produto líquido seria limitada. Como bem ressaltado em (Krussel e Smith, 2014, páginas 745 e 746):

*These "internal contradictions"—the notion that capitalism naturally and inevitably generates extreme wealth inequality—are arguably the central theme* *of Piketty's book, and as this passage makes clear, they are intimately related to his second law as we have portrayed it here.*

*These two passages also point to another central issue, largely absent from Piketty's book, namely, the role of depreciation in macroeconomics. Depreciation is clearly a threat to "capitalists": it eats up their capital and limits their ability to build it up. But it is also a threat to Piketty's vision of capitalism's purported internal contradictions: depreciation destroys capital and forces capitalists to devote resources not to its accumulation but rather simply to its maintenance. The phrase "permanent addition of new units of capital" in the just-quoted passage is telling: it is in fact difficult to conceive of such additions, because whether through physical decay or economic obsolescence, all capital depreciates. Throughout his book Piketty rails against the "disproportionate importance" of "wealth accumulated in the past" (see, e.g., p. 166 in his book), the latter phrase appearing no fewer than nine times in his book. But depreciation erodes wealth, and in our view it is critical to incorporate this corrosive force explicitly in any analysis of wealth accumulation.*

Concluímos essa seção com uma observação sobre a teoria de poupança implícita no modelo de distribuição desagregado apresentado por Piketty. A equação de acumulação de capital é dada por

$$K_{i,t+1} = \widetilde{s}_{i,t}\left((1+\widetilde{r})\,K_{i,t} + w_t\right) \tag{4.7}$$

de modo que a taxa de poupança $\widetilde{s}_{i,t}$ incide sobre todo o capital acumulado. Essa teoria de poupança determina um expoente de Pareto $P$ na distribuição do estoque de capital entre as famílias dado por

$$P = \frac{\log(1/p)}{\log\left(\dfrac{\widetilde{s}}{p}\dfrac{1+\widetilde{r}}{1+a}\right)} \tag{4.8}$$

Se a taxa de poupança $\widetilde{s}_{i,t}$ incidisse apenas sobre a renda líquida, a equação de acumulação de capital seria dada por

$$K_{i,t+1} = K_{i,t} + \widetilde{s}_{i,t}\left(\widetilde{r}K_{i,t} + w_t\right) \tag{4.9}$$

Essa teoria de poupança desagregada seria mais consistente com teoria de poupança agregada utilizada por Piketty e determinaria um expoente de Pareto $P$ na distribuição do estoque de capital entre as famílias dado por

$$P = \frac{\log(1/p)}{\log\left(\frac{1}{p}\frac{1+\widetilde{s}\widetilde{r}}{1+a}\right)} \tag{4.10}$$

## 4.5 Eficiência de Pareto

Um outro ponto bastante comentado é a relação teórica entre a desigualdade $r > g$ e a eficiência de Pareto intertemporal da economia. Alguns autores ortodoxos afirmam que a relação $r > g$ seria apenas consequência dessa eficiência intertemporal. Por exemplo, em (Homburg, 2015, página 1403) encontramos a seguinte afirmação:

*As a final remark concerning this point, the relationship between $r$ and $g$ is important for not only capitalistic societies but also socialist economies, where r represents an imputed capital rental rate. In both systems, a return on capital in excess of the growth rate is not a problem but is socially useful because it prevents dynamic inefficiency: In the opposite case $r > g$, one could make a particular generation better off without making other generations worse off, as is well known.*

Essa mesma opinião aparece em (Ray, 2014, página 4), onde a desigualdade $r > g$ é denominada Terceira Lei Fundamental do Capitalismo de Piketty:

*...the law itself is a simple consequence of a mild efficiency criterion that has been known for many decades in economics.*

Alguns autores heterodoxos também parecem ter opinião similar, como em (López-Bernardo et ali, 2016, página 195):

*The remarkable aspect of the Cambridge formulation is that it shows that the famous inequality* $r > g$ *is not just a possible outcome in a capitalist economy, but rather an outcome that is to be expected; except for the limit case* $s_c = 1$, *the rate of profit will always be higher than the growth rate of the economy, casting well-founded doubts about alternative theories... where the opposite inequality,* $r < g$ *(called in these formulations dynamic inefficiency) is theoretically equally valid and stands on the same footing.*

Em (Piketty, 2015, página 74), encontramos a seguinte observação:

*The inequality* $r < g$ *would correspond to a situation which economists often refer to as "dynamic inefficiency": in effect, one would need to invest more than the return to capital in order to ensure that one's capital stock keeps rising as fast as the size of the economy. In infinite horizon models with perfect capital markets, this cannot happen. In effect,* $r < g$ *would violate the transversality condition: the net present value of future resources would be infinite, so that rational agents would borrow infinite amounts in order to consume right away. However, in models with other saving motives, such as finite-horizon overlapping generation models, it is possible for* $r < g$.

Já em (Acemoglu e Robinson, 2015, páginas 10 e 11), encontramos a seguinte afirmação:

*Theoretically, in an economy with an exogenous saving rate, or with overlapping generations ..., or with incomplete markets ..., the interest rate need not* *exceed the growth rate. It will do so in an economy that is dynamically efficient, meaning in an economy in which it is impossible to increase the consumption at all dates (thus achieving a Pareto improvement). Whether an economy is dynamically efficient is an empirical matter—for example, Geerolf (2013) suggests that several OECD economies might be dynamically inefficient—and dynamic inefficiency becomes more likely when the capital-output ratio is very high as Capital in the Twenty-first Century predicts it to be in the future.*

Solow, num artigo de 2014, externa uma visão semelhante, que também é compartilhada pela presente dissertação:

*There is no logical necessity for the rate of return to exceed the growth rate: a society or the individuals in it can decide to save and to invest so much that they (and the law of diminishing returns) drive the rate of return below the long-term growth rate, whatever that happens to be. It is known that this possible state of affairs is socially perverse in the sense that letting the stock of capital diminish until the rate of return falls back to equality with the growth rate would allow for a permanently higher level of consumption per person, and thus for a better social state. But there is no invisible hand to steer a market economy away from this perversity. Yet it has been avoided, probably because historical growth rates have been low and capital has been scarce. We can take it as normal that the rate of return on capital exceeds the underlying growth rate.*

# Apêndice A

# Distribuições e Desigualdades

## A.1 Curva de Lorenz

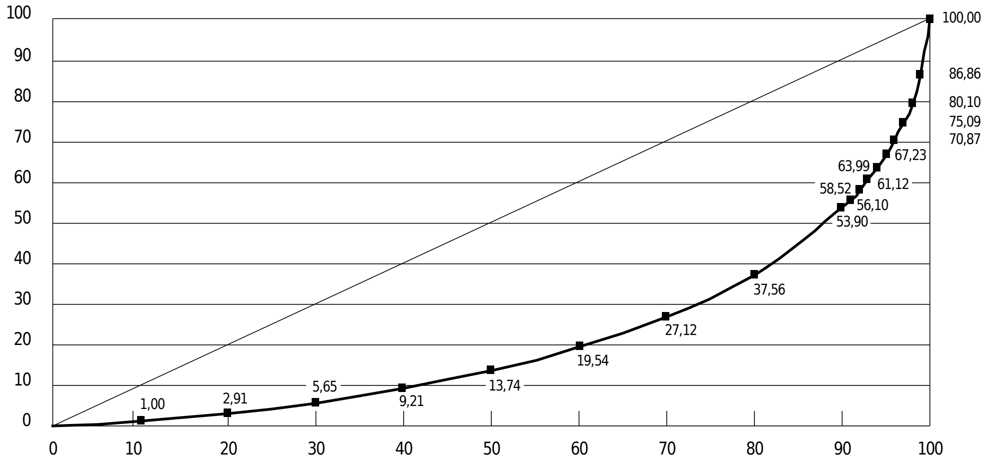
A denominada *curva de Lorenz* foi introduzida por Max Lorenz em 1905 para descrever as desigualdades na distribuição da renda total, mas também pode ser utilizada para descrever as desigualdades na distribuição do capital acumulado ou dos salários, entre outras variáveis não negativas. A Figura A.1, retirada de (Santos e Ugá, 2006, figura 2), apresenta a curva de Lorenz da distribuição da renda total no Brasil em 2002 segundo os dados da Pesquisa de Orçamentos Familiares do IBGE. A curva de Lorenz é o gráfico da função $L(x)$, cujo domínio e imagem são dados pelo intervalo $[0\%, 100\%]$ e cuja construção é dada da seguinte forma. Cada indivíduo da população deve estar associado a um dado valor da variável considerada, por exemplo, capital acumulado ou salários. Os indivíduos são então ordenados em ordem crescente desses valores, de modo que, no domínio, o intervalo $[0, x]$ corresponde aos indivíduos que estão entre os $x$ associados aos menores valores da variável considerada, enquanto o intervalo $[x, 100\%]$ corresponde aos indivíduos que estão entre os $100\% - x$ associados aos maiores valores. Então $L(x)$ fornece o percentual da variável considerada acumulado pelos indivíduos correspondentes ao intervalo $[0, x]$ em relação ao total acumulado por todos os indivíduos da população. É imediato que $L(0\%) = 0\%$ e também que $L(100\%) = 100\%$. Além disso, o intervalo $[x, y]$ corresponde aos indivíduos que estão entre os $y$ associados aos menores valores da variável considerada e que estão entre os $100\% - x$ associados com os maiores valores e $L(y) - L(x)$ fornece o percentual da variável considerada acumulado pelos indivíduos correspondentes ao intervalo $[x, y]$. A função $L(x)$ é claramente crescente e convexa e, se o gráfico de $L(x)$ é uma reta no intervalo $[x, y]$, então todos os indivíduos correspondentes a esse intervalo estão associados ao mesmo valor da variável considerada. As tabelas apresentadas por Piketty com as distribuições individuais de capital acumulado, salário e renda total, são versões simplificadas das respectivas curvas de Lorenz, como explicado na tabela A.1, onde na última coluna aparecem os dados do exemplo apresentado na Figura A.1.

Tabela A.1: Nomeclatura usada por Piketty e a curva de Lorenz

| Nomeclatura | Domínio | Curva de Lorenz | Exemplo |
|---|---|---|---|
| Os 10% de cima | $[90\%, 100\%]$ | $100\% - L(90\%)$ | $100\% - 53,90\% = 46,10\%$ |
| Os 1% superior | $[99\%, 100\%]$ | $100\% - L(99\%)$ | $100\% - 86,86\% = 13,14\%$ |
| Os 9% seguintes | $[90\%, 99\%]$ | $L(99\%) - L(90\%)$ | $86,86\% - 53,90\% = 32,96\%$ |
| Os 40% do meio | $[50\%, 90\%]$ | $L(90\%) - L(50\%)$ | $53,90\% - 13,74\% = 40,16\%$ |
| Os 50% de baixo | $[0\%, 50\%]$ | $L(50\%)$ | $13,74\%$ |

A seguir, um resultado que relaciona as curvas de Lorenz das distribuições

Figura A.1: Curva de Lorenz da distribuição da renda total no Brasil em 2002




do capital acumulado e dos salários com a distribuição da renda total.

**Proposição A.1** *Se as ordens do capital acumulado e dos salários coincidem e se a taxa real de retorno bruto do capital $r_t$ é constante em relação ao estoque de capital acumulado, então*

$$L_Y(x) = \alpha_t L_K(x) + (1-\alpha_t) L_w(x) \tag{A.1}$$

*onde $L_Y, L_K, L_w$ são as curvas de Lorenz das distribuições, respectivamente, da renda bruta total, do capital acumulado e dos salários e $\alpha_t$ é a fração do produto bruto que remunera o capital. O mesmo resultado vale trocando-se as variáveis brutas pelas variáveis líquidas.*

**Prova:** Como as ordens do capital acumulado e dos salários coincidem, para todo $x$, o intervalo $[0, x]$ corresponde aos indivíduos que estão entre os $x$ associados aos menores valores do capital acumulado e também dos salários. Denote por $K(x)$ e por $W(x)$ os valores, respectivamente, do capital acumulado e dos salários acumulados pelos indivíduos correspondentes ao intervalo $[0,x]$. Como a taxa real de retorno do capital $r_t$ é constante em relação ao estoque de capital acumulado, temos que $r_tK(x)$ é o valor acumulado pelos indivíduos correspondentes ao intervalo $[0,x]$ da renda do capital, de modo que

$$Y(x) = r_tK(x) + W(x) \tag{A.2}$$

é o valor da renda total acumulado pelos indivíduos correspondentes ao intervalo $[0,x]$. Por outro lado, temos que

$$L_Y(x) = \frac{Y(x)}{Y_t}, \qquad L_K(x) = \frac{K(x)}{K_t}, \qquad L_w(x) = \frac{W(x)}{W_t} \tag{A.3}$$

onde

$$Y_t = Y(100\%), \qquad K_t = K(100\%), \qquad W_t = W(100\%) \tag{A.4}$$

Substituindo a equação (A.3) na equação (A.2), segue então que

$$Y_tL_Y(x) = r_tK_tL_K(x) + W_tL_w(x) \tag{A.5}$$

de modo que

$$L_Y(x) = \frac{r_tK_t}{Y_t}L_K(x) + \frac{W_t}{Y_t}L_w(x) \tag{A.6}$$

O resultado segue, uma vez que $\alpha_t = r_tK_t/Y_t$ e também $1-\alpha_t = W_t/Y_t$. Pela Proposição 2.4, as taxa real de retorno líquido e bruto do capital diferem pela taxa de depreciação, de modo que, se uma delas for constante em relação ao estoque de capital acumulado, a outra também será. □

Concluímos essa seção com algumas fórmulas no caso em que a distribuição é descrita por uma função de densidade. Se $f(Z)$ é a *função de densidade* associada à distribuição da variável considerada, sua *função de distribuição acumulada* é dada por

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{Z} f(z)\,dz \tag{A.7}$$

e fornece o percentual dos indivíduos tais que os respectivos valores associados da variável considerada se encontram abaixo do valor $Z$.

**Proposição A.2** *Se $f(Z)$ é positiva para todo $Z \geq Z_0$ e igual a zero caso contrário, então a respectiva curva de Lorenz é dada por*

$$L(x) = \frac{1}{\mu}\int_{Z_0}^{F^{-1}(x)} z f(z)\,dz \tag{A.8}$$

*onde*

$$\mu = \int_{Z_0}^{\infty} z f(z)\,dz \tag{A.9}$$

*é a quantidade acumulada da variável considerada por todos os indivíduos da população. Além disso, temos que*

$$L'(x) = \frac{F^{-1}(x)}{\mu} \tag{A.10}$$

*que*

$$L''(x) = \frac{1}{\mu f(F^{-1}(x))} \tag{A.11}$$

*e duas variáveis possuem a mesma curva de Lorenz se e só se as inversas das suas funções de distribuição acumulada são proporcionais.*

**Prova:** Temos que

$$\int_{Z_0}^{Z} z f(z)\,dz \tag{A.12}$$

fornece a quantidade acumulada da variável considerada pelos indivíduos tais que os respectivos valores associados da variável considerada se encontram abaixo do valor $Z$. Segue então que

$$\mu = \int_{Z_0}^{\infty} z f(z)\, dz \tag{A.13}$$

fornece a quantidade acumulada da variável considerada por todos os indivíduos da população. Como $x = F(Z)$ fornece o percentual dos indivíduos tais que os respectivos valores associados da variável considerada se encontram abaixo do valor $Z$, segue então que

$$L(F(Z)) = \frac{1}{\mu} \int_{Z_0}^{Z} z f(z)\, dz \tag{A.14}$$

que é equivalente à equação (A.8), observando que $Z = F^{-1}(x)$. Derivando a equação (A.14), segue que

$$L'(F(Z)) f(Z) = \frac{1}{\mu} Z f(Z) \tag{A.15}$$

onde usamos o Teorema Fundamental do Cálculo para obter o lado direito da equação e também para obter que $F'(Z) = f(Z)$. Cancelando $f(Z)$ em ambos os lados da equação (A.15), obtemos que

$$L'(F(Z)) = \frac{1}{\mu} Z \tag{A.16}$$

que é equivalente à equação (A.10), usando que $Z = F^{-1}(x)$. Derivando a equação (A.14), segue que

$$L''(F(Z)) f(Z) = \frac{1}{\mu} \tag{A.17}$$

que é equivalente à equação (A.10), novamente usando que $Z = F^{-1}(x)$. Se duas variáveis possuem a mesma curva de Lorenz $L_1(x) = L_2(x)$, pela equação

(A.10), segue então que

$$\frac{F_1^{-1}(x)}{\mu_1} = L_1'(x) = L_2'(x) = \frac{F_2^{-1}(x)}{\mu_2} \tag{A.18}$$

mostrando que as inversas das suas funções de distribuição acumulada são proporcionais. Por outro lado, as inversas das suas funções de distribuição acumulada são proporcionais, então

$$F_1^{-1}(x) = cF_2^{-1}(x) \tag{A.19}$$

de modo que $Z_1^0 = F_1^{-1}(0) = cF_2^{-1}(0) = cZ_2^0$. Derivando a equação (A.19), segue que

$$\frac{1}{f_1(F_1^{-1}(x))} = c\frac{1}{f_2(F_2^{-1}(x))} \tag{A.20}$$

Escrevendo $Z = F_2^{-1}(x)$, segue então que

$$f_2(Z) = cf_1(cZ) \tag{A.21}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_{Z_2^0}^{\infty} z f_2(z)\,dz \\ &= \int_{Z_2^0}^{\infty} zcf_1(cz)\,dz \\ &= \frac{1}{c}\int_{Z_1^0}^{\infty} zf_1(z)\,dz \\ &= \frac{\mu_1}{c} \end{aligned} \tag{A.22}$$

Pela equação acima e pelas equações (A.10) e (A.19), segue então que

$$L_1'(x) = \frac{F_1^{-1}(x)}{\mu_1} = \frac{F_2^{-1}(x)}{\mu_2} = L_2'(x) \tag{A.23}$$

Como $L_1(0) = L_2(0) = 0$, segue que $L_1(x) = L_2(x)$. □

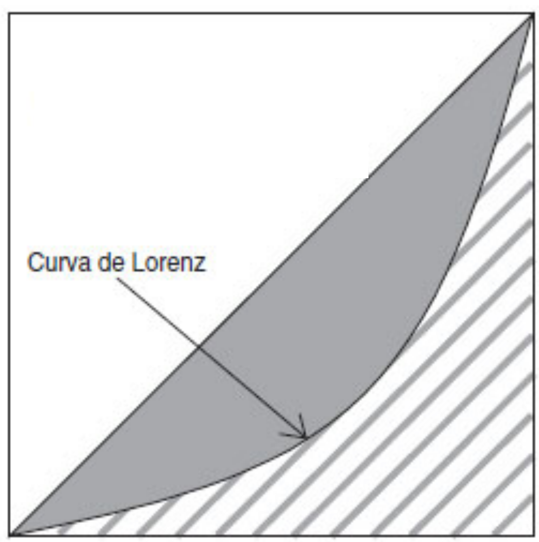
## A.2 Coeficiente de Gini

O denominado *coeficiente de Gini* foi introduzido por Corrado Gini em 1912 como uma medida da desigualdade na distribuição da renda total, mas também pode ser utilizada para medir a desigualdade na distribuição do capital acumulado ou dos salários, entre outras. Das propriedade apresentadas na seção anterior, haveria perfeita igualdade se a curva de Lorenz coincidisse com a reta ligando o ponto $(0\%, 0\%)$ e o ponto $(100\%, 100\%)$, denominada *linha de perfeita igualdade*. A distância entre a curva de Lorenz e a linha de perfeita igualdade na norma da média é dada por

$$\int_0^1 x - L(x)\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 L(x)\,dx \tag{A.24}$$

e é igual à área da região cinza apresentada na Figura A.2.

Figura A.2: Distância entre a curva de Lorenz e a linha de perfeita igualdade



O coeficiente de Gini é igual a essa distância normalizada de modo que que os valores variem entre 0% e 100%

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,dx \tag{A.25}$$

**Proposição A.3** *Se a ordem do capital acumulado e dos salários coincide e se a taxa real de retorno do capital $r_t$ é constante em relação ao estoque de capital acumulado, então*

$$G_Y = \alpha_t G_K + (1-\alpha_t)G_w \tag{A.26}$$

*onde $G_Y, G_K, G_w$ são os coeficientes de Gini das distribuições, respectivamente, da renda bruta total, do capital acumulado e dos salários e $\alpha_t$ é a fração do produto bruto que remunera o capital. O mesmo resultado vale trocando-se as variáveis brutas pelas variáveis líquidas.*

**Prova:** Temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_t G_K + (1-\alpha_t)G_w &= \alpha_t\left(1 - 2\int_0^1 L_K(x)\,dx\right) + (1-\alpha_t)\left(1 - 2\int_0^1 L_w(x)\,dx\right) \\
&= \alpha_t + 1 - \alpha_t - 2\int_0^1 \alpha_t L_K(x) + (1-\alpha_t)L_w(x)\,dx \\
&= 1 - 2\int_0^1 L_Y(x)\,dx \\
&= G_Y
\end{aligned} \tag{A.27}$$

onde a terceira igualdade segue da Proposição A.1. □

## A.3 Distribuição de Pareto

A denominada *distribuição de Pareto* foi introduzida por Vilfredo Pareto em 1896 para descrever a distribuição das terras italianas e posteriormente em

1909 para descrever, de modo mais geral, a distribuição do capital acumulado. Se uma variável possui distribuição de Pareto, sua função de distribuição acumulada é dada por

$$F(Z) = 1 - \left(\frac{Z_0}{Z}\right)^P, \qquad Z \geq Z_0 > 0 \tag{A.28}$$

onde $P$ é denominado *expoente de Pareto* da distribuição, enquanto sua função de densidade é dada por

$$f(Z) = \frac{P}{Z_0}\left(\frac{Z_0}{Z}\right)^{P+1}, \qquad Z \geq Z_0 > 0 \tag{A.29}$$

Está implícito que $F(Z)$ e $f(Z)$ são iguais a zero para todo $Z < Z_0$.

**Proposição A.4** *Se uma variável possui distribuição de Pareto com $P > 1$, sua curva de Lorenz é dada por*

$$L(x) = 1 - (1-x)^{1-\frac{1}{P}} \tag{A.30}$$

*e o seu coeficiente de Gini é dado por*

$$G = \frac{1}{2P-1} \tag{A.31}$$

**Prova:** Para determinarmos a curva de Lorenz, primeiro temos que

$$\begin{aligned} \int z\frac{P}{Z_0}\left(\frac{Z_0}{z}\right)^{P+1} dz &= \int P\left(\frac{z}{Z_0}\right)^{-P} dz \\ &= \frac{PZ_0}{1-P}\left(\frac{z}{Z_0}\right)^{1-P} + C \end{aligned} \tag{A.32}$$

Segue então que

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_{Z_0}^{\infty} z f(z)\, dz \\
&= \int_{Z_0}^{\infty} z \frac{P}{Z_0} \left(\frac{Z_0}{z}\right)^{P+1} dz \\
&= \frac{P Z_0}{1-P} \left(\frac{z}{Z_0}\right)^{1-P} \Bigg|_{Z_0}^{\infty} \\
&= \frac{P Z_0}{P-1}
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

Pela equação (A.8), temos que

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \frac{1}{\mu} \int_{Z_0}^{F^{-1}(x)} z f(z)\, dz \\
&= \frac{1}{\mu} \int_{Z_0}^{F^{-1}(x)} z \frac{P}{Z_0} \left(\frac{Z_0}{z}\right)^{P+1} dz \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{P Z_0}{1-P} \left(\frac{z}{Z_0}\right)^{1-P} \Bigg|_{Z_0}^{F^{-1}(x)} \\
&= -\left(\frac{z}{Z_0}\right)^{1-P} \Bigg|_{Z_0}^{F^{-1}(x)} \\
&= 1 - \left(\frac{F^{-1}(x)}{Z_0}\right)^{1-P}
\end{aligned}
\tag{A.34}
$$

Resolvendo a equação $F(Z) = x$ para $Z$, segue que

$$
Z = F^{-1}(x) = Z_0 (1-x)^{-\frac{1}{P}} \tag{A.35}
$$

Substituindo a equação (A.35) na equação (A.34), obtemos a equação (A.30).

Para determinarmos o coeficiente de Gini, primeiro temos que

$$
\int (1-x)^{1-\frac{1}{P}}\, dx = \frac{(1-x)^{2-\frac{1}{P}}}{\frac{1}{P}-2} + C \tag{A.36}
$$

Pela equação (A.25), temos que

$$
\begin{aligned}
G &= 1-2\int_0^1 L(x)\,dx \\
&= 1-2\int_0^1 1-(1-x)^{1-\frac{1}{P}}\,dx \\
&= 1-2\left(x-\frac{(1-x)^{2-\frac{1}{P}}}{\frac{1}{P}-2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 1-2\left(1+\frac{1}{\frac{1}{P}-2}\right) \\
&= \frac{1}{2P-1}
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

□

## A.4 Processo de Kesten

Uma sequência de varáveis aleatórias $\bar{k}_{i,t}$ é denominada *processo de Kesten* se

$$\bar{k}_{i,t+1} = \bar{\mu}_{i,t}\bar{k}_{i,t} + \bar{v}_{i,t} \tag{A.38}$$

onde $(\bar{\mu}_{i,t}, \bar{v}_{i,t})$ é uma sequência de vetores aleatórios não-negativos, independentes e identicamente distribuídos, cuja esperança $\bar{\mu}$ de $\bar{\mu}_{i,t}$ é menor do que um e cuja esperança $\bar{v}$ de $\bar{v}_{i,t}$ é finita.

**Proposição A.5** *Se $\bar{k}_{i,t}$ é um processo de Kesten, então sua distribuição se aproxima no longo prazo da distribuição da seguinte variável aleatória*

$$\bar{k}_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n-1}\bar{\mu}_{i,m}\right)\bar{v}_{i,n} \tag{A.39}$$

*que é independentemente da distribuição inicial $\bar{k}_{i,0}$.*

**Prova:** Usando a equação (A.38), pode-se mostrar, através de uma indução direta em $t$, que

$$\bar{k}_{i,t} = \left(\prod_{n=0}^{t-1} \bar{\mu}_{i,n}\right) \bar{k}_{i,0} + \sum_{n=0}^{t-1} \left(\prod_{m=n+1}^{t-1} \bar{\mu}_{i,m}\right) \bar{\nu}_{i,n} \tag{A.40}$$

Substituindo, para todo $n \in \{0, \ldots, t-1\}$, a variável $\bar{\mu}_{i,n}$ pela variável identicamente distribuída $\bar{\mu}_{i,t-n}$ e também a variável $\bar{\nu}_{i,n}$ pela variável identicamente distribuída $\bar{\nu}_{i,t-n}$, obtemos que

$$\bar{k}_{i,t} \sim \left(\prod_{n=0}^{t-1} \bar{\mu}_{i,t-n}\right) \bar{k}_{i,0} + \sum_{n=0}^{t-1} \left(\prod_{m=n+1}^{t-1} \bar{\mu}_{i,t-m}\right) \bar{\nu}_{i,t-n} \tag{A.41}$$

onde $\sim$ denota a relação de ser identicamente distribuída, uma vez que o vetor aleatório $(\bar{\mu}_{i,0}, \bar{\nu}_{i,0}, \bar{\mu}_{i,1}, \bar{\nu}_{i,1}, \ldots, \bar{\mu}_{i,t-1}, \bar{\nu}_{i,t-1})$ tem a mesma distribuição do vetor aleatório $(\bar{\mu}_{i,t}, \bar{\nu}_{i,t}, \bar{\mu}_{i,t-1}, \bar{\nu}_{i,t-1}, \ldots, \bar{\mu}_{i,1}, \bar{\nu}_{i,1})$. Fazendo uma mudança de índices e usando a comutatividade da soma e do produto, segue que

$$\bar{k}_{i,t} \sim \left(\prod_{n=1}^{t} \bar{\mu}_{i,n}\right) \bar{k}_{i,0} + \sum_{n=1}^{t} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \bar{\mu}_{i,m}\right) \bar{\nu}_{i,n} \tag{A.42}$$

Temos que a sequência de varáveis aleatórias

$$\left(\prod_{n=1}^{t} \bar{\mu}_{i,n}\right) \bar{k}_{i,0} \tag{A.43}$$

se aproxima em média para a varável aleatória nula, uma vez que a esperança do seu módulo se aproxima de zero. De fato, essa esperança é igual a $\bar{\mu}^t \bar{k}_0$, onde $\bar{k}_0$ é a esperança de $\bar{k}_{i,0}$. Por outro lado, a sequência de varáveis aleatórias

$$\sum_{n=1}^{t} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \bar{\mu}_{i,m}\right) \bar{\nu}_{i,n} \tag{A.44}$$

forma uma sequência de Cauchy em média. De fato, usando a desigualdade triangular, a esperança do módulo da diferença

$$\sum_{n=1}^{t} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \bar{\mu}_{i,m}\right) \bar{\nu}_{i,n} - \sum_{n=1}^{s} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \bar{\mu}_{i,m}\right) \bar{\nu}_{i,n} = \sum_{n=s+1}^{t} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \bar{\mu}_{i,m}\right) \bar{\nu}_{i,n} \tag{A.45}$$

é menor ou igual a

$$\sum_{n=s+1}^{t} \bar{\mu}^{n-1}\bar{v} = \frac{\bar{\mu}^{s}-\bar{\mu}^{t}}{1-\bar{\mu}}\bar{v} \tag{A.46}$$

Como é uma sequência de Cauchy, essa sequência se aproxima em média de uma única variável aleatória, denotada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n-1}\bar{\mu}_{i,m}\right)\bar{v}_{i,m} \tag{A.47}$$

Como a convergência em média implica na convergência em distribuição, pela equação (A.42), segue então que a distribuição de $\bar{k}_{i,t}$ se aproxima no longo prazo da distribuição da variável aleatória acima, que é independentemente da distribuição inicial $\bar{k}_{i,0}$. □

O próximo resultado é conhecido como *Teorema de Kesten.*

**Proposição A.6** *Se $\bar{k}_{i,t}$ é um processo de Kesten, então a cauda superior da sua distribuição estacionária é aproximadamente igual à cauda de uma distribuição de Pareto, cujo o expoente $P$ é a única constante positiva tal que a esperança de $\bar{\mu}_{i,t}^{P}$ é igual a um.*

**Prova:** A demonstração original desse resultado, válida para o caso mais geral de variáveis aleatórias matriciais, foi apresentada em (Kesten, 1973), enquanto que uma demonstração mais simples, válida apenas para o caso de variáveis aleatórias escalares, pode ser encontrada em (Goldie, 1991). Aqui vamos apresentar uma demonstraçao elementar para o caso em que $\bar{\mu}_{i,t}$ e $\bar{v}_{i,t}$ possuem distribuições de Bernoulli. Vamos supor que $\bar{\mu}_{i,t}$ é igual a $\bar{\mu}/p > 1$ com probabilidade $p$ e é igual a zero com probabilidade $1-p$, enquanto $\bar{v}_{i,t}$ é um múltiplo de $\bar{\mu}_{i,t}$ com esperança $\bar{\nu}$, demodo que

$$\bar{\nu}_{i,t} = \frac{\bar{\nu}}{\bar{\mu}}\bar{\mu}_{i,n} \tag{A.48}$$

A esperança da variável aleatória $\bar{\mu}_t^P$ é dada por

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)^P p \tag{A.49}$$

de modo que o único expoente $P$ tal que essa esperança é igual a um é a constante positiva

$$P = \frac{\log\left(\frac{1}{p}\right)}{\log\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)} \tag{A.50}$$

Pela Proposição A.5 a distribuição de $\bar{k}_{i,t}$ se aproxima no longo prazo da distribuição da seguinte variável aleatória

$$\bar{k}_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n-1}\bar{\mu}_{i,m}\right)\frac{\bar{\nu}}{\bar{\mu}}\bar{\mu}_{i,n} \tag{A.51}$$

Se $\bar{\mu}_{l+1} = 0$ e $\bar{\mu}_{i,m} \neq 0$, para todo $m \in \{1,\ldots,l\}$, temos que $\bar{k}_i$ é igual a $K_l$, onde

$$\begin{aligned} K_l &= \sum_{n=1}^{l}\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)^{n-1}\frac{\bar{\nu}}{p} \\ &= \frac{\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)^l - 1}{\frac{\bar{\mu}}{p} - 1}\frac{\bar{\nu}}{p} \\ &= \frac{\bar{\nu}}{\bar{\mu} - p}\left(\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)^l - 1\right) \end{aligned} \tag{A.52}$$

o que ocorre com probabilidade $(1-p)p^l$. Se $F(K)$ é a função de distribuição acumulada de $\bar{k}_i$, segue então que

$$\begin{aligned} 1 - F(K_l) &= \sum_{n=l}^{\infty}(1-p)p^n \\ &= (1-p)p^l\sum_{n=l}^{\infty}p^{n-l} \\ &= p^l \end{aligned} \tag{A.53}$$

Vamos mostrar que

$$\frac{1-F(K_l)}{\left(\frac{\lambda}{K_l}\right)^P} \tag{A.54}$$

se aproxima de um, quando $l$ se aproxima do infinito, onde

$$\lambda = \frac{\bar{\nu}}{\bar{\mu}-p} \tag{A.55}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1-F(K_l)}{\left(\frac{\lambda}{K_l}\right)^P} &= p^l\left(\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)^l - 1\right)^P \\
&= \left(p^{\frac{l}{P}}\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)^l - p^{\frac{l}{P}}\right)^P \\
&= \left(1-p^{\frac{l}{P}}\right)^P
\end{aligned} \tag{A.56}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
\log\left(p^{\frac{l}{P}}\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right)^l\right) &= \frac{l}{P}\log(p) + l\log\left(\frac{\bar{\mu}}{p}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.57}$$

O resultado segue, uma vez que $p^{\frac{l}{P}}$ se aproxima de zero, quando $l$ se aproxima do infinito. □

Uma sequência de varáveis aleatórias $k_{i,t}$ é denominada *processo de Kesten assintótico* se

$$k_{i,t+1} = \mu_{i,t}k_{i,t} + \nu_{i,t} \tag{A.58}$$

onde a sequência $\mu_{i,t}$ se aproximam em média da sequência $\bar{\mu}_{i,t}$, a sequência $\nu_{i,t}$ se aproxima em média da sequência $\bar{\nu}_{i,t}$ e a sequência $\bar{k}_{i,t}$ dada por

$$\bar{k}_{i,t+1} = \bar{\mu}_{i,t}\bar{k}_{i,t} + \bar{\nu}_{i,t} \tag{A.59}$$

é um processo de Kesten, denominado *processo de Kesten associado.*

**Proposição A.7** *Se $k_{i,t}$ é um processo de Kesten assintótico, então sua distribuição se aproxima no longo prazo da distribuição estacionaria do seu processo de Kesten associado.*

**Prova:** Primeiro vamos mostrar que a esperança $k_t$ de $k_{i,t}$ é limitada. Temos que a esperança $\mu_t$ de $\mu_{i,t}$ se aproxima de $\bar{\mu}$ no longo prazo, uma vez que $\mu_{i,t}$ se aproxima em média de $\bar{\mu}_{i,t}$. Da mesma forma, temos que a esperança $\nu_t$ de $\nu_{i,t}$ se aproxima de $\bar{\nu}$ no longo prazo, uma vez que $\nu_{i,t}$ se aproximam em média de $\bar{\nu}_{i,t}$. Então existem $T > 0$, $\bar{\mu} < \mu < 1$ e $\bar{\nu} < \nu$ tais que $\mu_t \leq \mu$ e também $\nu_t \leq \nu$ para todo $t \geq T$. Tomando a esperança na equação (A.58), segue então que

$$k_{t+1} = \mu_t k_t + \nu_t \leq \mu k_t + \nu \tag{A.60}$$

para todo $t \geq T$. Pode-se então mostrar, através de uma indução direta em $t$, que

$$k_t \leq \mu^{t-T} k_T + \nu \sum_{n=0}^{t-T-1} \mu^n \tag{A.61}$$

para todo $t > T$, de modo que

$$k_t \leq \mu^{t-T} k_T + \nu \frac{1-\mu^{t-T}}{1-\mu} < k_T + \frac{\nu}{1-\mu} \tag{A.62}$$

para todo $t > T$, mostrando que $k_t$ é uma sequência limitada. Agora, subtraindo as equações (A.58) e (A.59), segue que

$$\begin{aligned} k_{i,t+1} - \bar{k}_{i,t+1} &= \mu_{i,t} k_{i,t} - \bar{\mu}_{i,t} \bar{k}_{i,t} + \nu_{i,t} - \bar{\nu}_{i,t} \\ &= \mu_{i,t}(k_{i,t} - \bar{k}_{i,t}) + (\mu_{i,t} - \bar{\mu}_{i,t})\bar{k}_{i,t} + \nu_{i,t} - \bar{\nu}_{i,t} \end{aligned} \tag{A.63}$$

de modo que

$$|k_{i,t+1} - \bar{k}_{i,t+1}| \leq \mu_{i,t} |k_{i,t} - \bar{k}_{i,t}| + |\mu_{i,t} - \bar{\mu}_{i,t}| \bar{k}_{i,t} + |\nu_{i,t} - \bar{\nu}_{i,t}| \tag{A.64}$$

Tomando primeiro a esperança e depois o limite superior quando $t$ se aproxima de infinito nessa desigualdade, usando a independência entre $\mu_{i,t}$ e $|k_{i,t} - \bar{k}_{i,t}|$, a independência entre $|\mu_{i,t} - \bar{\mu}_{i,t}|$ e $\bar{k}_{i,t}$, que $\mu_{i,t}$ se aproximam em média de $\bar{\mu}_{i,t}$ e que $v_{i,t}$ se aproxima em média de $\bar{v}_{i,t}$, segue que

$$0 \leq D \leq \bar{\mu} D \tag{A.65}$$

onde $D$ denota o limite superior da esperança de $|k_{i,t} - \bar{k}_{i,t}|$ quando $t$ se aproxima de infinito. Tomando a esperança e o limite superior quando $t$ se aproxima de infinito na desigualdade

$$|k_{i,t} - \bar{k}_{i,t}| \leq k_{i,t} + \bar{k}_{i,t} \tag{A.66}$$

concluímos que $D$ é finito. Pela desigualdade (A.65) e como $\bar{\mu}$ é menor do que um, segue $D$ é igual a zero, mostrando que $k_{i,t}$ e $\bar{k}_{i,t}$ se aproximam em média. Como a convergência em média implica na convergência em distribuição e como a distribuição de $\bar{k}_{i,t}$ se aproxima da sua distribuição estacionária, obtemos o resultado. $\square$

# Apêndice B

# Distribuição Funcional da Renda

## B.1 Modelo de Distribuição Agregado

O próximo resultado fornece a demonstração da Proposição 2.7.

**Proposição B.1** *Suponha que existem constantes $\hat{k} > \bar{k} > 0$ tais que*

$$s(\bar{k})f(\bar{k}) - (\delta + g)\bar{k} > 0 \tag{B.1}$$

*e que*

$$s(\hat{k})f(\hat{k}) - (\delta + g)\hat{k} < 0 \tag{B.2}$$

*Se $s(k_t)$ e $f(k_t)$ são funções deriváveis de $k_t$ e se a função $s(k_t)f(k_t)$ possui derivada primeira positiva e derivada segunda negativa para todo $k_t \geq \bar{k}$, então existe uma constante $k > \bar{k}$ tal que as condições da Proposição 2.6 são satisfeitas.*

**Prova:** Podemos reescrever a equação (2.45) como

$$(1 + g)(k_{t+1} - k_t) = h(k_t) \tag{B.3}$$

onde $h(k_t) = s(k_t)f(k_t) - (\delta + g)k_t$. Como $s(k_t)$ e $f(k_t)$ são funções deriváveis, a função $h(k_t)$ é derivável e $h'(k_t)$ é decrescente, uma vez que $h''(k_t)$ é igual a derivada segunda de $s(k_t)f(k_t)$, que é negativa por hipótese. Como $s(k_t)$, $f(k_t)$ e $h(k_t)$ são funções deriváveis, elas são funções contínuas. Como $h(\bar{k}) > 0$ e também $h(\hat{k}) < 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe uma constante $k$ tal que $\bar{k} < k < \hat{k}$ e tal que $h(k) = 0$, de modo que $s(k)f(k) = (\delta + g)k$. Pela equação (2.35), temos que

$$k_{t+1} = H(k_t) = \frac{(1-\delta)k_t + s(k_t)f(k_t)}{1+g} \tag{B.4}$$

Como a derivada primeira da função $s(k_t)f(k_t)$ é positiva, temos que $H(k_t)$ é uma função crescente. Segue então que $k_{t+1} < k$, se $k_t < k$, e também que $k_{t+1} > k$, se $k_t > k$, uma vez que

$$H(k) = \frac{(1-\delta)k + (\delta + g)k}{1+g} = k \tag{B.5}$$

Para obtermos as desigualdades (2.42) e (2.43) basta agora usar a equação (B.3), se mostrarmos que $h(k_t) > 0$, para todo $\bar{k} \le k_t < k$, e também que $h(k_t) < 0$, para todo $k_t > k$.

Primeiro mostramos que $h(k_t) > 0$, para todo $\bar{k} \le k_t < k$. Caso contrário, existiria uma constante $k^*$ tal que $\bar{k} < k^* < k$ tal que $h(k^*) \le 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, existiriam constantes $k^{**}, k^{***}$ tais que $\bar{k} < k^{**} < k^* < k^{***} < k$ e tais que $h'(k^{**}) < 0$ e também que $h'(k^{***}) \ge 0$. Isso seria uma contradição com $h'(k_t)$ ser decrescente.

Agora mostramos que $h(k_t) < 0$, para todo $k_t > k$. Caso contrário, existiria $k^* > k$ tal que $h(k^*) \ge 0$. Se $k < k^* < \hat{k}$, pelo Teorema do Valor Médio, existiriam constantes $k^{**}, k^{***}$ tais que $\bar{k} < k^{**} < k < k^{***} < k^*$ e tais que $h'(k^{**}) < 0$ e também que $h'(k^{***}) \ge 0$. Isso seria novamente uma contradição com $h'(k_t)$

ser decrescente. Se $k < \hat{k} < k^*$, pelo Teorema do Valor Médio, existiriam constantes $k^{**}, k^{***}$ tais que $k < k^{**} < \hat{k} < k^{***} < k^*$ e tais que $h'(k^{**}) < 0$ e também que $h'(k^{***}) > 0$. Isso seria novamente uma contradição com $h'(k_t)$ ser decrescente. □

O próximo resultado fornece a demonstração da Proposição 2.8.

**Proposição B.2** *Sob a hipótese do agente representativo e supondo que existem mercados de capital e de trabalho sob concorrência perfeita e que a função de produção é uma função derivável, temos que a taxa real de retorno bruto do capital é dada por*

$$r_t = f'(k_t) \tag{B.6}$$

*de modo que a fração do produto bruto que remunera o capital é dada por*

$$\alpha_t = \frac{k_t f'(k_t)}{f(k_t)} \tag{B.7}$$

*Se função de produção é crescente em relação ao estoque de capital e em relação ao número de trabalhadores efetivos, temos que* $r_t > 0$ *e também que* $0 < \alpha_t < 1$.

**Prova:** O agente representativo deve maximizar seu lucro

$$F(K_t, A_t L_t) - r_t K_t - w_t L_t \tag{B.8}$$

dados a taxa real de retorno bruto do capital $r_t$ e e o salário real $w_t$, uma vez que estamos supondo mercados de capital e de trabalho sob concorrência perfeita. Pelas condições de primeira ordem, segue então que

$$r_t = F_{K_t} \qquad \text{e} \qquad w_t = A_t F_{A_t L_t} \tag{B.9}$$

Como

$$F(K_t, A_t L_t) = A_t L_t f(k_t) \tag{B.10}$$

temos que

$$F_{K_t} = A_t L_t f'(k_t) \frac{\partial k_t}{\partial K_t} = f'(k_t) \tag{B.11}$$

uma vez que

$$\frac{\partial k_t}{\partial K_t} = \frac{1}{A_t L_t} \tag{B.12}$$

e temos também que

$$F_{A_t L_t} = f(k_t) + A_t L_t f'(k_t) \frac{\partial k_t}{\partial A_t L_t} = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{B.13}$$

uma vez que

$$\frac{\partial k_t}{\partial A_t L_t} = -\frac{k_t}{A_t L_t} \tag{B.14}$$

Pelas equações (B.9) e (B.11), segue que $r_t = f'(k_t)$, de modo que, pela Proposição 2.3, segue então que

$$\alpha_t = r_t \beta_t = f'(k_t) \frac{k_t}{f(k_t)} \tag{B.15}$$

Se função de produção é crescente em relação ao estoque de capital e em relação ao número de trabalhadores efetivos, segue que $F_{K_t} > 0$ e também que $F_{A_t L_t} > 0$. Pelas equações (B.6), (B.7) e (B.11), segue então que $r_t > 0$ e também que $\alpha_t > 0$. Dividindo a equação (B.13) por $f(k_t)$ e usando (B.7), segue então que

$$\frac{F_{A_t L_t}}{f(k_t)} = 1 - \alpha_t > 0 \tag{B.16}$$

de modo que $0 < \alpha_t < 1$. □

O próximo resultado fornece a demonstração da Proposição 2.9.

**Proposição B.3** *Sob a hipótese do agente representativo e supondo que existem mercados de capital e de trabalho sob concorrência perfeita e que a função de produção é uma função derivável, temos que elasticidade de substituição bruta é dada por*

$$\sigma_t = \frac{f'(k_t)(k_t f'(k_t) - f(k_t))}{k_t f(k_t) f''(k_t)} = \frac{r_t(\alpha_t - 1)}{k_t f''(k_t)} \tag{B.17}$$

*que a derivada da fração do produto bruto que remunera o capital pelo capital por tempo de trabalho efetivo é dada por*

$$\frac{d\alpha_t}{dk_t} = -f''(k_t)\beta_t(\sigma_t - 1) \tag{B.18}$$

*que a derivada da fração do produto bruto que remunera o capital pela razão capital pelo produto bruto é dada por*

$$\frac{d\alpha_t}{d\beta_t} = (\sigma_t - 1)\frac{r_t}{\sigma_t} \tag{B.19}$$

*e também que a derivada taxa real de retorno bruta do capital pela razão capital pelo produto bruto é dada por*

$$\frac{dr_t}{d\beta_t} = -\frac{r_t}{\sigma_t\beta_t} \tag{B.20}$$

*O mesmo resultado vale trocando-se as variáveis brutas pelas variáveis líquidas. Além disso, a razão entre as elasticidades de substituição líquida e bruta é dada por*

$$\frac{\widetilde{\sigma}_t}{\sigma_t} = \frac{1 - \delta r_t^{-1}}{1 - \delta\beta_t} \tag{B.21}$$

**Prova:** Pelas equações (B.11) e (B.13), temos que

$$F_{K_t} = f'(k_t) \qquad \text{e} \qquad F_{A_t L_t} = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{B.22}$$

Pela equação (2.62), segue então que

$$M_t = \frac{F_{A_t L_t}}{F_{K_t}} = \frac{f(k_t)}{f'(k_t)} - k_t \tag{B.23}$$

de modo que

$$\frac{M_t}{k_t} = \frac{f(k_t)}{k_t f'(k_t)} - 1 \tag{B.24}$$

e também que

$$\frac{dM_t}{dk_t} = \frac{f'(k_t)^2 - f''(k_t) f(k_t)}{f'(k_t)^2} - 1 = -\frac{f''(k_t) f(k_t)}{f'(k_t)^2} \tag{B.25}$$

Pela equação (2.61), segue então que

$$\sigma_t = \frac{M_t / k_t}{dM_t / dk_t} = -\frac{f'(k_t)^2}{f''(k_t) f(k_t)} \left( \frac{f(k_t)}{k_t f'(k_t)} - 1 \right) \tag{B.26}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{f'(k_t)(k_t f'(k_t) - f(k_t))}{k_t f(k_t) f''(k_t)} \\ &= \frac{r_t(\beta_t r_t - 1)}{k_t f''(k_t)} \\ &= \frac{r_t(\alpha_t - 1)}{k_t f''(k_t)} \end{aligned} \tag{B.27}$$

Pela equação (B.7), temos que

$$\frac{d\alpha_t}{dk_t} = \frac{(f'(k_t) + k_t f''(k_t)) f(k_t) - f'(k_t) k_t f'(k_t)}{f(k_t)^2} \tag{B.28}$$

de modo que

$$\frac{d\alpha_t}{dk_t} = -\frac{k_t f''(k_t)}{f(k_t)} \left( \frac{f'(k_t)(k_t f'(k_t) - f(k_t))}{k_t f(k_t) f''(k_t)} - 1 \right) \tag{B.29}$$

A equação (B.18) segue então da equação acima e da equação (B.17). Para obtermos as equações (B.19) e (B.20), primeiro observamos que

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_t}{dk_t} &= \frac{dk_t/f(k_t)}{dk_t} \\ &= \frac{f(k_t) - f'(k_t)k_t}{f(k_t)^2} \\ &= \frac{1 - r_t\beta_t}{f(k_t)} \\ &= \frac{1-\alpha_t}{f(k_t)} \end{aligned} \tag{B.30}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_t}{d\beta_t} &= \frac{d\alpha_t}{dk_t}\frac{dk_t}{d\beta_t} \\ &= -f''(k_t)\beta_t(\sigma_t - 1)\frac{f(k_t)}{1-\alpha_t} \\ &= (\sigma_t - 1)\frac{k_t f''(k_t)}{\alpha_t - 1} \\ &= (\sigma_t - 1)\frac{r_t}{\sigma_t} \end{aligned} \tag{B.31}$$

onde a última igualdade segue da equação (B.17). Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dr_t}{d\beta_t} &= \frac{dr_t}{dk_t}\frac{dk_t}{d\beta_t} \\ &= f''(k_t)\frac{f(k_t)}{1-\alpha_t} \\ &= -\frac{r_t}{\sigma_t\beta_t} \end{aligned} \tag{B.32}$$

onde a última igualdade segue da equação (B.17). Para obter a equação (B.21), primeiro relembramos que, pela equação (B.17), a elasticidade de substituição bruta é dada por

$$\sigma_t = \frac{f'(k_t)(k_t f'(k_t) - f(k_t))}{k_t f(k_t) f''(k_t)} \tag{B.33}$$

Como a relação entre as funções de produção líquida e bruta é dada por

$$\widetilde{f}(k_t) = f(k_t) - \delta k_t \tag{B.34}$$

segue que a elasticidade de substituição líquida é dada por

$$\widetilde{\sigma}_t = \frac{\widetilde{f}'(k_t)(k_t\widetilde{f}'(k_t) - \widetilde{f}(k_t))}{k_t\widetilde{f}(k_t)\widetilde{f}''(k_t)} = \frac{(f'(k_t)-\delta)(k_t(f'(k_t)-\delta) - (f(k_t)-\delta k_t))}{k_t(f(k_t)-\delta k_t)f''(k_t)} \tag{B.35}$$

Simplificando essa expresão, obtemos que

$$\widetilde{\sigma}_t = \frac{(f'(k_t)-\delta)(k_t f'(k_t) - f(k_t))}{k_t(f(k_t)-\delta k_t)f''(k_t)} \tag{B.36}$$

de modo que

$$\frac{\widetilde{\sigma}_t}{\sigma_t} = \frac{(f'(k_t)-\delta)f(k_t)}{f'(k_t)(f(k_t)-\delta k_t)} = \frac{1-\delta f'(k_t)^{-1}}{1-\delta k_t/f(k_t)} = \frac{1-\delta r_t^{-1}}{1-\delta\beta_t} \tag{B.37}$$

onde usamos na última igualdade que $r_t = f'(k_t)$ e que $\beta_t = k_t/f(k_t)$. □

O próximo resultado fornece a demonstração da Proposição 2.10.

**Proposição B.4** *Uma função de produção derivável com retornos de escala constantes possui elasticidade de substituição constante* $\sigma_t = \sigma$ *se e somente se existe uma constante* $0 < \alpha < 1$ *tal que*

$$f(k_t) = \left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{B.38}$$

*quando* $\sigma \neq 1$, *ou*

$$f(k_t) = k_t^{\alpha} \tag{B.39}$$

*quando* $\sigma = 1$. *Em particular, a taxa real de retorno bruto do capital é dada por*

$$r_t = \alpha\beta_t^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{B.40}$$

*de modo que a fração do produto bruto que remunera o capital é dada por*

$$\alpha_t = \alpha \beta_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{B.41}$$

*Além disso, temos que* $f'(k_t) > 0$ *e também que* $f''(k_t) < 0$ *para todo* $k_t > 0$.

**Prova:** Pela equação (B.18), $\sigma_t = \sigma$ é equivalente a

$$\sigma = \frac{f'(k_t)(k_t f'(k_t) - f(k_t))}{k_t f(k_t) f''(k_t)} \tag{B.42}$$

que é equivalente a

$$\sigma k_t f(k_t) f''(k_t) = f'(k_t)(k_t f'(k_t) - f(k_t)) \tag{B.43}$$

Dividindo ambos os lados por $k_t f(k_t) f'(k_t)$, a equação acima é equivalente a

$$\sigma \frac{f''(k_t)}{f'(k_t)} = \frac{f'(k_t)}{f(k_t)} - \frac{1}{k_t} \tag{B.44}$$

Integrando ambos os lados em relação a $k_t$, a equação acima é equivalente a

$$\sigma \log(f'(k_t)) = \log(f(k_t)) - \log(k_t) + C \tag{B.45}$$

onde $C$ é uma constante arbitrária. Exponenciando ambos os lados, a equação acima é equivalente a

$$f'(k_t)^\sigma = \alpha^\sigma \frac{f(k_t)}{k_t} \tag{B.46}$$

onde $\alpha^\sigma = e^C$. A equação acima é equivalente a

$$\frac{f'(k_t)}{f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\alpha}{k_t^{\frac{1}{\sigma}}} \tag{B.47}$$

Se $\sigma \neq 1$, integrando ambos os lados da equação (B.47) em relação a $k_t$, ela é equivalente a

$$\frac{f(k_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \alpha \frac{k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + D \tag{B.48}$$

onde $D$ é uma constante arbitrária. A equação acima é equivalente a

$$f(k_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + d \tag{B.49}$$

onde $d = \frac{\sigma-1}{\sigma} D$. Uma vez que

$$1 = f(1)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \alpha 1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + d = 1 + d \tag{B.50}$$

segue que

$$f(k_t) = \left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{B.51}$$

Se $\sigma = 1$, integrando ambos os lados da equação (B.47) em relação a $k_t$, ela é equivalente a

$$\log(f(k_t)) = \alpha \log(k_t) + D \tag{B.52}$$

onde $D$ é uma constante arbitrária. Uma vez que

$$0 = \log(f(1)) = \alpha \log(1) + D = D \tag{B.53}$$

segue que

$$f(k_t) = k_t^{\alpha} \tag{B.54}$$

Quando $\sigma \neq 1$, pela equação (B.38), segue que

$$f'(k_t) = \frac{\sigma}{\sigma-1}\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1} \frac{\sigma-1}{\sigma} \alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-1} = \alpha \beta_t^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{B.55}$$

e quando $\sigma = 1$, pela equação (B.39), segue que

$$f'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1} = \alpha \beta_t^{-1} \tag{B.56}$$

A equação (B.40) segue então da equação (B.6), enquanto a equação (B.41) segue diretamente da equação (B.40) e da Proposição 2.3. Segue também que

$f'(k_t) > 0$ para todo $k_t > 0$. Para mostrar que $f''(k_t) < 0$ para todo $k_t > 0$, primeiro observamos que

$$f'(k_t) = \alpha k_t^{-\frac{1}{\sigma}} f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{B.57}$$

onde usamos que $\beta_t = k_t / f(k_t)$. Segue então que

$$f''(k_t) = \alpha \left( -\frac{1}{\sigma} k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1} f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\sigma} f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1} f'(k_t) k_t^{-\frac{1}{\sigma}} \right) \tag{B.58}$$

Usando a equação (B.57), segue que

$$f''(k_t) = \alpha \left( -\frac{1}{\sigma} k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1} f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\sigma} f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1} \alpha k_t^{-\frac{1}{\sigma}} f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}} k_t^{-\frac{1}{\sigma}} \right) \tag{B.59}$$

de modo que

$$f''(k_t) = -\frac{\alpha}{\sigma} k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1} f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}} \left( 1 - \alpha f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1} k_t^{1-\frac{1}{\sigma}} \right) \tag{B.60}$$

Segue então que

$$f''(k_t) = -\frac{\alpha \beta_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{\sigma k_t} \left( 1 - \alpha \beta_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right) \tag{B.61}$$

de modo que

$$f''(k_t) = -\frac{r_t}{\sigma k_t} (1 - \alpha_t) < 0 \tag{B.62}$$

onde usamos que $r_t > 0$ e também que $0 < \alpha_t < 1$, pela Proposição B.2. □

## B.2 Taxa de Poupança Bruta Constante

O próximo resultado fornece parte da demonstração da Proposição 2.12.

**Proposição B.5** *No modelo de Solow-Swan, o estoque de capital por trabalhador efetivo $k_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$k = \left( \frac{1-\alpha}{\left(\frac{\delta+g}{s}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{B.63}$$

*quando $\sigma \neq 1$, ou de*

$$k = \left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{B.64}$$

*quando $\sigma = 1$, sempre que*

$$\left(\frac{\delta+g}{s}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} > \alpha \tag{B.65}$$

*e sempre que o estoque inicial de capital por trabalhado efetivo for positivo. Em particular, a razão capital pelo produto bruto $\beta_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\beta = \frac{s}{\delta+g} \tag{B.66}$$

*a taxa real de retorno bruto do capital $r_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\alpha\left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{B.67}$$

*e a fração do produto bruto que remunera o capital $\alpha_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\alpha\left(\frac{s}{\delta+g}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{B.68}$$

*Além disso, a taxa de poupança líquida $\widetilde{s}_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\widetilde{s} = \frac{sg}{\delta(1-s)+g} \tag{B.69}$$

*e a razão capital pelo produto líquido $\widetilde{\beta}_t$ se aproxima no longo prazo de*

$$\widetilde{\beta} = \frac{s}{\delta(1-s)+g} \tag{B.70}$$

**Prova:** Vamos verificar que $s(k_t) = s$ e $f(k_t)$ satisfazem as hipóteses da Proposição B.1. Temos que ambas são deriváveis. Além disso, temos que as derivadas primeira e segunda de $s(k_t)f(k_t)$ são dadas, respectivamente, por

$$sf'(k_t) > 0 \qquad \text{e} \qquad sf''(k_t) < 0 \tag{B.71}$$

cujos sinais são dados pela Proposição B.4. Falta apenas verificar que existem constantes $\hat{k} > \bar{k} > 0$ tais que $h(\bar{k}) > 0$ e também que $h(\hat{k}) < 0$, onde

$$h(k_t) = s(k_t)f(k_t) - (\delta + g)k_t \tag{B.72}$$

onde $\bar{k} > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno.

Quando $\sigma > 1$, temos que

$$h(k_t) = s\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\delta + g)k_t \tag{B.73}$$

de modo que

$$h(k_t) = k_t\left(s\left(\alpha + (1-\alpha)k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\delta + g)\right) \tag{B.74}$$

Como $h(0) = s(1-\alpha)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} > 0$, existe $\bar{k} > 0$ arbitrariamente pequeno tal que $h(\bar{k}) > 0$. Além disso, temos que

$$\lim_{k_t \to \infty} h(k_t) = -\infty \tag{B.75}$$

uma vez que

$$\lim_{k_t \to \infty} s\left(\alpha + (1-\alpha)k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\delta + g) = s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\delta + g) < 0 \tag{B.76}$$

pois essa desigualdade é equivalente à desigualdade (B.65), já que $\frac{\sigma}{\sigma-1} > 0$. Pelo primeiro limite, existe $\hat{k} > \bar{k} > 0$ tal que $h(\hat{k}) < 0$.

Quando $\sigma = 1$, temos que

$$h(k_t) = sk_t^{\alpha} - (\delta + g)k_t \tag{B.77}$$

de modo que

$$h'(k_t) = s\alpha k_t^{\alpha-1} - (\delta + g) \tag{B.78}$$

Segue então que

$$\lim_{k_t \downarrow 0} h'(k_t) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{k_t \to \infty} h'(k_t) = -(\delta + g) < 0 \tag{B.79}$$

Como $h(0) = 0$, pelo primeiro limite, existe $\bar{k} > 0$ arbitrariamente pequeno tal que $h(\bar{k}) > 0$ e, pelo segundo limite, existe $\hat{k} > \bar{k} > 0$ tal que $h(\hat{k}) < 0$.

Quando $\sigma < 1$, temos que

$$h(k_t) = s\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\delta + g)k_t \tag{B.80}$$

de modo que

$$h'(k_t) = s\alpha\beta_t^{-\frac{1}{\sigma}} - (\delta + g) \tag{B.81}$$

que pode ser reescrita como

$$h'(k_t) = s\alpha\left(\alpha + (1-\alpha)k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} - (\delta + g) \tag{B.82}$$

Temos que

$$\lim_{k_t \downarrow 0} h(k_t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k_t \downarrow 0} = s\alpha^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\delta + g) > 0 \tag{B.83}$$

pois essa desigualdade é equivalente à desigualdade (B.65), já que $\frac{\sigma}{\sigma-1} < 0$. Segue então que existe $\bar{k} > 0$ arbitrariamente pequeno tal que $h(\bar{k}) > 0$. Além disso, temos que

$$\lim_{k_t \to \infty} h(k_t) = -\infty \tag{B.84}$$

pela equação (B.74), uma vez que

$$\lim_{k_t \to \infty} s\left(\alpha + (1-\alpha)k_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (\delta + g) = -(\delta + g) < 0 \tag{B.85}$$

Pelo primeiro limite, existe $\hat{k} > \bar{k} > 0$ tal que $h(\hat{k}) < 0$. $\square$

# Apêndice C

# Distribuição Individual da Renda e da Riqueza

## C.1 Modelo de Distribuição Desagregado

O próximo resultado fornece parte da demonstração da Proposição 3.1.

**Proposição C.1** *Suponha que* $k_t \geq 1$ *e que* $\varepsilon_{i,t}$ *e* $K_{i,t}$ *são variáveis aleatórias independentes. Se* $\sigma \geq 1$ *e* $\delta_{i,t} < \alpha$*, então a quantidade de trabalho contratada pela família* $i$ *no tempo* $t$ *é dada por*

$$L_{i,t} = \frac{k_{i,t}}{k_t} \tag{C.1}$$

*sua restrição orçamentária é atendida estritamente*

$$w_t L_{i,t} < (1 - \delta_{i,t}) K_{i,t} \tag{C.2}$$

*enquanto o produto obtido pela família* $i$ *no período entre* $t$ *e* $t+1$ *pelo fator de* *produtividade é dado por*

$$\frac{y_{i,t}}{y_t} = \varepsilon_{i,t}\frac{k_{i,t}}{k_t} \tag{C.3}$$

*a taxa real de retorno bruto do capital obtida pela família* $i$ *no período entre* $t$ *e* $t+1$ *é dada por*

$$r_{i,t} = \frac{Y_{i,t} - w_t L_{i,t}}{K_{i,t}} = \frac{\varepsilon_{i,t} y_t A_t - w_t}{k_t A_t} \tag{C.4}$$

*o salário pelo fator de produtividade é dado por*

$$\frac{w_t}{A_t} = (1-\alpha) y_t^{\frac{1}{\sigma}} \tag{C.5}$$

*e também*

$$y_t = f(k_t) \tag{C.6}$$

*onde*

$$f(k_t) = \left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + 1 - \alpha\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{C.7}$$

*quando* $\sigma > 1$*, ou por*

$$f(k_t) = k_t^{\alpha} \tag{C.8}$$

*quando* $\sigma = 1$*. Além disso, temos que* $y_t$ *é aproximadamente igual ao produto agregado por tempo de trabalho efetivo*

$$\frac{1}{A_t L_t}\sum_{i=1}^{L_t} Y_{i,t} \tag{C.9}$$

*enquanto* $k_t$ *é aproximadamente igual ao estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo*

$$\frac{1}{A_t L_t}\sum_{i=1}^{L_t} K_{i,t} \tag{C.10}$$

*e, mesmo sem a hipótese do agente representativo e sem a existência de mercado de capitais, a taxa média real de retorno bruto do capital é aproximadamente igual a*

$$r_t = f'(k_t) \tag{C.11}$$

*que coincide com a esperança da taxa real de retorno bruto do capital* $r_{i,t}$ *obtida pela família* $i$ *no período entre* $t$ *e* $t+1$.

**Prova:** Pelas equações (3.4) e (3.5), temos que

$$Z_{i,t} = \left(\alpha K_{i,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_{i,t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{C.12}$$

quando $\sigma \neq 1$, ou

$$Z_{i,t} = K_{i,t}^{\alpha}(A_t L_{i,t})^{1-\alpha} \tag{C.13}$$

quando $\sigma = 1$. No caso da restrição orçamentária ser atendida estritamente, a condição de primeira ordem para o problema de maximização resolvido pela família $i$ é dada por

$$\frac{\sigma}{\sigma-1} Z_{i,t}^{\frac{1}{\sigma}} \frac{\sigma-1}{\sigma}(1-\alpha)(A_t L_{i,t})^{-\frac{1}{\sigma}} A_t - w_t = 0 \tag{C.14}$$

quando $\sigma > 1$, e é dada por

$$\left(\frac{Z_{i,t}}{A_t L_{i,t}}\right)(1-\alpha)A_t - w_t = 0 \tag{C.15}$$

quando $\sigma = 1$, de modo que

$$\left(\frac{Z_{i,t}}{A_t L_{i,t}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}(1-\alpha)A_t - w_t = 0 \tag{C.16}$$

quando $\sigma \geq 1$. Segue então que

$$\frac{Z_{i,t}}{A_t L_{i,t}} = \left(\frac{w_t}{(1-\alpha)A_t}\right)^{\sigma} \tag{C.17}$$

□

O próximo resultado fornece parte da demonstração da Proposição 3.2.

**Proposição C.2** *Se $\sigma \geq 1$, $\delta_{i,t} < \alpha \leq 1/2$ e também $k_t \geq 1$, então a dinâmica do estoque de capital agredado por tempo de trabalho efetivo é dada por*

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s(k_t)f(k_t) \tag{C.18}$$

*onde a taxa de crescimento da quantidade tempo de trabalho agregado efetivo é dada por*

$$g = a + l + al \tag{C.19}$$

*e a taxa de poupança bruta agregada é dada por*

$$s(k_t) = s^y - (1-s^w)(1-\alpha)f(k_t)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{C.20}$$

*Além disso, o estoque de capital agredado por tempo de trabalho efetivo $k_t$ se aproxima no longo prazo da única solução $k \geq 1$ da equação*

$$(\delta + g)k = s(k)f(k) \tag{C.21}$$

*sempre que*

$$s^y - (1-s^w)(1-\alpha) > \delta + g > 0 \tag{C.22}$$

*que*

$$\frac{s^y}{1-s^w} > \frac{\sigma-1}{\sigma} \tag{C.23}$$

*e sempre que o estoque inicial de capital agredado por tempo de trabalho efetivo for maior ou igual a um.*

**Prova:** Vamos verificar que $s(k_t)$ e $f(k_t)$ satisfazem as hipóteses da Proposição B.1. Temos que ambas são deriváveis. Como $k_t \geq 1$, segue que

$$f(k_t) \geq 1 \tag{C.24}$$

e, pela demonstração da Proposição 2.10, temos que

$$f'(k_t) = \alpha\beta_t^{-\frac{1}{\sigma}} > 0 \tag{C.25}$$

Além disso, temos que

$$s(k_t)f(k_t) = s^y f(k_t) - (1-s^w)(1-\alpha)f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{C.26}$$

de modo que

$$\big(s(k_t)f(k_t)\big)' = s^y f'(k_t) - (1-s^w)(1-\alpha)\frac{1}{\sigma}f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1}f'(k_t) \tag{C.27}$$

Segue que

$$\big(s(k_t)f(k_t)\big)' = \left(s^y - (1-s^w)(1-\alpha)\frac{1}{\sigma}f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1}\right)f'(k_t) > 0 \tag{C.28}$$

onde a desigualdade acima segue de $\sigma \geq 1$ e das desigualdades (C.23), (C.24) e (C.25), uma vez que

$$s^y - (1-s^w)(1-\alpha)\frac{1}{\sigma}f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1} > s^y - (1-s^w)(1-\alpha) > 0 \tag{C.29}$$

Pelas equações (C.25) e (C.27), como $\beta_t = k_t/f(k_t)$, tempos que

$$\big(s(k_t)f(k_t)\big)' = s^y\alpha f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}}k_t^{-\frac{1}{\sigma}} - (1-s^w)(1-\alpha)\frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{2}{\sigma}-1}k_t^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{C.30}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\big(s(k_t)f(k_t)\big)'' \;&=\; s^y\frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}-1}\alpha f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}}k_t^{-\frac{1}{\sigma}}k_t^{-\frac{1}{\sigma}} + \\ &\quad + s^y\alpha f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}}\left(-\frac{1}{\sigma}\right)k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1} - \\ &\quad - (1-s^w)(1-\alpha)\frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{2}{\sigma}-1\right)f(k_t)^{\frac{2}{\sigma}-2}\alpha f(k_t)^{\frac{1}{\sigma}}k_t^{-\frac{1}{\sigma}}k_t^{-\frac{1}{\sigma}} - \\ &\quad - (1-s^w)(1-\alpha)\frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{2}{\sigma}-1}\left(-\frac{1}{\sigma}\right)k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}\end{aligned} \tag{C.31}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}\left(s(k_t)f(k_t)\right)'' &= \frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{3}{\sigma}-2}k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}\left[s^y\alpha f(k_t)^{-\frac{1}{\sigma}+1}k_t^{-\frac{1}{\sigma}+1}-\right.\\ &-s^y f(k_t)^{-\frac{2}{\sigma}+2}-\\ &-(1-s^w)(1-\alpha)\left(\frac{2}{\sigma}-1\right)\alpha k_t^{-\frac{1}{\sigma}+1}+\\ &\left.+(1-s^w)(1-\alpha)\frac{1}{\sigma}f(k_t)^{-\frac{1}{\sigma}+1}\right]\end{aligned} \tag{C.32}$$

Como

$$-\frac{1}{\sigma}+1=\frac{\sigma-1}{\sigma} \tag{C.33}$$

segue que

$$f(k_t)^{-\frac{1}{\sigma}+1}=\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha \tag{C.34}$$

e também que

$$f(k_t)^{-\frac{2}{\sigma}+2}=\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right)^2 \tag{C.35}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\left(s(k_t)f(k_t)\right)'' &= \frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{3}{\sigma}-2}k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}\left[s^y\alpha\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right)k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}-\right.\\ &-s^y\left(\alpha^2 k_t^{2\frac{\sigma-1}{\sigma}}+2\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\alpha)+(1-\alpha)^2\right)-\\ &-(1-s^w)(1-\alpha)\left(\frac{2}{\sigma}-1\right)\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\\ &\left.+(1-s^w)(1-\alpha)\frac{1}{\sigma}\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+1-\alpha\right)\right]\end{aligned} \tag{C.36}$$

Simplificando essa expressão, obtemos que

$$\begin{aligned}\left(s(k_t)f(k_t)\right)'' &= \frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{3}{\sigma}-2}k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}\left[-s^y\left(\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\alpha)+(1-\alpha)^2\right)-\right.\\ &-(1-s^w)(1-\alpha)\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\\ &\left.+(1-s^w)(1-\alpha)\frac{1}{\sigma}(1-\alpha)\right]\end{aligned} \tag{C.37}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\left(s(k_t)f(k_t)\right)'' &= \frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{3}{\sigma}-2}k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}(1-\alpha)\,[\\ &+\left((1-s^w)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-s^y\right)\alpha k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+\\ &+\left((1-s^w)\frac{1}{\sigma}-s^y\right)(1-\alpha)\Big]\end{aligned} \tag{C.38}$$

Pela desigualdade (C.23), segue que

$$(1-s^w)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-s^y<0 \tag{C.39}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\left(s(k_t)f(k_t)\right)'' &\leq \frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{3}{\sigma}-2}k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}(1-\alpha)\,[\\ &+\left((1-s^w)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-s^y\right)\alpha+\\ &+\left((1-s^w)\frac{1}{\sigma}-s^y\right)(1-\alpha)\Big]\end{aligned} \tag{C.40}$$

uma vez que $k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \geq 1$. Simplificando essa expressão, obtemos que

$$\left(s(k_t)f(k_t)\right)'' \leq \frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{3}{\sigma}-2}k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}(1-\alpha)\left[(1-s^w)\left(\alpha+\frac{1-2\alpha}{\sigma}\right)-s^y\right] \tag{C.41}$$

Como $\alpha \leq 1/2$ e como $\sigma \geq 1$, segue que

$$\left(s(k_t)f(k_t)\right)'' \leq \frac{\alpha}{\sigma}f(k_t)^{\frac{3}{\sigma}-2}k_t^{-\frac{1}{\sigma}-1}(1-\alpha)\left[(1-s^w)(1-\alpha)-s^y\right]<0 \tag{C.42}$$

onde a última desigualdade segue da desigualdade (C.22).

Escolhendo $\bar{k}=1$, pela desigualdade (C.22), segue que

$$s(\bar{k})f(\bar{k})-(\delta+g)\bar{k} = s^y-(1-s^w)(1-\alpha)-(\delta+g)>0 \tag{C.43}$$

Por outro lado, pela equações (C.25) e (C.27), segue que

$$\big(s(k_t)f(k_t)-(\delta+g)k_t\big)' = \frac{s^y\alpha}{\beta_t^{\frac{1}{\sigma}}} - \frac{\alpha(1-s^w)(1-\alpha)}{\sigma f(k_t)^{1-\frac{1}{\sigma}}\beta_t^{\frac{1}{\sigma}}} - (\delta+g) \tag{C.44}$$

que se aproxima de $-(\delta+g)<0$, quando $k_t$ cresce. Segue então que

$$\lim_{k_t\to\infty} s(k_t)f(k_t)-(\delta+g)k_t = -\infty \tag{C.45}$$

de modo que existe $\hat{k}>\bar{k}>0$ tal que

$$s(\hat{k})f(\hat{k})-(\delta+g)\hat{k}<0 \tag{C.46}$$

□

## C.2 Modelo de Nirei

O próximo resultado fornece parte da demonstração da Proposição 3.7.

**Proposição C.3** *No modelo de Nirei, a dinâmica da distribuição do estoque de capital da família $i$ no tempo $t$ pelo fator de produtividade $k_{i,t}$ é dada por*

$$(1+a)k_{i,t+1} = \left(1-\delta+s\alpha\left(\frac{\epsilon_{i,t}}{y_t}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)k_{i,t}+s\frac{w_t}{A_t} \tag{C.47}$$

*enquanto a dinâmica do estoque de capital agregado por tempo de trabalho efetivo é da por*

$$(1+a)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + sy_t \tag{C.48}$$

*onde*

$$y_t = \epsilon k_t^{\alpha} \tag{C.49}$$

*onde* $\epsilon$ *é a esperança de* $\epsilon_{i,t}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ *elevada a* $\alpha$. *O estoque de capital da família* $i$ *no tempo* $t$ *pelo fator de produtividade* $k_{i,t}$ *se aproxima no longo prazo de uma única distribuição estacionária, independentemente da distribuição inicial do estoque de capital desagregado pelo fator de produtividade. A cauda superior dessa distribuição estacionária é aproximadamente igual à cauda de uma distribuição de Pareto, cujo o expoente* $P$ *é a única constante positiva tal que a variável aleatória*

$$\left( \frac{1-\delta+s\alpha\left(\frac{\epsilon_{i,t}}{y}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1+a} \right)^{P} \tag{C.50}$$

*possui esperança igual a um, onde a constante* $y$ *é o valor de equilíbrio do produto bruto agregado por tempo de trabalho efetivo.*

**Prova:** A condição de primeira ordem para o problema de maximização resolvido pela família $i$ é dada por

$$(1-\alpha)\frac{Y_{i,t}}{\epsilon_{i,t}A_t L_{i,t}}\epsilon_{i,t}A_t - w_t = 0 \tag{C.51}$$

de modo que

$$\frac{y_{i,t}}{L_{i,t}} = \frac{w_t}{(1-\alpha)A_t} \tag{C.52}$$

□

# Referências Bibliográficas

[1] D. Acemoglu e J. Robinson (2015). The Rise and Fall of General Laws of Capitalism. *Journal of Economic Perspectives*, vol. 29, 3–28.

[2] M. Aoki e H. Yoshikawa (2007). *Reconstructing Macroeconomics, A Perspective from Statistical Physics and Combinatorial Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge.

[3] S. Aoki e M. Nirei (2015a). Pareto Distribution of Income in Neoclassical Growth Models. Faculty of Economics, Hitotsubashi University, nirei.iir.hit-u.ac.jp/papers/pareto.pdf

[4] S. Aoki e M. Nirei (2015b). Zipf's Law, Pareto's Law, and the Evolution of Top Incomes in the U.S.. Faculty of Economics, Hitotsubashi University, ssrn.com/abstract=2426418

[5] N. Barbosa Filho (2016). Elasticity of substitution and social conflict: a structuralist note on Piketty's Capital in the Twenty-first Century. *Cambridge Journal of Economics*, vol. 40, 1167-1183.

[6] J. Benhabib e A. Bisin (2016). Skewed Wealth Distributions: Theory and Empirics. Department of Economics, NYU, http://www.econ.nyu.edu/user/bisina/BB%20JEL%20_1_26_2016.pdf

[7] J. Benhabib, A. Bisin e S. Zhu (2011). The distribution of wealth and fiscal policy in economies with finitely lived agents. *Econometrica*, vol. 79, 123–157.

[8] J. Benhabib, A. Bisin e S. Zhu (2015). The wealth distribution in Bewley economies with capital income risk. *Journal of Economic Theory*, vol. 159, 489-515.

[9] G. Becker e N. Tomes (1979). An Equilibrium Theory of the Distribution of Income and Intergenerational Mobility. *Journal of Political Economy*, vol. 87, 1153-1189.

[10] G. Becker et ali (2015). A Theory of Intergenerational Mobility. ssrn.com/abstract=2652891

[11] R. Benabou e E. Ok (2001). Mobility as progressivity: Ranking income processes according to equality of opportunity. NBER, Working Paper 8431, www.nber.org/papers/w8431

[12] O. Bonnet et ali (2014). Does housing capital contribute to inequality? A comment on Thomas Piketty's Capital in the 21st Century. Sciences Po., Discussion Paper 2014-07.

[13] D. Bevan (1979). Inheritance and the Distribution of Wealth-1979, *Economica*, vol. 46, 381-402.

[14] T. Bjork (2014). Piketty for the Pedestrian. Department of Finance, Stockholm School of Economics,
https://staffstream.hhs.se/public/streamdocument.ashx?dl=00037_018

[15] B. Chakrabarti et ali (2013). *Econophysics of Income and Wealth Distributions*, Cambridge University Press, New York.

[16] F. Cowell (1998). Inheritance and the Distribution of Wealth. LSE STICERD, Research Paper 34, http://ssrn.com/abstract=1094780

[17] F. Cowell (2014). Piketty in the Long Run. *British Journal of Sociology*, vol. 65, 708-720.

[18] E. Domar (1946). Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment. *Econometrica*, vol. 14, 137-147.

[19] G. Fields e E. Ok (1999). The measurement of income mobility: An introduction to the literature. *Handbook on income inequality measurement*, 557-596.

[20] J. Foster e M. Yates (2014). Piketty and the Crisis of Neoclassical Economics. *Monthly Review*, vol. 66.

[21] J. Galbraith (2014). Kapital for the Twenty-First Century?. *Dissent Magazine*.

[22] C. Goldie (1991). Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Annals of Applied Probability*, vol. 1, 126–166.

[23] R. Harrod (1939). An Essay in Dynamic Theory. *The Economic Journal*, vol. 49, 14-33.

[24] S. Homburg (2015). Critical remarks on Piketty's Capital in the Twenty-first Century. *Applied Economics*, vol. 47, 1401-1406.

[25] C. Jones e P. Romer (2010). The New Kaldor Facts: Ideas, Institutions, Population, and Human Capital. *Amercian Economic Journal: Macroeconomics*, 224–245.

[26] C. Jones (2015). Pareto and Piketty: The Macroeconomics of Top Income and Wealth Inequality. *Journal of Economic Perspectives*, vol. 29, 29–46.

[27] N. Kaldor (1961). Capital Accumulation and Economic Growth. *The Theory of Capital*, St. Martins Press, 177–222.

[28] H. Kesten (1973). Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Mathematica*, vol. 131, 207–248.

[29] H. Kesten (1974). Renewal Theory for Functionals of a Markov Chain with General State Space. *The Annals of Probability*, vol. 2, 355-386.

[30] P. Krusell and A. Smith Jr (2015). Is Piketty's "Second Law of Capitalism" Fundamental? *Journal of Political Economy*, vol. 123, 725-748.

[31] S. Kuznets (1955). Economic Growth and Income Inequality. *The American Economic Review*, vol. 45, 1-28.

[32] J. López-Bernardo, F. López-Martínez e E. Stockhammer (2016). A Post-Keynesian Response to Piketty's 'Fundamental Contradiction of Capitalism'. *Review of Political Economy*, vol. 28, 190-204.

[33] T. Michl (2016). Capitalists, Workers, and Thomas Piketty's Capital in the 21st Century. *Review of Political Economy*, vol. 28, 205-219.

[34] N. Moura Jr e M. Ribeiro (2009). Evidence for the Gompertz curve in the income distribution of Brazil 1978–2005. *The European Physical Journal B*, vol. 67, 101-120.

[35] N. Moura Jr e M. Ribeiro (2013). Testing the Goodwin growth-cycle macroeconomic dynamics in Brazil. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 392, 2088–2103.

[36] N. Moura Jr, M. Ribeiro e A.. Soares (2016). Tsallis statistics in the income distribution of Brazil. *Chaos, Solitons & Fractals*, Complexity in Quantitative Finance and Economics, vol. 88, 158–171.

[37] M. Nirei (2009). Pareto Distribution of Income in Economic Growth Models. Institute of Innovation Research, Hitotsubashi University, piketty.pse.ens.fr/files/Nirei2009.pdf

[38] T. Piketty (2014). *Capital in the 21st Century*. Harvard University Press, Cambridge.

[39] T. Piketty (2015). Putting Distribution Back at the Center of Economics: Reflections on Capital in the Twenty-First Century. *Journal of Economic Perspectives*, vol. 29, 67–88.

[40] T. Piketty e G. Zucman (2015). Wealth and Inheritance in the Long Run. *Handbook of Income Distribution*, vol. 2, 1303-1368.

[41] F. Ramsey (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, vol. 38, 543–559.

[42] D. Ray (2014). Nit-Piketty, A comment on Thomas Piketty's Capital in the Twenty First Century. Department of Economics, NYU,

www.econ.nyu.edu/user/debraj/Papers/Piketty.pdf

[43] M. Rognlie (2014). A note on Piketty and diminishing returns to capital. Department of Economics, MIT,

http://www.mit.edu/ mrognlie/piketty_diminishing_returns.pdf

[44] R. Rowthorn (2014). A note on Piketty's Capital in the Twenty-First Century. *Cambridge Journal of Economics*, vol. 38, 1275-1284.

[45] I. Santos e M. Ugá (2006). Uma análise da progressividade do financiamento do Sistema Único de Saúde (SUS). *Cadernos de Saúde Pública*, vol. 22, 1597-1609.

[46] G. Semieniuk (2014). Piketty's Elasticity of Substitution: A Critique. Schwartz Center for Economic Policy Analysis, Working Paper 2014-8.

[47] R. Solow (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 65–94.

[48] R. Solow (2014). Thomas Piketty Is Right: Everything you need to know about 'Capital in the Twenty-First Century'. *New Republic Magazine*.

[49] J. Stiglitz (1969). Distribution of Income and Wealth Among Individuals, *Econometrica*, vol. 37, 382-397.

[50] J. Stiglitz (2015). New Theoretical Perspectives on the Distribution of Income and Wealth among Individuals, *Working Paper 21189*, http://www.nber.org/papers/w21189.

[51] T. Swan (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 334-361.

[52] L. Taylor (2014) The Triumph of the Rentier? Thomas Piketty vs. Luigi Pasinetti and John Maynard Keynes. *International Journal of Political Economy*, vol. 43, 4-17.

[53] Y. Varoufakis (2014) Egalitarianism's latest foe: a critical review of Thomas Piketty's Capital in the Twenty-Frist Century. *Real-World Economics Review*, vol. 69, 18-35.