

Capítulo 4 Método de resolução numérica

4.1 Discretização temporal

A discretização temporal do sistema de equações é obtida por uma aproximação de primeira ordem da derivada temporal, baseada em um esquema de diferenças finitas do tipo semi-implícito, de forma que, quando aplicado a uma variável ψ , temos

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (4.1)$$

O algoritmo de discretização adotado parte dos valores conhecidos no instante $t = n\Delta t$ de $\bar{\rho}^n$, \bar{p}^n , \tilde{T}^n , $\bar{\rho}^n$, k^n e ε^n e calcula, para o instante $t = (n+1)\Delta t$, os valores de $\bar{\rho}^{\tilde{u}^{n+1}}$, \bar{p}^{n+1} , \tilde{T}^{n+1} , $\bar{\rho}^{n+1}$, k^{n+1} e ε^{n+1} por meio da seguinte seqüência de procedimentos:

1) cálculo de \tilde{T}^{n+1}

$$\frac{\tilde{T}^{n+1} - \tilde{T}^n}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{u}}^n \nabla \tilde{T}^{n+1} = \frac{1}{\bar{\rho}^n} \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{RePr} + \frac{1}{Re_t^n Pr_t} \right) \nabla \tilde{T}^{n+1} \right]; \quad (4.2)$$

2) cálculo de $\bar{\rho}^{n+1}$ pela equação de estado

$$\bar{\rho}^{n+1} = \frac{1}{\tilde{T}^{n+1}}; \quad (4.3)$$

3) cálculo de $\bar{\rho}^{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}$ e \bar{p}^{*n+1} pelo sistema de equações acoplado

$$\frac{\partial \bar{\rho}^{n+1} - \bar{\rho}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\bar{\rho}^{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}} - \bar{\rho}^{\tilde{\mathbf{u}}^n}}{\Delta t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^n \bar{\rho}^{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}) = -\nabla \bar{p}^{*n+1} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n} \right) \left(\frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}} \nabla \bar{\rho}^{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}} + \nabla^T \tilde{\mathbf{u}}^n \right) \right]; \quad (4.5)$$

4) cálculo de κ^{n+1} e ε^{n+1} por

$$\frac{\kappa^{n+1} - \kappa^n}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{u}}^n \nabla \kappa^{n+1} = \frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}} \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n \cdot \sigma_\kappa} \right) \nabla \kappa^{n+1} \right] + \Pi^{n+1} - \frac{\varepsilon^n}{\kappa^n} \kappa^{n+1}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{u}}^n \nabla \varepsilon^{n+1} = \frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}} \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n \cdot \sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon^{n+1} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^n}{\kappa^n} \cdot \Pi^{n+1} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^n}{\kappa^n} \varepsilon^{n+1}, \quad (4.7)$$

onde o termo Π^{n+1} é definido pela expressão:

$$\Pi^{n+1} = \frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}} \left[\frac{1}{Re_t^n} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla^T \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) - \frac{2}{3} \left(\rho^n \kappa^n + \frac{1}{Re_t^n} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \right) \underline{I} \right] \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}; \quad (4.8)$$

5) são calculados novos valores de Re_t^{n+1} e \mathbf{u}^{n+1} por

$$\frac{1}{Re_t^{n+1}} = C_\mu \bar{\rho}^{n+1} \frac{(\kappa^{n+1})^2}{\varepsilon^{n+1}} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \frac{\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\bar{\rho}^{n+1}}. \quad (4.9)$$

O esquema apresentado permite a linearização das equações a cada passo de tempo.

As diferentes fases de cálculo são realizadas de forma que em um primeiro momento se calcule a temperatura em \tilde{T}^{n+1} , o que permite a realização do cálculo da massa específica $\bar{\rho}^{n+1}$ no tempo $n + 1$. Em seguida resolvem-se simultaneamente as equações acopladas de continuidade e de quantidade de movimento. Conhecidos os campos de massa específica e de velocidade na etapa $n + 1$, $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ e $\bar{\rho}^{n+1}$, são determinados os campos de κ^{n+1} e ε^{n+1} .

4.2 Discretização espacial - Método dos Elementos Finitos

O método de elementos finitos é uma técnica de solução numérica de equações diferenciais que aproxima a solução de um sistema de equações, em todo o domínio do problema, através de uma combinação linear de funções, multiplicadas por alguns parâmetros. Tais parâmetros são funções de aproximações calculadas de forma a minimizar o erro da solução numérica do problema de contorno simulado.

No método de elementos finitos o domínio de cálculo é aproximado por um conjunto de sub-domínios de geometria simples, para os quais é possível definir de forma sistemática, as funções de aproximação necessárias para a solução do problema.

4.2.1 Formulação fraca do problema

Neste item é apresentado o formalismo matemático do método de elementos finitos capaz de transformar o sistema de equações diferenciais parciais que representa o problema em estudo, no presente caso equações (2.51), (2.52), (2.53), (2.54) e (2.55), em um sistema matricial de equações algébricas lineares associadas ao sistema de pontos que definem o domínio espacial discreto de cálculo.

Seja o domínio fechado Ω de \mathbb{R}^2 , onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é sua fronteira, conforme ilustra a figura (4.1).

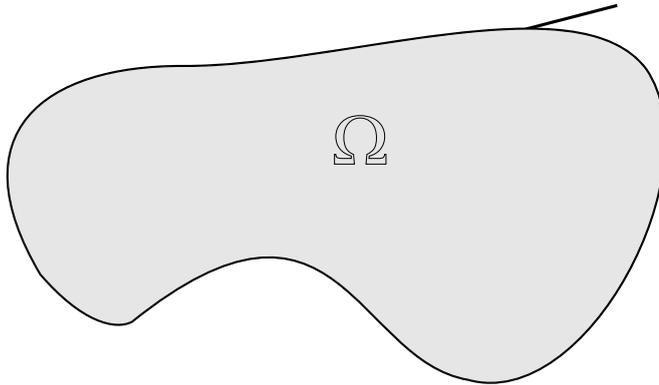


Figura 4.1: Domínio de Cálculo

Considere ainda as funções $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ em Ω . Define-se o produto escalar entre $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ por,

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.10)$$

Adicionalmente levamos em consideração espaço de funções quadrado integráveis,

$$L^2(\Omega) = \{f / (f, f) < \infty\}, \quad (4.11)$$

o espaço de Sobolev, H^k :

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) / \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x_i \dots \partial x_k} \right\}, \quad (4.12)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$ e o sub-espaço $H_\Gamma^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$, tal que:

$$H_\Gamma^k(\Omega) = \{ f \in H^k(\Omega) / f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma \} \quad (4.13)$$

Levando em conta ainda a equação de transporte da variável genérica ψ , discretizada no tempo de acordo com os princípios apresentados na seção anterior, dada por:

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \psi^{n+1} - \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot (\beta_\psi^n \nabla \psi^{n+1}) + \gamma_\psi^n \psi^{n+1} = 0, \quad (4.14)$$

fazendo $\varphi = 1/\Delta t$ e $F_\psi^n = \psi^n/\Delta t$, podemos reescrever a equação (4.14) tal que,

$$\varphi \psi^{n+1} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \psi^{n+1} - \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot (\beta_\psi^n \nabla \psi^{n+1}) + \gamma_\psi^n \psi^{n+1} - F_\psi^n = 0, \quad (4.15)$$

Considere ainda a função teste $v \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$. O produto escalar entre ψ e v é dado por

$$\begin{aligned} \varphi \int_{\Omega} \psi^{n+1} v d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \psi^{n+1}) v d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^n} \nabla \cdot (\beta_\psi^n \nabla \psi^{n+1}) v d\Omega + \\ \int_{\Omega} \gamma_\psi^n \psi^{n+1} v d\Omega - \int_{\Omega} F_\psi^n v d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

conhecendo a identidade,

$$\frac{v}{\rho^n} \nabla \cdot (\beta_\psi^n \nabla \psi^{n+1}) = \nabla \cdot \left(\frac{v}{\rho^n} \beta_\psi^n \nabla \psi^{n+1} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{v}{\rho^n} \right) \beta_\psi^n \nabla \psi^{n+1}, \quad (4.17)$$

podemos reescrever a equação (4.16), restando,

$$\varphi \int_{\Omega} \psi^{n+1} v d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \psi^{n+1}) v d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{v}{\rho^n} \beta_\psi^n \nabla \psi^{n+1} \right) d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \beta_{\psi}^n \nabla \left(\frac{v}{\rho^n} \right) \nabla \psi^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_{\psi}^n \psi^{n+1} v d\Omega - \int_{\Omega} F_{\psi}^n v d\Omega = 0. \quad (4.18)$$

Utilizando o teorema da divergência temos,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{v}{\rho^n} \beta_{\psi}^n \nabla \psi^{n+1} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{v}{\rho^n} \beta_{\psi}^n (\nabla \psi^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}) d\Gamma, \quad (4.19)$$

em que o termo, $(\nabla \psi^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}})$, representa a derivada direcional de ψ em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal a superfície Γ e pode ser representada por $(d\psi^{n+1}/d\hat{\mathbf{n}})$. Aplicando (4.19) em (4.18) temos,

$$\begin{aligned} & \varphi \int_{\Omega} \psi^{n+1} v d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \psi^{n+1}) v d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{v}{\rho^n} \beta_{\psi}^n \left(\frac{d\psi^{n+1}}{d\hat{\mathbf{n}}} \right) d\Gamma + \\ & \int_{\Omega} \beta_{\psi}^n \nabla \left(\frac{v}{\rho^n} \right) \nabla \psi^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_{\psi}^n \psi^{n+1} v d\Omega - \int_{\Omega} F_{\psi}^n v d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

As condições de contorno que completam o problema são,

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (4.21)$$

e

$$\nabla \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (4.22)$$

Fazendo $\psi = T, \kappa$ ou ε , na equação (4.20), obtemos a formulação fraca para as equações de transporte de energia, energia cinética de turbulência e dissipação de turbulência, em que

$$\psi = T \Rightarrow \begin{cases} F_T^n = T^n (\Delta t)^{-1} \\ \beta_T^n = (Re Pr)^{-1} + (Re_t^n Pr_t)^{-1} \\ \gamma_T^n = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\psi = \kappa \Rightarrow \begin{cases} F_{\kappa}^n = \kappa^n (\Delta t)^{-1} + \Pi^{n+1} \\ \beta_{\kappa}^n = (Re)^{-1} + (Re_t^n \sigma_{\kappa})^{-1} \\ \gamma_{\kappa}^n = \varepsilon^n (\kappa^n)^{-1} \end{cases} \quad (4.24)$$

e

$$\psi = \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} F_\varepsilon^n = \varepsilon^n (\Delta t)^{-1} + C_{\varepsilon 1} \varepsilon^n \Pi^{n+1} (\kappa^n)^{-1} \\ \beta_\varepsilon^n = (Re)^{-1} + (Re_t^n \sigma_\varepsilon)^{-1} \\ \gamma_\kappa^n = C_{\varepsilon 2} \varepsilon^n (\kappa^n)^{-1} \end{cases} \quad (4.25)$$

Para as equações da continuidade e transporte de quantidade de movimento, procedemos de maneira semelhante, chegando a

$$\int_\Omega \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} q \, d\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} q \, d\Omega = 0 \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} & \varphi \int_\Omega \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n} \right) \nabla \left(\frac{\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \\ & \int_\Omega \nabla p^{*n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_\Gamma \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_\Omega \mathbf{F}_Q^n \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

de forma que $q \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$, em que

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{ \mathbf{v} : (v_x, v_y) / v_x, v_y \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \}. \quad (4.28)$$

As condições de contorno para este caso são,

$$\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{x}) = \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}_o, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (4.29)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial n} (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (4.30)$$

4.2.2 Equações discretizadas

A partir da formulação fraca do problema apresentado, realiza-se a discretização do sistema, através da aproximação das funções solução do problema em um espaço simplificado de funções de base conhecido. Desta forma, representamos tal aproximação por,

$$\psi \cong \sum_{i=1}^m \psi_i N_i, \quad (4.31)$$

em que N_i é a função de base conhecida para o i -ésimo ponto de discretização do domínio e ψ_i é um valor constante neste ponto.

Consideramos, neste momento, que o domínio de cálculo é representado por um conjunto finito de pontos $\mathbf{x}_j (j = 1, \dots, m)$, mesmo conhecendo continuamente a função em todo o domínio. Neste contexto utiliza-se funções de base lagrangeanas tais que

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}. \quad (4.32)$$

Desta forma,

$$\psi(\mathbf{x}_j) \cong \sum_{i=1}^m \psi_i N_i(\mathbf{x}_j) \cong \sum_{i=1}^m \psi_i \delta_{ij} \cong \psi_j \quad (4.33)$$

A figura (4.2) ilustra o domínio discretizado e o comportamento das funções lagrangeanas nele contidas.

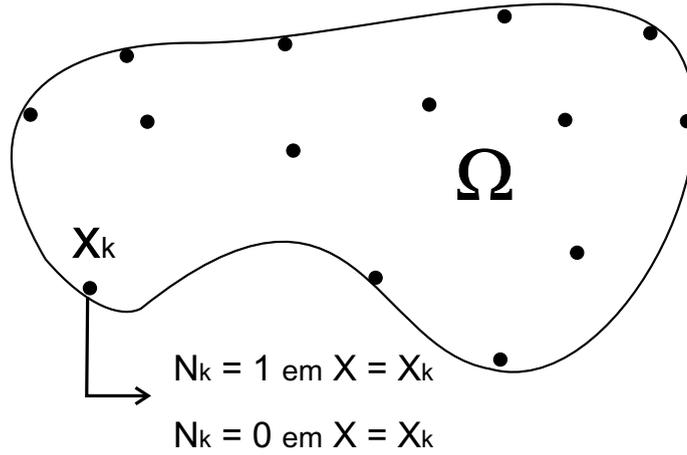


Figura 4.2: Domínio de cálculo discretizado

Procedendo de forma semelhante obtemos para $\bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}}$ e \bar{p}^* ,

$$\bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \cong \sum_{i=1}^m \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}}_i N_i \quad (4.34)$$

$$p^* \cong \sum_{i=1}^{m^*} p_i N_i^*, \quad (4.35)$$

em que N_i varia de $(i = 1, \dots, m)$ e N_i^* varia de $(i = 1, \dots, m^*)$ e devem ser escolhidas de forma a satisfazer o teorema de Brezzi (1974), que impõe a existência de um maior número de graus de liberdade para o cálculo do campo de velocidade que do de pressão, ou seja, $m > m^*$

Neste trabalho utiliza-se o método de Galerkin para discretização do sistema de equações fazendo, assim, as funções de teste v iguais as funções de base N_j . Desta forma, a equação (4.20) fica

$$\varphi \sum_{i=1}^m \psi_i^{n+1} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^m \psi_i^{n+1} \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \nabla N_i N_j d\Omega +$$

$$\sum_{i=1}^m \psi_i^{n+1} \int_{\Omega} \beta_{\psi}^n \nabla N_i \nabla \left(\frac{N_j}{\rho^n} \right) d\Omega + \sum_{i=1}^m \psi_i^{n+1} \int_{\Omega} \gamma_{\psi}^n N_i N_j d\Omega -$$

$$\sum_{i=1}^m \psi_i^{n+1} \int_{\Gamma} \beta_{\psi}^n \frac{\partial N_i}{\partial n} \frac{N_j}{\rho^n} d\Gamma = \int_{\Omega} F_{\psi}^n N_j d\Omega. \quad (4.36)$$

A equação (4.36) é um sistema linear $(A_{ij}) \cdot (\psi_i) = (b_j)$, para $(i, j = 1, \dots, m)$ em que os coeficientes da matriz $A = (A_{ij})$ são expressos por

$$\varphi \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^n (\nabla N_i) N_j d\Omega + \int_{\Omega} \beta_{\psi}^n (\nabla N_i) \left(\nabla \frac{N_j}{\rho^n} \right) d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \gamma_{\psi}^n N_i N_j d\Omega - \int_{\Gamma} \beta_{\psi}^n \frac{\partial N_i}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \frac{N_j}{\rho^n} d\Gamma, \quad (4.37)$$

e os coeficientes de (b_j) são

$$\int_{\Omega} F_{\psi}^n N_j d\Omega. \quad (4.38)$$

De forma análoga, as equações da quantidade de movimento e da continuidade podem ser escritas por

$$\sum_{i=1}^N \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^N \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u}^n N_i) N_j d\Omega +$$

$$\sum_{i=1}^N \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n} \right) \frac{1}{\rho^n} \nabla N_i \nabla N_j d\Omega - \sum_{k=1}^{m^*} p_k^{n+1} \int_{\Omega} (\nabla N_k^*) N_j d\Omega -$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i^{n+1} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t^n} \right) \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial N_i}{\partial n} N_j d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}_Q^n N_j d\Omega \quad (4.39)$$

e

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}_i N_i) + S) N_k^* = 0 \quad (4.40)$$

Para $(i, j = 1, \dots, m)$ e $k = 1, \dots, m^*$. O sistema composto pelas equações da quantidade de movimento e continuidade, representados pelas expressões (4.39) e (4.40), podem ser expressos sob a forma matricial como

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \\ p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

em que $[B^t]$ é a transposta de $[B]$. O sistema (4.41) é resolvido por um processo iterativo baseado no método dos gradientes conjugados.

4.2.3 Escolha do tipo de elemento

Nesse trabalho, a discretização espacial do problema passa pela escolha de dois espaços de aproximação, o primeiro para o cálculo da velocidade e o segundo para o cálculo da pressão.

Para esta discretização, uma enorme quantidade de formas de elementos podem ser escolhidas. Nesse trabalho adota-se elementos triangulares para a decomposição do domínio Ω conforme mostra a figura 4.3:

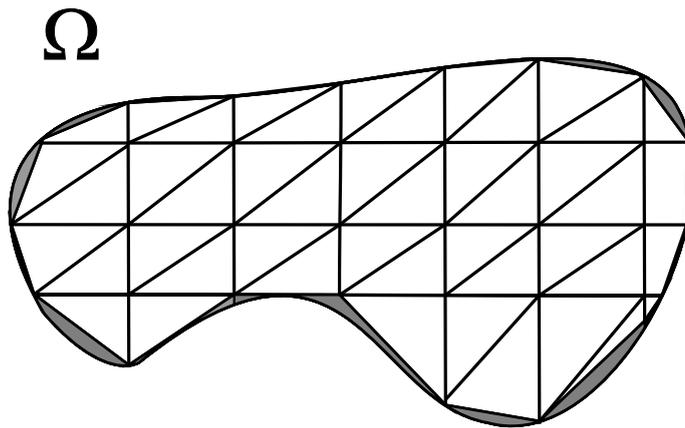


Figura 4.3: Domínio de cálculo discretizado em elementos triangulares

Conforme pode-se observar, a união de todos os triângulos não correspondem exatamente ao domínio inicial Ω se sua fronteira não tiver um formato poligonal. Na

prática, a malha de cálculo deve ser construída de forma a se aproximar ao máximo da fronteira do domínio, atingindo assim boa modelagem do contorno físico.

Nesse trabalho o domínio de cálculo é discretizado em elementos triangulares P1/IsoP2, nos quais a velocidade e a pressão são interpoladas linearmente, sendo a pressão calculada sobre um elemento triangular e a velocidade sobre um conjunto de quatro sub-elementos construídos pela repartição uniforme do elemento utilizado para o cálculo da pressão, como mostrado na figura (4.4).

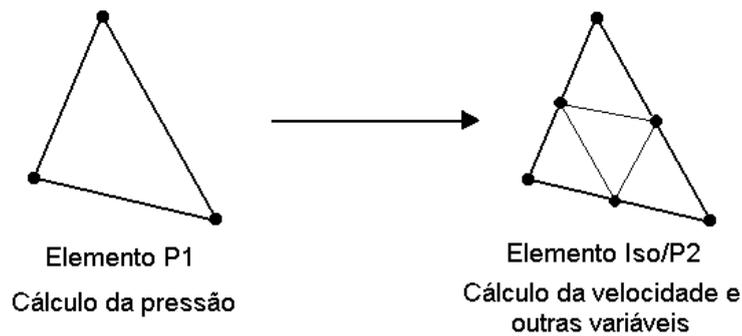


Figura 4.4: Elementos triangulares - P1/IsoP2

Para resolver o acoplamento pressão-velocidade, é utilizada uma variação do método de Uzawa, proposto por Buffat (1981), que calcula iterativamente os campos de velocidade e pressão a partir de condições iniciais estimadas até que o resíduo pré-determinado seja atingido, incluindo neste processo um pré-condicionamento da matriz dos coeficientes.

A aplicação do método de Galerkin às equações do movimento induz o surgimento de instabilidades e oscilações numéricas, desprovidas de sentido físico. Este fato ocorre devido ao tratamento simétrico dado pelo método de Galerkin ao problema convectivo, que é parabólico, como mostrado no trabalho de Huges e Brooks(1979). Para contornar este problema, é utilizado o método de difusão balanceada proposto por Huges e Brooks(1979) e Kelly et al(1980), implementado por Brun(1988), que consiste em acrescentar à equação de Reynolds, um termo de difusão artificial com capacidade de atuação somente no sentido do escoamento. Como as condições de contorno são calculadas explicitamente, com base nos valores das propriedades no instante $n\Delta t$ para determinar as condições para o instante $(n + 1)\Delta t$, é gerada uma instabilidade numérica característica de procedimentos explícitos.

Para eliminar esta característica indesejável é empregado o algoritmo de mínimos resíduos proposto por Fontoura Rodrigues (1991), que adota um cálculo iterativo seqüencial baseado na minimização dos erros resultantes do cálculo da velocidade de atrito para uma iteração i em um instante $(n + 1)\Delta t$, por:

$$(\mathbf{ERRO})^{n+1} = \left\| \left(\mathbf{u}_f^2 \right)^* - \left(\mathbf{u}_f^2 \right)^{n+1} \right\| , \quad (4.42)$$

onde o valor absoluto dos vetores de erro são calculados com base no valor de $(u_f^2)^*$ retirado das leis de parede no instante $(n + 1)\Delta t$ e no valor de $(u_f^2)^{n+1}$ obtido por uma relação numérica de recorrência do próprio algoritmo de minimização.

Capítulo 5 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados de simulação numérica do escoamento turbulento incompressível bidimensional que se estabelece sobre uma placa plana lisa e horizontal, sob diferentes condições de temperatura imposta sobre a superfície da placa.

A metodologia numérica descrita no capítulo 04 é implementada computacionalmente por um código de pesquisa que tem origem em trabalhos feitos durante os anos oitenta, pela equipe de simulação numérica de escoamentos turbulentos do Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Escola Central de Lyon. A versão atual do algoritmo é resultante do trabalho realizado a partir de 1990 por membros do VORTEX - Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos, do departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

Este trabalho, além de seu objetivo principal de realizar a modelagem numérica de fluxos parietais de calor, também teve como objetivo secundário completa os ensaios necessários ao encerramento do processo de validação da lei de parede de temperatura de Cruz e Silva Freire (1998), iniciado em 2003.

Inicialmente, no item 5.1 são apresentadas as características físicas dominantes dos escoamentos estudados experimentalmente por Reynolds et al.(1958) e Taylor et al.(1990) e que são o objeto da presente análise numérica.

Posteriormente, no item 5.2 é feita a descrição do domínio de solução incluindo dimensões físicas, condição inicial e de contorno, malhas de discretização espacial para a pressão e para as demais variáveis.

No sub-capítulo 5.3 são apresentados os valores de velocidade e temperatura do escoamento não perturbado pela parede, u_∞ e T_∞ , temperatura da parede T_p e comprimento adiabático da parede ξ , que caracterizam os dez casos teste ensaiados.

O estudo de malha e a metodologia usada para avaliar os dados produzidos pela

simulação numérica são apresentadas no item 5.4.

Todos os resultados quantitativos estão contidos no item 5.5. Os resultados numéricos do fluxo de calor ao longo da parede são apresentados sob a forma adimensional, em gráficos que mostram o número de Stanton local em função do número de Reynolds local ao longo da placa. Os perfis numéricos de velocidade, temperatura e espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura necessários ao estudo de malha e para a validação da lei de parede de Cruz e Silva Freire (1998) são também apresentados no item 5.5.

O capítulo 5 tem seu fim no item 5.6, que apresenta resultados qualitativos dos campos de velocidade e de temperatura das principais configurações estudadas.

5.1 Descrição do modelo físico

A simulação numérica desenvolvida neste trabalho teve como base de comparação os trabalhos experimentais realizados por Reynolds et al.(1958) e Taylor et al.(1990). Ambos realizaram detalhada prospecção dimensional em escoamentos bidimensionais sobre placas planas aquecidas dispostas horizontalmente, com objetivo de medir os fluxos parietais de calor que se estabelecem nestas geometrias.

O primeiro trabalho, desenvolvido com patrocínio da National Aeronautics and Space Administration - NASA, visava avaliar experimentalmente os fenômenos térmicos e hidrodinâmicos que se desenvolviam sobre placas planas aquecidas em escoamentos de ar com números de Reynolds superiores a 5×10^5 , ou seja, escoamentos turbulentos.

Os experimentos foram realizados em um túnel de vento com 2,28m de diâmetro e velocidade de até 39,6m/s. A seção de teste foi composta por uma placa plana de cobre, subdividida em 24 seções igualmente espaçadas, somando 1,54m de comprimento cada uma.

O sistema de aquecimento foi instalado de forma a permitir o controle preciso das temperaturas e dos respectivos fluxos de calor, nas diversas seções da placa, possibilitando a realização de experimentos com defasagem entre o início da camada limite térmica e fluidodinâmica.

O sistema de controle e medição foi projetado para recolher dados de velocidade, pressão e temperatura proporcionando a verificação de todas as variáveis envolvidas neste experimento, com erros da ordem de 1% a 3%.

O fluxo de calor na parede foi caracterizado experimentalmente por meio da medição da potência dissipada pela placa, considerando perdas de energia por radiação e por condução. O número de Stanton local experimental é definido pela relação:

$$St_x = \frac{W - q_r - q_c}{A\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)}, \quad (5.1)$$

onde W é a potência dissipada da placa em cada seção, q_r representa a perda de energia devido ao fluxo de calor por radiação, q_c a perda de energia devido ao fluxo de calor por condução e A é a área da placa.

Os dados de velocidade foram medidos por meio de um tubo de pitot e a transição entre o regime laminar e turbulento ocorre sempre na primeira seção da placa, em todos os casos avaliados.

Neste experimento, Reynolds et al.(1958) realizaram, inicialmente, medições sobre superfícies planas totalmente aquecidas no intervalo definido por números de Reynolds de $10^5 < Re < 3,5.10^6$. Para esta configuração inicial os resultados experimentais revelam que o melhor ajuste para os perfis de velocidade e temperatura acontece segundo uma relação de lei de potência de $1/5,6$, tal que

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/5,6} \quad \theta = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{1/5,6}. \quad (5.2)$$

Posteriormente foram realizados testes sobre superfícies planas com um trecho inicial com temperatura da parede igual a do escoamento, permitindo que a camada limite fluidodinâmica se iniciasse antes da camada limite de temperatura.

O segundo trabalho, realizado por Taylor et. al (1990) foi uma extensão do trabalho de Reynolds et. al (1958) para outras faixas de número de Reynolds. Os dados foram medidos em um túnel de vento que possuía a faixa variação de de velocidade de 6 a 67m/s. A seção de testes foi montada com uma placa de alumínio, composta por

24 seções individuais com $0,1m$ de comprimento cada, somando $2,4m$ de comprimento total. A potência dissipada na placa foi controlada por um sistema computadorizado que permitia o ajuste preciso da temperatura da placa em suas diversas seções.

5.2 O domínio computacional e a malha de discretização

O domínio de cálculo compreende toda a seção de teste da placa com $2.4m$ de comprimento na direção longitudinal do escoamento, "x", e $0,05m$ na direção transversal ao escoamento, "y". A figura (5.1) apresenta as condições de contorno especificadas no domínio de cálculo. Como condição inicial foram impostos campos nulos para todas as variáveis calculadas.

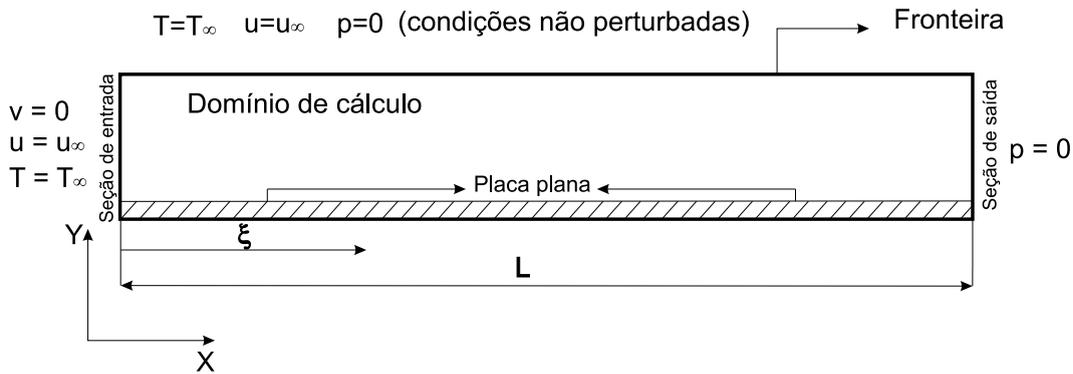


Figura 5.1: Domínio de Cálculo e Condições de Contorno

As condições de contorno impostas são as seguintes:

- Na seção de entrada do domínio ilustrado na figura (5.1), os perfis planos de velocidade e de temperatura reproduzem a condição experimental criada pelo escoamento totalmente desenvolvido do túnel de vento.
- Na placa horizontal o Código Turbo-2D trabalha com leis de parede, para as simulações realizadas a distância adimensional y^+ varia entre 14 e 30. A temperatura na parede e o trecho inicial não aquecido é especificado de acordo com os dados experimentais.

- Para o contorno oposto a parede plana foram impostas condições de escoamento não perturbado pela região aquecida da placa.
- na seção de saída foi imposta condição de pressão nula.

5.2.1 Malha de Cálculo

Para o estudo de malha partiu-se de uma malha de calculo com 3555 nós e 6608 elementos para o cálculo do campo de pressão, de acordo com a figura (5.2) e com 13717 nós e 26432 elementos para o cálculo das demais variáveis, como mostra a figura (5.3). O conjunto ilustrado pelas figuras (5.2) e (5.3) passa a ser referenciado como malha 1.

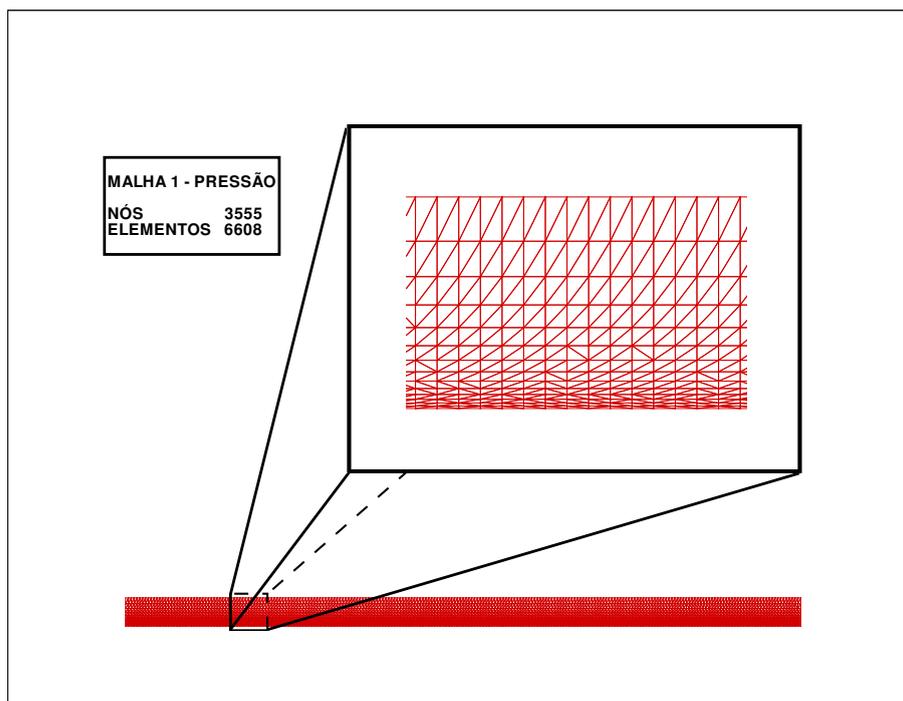


Figura 5.2: Malha 1 - Pressão

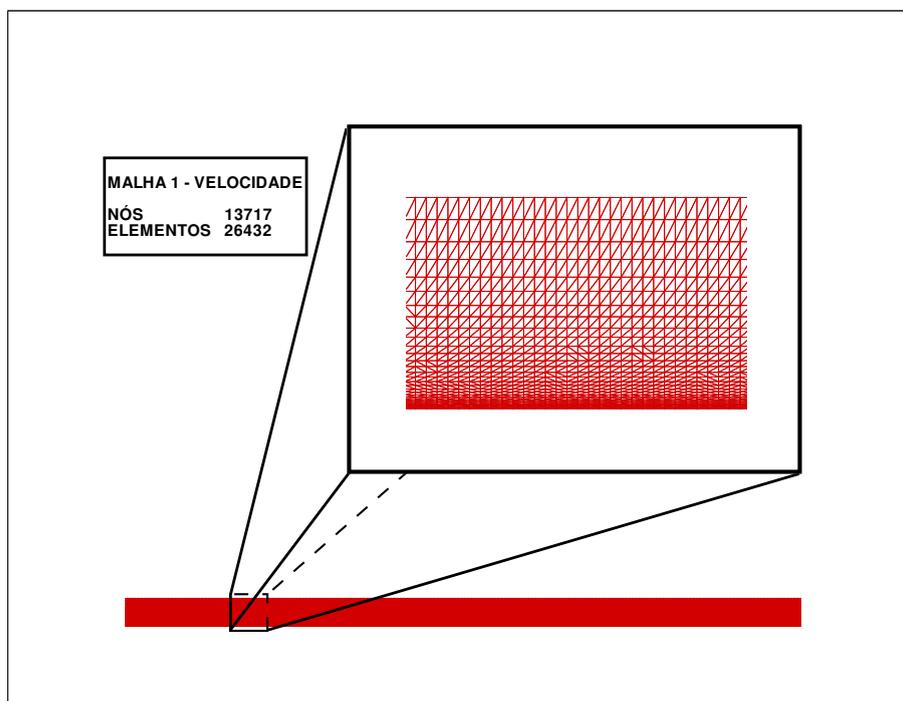


Figura 5.3: Malha 1 - Velocidade

A figuras (5.2) e (5.3) que mostram as malhas de cálculo, apresentam em detalhe, uma ampliação de uma seção típica limitada inferiormente pela placa plana e pelo contorno superior do domínio de cálculo. A razão de aspecto do domínio de cálculo é de 24/1.

Para avaliar a qualidade da discretização espacial oferecida pela malha 1 foi criada uma malha mais densa, composta por 4740 nós e 8968 elementos para o cálculo do campo de pressão, conforme mostra a figura (5.4) e com 18447 nós e 35872 elementos para o cálculo das demais variáveis, figura (5.5). O conjunto ilustrado pelas figuras (5.4) e (5.5) passa, a partir de agora, a ser referenciado como malha 2.

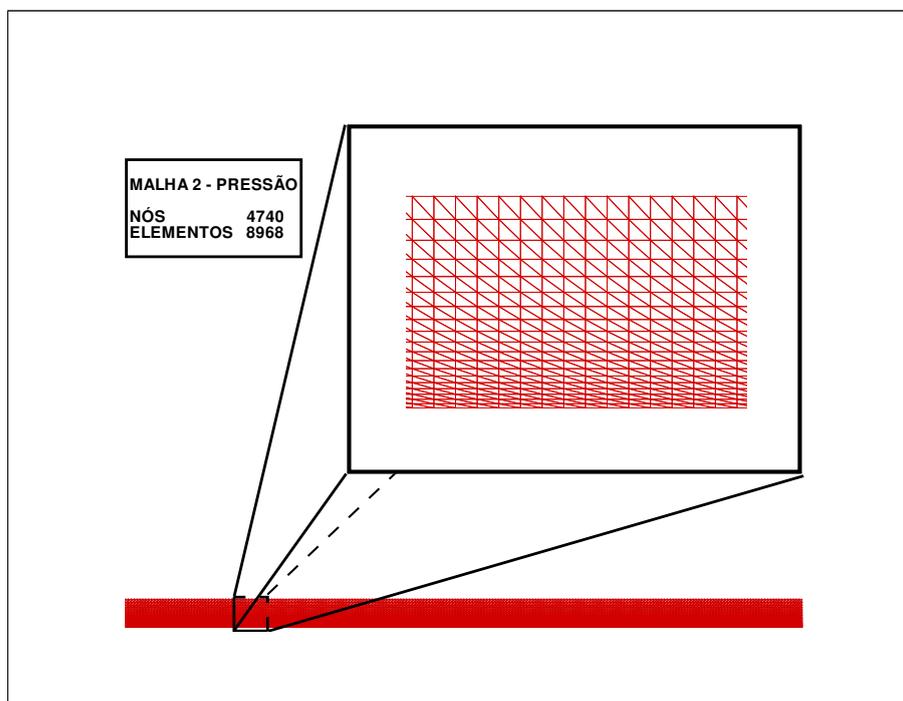


Figura 5.4: Malha 2 - Pressão

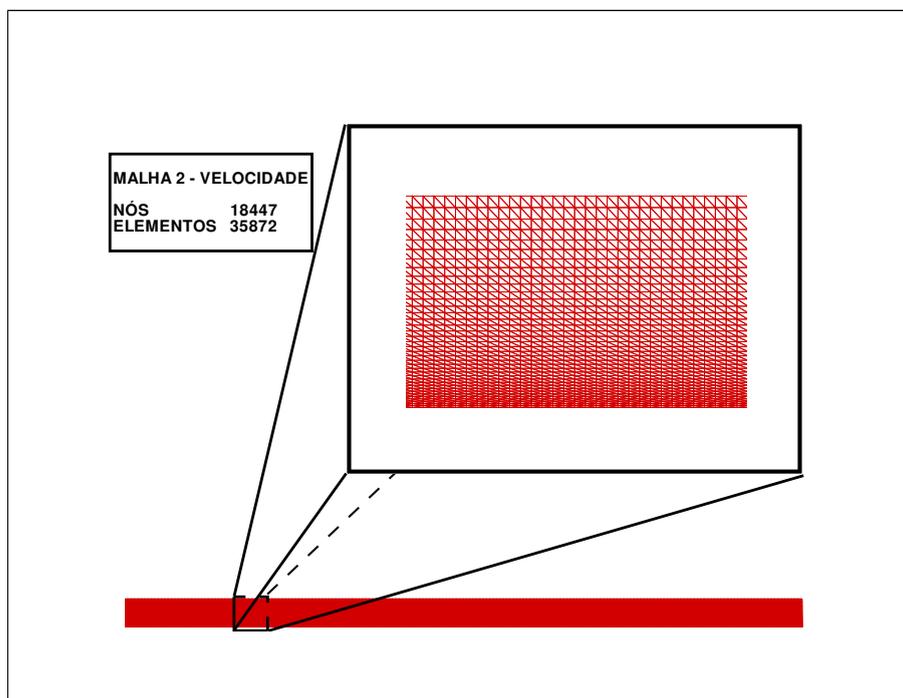


Figura 5.5: Malha 2 - Velocidade

A figura (5.4) mostra a discretização espacial proposta pela malha 2 para o cálculo do campo de pressão. A figura (5.5) apresenta a discretização proposta pela malha 2 para

o cálculo dos campos de velocidade, temperatura, massa específica, energia cinética de turbulência, rotacional e velocidade de fricção.

5.3 Casos teste

Foram realizados 10 (dez) casos teste para a simulação da convecção forçada sobre placa plana horizontal aquecida conforme mostrado na figura (5.6).

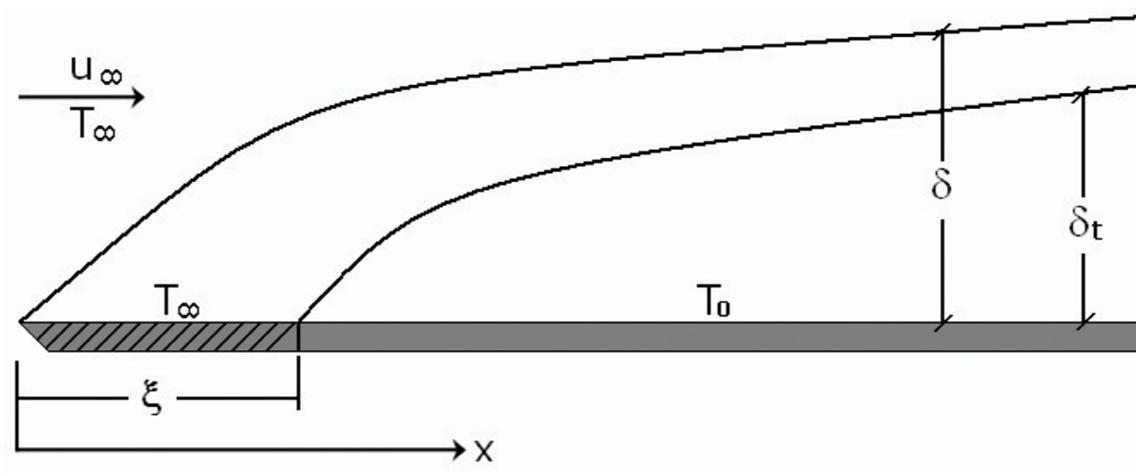


Figura 5.6: Montagem experimental

Caso teste 1

O caso teste 1 é a reprodução do trabalho de Reynolds et al.(1958) para as condições abaixo especificadas:

- $u_\infty = 19.5m/s$
- $T_\infty = 297.5K$
- $T_p = 308K$
- $\xi = 0.415m$

Caso teste 2

O caso teste 2, também reproduzindo o trabalho de Reynolds et al.(1958), se diferencia do caso 1, pelas condições de escoamento e aquecimento, dadas abaixo:

- $u_\infty = 21.9m/s$
- $T_\infty = 302K$
- $T_p = 313K$
- $\xi = 0.724m$

Casos teste 3, 4, 5 e 6

Estes casos teste são realizados para reproduzir numericamente os experimentos realizados por Taylor et al.1990. Assim como os casos 1 e 2, o objetivo principal da simulação é determinação do fluxo parietal de calor que se estabelece sobre placas planas horizontais ilustradas na figura (5.6). Esses quatro casos são apresentados em grupo por se tratar de um conjunto de simulações onde as condições de escoamento permaneceram constantes, sendo a diferenciação dos casos criadas pelo comprimento da região adiabática inicial ξ .

Para os quatro casos temos:

- $u_\infty = 28m/s$
- $T_\infty = 299K$
- $T_p = 317K$

Comprimento do trecho adiabático inicial ξ :

- Caso 3 - $\xi = 0$
- Caso 4 - $\xi = 0.36m$
- Caso 5 - $\xi = 0.76m$
- Caso 6 - $\xi = 1.36m$

Casos teste 7, 8, 9 e 10

Os casos 7, 8, 9 e 10 reproduzem os experimentos realizados por Taylor et al.1990 para condições de escoamento e aquecimento distintas descritas abaixo:

Para os quatro casos temos:

- $u_{\infty} = 67m/s$
- $T_{\infty} = 305K$
- $T_p = 317K$

Comprimento do trecho adiabático inicial ξ :

- Caso 3 - $\xi = 0$
- Caso 4 - $\xi = 0.56m$
- Caso 5 - $\xi = 0.86m$
- Caso 6 - $\xi = 1.36m$

5.4 Metodologia de análise resultados

Inicialmente foram realizados estudos sobre o impacto do refinamento da malha de cálculo sobre os resultados numéricos obtidos, especialmente nos cálculos do fluxo de calor na parede, traduzidos pelos valores dos números de Stanton local.

Uma vez definido o tamanho adequado para a malha de cálculo, foi iniciado o estudo relativo a complementação da validação da lei de parede de temperatura de Cruz e Silva Freire(1998).

Os resultados dos perfis de velocidade, temperatura, energia cinética de turbulência, dissipação, espessura de camada limite térmica e fluidodinâmica e números de Stanton obtidos com as leis de parede de velocidade logarítmica clássica e de Cruz

e Silva Freire(1998) e com as leis de parede de temperatura de Cheng e Ng(1982) e de Cruz e Silva Freire(1998), foram comparados entre si e com valores experimentais e analíticos

Foram também comparados resultados numéricos com os dados experimentais de Reynolds et al.(1958), que modela perfis turbulentos de velocidade por meio de leis de potência de $1/5$, 6 e de $1/7$. Desta forma são apresentados perfis de velocidade que agrupam os valores numéricos e analíticos representados por leis de potência de $1/5.6$ e $1/7$.

Uma das formas usadas para a determinação do fluxo de calor parietal é baseado nas espessuras δ da camada limite fluidodinâmica e δ_t da camada limite de temperatura. Para tanto foram também calculados os valores numéricos de δ e δ_t . A definição de espessura da camada limite é um conceito que encerra certo grau de indeterminação. Muitos autores adotam arbitrariamente a espessura de camada limite de velocidade como o ponto onde a velocidade média atinge 99% da velocidade não perturbada do escoamento. Entretanto as incertezas experimentais e numéricas inerentes aos processos flexibilizam o conceito que admite que a velocidade do escoamento na fronteira da camada limite possa estar entre 95% e 99% da velocidade do escoamento não perturbado. Dentro desta perspectiva são calculados os valores de δ e δ_t .

Para caracterizar a influência do comprimento inicial adiabático ξ no fluxo de calor parietal os resultados são comparados a dados analíticos calculados com as relações (3.95)

$$St_x = 0.0287 Pr^{-2/5} Re_x^{-1/5} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9} \quad (3.95)$$

e relação (3.97):

$$\frac{St}{St_T} = \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{0.9} \right]^{-(1/9)} \quad (3.97)$$

5.5 Resultados quantitativos

5.5.1 Estudo de Malha

Os gráficos abaixo mostram a evolução das camadas limites térmica e fluido-dinâmica ao longo da placa, o valor adimensional do fluxo de calor dado pelo número de Stanton local em função do número de Reynolds local, para as duas malhas estudadas.

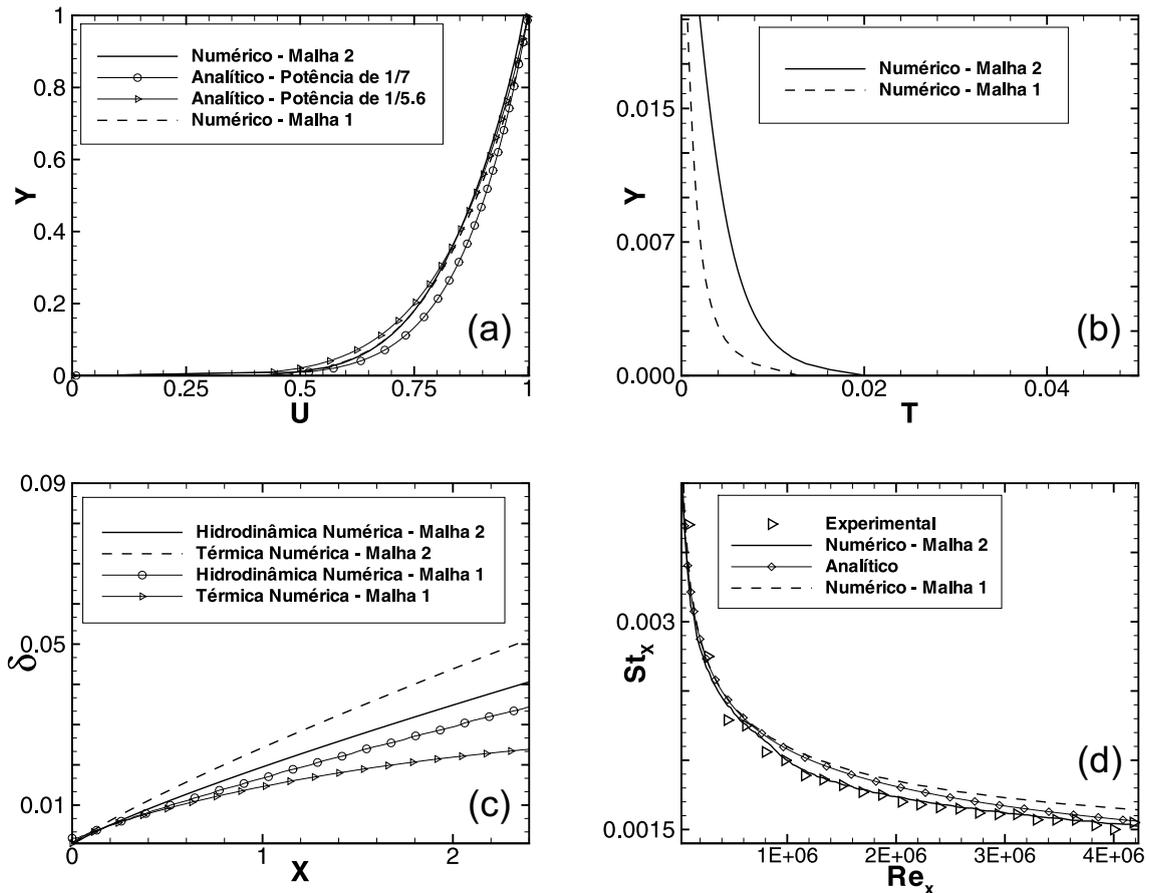


Figura 5.7: Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 3 - $u_\infty = 28\text{ m/s}$ e $\xi = 0\text{ m}$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8\text{ m}$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8\text{ m}$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.

Constata-se pelos resultados que compõem a figura (5.7) que os efeitos do refinamento da malha são visíveis. O número de Stanton, que na malha 1 tem erros da ordem de 4% passa na malha 2 a ter erros próximos de zero.

Na figura (5.8) o efeito de refinamento de malha é ainda mais fácil de ser visualizado. Os valores para números de Stanton se aproximam de forma sensível das

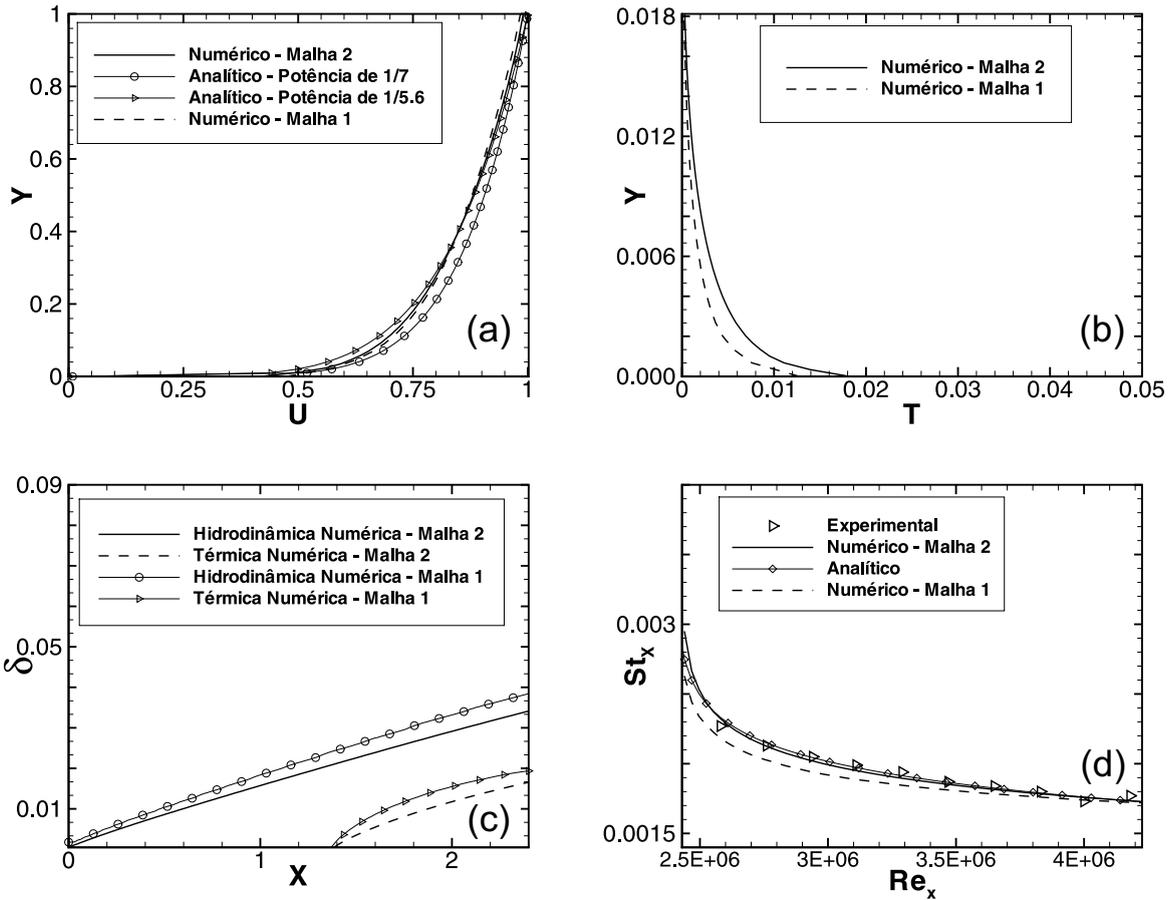


Figura 5.8: Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 6 - $u_\infty = 28 \text{ m/s}$ e $\xi = 1.36 \text{ m}$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8 \text{ m}$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8 \text{ m}$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.

curvas analítica e experimental quando utiliza-se a malha 2. A figura 5.8(a) mostra que tanto os perfis da malha 1 como os da malha 2 apresentam valores mais próximos do perfil de potência de $(1/5, 6)$ confirmando o resultado experimental de Reynolds et al.(1958) que mostra a superioridade desta relação na faixa de números de Reynolds local ensaiada.

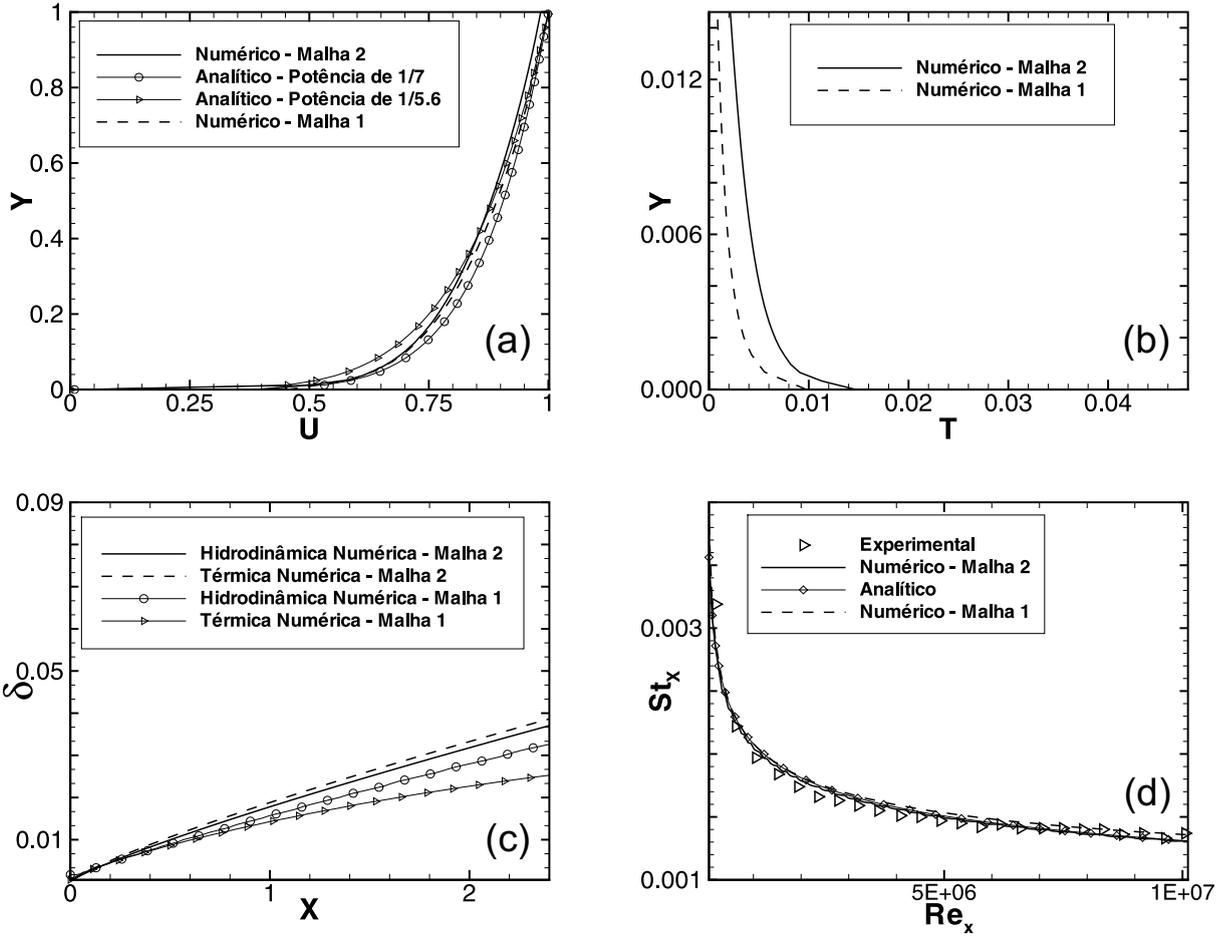


Figura 5.9: Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 7 - $u_\infty = 67m/s$ e $\xi = 0m$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.

A figura (5.9) apresenta resultados semelhantes às duas outras figuras, porém para condições de escoamento diferentes. Neste caso o valor de u_∞ é $67m/s$, o que aumenta o intervalo dos números de Reynolds local ensaiados para o intervalo $10^6 \leq Re_x \leq 10^7$.

Os resultados do caso teste ilustrado pela figura (5.10), são coerentes com os observados nos escoamentos ilustrados pelas figuras (5.7), (5.8), (5.9) e permitem concluir que:

- a) O aumento na densidade da malha de cálculo apresentado pela malha 2 é capaz de melhorar os resultados obtidos com a malha 1.
- b) Os valores do fluxo de calor na camada limite turbulenta, calculados com a malha 2 reproduzem bem os valores experimentais.

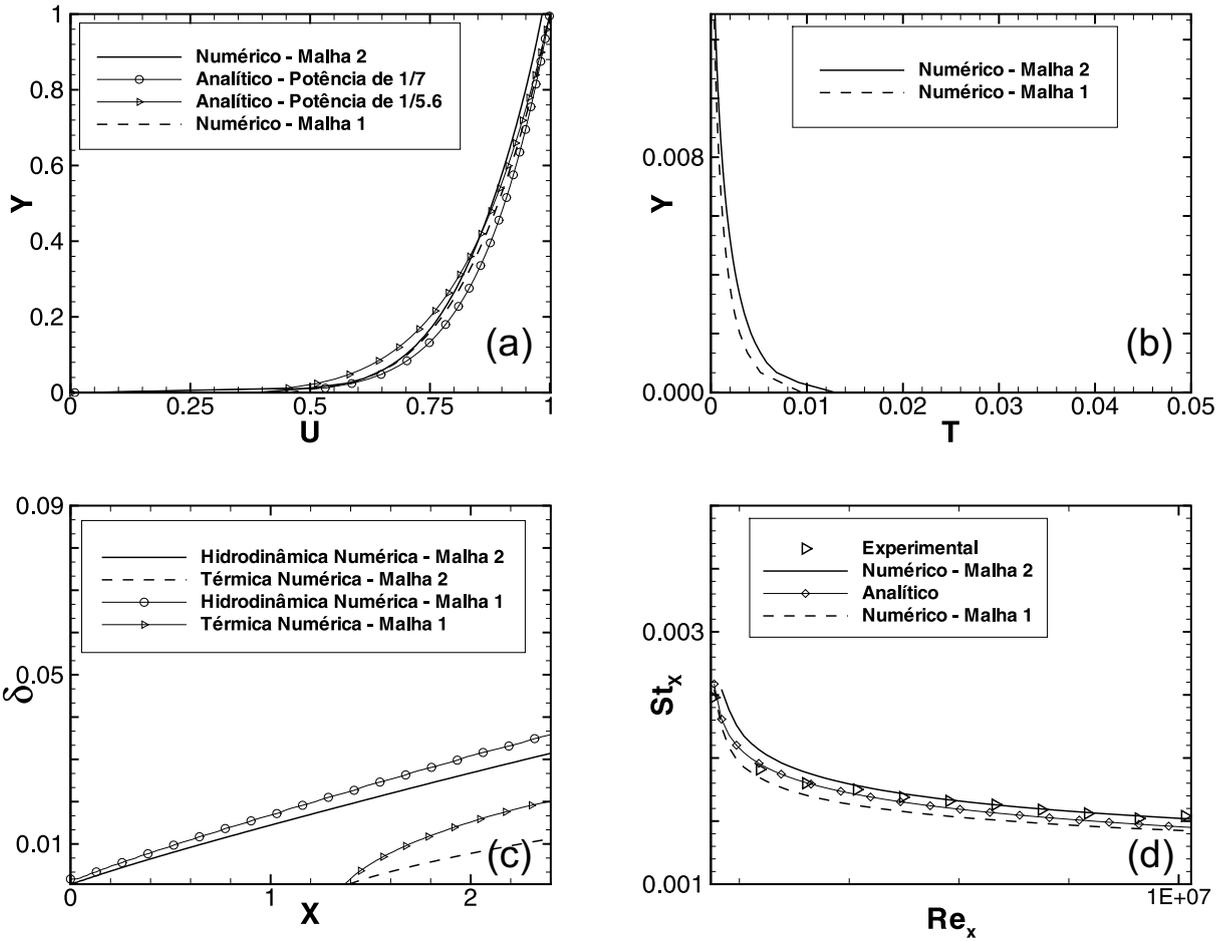


Figura 5.10: Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 10 - $u_{\infty} = 67m/s$ e $\xi = 1.36m$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.

c) A precisão dos resultados oriundos da malha 2, principalmente os que se referem ao fluxo de calor na camada limite turbulenta justificam sua adoção como malha definitiva de cálculo.

5.5.2 Leis de Parede

Neste sub-capítulo é complementado o processo de validação da lei de parede de temperatura proposta por Cruz e Silva Freire(1998) para escoamentos que se desenvolvem se gradientes significativos de pressão.

As leis de parede de velocidade e de temperatura propostas por Cruz e Silva Freire(1998) são sensíveis a gradientes adversos de pressão e foram implementadas

e avaliadas para escoamentos submetidos a gradientes de pressão e de temperatura impostos por Soares e Fontoura Rdrigues(2004).

A validação que se pretende tem como objetivo mostrar que na ausência de gradientes significativos de pressão e para fracos gradientes de temperatura, os resultados das leis de velocidade e de temperatura de Cruz e Silva Freire(1998) devem tender para os níveis obtidos com as leis de parede insensíveis a gradientes de pressão como é o caso da lei de parede logarítmica clássica e da lei de parede de Cheng e Ng(1982).

Nos resultados apresentados pelas figuras 5.11 (a), (b), (c), (d), (e) e (f) as legendas apresentadas tem os seguintes significados :

- Lei log - Lei de parede logarítmica clássica definida pela equação (3.103).
- Lei Csf - Lei de parede de velocidade ou temperatura de Cruz e Silva Freire(1998) definida pelas equações (3.108) e (3.120)
- Lei Cng - Lei de parede de temperatura de Cheng e Ng(1982) definida pela relação (3.118).

Os resultados obtidos para o caso teste 6, ilustrados nas figuras 5.11 (a), (b), (e) e (f), apresentam os perfis correspondentes ao ponto localizado a uma distância de 1,8m do início da placa, para velocidade, temperatura, energia cinética de turbulência κ e taxa de dissipação de turbulência ε . As figuras 5.11 (c) e (d) apresentam as espessuras de camada limite ao longo do comprimento da placa e os valores para números de Stanton local em função do número de Reynolds local, ambos calculados com as leis de parede descritas para velocidade e temperatura.

Para a validação foram comparados resultados relativos a simulação dos casos teste 3, 6, 7 e 10. Em todas as simulações obteve-se perfeita concordância entre os resultados de Cruz e Silva Freire(1998) e os resultados de referência gerados pelas leis logarítmica clássica e de Cheng e Ng(1982).

Neste sub-capítulo apresenta-se apenas os resultados da figura (5.11), referente ao caso teste 3. Os demais resultados, correspondentes aos casos teste 6, 7 e 10 são apresentados no anexo 1.

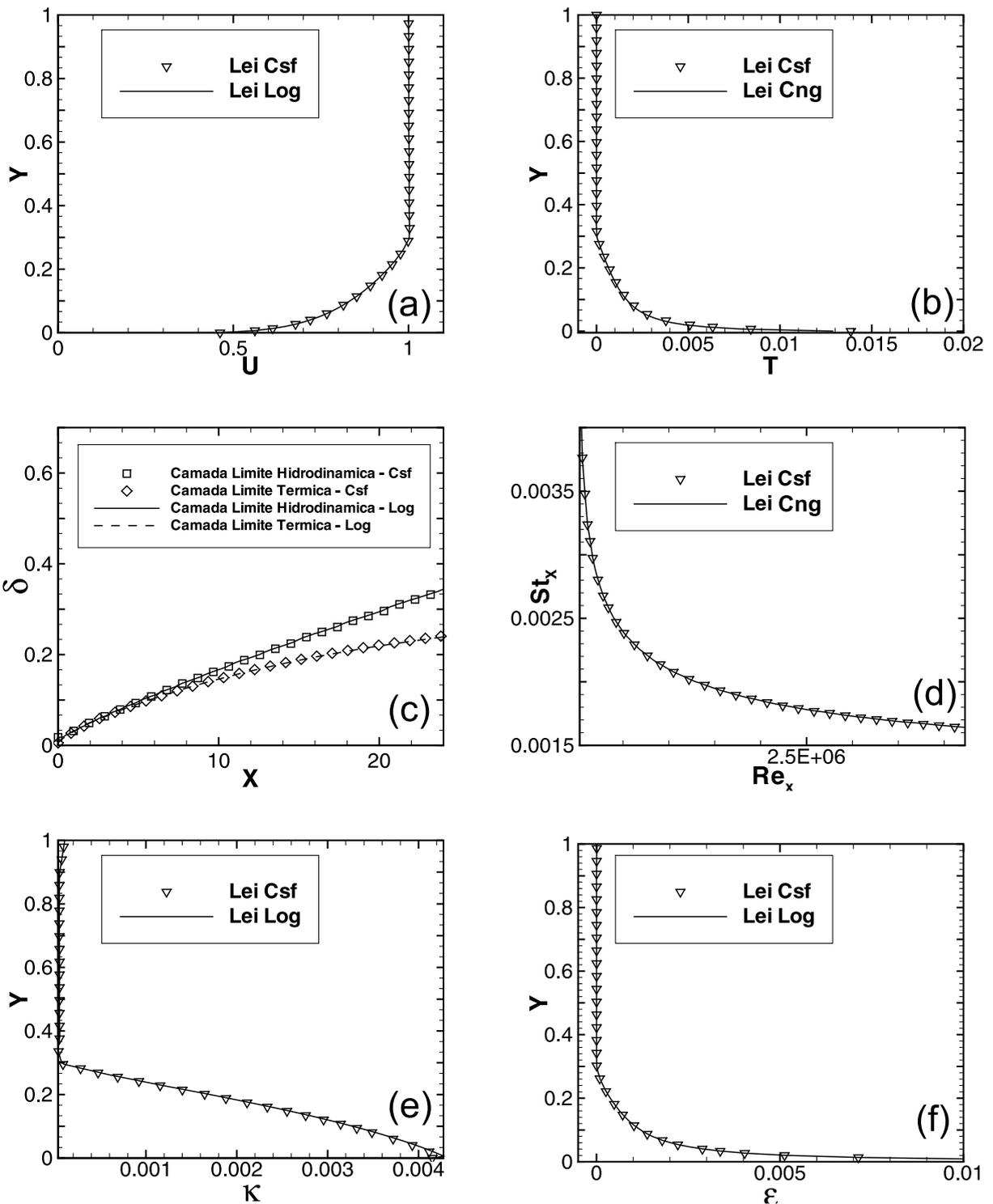


Figura 5.11: Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 3. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8m$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8m$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8m$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8m$.

Os resultados obtidos e apresentados pelas figuras (5.11) desta seção e pelas figuras (6.1), (6.2) e (6.3) do anexo 1 são suficientes para encerrar o processo de validação das leis de parede de velocidade e de temperatura de Cruz e Silva Freire(1998),

implementadas computacionalmente por Soares e Fontoura Rodrigues(2004).

5.5.3 Perfil de Velocidade

No primeiro dos quatro estudos que compõe a publicação de Reynolds et al.(1958) sobre transferência de calor em camada limite turbulenta, entitulado “Heat Transfer in The Turbulent Incompressible Boundary Layer I - Constant Wall Temperature”, verificou-se que o perfil de velocidade na forma adimensional podia ser modelado por,

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}, \quad (5.3)$$

Com m variando no intervalo de 5 a 8 em função do Reynolds local do escoamento. Em geral, a literatura apresenta, para a representação de em perfil turbulento, o coeficiente $m = 7$, porém este estudo experimental mostra que na faixa dos experimentos realizados a melhor aproximação ocorreu utilizando $m = 5, 6$.

Abaixo encontram-se os quadros comparativos entre perfis de velocidade analítico e numérico. Os perfis analíticos foram plotados usando a relação adimensional de potência de $1/7$ e de $1/56$.

A figura (5.12) mostra os perfis de velocidade para os escoamentos dos casos teste 3, 4, 5 e 6. São apresentadas quatro situações diferentes de aquecimento da placa, sendo a primeira sem defasagem entre o ponto inicial das camadas limites de velocidade e de temperatura, ou seja, $\varepsilon = 0$. A segunda configuração é definida por uma defasagem de $\varepsilon = 0,36m$. A terceira configuração apresenta $\varepsilon = 0,76m$ e a quarta $\varepsilon = 1,36m$. Estes resultados foram todos obtidos com as leis de parede logarítmica clássica. Os cortes para a retirada dos perfis de velocidade foram realizados na posição $x = 1.8m$ cujo número de Reynolds local correspondente é de $Re_x = 3,2 \times 10^6$.

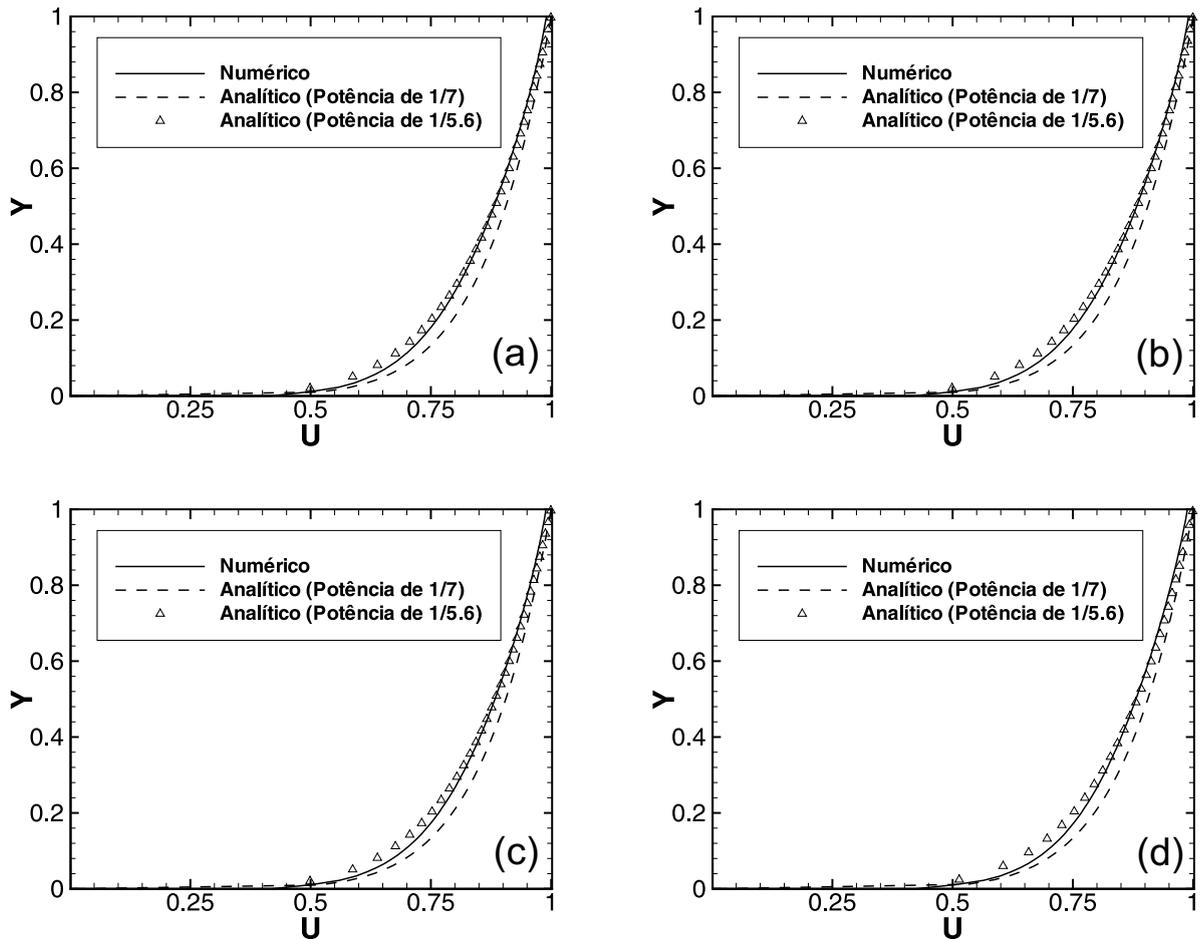


Figura 5.12: Perfis adimensionais de velocidade retirados na posição $x=1,8m$, $Re_x = 3,2 \times 10^6$. (a) Caso teste 3 - Velocidade 28m/s $\xi = 0m$. (b) Caso teste 4 - Velocidade 28m/s $\xi = 0,36m$. (c) Caso teste 5 - Velocidade 28m/s $\xi = 0,76m$. (d) Caso teste 6 - Velocidade 28m/s $\xi = 1,36m$.

Em todas as quatro configurações apresentadas na figura (5.12) pode-se notar um comportamento semelhante entre os perfis de velocidade numéricos e analíticos. Em geral a divergência entre os três perfis é pequena, sendo nítida a maior concordância entre o perfil numérico e o resultado da lei de potência de 1/5,6 na faixa de números de Reynolds locais simulados para os casos teste 3, 4, 5, e 6 que varia entre 5×10^5 a 1×10^6 .

A figura (5.13) apresenta resultados para os casos teste 7, 8, 9, e 10, para uma faixa de variação de números de Reynolds de 1×10^5 a 1×10^7 . Neste intervalo foi verificado que o perfil numéricos de velocidade é sempre intermediário aos perfis das leis de potência de 1/5,6 e de 1,7.

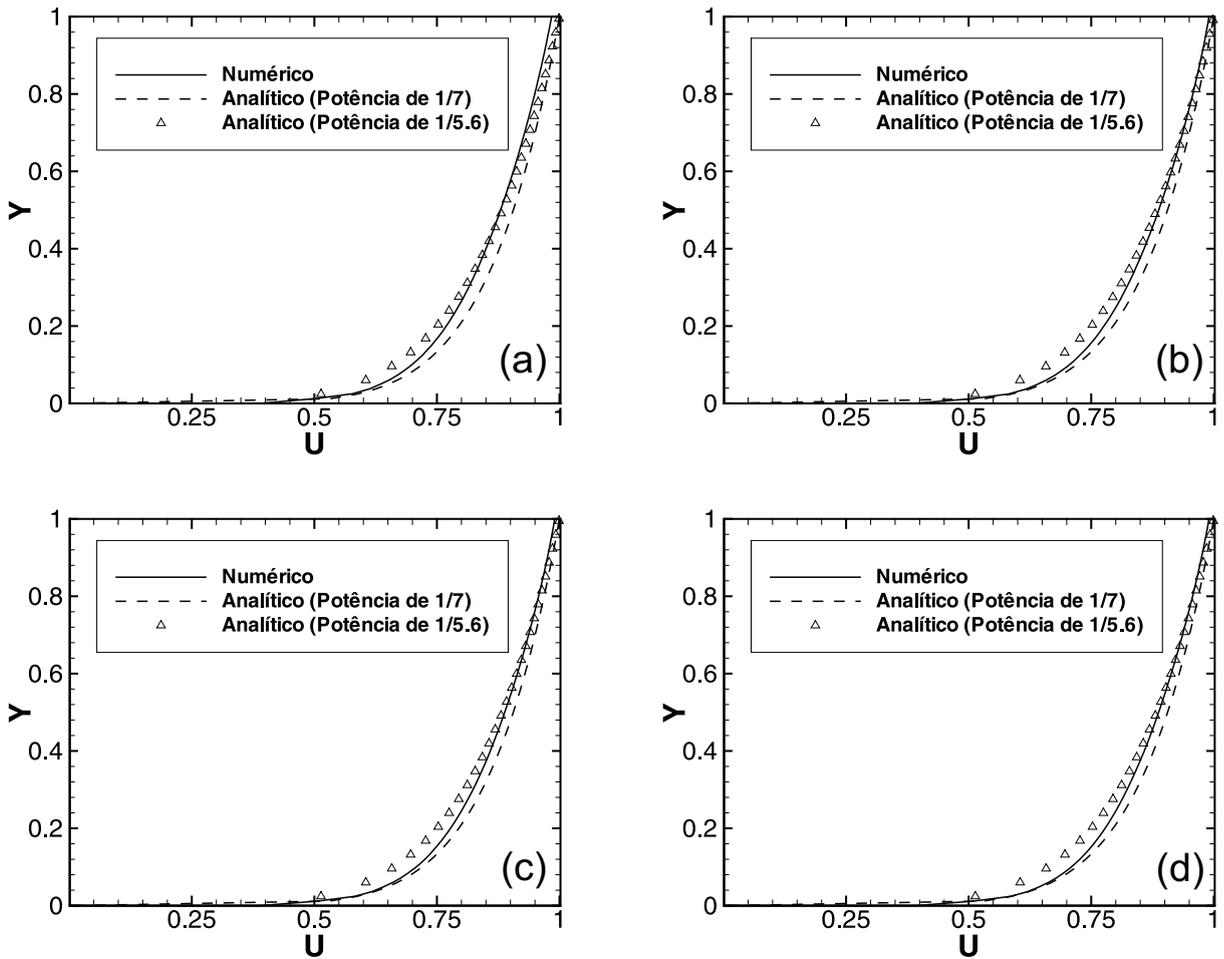


Figura 5.13: Perfis adimensionais de velocidade retirados na posição $x=1,8m$, $Re_x = 7,6 \times 10^6$. (a) Caso teste 7 - Velocidade 67m/s $\xi = 0m$. (b) Caso teste 8 - Velocidade 67m/s $\xi = 0,36m$. (c) Caso teste 9 - Velocidade 67m/s $\xi = 0,76m$. (d) Caso teste 9 - Velocidade 67m/s $\xi = 1,36m$.

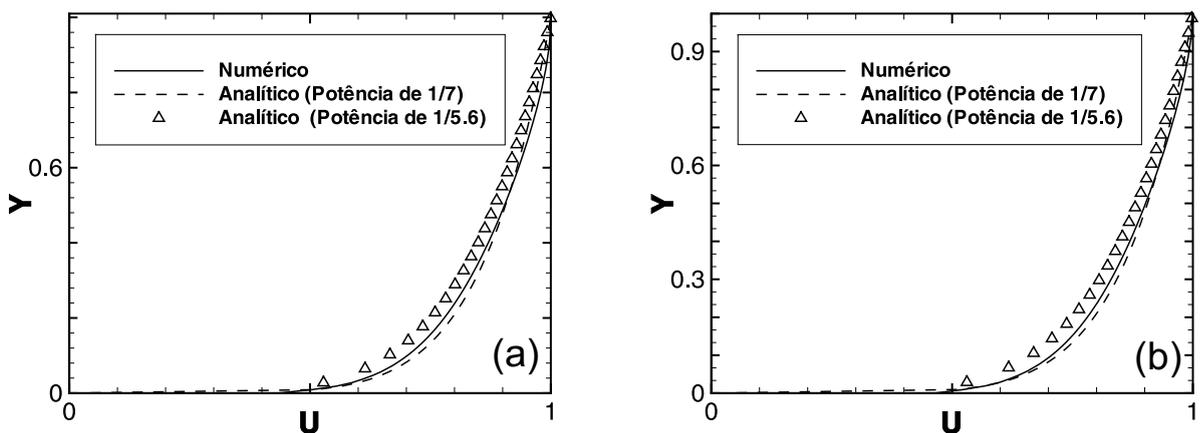


Figura 5.14: Perfis adimensionais de velocidade retirados na posição $x=1,8m$. (a) Caso teste 1 - $Re_x = 2,2 \times 10^6$, Velocidade 19,5m/s $\xi = 0,415m$. (b) Caso teste 2 - $Re_x = 2,5 \times 10^6$, Velocidade 21,9m/s $\xi = 0,724m$.

A figura (5.14) mostra os resultados obtidos pela simulação dos casos teste 1 e 2, cuja faixa de variação de números de Reynolds é de 5×10^5 a 2×10^6 . Nestas situações o perfil numérico de velocidade, retirado na posição $x = 1,8m$, é muito semelhante ao perfil fornecidos pela lei de potência de $1/7$.

Estes resultados são importantes para ilustrar o fato de que os perfis turbulentos podem ser bem representados por coeficientes que variam na faixa de $5 < m < 8$, conforme proposto por Reynolds et al.(1958).

5.5.4 Método para cálculo de Camada Limite

Nesta seção são apresentados cálculos, para números de Stanton, cuja dependência numérica foi determinada pela relação entre as espessuras de camada limite térmica e fluidodinâmica ao longo da placa, de acordo com a relação a relação (5.4), proposta por Kays e Crawford (1980), baseada na analogia de Chilton-Colburn(1933),

$$St_x = \frac{Cf_x}{2} \left(\frac{\delta}{\delta_t} \right)^{1/7}, \quad (5.4)$$

em que o coeficiente de atrito local Cf_x foi calculado por meio da relação empírica

$$\frac{Cf_x}{2} = 0,0287Re_x^{-(1/5)}Pr^{-2/5}. \quad (5.5)$$

proposta por Kays e Crawford (1980). Desta forma, com objetivo de melhor avaliar a relação entre as espessuras de camadas limites de velocidade e temperatura, foi realizado um estudo sobre a determinação analítica e numérica dessas grandezas.

A elasticidade conceitual existente na definição da localização da fronteira entre camada limite e escoamento não perturbado pela parede tem, neste trabalho, sua implementação baseada em relações que definem os valores assumidos pela velocidade e temperatura ao longo da linha de fronteira, por meio das relações

$$u = m u_{\infty} \quad (5.6)$$

e

$$T = T_p - m(T_p - T_{\infty}). \quad (5.7)$$

onde m é um número real definido no intervalo $0,95 < m < 0,99$.

Para estabelecer os valores de "m" a serem usados na definição da espessura de camada limite foram graficamente analisados os resultados obtidos para números de Stanton, calculados para diversas configurações de escoamento e aquecimento. Também foram calculados os erros médios em cada um dos casos, de onde pode-se retirar informações que definam o tratamento dos dados.

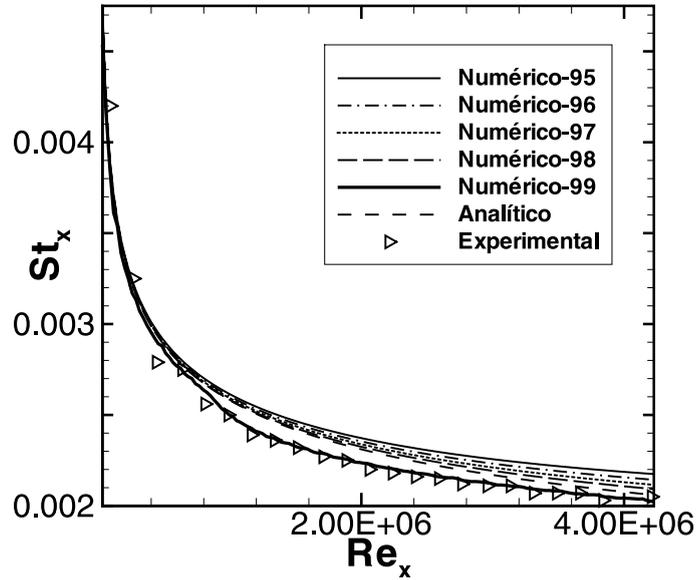


Figura 5.15: Caso teste 3 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0m, com $u_{\infty}=28\text{m/s}$

A figura (5.15) e as demais que serão apresentadas na sequência, mostram os valores obtidos para os números de Stanton calculados através dos dados numéricos, analíticos e experimentais. Na legenda destas figuras os valores entre 95 e 99 representam a variação do coeficiente "m" no intervalo $0,95 \leq m \leq 0,99$.

Os valores aqui referenciados como analíticos foram calculados a partir da relação (3.95),

$$St_x = 0.0287 Pr^{-2/5} Re_x^{-1/5} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}, \quad (3.95)$$

de natureza analítica complementada por dados empíricos e experimentais, proposta por Kays e Crawford(1980), que leva em consideração a defasagem entre os inícios das camadas limites de velocidade e de temperatura.

A tabela (5.1) apresenta um quadro comparativo para os valores de acordo com o coeficiente m para a retirada da camada limite. Nela os erros relativos percentuais são calculados por meio da relação

$$\text{Erro relativo percentual} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M(a) - M(b)}{M(b)} \right)_i \right] \times 100 \quad (5.8)$$

Na equação (5.8) n é o número total de pontos tomados em cada perfil, $M(a)$ representa resultados numéricos e analíticos e $M(b)$ é destinado aos valores experimentais.

Tabela 5.1: Caso teste 3 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	1,1
Experimental x Numérico (98%)	5,85
Experimental x Numérico (97%)	6,34
Experimental x Numérico (96%)	7,1
Experimental x Numérico (95%)	7,8
Experimental x Analítico	5,34

Neste quadro podemos observar que o menor erro encontrado para esta situação específica de escoamento e aquecimento da placa o coeficiente que melhor representa é $m = 0,99$. Os demais coeficientes apresentam erros que chegam no máximo a 7.8%, enquanto os dados experimentais apresentam uma divergência de 5.34% com relação aos valores analíticos.

A figura (5.16) apresenta os dados para número de Stanton influenciados pela espessura de camada limite para a velocidade $u_\infty = 28m/s$ com defasagem entre os inícios de camada limite de $\xi = 0,36m$. Os erros associados a este cálculo são apresentados na tabela (5.2).

O quadro (5.2) apresenta erros de 1,4% entre os resultados experimentais e numéricos, obtidos com o parâmetro $m = 99\%$. Observa-se que os valores dos erros vão

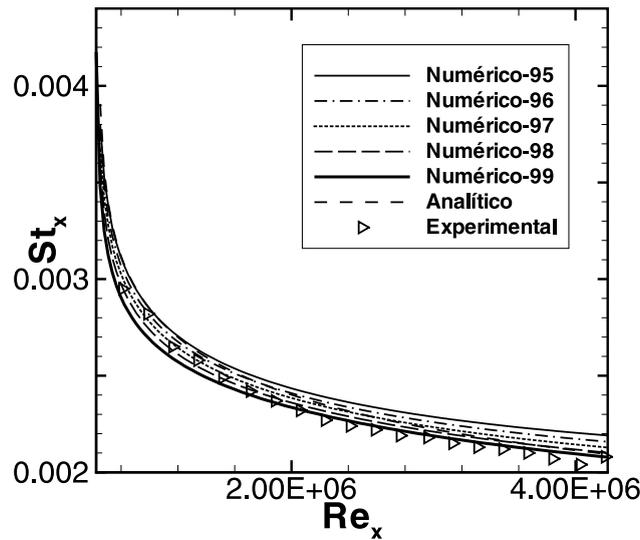


Figura 5.16: Caso teste 4 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0,36m, com $u_\infty=28\text{m/s}$

Tabela 5.2: Caso teste 4 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	1,4
Experimental x Numérico (98%)	2,79
Experimental x Numérico (97%)	3,86
Experimental x Numérico (96%)	5,17
Experimental x Numérico (95%)	6,45
Experimental x Analítico	3,86

aumentando a medida em que o coeficiente m aumenta, chegando a 6,45%. Também é importante frisar que o erro médio entre os valores experimentais e o analítico é de 3,45%.

A figura (5.17) apresenta os dados para número de Stanton influenciados pela espessura de camada limite para a velocidade $u_\infty = 28\text{m/s}$ com defasagem entre os inícios de camada limite de $\xi = 0,76\text{m}$. Os erros associados a este cálculo são apresentados na tabela (5.3).

Nesta simulação o comportamento do erro numérico em relação aos valores experimentais já são distintas dos primeiros casos. Os maiores erros são apresentados para os coeficientes altos ($m = 99\%$), reduzindo-se para coeficientes médios e aumentando novamente para os coeficientes mais baixos ($m = 95\%$). O erro experimental e

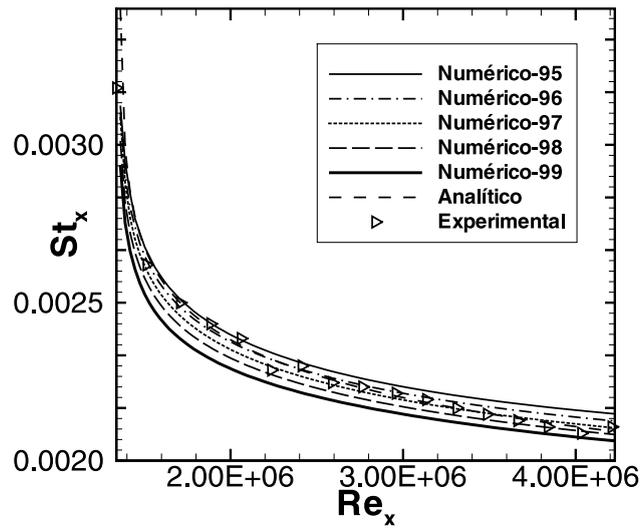


Figura 5.17: Caso teste 5 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0,76m, com $u_\infty=28\text{m/s}$

Tabela 5.3: Caso teste 5 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	4,5
Experimental x Numérico (98%)	2,4
Experimental x Numérico (97%)	1,1
Experimental x Numérico (96%)	1,5
Experimental x Numérico (95%)	2,86
Experimental x Analítico	1,5

analítico é de 1,5%.

A figura (5.18) apresenta os dados para número de Stanton influenciados pela espessura de camada limite para a velocidade $u_\infty = 28\text{m/s}$ com defasagem entre os inícios de camada limite de $\xi = 1,36\text{m}$. Os erros associados a este cálculo são apresentados na tabela (5.4).

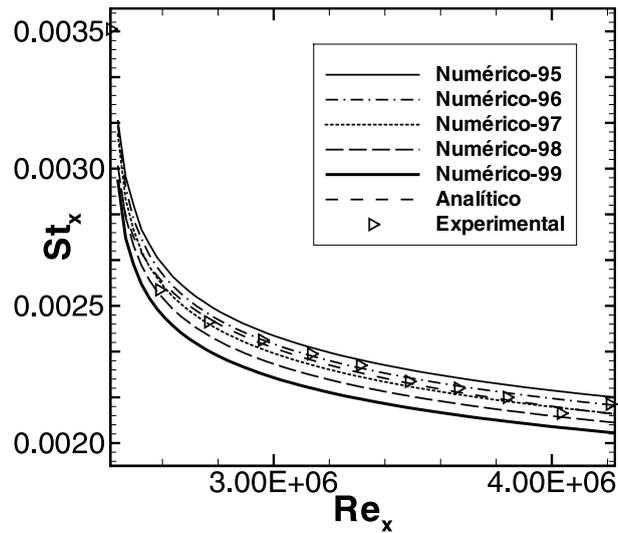


Figura 5.18: Caso teste 6 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 1,36 m, com $u_\infty=28\text{m/s}$

Tabela 5.4: Caso teste 6 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	6,4
Experimental x Numérico (98%)	3,7
Experimental x Numérico (97%)	1,07
Experimental x Numérico (96%)	1
Experimental x Numérico (95%)	2,86
Experimental x Analítico	1,5

A tabela (5.4) apresenta erros que se comportam com aqueles obtido para a simulação cujo $\xi = 0,76m$, apresentada no quadro (5.3). Novamente os erros entre os valores experimentais e numéricos são menores nos valores intermediários de m . Para $m = 96\%$ temos erros de 1% entre os valores obtidos pelo código TURBO-2D e os valores experimentais. Os erros entre os experimentos e a os valores analíticos são de 1,5%.

A figura (5.19) apresenta os dados para número de Stanton influenciados pela espessura de camada limite para a velocidade $u_\infty = 67\text{m/s}$ sem defasagem entre os inícios de camada limite.

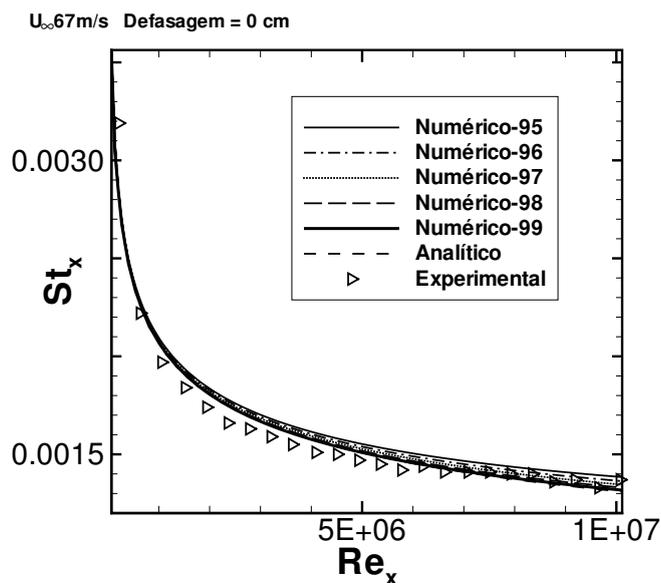


Figura 5.19: Caso teste 7 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0m, com $u_\infty=67m/s$

Tabela 5.5: Caso teste 7 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	1,4
Experimental x Numérico (98%)	2,1
Experimental x Numérico (97%)	2,76
Experimental x Numérico (96%)	4,08
Experimental x Numérico (95%)	5,02
Experimental x Analítico	1,5

A tabela (5.5) repete a tendência já verificada pela simulação com velocidade $u_\infty = 28m/s$. Nesta mesma configuração de aquecimento, mostrada pela tabela (5.1), os erros entre os valores experimentais e numéricos são menores nos valores altos de m . Para $m = 99\%$ temos erros de 1,4% entre os valores obtidos pelo código TURBO-2D e os valores experimentais. Os erros entre os experimentos e a os valores analíticos são de 1,5%.

A figura (5.20) apresenta os dados para número de Stanton influenciados pela espessura de camada limite para a velocidade $u_\infty = 67m/s$ com defasagem entre os inícios de camada limite de $\xi = 0,56m$.

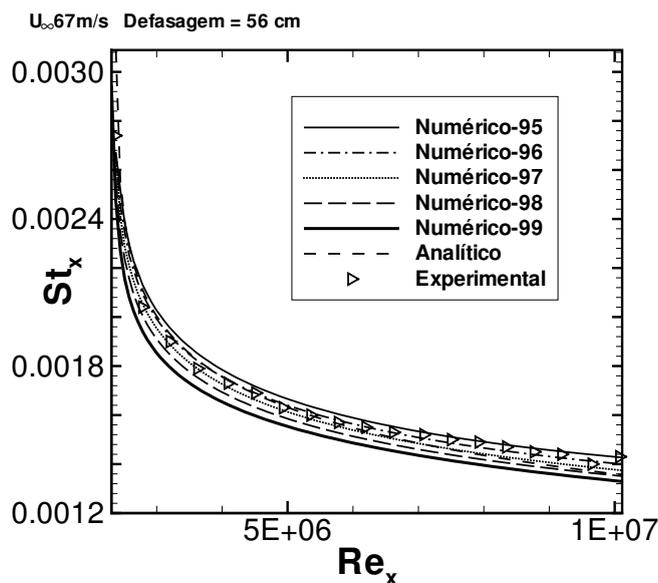


Figura 5.20: Caso teste 8 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0,56m, com $u_\infty=67\text{m/s}$

Tabela 5.6: Caso teste 8 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	5,6
Experimental x Numérico (98%)	3,4
Experimental x Numérico (97%)	2,72
Experimental x Numérico (96%)	1,02
Experimental x Numérico (95%)	0,7
Experimental x Analítico	4,4

A tabela (5.6) apresenta, novamente, a mesma tendência de manutenção já verificada pela simulação com velocidade $u_\infty = 28\text{m/s}$ nas configurações de aquecimento semelhantes. Os erros entre os valores experimentais e numéricos são menores nos valores médios e baixos de m . Para $m = 95\%$ temos erros de 0,7% entre os valores obtidos pelo código TURBO-2D e os valores experimentais. Aqui são verificadas discrepâncias significativas entre os dados experimentais e os valores analíticos.

A figura (5.21) apresenta os dados para número de Stanton influenciados pela espessura de camada limite para a velocidade $u_\infty = 67\text{m/s}$ com defasagem entre os inícios de camada limite de $\xi = 0,86m$. Os erros associados a esta simulação são apresentados no quadro (5.7).

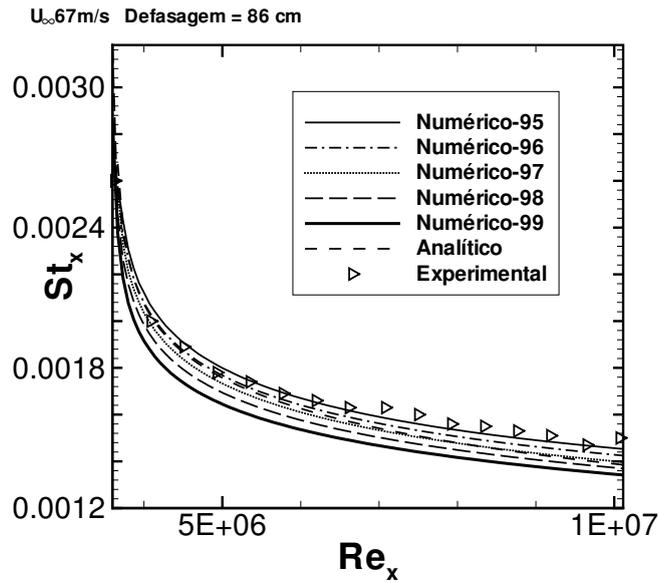


Figura 5.21: Caso teste 9 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0,86m, com $u_\infty=67\text{m/s}$

Tabela 5.7: Caso teste 9 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	8,9
Experimental x Numérico (98%)	5,12
Experimental x Numérico (97%)	5,22
Experimental x Numérico (96%)	3,21
Experimental x Numérico (95%)	1,28
Experimental x Analítico	7,05

O quadro (5.7) apresenta erros entre os valores experimentais e numéricos de 1,28% para $m = 95\%$, confirmando a observação realizada nas outras simulações. No entanto são verificadas discrepâncias significativas entre os dados experimentais e os valores analíticos, chegando a 7,05%.

A figura (5.22) apresenta os dados para número de Stanton para a velocidade $u_\infty = 67\text{m/s}$ na última configuração de aquecimento cuja defasagem entre os inícios de camada limite era de $\xi = 1,36\text{cm}$. Os erros associados a esta simulação são apresentados no quadro (5.8).

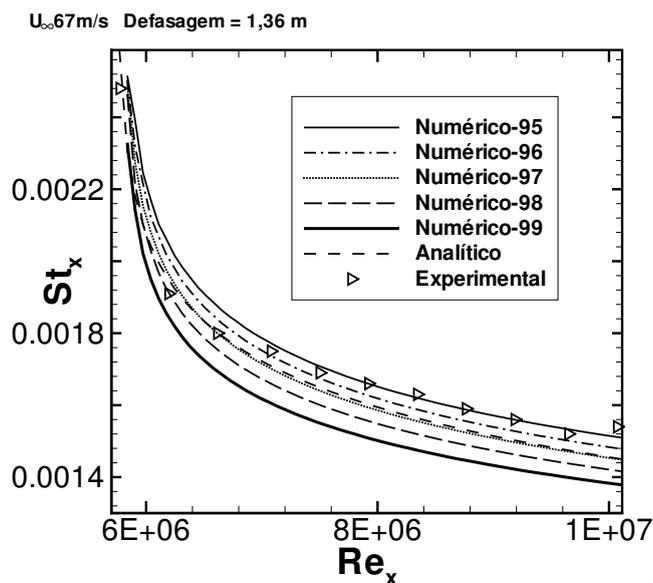


Figura 5.22: Caso teste 10 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 1,36 m, com $u_\infty=67\text{m/s}$

Tabela 5.8: Caso teste 10 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Erro Percentual
Experimental x Numérico (99%)	9,5
Experimental x Numérico (98%)	4,29
Experimental x Numérico (97%)	4,31
Experimental x Numérico (96%)	2,45
Experimental x Numérico (95%)	0,92
Experimental x Analítico	6,8

A confirmação da tendência já verificada nas outras simulações pode ser visualizada através da tabela (5.8), que apresenta erros crescentes para valores crescentes de m , a partir de 0,95, onde temos erros de 0,92%. Os erros entre os valores analíticos e experimentais estão, neste caso, na ordem de 7%.

A figura (5.23) apresenta resultados para dois casos em que as velocidades do escoamento são de $19,5\text{m/s}$ e $21,9\text{m/s}$ e os trechos iniciais não aquecidos medem respectivamente $0,415\text{m}$ e $0,724\text{m}$. Como podemos observar na tabela (5.9), a mesma tendência observada nos escoamentos anteriores permanece válida.

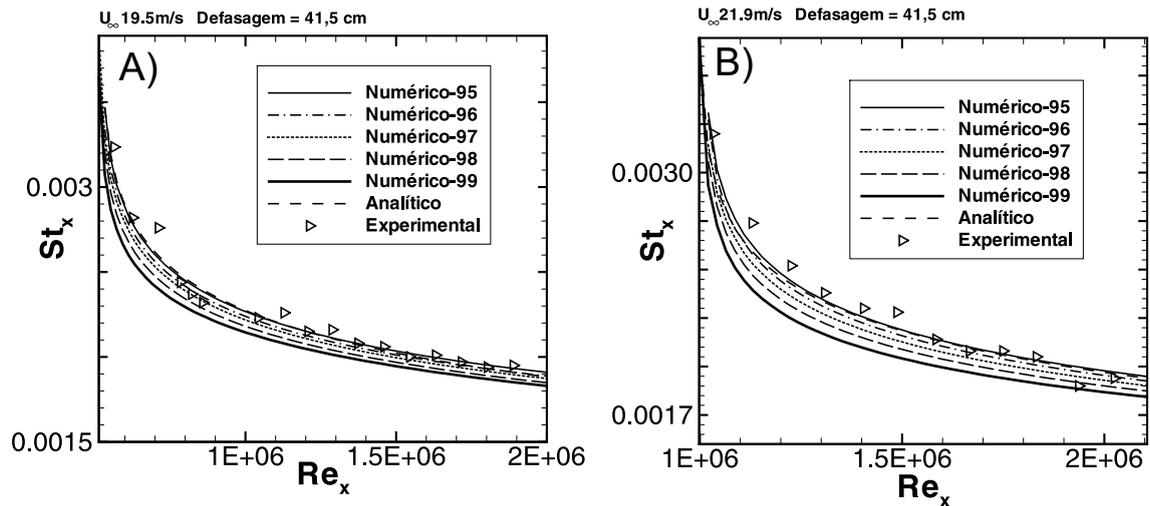


Figura 5.23: Influência das camadas limites no número de Stanton. A) Caso teste 1 - Placa com defasagem = 0,415 m, com $u_\infty=19,5\text{m/s}$. B) Caso teste 2 - Placa com defasagem = 0,724cm, com $u_\infty=21,9\text{m/s}$.

Tabela 5.9: Erro no cálculo numérico do Número de Stanton

	Caso teste 1	Caso teste 2
	Erro percentual	Erro percentual
Experimental x Numérico (99%)	5,5	9,1
Experimental x Numérico (98%)	4,32	7,3
Experimental x Numérico (97%)	3,11	5,4
Experimental x Numérico (96%)	2,12	3,23
Experimental x Numérico (95%)	1,1	1,8
Experimental x Analítico	1,5	2,1

A análise dos resultados das figuras (5.15) até (5.23) e tabelas (5.1) até (5.9), mostram que a definição de espessura da camada limite, conforme proposto pelas equações (5.6) e (5.7), é significativa no tratamento dos dados obtidos numericamente.

Quando a defasagem entre os pontos iniciais das camadas limites de velocidade e temperatura é nula o melhor coeficiente é $m = 0,99$. Já nos casos onde a camada limite térmica se inicia defasada da camada limite fluidodinâmica, os coeficientes que melhor representam suas espessuras ficam entre $0,95 < m < 0,97$.

Os valores da constante m adotados no emprego das equações (5.6) e (5.7) são os que resultam na melhor concordância entre resultados experimentais e numéricos, resumidos na tabela (5.10).

Tabela 5.10: Melhores valores para a constante m

Caso teste	m	$\xi(m)$	Velocidade u_∞ (m/s)
1	0,95	0,415	19,5
2	0,95	0,724	21,9
3	0,99	0,000	28,0
4	0,99	0,360	28,0
5	0,97	0,760	28,0
6	0,96	1,360	28,0
7	0,99	0,000	67,0
8	0,95	0,560	67,0
9	0,95	0,860	67,0
10	0,95	1,360	67,0

5.5.5 Espessura de Camada Limite

Utilizando os dados obtidos na seção anterior, apresentamos nesta seção os resultados gráficos que comparam o valor da espessura das camadas limite (térmica e fluidodinâmica) ao longo das placas para os dez caso teste distintos. Os valores de m adotados nas espessuras das camadas limites de velocidade e temperatura são os que produzem os menores erros, conforme os resultados apresentados na seção anterior e resumidos na tabela (5.10).

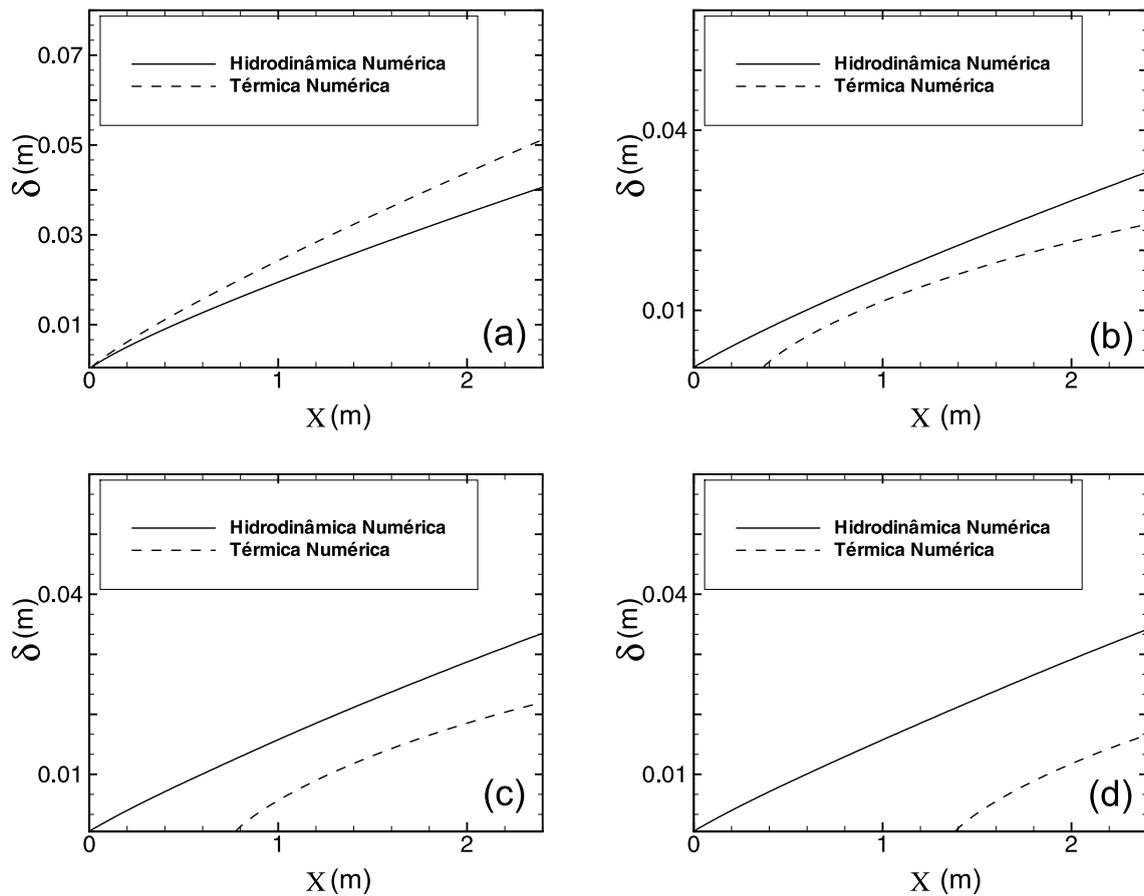


Figura 5.24: Espessura das camadas limites térmica e fluidodinâmica ao longo do comprimento da placa. (a) Caso teste 3 - $u_{\infty} = 28m/s$ e $\xi = 0m$. (b) Caso teste 4 - $u_{\infty} = 28m/s$ e $\xi = 0,36m$. (c) Caso teste 5 - $u_{\infty} = 28m/s$ e $\xi = 0,76m$. (d) Caso teste 6 - $u_{\infty} = 28m/s$ e $\xi = 1,36m$.

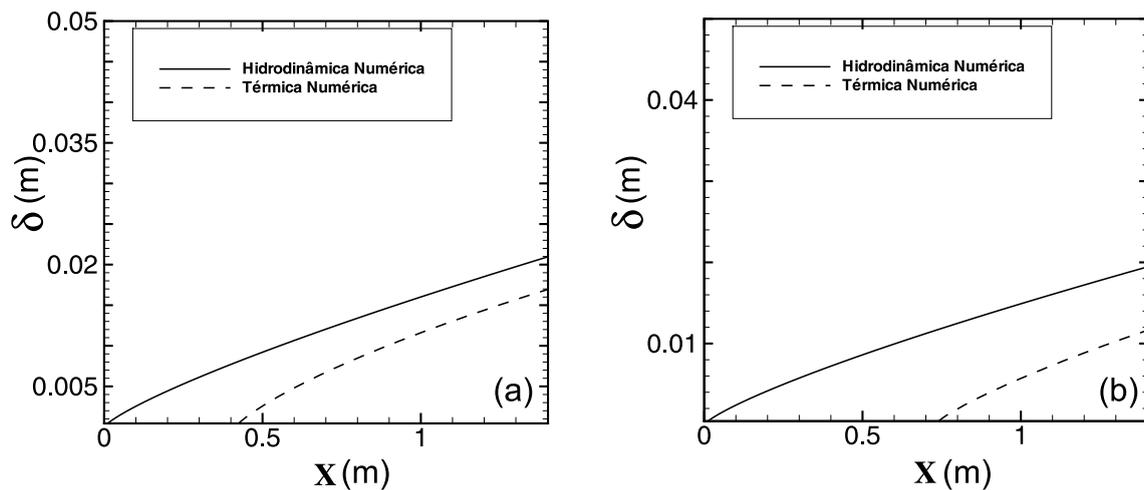


Figura 5.25: Espessura das camadas limites térmica e fluidodinâmica ao longo do comprimento da placa. (a) Caso teste 1 - $u_{\infty} = 19,5m/s$ e $\xi = 0,415m$. (b) Caso teste 2 - $u_{\infty} = 21,9m/s$ e $\xi = 0,724m$.

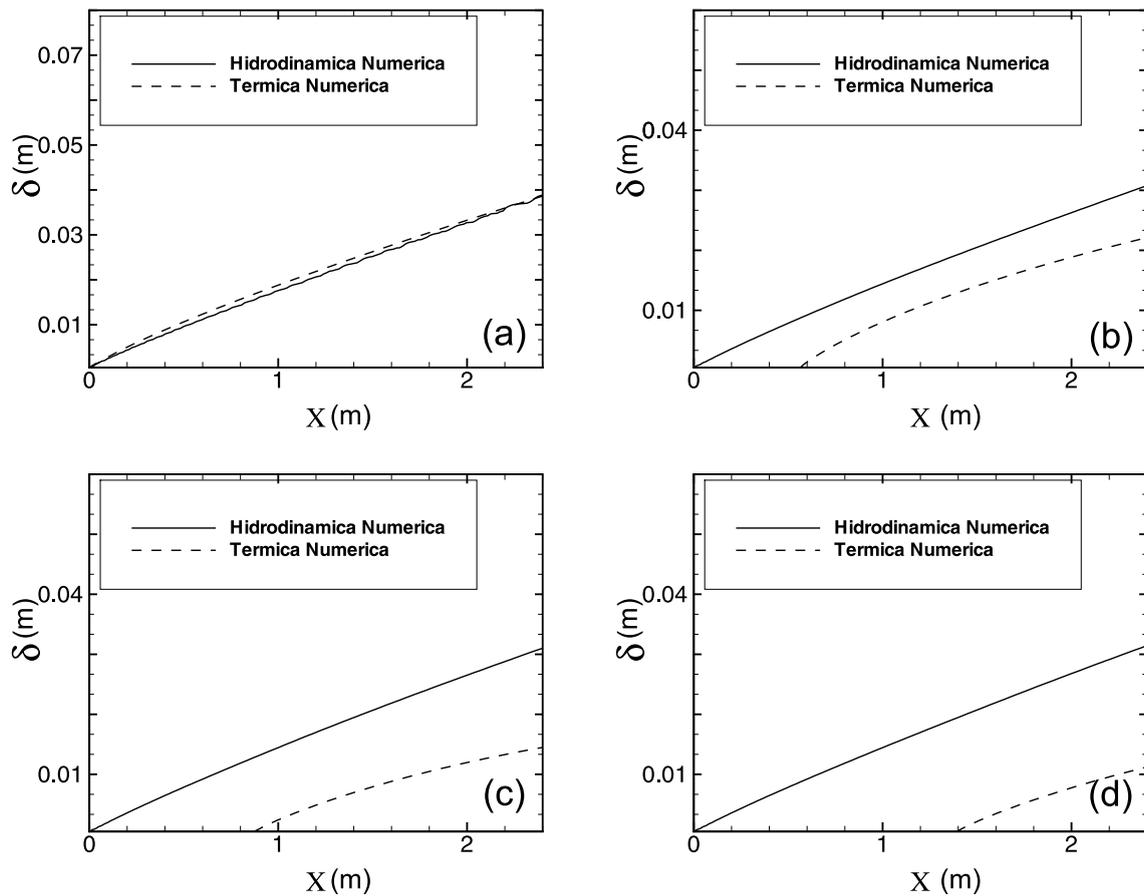


Figura 5.26: Espessura das camadas limites térmica e fluidodinâmica ao longo do comprimento da placa. (a) Caso teste 7 - $u_{\infty} = 67m/s$ e $\xi = 0m$. (b) Caso teste 8 - $u_{\infty} = 67m/s$ e $\xi = 0,56m$. (c) Caso teste 9 - $u_{\infty} = 67m/s$ e $\xi = 0,86m$. (d) Caso teste 10 - $u_{\infty} = 67m/s$ e $\xi = 1,36m$.

5.5.6 Fluxos turbulentos parietais de calor

Este sub-capítulo apresenta os valores obtidos por simulação numérica, feita com o emprego do código Turbo-2D, para o fluxo de calor que se estabelece entre a parede e o fluxo turbulento de ar. Os resultados são apresentados por meio de parâmetros adimensionais, sendo o fluxo de calor avaliado por meio do número de Stanton local e o comportamento do escoamento referenciado via número de Reynolds local. Os valores numéricos são comparados com dados experimentais e valores analíticos.

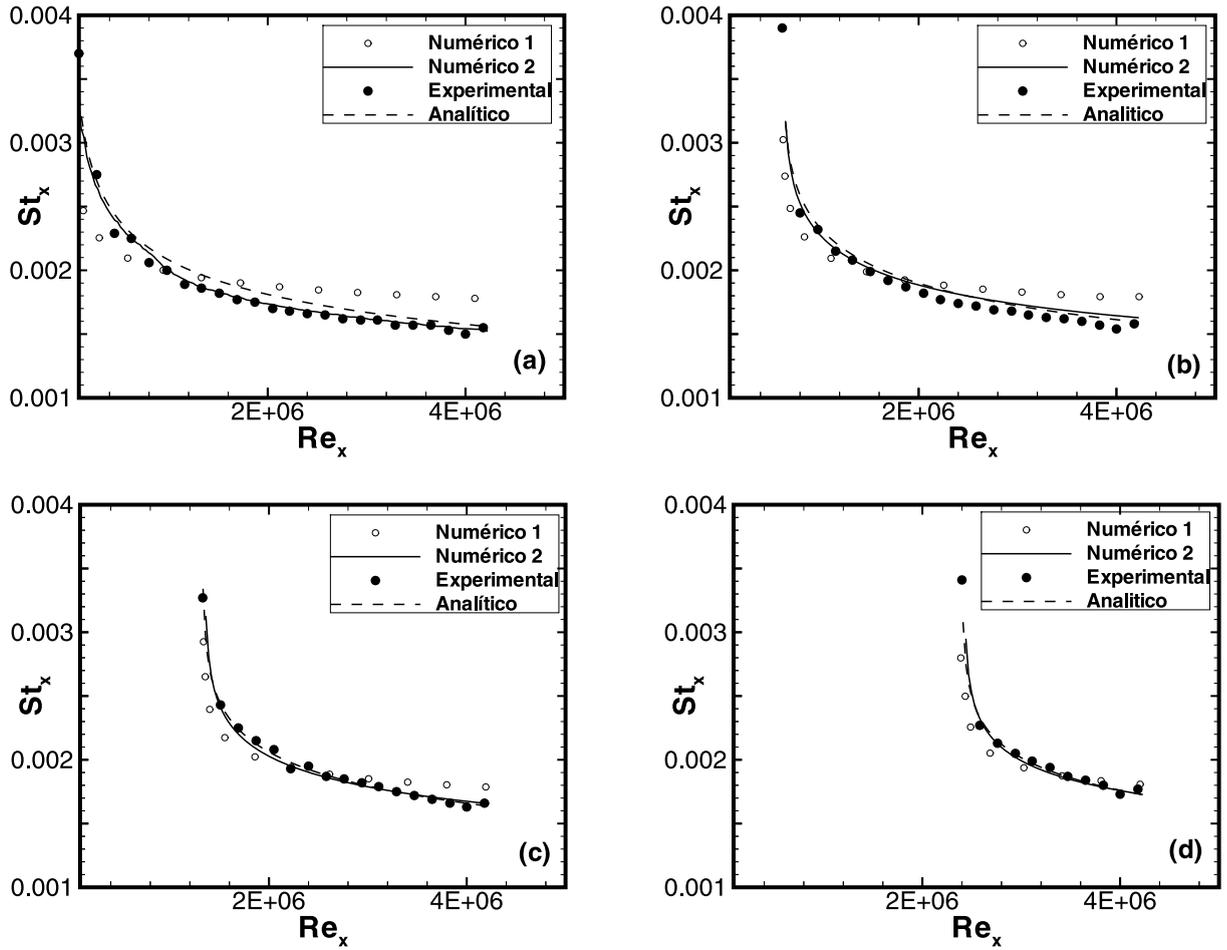


Figura 5.27: Variação do Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 3 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 0\text{m}$, (b) Caso teste 4 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 0,36\text{m}$, (c) Caso teste 5 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 0,76\text{m}$, (d) Caso teste 6 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 1,36\text{m}$,

A figura (5.27) mostra os resultados numéricos obtidos para os valores dos números de Stanton local em função dos números de Reynolds local. O resultado numérico denominado numérico 1 é calculado por meio da relação (5.9)

$$St_x = \frac{q_x}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} \quad (5.9)$$

em que o fluxo de calor na parede q_x é, por definição, dado por

$$q_x = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \cong -k \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} \quad (5.10)$$

Ainda na figura (5.27) temos o segundo resultado numérico (numérico 2) calcu-

lado a partir da relação (5.4)

A relação (5.4) é baseada na lei de potência de 1/7 para as espessuras de camada limite fluidodinâmica δ e camada limite térmica δ_t , apresentadas no item (5.5.5).

Os resultados numéricos obtidos são comparados com os valores calculados através da relação (5.11)

$$St_x = \frac{Cf_x}{2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{0,9} \right]^{-1/9} \quad (5.11)$$

O valor do coeficiente local de fricção Cf_x é calculado por (5.5).

As figuras 5.27 (a), (b), (c) e (d) apresentam as comparações dos valores numéricos, analítico empírico e experimentais obtidos por Taylor et al.(1990), para os casos teste 3, 4, 5 e 6 respectivamente, para os escoamentos com velocidade $u_\infty = 28m/s$, em suas diversas configurações de aquecimento.

A tabela (5.11) mostra os erros relativos, definidos de acordo com a equação (5.8), referentes aos resultados das figuras (5.27). Neste quadro podemos observar que os erros obtidos são pequenos em todos os casos. Observamos adicionalmente que o erro entre os valores experimentais e numéricos é da ordem de 1,5% para o calculo com a relação entre espessuras de camadas limites, relação (5.4)(numérico 2) e de ordem de 8,5% para o cálculo realizado com o auxilio da relação (5.9)(numérico 1). O erro médio entre dados experimentais e analíticos oscilam em torno de 3%.

Tabela 5.11: Erro - Número de Stanton - $u_\infty=28m/s$

Diferença	$\xi = 0m$	$\xi = 0,36m$	$\xi = 0,76m$	$\xi = 1,36m$
Numérico 1 - Analítico (%)	8,50	7,90	10,5	9,84
Numérico 1 - Experimental (%)	9,10	8,60	6,34	5,40
Numérico 2 - Analítico (%)	1,32	1,68	1,68	1,31
Numérico 2 - Experimental (%)	1,32	1,68	1,68	1,31
Experimental - Analítico (%)	4,00	3,89	1,18	2,04

As figuras 5.28 (a), (b), (c) e (d), referentes aos casos teste 7, 8, 9 e 10 respectivamente, têm velocidade do escoamento médio de $u_\infty = 67m/s$, aumentando o número de Reynolds do escoamento.

A tabela de erros referente a estas simulações, tabela(5.12), mostra que os valores obtidos pela simulação numérica se aproximam dos dados experimentais e analíticos. O resultado numérico 2 é a melhor simulação e o valor médio do erro para os diversos valores de ξ é de 1,62%. Também observa-se que a média dos erros entre valores do resultado numérico 2 e analíticos é baixa, na ordem de 3%. Já a diferença entre os valores do resultado numérico 1 e valores analíticos varia entre 8,10% e 5,34%, enquanto a diferença entre os valores dos dados experimentais e da simulação numérico 1 é da ordem de 5,8%.

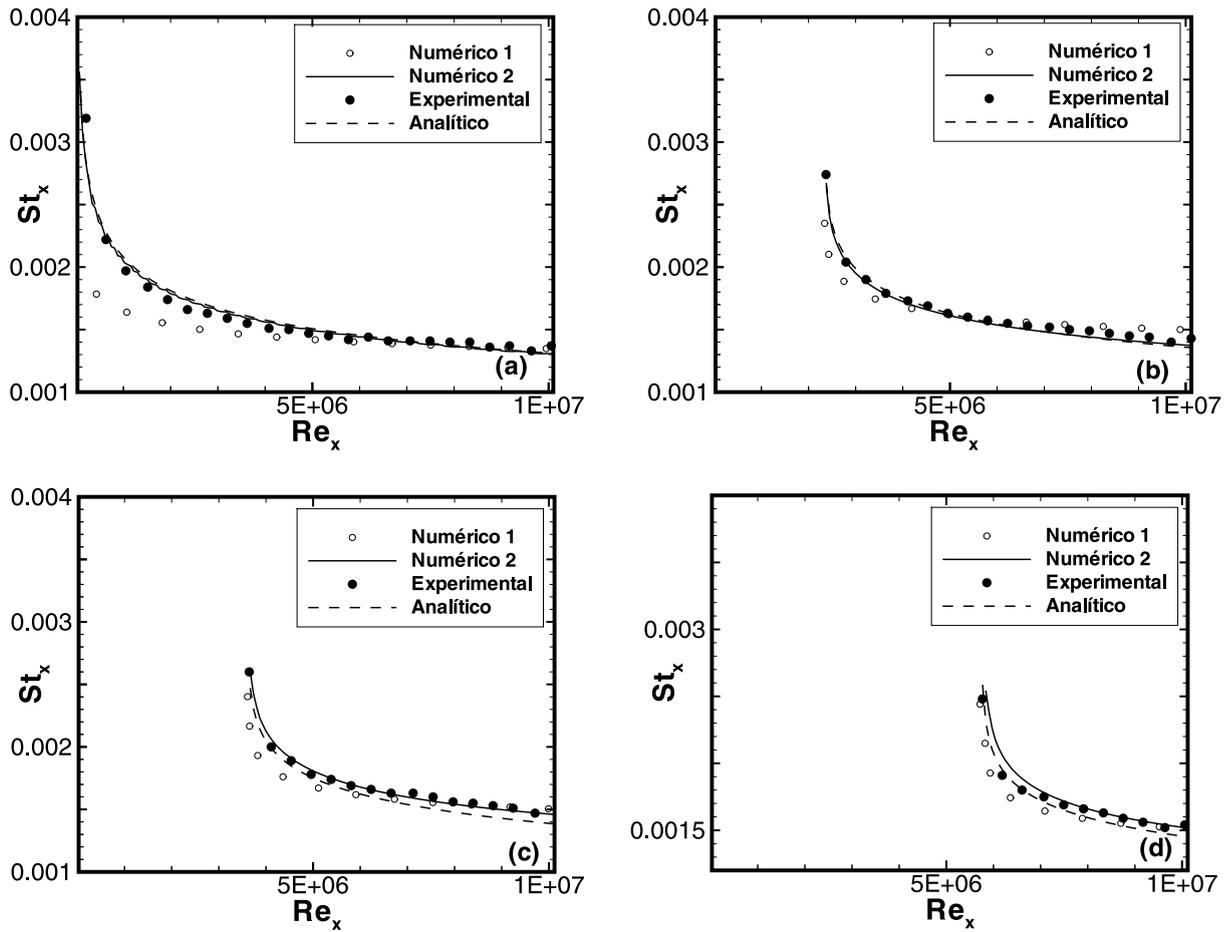


Figura 5.28: Variação do Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 7 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 0\text{m}$, (b) Caso teste 8 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 0,56\text{m}$, (c) Caso teste 9 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 0,86\text{m}$, (d) Caso teste 10 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 1,36\text{m}$,

Tabela 5.12: Erro - Número de Stanton - $u_\infty=67\text{m/s}$

Diferença	$\xi = 0\text{m}$	$\xi = 0,56\text{m}$	$\xi = 0,86\text{m}$	$\xi = 1,36\text{m}$
Numérico 1 - Analítico (%)	6,85	5,34	7,10	8,10
Numérico 1 - Experimental (%)	6,30	4,98	6,45	5,20
Numérico 2 - Analítico (%)	2,90	3,71	2,92	6,10
Numérico 2 - Experimental (%)	0,99	0,99	0,99	1,62
Experimental - Analítico (%)	2,74	1,96	4,03	5,29

As figuras 5.29 (a) e (b) apresentam resultados para os casos teste 1 e 2, realizados por Reynolds et al.(1958). A qualidade do resultado numérico é muito semelhante as observadas anteriormente. O erro médio entre os resultados experimentais e analíticos oscila em torno de 3%.

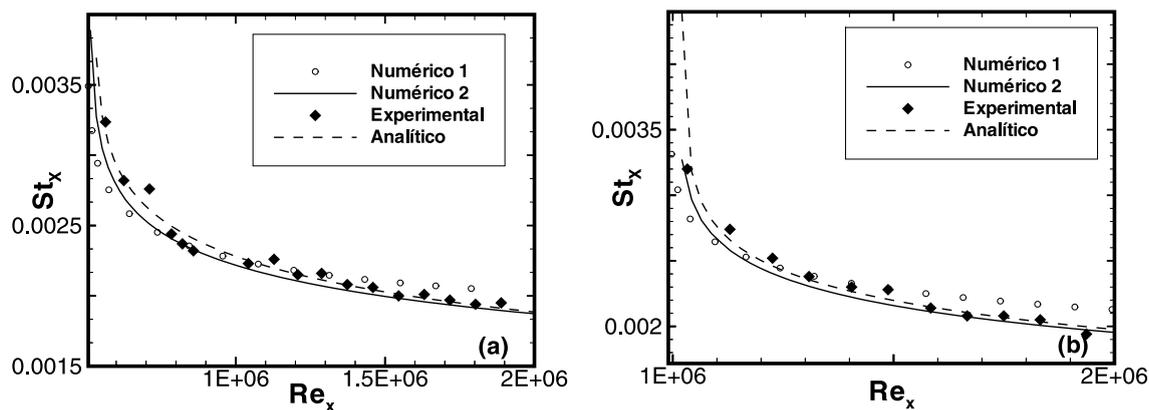


Figura 5.29: Variação do Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 1 - $u_\infty=19,5\text{m/s}$, $\xi = 0,415\text{m}$, (b) Caso teste 2 - $u_\infty=21,9\text{m/s}$, $\xi = 0,724\text{m}$

5.5.7 Efeito da defasagem entre as camadas limites de velocidade e de temperatura

Para quantificar o efeito da defasagem entre os pontos iniciais das camadas limite de velocidade e temperatura no fluxo de calor que se estabelece entre parede e escoamento, são calculados, para cada caso teste, a relação entre número de Stanton local da placa parcialmente aquecida e o número de Stanton local correspondente a mesma posição na placa isotérmica, definida por $\xi = 0\text{m}$.

A equação (3.97) define esta relação como

$$\frac{St_x}{St_T} = \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{0,9} \right]^{-1/9} \quad (3.97)$$

onde St_T é o numero local de Stanton para a placa isotérmica ($\xi = 0$).

A figura (5.30), apresenta resultados de números de Stanton para os casos teste 4,5 e 6, todos parametrizados pelo número de Stanton obtido pelo caso teste 3. Nestes gráficos podemos observar que os valores obtidos para todos as configurações são bons, com erros entre 1% e 4% para as comparações feitas com os valores fornecidos pelo cálculo numérico 2. Já para os valores obtidos pelo cálculo numérico 1 os erros variam entre 6,5% a 13%.

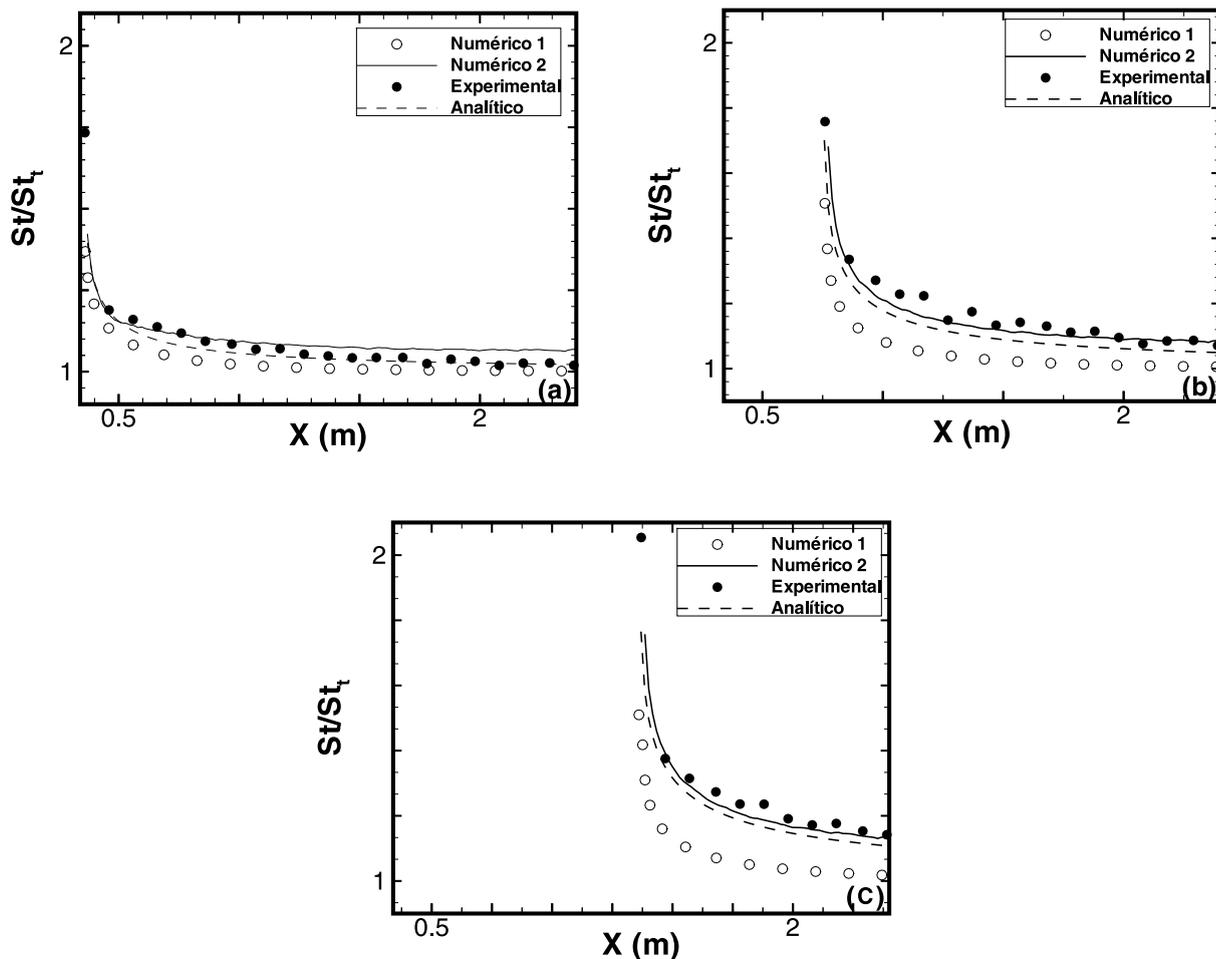


Figura 5.30: Relação entre o número de Stanton local e número de Stanton da placa isotérmica - $u_{\infty} = 28m/s$. (a) Caso teste 4 parametrizado por caso teste 3. (b) Caso teste 5 parametrizado por caso teste 3. (c) Caso teste 6 parametrizado por caso teste 3.

A figura (5.31), apresenta resultados de números de Stanton para os casos teste 8, 9 e 10, parametrizados pelo número de Stanton obtido pelo caso teste 7.

Nestes gráficos observamos resultados ainda melhores que aqueles obtidos para a simulação dos casos teste 3, 4, 5 e 6, com valores de números de Reynolds menores ($u_{\infty} = 28m/s$). Neste caso os erros entre valores experimentais e numéricos, obtidos pela simulação com o código Turbo-2D, são muito pequenos para os valores numérico 2 na figura 5.31(a). As outras condições de aquecimento apresentam erros da médios de 1% a 3% para os valores numérico 2. Nestes casos teste os valores obtidos para o cálculo numérico 1 se aproximam dos valores obtidos pelo cálculo numérico 2 e dos valores experimentais e analítico empírico. O afastamento médio entre o cálculo numérico 1 e os demais valores fica entre 2% a 6%.

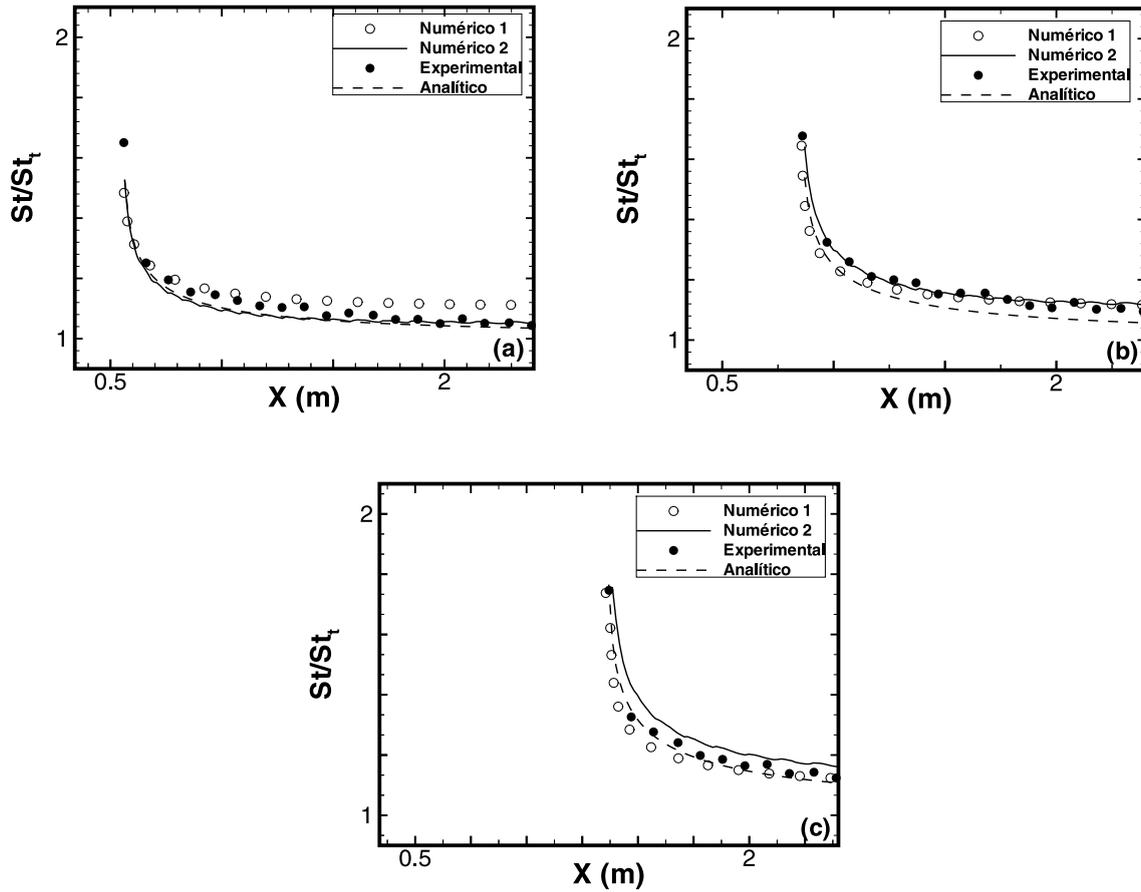


Figura 5.31: Relação entre o número de Stanton local e número de Stanton da placa isotérmica - $u_\infty = 67m/s$. (a) Caso teste 8 parametrizado por caso teste 7. (b) Caso teste 9 parametrizado por caso teste 7. (c) Caso teste 10 parametrizado por caso teste 7.

5.5.8 Fluxos turbulentos de calor e a analogia de Chilton-Colburn(1933)

O uso da analogia de Chilton-Colburn(1933), apresentada por (5.4)

$$St_x = \frac{Cf_x}{2Pr^{2/5}} \left(\frac{\delta}{\delta_t} \right)^{1/7}, \quad (5.4)$$

para a determinação numérica do fluxo de calor parietal é capaz de produzir bons resultados como mostram as figuras (5.32), (5.33), (5.34) e (5.35).

Neste item é feita uma análise do coeficiente de atrito local, Cf_x , por sua importância no emprego da equação (5.4), levantando as diferenças em sua determinação empírica via equação (5.5) e sua determinação numérica feita por meio do código Turbo-2D, equação (5.12)

$$\frac{Cf_x}{2} = 0,0287Re_x^{-(1/5)}Pr^{-2/5}. \quad (5.5)$$

e

$$Cf_x = \frac{\tau_{px}}{(1/2)\rho u_\infty^2} \quad \text{com} \quad \tau_{px} = \rho U_{fx}^2, \quad (5.12)$$

onde τ_{px} e U_f , são os valores locais da tensão cisalhante na parede e da velocidade de atrito.

Nas figuras 5.32 (a), (b), (c) e (d) são comparados, ao longo do comprimento da placa plana, os resultados do coeficiente de atrito local dados pela relação empírica (5.5) e com o valor determinado numericamente pelo Turbo-2D via equação (5.12).

Observa-se uma diferença discreta entre os valores numéricos e empíricos para o coeficiente de atrito Cf_x que varia de caso para caso. Embora a diferença seja por vezes significativa, como em 5.32(d), os resultados são consistentes.

Com os valores numéricos e empíricos obtidos para o coeficiente de atrito local Cf_x é possível realizar o cálculo dos fluxos de calor ao longo da parede, para cada caso teste, por meio do número de Stanton local definido pela equação (5.4).

Os casos teste 3, 4, 5 e 6, estão apresentados na figura (5.33). Os casos 7, 8, 9 e 10 na figura(5.34) e os casos 1 e 2 na figura(5.35).

Podemos observar na figura 5.33(a), referente ao caso teste 3, $u_\infty = 28m/s$ e $\xi = 0$, os erros entre valores numéricos e experimentais são próximos de zero, enquanto os erros entre valores empíricos e os resultados da simulação com o código TURBO-2D, apresenta erros da ordem de 1%.

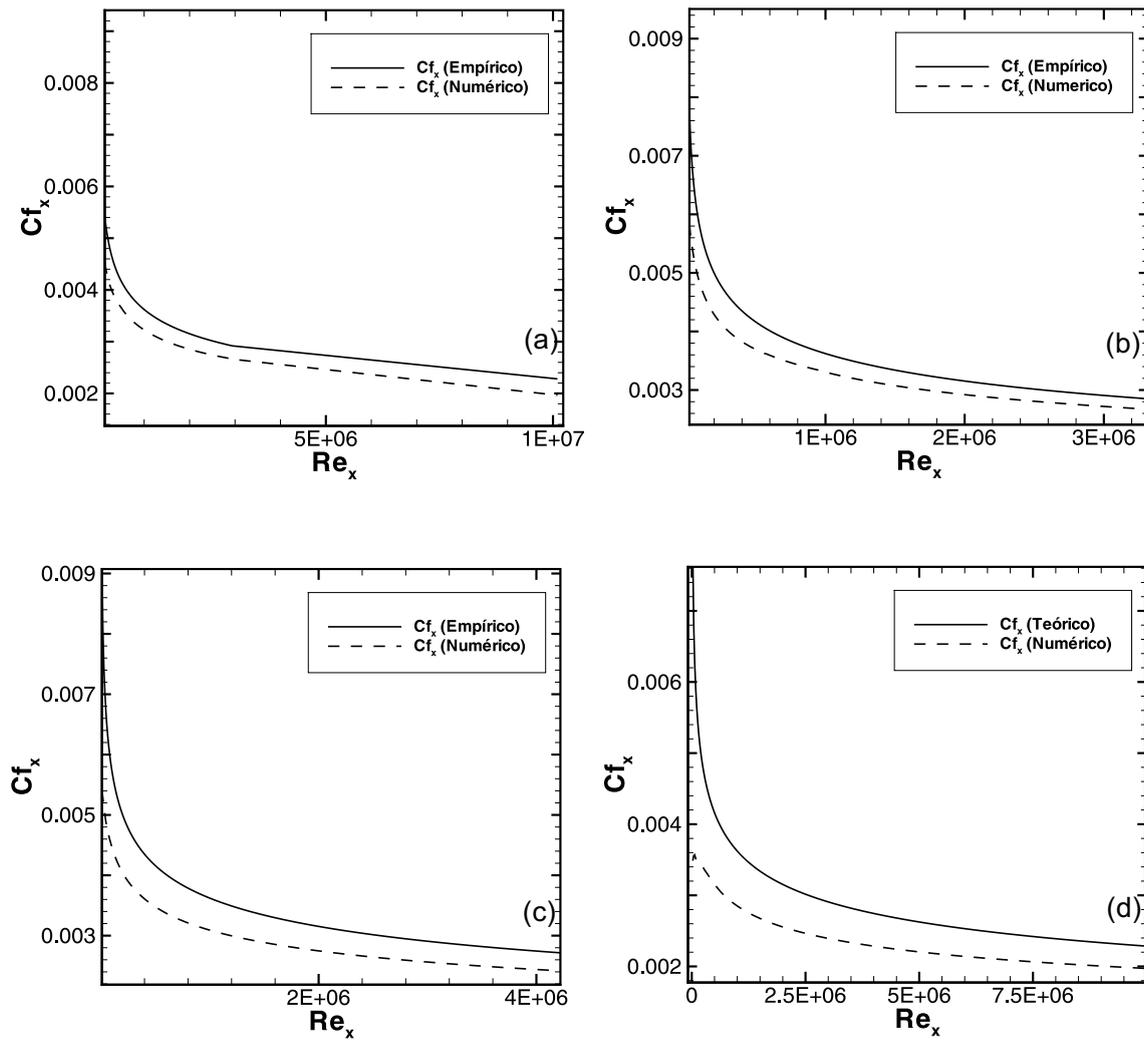


Figura 5.32: Coeficiente de atrito local em função do número Reynolds local. (a) Caso teste 1. (b) Caso teste 2. (c) Caso teste 3. (d) Caso teste 7.

Já para a figura 5.33(b), $u_\infty = 28m/s$ e $\xi = 36cm$, os erros entre resultados empíricos, experimentais e numéricos são menores que 1,5%. Esses resultados são importantes para a verificação da validade do método de cálculo do coeficiente de transferência de calor através da utilização da saída de velocidade de atrito do código TURBO-2D.

A terceira e a quarta configuração, correspondente aos casos teste 5 e 6, figuras 5.33(c) e 5.33(d), apresentam boa aproximação entre dados experimentais e a correlação empírica, com erros desprezíveis. Já os dados numéricos obtidos apresentam um afastamento médio menor que 2% com relação aos valores experimentais e analíticos.

A figura (5.34) mostra os resultados obtidos para os casos teste 7, 8, 9 e 10. Es-

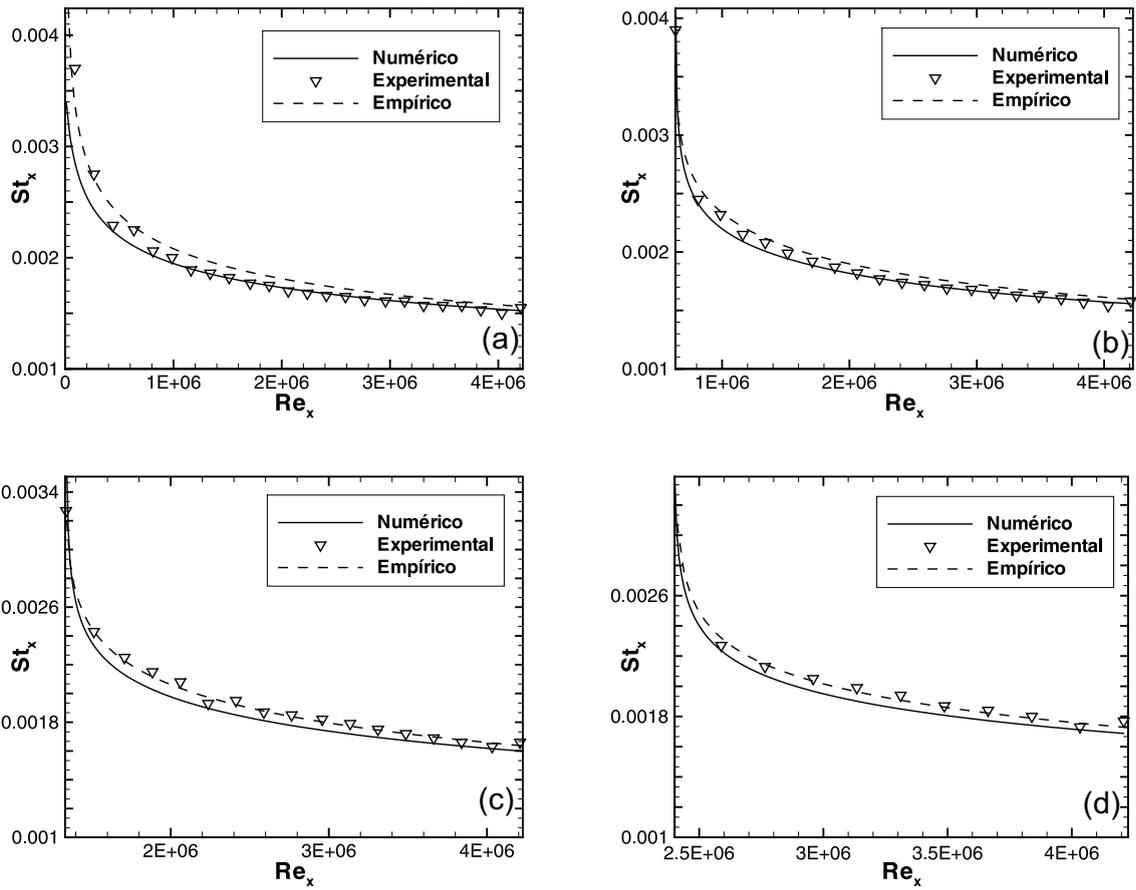


Figura 5.33: Número de Stanton local em função do número de Reynolds local - $u_\infty=28\text{m/s}$. (a) Caso teste 3. (b) Caso teste 4. (c) Caso teste 5. (d) Caso teste 6.

tes resultados, de forma diferenciada dos 4 primeiros casos teste apresentam resultados com maior discrepância entre valores numéricos, experimentais e analíticos empíricos. Para o caso teste 7, figura 5.34(a), cuja placa era aquecida uniformemente ao longo de seu comprimento, os erros entre os resultados numéricos e experimentais foram de aproximadamente 3%, enquanto os erros entre os resultados numéricos e empíricos são de aproximadamente 4,5%. Já para os casos 8, 9 e 10, figuras 5.34(b), (c) e (d) respectivamente, as variações entre dados experimentais e valores calculados numericamente variam entre 7% e 15%. Nesses mesmo casos os erros entre valores empíricos e numéricos oscilam entre de 5% e 12%.

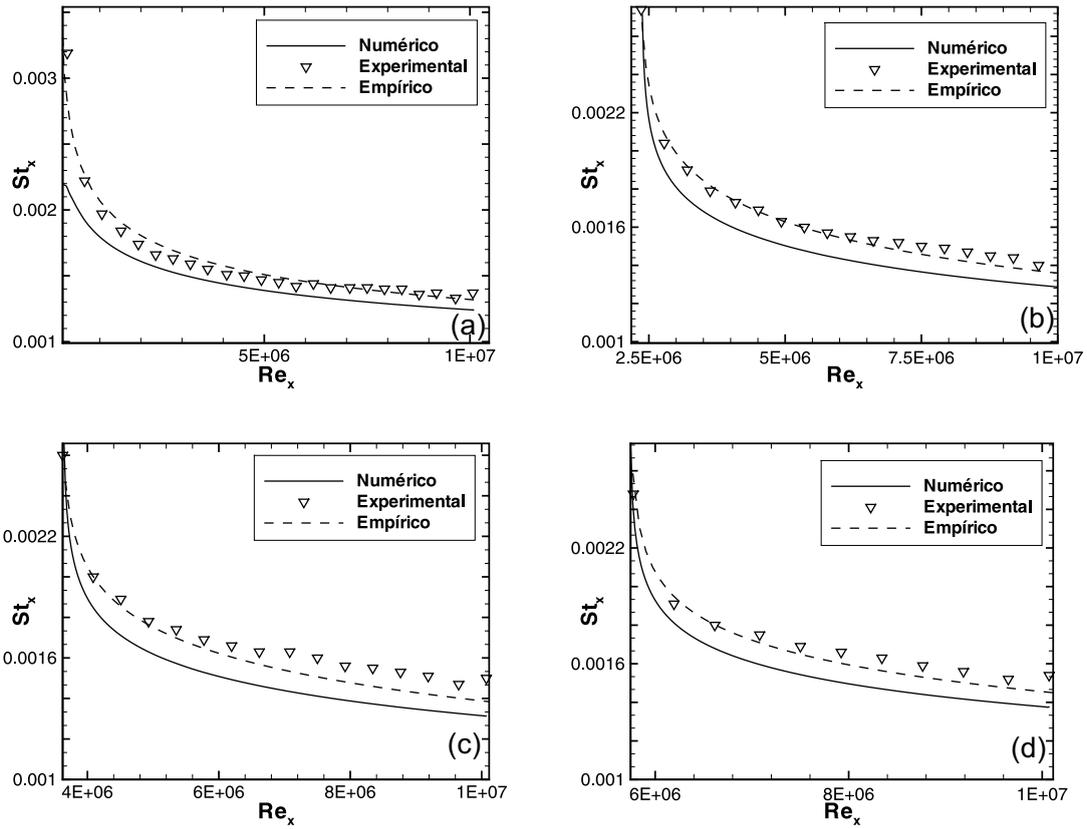


Figura 5.34: Número de Stanton local em função do número de Reynolds local - $u_\infty=67\text{m/s}$. (a) Caso teste 7. (b) Caso teste 8. (c) Caso teste 9. (d) Caso teste 10.

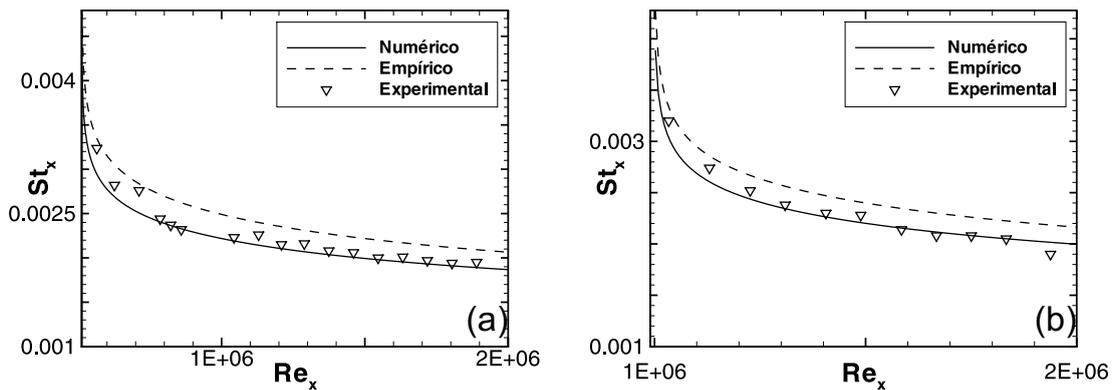


Figura 5.35: Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 1. (b) Caso teste 2.

A figura (5.35) apresenta resultados obtidos para os casos teste 1 e 2, revelando boa aproximação entre os dados experimentais e numéricos, com erros médios entre 2% e 3%. Os valores obtidos pela correlação empírica apresenta um afastamento da ordem de 5% dos valores numéricos e também dos dados experimentais.

5.6 Resultados qualitativos

5.6.1 Campos de Velocidade e Temperatura

Nessa seção são apresentados os campos de velocidade e temperatura, modelados numericamente para os escoamentos simulados com velocidade $u_\infty = 28\text{m/s}$.

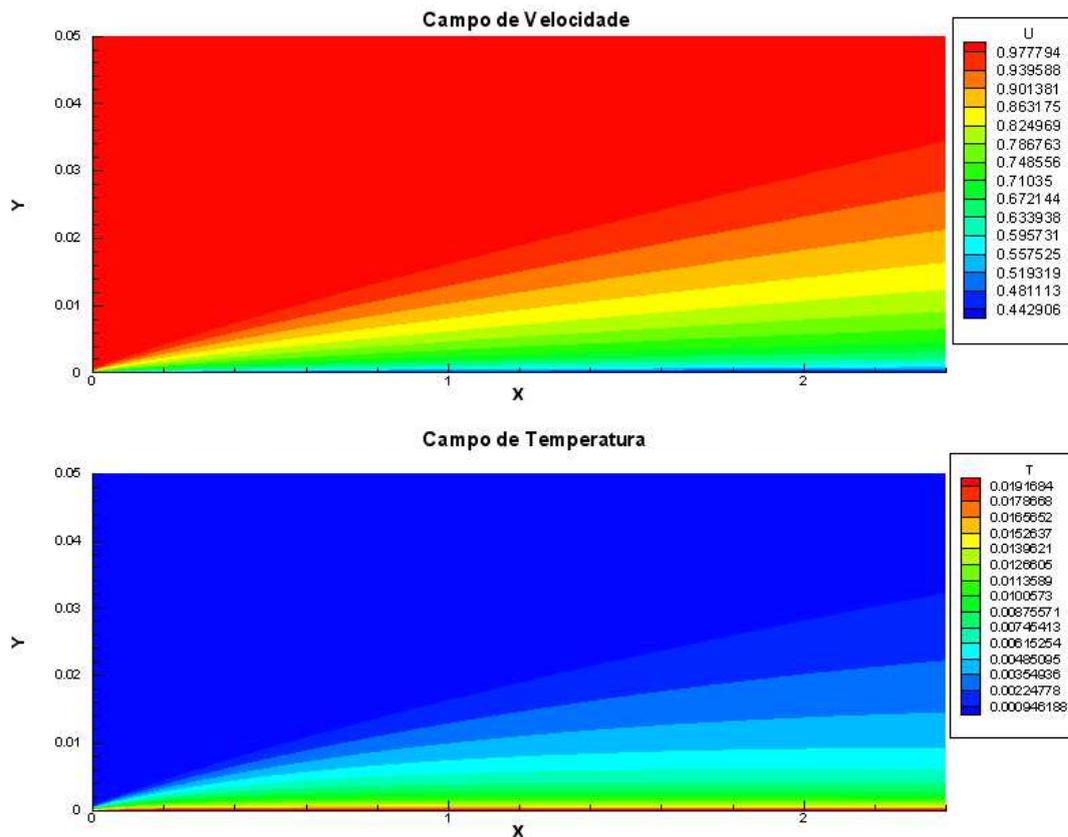


Figura 5.36: Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 3- $u_\infty=28\text{m/s}$ e $\xi = 0\text{m}$.

Estes resultados, puramente qualitativos, permitem uma observação global do comportamento do escoamento e do desenvolvimento das camadas limite de velocidade e de temperatura.

A figura (5.36) apresenta os campos de velocidade e temperatura para o caso teste 3. Observa-se na figura (5.36) o desenvolvimento, a partir da origem, da camada

limite de temperatura e o gradiente de temperatura muito intenso em todo o contorno sólido do domínio.

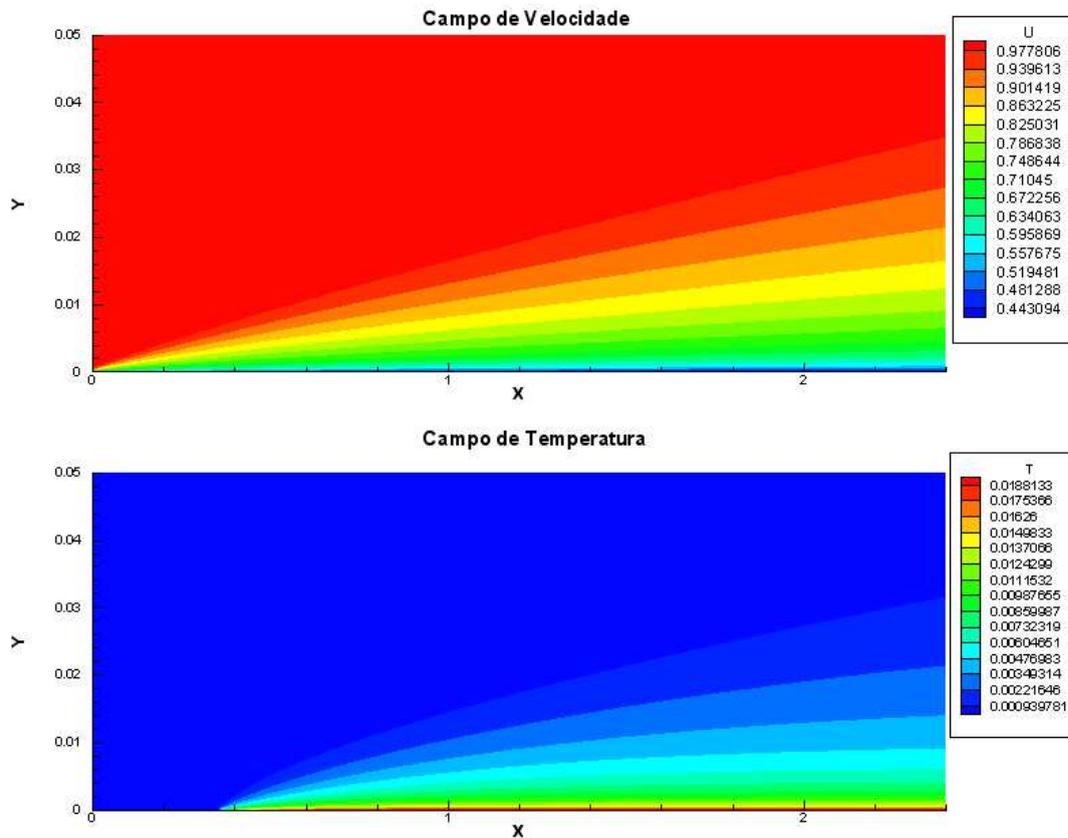


Figura 5.37: Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 4- $u_{\infty}=28\text{m/s}$ e $\xi = 0,36\text{m}$.

A figura (5.37) apresenta os campos de velocidade e temperatura para o caso teste 4. Observa-se através da comparação entre o campo de temperatura e o campo de velocidade, apresentados na figura (5.37), a defasagem entre o início das camada limites fluidodinâmica e térmica. Neste caso o valor da defasagem é de, $\xi = 0,36\text{m}$.

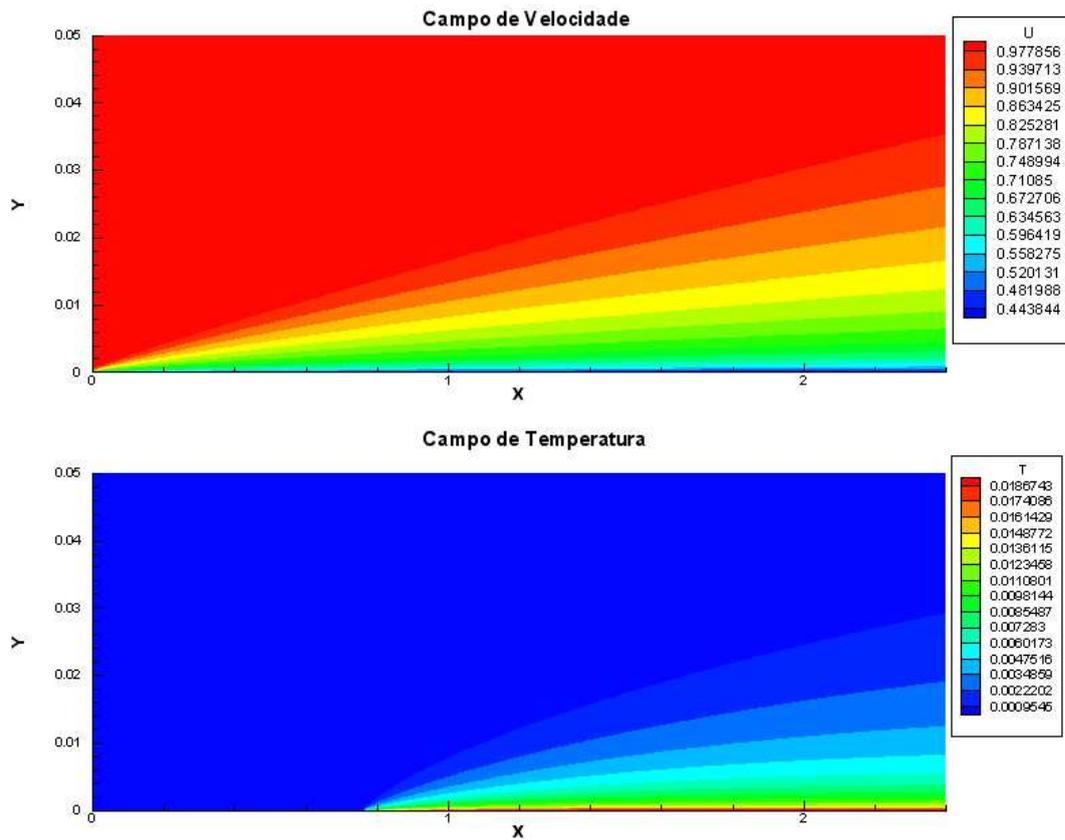


Figura 5.38: Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 5- $u_{\infty}=28\text{m/s}$ e $\xi = 0,76\text{m}$.

A figura (5.38) apresenta os campos de velocidade e temperatura para o caso teste 5. A defasagem entre o início das camadas limites fluidodinâmica e térmica é nítida. Neste caso o valor da defasagem é de, $\xi = 0,76\text{m}$.

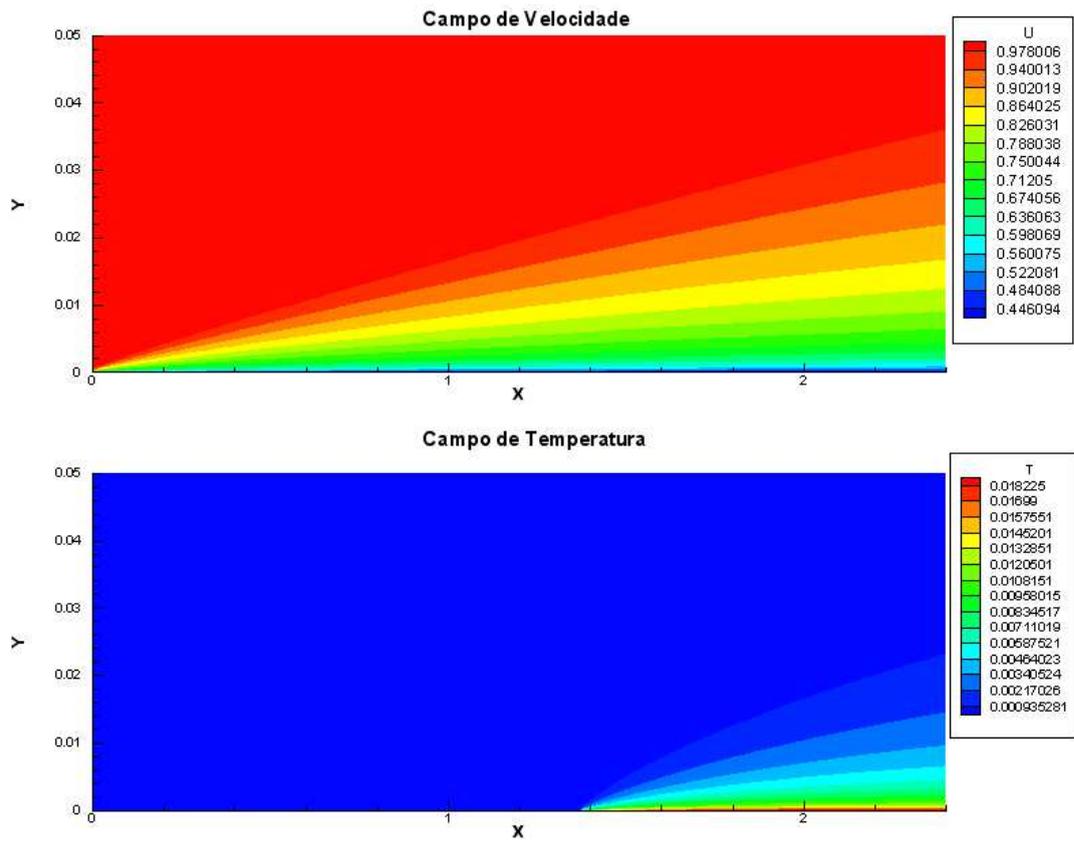


Figura 5.39: Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 6- $u_{\infty}=28\text{m/s}$ e $\xi = 1,36\text{m}$.

A figura (5.39) apresenta os campos de velocidade e temperatura para o caso teste 6. A defasagem entre o início das camadas limites fluidodinâmica e térmica é de $\xi = 1,36\text{m}$.

Capítulo 6 Conclusões

Neste trabalho foi realizada a simulação numérica de fluxos convectivos de calor que se estabelecem sobre superfícies parietais parcialmente aquecidas. Foram considerados escoamentos forçados de ar desenvolvidos na direção tangencial à superfície de contorno. As pequenas variações de temperatura existentes entre a superfície aquecida e o escoamento externo resultam, neste caso, no desacoplamento entre os campos de velocidade e temperatura e também na linearização da equação de conservação da energia.

Nessa situação é possível considerar que as propriedades termodinâmicas do fluido, em particular a massa específica ρ , viscosidade dinâmica ν , condutividade térmica k e calor específico a pressão constante c_p , não variam de forma significativa com os gradientes de temperatura e pressão.

A resolução numérica do problema foi feita com o código computacional TURBO-2D, desenvolvido no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília. Este código discretizava o sistema de equações no tempo através de um método de diferenças finitas de primeira ordem. O tratamento espacial era feito por meio do método dos elementos finitos, MEF.

Neste trabalho foi possível verificar a importância da utilização das ferramentas corretas associadas a formulação adequada ao problema.

A observação e análise dos resultados numéricos gerados pela metodologia apresentada nos capítulos 2, 3 e 4 e implementada computacionalmente pelo código Turbo-2D, permitem as conclusões que se seguem.

1. O estudo de malha foi efetivo pois os resultados gerados pela malha 1, apesar de serem de boa qualidade, foram melhorados pela malha 2. Os resultados obtidos com a malha 2 mostraram ótima concordância com a base de comparação experimental e analítica;

2. Os resultados relativos a validação da lei de parede de temperatura de Cruz e Silva Freire(1998), apresentados pelas figuras 5.11(a), (b), (c), (d), (e) e (f) e pelos resultados apresentados no anexo 1, garantem a validação da implementação feita no Turbo-2D para escoamentos de camada limite sobre placa plana;
3. O cálculo do fluxo de calor adimensional via número de Stanton local, definido pela relação (5.4), exige estudo cuidadoso sobre as espessuras das camadas limites de velocidade δ e de temperatura δ_t , que apresentam resultados variáveis na medida em que se varia o comprimento de defasagem ξ . Neste estudo foi possível verificar que a variação do modo usual de representação de δ e δ_t é capaz de influenciar os resultados do fluxo turbulento de calor;
4. Considerando que o objetivo principal deste trabalho é a simulação numérica de fluxos de calor que se desenvolvem entre parede e escoamento turbulento, os resultados mais importantes são aqueles relativos ao número de Stanton local e número de Reynolds local ao longo do domínio dos 10 casos teste. Para a determinação numérica do número de Stanton local foram utilizadas três relações distintas. Inicialmente foi empregada a relação (5.9), válida para escoamentos turbulentos cujas propriedades termodinâmicas não variam com a temperatura e também com a relação (5.4) que representa a analogia entre difusão de quantidade de movimento e de calor de Chilton-Colburn(1933). Nesta última relação o coeficiente de atrito local Cf_x foi calculado por meio da correlação empírica (5.5) e posteriormente calculada por meio da definição clássica do coeficiente de atrito local, equação(5.12).

Os resultados obtidos com a relação (5.4), na qual foi utilizada a correlação (5.5) para o cálculo do coeficiente de atrito local, são bons e as diferenças observadas entre valores numéricos, experimentais e analíticos tem a mesma ordem de grandeza que a incerteza experimental, fixada em torno de 3%.

Os resultados obtidos com a relação (5.4), cujo coeficiente de atrito é calculado numericamente através da definição (5.12), apresentam erros da ordem de 10%. Por fim, os resultados calculados por meio da definição clássica, relação (5.9), obtiveram erros entre valores numéricos, experimentais e analíticos, da ordem de 6%, sendo menos precisos que aqueles obtido pelo emprego da primeira técnica, porém, ainda assim caracterizando bons resultados obtidos pela simulação numérica do fluxo turbulento de calor;

A reunião de todos os resultados obtidos permitem concluir que a metodologia adotada para a modelagem numérica da realidade física analisada foi eficiente e abre caminho

para a sua aplicação em escoamentos turbulentos mais complexos onde os gradientes de temperatura e/ou pressão sejam capazes de produzir variações sensíveis de propriedades termodinâmicas do fluido em escoamento.

Referências Bibliográficas

- [1] Arpaci, V. & Larsen, P.S., 1984, "*Convection Heat Transfer*", Prentice-Hall.
- [2] Batchelor, G.K, 1967, "*An Introduction to Fluid Dynamics*", Cambridge University Press.
- [3] Bejan, A., 1984, "*Convection Heat Transfer*", Wiley-Interscience.
- [4] Bejan, A., 1996, "*Transferência de calor*", Edgard Blücher.
- [5] Boussinesq, J., 1877, "*Théorie de l'Écoulement Tourbillant*". Mem. Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr., vol. 23, pp. 46-50.
- [6] Brezzi, F., 1974 "*On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian*" RAIRO Anal. Numer.
- [7] Brison, J. F., Bufat, M., Jeandel, D., Serres, E., 1985, "*Finite element simulation of turbulent flows, using a two-equation model*", Numerical Methods in Laminar and turbulent Flows, Pineridge Press, Swansea.
- [8] Brun, G., 1988, "*Developpement et application d'une methode d'elements finis pour le calcul des ecoulements turbulents fortement chauffes*", These Docteur, Ecole Centrale de Lyon.
- [9] Buffat, M. 1981. "*Formulation moindres carrés adaptées au traitement des effets convectifs dans les équations de Navier-Stokes*", PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon,
- [10] Burmeister, L.C., 1982, "*Convective Heat Transfer*", Wiley-Interscience. France.
- [11] Cheng, R.K. & Ng, T.T., 1982. "*Some aspects of strongly heated turbulent boundary layer flow*". Physics of Fluids, vol. 25(8).
- [12] Colburn, A.P., 1933, "*A Method of Correlating Forced Convection Heat Transfer Data and a Comparison with Fluid Friction*", American Institute of Chemical Engineers.

- [13] Cruz D.O.A. & A.P. Silva Freire. 2002, "*Note on a thermal law of the wall for separating and recirculating flows*". International Journal of heat and Mass transfer. Vol. 45 , pp. 1459-1465.
- [14] Cruz D.O.A. & A.P. Silva Freire. 1998, "*On single limits and the asymptotic behaviour of separating turbulent boundary layers*". International Journal of heat and Mass transfer. Vol. 41 , no. 14, pp. 2097-2111.
- [15] Drake, D.G.A, & Riley, D.S.A., 1974, "*Heat transfer from an isothermal flat plate with an unheated starting length*", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), Springer.
- [16] Favre, A., 1965. "*Equations de gaz turbulents compressibles*", Journal de mecanique, vol. 3 e vol. 4.
- [17] Fontoura Rodrigues, J.L.A., 1991. "*Um método de mínimo resíduo adaptado ao cálculo de condições de contorno não-lineares no escoamento turbulento bidimensional*", XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp 465-468.
- [18] Fulachier, L., 1972. "*Contribution à l'étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulente. Effet de l'aspiration*", These d'état, Université de Provence.
- [19] Guven I., Chan C.L., Madenci E., *Transient Two-Dimensional Thermal Analysis of Electronic Packages by the Boundary Element Method*, IEEE TRANSACTIONS ON ADVANCED PACKAGING, Vol. 22, N°. 03, Aug 1999, pp 476-486.
- [20] Huges, T.J.R. & Brooks, A, 1979. "*A multi dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. Finite element methods for convection dominated flows*". ASMEAMD, vol. 34.
- [21] Jones, W.P. & Launder B.E., 1972. "*The prediction of laminarisation with a two-equation model of turbulence*". Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15, pp. 301-314.
- [22] Kays, W.M. & Crawford, M.E., 1980, "*Convective Heat and Mass Transfer*", McGraw-Hill.
- [23] Kehoe E., Davies M. and Newport D., 2003, *Mixed Convection Cooling of Horizontally Mounted Printed Circuit Board*, IEEE TRANSACTIONS ON COMPONENTS AND PACKAGING TECHNOLOGIES, VOL. 26, NO. 1, pp 126-133.

- [24] Kelly, D.W., Nakazawa, S., & Zienkiewicz, S., 1980. "A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems". International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 15.
- [25] Kim S.Y., Paek J.W. and Kang B.H., 2003, *Thermal Performance of Aluminum-Foam Heat Sinks by Forced Air Cooling*, IEEE TRANSACTIONS ON COMPONENTS AND PACKAGING TECHNOLOGIES, VOL. 26, N°. 1, pp 262-267.
- [26] Kolmogorov, A.N, 1942, "Equations of turbulent motion of an incompressible fluid", Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.
- [27] Launder, B.E., Spalding, D.B., 1974. "The numerical computation of turbulent flows", Computational Methods Applied to Mechanical Engineering, vol. 3, pp. 269- 289.
- [28] Pohlhausen, K., 1921, "Zur Naherungsweise Integration der Differential Gleichung der Laminaeren Reibungsschicht", Zeitschrift fur angewandte Mathematic und Mechanic.
- [29] Reynolds, O., 1895. "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion". Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. A186, p. 123-164.
- [30] Reynolds, W.C., Kays, W.M., Kline, S.J., 1958, *Heat Transfer in the turbulent incompressible boundary layer*, NASA memo, 12-1-58W.
- [31] Reynolds, W.C., Kays, W.M., Kline, S.J., 1958, *Heat Transfer in the turbulent incompressible boundary layer*, NASA memo, 12-2-58W.
- [32] Scesa, Steve & Sauer, F.M., 1951, "Exeprimental investigation of heat transfer to air from a flat plate with a step-wise discontinuos surface temperature", Trans ASME, vol 74.
- [33] Schultz-Grunow, F., 1941, *New frictional resistence law for smooth plates*, Naca TM 986.
- [34] Sparrow, E.M. & Yu, H.S., 1971, "Local non-similarity thermal boundary-layer solutions", Journal of Heat Transfer. Vol. 93, pp. 328-334. Nov. 1971.
- [35] Stratford, B.S., 1959, "The prediction of separation of turbulent boundary layer". Journal of fluid mechanics, vol. 5.

- [36] Taylor, R.P., Love, P.H., Coleman, H.W. & Hosni, M.H., 1991. "*Heat transfer measurements in incompressible turbulent flat plate boundary layers with step wall temperature boundary conditions*". Journal of Heat Transfer, vol 112.
- [37] Von Kármán, T., 1939, "*The analogy between fluid friction and heat transfer*", ASME Trans., vol. 61.
- [38] Wang H. Y. and Saulnier J. B., *A sensitivity study of material properties for coupled convective-conductive heat transfer generated in an electronic equipment*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 36, 1993, pp 3831-3839.

ANEXOS

Anexo 1

Gráficos comparativos para leis de parede

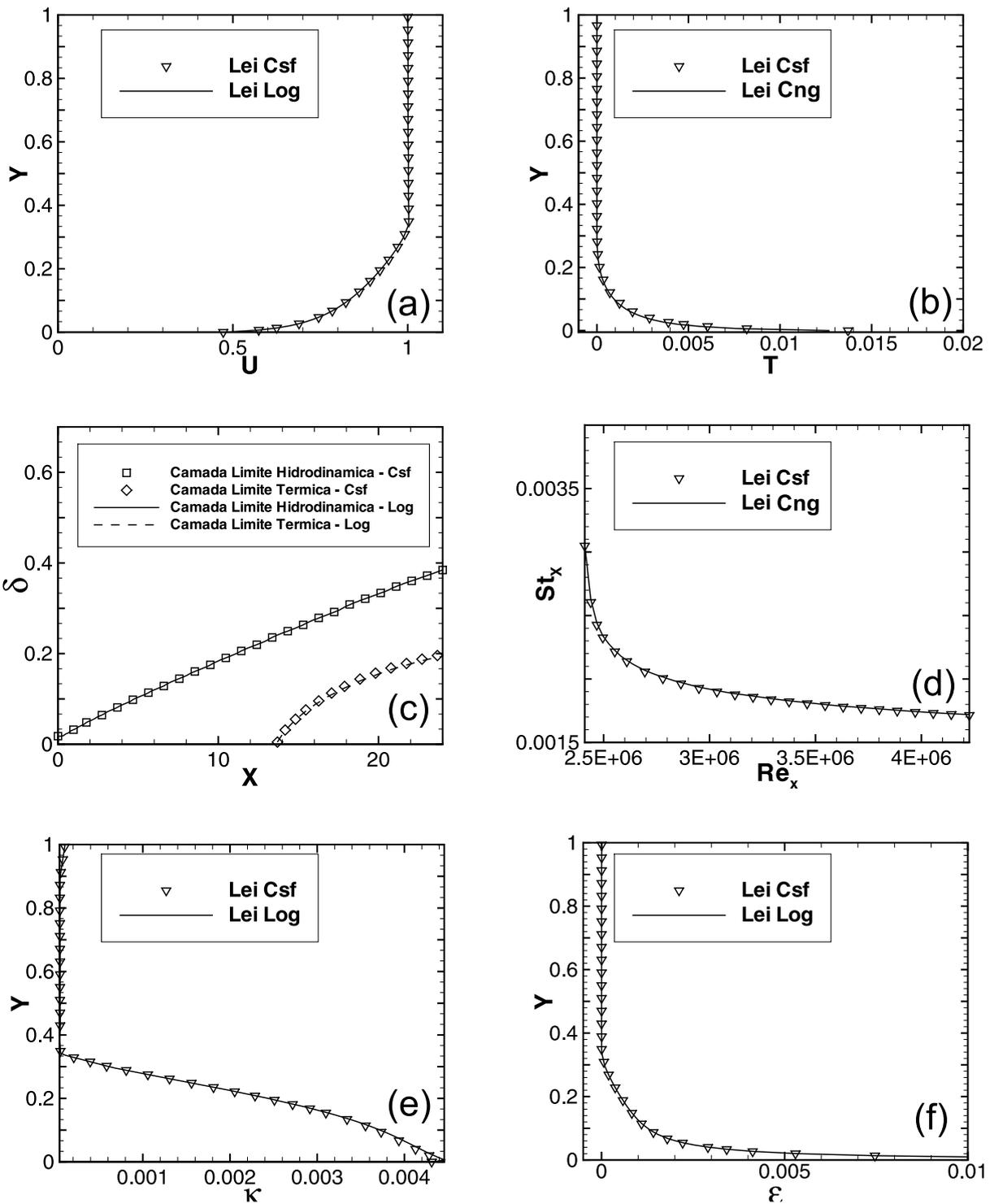


Figura 6.1: Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 6. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8m$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8m$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8m$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8m$.

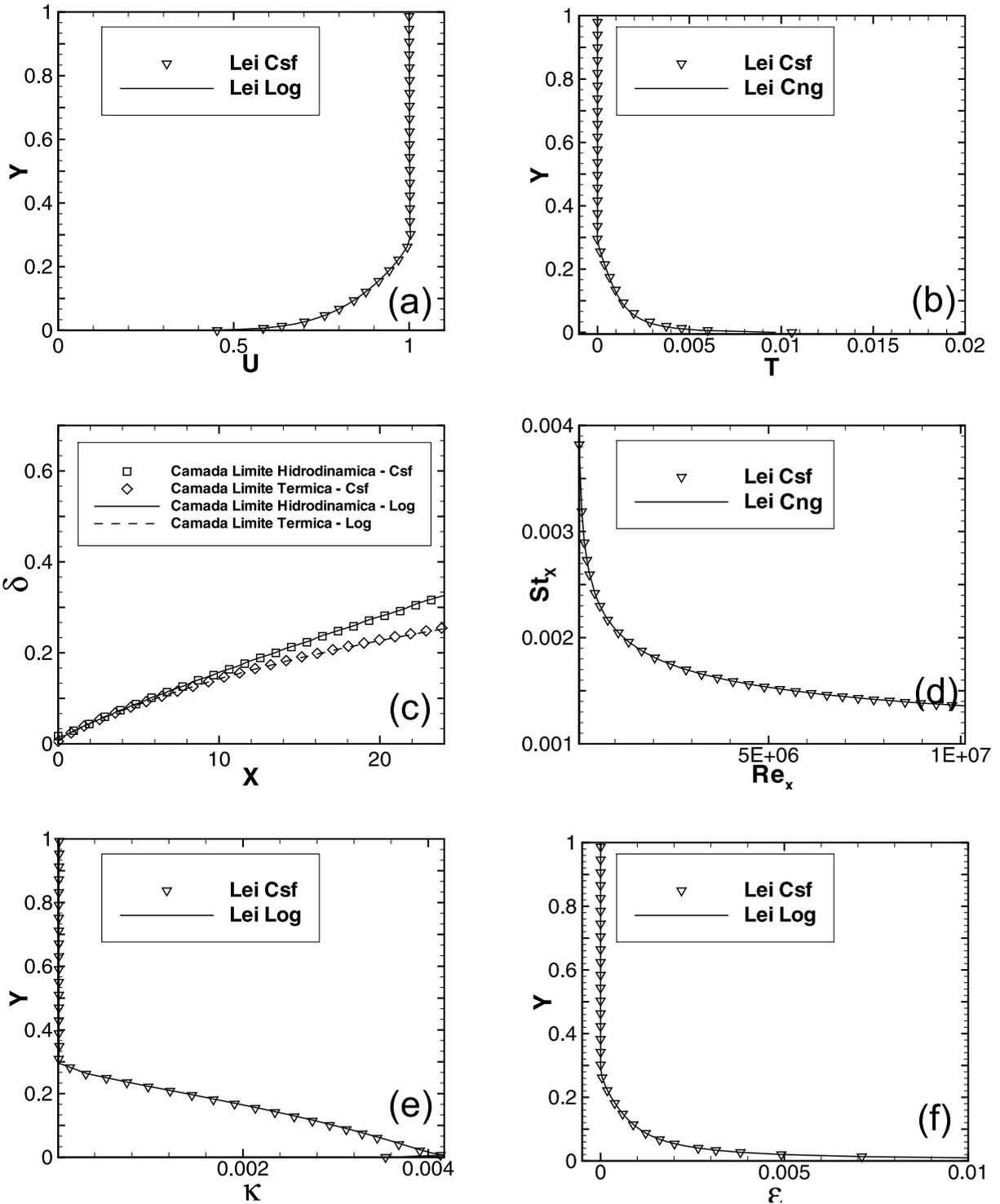


Figura 6.2: Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 7. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8m$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8m$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8m$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8m$.

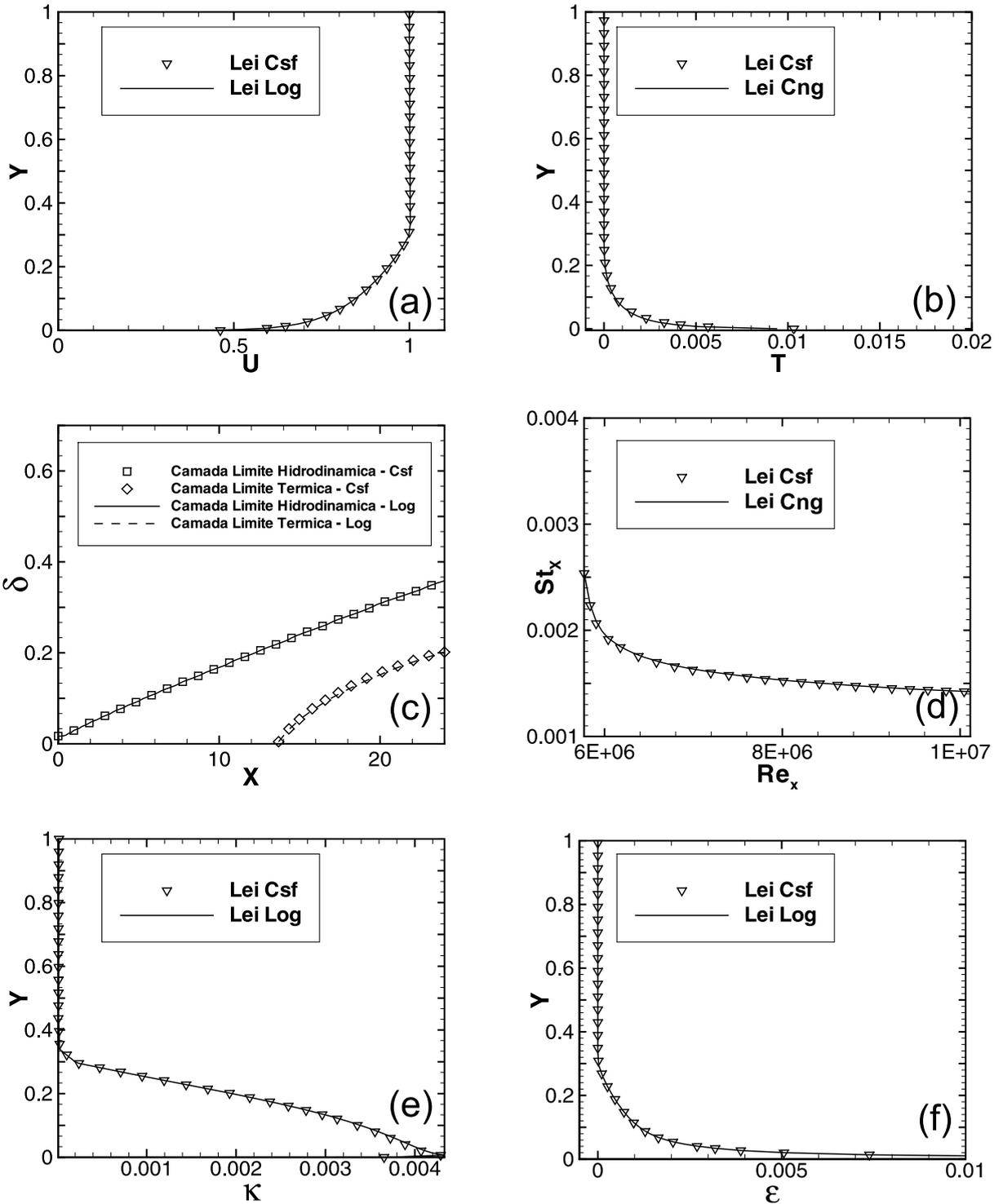


Figura 6.3: Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 10. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8m$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8m$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8m$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8m$.