Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Classe de Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares em $\mathbb{R}^N$

por

Wesley de Freitas Mendes

Brasília

2016

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Uma Classe de Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares em $\mathbb{R}^N$

por

Wesley de Freitas Mendes *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 01 de março de 2016

Comissão Examinadora:

Ricardo Ruviaro
Prof. Dr. Ricardo Ruviaro - UnB - Orientador

Edcarlos Domingos da Silva.
Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - UFG - Examinador

JG Mesquita
Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita - UnB - Examinadora

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mendes, Wesley de Freitas
MM538c Uma Classe de Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares em R^N. / Wesley de Freitas Mendes; orientador Ricardo Ruviaro. -- Brasília, 2016.
77 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

1. Método variacional. 2. Passo da Montanha. 3. Problema elíptico. 4. Condição de Cerami. 5. Problema semilinear. I. Ruviaro, Ricardo, orient. II. Título.

O argumento mais convincente para explicar por que a cultura matemática dá tanta importância à prova de uma assertiva é o fato de que, ao contrário das outras ciências, temos o privilégio de poder fazê-lo. (A Música dos Números Primos)

Dedicatória

Aos meus pais
José Carlos e Marli Maria

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me permitiu estar aqui e realizar meu sonho de conhecer esse mundo da Matemática. Por me mostrar como ser mais calmo e por revelar sua presença em minha vida. Agradeço por essa grande conquista.

Ao meu pai, José Carlos, por sempre estar presente em minha educação, pelos conselhos valiosos e pelo exemplo de homem que quero ser um dia. À minha mãe, Marli Maria, pelo amor incondicional e pelo carinho. À minha avó, Zelma, que para mim é sinônimo de amor. Agradeço pela paciência e pela confiança que depositaram em mim. Agradeço aos meus irmãos William, Wendel e Bárbara por iluminarem minha vida.

À minha namorada, Milene Soares, por estar sempre ao meu lado me motivando com um belo sorriso, por ser paciente e me aguentar falar de Matemática o tempo todo.

Aos meus melhores amigos, José Maria e Rony Lins, que fizeram de minha vida uma festa. À minha colega Mayra Soares, que esteve comigo desde o início do Mestrado me animando com seu jeito único de ser. Agradeço aos demais colegas de curso que fizeram parte dessa jornada, a eles meu sincero obrigado.

Aos professores do Departamento, agradeço pelos conhecimentos transmitidos e pelo tempo disponibilizado. Em especial agradeço à professora Liliane de Almeida, ao professor Mauro Rabelo e à professora Cátia Regina. Agradeço também à professora Jaqueline Godoy e ao professor Edcarlos Domingos por formarem minha banca examinadora.

Ao meu orientador Ricardo Ruviaro, agradeço pelos ensinamentos valiosos e por me colocar no caminho certo sempre que me desviava. Serei eternamente grato por ter me acolhido como orientando. Agradeço por ser esse exemplo de profissional dedicado e mais do que um orientador sinto que ganhei um amigo.

Agradeço à *CNPq* pelo apoio financeiro à este trabalho.

Resumo

Buscaremos neste trabalho estabelecer a existência de solução positiva para o problema semilinear

$$(P_\lambda) \qquad -\Delta u + \lambda u = f(x,u)u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro e $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz algumas hipóteses específicas. Para isso, usamos a técnica variacional e nossa principal ferramenta será o Teorema do Passo da Montanha com condição de Cerami. Estabeleceremos também resultados de multiplicidade para o problema (P_λ) com uma condição extra de simetria na não linearidade.

Palavras-Chave: Problema Semilinear; Solução Positiva; Passo da Montanha; Condição de Cerami; Técnica Variacional; Resultados de Multiplicidade.

Abstract

We seek in this work to establish the existence of positive solutions for the semilinear problem

$$(P_\lambda) \qquad -\Delta u + \lambda u = f(x,u)u, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

where $\lambda > 0$ is a parameter and $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfies some specifics hypotheses. For this, we use the variational technique and our main tool will be the Mountain-Pass Theorem with Cerami condition. We establish, as well, multiplicity results for the problem (P_λ) with an extra symmetry condition on the nonlinearity.

Key-Words: Semilinear Problem; Positive Solution; Mountain-Pass; Cerami Condition; Variational Technique; Multiplicity Results.

Notações

Ao longo deste trabalho, vamos utilizar as seguintes notações:

$B_R, B_R(0)$,	bola aberta centrada em zero e com raio R.
$B_R(y), B_R + y$,	bola centrada em y e com raio R.
$p^* = \dfrac{Np}{N-p}$,	expoente crítico de Sobolev.
$(PS)_c$,	condição de Palais-Smale no nível c.
$(Ce)_c$,	condição de Cerami no nível c.
$u_n \to u$,	convergência forte (em norma).
$u_n \rightharpoonup u$,	convergência fraca.
$suppf$,	suporte da função f.
$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$,	produto interno.
C, C_i,	denotam constantes positivas.
$o(1)$,	ordem pequena.
$\mathbb{R}^+$,	conjunto dos números reais não negativos.
$D(A)$,	domínio do operador A.
$\sigma(A)$,	espectro do operador A.
$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$,	delta de Kronecker.

$X^{\perp}$,	complemento ortogonal a X.
$\sigma_{ess}(A)$,	espectro essencial do operador A.
$\hookrightarrow$,	imersão de um espaço em outro.
$C(X,Y)$,	espaço das aplicações contínuas de X em Y.
$C^1(X,Y)$,	espaço dos funcionais continuamente diferenciáveis de X em Y.
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ou u_{x_i},	derivada parcial de u em relação a x_i.
$\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \eta.\nabla u$,	derivada normal exterior.
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$,	Laplaciano de u.
$\nabla u = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\Big)$,	gradiente de u.
$X^* = \Big\{f : X \to \mathbb{R} \;\Big|\; f \text{ é limitada}\Big\}$,	espaço dual de X.
$\|u\|_p = \Big[\displaystyle\int_{\Omega} \|u\|^p \, dx\Big]^{1/p}$,	norma do espaço $L^p(\Omega)$.
$\|u\|_\lambda = \Big[\displaystyle\int \Big(\|\nabla u\|^2 + \lambda u^2\Big)\, dx\Big]^{1/2}$,	norma de $H^1(\mathbb{R}^N)$.
$\|u\|_\infty = \inf\Big\{C > 0 \;\Big|\; \|f(x)\| \leq C \text{ em quase todo ponto}\Big\}$,	norma do espaço $L^\infty(\Omega)$.
$H^k(\Omega)$,	espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$,	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{H^1}$.
$D^{1,2}(\Omega)$,	completamento de $C_0^\infty(\Omega)$.

$$L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável} \;\Big|\; \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty\Big\}.$$

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável} \;\Big|\; |f(x)| \leq C \text{ em quase todo ponto}\Big\}.$$

$$L^p_{loc}(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável} \;\Big|\; u|_K \in L^p(\Omega), \forall\, K \subset\subset \Omega \text{ compacto}\Big\}.$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega) \;\Big|\; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, \alpha \text{ multi índice, tal que } |\alpha| \leq k\Big\}.$$

Sumário

Introdução

Estudaremos neste trabalho a questão da existência de solução positiva devido a Costa e Tehrani [6], bem como resultados de multiplicidade do problema semilinear:

$$(P_\lambda) \qquad -\Delta u + \lambda u = f(x,u)u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro e $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz as seguintes condições (condições precisas serão indicadas no Capítulo 2):

$$\lim_{s\to 0} f(x,s) = 0, \quad \text{uniformemente em } \ x, \tag{1}$$

$f(x,s)$ é uma função não decrescente de $s \in [0,\infty)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, e existem funções $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ e $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ com:

$$\lim_{s\to\infty} f(x,s) = g(x), \quad \lim_{|x|\to\infty} f(x,s) = h(s) \quad \text{e} \quad \lim_{|x|\to\infty,\, s\to\infty} f(x,s) = l_\infty \in (0,\infty). \tag{2}$$

Nessas condições, (P_λ) é um problema assintoticamente linear. Quando essa equação é considerada em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (com, digamos, a condição de fronteira de Dirichlet), existe uma extensa literatura que aborda existência de solução, bem como resultados de multiplicidade. De particular interesse é então o caso ressonante, onde $-\lambda \in \sigma(S)$ e S é a linearização assintótica do problema. Em outras palavras, $S : D(S) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é o operador dado por:

$$Su(x) = -\Delta u(x) - g(x)u(x) \qquad \text{e} \qquad D(S) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{3}$$

Nesse caso, a questão de existência de soluções é mais delicada. É claro que desde que Ω é limitado, $\sigma(S)$ consiste em um conjunto enumerável de autovalores com multiplicidades finitas e, portanto, ressonância é um fenômeno raro.

Por outro lado, para o nosso conhecimento, menos se tem feito quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ no caso do problema (P_λ). Uma das dificuldades nesse caso é o fato de que o espectro do operador S inclui uma parte essencial, a saber $[-l_\infty, \infty)$, de modo que precisamos lidar com um problema ressonante muito mais complicado. A outra dificuldade em lidar com tais problemas em $\mathbb{R}^N$ é a falta de compacidade exibida pelo funcional energia correspondente, digamos, como medido pela conhecida condição de Palais-Smale. A seguir, descreveremos como este trabalho será apresentado.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos preliminares essenciais ao bom desenvolvimento dos nossos principais teoremas e lemas. No Capítulo 2, introduzimos a estrutura variacional e estudamos a condição de compacidade de Cerami. Primeiro, definiremos

$$\varLambda = \inf \left\{ \int \left[|\nabla u|^2 - g(x)u^2 \right] dx \;\middle|\; u \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \int u^2 \, dx = 1 \right\}.$$

Se (P_λ) possui uma solução então, necessariamente, devemos ter $\lambda < |\varLambda|$, de forma que assumimos $0 < \lambda < |\varLambda|$ ao longo do trabalho. Ademais, explorando os resultados para problemas lineares de autovalor em $\mathbb{R}^N$, e sistematicamente usando o método de Concentração e Compacidade de Lions, somos capazes de mostrar que a compacidade de Cerami vale para um certo intervalo de valores de energia do funcional correspondente.

No Capítulo 3, provamos nosso principal resultado de existência e estabelecemos a existência de uma solução positiva de (P_λ), para todo $0 < \lambda < |\varLambda|$. Isto é feito primeiramente achando uma candidata para um nível crítico através do Teorema do Passo da Montanha. Então, sob uma condição adicional para $f(x,s)$, um argumento de comparação com o problema no infinito é usado para mostrar que nosso nível candidato é de fato o nível onde a compacidade de Cerami vale, permitindo assim a aplicação de teoremas de pontos críticos. Vale notar que, como Λ é o menor ponto espectral de S e $\sigma_{ess}(S) = [-l_\infty, \infty)$, temos $\Lambda \leq -l_\infty$ e então, se $0 < \lambda < |\Lambda|$, pode muito bem acontecer que $-\lambda \in \sigma(S)$. Não obstante, nosso resultado de existência, que veremos no Teorema 3.1, é independente do problema ser ou não ressonante.

Finalmente, no Capítulo 4, consideramos a questão de existência de múltiplas soluções quando $f(x,s)$ é uma função par de s. Nossa principal ferramenta nessa seção é uma variante do teorema do ponto crítico abstrato para funcionais pares.

Salvo menção em contrário, todas as integrais serão tomadas sobre todo o $\mathbb{R}^N$ e C, C_i representarão constantes positivas.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de começarmos nosso trabalho principal, precisamos conhecer alguns resultados que serão úteis no decorrer do mesmo.

1.1 Operadores Lineares de Segunda Ordem

Vamos conhecer primeiramente algumas propriedades de operadores lineares de 2ª ordem, o lema de Hopf e o lema de Lions, que serão usados no decorrer do trabalho. No que segue, estamos nos baseando em Evans [8] e Adams [1].

Considere o operador linear de 2ª ordem dado pela expressão

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{1.1}$$

onde $u \in C^2(\Omega)$, os coeficientes $a^{ij}, b^i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado. Observe que como $u \in C^2(\Omega)$, então pelo Teorema de Schwarz temos $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, para todo $i, j \in 1, ..., N$. Logo, podemos supor que, para cada $x \in \Omega$, a matriz $A(x) = [a^{ij}(x)]_{N \times N}$ é simétrica.

Definição 1.1. *Dizemos que o operador definido em* (1.1) *é elíptico no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ é positiva definida, ou seja, se $\lambda(x)$ for o menor autovalor de $A(x)$, então*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi|^2 > 0$$

para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. O operador é dito elíptico em Ω se for elíptico em cada ponto de Ω. Finalmente, dizemos que L é uniformemente elíptico em Ω se existe $\theta_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \theta_0$ para todo $x \in \Omega$. Dizemos que L está na forma divergente quando

$$Lu := -\sum_{i,j}^{N} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Observe que quando L é uniformemente elíptico, vale a desigualdade

$$\xi A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_0|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

E assim tomando $\xi = e_i$, vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$e_i A(x)e_i = a^{ii}(x) \geq \theta_0|e_i|^2 = \theta_0, \quad i = 1,...,N \text{ e } x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1. *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu \geq 0$ em Ω, então $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $Lu > 0$ em Ω e que existe $\tilde{x} \in \Omega$ tal que $u(\tilde{x}) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$. Como L é uniformemente elíptico, a matriz dos coeficientes $A = A(\tilde{x})$ é positiva definida. Por A ser simétrica, existe uma matriz ortogonal $O = O_{N\times N}$, ou seja, $O^{-1} = O^T$, tal que

$$OAO^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ : & : & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & ... & \lambda_N \end{bmatrix}$$

e por L ser uniformemente elíptico, temos $\lambda_i \geq \theta_0 > 0$, $i = 1,...,N$. O termo geral da matriz acima é dado por

$$\delta_{kl}\lambda_k = \sum_{j=1}^{N} o_{kj} \sum_{i=1}^{N} a^{ij} o_{il}^T = \sum_{i,j=1}^{N} o_{kj} a^{ij} o_{li}. \tag{1.3}$$

Considerando agora a nova variável $y(x) := \tilde{x} + O(x - \tilde{x})$, note que $y(\tilde{x}) = \tilde{x}$ e

$$\begin{aligned} y - \tilde{x} &= O(x - \tilde{x}) & \Rightarrow \\ O^T(y - \tilde{x}) = O^T O(x - \tilde{x}) &= O^{-1}O(x - \tilde{x}) = x - \tilde{x} & \Rightarrow \\ \tilde{x} + O^T(y - \tilde{x}) &= x \end{aligned}$$

assim

$$u(x) = u(\tilde{x} + O^T(y - \tilde{x})) := v(y(x)).$$

Observe que $y(\tilde{x})$ é o ponto de máximo da função v, pois $\tilde{x}$ é ponto de máximo de u, e portanto

$$\nabla u(\tilde{x}) = \nabla v(y(\tilde{x})) = \nabla v(\tilde{x}) = 0 \quad \text{e} \quad D^2 v(\tilde{x}) \leq 0,$$

com a segunda inequação acima significando que a matriz Hessiana do v no ponto $\tilde{x}$ é não positiva. Se $y = (y_1, ..., y_N)$, então

$$y_k = \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^{N} o_{kj}(x_j - \tilde{x}_j) \;\Rightarrow\; \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = o_{ki}$$

para cada $k = 1, ..., N$, logo
$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N} v_{y_k} o_{ki},$$
e do mesmo modo
$$u_{x_i x_j} = \sum_{k,\, l=1}^{N} v_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj}, \tag{1.4}$$
para $i, j = 1, \cdots, N$.

Como $\nabla u(\tilde{x}) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
Lu(\tilde{x}) &= \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(\tilde{x}) u_{x_i x_j}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{N} b^i(\tilde{x}) u_{x_i}(\tilde{x}), && \text{pois } \ c \equiv 0, \ \text{ em } \ \Omega \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(\tilde{x}) u_{x_i x_j}(\tilde{x}), && \text{pois } \ \sum_{i=1}^{N} b^i(\tilde{x}) u_{x_i}(\tilde{x}) = (b.\nabla u)(\tilde{x}) = 0 \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(\tilde{x}) \sum_{k,l=1}^{N} v_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj}, && \text{por } \ (1.4) \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} v_{y_k y_l} \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(\tilde{x}) o_{ki} o_{lj} \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} v_{y_k y_l} \delta_{kl} \lambda_k, && \text{por } \ (1.3) \\
&= \sum_{k=1}^{N} v_{y_k y_k} \lambda_k.
\end{aligned}$$

Uma vez que $D^2 v(\tilde{x}) \leq 0$, temos que $e_k D^2 v(\tilde{x}) e_k \leq 0$ e isto implica que $v_{y_k y_k}(\tilde{x}) \leq 0$, para $k = 1, ..., N$. Como os números $\lambda_i{}'s$ são positivos, concluímos da expressão acima que
$$Lu(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{N} v_{y_k y_k}(\tilde{x}) \lambda_k \leq 0,$$
o que é um absurdo. Logo, se $Lu > 0$ em Ω, a função u não pode assumir seu máximo em Ω, isto é, $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.

Consideremos agora o caso geral $Lu \geq 0$. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ arbitrário, $\varepsilon > 0$ e considere
$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_1}, \qquad x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega.$$

Usando a definição de L, a equação (1.2), a regularidade dos coeficientes e $Lu \geq 0$, obtemos
$$\begin{aligned}
Lu_\varepsilon &= Lu + \varepsilon L(e^{\gamma x_1}) \\
&= Lu + \varepsilon e^{\gamma x_1}(a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma) \\
&\geq \varepsilon e^{\gamma x_1}(\theta_0 \gamma^2 - \|b^1\|_\infty \gamma).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\gamma > 0$ suficientemente grande de modo que $Lu_\varepsilon > 0$, podemos usar a primeira parte da

demonstração para concluir que
$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$
Mas $u \leq u_\varepsilon$, e portanto
$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{\gamma x_1}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$. Uma vez que a desigualdade contrária é trivialmente satisfeita, concluímos que
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

□

Teorema 1.2. *(Princípio do Máximo Fraco) Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $Lu \geq 0$ em Ω, então $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$.*

Demonstração. Seja $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$. Se Ω^+ for vazio, então $u \leq 0$ em Ω. Tome $x \in \partial\Omega$ e $(x_n) \subset \Omega$ tal que $x_n \to x$. Pela continuidade de u até a fronteira, temos que $u(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) \leq 0$, assim $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto
$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq 0 = \max_{\partial\Omega} u^+,$$
onde $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$.

Logo, podemos supor que $\Omega^+ \neq \varnothing$. Tome então $x \in \Omega^+$, logo $u(x) > 0$ e como u é contínua, então existe $r > 0$ tal que $u > 0$ em $B_r(x)$ e assim Ω^+ é aberto em Ω e, portanto, aberto em $\mathbb{R}^N$. Seja
$$Ku := Lu - c(x)u = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)u_{x_i},$$
desse modo, como $c \leq 0$ em Ω, obtemos $Ku \geq 0$, para $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$. Segue então do Teorema 1.1, aplicado ao operador K, que
$$\max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

Uma vez que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega \setminus \Omega^+}$ e $u \leq 0$ em $\overline{\Omega \setminus \Omega^+}$, segue que
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

Assim, é suficiente mostrar que
$$\max_{\partial\Omega^+} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Considere $x_0 \in \partial\Omega^+$ tal que $u(x_0) = \max_{\partial\Omega^+} u$. A continuidade de u e a definição de Ω^+ implicam que $u(x_0) \geq 0$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1) $u(x_0) = 0$:

Neste caso devemos ter $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ pois $u(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = 0$. Logo, $u^+ = 0$ em $\partial\Omega$ e portanto
$$u(x_0) = \max_{\partial\Omega^+} u = 0 = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Caso 2) $u(x_0) > 0$:

Neste caso, como Ω^+ é aberto em Ω, devemos ter $x_0 \in \partial\Omega$. De fato, se não fosse assim, teríamos $x_0 \in \Omega$ e como u é contínua, então u seria positiva em toda uma bola $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega^+$, contrariando o fato de que $x_0 \in \partial\Omega^+$. Daí

$$\max_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = u^+(x_0) \leq \max_{\partial\Omega} u^+,$$

e temos o resultado. □

Teorema 1.3. *(Princípio da Comparação). Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Se $Lu \geq 0$ em Ω e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.2, temos que

$$u(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ = 0,$$

pois $u^+ = 0$ em $\partial\Omega$, logo $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$. □

Lema 1.1. *(Lema de Hopf). Suponha que $B \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola aberta, L é um operador uniformemente elíptico em B, $u \in C^2(B)$ e $Lu \geq 0$ em B. Suponha ainda que existe $x_0 \in \partial B$ tal que u é contínua em x_0 e $u(x) < u(x_0)$, para todo $x \in B$. Então,*

i) se $c = 0$ em B e existe a derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0)$, então $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$;

ii) se $c \leq 0$ em Ω e $u(x_0) \geq 0$, então vale o mesmo resultado do item acima.

Antes de provar o lema de Hopf vale observar que se $x_0 \in \partial B$ é um ponto de máximo local e existe $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0)$, então é sempre verdade que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{u(x_0 + h\eta) - u(x_0)}{h} \geq 0$$

independente do sinal de Lu. A informação adicional dada pelo lema é que a desigualdade é estrita.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in C(\overline{B})$ e que $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \overline{B} \backslash \{x_0\}$. De fato, se não for esse o caso, é suficiente tomar uma nova bola $B' \subset B$ que é internamente tangente à B no ponto x_0. Além disso, conforme veremos posteriormente, podemos também supor que $B = B_r(0)$.

Feitas as considerações acima, vamos assumir inicialmente as hipóteses do item (ii) e considerar, para $\gamma > 0$ a ser determinado, a função

$$v(x) := e^{-\gamma|x|^2} - e^{-\gamma r^2}, \quad x \in B.$$

Para cada $i, j = 1, ..., N$, temos que

$$v_{x_i} = -2\gamma x_i e^{-\gamma|x|^2}$$

e

$$v_{x_i x_j} = \begin{cases} 4\gamma^2 x_i x_j e^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i \neq j, \\ 4\gamma^2 x_i^2 e^{-\gamma|x|^2} - 2\gamma e^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i = j, \end{cases}$$

ou seja,

$$v_{x_ix_j} = (4\gamma^2 x_i x_j - 2\gamma\delta_{ij})e^{-\gamma|x|^2},$$

de modo que

$$\begin{aligned} Lv(x) &= \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)v_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{N} b^i(x)v_{x_i} + c(x)v \\ &= e^{-\gamma|x|^2}\Big(\sum_{i,j=1}^{N}(4\gamma^2 a^{ij}(x)x_ix_j - 2\gamma\delta_{ij}a^{ij}(x)) - 2\gamma\sum_{i=1}^{N}(b^i(x)x_i) + c(x)\Big) - c(x)e^{-\gamma r^2}. \end{aligned}$$

Usando as hipótese sobre os coeficientes de L, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)x_ix_j \geq \theta_0|x|^2, \qquad \sum_{i=1}^{N} b^i(x)x_i \leq |x|\sum_{i=1}^{N}\|b^i\|_\infty = C_1,$$

$$\sum_{i,j=1}^{N}\delta_{ij}a^{ij}(x) \leq \sum_{i=1}^{N}\|a^{ij}\|_\infty = C_2$$

e

$$-c(x)e^{-\gamma r^2} \geq 0, \quad \text{pois} \quad c \leq 0$$

com $C_1, C_2 \geq 0$. As estimativas acima implicam que

$$Lv(x) \geq e^{-\gamma|x|^2}\Big(4\gamma^2\theta_0|x|^2 - 2\gamma(C_1 + C_2) - \|c\|_\infty\Big).$$

Desse modo, fazendo $C_3 := C_1 + C_2$ e denotando $A_r := B_r(0) \setminus B_{r/2}(0)$, temos que, para todo $x \in A_r$, vale

$$Lv(x) \geq e^{-\gamma|x|^2}\Big(4\gamma^2\theta_0\Big(\frac{r}{2}\Big)^2 - 2\gamma C_3 - \|c\|_\infty\Big).$$

Escolhendo $\gamma > 0$ grande o suficiente de modo que o termo entre parênteses acima seja positivo, concluímos que

$$Lv \geq 0, \;\text{ em }\; A_r.$$

Note que se $x \in B = B_r(0)$, então

$$\begin{aligned} |x|^2 &< r^2 && \Rightarrow \\ -\gamma|x|^2 &> -\gamma r^2 && \Rightarrow \\ e^{-\gamma|x|^2} &> e^{-\gamma r^2}, && \end{aligned}$$

logo $v(x) = e^{-\gamma|x|^2} - e^{-\gamma r^2} > 0$ em B e, em particular, v é positiva em $\partial B_{r/2}(0)$ e uma vez que x_0 é um ponto de máximo estrito de u e a função v é contínua no compacto $\partial B_{r/2}(0)$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ de tal modo que

$$u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x), \qquad x \in \partial B_{r/2}(0).$$

Note ainda que a desigualdade acima permanece válida em $\partial B_r(0)$ pois, nesse conjunto a função v se anula. Desse modo, a função

$$w(x) = u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$$

é tal que

$$\begin{cases} Lw = Lu + \varepsilon Lv - c(x)u(x_0) \geq 0, & em\ A_r, \\ w \leq 0, & em\ \partial A_r. \end{cases}$$

Segue então do Princípio da Comparação (Teorema 1.3) que $w \leq 0$ em $\overline{A_r}$. Observe agora que, como $x_0 \in \partial B$, temos que $v(x_0) = 0$. Logo, $w(x_0) = u(x_0) + \varepsilon v(x_0) - u(x_0) = 0$ e, portanto, x_0 é um ponto de máximo de w em $\overline{A}_r$. Desse modo, pela observação antes da demonstração, supondo que existe a derivada normal de u no ponto x_0, devemos ter $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) \geq 0$, o que implica em

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) &= \nabla w(x_0).\eta \\ &= \nabla\Big(u + \varepsilon v - u(x_0)\Big)(x_0).\eta \\ &= \nabla u(x_0).\eta + \varepsilon \nabla v(x_0).\eta \geq 0, \end{aligned}$$

logo, notando que $\dfrac{x_0}{r}$ é o vetor normal unitário de $B_r(0)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla u(x_0).\eta &= \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \\ &\geq -\varepsilon \nabla v(x_0).\Big(\frac{x_0}{r}\Big) \\ &= -\varepsilon\Big(-2\gamma x_0 e^{-\gamma|x_0|^2}\Big)\Big(\frac{x_0}{r}\Big) \\ &= 2\gamma\varepsilon \frac{|x_0|^2}{r} e^{-\gamma|x_0|^2} > 0. \end{aligned}$$

Isso estabelece a veracidade de (ii) no caso em que a bola B está centrada na origem. Para o caso geral em que $B = B_r(y)$, basta considerar $v(x) = e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma r^2}$, para $x \in B_r(y)$ e proceder como acima. A prova do item (i) também pode ser feita repetindo os mesmos passos. □

Precisamos também conhecer o famoso Lema de Lions.

Lema 1.2. *(Lema de Lions) Sejam $R > 0$ e $2 \leq q < 2^*$. Se (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^q\, dx \to 0, \quad quando\ \ n \to +\infty$$

então

$$u_n \to 0\ \ em\ \ L^p(\mathbb{R}^N),\ \ para\ todo\ \ 2 < p < 2^*.$$

Demonstração. Vamos considerar o caso $N \geq 3$. Considere $q < s < 2^*$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela desigualdade da interpolação e a imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned} \Big[\int_{B_R(y)} |u|^s\, dx\Big]^{1/s} = \|u\|_{L^s(B_R(y))} &\leq \|u\|^{1-\lambda}_{L^q(B_R(y))}\|u\|^{\lambda}_{L^{2^*}(B_R(y))} \\ &\leq C\|u\|^{1-\lambda}_{L^q(B_R(y))}\|u\|^{\lambda}_{H^1(B_R(y))} \\ &= C\|u\|^{1-\lambda}_{L^q(B_R(y))}\Big[\int_{B_R(y)}\Big(|u|^2 + |\nabla u|^2\Big)\,dx\Big]^{\frac{\lambda}{2}}, \end{aligned}$$

logo

$$\int_{B_R(y)} |u|^s\,dx \le C^s \|u\|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_R(y))}\Big[\int_{B_R(y)} \Big(|u|^2+|\nabla u|^2\Big)\,dx\Big]^{\frac{\lambda}{2}s}$$

onde $\lambda := \Big(\dfrac{s-q}{2^*-q}\Big)\Big(\dfrac{2^*}{s}\Big)$, note que $0<\lambda<1$, já que $q<s<2^*$. Escolhendo $\lambda = \dfrac{2}{s}$ obtemos $(1-\lambda)s = s-2$ e

$$\int_{B_R(y)} |u|^s\,dx \le C^s \|u\|^{s-2}_{L^q(B_R(y))}\int_{B_R(y)} \Big(|u|^2+|\nabla u|^2\Big)\,dx.$$

Considere agora uma família de bolas $\{B_R(y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ que cobrem $\mathbb{R}^N$, de modo que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ esteja contido em no máximo $N+1$ bolas, logo temos que

$$\begin{aligned}
\int |u|^s\,dx &= \int_{\bigcup_{i=1}^\infty B_R(y_i)} |u|^s\,dx\\
&\le \sum_{i=1}^\infty \int_{B_R(y_i)} |u|^s\,dx\\
&\le \sum_{i=1}^\infty C^s\|u\|^{s-2}_{L^q(B_R(y_i))}\int_{B_R(y_i)}\Big(|u|^2+|\nabla u|^2\Big)\,dx\\
&\le C^s \sup_{i\in\mathbb{N}}\|u\|^{s-2}_{L^q(B_R(y_i))}\sum_{i=1}^\infty\int\Big(|u|^2+|\nabla u|^2\Big).\chi_{B_R(y_i)}\,dx\\
&\le C^s \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\|u\|^{s-2}_{L^q(B_R(y))}\int\Big(|u|^2+|\nabla u|^2\Big)\sum_{i=1}^\infty\chi_{B_R(y_i)}\,dx\\
&\le (N+1)C^s \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\|u\|^{s-2}_{L^q(B_R(y))}\int\Big(|u|^2+|\nabla u|^2\Big)\,dx,
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue na penúltima desigualdade e

$$\chi_{B_R(y_i)}(x) = \begin{cases} 1, & se\ \ x\in B_R(y_i),\\ 0, & se\ \ x\notin B_R(y_i).\end{cases}$$

Aplicando a desigualdade acima para (u_n) e usando as hipóteses, chegamos em $u_n\to 0$, em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Como $2<s<2^*$, então pelas desigualdades da interpolação e a imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para $2\le r\le 2^*$, temos que

(a) se $2<p\le s$, então

$$\|u_n\|_p \le \|u_n\|_2^\beta\|u_n\|_s^{1-\beta}\le C\|u_n\|_s^{1-\beta},\quad \text{onde }\ \beta=\Big(\frac{s-p}{s-2}\Big)\Big(\frac{2}{p}\Big);$$

(b) se $s\le p<2^*$, então

$$\|u_n\|_p \le \|u_n\|_s^\mu\|u_n\|_{2^*}^{1-\mu}\le C\|u_n\|_s^{1-\mu},\quad \text{onde }\ \mu=\Big(\frac{s-p}{s-2^*}\Big)\Big(\frac{2^*}{p}\Big).$$

Logo, desde que $u_n\to 0$, em $L^s(\mathbb{R}^N)$ obtemos que $\|u_n\|_p\to 0$, para $2<p<2^*$, e temos o resultado.

$\square$

1.2 Análise Funcional

As demonstrações que apresentaremos a seguir podem ser vistas com maiores detalhes em Brezis [5] e Kreyszig [13].

Definição 1.2. *Um espaço H com produto interno é dito espaço de Hilbert se H é completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 1.4. *(Teorema de Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Dado $g \in H^*$, existe um único $\overline{u} \in H$ tal que*

$$\langle \overline{u}, x \rangle_H = g(x), \quad \textit{para todo} \;\; x \in H. \tag{1.5}$$

Demonstração. Se $g = 0$, então (1.5) é verdadeiro para $\overline{u} = 0$. Seja então $g \neq 0$ e considere o núcleo de g, que é o espaço vetorial fechado denotado por $N(g)$. Como $g \neq 0$ então $N(g) \neq H$, e segue que o complemento ortogonal de $N(g)$ não é nulo, ou seja, $N^{\perp}(g) \neq 0$. Tome então $0 \neq u_0 \in N^{\perp}(g)$ e defina

$$v = g(x)u_0 - g(u_0)x,$$

onde $x \in H$ é arbitrário. Aplicando g, obtemos

$$g(v) = g(x)g(u_0) - g(u_0)g(x) = 0.$$

Isto nos mostra que $v \in N(g)$. Como $u_0 \perp N(g)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, u_0 \rangle_H \\ &= \langle g(x)u_0 - g(u_0)x, u_0 \rangle_H \\ &= g(x)\langle u_0, u_0 \rangle_H - g(u_0)\langle x, u_0 \rangle_H. \end{aligned}$$

Como $\langle u_0, u_0 \rangle_H = \|u_0\|_H^2 \neq 0$, obtemos

$$g(x) = \frac{g(u_0)}{\langle u_0, u_0 \rangle_H} \langle x, u_0 \rangle_H = \left\langle x, \frac{g(u_0)}{\langle u_0, u_0 \rangle_H} u_0 \right\rangle_H.$$

Se escrevermos

$$\overline{u} = \frac{g(u_0)}{\langle u_0, u_0 \rangle_H} u_0,$$

obtemos

$$g(x) = \langle x, \overline{u} \rangle_H,$$

e como $x \in H$ é arbitrário, fica provado (1.5).

Para provar a unicidade, suponha que, para todo $x \in H$, tenhamos

$$g(x) = \langle x, u_1 \rangle_H = \langle x, u_2 \rangle_H,$$

então $\langle x, u_1 - u_2 \rangle_H = 0$ para todo x. Em particular para $x = u_1 - u_2$, temos

$$\langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle_H = \|u_1 - u_2\|_H^2 = 0,$$

portanto $u_1 - u_2 = 0$, de modo que vale a unicidade. □

Definição 1.3. *Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ é dito espaço de Banach se X é completo com a norma $\|u\|_X$.*

Definição 1.4. *Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$ uma sequência. Dizemos que (x_n) converge fracamente em X, se existe $x \in X$ tal que, para toda $f \in X^*$, tenhamos $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. Denotamos este fato por $x_n \rightharpoonup x$.*

Teorema 1.5. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço vetorial normado X.*
(i) se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ em X;
(ii) se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então (x_n) é limitada e $\|x\|_X \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_X$;
(iii) se $x_n \rightharpoonup x$ em X e $f_n \to f$ em X^*, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Proposição 3.5, página 58 de Brezis [5]. □

Teorema 1.6. *Seja X em espaço de Banach reflexivo e $(x_n) \subset X$ uma sequência limitada. Então existe uma subsequência $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em X.*

Demonstração. Pelo teorema de Kakutani (Teorema 3.17, página 67 de Brezis [5]), temos que a bola unitária de X é fracamente compacta. Tome (x_n) limitada, logo $(x_n) \subset \overline{B_R}$, para algum $R > 0$, e por $\overline{B_R}$ ser fracamente compacta, temos que existe uma subsequência $(x_j) \subset (x_n)$ tal que $x_j \rightharpoonup x$, em X. □

Teorema 1.7. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T : H \to H$ um operador compacto e autoadjunto. Então H admite uma base hilbertiana formada por autofunções de T, ou seja, admite uma base (u_j) tal que $Tu_j = \mu_j u_j$, $\langle u_i, u_j\rangle_H = 0$ para $i \neq j$ e $\langle u_j, u_j\rangle_H = 1$. Além disso, a dimensão de qualquer autoespaço é finita.*

Demonstração. Teorema 6.11, página 167 de Brezis [5]. □

Seja agora um espaço normado real E e $T : D(T) \subset E \to E$ linear. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ defina

$$\begin{array}{rcl} T_\lambda : D(T) & \to & E \\ u & \mapsto & Tu - \lambda u, \end{array}$$

ou seja, $T_\lambda = T - \lambda I$.

Definição 1.5. *O operador*

$$\begin{array}{rcl} R_\lambda : T_\lambda(D(T)) & \to & D(T) \\ T_\lambda u & \mapsto & u, \end{array}$$

quando existir, é chamado de operador resolvente de T. Em outras palavras $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$.

Definição 1.6. *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor regular de T se:*
(i) R_λ existir;
(ii) R_λ for contínuo;
(iii) $\overline{D(R_\lambda)} = E$.

Definição 1.7. *Com relação a um operador T, temos:*

a) O conjunto dos números reais que são valores regulares de T, denotado por $\rho(T)$, é chamado de resolvente de T.

b) O complementar em $\mathbb{R}$ do resolvente de T, denotado por $\sigma(T)$, é chamado de espectro de T.

Teorema 1.8. *Sejam E um espaço normado com dimensão infinita e $T : E \to E$ um operador linear compacto. Então:*

(1) $0 \in \sigma(T)$;

(2) $\sigma(T) \setminus \{0\} = A(T) \setminus \{0\}$, onde $A(T)$ é o conjuntos dos autovalores de T;

(3) Ocorre apenas uma das seguintes alternativas:

(i) $\sigma(T) = \{0\}$;

(ii) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é finito e, portanto, discreto;

(iii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mu_n \to 0$.

Demonstração. Teorema 6.8, página 164 de Brezis [5]. □

1.3 Teoria da Medida

Mostraremos aqui resultados de Medida e Integração que serão usados tanto explícita quanto implicitamente neste trabalho. Os próximos resultados podem ser consultados em Bartle [3] e Brezis [5].

Seja $(A, \mathbf{A}, \mu)$ um espaço de medida onde A é um conjunto, $\mathbf{A}$ é uma σ-álgebra e μ é uma medida. Denotaremos por $\mathbf{M}^+(A, \mathbf{A})$ as funções $\mathbf{A}$-mensuráveis não negativas de A para $\mathbb{R}^e = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Teorema 1.9. *(Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue) Sejam $(A, \mathbf{A}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em A, e suponha que:*

(i) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$, em quase todo ponto de A;

(ii) $f_n \to f$, em quase todo ponto de A.

Então f é mensurável, e

$$\int_A f_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu,$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração. Sabemos que o limite de um sequência de funções mensuráveis é mensurável, logo f é mensurável. Como $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\int_A f_n \, d\mu \leq \int_A f_{n+1} \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu. \tag{1.6}$$

Para obtermos a desigualdade oposta, seja $\alpha \in (0, 1)$ e seja φ uma função simples com $0 \leq \varphi \leq f$. Defina

$$A_n = \Big\{ x \in A \;\Big|\; f_n(x) \geq \alpha\varphi(x) \Big\},$$

logo $A_n \in \mathbf{A}, A_n \subset A_{n+1}$, e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Teremos então

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \int_A f_n \, d\mu. \tag{1.7}$$

Como a sequência (A_n) é monótona crescente e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, segue que

$$\int_A \varphi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi \, d\mu.$$

Tomando o limite em (1.7), obtemos

$$\alpha \int_A \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu,$$

e como esta desigualdade vale para todo $\alpha \in (0,1)$, concluímos que

$$\int_A \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Como φ é uma função simples arbitrária satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$, chegamos em

$$\int_A f \, d\mu = \sup_{\varphi} \int_A \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu. \tag{1.8}$$

Combinando (1.6) e (1.8), obtemos o resultado.

$\square$

Lema 1.3. *(Lema de Fatou) Se $(f_n) \subset \boldsymbol{M}^+(A, \boldsymbol{A})$, então*

$$\int_A (\liminf_{n\to\infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1,\dots}\}$ de modo que $g_m \leq f_n$ sempre que $m \leq n$. Assim temos

$$\int_A g_m \, d\mu \leq \int_A f_n \, d\mu,$$

logo

$$\int_A g_m \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Como a sequência (g_m) é não decrescente e converge para $\liminf_{n\to\infty} f_n$, o Teorema 1.9 da Convergência Monótona implica que

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_m \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

$\square$

Teorema 1.10. *(Teorema da Convergência Dominada) Sejam $(A, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida e (f_n)*

uma sequência de funções mensuráveis em A, tal que

$$f_n \to f, \quad \text{em quase todo ponto de } A.$$

Se existe uma função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g, \quad \text{em quase todo ponto de } A,$$

então f é integrável e

$$\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Temos que f é integrável e como $g + f_n \geq 0$, podemos aplicar o Lema 1.3 de Fatou para obter

$$\begin{aligned}
\int_A g\, d\mu + \int_A f\, d\mu &= \int_A (g+f)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_A (g+f_n)\, d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_A g\, d\mu + \int_A f_n\, d\mu \Big) \\
&= \int_A g\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\int_A f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu.$$

Como $g - f_n \geq 0$, mais uma aplicação do Lema 1.3 de Fatou nos dá

$$\begin{aligned}
\int_A g\, d\mu - \int_A f\, d\mu &= \int_A (g-f)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_A (g-f_n)\, d\mu \\
&= \int_A g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu \leq \int_A f\, d\mu.$$

Assim, concluímos que

$$\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu.$$

□

Definição 1.8. *Sejam $(A, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$\|f\|_p = \Big[\int_A |f|^p\, d\mu \Big]^{1/p},$$

e $L^p(A)$ a coleção de todas as funções mensuráveis em A tais que

$$\|f\|_p < \infty.$$

Definimos também $L^\infty(A)$ como o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis f tais que $|f(x)| \leq M$, em quase todo ponto de A, para algum $M > 0$. Definimos a norma $\|f\|_\infty$ em $L^\infty(A)$ por

$$\|f\|_\infty = \inf\Big\{M > 0 \ \Big|\ |f| < M, \ \text{ em quase todo ponto de } \ A\Big\}.$$

Teorema 1.11. *(Desigualdade de Hölder) Consideremos $(A, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(A)$, $g \in L^q(A)$, então $fg \in L^1(A)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Suponha $p = 1$ e $q = \infty$, logo

$$\begin{aligned} \Big|\int_A fg\, d\mu\Big| &\leq \int_A |fg| d\mu \\ &\leq \|g\|_\infty \int_A |f| d\mu \\ &= \|g\|_\infty \|f\|_1 \leq \infty, \end{aligned}$$

e temos o resultado no caso $p = 1$.

Para o caso $p > 1$, seja $\alpha \in (0, 1)$ e $\varphi(t) := \alpha t - t^\alpha$ para $t \geq 0$. Logo, $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha - 1}$ e assim $\varphi'(t) < 0$ para $0 < t < 1$ e $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$. Logo, $t = 1$ é ponto de mínimo de φ, ou seja, $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ e $\varphi(t) = \varphi(1)$ se, e somente se, $t = 1$.

Temos então que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ implica em

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha), \quad t \geq 0.$$

Sejam a, b não negativos e $t = \dfrac{a}{b}$, logo teremos

$$a^\alpha b^{-\alpha} \leq \alpha a b^{-1} + (1 - \alpha),$$

e multiplicando por b, temos

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b,$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $a = b$.

Sejam agora p e q satisfazendo $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e tome $\alpha = \dfrac{1}{p}$. Segue que se A e B são números reais não negativos, então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $A^p = B^q$.

Suponha que $f \in L^p$, $g \in L^q$ e $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$, então o produto fg é mensurável e tomando $A = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$

e $B = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, obtemos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \le \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

Como os dois termos à direita são integráveis, segue que fg é integrável. Além disso, integrando, obtemos

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

o que prova nosso resultado.

$\square$

Teorema 1.12. *(Desigualdade de Interpolação) Sejam $1 \le s \le r \le t \le \infty$ e $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

Suponhamos também que $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado. Então, $u \in L^r(\Omega)$ e

$$\|u\|_r \le \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta}.$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\dfrac{\theta r}{s} + \dfrac{(1-\theta)r}{t} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_r^r &\le \int_\Omega |u|^r \, dx \\
&= \int_\Omega |u|^{\theta r}|u|^{(1-\theta)r} \, dx \\
&\le \left(\int_\Omega |u|^{\theta r \frac{s}{\theta r}} \, dx\right)^{\frac{\theta r}{s}} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\theta)r\frac{t}{(1-\theta)r}} \, dx\right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}} \\
&= \left(\int_\Omega |u|^s \, dx\right)^{\frac{\theta r}{s}} \left(\int_\Omega |u|^t \, dx\right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}} \\
&= \|u\|_s^{\theta r}\|u\|_t^{(1-\theta)r},
\end{aligned}$$

logo

$$\|u\|_r \le \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{(1-\theta)},$$

e como $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, temos o resultado. $\square$

Teorema 1.13. *Considere uma sequência $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, de modo que $\|f_n - f\|_p \to 0$, quando $n \to \infty$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que:*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$, em quase todo ponto de Ω;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \le g(x)$, em quase todo ponto de Ω, com $g \in L^p(\Omega)$.

Demonstração. Teorema 4.9, página 94 de Brezis [5]. $\square$

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção, vamos abordar conceitos e resultados sobre os Espaços de Sobolev que serão utilizados por todo este trabalho. Os detalhes desta seção podem ser vistos em Brezis [5] e Evans [8].

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.9. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$, tem-se $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, sendo D^α a derivada no sentido fraco. De forma sucinta,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \;\Big|\; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k \Big\}.$$

Definição 1.10. *Para $u \in W^{k,p}$ definimos a norma de u por*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

Observação 1.1. *Se $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.*

Teorema 1.14. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Proposição 8.1, página 203 de Brezis [5]. □

Veremos agora as imerões dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Lembramos agora que o expoente crítico de Sobolev é dado por

$$p^* = \frac{Np}{N-p}, \quad \text{onde } \; 1 \leq p < N.$$

Teorema 1.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1, então temos as seguintes imersões contínuas:*

$$\begin{array}{lcll} W^{1,p}(\Omega) & \hookrightarrow & L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p^*, & \text{se } 1 \leq p < N; \\ W^{1,p}(\Omega) & \hookrightarrow & L^q(\Omega), \quad q \geq 1, & \text{se } p = N; \\ W^{1,p}(\Omega) & \hookrightarrow & C^{0,1-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega}), & \text{se } p > N. \end{array}$$

Demonstração. Teorema 5.4, página 97 de Adams [1]. □

1.5 Caracterização de λ_1

No que segue estamos nos baseando em Giovany [9]. Inicialmente vamos considerar o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $f \in L^2(\Omega)$.

Sabemos que

$$\langle u, v\rangle_H = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

é o produto interno usual de $H_0^1(\Omega)$, que é espaço de Hilbert com a norma induzida

$$\|u\|_H = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\Big)^{1/2}.$$

Dada $f \in L^2(\Omega)$, considere $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder, g está bem definido e além disso, g é linear.

Tomando $v \in H_0^1(\Omega)$ e usando as imersões de Sobolev e novamente a desigualdade de Hölder, temos

$$|g(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}\|v\|_H,$$

o que mostra que g é contínua.

Pelo Teorema 1.4 da Representação de Riesz, segue que existe único $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle \overline{u}, v\rangle_H = g(v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Concluímos então que $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca do problema (P).

Assim fica bem definido o operador

$$\begin{array}{rcl} S : L^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ f & \mapsto & u, \end{array}$$

onde u é a única solução do problema (P).

Vamos agora conhecer as propriedades do operador S:

Lema 1.4. *O operador S é linear e contínuo.*

Demonstração. Dadas $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos únicas $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que $S(f_1) = u_1$ e $S(f_2) = u_2$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \, dx = \int_\Omega f_1 v \, dx, \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla v \, dx = \int_\Omega f_2 v \, dx, \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Multiplicando a segunda equação por α e somando com a primeira equação, teremos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \, dx + \alpha \int_\Omega \nabla u_2 \nabla v \, dx = \int_\Omega f_1 v \, dx + \alpha \int_\Omega f_2 v \, dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla(u_1 + \alpha u_2)\nabla v\,dx = \int_\Omega (f_1 + \alpha f_2)v\,dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

O que mostra que

$$S(f_1 + \alpha f_2) = S(f_1) + \alpha S(f_2).$$

Vamos mostrar agora que S é contínuo. Da desigualdade de Hölder e das imersões de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
\|S(f)\|_H^2 &= \|u\|_H^2 \\
&= \int_\Omega fu\,dx \\
&\leq \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \\
&\leq C\|u\|_H\|f\|_{L^2} \\
&= C\|S(f)\|_H\|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

e assim

$$\|S(f)\|_H \leq C\|f\|_{L^2},$$

mostrando que S é contínuo. □

Observação 1.2. *Note que:*

$$S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

onde a imersão acima é compacta. Como S é contínuo teremos

$$S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

um operador compacto. Daqui para frente o operador S será o operador compacto acima.

Lema 1.5. *O operador $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador positivo, ou seja,*

$$\langle S(f), f\rangle_{L^2} \geq 0.$$

Demonstração. Seja $S(f) = u$, logo

$$\begin{aligned}
\langle S(f), f\rangle_{L^2} &= \langle u, f\rangle_{L^2} \\
&= \int_\Omega uf\,dx \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla u\,dx \\
&= \|u\|_H^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.6. *O operador S é autoadjunto, ou seja,*

$$\langle S(f), g\rangle_{L^2} = \langle f, S(g)\rangle_{L^2}.$$

Demonstração. Sejam $u_1 = S(f_1)$ e $u_2 = S(f_2)$, então

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \, dx = \int_\Omega f_1 v \, dx, \quad \text{para todo} \;\; v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.9}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla w \, dx = \int_\Omega f_2 w \, dx, \quad \text{para todo} \;\; w \in H_0^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Considerando $v = u_2$ em (1.9) e $w = u_1$ em (1.10), obtemos

$$\int_\Omega f_2 u_1 \, dx = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 \, dx = \int_\Omega f_1 u_2 \, dx,$$

o que nos mostra que

$$\langle S(f_1), f_2 \rangle_{L^2} = \langle S(f_2), f_1 \rangle_{L^2}, \;\; \forall \, f_1, f_2 \in L^2(\Omega).$$

□

Lema 1.7. *O operador S é injetivo.*

Demonstração. Temos que

$$0 = S(f) = \int_\Omega f v \, dx, \;\; \forall \, v \in H_0^1(\Omega),$$

e como $L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, temos que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f v \, dx = 0, \;\; \forall \, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim, concluímos que $f = 0$. □

Observação 1.3. *Segue do lema acima que o operador S não possui autovalor nulo.*

Lema 1.8. *O operador $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ admite uma sequência μ_n de autovalores com $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ e $L^2(\Omega)$ possui uma base hilbertiana formada por autofunções de S.*

Demonstração. Sabemos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável, $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador autoadjunto e compacto. Do Teorema 1.7, $L^2(\Omega)$ possui uma base hilbertiana formada por autofunções de S.

Vamos mostrar agora que os itens (i) e (ii) do Teorema 1.8 não podem ocorrer. De fato, se $\sigma(S) = \{0\}$, desde que $A(T) \subset \sigma(S)$, teríamos que zero é um autovalor de S, o que é um absurdo. Se $\sigma(S) \setminus \{0\}$ fosse finito, do Teorema 1.7, teríamos que $L^2(\Omega)$ é finito, o que é um absurdo.

Temos então que

$$\sigma(S) \setminus \{0\} = A(S) \setminus \{0\} = \mu_n \to 0$$

é uma sequência que converge para zero quando $n \to \infty$. □

Observação 1.4. *Podemos reordenar (μ_n) de modo que*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n \to 0.$$

Além disso, os autovalores de S são positivos. De fato, seja μ autovalor de S, logo existe $0 \neq f \in L^2(\Omega)$ tal que $S(f) = \mu f$. Assim

$$\langle S(f), f\rangle_{L^2} = \langle \mu f, f\rangle_{L^2} = \mu \|f\|^2_{L^2} \geq 0.$$

Portanto, $\mu \geq 0$ e como $\mu \neq 0$, então devemos ter $\mu > 0$.

Definição 1.11. *Dizemos que λ é um autovalor do laplaciano se*

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla v\,dx = \lambda\int_\Omega \phi v\,dx,$$

para todo $v \in H^1_0(\Omega)$.

Lema 1.9. *Temos que μ é autovalor de S se, e somente se, $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ é autovalor de $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$.*

Demonstração. Se μ é autovalor de S, então existe $0 \neq f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$S(f) = \mu f,$$

logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(\mu f)\nabla v\,dx &= \int_\Omega f v\,dx, \qquad \text{ou seja,} \\ \int_\Omega \nabla f\nabla v\,dx &= \lambda\int_\Omega f v\,dx, \end{aligned}$$

onde $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$. □

Observação 1.5. *Concluímos então que o operador $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$ possui uma sequência de autovalores (λ_n) tal que*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq .... \leq \lambda_n \to \infty.$$

Teorema 1.16. *O inverso do primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$ é a menor constante que verifica a desigualdade de Poincaré, ou seja*

$$\int_\Omega |u|^2\,dx \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

Além disso

$$\lambda_1 = \min_{0\neq u\in H^1_0(\Omega)} \frac{\|u\|^2_H}{\|u\|^2_2} = \min_{0\neq u\in H^1_0(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2\,dx}$$

é a caracterização variacional de λ_1.

Demonstração. Seção 4.5, página 50 de Figueiredo [9].

□

Teorema 1.17. *O primeiro autovalor de $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$ é o único que tem a autofunção correspondente que não troca de sinal em Ω.*

Demonstração. Lema 4.8, página 53 de Figueiredo [9]. □

Capítulo 2

Estrutura Variacional - A Condição de Cerami

Começamos apresentando nosso principal problema, bem como as condições sobre a função f.

2.1 Condições para f

Neste capítulo, vamos considerar a questão de achar soluções positivas da equação

$$(P_\lambda) \qquad -\Delta u + \lambda u = f(x,u)u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro e a função f satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$,

$$\lim_{s \to 0} f(x,s) = 0, \quad \text{uniformemente em} \quad x;$$

(f_2) Para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x,s)$ é uma função não decrescente de s em $[0,\infty)$ e existe uma função $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\lim_{s \to \infty} f(x,s) = g(x), \quad \text{uniformemente em } x;$$

(f_3) Existe uma função $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x,s) = h(s), \quad \text{uniformemente em } s;$$

(f_4) $\lim\limits_{|x| \to \infty,\, s \to \infty} f(x,s) = \lim\limits_{s \to \infty} h(s) = \lim\limits_{|x| \to \infty} g(x) = l_\infty \in (0,\infty);$

(f_5) $f(x,s) \geq \lim\limits_{|x| \to \infty} f(x,s) = h(s)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R}^+$ e $f(x,s) > h(s)$ para $x \in \omega, s \in \mathbb{R}^+$, onde $\omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto de medida positiva.

Observação 2.1. *Temos que $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De fato, como*

$$\lim_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty,$$

da definição de limite, temos que $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $M > 0$, tal que

$$|g(x) - l_\infty| \leq \varepsilon, \ \ \textit{para todo} \ \ |x| > M.$$

Assim, $g(x) < l_\infty + \varepsilon$, para todo $|x| > M$. Por outro lado, como $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, temos que $g(\overline{x}) = \max_{x\in B_M} g(x)$, para algum $\overline{x} \in B_M$. Logo $g \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Analogamente, $h \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Por (f_2), ainda temos que

$$0 \leq f(x,s) \leq g(x) < \infty.$$

Além disso, por um argumento de regularidade que faremos a seguir, a solução $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de (P_λ) é tal que u está em $W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$, para todo $p \geq 2$, de modo que

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{|x|\to\infty} \nabla u(x) = 0.$$

De fato, de acordo com Stuart e Zhou [18], temos o seguinte lema:

Lema 2.1. (a) *Para cada função $h \in L^p(\mathbb{R}^N), 1 \leq p \leq \infty$, existe um única função $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, tal que $u = Th$, satisfazendo a equação $-\Delta u + u = h$ em $\mathbb{R}^N$;*

(b) *Seja $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para algum p com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $Th \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $|Th|_p \leq |h|_p$. Caso $p \in (1,\infty)$, nós ainda temos que $Th \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e existe uma constante $C(p,N)$ tal que:*

$$\|Th\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C(p,N)|h|_p.$$

Demonstração. Segue da Proposição 27, Capítulo II de Dautray e Lions [7] combinado com a estimativa de Calderon-Zygmund $|\partial_i\partial_j u|_p \leq A(p,N)|\Delta u|_p$(Proposição 3 do Capítulo 3 de Stein [17]). □

Por outro lado, como $0 \leq f(x,s) \leq g(x) \leq \|g\|_\infty < \infty, \ \ \forall\, x, s \geq 0$, temos que

$$\Big\|[\lambda + 1 + f(x,u)]u\Big\|_p \leq \Big(|\lambda + 1| + \|g\|_\infty\Big)\|u\|_p, \quad \forall\, p \geq 1.$$

Defina $\tilde{f}(x) = (-\lambda + 1 + f(x,u))u$, em $\mathbb{R}^N$, então temos que $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p \leq \dfrac{2N}{N-2}$, e $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$\tilde{f}(x) = (-\lambda + 1 + f(x,u))u = u - \lambda u + f(x,u)u = u - \Delta u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema 2.1(a), temos $u = T\tilde{f}$ e por (b) temos $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, para $2 \leq p \leq \dfrac{2N}{N-2}$. Portanto u, e consequentemente $\tilde{f}$, pertence a $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq p \leq \infty$ se $N = 6$ e $2 \leq p \leq \dfrac{2N}{N-6}$ se $N > 6$. Um argumento de bootstrap padrão completa a prova de que $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 2$.

A segunda parte é verdadeira para todo elemento $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ desde que $p > N$. Além disso, como $u(x) \geq 0$, em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, então para qualquer solução de

$$-\Delta u + \lambda u = f(x,u)u \geq 0, \quad \lambda > 0,$$

o Princípio do Máximo Forte (Teorema 8.19 de Gilbarg e Trudinger [11]) nos mostra que $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Ao longo deste trabalho assumiremos, sem perda de generalidade, que $f(x,s)$ e $h(s)$ são definidos para todo $s \in \mathbb{R}$ e $f(x,s) = h(s) = 0$ para $s \leq 0$. Nós vamos encontrar soluções positivas de (P_λ) como pontos críticos do funcional energia correspondente:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,u)\,dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2.1}$$

onde

$$F(x,s) := \int_0^s f(x,t)t\,dt,$$

uma vez que uma solução fraca do problema (P_λ) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int (\nabla u \nabla v + \lambda uv)\,dx = \int f(x,u)uv\,dx, \quad \text{para todo } \ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, temos que

$$\|u\|_\lambda^2 := \int |\nabla u|^2\,dx + \lambda \int |u|^2\,dx$$

define uma norma equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$, a saber, $\|u\|_H^2 = \int |\nabla u|^2\,dx + \int |u|^2\,dx$. De fato, a norma $\|\cdot\|_\lambda$ provém do produto interno

$$\langle u,v\rangle_\lambda := \int \nabla u \nabla v\,dx + \lambda \int uv\,dx.$$

Vamos provar que $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ é produto interno:

(i)

$$\begin{aligned} \langle u,v\rangle_\lambda &= \int \nabla u \nabla v\,dx + \lambda \int uv\,dx \\ &= \int \nabla v \nabla u\,dx + \lambda \int vu\,dx \\ &= \langle v,u\rangle_\lambda; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \alpha u,v\rangle_\lambda &= \int \nabla \alpha u \nabla v\,dx + \lambda \int \alpha uv\,dx \\ &= \alpha \int \nabla u \nabla v\,dx + \lambda\alpha \int uv\,dx \\ &= \alpha\Big(\int \nabla u \nabla v\,dx + \lambda \int uv\,dx\Big) \\ &= \alpha\langle u,v\rangle_\lambda; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle u+v, w\rangle_\lambda &= \int \nabla(u+v)\nabla w\, dx + \lambda \int (u+v)w\, dx \\
&= \int (\nabla u \nabla w + \nabla v \nabla w)\, dx + \lambda \int (uw + vw)\, dx \\
&= \Big(\int \nabla u \nabla w\, dx + \lambda \int uw\, dx\Big) + \Big(\int \nabla v \nabla w\, dx + \lambda \int vw\, dx\Big) \\
&= \langle u, w\rangle_\lambda + \langle v, w\rangle_\lambda;
\end{aligned}$$

(iv)

$$\langle u, u\rangle_\lambda = \int |\nabla u|^2\, dx + \lambda \int |u|^2\, dx \geq 0, \quad \text{já que } \lambda > 0.$$

Além disso,

$$\min\{1, \lambda\}\|u\|_H^2 \leq \|u\|_\lambda^2 \leq \max\{1, \lambda\}\|u\|_H^2,$$

logo as normas são equivalentes.

Vale notar que como $\lim_{s \to 0} f(x,s) = 0$, então para s suficientemente pequeno, temos

$$\begin{array}{rcll}
& |f(x,s)| & < \varepsilon & \Rightarrow \\
-\varepsilon < & f(x,s) & < \varepsilon & \Rightarrow \\
-\varepsilon s < & f(x,s)s & < \varepsilon s & \Rightarrow \\
-\varepsilon \dfrac{s^2}{2} < & F(x,s) & < \varepsilon \dfrac{s^2}{2} & \Rightarrow \\
& |F(x,s)| & < \varepsilon \dfrac{s^2}{2}, &
\end{array}$$

e como $\lim_{|x| \to \infty,\, s \to \infty} f(x,s) = l_\infty$, então para $|x|$ e s suficientemente grandes, temos

$$\begin{array}{rcll}
|f(x,s) - l_\infty| & < & \varepsilon & \Rightarrow \\
f(x,s) & < & \varepsilon + l_\infty & \Rightarrow \\
f(x,s)s & < & \varepsilon s + s l_\infty &
\end{array}$$

e integrando a última desigualdade acima, temos que

$$F(x,s) < \varepsilon \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2} l_\infty = \Big(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{l_\infty}{2}\Big)s^2,$$

assim, $0 \leq F(x,s) \leq C(s^+)^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$.

Como pretendemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha com condição de Cerami, precisamos saber agora da regularidade do nosso funcional.

2.2 Regularidade do Funcional I_λ

Vamos mostrar que I_λ é um funcional de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para isso, precisamos das seguintes definições:

Definição 2.1. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X^*$ tal que*

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Tu}{\|v\|} = 0.$$

A derivada de Fréchet no ponto u, quando existe, é única. Vamos denotá-la por $I'(u)$.

Definição 2.2. *Se A é um aberto de X, dizemos que I é de classe C^1 em A ou que $I \in C^1(A, \mathbb{R})$, quando a derivada de Fréchet de I existe em todo ponto $u \in A$ e a aplicação $I' : A \to X^*$ é contínua.*

Definição 2.3. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dizemos que I possui Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe um funcional linear $T \in X^*$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - Tv}{t} = 0, \quad \textit{para todo } v \in X.$$

A derivada de Gateaux no ponto u, quando existe, é unica. Vamos denotá-la por $DI(u)$.

Observação 2.2. *I é de classe C^1 em A quando a derivada de Gateaux de I em A existe e o operador $DI : X \to X^*$ existe e é contínuo.*

Lema 2.2. *O funcional I_λ definido em (2.1) é de classe C^1.*

Demonstração. Já conhecemos as estimativas

$$f(x,s)s < \varepsilon s + s l_\infty \qquad \text{e} \tag{2.2}$$

$$F(x,s) < \Big(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{l_\infty}{2}\Big) s^2 = C(s^+)^2, \tag{2.3}$$

vamos usá-las nesta demonstração.

Considere

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,s)\, dx,$$

e vamos mostrar que I_λ é de classe C^1 com

$$I'_\lambda(u)v = \int |\nabla u \nabla v|\, dx + \lambda \int uv\, dx - \int f(x,u)uv\, dx.$$

Considere $I_\lambda(u) = J_0(u) - J_1(u)$, onde

$$\begin{aligned} J_0(u) &:= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 = \frac{1}{2}\Big[\int |\nabla u|^2\, dx + \lambda \int |u|^2\, dx\Big] \quad \text{e} \\ J_1(u) &:= \int F(x,s)\, dx, \end{aligned}$$

e vamos mostrar que J_0 e J_1 são classe C^1 com

$$\begin{aligned} J_0'(u)v &= \int |\nabla u \nabla v|\,dx + \lambda \int uv\,dx = \langle u, v\rangle_\lambda \qquad \text{e} \\ J_1'(u)v &= \int f(x,u)uv\,dx. \end{aligned}$$

Inicialmente, vamos calcular a derivada de Gateaux DJ_0:

$$\begin{aligned} \frac{J_0(u+tv)-J_0(u)}{t} &= \frac{1}{t}\Big[\frac{1}{2}\int |\nabla(u+tv)|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int (u+tv)^2\,dx - \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int |u|^2\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{2t}\Big[\int \nabla(u+tv)\nabla(u+tv)\,dx - \int |\nabla u|^2\,dx + \lambda\Big(\int (u+tv)(u+tv)\,dx - \int |u|^2\,dx\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2t}\Big[2t\int \nabla u\nabla v\,dx + t^2\int |\nabla v|^2\,dx + \lambda\Big(2t\int uv\,dx + t^2\int v^2\,dx\Big)\Big] \\ &= \int \nabla u \nabla v\,dx + \frac{t}{2}\int |\nabla v|^2\,dx + \lambda\int uv\,dx + \frac{\lambda t}{2}\int |v|^2\,dx, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} DJ_0(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_0(u+tv)-J_0(u)}{t} \\ &= \int \nabla u\nabla v\,dx + \lambda\int uv\,dx \\ &= \langle u, v\rangle_\lambda. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que DJ_0 é contínua. Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e tome $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\|_\lambda \leq 1$, logo

$$\begin{aligned} \Big|[DJ_0(u_n) - DJ_0(u)]v\Big| &= |\langle u_n, v\rangle_\lambda - \langle u, v\rangle_\lambda| \\ &= |\langle u_n - u, v\rangle_\lambda| \\ &\leq \|u_n - u\|_\lambda \|v\|_\lambda \\ &\leq \|u_n - u\|_\lambda. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$\|DJ_0(u_n) - DJ_0(u)\|_{H^*} := \sup_{\|v\|_\lambda \leq 1}\Big|[DJ_0(u_n) - DJ_0(u)]v\Big| \leq \|u_n - u\|_\lambda \to 0.$$

Pela Observação 2.2, temos que $DJ_0 = J_0'$ é de classe C^1 e $J_0'(u)v = \langle u, v\rangle_\lambda$.

Vamos calcular agora a derivada de Gateaux DJ_1. Para isso, considere $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $h(s) = F(x, u + stv)$ onde $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$\begin{aligned} h'(s) &= f(x, u+stv)(u+stv)tv, \\ h(1) &= F(x, u+tv) \qquad \text{e} \\ h(0) &= F(x,u). \end{aligned}$$

Como h é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, segue do teorema do valor médio que existe

$\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma),$$

de onde concluímos que

$$\Big|\frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t}\Big| = \Big|f(x,u+\gamma tv)(u+\gamma tv)v\Big|.$$

Da condição de crescimento de f dado em (2.2), obtemos

$$\begin{array}{rcl} |f(x,u+\gamma tv)(u+\gamma tv)v| & < & |\varepsilon(u+\gamma tv)v| + |(u+\gamma tv)vl_\infty| \\ & < & \varepsilon|uv+v^2| + |uv+v^2|l_\infty \\ & = & C_\varepsilon|uv+v^2| \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{array}$$

Tomando uma sequência $|t_n| \to 0$, usamos o Teorema 1.10 da Convergência Dominada de Lebesgue e obtemos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} & = & \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int F(x,u+tv)\,dx - \int F(x,u)\,dx}{t} \\ & = & \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f(x,u+\gamma t_n v)(u+\gamma t_n v)v\,dx \\ & = & \displaystyle\int f(x,u)uv\,dx. \end{array}$$

Portanto

$$DJ_1(u)v = \int f(x,u)uv\,dx.$$

Vamos agora mostrar que DJ_1 é contínuo. Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Das imersões contínuas de Sobolev, temos

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^r(\mathbb{R}^N), \ \text{ com } \ 1 \le r \le 2^*, \ \text{ para } \ N \ge 3.$$

Usando o Teorema 1.13, existe $(u_j) \subset (u_n)$ e $g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{array}{rcll} u_j(x) & \to & u(x), \ \text{em quase todo ponto de} & \mathbb{R}^N \quad \text{e} \\ |u_j(x)| & \le & g(x), \ \text{em quase todo ponto de} & \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Pela continuidade de f, temos que

$$\Big|f(x,u_j(x))u_j(x) - f(x,u(x))u(x)\Big|^{p/p-1} \to 0, \ \text{ em quase todo ponto de } \mathbb{R}^N,$$

e da condição (2.2), obtemos

$$\begin{array}{rcl} \Big|f(x,u_j(x))u_j(x) - f(x,u(x))u(x)\Big|^{p/p-1} & \le & C\Big[|f(x,u_j(x))u_j(x)|^{p/p-1} + |f(x,u(x))u(x)|^{p/p-1}\Big] \\ & \le & C\Big[\varepsilon u_j + u_j l_\infty + \varepsilon u + u l_\infty\Big] \\ & \le & C_\varepsilon g(x) \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{array}$$

Do Teorema 1.9 da Convergência Monótona de Lebesgue, temos que

$$f(x,u_j(x))u_j(x) \to f(x,u(x))u(x), \qquad \text{em } L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Assim para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\|_\lambda \leq 1$, obtemos

$$\Big|[DJ_1(u_j) - DJ_1(u)]v\Big| = \int [f(x,u_j)u_j - f(x,u)u]v\,dx,$$

e como $\dfrac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, então da desigualdade de Hölder, chegamos em

$$\Big|[DJ_1(u_j) - DJ_1(u)]v\Big| \leq \|f(x,u_j)u_j - f(x,u)u\|_{\frac{p}{p-1}}\|v\|_p,$$

e das imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}\Big|[DJ_1(u_j) - DJ_1(u)]v\Big| &\leq C\|f(x,u_j)u_j - f(x,u)u\|_{\frac{p}{p-1}}\|v\|_\lambda \\ &\leq C\|f(x,u_j)u_j - f(x,u)u\|_{\frac{p}{p-1}}.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\|DJ_1(u_j) - DJ_1(u)\| &:= \sup_{\|v\|_\lambda \leq 1}\Big|[DJ_1(u_j) - DJ_1(u)]v\Big| \\ &\leq \|f(x,u_j)u_j - f(x,u)u\|_{\frac{p}{p-1}},\end{aligned}$$

o que implica em

$$\lim_{j\to\infty} DJ_1(u_j) = DJ_1(u),$$

e, novamente pela Observação 2.2, concluímos que $DJ_1(u) = J_1'(u)$ é contínuo e temos o resultado. □

Além disso, os pontos críticos de I_λ são soluções fracas de (P_λ). Em particular, se u é um ponto crítico de I_λ, então definindo $u^+ = \max\{0,u\}$ e $u^- = \min\{0,u\}$ temos que $u = u^+ + u^-$, $u^+u^- = 0$ e $\nabla u^+ \nabla u^- = 0$, logo, lembrando que $f(x,u) = 0$ para $u \leq 0$, temos

$$\begin{aligned}0 = I_\lambda'(u)(u^-) &= \int \nabla u.\nabla u^-\,dx + \lambda\int uu^-\,dx - \int f(x,u)uu^-\,dx \\ &= \int |\nabla u^-|^2\,dx + \lambda\int |u^-|^2\,dx = \|u^-\|_\lambda^2.\end{aligned}$$

Portanto obtemos $u = u^+ \geq 0$.

Vamos apresentar agora nossa principal ferramenta e a contemplação de uma de suas hipóteses pelo nosso funcional I_λ.

2.3 Condição de Cerami

A fim de estabelecer a existência de um ponto crítico não nulo de I_λ, usaremos o Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami.

Teorema 2.1. *Seja H um espaço de Hilbert e $I \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $\exists\, \rho, \alpha > 0$ tal que $I(u) \geq 0$ para $\|u\| \leq \rho$ e $I(u) \geq \alpha$ para $\|u\| = \rho$;

(b) $I(0) = 0$ e existe $e \in H$ com $\|e\| > \rho$ tal que $I(e) < 0$.

Seja $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) \mid \gamma(0) = 0,\ I(\gamma(1)) < 0\}$ e defina

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

Se, além disso, o funcional I satisfaz a condição de compacidade de Cerami no nível c, então existe $u \in H$ tal que $I(u) = c \geq \alpha$ e $I'(u) = 0$.

Recordamos que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$, que chamaremos de $(Ce)_c$, se qualquer sequência (u_n), tal que

$$I(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad \Big(1 + \|u_n\|_H\Big)\|I'(u_n)\|_{H^*} \to 0,$$

possui uma subsequência convergente.

No resto deste capítulo, vamos mostrar que o funcional I_λ definido em (2.1) satisfaz a condição $(Ce)_c$, quando $c \in \mathbb{R}$ é adequadamente restringido, como veremos no Teorema 2.2. No próximo capítulo, consideramos as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha (condições (a) e (b) acima). Para isso, definimos

$$\Lambda = \inf \left\{ \int \Big[|\nabla u|^2 - g(x) u^2 \Big]\, dx \;\Big|\; u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int u^2\, dx = 1 \right\}. \tag{2.4}$$

Como em Berezin e Shubin [4], temos que $\Lambda = \inf \sigma(S)$, onde $\sigma(S)$ é o espectro do operador definido por

$$Su(x) = -\Delta u(x) - g(x) u(x), \quad D(S) = H^2(\mathbb{R}^N). \tag{2.5}$$

Além disso, do fato que o espectro essencial de S é $\sigma_{ess}(S) = [-l_\infty, \infty)$, temos

$$-\|g\|_\infty \leq \Lambda \leq -l_\infty < 0. \tag{2.6}$$

Observação 2.3. *Temos que $\sigma_{ess}(S)$ consiste nos pontos de acumulação $\sigma(S)$ mais os autovalores de S com multiplicidade infinita. Como $\sigma(S)$ é fechado, temos $\sigma_{ess}(S) \subset \sigma(S)$.*

Começamos com dois lemas técnicos que serão usados nas provas do nosso primeiro resultado de compacidade, a Proposição 2.1.

Lema 2.3. *Sob hipótese (f_1), assuma que $\displaystyle\lim_{|x| \to \infty,\, s \to \infty} f(x,s) = l_\infty \in \mathbb{R}$ e sejam $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ sequências satisfazendo*

(i) $v_n \rightharpoonup v, v_n(x) \to v(x)$, para algum $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $t_n \to \infty$ e $\dfrac{I_\lambda'(t_n v_n)}{t_n} \to 0$, quando $n \to \infty$.

Então qualquer sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\displaystyle\int_{y_n + B_1} v_n^2\, dx \geq \alpha > 0$ é necessariamente limitada.

Demonstração. Vamos fazer a prova por contradição. Seja $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência tal que

$$\int_{y_n + B_1} v_n^2\, dx \geq \alpha > 0$$

e suponha que exista uma subsequência de (y_n) ainda denotada por (y_n) tal que $|y_n| \to \infty$. Definimos agora

$$\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$$

e usando mudança de variáveis $z = x + y_n$, temos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v}_n\|_\lambda^2 &= \int |\nabla \tilde{v}_n(x)|^2\, dx + \lambda \int |\tilde{v}_n(x)|^2\, dx \\
&= \int |\nabla v_n(x + y_n)|^2\, dx + \lambda \int |v_n(x + y_n)|^2\, dx \\
&= \int |\nabla v_n(z)|^2\, dz + \lambda \int |v_n(z)|^2\, dz \\
&= \|v_n\|_\lambda^2
\end{aligned}$$

e

$$\int_{B_1} \tilde{v}_n^2\, dx = \int_{B_1} v_n^2(x + y_n)\, dx = \int_{B_1 + y_n} v_n^2(z)\, dz \geq \alpha.$$

Sabemos que $(\tilde{v}_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, já que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Podemos então obter $\tilde{v}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ de modo que, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_n &\rightharpoonup \tilde{v}, && \text{em } H^1(\mathbb{R}^N); \\
\tilde{v}_n(x) &\to \tilde{v}(x), && \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como o operador restrição de $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^1(B_1)$ é contínuo, e a imersão

$$H^1(B_1) \hookrightarrow L^r(B_1), \quad 1 \leq r < 2^*$$

é compacta, temos que

$$\tilde{v}_n \to \tilde{v}, \quad \text{em } L^2(B_1).$$

Assim,

$$\int_{B_1} \tilde{v}^2\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_{B_1} \tilde{v}_n^2\, dx \geq \alpha > 0,$$

e portanto $\tilde{v} \neq 0$.

Considere agora $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, denotando $\phi_n(x) = \phi(x - y_n)$ e fazendo a mudança de variáveis $x = z + y_n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{I'_\lambda(t_n v_n)}{t_n}(\phi_n) &= \int \Big(\nabla v_n(x) \nabla \phi_n(x) + \lambda v_n(x) \phi_n(x)\Big)\, dx - \int f(x, t_n v_n(x)) v_n(x) \phi_n(x)\, dx \\
&= \int \Big(\nabla v_n(z + y_n) \nabla \phi_n(z + y_n) + \lambda v_n(z + y_n) \phi_n(z + y_n)\Big)\, dz \\
&- \int f(z + y_n, t_n v_n(z + y_n)) v_n(z + y_n) \phi_n(z + y_n)\, dz \\
&= \int \Big(\nabla \tilde{v}_n(z) \nabla \phi(z) + \lambda \tilde{v}_n(z) \phi(z)\Big)\, dz - \int f(z + y_n, t_n v_n(z + y_n)) v_n(z + y_n) \phi(z)\, dz.
\end{aligned}$$

Por (ii), temos

$$\frac{I'_\lambda(t_n v_n)}{t_n}\phi_n = o(1),$$

logo vamos analisar a convergência de

$$\int \Big(\nabla \tilde{v}_n.\nabla\phi + \lambda\tilde{v}_n\phi\Big)dz$$

e de

$$\int f(z+y_n, t_n v_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\phi(z)\,dz.$$

Uma vez que $\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}$, obtemos

$$\int \Big(\nabla \tilde{v}_n.\nabla\phi + \lambda\tilde{v}_n\phi\Big)\,dz \to \int \Big(\nabla \tilde{v}\nabla\phi + \lambda\tilde{v}\phi\Big)\,dz.$$

Vamos agora analisar a convergência de $\displaystyle\int f(z+y_n, t_n v_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\phi(z)\,dz$. Primeiramente note que estamos assumindo $f(x,s)=0$ para $s\le 0$ e assim $f(z+y_n, t_n v_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\ge 0$. Agora, como $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$, em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, então $|t_n\tilde{v}_n|\to\infty$ e assim, utilizando $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty,\, s\to\infty} f(x,s) = l_\infty$, chegamos em

$$f(z+y_n, t_n v_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\phi(z) \;\to\; l_\infty \tilde{v}^+(z)\phi(z),$$

em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, quando $n\to\infty$.

Temos, como antes, que $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$ em $L^1(B_R)$, onde $supp(\phi)\subset B_R$. Lembramos agora do Teorema 1.13, que nos diz que se tivermos uma sequência $(u_n)\subset L^p(\Omega)$ com Ω limitado, e $u\in L^p(\Omega)$ tal que $\|u_n-u\|_{L^p(\Omega)}\to 0$, então existe uma subsequência u_{n_k} tal que $u_{n_k}(x)\to u(x)$, em quase todo ponto de Ω e além disso, existe uma função $r\in L^p(\Omega)$ tal que $|u_{n_k}(x)|\le r(x)$, em quase todo ponto de Ω. No nosso caso, existe $r\in L^1(B_R)$ tal que, a menos de subsequência,

$$|\tilde{v}_n(x)|\le r(x), \;\text{ em }\; B_R,$$

e

$$\Big|f(z+y_n, t_n v_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\phi(z)\Big| \le Cr(z), \quad \forall\, z\in\mathbb{R}^N \;\; e \;\; C = l_\infty\|\phi\|_\infty.$$

Como $|y_n|\to\infty$ e $t_n\to\infty$, segue do Teorema 1.10 da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int f(z+y_n, t_n v_n(z+y_n))v_n(z+y_n)\phi(z)\,dz \to \int l_\infty \tilde{v}^+(z)\phi(z)\,dz.$$

Assim, concluímos que

$$\int \Big(\nabla\tilde{v}\nabla\phi + \lambda\tilde{v}\phi\Big)\,dz - \int l_\infty\tilde{v}^+(z)\phi(z)\,dz = 0, \qquad \forall\,\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Desta forma, $\tilde{v}$ é uma solução fraca não trivial do problema

$$-\Delta\tilde{v} = (l_\infty - \lambda)\tilde{v}, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado, sabemos que se $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ for uma solução fraca do problema limite

$$-\Delta u + \lambda u = l_\infty u, \quad \lambda > 0,$$

então $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ e portanto, para nosso caso particular, teremos $\tilde{v} \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Mas isso gera uma contradição, pois se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ é solução do problema do autovalor

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

então $u = 0$. Portanto, a contradição vem de supormos que (y_n) não é limitado, logo (y_n) deve ser limitado e temos o resultado. □

Eis nosso segundo principal lema desta seção.

Lema 2.4. *Sob a hipótese (f_1), assuma que $\lim_{s\to\infty} f(x,s) = g(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, $\liminf_{|x|\to\infty} g(x) = l_\infty \in \mathbb{R}$ e sejam $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ sequências satisfazendo*

(i) $v_n \rightharpoonup v, v_n(x) \to v(x)$, para algum $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $\dfrac{I'_\lambda(t_n v_n)}{t_n} \to 0$, quando $n \to \infty$;

Se $t_n \to \infty$, então $v = 0$ ou $\lambda = -\Lambda$, onde Λ é dado por (2.4).

Demonstração. Vamos assumir que $v \neq 0$ e concluir que necessariamente $\lambda = -\Lambda$. De fato, usando (ii) obtemos, para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrário, que

$$\int (\nabla v_n . \nabla \phi + \lambda v_n \phi)\, dx - \int f(x, t_n v_n) v_n \phi \, dx = \frac{I'_\lambda(t_n v_n)}{t_n}\phi = o(1). \tag{2.7}$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int (\nabla v_n \nabla \phi + \lambda v_n \phi)\, dx \to \int (\nabla v \nabla \phi + \lambda v \phi)\, dx.$$

Como feito no Lema 2.3, tem-se

$$f(x, t_n v_n(x)) v_n(x) \phi(x) \to g(x) v^+(x) \phi(x), \quad \text{em quase todo ponto de } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left| f(x, t_n v_n) v_n \phi \right| \leq Cr,$$

para algum $r \in L^1(B_R)$ com $C = \|g\|_\infty \|\phi\|_\infty, \forall\, x \in \mathbb{R}^N$, de modo que o Teorema 1.10 da Convergência Dominada de Lebesgue e o fato de que $t_n \to \infty$, nos fornecem

$$\int f(x, t_n v_n) v_n \phi \, dx \to \int g(x) v^+ \phi \, dx.$$

Assim passando (2.7) ao limite, temos que

$$\int (\nabla v \nabla \phi + \lambda v \phi)\, dx - \int g(x) v^+ \phi \, dx = 0, \tag{2.8}$$

e considerando $\phi = v^-$, obtemos

$$\|v^-\|_\lambda^2 = \int (\nabla v^- \nabla v^- + \lambda v^- v^-)\, dx = \int g(x) v^+ v^- \, dx = 0$$

e segue que $v = v^+ \geq 0$ é uma solução fraca de $-\Delta v + \lambda v = g(x) v$. Concluímos pelo Princípio do Máximo que $v(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, por regularidade elíptica, que $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, segue da identidade de Green que

$$\int \Big[-\Delta v + (\lambda - g(x))v \Big] \phi \, dx = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Sabemos, agora, do resultado que diz que se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que $\displaystyle\int_\Omega u\phi \, dx = 0$, $\forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $u = 0$, em quase todo ponto de Ω e assim, no nosso caso, temos que

$$-\Delta v + (\lambda - g(x))v = 0, \quad \text{em quase todo ponto de} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.9}$$

desde que $-\Delta v + (\lambda - g(x))v$ esteja em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Como $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$, então $-\Delta v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, logo $-\Delta v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e, analogamente, $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, como $-g(x) \leq \|g\|_\infty < \infty$, então $-\displaystyle\int_K g(x)\, dx \leq \|g\|_\infty |K| < \infty$, já que K é limitado, então teremos

$$\begin{aligned} \int_K \Big(-\Delta v + (\lambda - g(x))v \Big) dx &= \int_K -\Delta v \, dx + \lambda \int_K v \, dx - \int_K g(x) v \, dx \\ &\leq \int_K -\Delta v \, dx + \lambda \int_K v \, dx + \|g\|_\infty \int_K v \, dx < \infty. \end{aligned}$$

Ainda por (2.9), concluímos que

$$Sv = -\lambda v, \tag{2.10}$$

onde $Sv = -\Delta v - g(x)v$.

Assim, v é uma autofunção positiva de S com o autovalor $-\lambda$. Tomando $\phi = v$ em (2.8) com $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$, obtemos

$$\int \Big(|\nabla v|^2 - g(x) v^2 \Big) dx = -\lambda$$

e assim, pela definição de $\mathit{\Lambda}$, tem-se

$$\mathit{\Lambda} \leq -\lambda. \tag{2.11}$$

Lembrando também que $\mathit{\Lambda} \leq -l_\infty$ por (2.6), vamos considerar dois casos:

Caso 1) $\Lambda < -l_\infty$.
Considerando

$$\begin{aligned} S_0 : D(S_0) &\to L^2(\mathbb{R}^N) \\ u &\mapsto S_0(u) = -\Delta u + v(x)u, \end{aligned}$$

com $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $D(S_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ e se

$$\liminf_{|x| \to \infty} v(x) = \lim_{r \to \infty} \inf_{|x| \to r} v(x) \geq \alpha,$$

então o operador S_0 é limitado inferiormente. Além disso, para cada $a' < a$ temos que $\sigma(S_0) \cap (-\infty, a')$ consiste de um número finito de elementos (autovalores de multiplicidade finita) pertencentes a $\sigma_d(S_0)$.

Desta forma, para o nosso caso, temos que S possui um número finito de autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ ou uma sequência (λ_n) de autovalores tal que $\lambda_n \to -l_\infty$, onde cada λ_i possui multiplicidade finita para cada i.

Lembramos agora do resultado, que pode ser visto em [4], que nos diz que se $T : D(T) \subset H \to H$ for um operador auto-adjunto, semi limitado inferiormente e $K \subset H$ um subespaço denso no qual T é auto-adjunto e da caracterização variacional dos autovalores, temos que

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq x \in K} \frac{\langle Tx, x\rangle_\lambda}{\langle x, x\rangle_\lambda} \quad \text{e} \quad \lambda_{n+1} = \sup_{L \subset K} \inf_{0 \neq x \in K \cap L^\perp} \frac{\langle Tx, x\rangle_\lambda}{\langle x, x\rangle_\lambda}.$$

Logo, temos que $\varLambda$ é o menor autovalor de S, ou seja, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$, tal que

$$\int \left(|\nabla u_0|^2 - g(x) u_0^2 \right) dx = \varLambda, \tag{2.12}$$

onde u_0 é a autofunção correspondente ao autovalor $\varLambda$. Usando (2.12), temos que $u_0 \geq 0$. Lembramos agora do resultado que nos diz que se $u \geq 0$ é solução fraca não trivial de $-\Delta u + \lambda u = g(x)u$, então $u > 0$. Obtemos assim que $u_0 > 0$. Logo

$$\varLambda = -\lambda,$$

já que, caso contrário, S teria duas autofunções positivas, v e u_0, associadas a autovalores distintos, o que é um absurdo, pois autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais.

Caso 2) $\Lambda = -l_\infty$.

No Caso 2, temos $\varLambda = -l_\infty \leq -\lambda$ e, novamente, mostraremos que $\varLambda = -l_\infty = -\lambda$. De fato, se $\varLambda = -l_\infty < -\lambda$, definimos $\delta := \dfrac{l_\infty - \lambda}{2} > 0$ e seja $R_1 > 0$, tal que

$$g(x) \geq l_\infty - \delta, \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_1, \tag{2.13}$$

e tome $R_2 > R_1$ suficientemente grande, tal que

$$0 < \mu_1 \leq \frac{\delta}{2}, \tag{2.14}$$

onde μ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ no anel $A = \{x \mid R_1 < |x| < R_2\}$ com a condição de contorno de Dirichlet. Seja ψ a autofunção correspondente e, por ter sinal definido, tomamos, sem perda de generalidade, $\psi > 0$, e obtemos de (2.10) e (2.13) que

$$\begin{aligned} Sv &= -\lambda v \quad \Rightarrow \\ -\Delta v - gv &= -\lambda v \quad \Rightarrow \\ \int_A -\Delta v \psi \, dx - \int_A g v \psi \, dx &= -\lambda \int_A v \psi \, dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_A -\Delta v\psi\, dx &= \int_A (g-\lambda)v\psi\, dx \\
&\geq \int_A (l_\infty - \delta - \lambda)v\psi\, dx \\
&= \int_A \Big(l_\infty - \frac{(l_\infty-\lambda)}{2} - \lambda\Big)v\psi\, dx \\
&= \int_A \frac{(l_\infty-\lambda)}{2} v\psi\, dx \\
&= \delta \int_A v\psi\, dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_A (-\Delta v)\psi\, dx \geq \delta \int_A v\psi\, dx. \tag{2.15}$$

Por outro lado, como

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \mu_1\psi & \text{em } A \\ \psi = 0, & \text{em } \partial A \end{cases}$$

e, pelo Lema 1.1 de Hopf,

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} < 0, \quad \text{em } \partial A$$

(note que estamos usando $L\psi = -\Delta\psi > 0$ e que L está na forma divergente), usamos a identidade de Green

$$\int_A (-\Delta v)\psi\, dx = \int_A (-\Delta\psi)v\, dx + \int_{\partial A} v\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dx - \int_{\partial A} \psi\frac{\partial v}{\partial n}\, dx$$

para concluir que

$$\int_A (-\Delta v)\psi\, dx \leq \int_A (-\Delta\psi)v\, dx = \mu_1 \int_A v\psi\, dx,$$

e como $0 < \mu_1 \leq \frac{\delta}{2}$, então

$$\int_A (-\Delta v)\psi\, dx \leq \frac{\delta}{2} \int_A v\psi\, dx,$$

o que contradiz (2.15). Portanto, também devemos ter $\Lambda = -\lambda$ no Caso 2. Assim a prova fica completa. □

A seguir apresentaremos uma proposição fundamental para a demonstração da condição de Cerami.

Proposição 2.1. *Assuma as condições $(f_1) - (f_4)$ e suponha que (u_n) é uma sequência de Cerami no nível $c > 0$ para o funcional I_λ. Então (u_n) é limitada desde que $\lambda \neq -\Lambda$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que (u_n) é uma sequência de Cerami no nível $c > 0$ para o funcional I_λ com $\|u_n\|_\lambda \to \infty$. Defina $v_n = 2\sqrt{c}\Big(\frac{u_n}{\|u_n\|_\lambda}\Big)$. Então, $\|v_n\|_\lambda = 2\sqrt{c}$ e assim (v_n) é limitado.

Vamos agora usar o Teorema 1.6, que nos diz que se X é um espaço de Banach reflexivo e se (u_n) é uma sequência limitada em X, então (u_n) possui uma subsequência que converge fracamente. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach reflexivo, temos que existe $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v, \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^N) \qquad \text{e}$$

$$v_n(x) \to v(x), \text{ em quase todo ponto de } \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado, o operador restrição de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(B_R)$ é contínuo e a imersão de $H^1(B_R)$ em $L^p(B_R)$, $1 \leq p < 2^*$ é compacta, logo

$$v_n \to v, \quad \text{em} \quad L^p(B_R),$$

para todo $R > 0$. Em outras palavras, temos que $v_n \to v$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para qualquer $2 \leq p < 2^*$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $2^* = \infty$ se $N = 1, 2$.

Como (u_n) é uma sequência de Cerami no nível c, obtemos

$$\Big(1 + \|u_n\|_\lambda\Big)\|I'_\lambda(u_n)\| \to 0$$

e assim

$$\|u_n\|_\lambda \|I'_\lambda(u_n)\| \leq \Big(1 + \|u_n\|_\lambda\Big)\|I'_\lambda(u_n)\|$$

logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\|u_n\|_\lambda \|I'_\lambda(u_n)\| \leq \frac{1}{n}. \tag{2.16}$$

Então, (2.16) e (f_2) implicam que

$$I_\lambda(\tau u_n) \leq \frac{1+\tau^2}{2n} + I_\lambda(u_n) \tag{2.17}$$

para todo $\tau > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. De fato, considere

$$F(x,s) := \int_0^s f(x,\tau)\tau \, d\tau$$

e o funcional

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda - \int F(x, u(x))\, dx,$$

para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I_\lambda(u_n) \to c$, $\|u_n\|_\lambda \to \infty$ e $\|I'_\lambda(u_n)\|\|u_n\|_\lambda < \dfrac{1}{n}$, logo

$$-\frac{1}{n} < I'_\lambda(u_n)u_n = \|u_n\|^2_\lambda - \int f(x,u_n)u_n^2\, dx < \frac{1}{n}. \tag{2.18}$$

Defina

$$\theta(\tau) := \frac{1}{2}\tau^2 f(x,u_n)u_n^2 - F(x, \tau u_n),$$

logo

$$\theta'(\tau) = \tau f(x,u_n)u_n^2 - f(x,\tau u_n)\tau u_n^2 = \tau u_n^2\Big[f(x,u_n) - f(x,\tau u_n)\Big],$$

e como f é não decrescente na segunda coordenada e $\tau u_n^2 > 0$, temos que

$$\begin{cases} \theta'(\tau) \geq 0, & 0 < \tau \leq 1 \\ \theta'(\tau) \leq 0, & \tau \geq 1 \end{cases}$$

portanto $\tau = 1$ é o ponto de máximo de θ, para $\tau > 0$, logo

$$\theta(\tau) \leq \theta(1). \tag{2.19}$$

Por outro lado, de (2.18) e (2.19), temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(\tau u_n) &= \frac{1}{2}\tau^2\|u_n\|_\lambda^2 - \int F(x,\tau u_n)\,dx \\
&< \frac{\tau^2}{2}\Big[\frac{1}{n} + \int f(x,u_n)u_n^2\,dx\Big] - \int F(x,\tau u_n)\,dx \\
&= \frac{\tau^2}{2n} + \int \Big[\frac{\tau^2}{2} f(x,u_n)u_n^2 - F(x,\tau u_n)\Big]dx \\
&\leq \frac{\tau^2}{2n} + \int \Big[\frac{1}{2} f(x,u_n)u_n^2 - F(x,u_n)\Big]\,dx.
\end{aligned}$$

Além disso, por (2.18), temos

$$I_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 - \int F(x,u_n)\,dx \geq \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{n} + \int f(x,u_n)u_n^2\,dx\Big] - \int F(x,u_n)\,dx,$$

o que implica em

$$\int \Big[\frac{1}{2} f(x,u_n)u_n^2 - F(x,u_n)\Big]\,dx \leq I_\lambda(u_n) + \frac{1}{2n}$$

e assim

$$I_\lambda(\tau u_n) \leq \frac{\tau^2}{2n} + \frac{1}{2n} + I_\lambda(u_n) = \frac{1+\tau^2}{2n} + I_\lambda(u_n),$$

e provamos (2.17) .

Considere $v_n = \tau_n u_n$, com $\tau_n = \dfrac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|_\lambda} \to 0$, logo

$$\begin{aligned}
I_\lambda(v_n) &= I_\lambda(\tau_n u_n) \\
&\leq \frac{1+\tau_n^2}{2n} + I_\lambda(u_n) \\
&\leq I_\lambda(u_n) + o(1) \\
&= c + o(1),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

para n suficientemente grande.

Afirmação: $v \neq 0$.

Para provar essa afirmação, precisamos das seguintes estimativas, que vamos demonstrar logo em seguida

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2} f(x,s)s^2 \tag{2.21}$$

e

$$|f(x,s)s^2| \leq \varepsilon s^2 + C(\varepsilon,q)s^q, \tag{2.22}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R}^+, \varepsilon > 0$ e $2 < q \leq 2^*$. De fato, como $f(x,s)$ é não decrescente em s, segue que

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)t\,dt \leq f(x,s)\int_0^s t\,dt = \frac{1}{2} f(x,s)s^2,$$

provando assim a estimativa dada em (2.21). Agora por (f_1), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|f(x,s)| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad s < \delta,$$

e por (f_2), existe $K \geq 1$ de modo que

$$f(x,s) < g(x) + \varepsilon \leq \|g\|_\infty + \varepsilon = C_\varepsilon, \quad \text{para} \quad s > K.$$

Assim temos, para $2 < q \leq 2^*$, que

$$f(x,s)s^2 < \varepsilon s^2, \quad \text{para} \quad s < \delta$$

$$f(x,s)s^2 < C_\varepsilon s^2 < C_\varepsilon s^q, \quad \text{para} \quad s > K.$$

Definimos agora, para cada $q \in (2, 2^*]$

$$\begin{aligned} \phi_q : [\delta, K] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \phi_q(s) = \frac{f(x,s)s^2}{s^q}. \end{aligned}$$

Logo, ϕ_q é contínua e assume máximo no compacto $[\delta, K]$, isto é,

$$\frac{f(x,s)s^2}{s^q} \leq C(\varepsilon, q), \quad \text{para s pertencente a} \quad [\delta, K],$$

e está provada a estimativa (2.22).

A fim de provar que $v \neq 0$, consideramos a função concentração de $|v_n|^2$, dada por

$$Q_n(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_t} |v_n|^2 \, dx, \quad t > 0.$$

Agora, se $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(t_0) = 0$, para algum $t_0 > 0$, o Lema 1.2 de Lions nos fornece $v_n \to 0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $2 < p < 2^*$. Assim, por (2.21) e (2.22), temos

$$\begin{aligned} \int F(x, v_n)\, dx &\leq \frac{1}{2}\int f(x,v_n)v_n^2\, dx \\ &\leq \int \Big(\frac{1}{2}\varepsilon |v_n|^2 + C(\varepsilon,q)|v_n|^q\Big)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon \|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C(\varepsilon,q)\|v_n\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} = o(1), \end{aligned}$$

portanto

$$I_\lambda(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2_\lambda - \int F(x,v_n)\, dx \geq 2c + o(1),$$

o que contradiz (2.20), já que $c > 0$. Portanto, podemos assumir que $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(t) > 0$, $\forall\, t > 0$ e, em particular para $t = 1$ temos, a menos de subsequência,

$$Q_n(1) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_1} |v_n|^2 \, dx > \alpha > 0$$

para algum $\alpha > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue, para alguma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, que

$$\int_{y_n+B_1} |v_n|^2 \, dx \geq \alpha > 0.$$

De fato, se

$$\int_{y_n+B_1} |v_n|^2 \, dx < \alpha$$

para toda sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, então, em particular, para a sequência constante $y_n = y$, teremos

$$Q_n(1) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_1} |v_n|^2 \, dx < \alpha,$$

o que é um absurdo.

Em vista de (2.16), tomando $t_n := \tau_n^{-1} = \dfrac{\|u_n\|_\lambda}{2\sqrt{c}}$, temos que

$$\begin{aligned} t_n &\to \infty, \\ t_n v_n &= u_n \quad \text{e} \\ \|I'_\lambda(t_n v_n)\| &= \|I'_\lambda(u_n)\| \to 0. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos aplicar o Lema 2.3, para concluir que (y_n) é limitado, digamos $\|y_n\| \leq R$ para algum $R > 0$. Portanto, como $y_n + B_1 \subset B_{R+1}$, obtemos

$$\int_{y_n+B_1} |v_n|^2 \, dx \leq \int_{B_{R+1}} |v_n|^2 \, dx$$

e assim

$$\int_{B_{R+1}} |v_n|^2 \, dx \geq \alpha > 0$$

e, como $v_n \to v$ em $L^2(B_{R+1})$, segue que

$$\int_{B_{R+1}} |v|^2 \, dx \geq \alpha > 0,$$

mostrando que de fato $v \neq 0$.

Por fim, como $v \neq 0$ e $\lambda \neq -\Lambda$, a contrapositiva do Lema 2.4, nos mostra que não podemos ter $t_n = \dfrac{\|u_n\|_\lambda}{2\sqrt{c}} \to \infty$, logo devemos ter (u_n) limitada. A prova está completa. □

Para provar nosso próximo teorema, vamos precisar do seguinte lema, cuja formulação e demonstração podem ser encontradas em Kavian [12] e Lions [14].

Lema 2.5. *(Lema de Concentração e Compacidade de Lions) Seja (ρ_n) uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $\rho_n > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e*

$$\int \rho_n \, dx = \alpha,$$

onde $\alpha > 0$ é um número real fixado. Então existe uma subsequência (ρ_{n_k}) satisfazendo uma das três condições:

(i)(Anulamento) Para todo $t > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{y+B_t} \rho_{n_k}\, dx = 0;$$

(ii) (Dicotomia) Existe $\alpha_0 \in (0,\alpha)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existem $k_0 \geq 1$, uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, $R > 0$ e uma sequência $(R_n) \subset \mathbb{R}^+$ com $R < R_1$ e $R_n < R_{n+1} \to \infty$, de modo que, se:

$$\overline{\rho}_n = \rho_n \chi_{_{\{|x-y_n|\leq R\}}} \quad e \quad \hat{\rho}_n = \rho_n \chi_{_{\{|x-y_n|\geq R_n\}}},$$

onde $\chi_{_A}$ denota a função característica de A, então

$$\Big| \int \overline{\rho}_k(x)\, dx - \alpha_0 \Big| \leq \varepsilon, \qquad \Big| \int \hat{\rho}_n(x)\, dx - (\alpha - \alpha_0) \Big| \leq \varepsilon \quad e$$

$$\int \Big| \rho_{n_k}(x) - (\overline{\rho}_k + \hat{\rho}_k)(x) \Big|\, dx \leq \varepsilon,$$

para todo $k \geq k_0$ e

$$dist\Big(supp(\overline{\rho}_k), supp(\hat{\rho}_k)\Big) \to \infty,$$

quando $k \to \infty$;

(iii) (Compacidade) Existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ de modo que

$$\int_{y_k+B_R} \rho_{n_k}\, dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

para todo k.

Agora, relembrando a definição da função $h(s)$ em (f_3), vamos considerar o funcional

$$I_\lambda^\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int H(u)\, dx, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2.23}$$

onde $H(s) = \displaystyle\int_0^s h(t)t\, dt$. Temos que $I_\lambda^\infty \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, é tal que

$$I_\lambda^{\infty\prime}(u)v = \int (\nabla u \nabla v + \lambda uv)\, dx - \int h(u)uv\, dx, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Definimos a variedade de Nehari dada por

$$M_\lambda^\infty = \Big\{ u \neq 0 \;\Big|\; I_\lambda^{\infty\prime}(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \int h(u)u^2\, dx = 0 \Big\} \subset H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.24}$$

Também definimos

$$\begin{aligned} 0 < m_\lambda^\infty &= \inf_{u\in M_\lambda^\infty} I_\lambda^\infty(u), \quad \text{se } M_\lambda^\infty \neq \varnothing \\ \text{e} \qquad m_\lambda^\infty &= \infty, \qquad\qquad\quad \text{se } M_\lambda^\infty = \varnothing. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Estamos prontos para enunciar e provar nosso principal resultado de compacidade.

Teorema 2.2. *Assuma $(f_1)-(f_4)$. Se $0<\lambda<|\Lambda|$, então o funcional I_λ satisfaz a condição de Cerami $(Ce)_c$, para todo $0<c<m_\lambda^\infty$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cerami no nível $c\in(0,m_\lambda^\infty)$, ou seja

$$I_\lambda(u_n)=\frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2-\int F(x,u_n)\,dx \quad\to\quad c<m_\lambda^\infty \tag{2.26}$$

e

$$\left|I_\lambda'(u_n)\phi\right|=\left|\int\Big(\nabla u_n\nabla\phi+\lambda u_n\phi\Big)\,dx-\int f(x,u_n)u_n\phi\,dx\right|\le o(1)\|\phi\|_\lambda. \tag{2.27}$$

Como $\lambda\neq-\Lambda$, então, pela Proposição 2.1, (u_n) é limitado e, sem perda de generalidade, vamos assumir que $\|u_n\|_\lambda>0,\ \ \forall\,n\in\mathbb{N}$. Definimos

$$\rho_n:=|\nabla u_n|^2+\lambda|u_n|^2,$$

logo (ρ_n) é uma sequência em $L^1(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int\rho_n\,dx=\int|\nabla u_n|^2\,dx+\lambda\int|u_n|^2\,dx=\|u_n\|_\lambda^2<\infty,$$

e passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\int\rho_n\,dx\to\alpha\ge0,$$

quando $n\to\infty$. Se $\alpha=0$, então $\|u_n\|_\lambda^2\to0$ e por

$$f(x,s)s^2\le\varepsilon s^2+C(\varepsilon,q)s^q$$

e

$$F(x,s)\le\frac{1}{2}f(x,s)s^2,$$

juntamente com as imersões de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, para $2\le q<2^*$, temos que

$$\begin{aligned}\int F(x,u_n)\,dx &\le \frac{1}{2}\int f(x,u_n)u_n^2\,dx\\ &\le \frac{1}{2}\int\Big(\varepsilon|u_n|^2+C(\varepsilon,q)|u_n|^q\Big)\,dx\\ &\le \frac{1}{2}\varepsilon\|u_n\|_\lambda^2+C(\varepsilon,q)\|u_n\|_\lambda^q \quad\to\quad 0,\end{aligned}$$

logo $I_\lambda(u_n)=\dfrac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2-\displaystyle\int F(x,u_n)\,dx\to0$, o que é uma contradição, pois $I_\lambda(u_n)\to c>0$. Portanto, $\alpha>0$.

Definimos agora

$$\tilde\rho_n=\frac{\rho_n}{\displaystyle\int\rho_n\,dx},$$

de modo que $\displaystyle\int\tilde\rho_n\,dx=1>0,\forall\,n\in\mathbb{N}$. Como $(\tilde\rho_n)$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.5 de Concentração e

Compacidade de Lions para $\alpha = 1$, podemos assumir que (ρ_n) está nas hipóteses do lema, logo

$$\int \rho_n \, dx = \|u_n\|_\lambda^2 \to \alpha > 0.$$

Vamos considerar cada uma das três possibilidades que pode ocorrer:

1. Anulamento: Suponha que o anulamento ocorra, isto é, para todo $t > 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{y+B_t} \left(|\nabla u_n|^2 + \lambda |u_n|^2\right) dx = 0.$$

Neste caso, como vimos na prova da Proposição 2.1, pelo Lema 1.2 de Lions, temos que $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para qualquer $2 < p < 2^*$. Por (2.22), chegamos em

$$\int f(x,u_n)(u_n)^2 \, dx \le \varepsilon \|u_n\|_\lambda^2 + C(\varepsilon,q)\|u_n\|_\lambda^q, \qquad \text{para } \ q \in (2,2^*). \tag{2.28}$$

Tomando $\phi = u_n$ em (2.27), seque que

$$I'_\lambda(u_n)u_n = \|u_n\|_\lambda^2 - \int f(x,u_n)u_n^2 \, dx \le o(1)\|u_n\|_\lambda, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e por (2.28), obtemos

$$I'_\lambda(u_n)u_n \ge \|u_n\|_\lambda^2 - \varepsilon\|u_n\|_\lambda^2 - C(\varepsilon,q)\|u_n\|_\lambda^q.$$

Como (u_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \to 0$ e $\|u_n\|_\lambda^2 \to \alpha > 0$, então para todo $\varepsilon > 0$ pequeno, temos

$$o(1) + \frac{\alpha}{2} \le I'_\lambda(u_n)u_n \le o(1),$$

o que é uma contradição, logo não ocorre o anulamento.

2. Dicotomia: Suponha que a dicotomia ocorra. Então existe α_0 tal que $0 < \alpha_0 < \alpha$ onde, para $\varepsilon > 0$ dado, existem $R > 0$ e sequências

$$(y_n) \subset \mathbb{R}^N, \quad (R_n) \subset \mathbb{R}^+,$$

com $R < R_1$, $R_n < R_{n+1} \to \infty$, tal que

$$\alpha_0 - \varepsilon \le \int_{|x-y_n|\le R/2} \left(|\nabla u_n|^2 + \lambda|u_n|^2\right) dx \le \alpha_0 + \varepsilon, \tag{2.29}$$

$$\alpha - \alpha_0 - \varepsilon \le \int_{|x-y_n|\ge 3R_n} \left(|\nabla u_n|^2 + \lambda|u_n|^2\right) dx \le (\alpha - \alpha_0) + \varepsilon, \tag{2.30}$$

e, em particular, sabendo que

$$\alpha + o(1) = \int \left(|\nabla u_n|^2 + \lambda|u_n|^2\right) dx,$$

teremos

$$\begin{aligned}\int_{R/2\le|x-y_n|\le 3R_n}\Big(|\nabla u_n|^2+\lambda|u_n|^2\Big)\,dx &= \alpha+o(1)-\int_{|x-y_n|\ge 3R_n}\Big(|\nabla u_n|^2+\lambda|u_n|^2\Big)\,dx\\ &- \int_{|x-y_n|\le R/2}\Big(|\nabla u_n|^2+\lambda|u_n|^2\Big)\,dx\\ &\le \alpha+o(1)-\alpha_0+\varepsilon-\alpha+\alpha_0+\varepsilon\\ &= 2\varepsilon+o(1),\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{R/2\le|x-y_n|\le 3R_n}\Big(|\nabla u_n|^2+\lambda|u_n|^2\Big)\,dx\le 2\varepsilon+o(1). \tag{2.31}$$

Considere $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $0\le\zeta(x)\le 1$ e

$$\zeta(x)=\begin{cases}1, & se\ \ |x|\le 1,\\ 0, & se\ \ |x|\ge 2,\end{cases}$$

e considere também $\varphi=1-\zeta$, logo $0\le\varphi\le 1$ e

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & se\ \ |x|\le 1,\\ 1, & se\ \ |x|\ge 2.\end{cases}$$

Definimos as sequências

$$\zeta_n(x)=\zeta\Big(\frac{x-y_n}{R}\Big)\ \text{ e }\ \varphi_n(x)=\varphi\Big(\frac{x-y_n}{R_n}\Big),\ \text{ para }\ x\in\mathbb{R}^N,$$

e defina também

$$u_n^1(x):=\zeta_n(x)u_n(x)\ \text{ e }\ u_n^2(x):=\varphi_n(x)u_n(x).$$

Logo, temos que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n^1(x)=\begin{cases}u_n(x), & se\ \ |x-y_n|\le R,\\ 0, & se\ \ |x-y_n|\ge 2R,\end{cases}$$

e

$$u_n^2(x)=\begin{cases}0, & se\ \ |x-y_n|\le R_n,\\ u_n(x), & se\ \ |x-y_n|\ge 2R_n.\end{cases}$$

Afirmamos que

$$I_\lambda(u_n)\ge I_\lambda(u_n^1)+I_\lambda(u_n^2)-C\varepsilon, \tag{2.32}$$

para $C>0$. De fato, denotando por

$$\rho_n^i=|\nabla u_n^i|^2+\lambda(u_n^i)^2,\quad i=1,2,$$

temos

$$\Big|I_\lambda(u_n)-I_\lambda(u_n^1)-I_\lambda(u_n^2)\Big|=$$

$$\Big|\frac{1}{2}\int\rho_n\,dx-\int F(x,u_n)\,dx-\frac{1}{2}\int\rho_n^1\,dx+\int F(x,u_n^1)\,dx-\frac{1}{2}\int\rho_n^2\,dx+\int F(x,u_n^2)\,dx\Big|.$$

Definindo $A_n := \Big\{x \in \mathbb{R}^N \;\Big|\; \dfrac{R}{2} \le |x-y_n| \le 3R_n\Big\}$, temos:

$$\begin{aligned}\int \rho_n\,dx - \int \rho_n^1\,dx - \int \rho_n^2\,dx &= \int_{|x-y_n|\le R/2} \rho_n\,dx + \int_{A_n} \rho_n\,dx + \int_{|x-y_n|\ge 3R_n} \rho_n\,dx\\ &- \int_{|x-y_n|\le R/2} \rho_n^1\,dx - \int_{A_n} \rho_n^1\,dx - \int_{|x-y_n|\ge 3R_n} \rho_n^1\,dx\\ &- \int_{|x-y_n|\le R/2} \rho_n^2\,dx - \int_{A_n} \rho_n^2\,dx - \int_{|x-y_n|\ge 3R_n} \rho_n^2\,dx,\end{aligned}$$

e pela definição de u_n^i e de ρ_n, temos que

$$\int \rho_n\,dx - \int \rho_n^1\,dx - \int \rho_n^2\,dx = \int_{A_n} \rho_n\,dx - \int_{A_n} \rho_n^1\,dx - \int_{A_n} \rho_n^2\,dx,$$

e, analogamente,

$$-\int F(x,u_n)\,dx + \int F(x,u_n^1)\,dx + \int F(x,u_n^2)\,dx = -\int_{A_n} F(x,u_n)\,dx + \int_{A_n} F(x,u_n^1)\,dx + \int_{A_n} F(x,u_n^2)\,dx.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\Big|I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u_n^1) - I_\lambda(u_n^2)\Big| &= \Big|\frac{1}{2}\int_{A_n} \rho_n\,dx - \int_{A_n} F(x,u_n)\,dx - \frac{1}{2}\int_{A_n} \rho_n^1\,dx\\ &+ \int_{A_n} F(x,u_n^1)\,dx - \frac{1}{2}\int_{A_n} \rho_n^2\,dx + \int_{A_n} F(x,u_n^2)\,dx\Big|. \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Temos $\displaystyle\int_{A_n} \rho_n\,dx \le 2\varepsilon + o(1)$, por (2.31). Vamos agora estimar os outros termos da expressão dada em (2.33), vamos estimar primeiramente $\displaystyle\int_{A_n} |\nabla u_n^1|^2\,dx$. Como

$$\nabla u_n^1 = \frac{1}{R}(\nabla\zeta_n)u_n + \zeta_n(\nabla u_n),$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{A_n} |\nabla u_n^1|^2\,dx &= \int_{A_n} \Big|\frac{1}{R}(\nabla\zeta_n)u_n + \zeta_n(\nabla u_n)\Big|^2\,dx\\ &\le \frac{2}{R^2}\int_{A_n} |\nabla\zeta_n|^2(u_n)^2\,dx + 2\int_{A_n} \zeta_n|\nabla u_n|^2\,dx\\ &\le \frac{2}{R^2}\int_{A_n} |\nabla\zeta_n|^2(u_n)^2\,dx + 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\dfrac{1}{N/2} + \dfrac{1}{N/(N-2)} = 1$, teremos que

$$\int_{A_n} |\nabla\zeta_n|^2(u_n)^2\,dx \le \Big(\int_{A_n} |\nabla\zeta_n|^N\,dx\Big)^{2/N}\Big(\int_{A_n} |u_n|^{2^*}\,dx\Big)^{2/2^*},$$

e como $\|\nabla\zeta_n\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla\zeta\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}$ e $H^1(A_n) \hookrightarrow L^{2^*}(A_n)$, teremos

$$\int_{A_n} |\nabla\zeta_n|^2(u_n)^2\,dx \leq \|\nabla\zeta\|^2_{L^N(\mathbb{R}^N)}\Big(\int_{A_n}\Big(|\nabla u_n|^2 + \lambda(u_n)^2\Big)\,dx\Big) \leq C\varepsilon.$$

Portanto

$$\int_{A_n} |\nabla u_n^1|^2\,dx \leq C\varepsilon.$$

Agora com o fato de que $|u_n^1| \leq |u_n|$ e usando (2.31), obtemos

$$\int_{A_n} \rho_n^1\,dx \leq C\varepsilon + \int_{A_n} \lambda(u_n)^2\,dx \leq C\varepsilon, \tag{2.34}$$

e, analogamente,

$$\int_{A_n} \rho_n^2\,dx \leq C\varepsilon. \tag{2.35}$$

Como $0 \leq F(x,s) \leq Cs^2$ e $|u_n^1| \leq |u_n|$, segue que

$$\int_{A_n} F(x,u_n^1)\,dx \leq C\int_{A_n}(u_n^1)^2\,dx \leq \int_{A_n}(u_n)^2\,dx \leq C\varepsilon, \tag{2.36}$$

e, portanto,

$$\int_{A_n} F(x,u_n^1)\,dx \leq C\varepsilon \quad \text{ e } \quad \int_{A_n} F(x,u_n^2)\,dx \leq C\varepsilon. \tag{2.37}$$

Assim, segue de (2.33) – (2.37), que

$$\Big|I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u_n^1) - I_\lambda(u_n^2)\Big| \leq C\varepsilon,$$

mostrando (2.32).

Afirmamos agora que

$$\Big|\|u_n^1\|_\lambda^2 - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx\Big| \leq C\varepsilon, \tag{2.38}$$

para alguma constante $C>0$. De fato, da definição de u_n^1, temos

$$\begin{aligned}
&\Big|I'_\lambda(u_n)(u_n^1) - \Big[\|u_n^1\|_\lambda^2 \quad - \quad \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx\Big]\Big| \\
&= \Big|\int_{A_n}\Big(\nabla u_n\nabla u_n^1 + \lambda u_n u_n^1\Big)\,dx \quad - \quad \int_{A_n} f(x,u_n)u_n u_n^1\,dx \\
&\quad - \int_{A_n}\Big(|\nabla u_n^1|^2 + \lambda(u_n^1)^2\Big)\,dx \quad + \quad \int_{A_n} f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx\Big|.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Usando o fato de que f é não-decrescente na segunda coordenada, $|u_n^1| \leq |u_n|$ e (2.22), obtemos

$$\begin{aligned}
f(x,u_n^1)(u_n^1)^2 &\leq f(x,u_n)|u_n u_n^1| \\
&\leq f(x,u_n)(u_n)^2 \\
&\leq \varepsilon|u_n|^2 + C(\varepsilon,q)|u_n|^q.
\end{aligned}$$

Agora da imersão $H^1(A_n) \hookrightarrow L^q(A_n)$, temos

$$\begin{aligned}\Big|\int_{A_n} f(x,u_n)u_n u_n^1\,dx\Big| &\leq \int_{A_n}\Big(\varepsilon|u_n|^2 + C(\varepsilon,q)|u_n|^q\Big)\,dx\\ &\leq \varepsilon\|u_n\|^2_{L^2(A_n)} + C(\varepsilon,q)\Big[\int_{A_n}\Big(|\nabla u_n|^2+\lambda(u_n)^2\Big)\,dx\Big]^{q/2}\\ &\leq C\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.40}$$

e de forma análoga, mostra-se que

$$\int_{A_n} f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx \leq C\varepsilon. \tag{2.41}$$

Usando a desigualdade de Hölder, juntamente com (2.34), segue que

$$\int_{A_n}\Big(\nabla u_n\nabla u_n^1 + \lambda u_n u_n^1\Big)\,dx \leq \Big(\int_{A_n}\rho_n\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{A_n}\rho_n^1\,dx\Big)^{1/2} \leq C\varepsilon. \tag{2.42}$$

Logo, por (2.39) $-$ (2.42), obtemos

$$\Big|I'_\lambda(u_n)(u_n^1) - \Big(\|u_n^1\|^2_\lambda - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx\Big)\Big| \leq C\varepsilon,$$

ou seja,

$$\Big|\|u_n^1\|^2_\lambda - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx\Big| \leq \Big|I'_\lambda(u_n)(u_n^1)\Big| + C\varepsilon. \tag{2.43}$$

Usando que

$$\Big|I'_\lambda(u_n)\phi\Big| = \Big|\int\Big(\nabla u_n\nabla\phi + \lambda u_n\phi\Big)\,dx - \int f(x,u_n)u_n\phi\,dx\Big| \leq \varepsilon\|\phi\|_\lambda,$$

obtemos

$$\Big|\|u_n^1\|^2_\lambda - \int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx\Big| \leq C\varepsilon, \tag{2.44}$$

para algum $C>0$ e n suficientemente grande.

De forma inteiramente análoga, mostra-se que

$$\Big|\|u_n^2\|^2_\lambda - \int f(x,u_n^2)(u_n^2)^2\,dx\Big| \leq C\varepsilon. \tag{2.45}$$

Para mostrar que a dicotomia não ocorre, consideraremos dois casos:

Caso 1: $(y_n)\subset\mathbb{R}^N$ é limitada.

Como (y_n) é limitada, temos que os centros das bolas $B_{R_n}(y_n)$ não convergem para o infinito, e como $R_n\to\infty$, temos que as bolas crescem de acordo com n, a partir de um n_0 suficientemente grande. Desde que $u_n^2(x)=0$ se $|x-y_n|\leq R_n$, tem-se

$$supp(u_n^2)\subset\mathbb{R}^N\setminus B_{R_n}(y_n).$$

Do fato $\lim_{|x|\to\infty} f(x,s) = h(s)$, temos que dado $\varepsilon > 0$, obtemos

$$|f(x,u_n^2) - h(u_n^2)| \le \varepsilon^{1/2},$$

para $|x| > r > 0$ suficientemente grande.

Como $(u_n^2)^2$ é integrável, temos, para r grande, que

$$\int_{|x|>r} (u_n^2)^2\,dx \le \varepsilon^{1/2}.$$

Para n grande, ainda temos que

$$supp(u_n^2) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_{R_n}(y_n) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_r(0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Big|\int \Big[f(x,u_n^2)u_n^2 - h(u_n^2)u_n^2\Big]\,dx\Big| &= \Big|\int_{supp(u_n^2)} \Big[f(x,u_n^2) - h(u_n^2)\Big]u_n^2\,dx\Big| \\ &\le \varepsilon^{1/2}\int_{supp(u_n^2)} (u_n^2)^2\,dx \\ &\le \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.46}$$

De (2.45) e (2.46), segue que

$$\begin{aligned} \Big|I_\lambda^{\infty\prime}(u_n^2)(u_n^2)\Big| &= \Big|\|u_n^2\|_\lambda^2 - \int h(u_n^2)(u_n^2)^2\,dx\Big| \\ &\le \Big|\|u_n^2\|_\lambda^2 - \int f(x,u_n^2)(u_n^2)^2\,dx\Big| + \Big|\int \Big[f(x,u_n^2)u_n^2 - h(u_n^2)u_n^2\Big]\,dx\Big| \\ &\le C\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos por $\lim_{|x|\to\infty} f(x,s) = h(s)$ que

$$|f(x,s) - h(s)| \le \varepsilon^{1/2},$$

para s grande. Logo

$$\begin{aligned} \Big|\int \Big[F(x,u_n^2) - H(u_n^2)\Big]\,dx\Big| &\le \int_{supp(u_n^2)}\int_0^{u_n^2} \Big|f(x,s) - h(s)\Big| s\,ds\,dx \\ &\le \int_{supp(u_n^2)}\int_0^{u_n^2} \varepsilon^{1/2} s\,ds\,dx \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\int_{supp(u_n^2)} (u_n^2)^2\,dx \le \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Portanto,

$$\Big|I_\lambda(u_n^2) - I_\lambda^\infty(u_n^2)\Big| = \Big| -\int F(x,u_n^2)\,dx + \int H(u_n^2)\,dx\Big| \le \varepsilon, \tag{2.49}$$

e assim,

$$I_\lambda(u_n^2) = I_\lambda^\infty(u_n^2) + o(1).$$

Mostraremos que, se a dicotomia ocorre, então $M_\lambda^\infty \neq \varnothing$. Para isso, vamos definir

$$w_n^2 := u_n^2(\sigma x), \qquad 0 \neq \sigma \in \mathbb{R}.$$

Por mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda^{\infty\prime}(w_n^2)(w_n^2) &= \int \Big(|\nabla w_n^2|^2 + \lambda(w_n^2)^2\Big)\,dx - \int h(w_n^2)(w_n^2)^2\,dx \\
&= \int \Big(\sigma^2|\nabla u_n^2(\sigma x)|^2 + \lambda(u_n^2(\sigma x))^2\Big)\,dx - \int h(u_n^2(\sigma x))(u_n^2(\sigma x))^2\,dx \\
&= \int \Big(\sigma^{2-N}|\nabla u_n^2(x)|^2 + \sigma^{-N}\lambda(u_n^2(x))^2\Big)\,dx - \sigma^{-N}\int h(u_n^2(x))(u_n^2(x))^2\,dx \\
&= \sigma^{-N}\Big[(\sigma^2-1)\int |\nabla u_n^2|^2\,dx + \int \Big(|\nabla u_n^2|^2 + \lambda(u_n^2)^2\Big)\,dx - \int h(u_n^2)(u_n^2)^2\,dx\Big].
\end{aligned}$$

Por (2.47), denotamos

$$\varepsilon_n = \int \Big(|\nabla u_n^2|^2 + \lambda(u_n^2)^2\Big)\,dx - \int h(u_n^2)(u_n^2)^2\,dx,$$

com $\varepsilon_n \to 0$. Portanto

$$I_\lambda^{\infty\prime}(w_n^2)(w_n^2) = \sigma^{-N}\Big[(\sigma^2-1)\int |\nabla u_n^2|^2\,dx + \varepsilon_n\Big].$$

Para que M_λ^∞ seja não-vazio, é suficiente que $\displaystyle\int |\nabla u_n^2|^2\,dx := a_n > 0$, para n grande. De fato, se $a_n > 0$, para n grande, então tomamos

$$\sigma_n = \Big(1 - \frac{\varepsilon_n}{a_n}\Big)^{1/2}.$$

Se $\varepsilon_n \leq 0$, então $1 - \dfrac{\varepsilon_n}{a_n} > 0$ e se $\varepsilon_n > 0$, como a_n é limitada, já que (u_n^2) também é em $H^1(\mathbb{R}^N)$, é possível tomar ε_n pequeno, tal que $1 - \dfrac{\varepsilon_n}{a_n} > 0$. Logo,

$$(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2\,dx + \varepsilon_n = 0, \tag{2.50}$$

isto é,

$$I_\lambda^{\infty\prime}(w_n^2)(w_n^2) = 0$$

e $w_n^2 \in M_\lambda^\infty$. Logo, se a dicotomia ocorrer, teríamos que $M_\lambda^\infty \neq \varnothing$.

Precisamos então provar que

$$\int |\nabla u_n^2|^2\,dx \geq C > 0.$$

De fato, suponhamos que exista uma subsequência de (u_n^2), também denotada por (u_n^2), tal que

$$\int |\nabla u_n^2|^2\,dx \to 0. \tag{2.51}$$

Como estamos assumindo a dicotomia, temos

$$\Big|\int \hat{\rho}_n\,dx - (\alpha - \alpha_0)\Big| = \Big|\int_{|x-y_n|>R_n} \Big(|\nabla u_n|^2 + \lambda(u_n)^2\Big)\,dx - (\alpha-\alpha_0)\Big| \leq \varepsilon.$$

Da definição de u_n^2, temos

$$\int_{|x-y_n|\geq R_n} \left[(u_n^2)^2 - (u_n)^2\right] dx = \int_{R_n\leq|x-y_n|\leq 2R_n} (u_n^2)^2\, dx,$$

logo

$$\Big|\,\Big|\int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2\, dx + \int_{|x-y_n|\geq R_n} \lambda(u_n^2)^2\, dx - (\alpha-\alpha_0)\Big| - \Big|\int_{|x-y_n|\geq R_n} \Big(|\nabla u_n|^2+\lambda u_n^2\Big)\, dx - (\alpha-\alpha_0)\Big|\,\Big| \leq \varepsilon,$$

para n grande, assim

$$\int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2\, dx + \int_{|x-y_n|\geq R_n} \lambda(u_n^2)^2\, dx \geq (\alpha-\alpha_0) - \varepsilon. \tag{2.52}$$

Como $\varphi_n(x) = 1$, se $|x-y_n| \geq 2R_n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y_n|\geq R_n} |\nabla u_n^2|^2\, dx &= \int_{|x-y_n|\geq R_n} \Big|\frac{1}{R_n} u_n(\nabla\varphi_n) + \varphi_n(\nabla u_n)\Big|^2 dx \\
&\geq \int_{|x-y_n|\geq 2R_n} \Big|\frac{1}{R_n} u_n(\nabla\varphi_n) + \varphi_n(\nabla u_n)\Big|^2 dx \\
&= \int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Logo, por (2.52), e o fato que $u_n^2(x) = 0$ se $|x-y_n| \leq R_n$, tem-se

$$\int \Big(|\nabla u_n^2|^2 + \lambda(u_n^2)^2\Big)\, dx \geq \int_{|x-y_n|\geq 2R_n} |\nabla u_n|^2\, dx + \int_{|x-y_n|\geq R_n} \lambda(u_n^2)^2\, dx \geq (\alpha-\alpha_0) - \varepsilon. \tag{2.53}$$

Agora por $f(x,s)s^2 \leq \varepsilon s^2 + C(\varepsilon,q)s^q$ e (2.45), temos que

$$\begin{aligned}
\int \Big(|\nabla u_n^2|^2 + \lambda(u_n^2)^2\Big)\, dx &\leq \int f(x,u_n^2)(u_n^2)^2\, dx + C\varepsilon \\
&\leq \int \Big(\varepsilon(u_n^2)^2 + C(\varepsilon,2^*)(u_n^2)^{2^*}\Big)\, dx + C\varepsilon \\
&= \varepsilon \int (u_n^2)^2\, dx + C(\varepsilon,2^*) \int (u_n^2)^{2^*}\, dx + C\varepsilon,
\end{aligned}$$

e usando a imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int \Big(|\nabla u_n^2|^2 + \lambda(u_n^2)^2\Big)\, dx \leq \varepsilon \int (u_n^2)^2\, dx + C_1(\varepsilon,2^*) \int |\nabla u_n^2|^2\, dx + C\varepsilon.$$

Logo de (2.53) e da desigualdade acima, temos

$$(\alpha-\alpha_0) - \varepsilon \leq \varepsilon \int (u_n^2)^2\, dx + C_1(\varepsilon,2^*) \int |\nabla u_n^2|^2\, dx + C\varepsilon,$$

o que é um absurdo, pois de (2.51) e do fato de que (u_n^2) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, podemos tomar $\varepsilon \to 0$ e $n \to \infty$, para concluir que

$$0 < (\alpha-\alpha_0) \leq 0.$$

Assim, temos de fato que
$$\int |\nabla u_n^2|^2\, dx \geq C > 0,$$
logo $M_\lambda^\infty \neq \varnothing$, isso se a dicotomia ocorrer.

Vamos verificar agora que de fato a dicotomia não pode acontecer. Fazendo uma mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda^\infty(w_n^2) &= \frac{1}{2}\int \Big(|\nabla w_n^2|^2 + \lambda(w_n^2)^2\Big)\, dx - \int H(w_n^2)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \Big(\sigma_n^2|\nabla u_n^2(\sigma_n x)|^2 + \lambda(u_n^2(\sigma_n x))^2\Big)\, dx - \int H\Big(u_n^2(\sigma_n x)\Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}\int \Big(\sigma_n^2|\nabla u_n^2(x)|^2 + \lambda(u_n^2(x))^2\Big)\, dx - \sigma_n^{-N}\int H(u_n^2(x))\, dx \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2\, dx + \sigma_n^{-N}\Big[\frac{1}{2}\int \Big(|\nabla u_n^2|^2 + \lambda(u_n^2)^2\Big)\, dx - \int H(u_n^2)\, dx\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2\, dx + \sigma_n^{-N} I_\lambda^\infty(u_n^2) \\
&= \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2\, dx + (\sigma_n^{-N} - 1) I_\lambda^\infty(u_n^2) + I_\lambda^\infty(u_n^2),
\end{aligned}$$

isto é,
$$I_\lambda^\infty(w_n^2) = I_\lambda^\infty(u_n^2) + \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2\, dx + (\sigma_n^{-N} - 1) I_\lambda^\infty(u_n^2). \tag{2.54}$$

Afirmamos que $I_\lambda^\infty(u_n^2)$ é limitado. De fato, usando (2.48) e $F(x, u_n^2) \leq C(u_n^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Big|I_\lambda^\infty(u_n^2)\Big| &= \Big|\frac{1}{2}\|u_n^2\|_\lambda^2 - \int H(u_n^2)\, dx\Big| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_n^2\|_\lambda^2 + \Big|\int \Big(F(x, u_n^2) - H(u_n^2)\Big)\, dx\Big| + \Big|\int F(x, u_n^2)\, dx\Big| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_n^2\|_\lambda^2 + C\|u_n^2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \varepsilon,
\end{aligned}$$

e como (u_n^2) é limitado, então está provada a afirmação.

Agora, usando (2.49) e (2.54), tem-se que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n^2) &\geq I_\lambda^\infty(u_n^2) - \varepsilon \\
&= I_\lambda^\infty(w_n^2) - \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2\, dx - (\sigma_n^{-N} - 1) I_\lambda^\infty(u_n^2) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $(\sigma_n^2 - 1)\int |\nabla u_n^2|^2\, dx = -\varepsilon_n$, por (2.50), onde $\sigma_n = \Big(1 - \dfrac{\varepsilon_n}{a_n}\Big)^{1/2}$, temos, para $\varepsilon = |\varepsilon_n|$, que

$$I_\lambda(u_n^2) \geq I_\lambda^\infty(w_n^2) + \frac{1}{2}\sigma_n^{-N}\varepsilon_n - (\sigma_n^{-N} - 1) I_\lambda^\infty(u_n^2) - |\varepsilon_n|.$$

Desde que $\sigma_n \to 1$ quando $\varepsilon_n \to 0$ e $I_\lambda^\infty(u_n^2)$ é limitado, temos

$$I_\lambda(u_n^2) \geq I_\lambda^\infty(w_n^2) - \overline{\varepsilon_n},$$

onde $\overline{\varepsilon_n} > 0$ e $\overline{\varepsilon_n} \to 0$, ou seja,
$$I_\lambda(u_n^2) \geq m_\lambda^\infty - \overline{\varepsilon_n}. \tag{2.55}$$

Para (u_n^1), usaremos $F(x,s) \leq \dfrac{1}{2} f(x,s)s^2$ e (2.44), assim

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n^1) &= \frac{1}{2}\|u_n^1\|_\lambda^2 - \int F(x,u_n^1)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx - \overline{\varepsilon_n} - \int F(x,u_n^1)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\int f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx - \int \frac{1}{2} f(x,u_n^1)(u_n^1)^2\,dx - \overline{\varepsilon_n} \\ &= -\overline{\varepsilon_n}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda(u_n^1) \geq -\overline{\varepsilon_n}. \tag{2.56}$$

Logo, por (2.55), (2.56) e por $I_\lambda(u_n) \geq I_\lambda(u_n^1) + I_\lambda(u_n^2) - C\varepsilon$, temos

$$I_\lambda(u_n) \geq I_\lambda(u_n^1) + I_\lambda(u_n^2) - \overline{\varepsilon_n} \geq m_\lambda^\infty - 2\overline{\varepsilon_n},$$

e assim chegamos em $\lim\limits_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) \geq m_\lambda^\infty$, o que é um absurdo, pois $\lim\limits_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c < m_\lambda^\infty$. Portanto, a dicotomia não ocorre.

Caso 2: $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ não é limitado.

Passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $|y_n| \to \infty$. Pela definição de (u_n^1), temos que $u_n^1(x) = 0$ quando $|x - y_n| \geq 2R$ e segue que $supp(u_n^1) \subset B_{2R}(y_n)$, onde os centros das bolas vão para o infinito.

Repetindo para os mesmos passos feitos no caso anterior com u_n^1 e u_n^2 trocados geramos novamente uma contradição. Portanto, a dicotomia não ocorre e, pelo Lema 2.5 de Concentração e Compacidade de Lions, a compacidade ocorre.

3. Compacidade: Existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que

$$\int_{B_R(y_n)} \rho_n\,dx \geq \alpha - \varepsilon,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(y_n)} \rho_n\,dx = \int \rho_n\,dx - \int_{B_R(y_n)} \rho_n\,dx \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(y_n)} \Big(|\nabla u_n|^2 + \lambda |u_n|^2\Big)\,dx < \varepsilon. \tag{2.57}$$

Como no caso da dicotomia, podemos mostrar que se (para alguma subsequência) $|y_n| \to \infty$, temos uma contradição com $I_\lambda(u_n) \to c < m_\lambda^\infty$ (note que se $c = m_\lambda^\infty$ e $f(x,s) = h(s)$ é independente de x, então $|y_n| \to \infty$ não pode ser descartado). Portanto, $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ é uma sequência limitada e, para todo $\varepsilon > 0$, podemos achar $R_0 > 0$ grande, tal que

$$B_R(y_n) \subset B_{R_0}(0).$$

De (2.57), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_0}} \Big(|\nabla u_n|^2+\lambda|u_n|^2\Big)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(y_n)} \Big(|\nabla u_n|^2+\lambda|u_n|^2\Big)\,dx < \varepsilon. \tag{2.58}$$

Como (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

Mostraremos que $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \le p < 2^*$. De fato, sendo $|u|^p$ integrável, para todo $\varepsilon > 0$, tome $\overline{R}(\varepsilon) = \overline{R} > 0$ grande de forma que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\overline{R}}} |u|^p\,dx \le \varepsilon. \tag{2.59}$$

Portanto, se $R^* = \max\{R_0, \overline{R}\}$, então por (2.58), (2.59) e as imersões de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}\int |u_n-u|^p\,dx &= \int_{B_{R^*}} |u_n-u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R^*}} |u_n-u|^p\,dx\\ &\le \varepsilon + 2^p\Big(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R^*}} |u_n|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R^*}} |u|^p\,dx\Big)\\ &\le C\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \le p < 2^*$.

Assim, $u_n \to u$, em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$, e existe $\tilde{h} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_n| \le \tilde{h}, \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Desta forma

$$f(x,u_n)(u_n)^2 \le g\tilde{h}^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|f(x,u_n)u_n u| \le g\tilde{h}|u| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema 1.10 da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int f(x,u_n)(u_n)^2\,dx \to \int f(x,u)u^2\,dx \tag{2.60}$$

e

$$\int f(x,u_n)u_n u\,dx \to \int f(x,u)u^2\,dx. \tag{2.61}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\int f(x,u)u_n u\,dx \to \int f(x,u)u^2\,dx. \tag{2.62}$$

Desta forma, $u_n \to u$, em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato

$$
\begin{aligned}
I'_\lambda(u_n)(u_n-u) - I'_\lambda(u)(u_n-u) &= \int \Big(\nabla u_n \nabla(u_n-u) + \lambda u_n(u_n-u)\Big)\,dx \\
&- \int f(x,u_n)u_n(u_n-u)\,dx - \int \Big(\nabla u \nabla(u_n-u) + \lambda u(u_n-u\Big)\,dx \\
&+ \int f(x,u)u(u_n-u)\,dx \\
&= \int \Big(|\nabla(u_n-u)|^2 + \lambda(u_n-u)^2\Big)\,dx \\
&- \int f(x,u_n)(u_n)^2\,dx + \int f(x,u_n)u_n u\,dx \\
&+ \int f(x,u)uu_n\,dx - \int f(x,u)u^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\|u_n-u\|_\lambda^2 &= I'_\lambda(u_n)(u_n-u) - I'_\lambda(u)(u_n-u) \\
&+ \int f(x,u_n)(u_n)^2\,dx + \int f(x,u)u^2\,dx \\
&- \int f(x,u_n)u_n u\,dx - \int f(x,u)uu_n\,dx.
\end{aligned}
$$

Como $I'_\lambda(u_n)(u_n-u) \to 0$ e $I'_\lambda(u)(u_n-u) \to 0$, já que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então de (2.60) - (2.62) segue que

$$\|u_n-u\|_\lambda^2 \to 0.$$

Portanto, a sequência de Cerami (u_n) possui uma subsequência convergente e o resultado segue. □

Observação 2.4. *Como já foi destacado na prova do Teorema 2.2 acima, a mesma prova implica no seguinte resultado para o caso de $f(x,s)$ ser independente de x: "Se (u_n) é uma sequência de Cerami para I_λ no nível $c = m_\lambda^\infty$, então existe $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\tilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + y_n)$ tem uma subsequência convergente."*

Capítulo

3

Existência de Solução Positiva

Vamos começar considerando as condições da geometria do Passo da Montanha ((a) e (b) do Teorema 2.1).

3.1 Geometria do Passo da Montanha

Proposição 3.1. *Assuma as condições* $(f_1)-(f_4)$ *e* $0<\lambda<|\Lambda|$. *Então:*

(a) *Existem* $\rho(\lambda),\alpha(\lambda)>0$ *tais que* $I_\lambda(u)\geq\alpha(\lambda)$ *se* $\|u\|_\lambda=\rho(\lambda)$ *e* $I_\lambda(u)\geq 0$ *para* $\|u\|_\lambda\leq\rho(\lambda)$;

(b) *Existe* $e_\lambda\in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\|e_\lambda\|_\lambda>\rho(\lambda)$ *e* $I_\lambda(e_\lambda)\leq 0$.

Demonstração. (a) Este argumento é padrão. Utilizando (2.21) e (2.22), seja $\varepsilon=\dfrac{1}{4}\min\{1,\lambda\}$ e tome $C_\varepsilon>0$, tal que

$$0\leq F(x,s)\leq\frac{1}{2}f(x,s)s^2\leq\varepsilon s^2+C(\varepsilon,2^*)s^{2^*}.$$

Segue da imersão de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ que

$$\int F(x,u)\,dx\leq\varepsilon\|u\|_2^2+C_\varepsilon\|u\|_{2^*}^{2^*}\leq\varepsilon\|u\|_2^2+C\|u\|_\lambda^{2^*},$$

onde $C=C(\varepsilon,N)$. Como $\dfrac{1}{4}\min\{1,\lambda\}=\varepsilon\leq\dfrac{1}{4}\lambda$, então chegamos em

$$\varepsilon\|u\|_2^2\leq\frac{1}{4}\Big[\lambda\int u^2\,dx\Big]\leq\frac{1}{4}\Big[\int|\nabla u|^2\,dx+\lambda\int u^2\,dx\Big]=\frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2,$$

e assim

$$\int F(x,u)\,dx\leq\frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2+C\|u\|_\lambda^{2^*}.$$

Portanto, para qualquer $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos a estimativa inferior

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2 - C\|u\|_\lambda^{2^*} \\ &= \frac{1}{4}\|u\|_\lambda^2 - C\|u\|_\lambda^{2^*} \\ &= \Big(\frac{1}{4} - C\|u\|_\lambda^{2^*-2}\Big)\|u\|_\lambda^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda(u) \geq \Big(\frac{1}{4} - C\|u\|_\lambda^{2^*-2}\Big)\|u\|_\lambda^2,$$

e para $\|u\|_\lambda = \rho$ suficientemente pequeno, tal que $\Big(\frac{1}{4} - C\|u\|_\lambda^{2^*-2}\Big)$ seja positivo, teremos $I_\lambda(u) \geq \alpha > 0$, o que prova (a).

(b) Dado $0 \neq u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, vamos considerar a função $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(t) = I_\lambda(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,tu)\,dx. \tag{3.1}$$

Então, temos

$$p'(t) = I'_\lambda(tu)u = t\Big[\|u\|_\lambda^2 - \int f(x,tu)u^2\,dx\Big]. \tag{3.2}$$

Como em (a), temos

$$p(t) \geq \Big(\frac{1}{4} - C(t\|u\|_\lambda)^{2^*-2}\Big)t^2\|u\|_\lambda^2$$

e

$$p'(t) \geq t\|u\|_\lambda - \frac{1}{4}t^2\|u\|_\lambda^2 - Ct^2\|u\|_\lambda^{2^*}.$$

e os mesmos argumentos da parte (a) mostram que $p(t) > 0, p'(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno. Provaremos a seguir as seguintes afirmações.

Afirmação 1: $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\int F(x,tu)\,dx = \frac{1}{2}\int g(x)(u^+)^2\,dx$;

Afirmação 2: $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int f(x,tu)u^2\,dx = \int g(x)(u^+)^2\,dx$.

Para provar a Afirmação 2, basta aplicar o Teorema 1.10 da Convergência Dominada de Lebesgue. Vamos provar apenas a Afirmação 1. Para isso, note que

$$\begin{aligned} \int F(x,tu)\,dx &= \int \Big(\int_0^{tu} f(x,s)s\,ds\Big)\,dx \\ &= \int \Big(t^2u^2\int_0^1 f(x,\tau tu)\tau\,d\tau\Big)\,dx, \end{aligned}$$

onde na última igualdade fizemos a mudança de variáveis $s = \tau\, t\, u$, com $ds = t\, u\, d\tau$.

Para todo $\varepsilon > 0$, pela hipótese (f_2) existe $\bar{t}$, tal que

$$|f(x,t\tau u(x)) - g(x)| < \varepsilon, \;\; \forall\, t > \bar{t} \;\text{ e }\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo

$$\Big|\int_0^1 [f(x,\tau tu) - g(x)]\tau\, d\tau\Big| < \int_0^1 \varepsilon\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \qquad \forall\, t > \bar{t}.$$

Assim, temos, para $t \to \infty$, que

$$\begin{aligned} u^2 \int_0^1 f(x,\tau tu(x))\tau\, d\tau &\to (u^+)^2 \int_0^1 g(x)\tau\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}(u^+)^2 g(x), \ \text{ em quase todo ponto de } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Por outro lado, do fato que $f(x,s) \le g(x)$, temos

$$\begin{aligned} u^2 \int_0^1 f(x,\tau tu)\tau\, d\tau &\le u^2 \int_0^1 g(x)\tau\, d\tau \\ &\le \frac{1}{2}u^2 g(x) \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.10 da Convergência Dominada de Lebesgue e por (f_2), temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int F(x,tu)\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int \Big(u^2 \int_0^1 f(x,\tau tu)\tau\, d\tau\Big)\, dx \\ &= \int \Big(u^2 \int_0^1 \lim_{t\to\infty} f(x,\tau tu)\tau\, d\tau\Big)\, dx \\ &= \int \Big(u^2 g(x) \int_0^1 \tau\, d\tau\Big)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int g(x)(u^+)^2\, dx. \end{aligned}$$

Agora, como (f_2) faz com que $f(x,s)$ seja uma função não-decrescente em s, (3.2) nos mostra que $\dfrac{p'(t)}{t}$ é uma função não-crescente em t e a Afirmação 2 implica que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p'(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \Big[\|u\|_\lambda^2 - \int f(x,tu)u^2\, dx\Big] = \|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2\, dx.$$

Similarmente, obtemos de (3.1) e da Afirmação 1 que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \Big[\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{t^2}\int F(x,tu)\, dx\Big] = \frac{1}{2}\Big(\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2\, dx\Big).$$

Suponha que $\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2\, dx \ge 0$, logo $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{p'(t)}{t} \ge 0$ e portanto devemos ter $p'(t) \ge 0$, para todo $t > 0$, pois, caso contrário, existiria um $\tilde{t} > 0$ tal que $p'(\tilde{t}) < 0$ e por $\dfrac{p'(t)}{t}$ ser não-crescente, teríamos

$$\frac{p'(t)}{t} \le \frac{p'(\tilde{t})}{\tilde{t}} < 0, \quad \text{para todo} \quad t \ge \tilde{t},$$

e assim $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{p'(t)}{t} < 0$, um absurdo. Logo $p'(t) \ge 0$ e portanto $p(t)$ é não-decrescente. Desde que $p(t) > 0$, para todo $t > 0$ pequeno, devemos ter $p(t) = I_\lambda(tu) > 0$, para todo $t > 0$.

Suponha agora que $\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2\, dx < 0$, e como $p'(t) > 0$, para $t > 0$ pequeno, então $p'(t)$

muda de sinal. Portanto existe $t_1 > 0$ tal que $p'(t_1) = 0$. Defina $w_0 = \Big\{t > 0 \;\Big|\; t \leq t_1 \;\text{ e }\; p'(t) = 0\Big\}$ e $t_0 = \inf w_0$. Sendo $\dfrac{p'(t)}{t}$ não crescente em t, temos que, se $t < t_0$, então

$$\frac{p'(t)}{t} \geq \frac{p'(t_0)}{t_0} \geq \frac{p'(t_1)}{t_1} = 0.$$

Portanto $p'(t) \geq 0$ para todo $t < t_0$. Por outro lado, se $p'(t) = 0$, teremos $t \in w_0$ e $t < t_0$, uma contradição, logo $p'(t) > 0$ para todo $t < t_0$.

Agora definimos $t_2 = \sup w_1$, onde $w_1 = \Big\{t > 0 \;\Big|\; t \geq t_1 \;\text{ e }\; p'(t) = 0\Big\}$, e teremos que $p'(t) < 0$, para todo $t > t_2$. Desta forma, existem $t_0 \leq t_2$ com $t_0 = t_0(u), t_2 = t_2(u)$, tais que

$$\begin{cases} p'(t) > 0, & para\;\; t < t_0, \\ p'(t) = 0, & para\;\; t_0 \leq t \leq t_2, \\ p'(t) < 0, & para\;\; t > t_2. \end{cases}$$

Em particular, temos

$$0 = t_0 p'(t_0) = I'_\lambda(t_0 u)(t_0 u) = \|t_0 u\|^2_\lambda - \int f(x, t_0 u)(t_0 u)^2\, dx. \tag{3.3}$$

Além disso,

$$\max_{0<t<\infty} p(t) = \max_{0<t<\infty} I_\lambda(tu) = I_\lambda(\bar{t}u), \;\; \forall\, \bar{t} \in [t_0, t_2] \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} I_\lambda(tu) = -\infty. \tag{3.4}$$

Agora vamos considerar os dois possíveis casos:

Caso 1. $\Lambda < -l_\infty$.

Neste caso, como visto na demonstração do Lema 2.4, Λ é o menor autovalor de S. Seja $\psi > 0$ uma autofunção associada a Λ, temos

$$\int |\nabla \psi|^2\, dx - \int g(x)\psi^2\, dx = \Lambda \int \psi^2\, dx;$$

portanto

$$\int \Big(|\nabla\psi|^2 + \lambda\psi^2\Big)\, dx - \int g(x)\psi^2\, dx = (\lambda + \Lambda)\int \psi^2\, dx < 0,$$

já que $\lambda + \Lambda < 0$, uma vez que $\lambda < |\Lambda|$. Portanto, em vista de (3.4), temos que $\lim\limits_{t\to\infty} I_\lambda(t\psi) = -\infty$ de modo que podemos tomar $e_\lambda = t\psi$, para algum t suficientemente grande, e chegamos em $I_\lambda(e_\lambda) \leq 0$.

Caso 2. $\Lambda = -l_\infty$.

Neste caso temos $\lambda < |\Lambda| = l_\infty$. Agora, se tomarmos $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_1)$, onde B_1 é a bola unitária de $\mathbb{R}^N$, e definirmos $\phi_\sigma(x) = \sigma^{N/2}\phi(\sigma x)$, então, usando mudança de variáveis e o Teorema 1.10 da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} \int g(x)\phi_\sigma^2(x)\, dx &= \int \sigma^N g(x)\phi^2(\sigma x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} g\Big(\frac{x}{\sigma}\Big)\phi^2(x)\, dx \to l_\infty \int \phi^2(x)\, dx, \end{aligned}$$

quando $\sigma \to 0$. Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\sigma^{N/2}\phi(\sigma x))}{\partial x_i} &= \sigma^{N/2}\frac{\partial \phi(\sigma x)}{\partial x_i}\sigma && \Rightarrow \\
\nabla\phi_\sigma(x) &= \sigma^{N/2}\sigma\nabla\phi(\sigma x) && \Rightarrow \\
|\nabla\phi_\sigma(x)|^2 &= \sigma^N\sigma^2|\nabla\phi(\sigma x)|^2 && \Rightarrow \\
\int |\nabla\phi_\sigma(x)|^2\,dx &= \sigma^N\sigma^2\int|\nabla\phi(\sigma x)|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

e fazendo a mudança de variável $y = \sigma x$, obtemos

$$\|\nabla\phi_\sigma\|_2^2 = \sigma^2\|\nabla\phi\|_2^2 \to 0, \ \text{ quando } \ \sigma \to 0.$$

Além disso, note que

$$
\begin{aligned}
\|\phi_\sigma\|_2^2 &= \int(\phi_\sigma(x))^2\,dx \\
&= \int(\sigma^{N/2}\phi(\sigma x))^2\,dx \\
&= \sigma^N\int(\phi(\sigma x))^2\,dx \\
&= \int(\phi(x))^2\,dx \\
&= \|\phi\|_2^2,
\end{aligned}
$$

e assim, obtemos

$$\lim_{\sigma\to 0}\Big(\|\phi_\sigma\|_\lambda^2 - \int g(x)\phi_\sigma^2(x)\,dx\Big) = (\lambda - l_\infty)\int\phi^2(x)\,dx < 0.$$

Portanto, para $\sigma > 0$ suficientemente pequeno, temos $\|\phi_\sigma\|_\lambda^2 - \int g(x)\phi_\sigma^2(x)\,dx < 0$ de modo que, em vista de (3.4), podemos novamente tomar $e_\lambda = t\phi_\sigma$, com t grande, para chegar em $I_\lambda(e_\lambda) \leq 0$. Isto completa a prova. □

Observação 3.1. *Se $f(x,s) = h(s)$, ou seja, f independente de x, então $\Lambda = -l_\infty$. Uma vez que $g(x) = 1$ e $S_0 = -\Delta - 1$, logo temos o seguinte problema de autovalor*

$$-\Delta u = (1+\mu)u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

que não possui solução. Portanto,

$$\sigma(S) = \sigma_{ess}(S) = [-l_\infty, \infty),$$

e desde que $\Lambda = \inf\sigma(S)$ temos $\Lambda = -l_\infty$.

Como consequência da Proposição 3.1, temos os seguintes resultados.

Proposição 3.2. *Assuma $(f_1) - (f_4)$ e suponha que $0 < \lambda < |\Lambda|$. Defina*

$$M_\lambda = \Big\{u \neq 0 \ \Big|\ I'_\lambda(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \int f(x,u)u^2\,dx = 0\Big\}$$

e tome $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

(*a*) *Se* $\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2\,dx \geq 0$, *então* $\mathbb{R}^+ u \cap M_\lambda = \varnothing$ *e* $I_\lambda(tu) > 0, \ \forall\, t > 0$;

(*b*) *Se* $\|u\|_\lambda^2 - \int g(x)(u^+)^2\,dx < 0$, *então existem* $0 < t_0(u) \leq t_2(u)$ *tais que* $\bar{t}u \in M_\lambda$, *para* $\bar{t} \in [t_0, t_2]$ *e*

$$\max_{0<t<\infty} I_\lambda(tu) = I_\lambda(\bar{t}u), \ \ \forall\, \bar{t} \in [t_0, t_2] \quad e \quad \lim_{t\to\infty} I_\lambda(tu) = -\infty.$$

Observação 3.2. *Ficou claro das provas acima que, caso* $f(x,s) = h(s)$ *seja independente de* x, *os resultados da Proposição* 3.1 *e* 3.2 *ainda são válidos com* M_λ, I_λ *e* $g(x)$ *sendo substituídos por* $M_\lambda^\infty, I_\lambda^\infty$, *e* l_∞, *respectivamente.*

Agora estamos prontos para mostrar a existência de soluções positivas para (P_λ).

3.2 Existência de Solução Positiva

Vamos considerar primeiramente o problema no infinito:

$$(P_\infty) \quad -\Delta u + \lambda u = h(u)u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u > 0.$$

Provamos a existência de uma solução para (P_∞) aplicando o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 2.1) ao funcional correspondente I_λ^∞ definido em (2.23):

$$I_\lambda^\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int H(u)\,dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

De fato, pela Proposição 3.1 (veja Observação 3.2), sabemos que I_λ^∞ satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema 2.1 do Passo da Montanha e, pelo Teorema 2.2 (veja Observação 2.4), o funcional satisfaz uma forma adequada da condição de compacidade de Cerami em todos os níveis c tais que $0 < c \leq m_\lambda^\infty$. Vamos considerar o nível

$$0 < c_\lambda^\infty := \inf_{\gamma\in\Gamma_\infty} \sup_{0\leq t\leq 1} I_\lambda^\infty(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma_\infty = \Big\{\gamma \in C\Big([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)\Big) \ \Big|\ \gamma(0) = 0,\ I_\lambda^\infty(\gamma(1)) < 0\Big\}.$$

Vamos mostrar em seguida que $c_\lambda^\infty \leq m_\lambda^\infty$, de modo que c_λ^∞ é um valor crítico de I_λ^∞. Note que, neste caso, teremos necessariamente $c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty$, já que se temos u_0 solução de (P_∞) então u_0 é ponto crítico de I_λ^∞ e qualquer ponto crítico de I_λ^∞ pertence ao conjunto $M_\lambda^\infty = \Big\{u \neq 0 \ \Big|\ I_\lambda^{\infty\prime}(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \int h(u)u\,dx = 0\Big\}$, logo

$$c_\lambda^\infty = I_\lambda^\infty(u_0) \geq \inf_{u\in M_\lambda^\infty} I_\lambda^\infty(u) = m_\lambda^\infty.$$

Agora, dado $u \in M_\lambda^\infty$ e pela Proposição 3.2 e a Observação 3.2, temos que

$$\|u\|_\lambda^2 - l_\infty \int (u^+)^2\,dx < 0, \qquad I_\lambda^\infty(tu) \leq 0, \quad \text{para } \ t \geq t_2(u),$$

e

$$\max_{0<t<\infty} I_\lambda^\infty(tu) = I_\lambda^\infty(t_2 u) \leq 0.$$

Portanto se considerarmos $\tilde{\gamma} : [0,1] \to H^1(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\gamma}(s) = st_2u$, então $\tilde{\gamma} \in \Gamma_\infty$ e

$$c_\lambda^\infty \leq \sup_{0\leq s\leq 1} I_\lambda^\infty(\tilde{\gamma}(s)) \leq \sup_{0<t<\infty} I_\lambda^\infty(tu) = I_\lambda^\infty(t_2u).$$

Como $t_2u \in M_\lambda^\infty$, e u é arbitrário, concluímos que $c_\lambda^\infty \leq \inf_{u\in M_\lambda^\infty} I_\lambda^\infty(u) = m_\lambda^\infty$. Logo, aplicando o Teorema 2.1 do Passo da Montanha, temos a existência da solução u_0 de (P_∞) no nível $c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty$:

$$I_\lambda^\infty(u_0) = c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty. \tag{3.5}$$

Finalmente, mostraremos que (P_λ) tem solução positiva para qualquer $0 < \lambda < |\Lambda|$.

Teorema 3.1. *Assuma $(f_1) - (f_5)$ e $0 < \lambda < |\Lambda|$. Então (P_λ) tem uma solução positiva.*

Demonstração. Como feito acima, usando o Teorema 2.2 e a Proposição 3.1 vemos que I_λ satisfaz as condições do Teorema 2.1 do Passo da Montanha com a condição de Cerami sendo satisfeita em todos os níveis $c \in (0, m_\lambda^\infty)$. Então, seja

$$\Gamma = \Big\{\gamma \in C\Big([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)\Big) \;\Big|\; \gamma(0) = 0,\ I_\lambda(\gamma(1)) < 0\Big\},$$

temos que

$$0 < c_\lambda := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{0\leq t\leq 1} I_\lambda(\gamma(t))$$

é um valor crítico para I_λ desde que a gente possa mostrar que $c_\lambda < m_\lambda^\infty$. É agora que usamos a condição (f_5) pela primeira vez.

De fato, por (f_5) temos que $h(s) \leq f(x,s), \forall\, x \in \mathbb{R}^N$ e $\forall\, s \in \mathbb{R}^+$, logo

$$\begin{aligned}
h(s)s &\leq f(x,s)s && \Rightarrow\\
\int_0^u h(\tau)\tau\, d\tau &\leq \int_0^u f(x,\tau)\tau\, d\tau && \Leftrightarrow\\
H(u) &\leq F(x,u) && \Rightarrow\\
\int H(u)\, dx &\leq \int F(x,u)\, dx && \Rightarrow\\
\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,u)\, dx &\leq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int H(u)\, dx && \Leftrightarrow\\
I_\lambda(u) &\leq I_\lambda^\infty(u),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja u_0 a solução de (P_∞), logo u_0 é ponto crítico de I_λ^∞ e como o conjunto dos pontos críticos de I_λ^∞ está contido em $M_\lambda^\infty = \Big\{u \neq 0 \;\Big|\; I_\lambda^{\infty\prime}(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \int h(u)u^2\, dx = 0\Big\}$, então $u_0 \in M_\lambda^\infty$. Além disso, pela Proposição 3.2 (veja Observação 3.2), devemos ter $I_\lambda^\infty(tu_0) \leq 0$, para $t \geq t_2(u_0)$, e assim, usando (3.6), teremos

$$I_\lambda(tu_0) \leq I_\lambda^\infty(tu_0) \leq 0.$$

Portanto, se

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma} : [0,1] &\to H^1(\mathbb{R}^N)\\
s &\mapsto \overline{\gamma} = st_2u_0
\end{aligned}$$

teremos $\overline{\gamma}$ contínua, $\overline{\gamma}(0) = 0$ e $I_\lambda(\overline{\gamma}(1)) = I_\lambda(t_2 u_0) \leq 0$ e assim $\overline{\gamma} \in \Gamma$.

Por outro lado, pela Proposição 3.2 (veja Observação 3.2), se $u_0 \in M_\lambda^\infty$, então necessariamente

$$\|u_0\|_\lambda^2 - l_\infty \int (u_0^+)^2 \, dx < 0.$$

Tomando o limite em (f_5), teremos

$$g(x) = \lim_{s \to \infty} f(x,s) \geq \lim_{s \to \infty} h(s) = l_\infty,$$

logo

$$\begin{aligned}
-g(x) \quad &\leq \quad -l_\infty & \Rightarrow \\
-\int g(x)(u_0^+)^2 \, dx \quad &\leq \quad -l_\infty \int (u_0^+)^2 \, dx & \Leftrightarrow \\
\|u_0\|_\lambda^2 - \int g(x)(u_0^+)^2 \, dx \quad &\leq \quad \|u_0\|_\lambda^2 - l_\infty \int (u_0^+)^2 \, dx < 0
\end{aligned}$$

e usando novamente a Proposição 3.2, temos que existe $\bar{t} > 0$, tal que $t_0 \leq \bar{t} \leq t_2$ e

$$\max_{0<t<\infty} I_\lambda(tu_0) = I_\lambda(\bar{t}u_0). \tag{3.7}$$

Ainda usando (f_5) temos que $f(x,s) > h(s)$, para $x \in \omega$, onde ω tem medida positiva, logo em ω temos

$$\begin{aligned}
f(x,t)t \quad &> \quad h(t)t \quad \Rightarrow \\
\int_0^s f(x,t)t \, dt \quad &> \quad \int_0^s h(t)t \, dt \quad \Leftrightarrow \\
F(x,s) \quad &> \quad H(s) \quad \Rightarrow \\
\int_\omega F(x,u) \, dx \quad &> \quad \int_\omega H(u) \, dx \quad \Rightarrow \\
\int_\omega F(x,u) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \omega} F(x,s) \quad &> \quad \int_\omega H(u) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \omega} H(u) \, dx \quad \Leftrightarrow \\
\int F(x,u) \, dx \quad &> \quad \int H(u) \, dx \quad \Leftrightarrow \\
-\int F(x,u) \, dx \quad &< \quad -\int H(u) \, dx \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,u) \, dx \quad &< \quad \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int H(u) \, dx \quad \Leftrightarrow \\
I_\lambda(u) \quad &< \quad I_\lambda^\infty(u).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto, temos que

$$\begin{array}{rcll} c_\lambda & \leq & \sup\limits_{0\leq s\leq 1} I_\lambda(\overline{\gamma}(s)), & \text{pela definição de } c_\lambda \\ & \leq & \sup\limits_{0<t<\infty} I_\lambda(tu_0) & \\ & = & I_\lambda(\bar{t}u_0), & \text{por } (3.7) \\ & < & I_\lambda^\infty(\bar{t}u_0), & \text{por } (3.8) \\ & \leq & I_\lambda^\infty(u_0) & \\ & = & c_\lambda^\infty = m_\lambda^\infty, & \end{array}$$

onde a última desigualdade segue do fato de que $u_0 \in M_\lambda^\infty$. Assim obtemos $c_\lambda < m_\lambda^\infty$, e o Teorema 2.2 juntamente com o Teorema 2.1 do Passo da Montanha provam a existência de uma solução positiva de (P_λ). $\square$

Encerramos este capítulo com um exemplo de função que satisfaz $(f_1) - (f_5)$.

3.3 Exemplo de f

Considere a função $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,s) = \Big(\frac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}\Big)\frac{s}{s+1}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \ s \in \mathbb{R}^+,$$

e vamos mostrar que f satisfaz $(f_1) - (f_5)$.

(f_1): Claramente $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Além disso, como

$$\begin{array}{rcll} 1 & \leq & e^{|x|} & \Leftrightarrow \\ e^{|x|}+1 & \leq & 2e^{|x|} & \Leftrightarrow \\ \dfrac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}} & \leq & 2, & \end{array}$$

então $\dfrac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}$ é limitado, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, e assim

$$|f(x,s)| = \Big|\Big(\frac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}\Big)\frac{s}{s+1}\Big| \leq \Big|\frac{2s}{s+1}\Big| \to 0$$

quando $s \to 0$.

(f_2): Temos, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixo,

$$\begin{array}{rcll}
f(x,s) & \leq & f(x,r) & \Leftrightarrow \\
\left(\dfrac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}\right)\dfrac{s}{s+1} & \leq & \left(\dfrac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}\right)\dfrac{r}{r+1} & \Leftrightarrow \\
\dfrac{s}{s+1} & \leq & \dfrac{r}{r+1} & \Leftrightarrow \\
s(r+1) & \leq & r(s+1) & \Leftrightarrow \\
sr+s & \leq & sr+r & \Leftrightarrow \\
s & \leq & r, &
\end{array}$$

logo $f(x,\cdot)$ é não-decrescente para $s \in [0,\infty)$. Seja agora

$$g(x) := \frac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}},$$

logo $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ e como $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s}{s+1} = 1$, então

$$\lim_{s\to\infty} f(x,s) = \frac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}} = g(x).$$

(f_3): Seja $h(s) := \dfrac{s}{s+1}$, logo $h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ e como $\lim\limits_{|x|\to\infty} e^{|x|} = \infty$ é equivalente a $\lim\limits_{|x|\to\infty} e^{-|x|} = 0$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to\infty} \frac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}} &= \lim_{|x|\to\infty} \frac{e^{|x|}}{e^{|x|}}\frac{(1+e^{-|x|})}{1} \\
&= \lim_{|x|\to\infty} 1+e^{-|x|} = 1,
\end{aligned}$$

e assim

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x,s) = \frac{s}{s+1} = h(s).$$

(f_4): Pelos passos acima, temos

$$\lim_{|x|,s\to\infty} f(x,s) = 1 := l_\infty \in (0,\infty).$$

(f_5): Como $e^{|x|}+1 > e^{|x|}$ se, e somente se, $\dfrac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}} > 1$, então

$$f(x,s) = \left(\frac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}\right)\frac{s}{s+1} > \frac{s}{s+1} = h(s),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Apresentamos agora os gráficos de g, h e f, respectivamente:

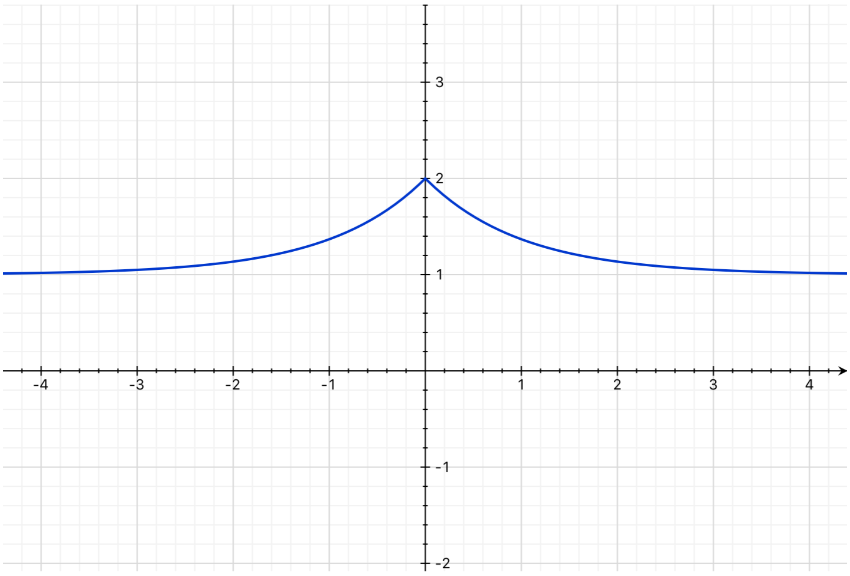

Figura 3.1: Gráfico de $g(x) = \dfrac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}$.

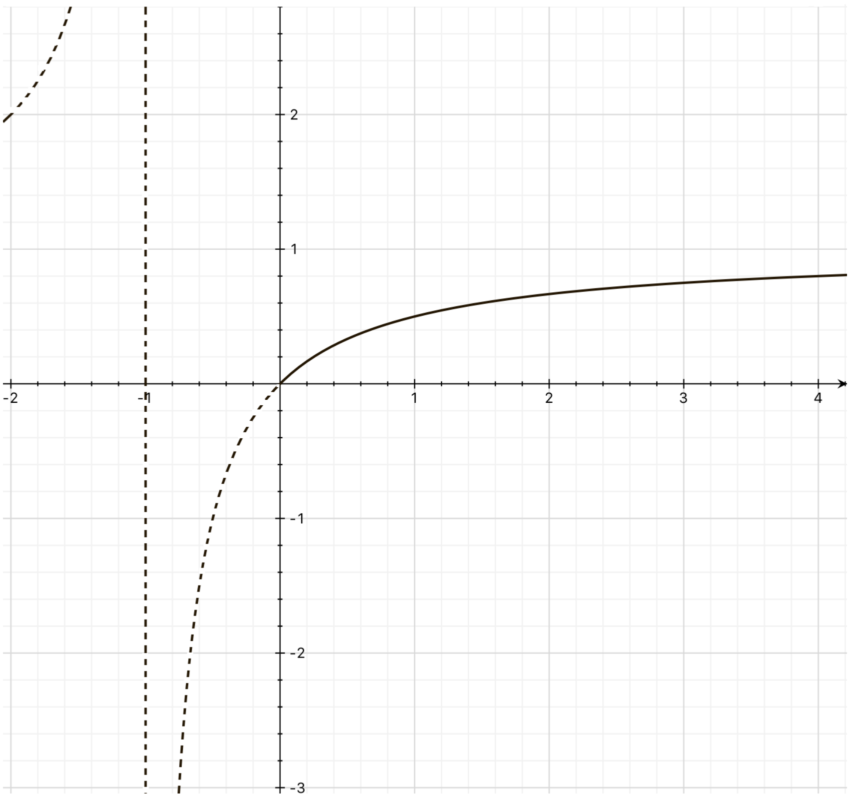

Figura 3.2: Gráfico de $h(s) = \dfrac{s}{s+1}$.

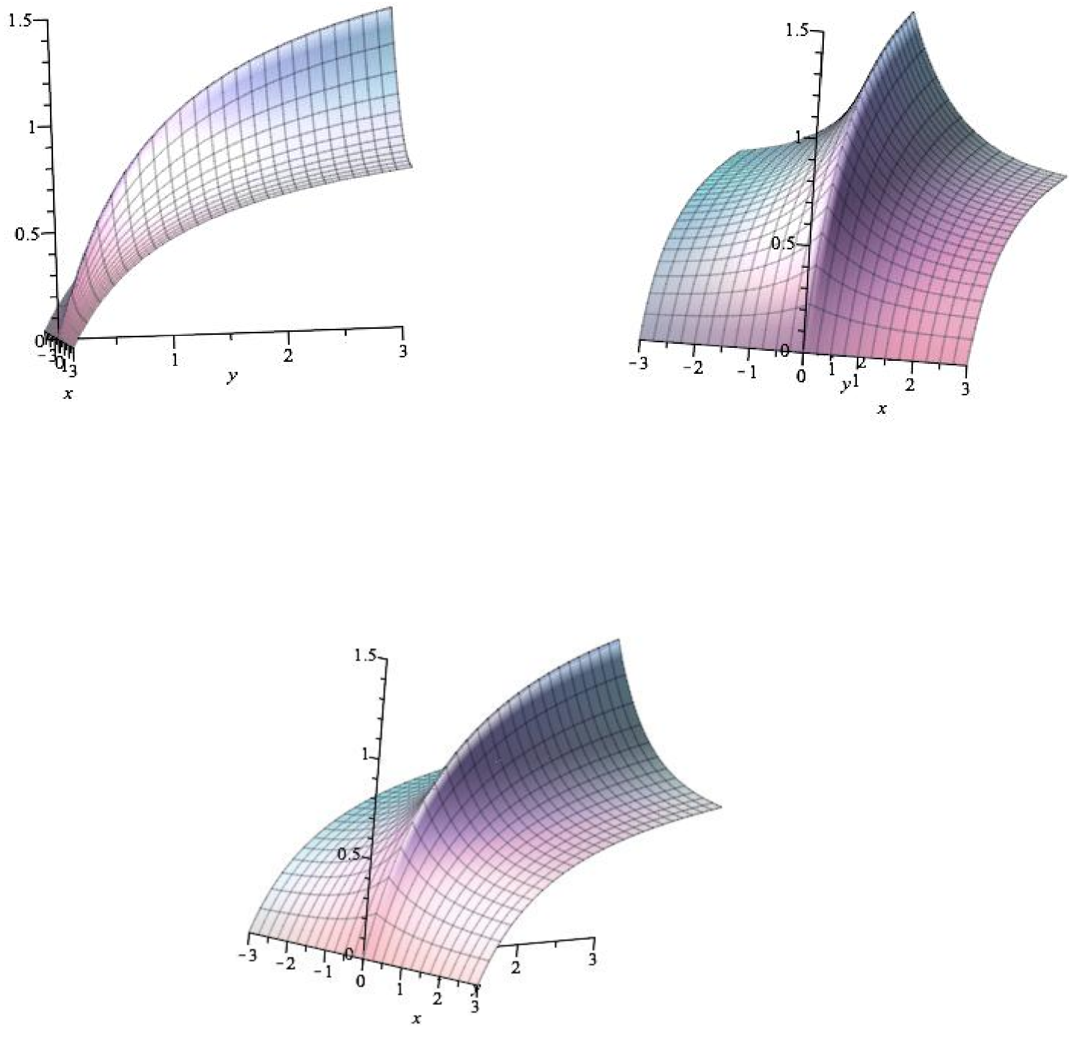

Figura 3.3: Gráfico de $f(x,s) = \left(\dfrac{e^{|x|}+1}{e^{|x|}}\right)\dfrac{s}{s+1}$.

Capítulo

4

Existência de Múltiplas Soluções

Nesta seção, obtemos múltiplos resultados para o problema (P_λ), sob uma condição extra de simetria.

4.1 Simetria na não linearidade

Vamos assumir que $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ satisfaz $(f_1) - (f_4)$ e

$$(f_6) \qquad f(x,-s) = f(x,s), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R}.$$

Então, segue que $h(s) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ e $h(-s) = h(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Vamos encontrar soluções de (P_λ) como pontos críticos do funcional energia I_λ definido em (2.1). Note que, por (f_6), I_λ é agora um funcional par em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, primeiramente note que

$$\begin{aligned} F(x,-s) &= \int_0^{-s} f(x,t)t\,dt \\ &= -\int_0^{-s} f(x,-t)(-t)\,dt \\ &= \int_0^{s} f(x,\tau)\tau\,d\tau \\ &= F(x,s), \end{aligned}$$

onde fizemos a mudança $\tau = -t$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(-u) &= \frac{1}{2}\|-u\|_\lambda^2 - \int F(x,-u)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int F(x,u)\,dx \\ &= I_\lambda(u). \end{aligned}$$

Agora, lembramos de um teorema de multiplicidade para funcionais pares que será usado na prova do nosso resultado de multiplicidade. Para isso precisamos da seguinte definição:

Definição 4.1. *Seja E um espaço de Banach real e denote por $\boldsymbol{X}$ a família de conjuntos $A \subset E \setminus \{0\}$ tais que A é fechado em E e simétrico com respeito a 0, ou seja, $x \in A$ se, e somente se, $-x \in A$. Para $A \in \boldsymbol{X}$, defina o gênero de A como n, denotado por $\gamma(A) = n$, se existe uma aplicação ímpar $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ onde n é o menor inteiro positivo com essa propriedade.*

Por exemplo, se considerarmos $B \subset E$ fechado com $B \cap (-B) = \varnothing$ e $A = B \cup (-B)$. Então $A \in \mathbf{X}$ e $\gamma(A) = 1$, já que a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } \; B, \\ -1, & \text{para } \; (-B), \end{cases}$$

é ímpar e pertence a $C(A, \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Para nosso teorema de multiplicidade, seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par em um espaço de Banach de dimensão infinita E. Assuma que

(i) $I > 0$, em $B_\rho \setminus \{0\}$ e $I \geq \alpha$, em ∂B_ρ, para algum $\alpha, \rho > 0$;

(ii) Existe um subespaço k-dimensional X_k de E, tal que

$$X_k \cap A_0 \text{ é limitado e } \sup_{u \in X_k} I(u) = M < \infty;$$

onde

$$A_0 := \Big\{ u \in E \mid I(u) \geq 0 \Big\}.$$

Denotando a bola unitária de E por B_1 e S_1 sua fronteira, sejam

$$\begin{aligned} \Gamma \; &:= \; \Big\{ h \in C(E,E) \;\Big|\; h \text{ é um homeomorfismo ímpar}, \; h(0) = 0, \; h(B_1) \subset A_0 \Big\} \qquad \text{e} \\ \Gamma_m \; &:= \; \Big\{ K \subset E \;\Big|\; K \text{ compacto}, \; -K = K, \; \gamma(K \cap h(S_1)) \; \geq m, \; \forall \, h \in \Gamma \Big\}, \end{aligned}$$

onde $\gamma(K)$ é o gênero de um subconjunto simétrico $K \subset E$.

Teorema 4.1. *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo as condições (i) e (ii) acima. Além disso assuma que I satisfaz $(Ce)_c$, para todo $\alpha \leq c \leq M$. Seja*

$$b_m := \inf_{K \in \Gamma_m} \sup_{u \in K} I(u), \qquad m = 1, ..., k.$$

Então

(1) $0 < \alpha \leq b_1 \leq ... \leq b_k < \infty$ *e* $b_1, ..., b_k$ *são valores crítico de* I*;*

(2) *Se* $b_m = b_{m+1}$ *para algum* $m \in \{1, ..., k\}$*, então* I *possui infinitos (pares de) pontos críticos correspondentes a* b_m*.*

Quando o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$, para $\alpha \leq c \leq M$, uma prova do Teorema 4.1 pode ser vista em Rabinowitz [16]. Contudo, a mesma prova funciona sob a condição, mais fraca, de Cerami $(Ce)_c$, com $\alpha \leq c \leq M$. Assim nossa tarefa nessa nova configuração é determinar os valores de $c > 0$ para os quais $(Ce)_c$ vale para nosso funcional I_λ. Na verdade, uma análise mais cuidadosa das provas do Lema 2.3, Lema 2.4, Proposição 2.1 e Teorema 2.2 nos mostram que, pelos mesmos argumentos usados nesses resultados, podemos provar o seguinte análogo ao Teorema 2.2:

Teorema 4.2. *Assuma* $(f_1)-(f_4)$ *e* (f_6). *Se* $0<\lambda<|\Lambda|$ *e* $\lambda\notin\sigma_p(S)$, *então o funcional* I_λ *satisfaz a condição de Cerami* $(Ce)_c$, *para todo* $0<c<m_\lambda^\infty$.

Observação 4.1. *Aqui,* $\sigma_p(S)$ *denota o espectral pontual do operador* S *definido em* (2.5). *Em outras palavras,*

$$\sigma_p(S)=\Big\{\lambda\in\mathbb{R}\ \Big|\ -\Delta u-g(x)u=\lambda u,\ \ para\ algum\ \ 0\neq u\in H^2(\mathbb{R}^N)\Big\}.$$

Observação 4.2. *Os seguintes fatos são conhecidos sobre o espectro* $\sigma(S)$ *(veja [4]):*

(a) *S tem um espectro discreto (não essencial) em* $(-\infty,-l_\infty)$, *ou seja, para qualquer* $l>l_\infty$, *o espectro de* S *em* $(-\infty,-l)$ *consiste num número finito de autovalores de multiplicidade finita;*

(b) *Se* $\lim\limits_{|x|\to\infty}(g(x)-l_\infty)|x|=0$, *então* $\sigma_p(S)\cap(-l_\infty,\infty)=\varnothing$.

Note que, sob a hipótese (b) acima, segue que $\sigma_p(S)$ é um subconjunto enumerável de $[\Lambda,-l_\infty]$.

Estamos agora prontos para enunciar e provar nosso resultado de multiplicidade.

4.2 Resultado de Multiplicidade

Teorema 4.3. *Assuma as condições* $(f_1)-(f_4),(f_6)$ *e* $0<\lambda<|\Lambda|$, $\lambda\notin\sigma_p(S)$. *Assuma também que existem* k *funções de suporte disjuntos* $\phi_1,...,\phi_k\in H^1(\mathbb{R}^N)$, *tais que*

$$I_\lambda(\phi_i)<0, \tag{4.1}$$

$$\|\phi_i\|_\lambda^2<\frac{2m_\lambda^\infty}{k}, \tag{4.2}$$

para todo $1\leq i\leq k$, *onde* I_λ *é o funcional energia definido em* (2.1), *ou seja,*

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2-\int F(x,u)\,dx,\qquad u\in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Então o problema (P_λ) *tem pelo menos* k *pares de soluções não triviais.*

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema 4.1 em I_λ com $E=H^1(\mathbb{R}^N)$. Primeiramente, a Proposição 3.1 implica que a condição (i) do Teorema 4.1 é satisfeita por I_λ. Em seguida, definimos

$$X_k:=span\Big\{\phi_i\ \Big|\ 1\leq i\leq k\Big\}\subset H^1(\mathbb{R}^N)$$

e mostraremos que $\sup\limits_{u\in X_k}I_\lambda(u)<m_\lambda^\infty$. Como as funções ϕ_i possuem suportes disjuntos, temos que

$$I_\lambda\Big(\sum_{i=1}^k t_i\phi_i\Big)=\sum_{i=1}^k I_\lambda(t_i\phi_i) \tag{4.3}$$

onde

$$I_\lambda(t_i\phi_i)=\frac{1}{2}t_i^2\|\phi_i\|_\lambda^2-\int F(x,t_i\phi_i)\,dx.$$

De fato, note que $\phi_i\phi_j=0$, para $i\neq j$, já que os suportes são disjuntos. Em particular, note que

$$\begin{aligned}\int(\phi_i+\phi_j)^2\,dx &= \int(\phi_i^2+2\phi_i\phi_j+\phi_j^2)\,dx\\ &= \int\phi_i^2\,dx+\int\phi_j^2\,dx,\end{aligned}$$

logo, concluímos que

$$\int \Big(\sum_{i=1}^{k} t_i\phi_i\Big)^2 dx = \sum_{i=1}^{k} \int (t_i\phi_i)^2\, dx,$$

e com o mesmo argumento, temos

$$\int \Big|\nabla\Big(\sum_{i=1}^{k} t_i\phi_i\Big)\Big|^2 dx = \sum_{i=1}^{k} \int \Big|\nabla t_i\phi_i\Big|^2 dx,$$

desta forma, obtemos

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k} t_i\phi_i\Big\|_\lambda^2 = \sum_{i=1}^{k} \|t_i\phi\|_\lambda^2. \tag{4.4}$$

Seja agora $x \in supp\{\phi_i\}$, logo $F(x,\phi_j) = F(x,0) = 0$, para $j \neq i$. Assim temos, para $x \in supp\{\phi_i\}$, que

$$F\Big(x, \sum_{i=1}^{k} t_i\phi_i\Big) = F(x, t_i\phi_i) = \sum_{i=1}^{k} F(x, t_i\phi_i), \tag{4.5}$$

e assim (4.4) e (4.5) provam (4.3).

Agora estudaremos as seguintes possibilidades:

(1) $|t_i| \leq 1$: Neste caso, note que de (f_1) sabemos que $f(x,t) \geq 0, \forall\, t \in \mathbb{R}$, logo para $t \geq 0$, temos

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)t\, dt \geq 0,$$

para $s \geq 0$ e por (f_6) temos que $F(x,-s) = F(x,s) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$. Teremos então

$$\begin{aligned} I_\lambda(t_i\phi_i) &= \frac{1}{2}t_i^2\|\phi_i\|_\lambda^2 - \int F(x,t_i\phi_i)\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}t_i^2\|\phi_i\|_\lambda^2, && \text{pois } F(x,s) \geq 0 \\ &\leq \frac{1}{2}\|\phi_i\|_\lambda^2, && \text{pois } |t_i| \leq 1 \\ &< \frac{m_\lambda^\infty}{k}, && \text{por (4.2)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda(t_i\phi_i) < \frac{m_\lambda^\infty}{k}. \tag{4.6}$$

(2) $|t_i| > 1$: Neste caso, de (f_2), obtemos

$$\begin{aligned} F(x,ts) &= \int_0^{ts} f(x,\tau)\tau\, d\tau \\ &= \int_0^s f(x,t\alpha)(t\alpha)t\, d\alpha \\ &= t^2\int_0^s f(x,t\alpha)\alpha\, d\alpha \\ &\geq t^2\int_0^s f(x,\alpha)\alpha\, d\alpha \\ &= t^2F(x,s), \end{aligned} \tag{4.7}$$

para $|t| \geq 1$ e $s \geq 0$, onde fizemos a mudança $\alpha = \dfrac{\tau}{t}$. Por (f_6) e (4.7), temos

$$F(x,-ts) = F(x,ts) \geq t^2 F(x,s) = t^2 F(x,-s),$$

e assim concluímos que

$$F(x,ts) \geq t^2 F(x,s), \tag{4.8}$$

para $|t| \geq 1$ e $\forall\, s \in \mathbb{R}$. Obtemos então

$$\begin{aligned} I_\lambda(t_i\phi_i) &= \frac{1}{2}t_i^2\|\phi_i\|_\lambda^2 - \int F(x,t_i\phi_i)\,dx \\ &\leq t_i^2\Big[\,\frac{1}{2}\|\phi_i\|_\lambda^2 - \int F(x,\phi_i)\,dx\Big], && \text{por } (4.8) \\ &= t_i^2 I_\lambda(\phi_i) < 0, && \text{por } (4.1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda(t_i\phi_i) \leq t_i^2 I_\lambda(\phi_i) < 0. \tag{4.9}$$

Portanto (4.6) e (4.9) nos dá

$$\sup_{t_i\in\mathbb{R}} I_\lambda(t_i\phi_i) < \frac{m_\lambda^\infty}{k} \qquad \text{e} \qquad \lim_{|t|\to\infty} I_\lambda(t\phi_i) = -\infty, \qquad 1 \leq i \leq k. \tag{4.10}$$

Seja $u \in X_k$, logo $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_i\phi_i$ e assim

$$\begin{aligned} \sup_{u\in X_k} I_\lambda(u) &= \sup_{(t_1,\ldots,t_k)\in\mathbb{R}^k} I_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k} t_i\phi_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sup_{(t_1,\ldots,t_k)\in\mathbb{R}^k} I_\lambda(t_i\phi_i), && \text{por } (4.3) \\ &< k.\frac{m_\lambda^\infty}{k} = m_\lambda^\infty, && \text{por } (4.10), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_{u\in X_k} I_\lambda(u) < m_\lambda^\infty. \tag{4.11}$$

Assim, fica claro de (4.10) e (4.11) que a condição (ii) do Teorema 4.1 também é satisfeita pela nossa escolha de X_k. Finalmente, o Teorema 4.2 fornece a condição de Cerami necessária, de modo que o Teorema 4.1 pode ser aplicado para obtermos o resultado de multiplicidade desejado. $\square$

Em seguida, vamos apresentar uma grande classe de tais problemas assintoticamente lineares possuindo múltiplas soluções.

Sejam $a(x) \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^+), b(x) \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^+)$ e $p(s) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ funções satisfazendo as seguintes condições:

(h_1) Existe $a_\infty > 0$ tal que $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} |x|(a(x) - a_\infty) = 0$. Note que neste caso $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty$;

(h_2) $b(x) \neq 0$ e $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} |x|b(x) = 0$. Neste caso, $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} b(x) = 0$;

(h_3) $p(s)$ é uma função par, não-decrescente para $0 \leq s < \infty$ e satisfaz as três seguintes condições

$$\begin{aligned} p(s) &> 0, \qquad \text{para } s \neq 0, \\ \lim_{s\to 0} p(s) &= 0 \qquad\qquad \text{e} \\ \lim_{|s|\to\infty} p(s) &= p_\infty > 0. \end{aligned}$$

Definimos agora

$$f_\mu(x,s) = \Big(a(x) + \mu b(x)\Big)p(s), \qquad \mu > 0$$

e consideramos o problema

$$(\hat{P}_\mu) \qquad\qquad -\Delta u + \lambda u = f_\mu(x,u)u.$$

Note que, em vista de $(h_1) - (h_3)$, a função $f_\mu(x,s)$ satisfaz todas as condições $(f_1) - (f_4)$ e (f_6). De fato,

(f_1): Como $a(x), b(x)$ e $p(s)$ são contínuas, devemos ter $f_\mu \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ e

$$\lim_{s\to 0} f_\mu(x,s) = \Big(a(x) + \mu b(x)\Big) \lim_{s\to 0} p(s) = 0, \qquad \text{uniformemente em } x;$$

(f_2): Para $x \in \mathbb{R}^N$ fixo temos, por (h_3), que $f(x,\cdot)$ é não-decrescente para $s \in [0,\infty)$. Definindo $g(x) := g_\mu(x) = p_\infty\Big(a(x) + \mu b(x)\Big)$, teremos $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ e

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} f(x,s) &= \Big(a(x) + \mu b(x)\Big) \lim_{s\to\infty} p(s) \\ &= p_\infty\Big(a(x) + \mu b(x)\Big) \\ &= g(x), \end{aligned}$$

uniformemente em x.

(f_3): Seja $h(s) = p(s)a_\infty$, logo $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ e

$$\begin{aligned} \lim_{|x|\to\infty} f(x,s) &= p(s) \lim_{|x|\to\infty} \Big(a(x) + \mu b(x)\Big) \\ &= p(s)a_\infty \\ &= h(s), \end{aligned}$$

uniformemente em s.

(f_4): Temos

$$\begin{aligned} \lim_{|x|,\, s\to\infty} f(x,s) &= \lim_{|x|\to\infty} \Big(a(x) + \mu b(x)\Big) \lim_{s\to\infty} p(s) \\ &= a_\infty p_\infty \\ &:= l_\infty \in (0,\infty). \end{aligned}$$

(f_6): Como $p(s)$ é uma função par, então

$$\begin{aligned} f(x,-s) &= \Big(a(x)+\mu b(x)\Big)p(-s)\\ &= \Big(a(x)+\mu b(x)\Big)p(s)\\ &= f(x,s). \end{aligned}$$

Lembramos agora das definições dadas em (2.23) – (2.25), são elas:

$$I_\lambda^\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \int H(u)\,dx,$$

$$M_\lambda^\infty = \Big\{u \neq 0 \;\Big|\; I_\lambda^{\infty\,\prime}(u)u = \|u\|_\lambda^2 - \int h(u)u\,dx = 0\Big\},$$

$$\begin{aligned} 0 < m_\lambda^\infty &= \inf_{u\in M_\lambda^\infty} I_\lambda^\infty(u), \quad && \text{se} \quad M_\lambda^\infty \neq \varnothing \quad \text{e}\\ m_\lambda^\infty &= \infty, && \text{se} \quad M_\lambda^\infty. \end{aligned}$$

Já que $\lim_{|x|\to\infty} f_\mu(x,s) = h(s)$ é independente de μ, então podemos ver que m_λ^∞ é independente de μ. Além disso, como (h_1) e (h_2) implicam que

$$\begin{aligned} |x|\Big(g_\mu(x) - a_\infty p_\infty\Big) &= |x|\Big(p_\infty\Big(a(x)+\mu b(x)\Big) - a_\infty p_\infty\Big)\\ &= |x|\Big(a(x)p_\infty + \mu b(x)p_\infty - a_\infty p_\infty\Big)\\ &= |x|\Big((a(x)-a_\infty)p_\infty + a_\infty p_\infty + \mu b(x)p_\infty - a_\infty p_\infty\Big)\\ &= |x|(a(x)-a_\infty)p_\infty + \mu p_\infty |x| b(x) \;\to\; 0, \end{aligned}$$

quando $|x| \to \infty$, temos então que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|(g_\mu(x) - l_\infty) = 0, \qquad \text{para todo } \mu > 0. \tag{4.12}$$

Concluímos da Observação 4.2 que, se $0 < \lambda < l_\infty = a_\infty p_\infty$, então $\lambda \notin \sigma_p(S_\mu)$ para todo $\mu > 0$, onde

$$S_\mu : H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad S_\mu(u) := -\Delta u - g_\mu(x)u. \tag{4.13}$$

Agora, dado $k \in \mathbb{N}$ podemos escolher k funções de suporte disjuntos $0 \leq \phi_1, ..., \phi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que, para $1 \leq i \leq k$,

$$\|\phi_i\|_\lambda^2 < \frac{2m_\lambda^\infty}{k} \qquad \text{e} \qquad \int b(x)P(\phi_i)\,dx > 0,$$

onde $P(s) = \displaystyle\int_0^s p(t)t\,dt$. Note que

$$
\begin{aligned}
F_\mu(x,s) &= \int_0^s f_\mu(x,t)t\,dt \\
&= \int_0^s \Big(a(x) + \mu b(x)\Big)p(t)t\,dt \\
&= \Big(a(x) + \mu b(x)\Big)\int_0^s p(t)t\,dt \\
&= \Big(a(x) + \mu b(x)\Big)P(s).
\end{aligned}
$$

Então, como $a(x) \geq 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(\phi_i) &= \frac{1}{2}\|\phi_i\|_\lambda^2 - \int F_\mu(x,\phi_i)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\|\phi_i\|_\lambda^2 - \int (a(x) + \mu b(x))P(\phi_i)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|\phi_i\|_\lambda^2 - \mu\int b(x)P(\phi_i)\,dx,
\end{aligned}
$$

de modo que, para $\mu > 0$ suficientemente grande, tenhamos $I_\lambda(\phi_i) < 0$, para $1 \leq i \leq k$. Provamos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Assuma que $a(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, $b(x) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ e $p(s) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ satisfazem as condições $(h_1) - (h_3)$. Então, para qualquer $0 < \lambda < a_\infty p_\infty$, o número de soluções do problema $(\hat{P}_\mu)$ tende ao infinito quando $\mu \to \infty$.*

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis **14** (1973), 349−381.

[3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, New York - London - Sydney, 1966.

[4] Berezin, F. A. e Shubin, M. A., *The Schrodinger Equation*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[5] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, Rutgers University, 2010.

[6] Costa, D. G. e Tehrani, H., *On a Class of Assimptotically Linear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$, Journal of Differential Equations 173 (2001), 470-494.

[7] Dautray, R. e Lions, J.L., *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, Vol 1, Masson, Paris, 1984.

[8] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Math. Soc., 1998.

[9] Figueiredo, G., *Uma Introdução à Teoria dos Pontos Críticos*, Universidade Federal do Pará, 2015.

[10] Furtado, M., *Notas de EDP 2*, versão 1.2, Universidade de Brasília, Brasília, 2012.

[11] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin-New York, 1983.

[12] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques*, Springer-Verlag, France, Paris, 1993.

[13] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, University of Windsor, 1978.

[14] Lions, P. L., *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case*, Non Linéaire 1, 1984, n^{o}2, 109-145.

[15] Oliveira, C. R. de, *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*, Birkhäuser, Progress in Mathematical Physics, volume 54, 2009.

[16] Rabinowitz, P. H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math, Vol. 65, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1986.

[17] Stein, E., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princieton, NJ, 1970.

[18] Stuart, C.A. e Zhou, H.S., *Applying the mountain pass theorem to an asymptotically linear elliptic equation on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), 1731-1758.

[19] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.