Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Educação – FE

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA E PROCEDIMENTOS PARA SUA MEDIDA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADES FUNDAMENTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Edilene Simões Costa dos Santos

Brasília, DF
Maio 2014

EDILENE SIMÕES COSTA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA E PROCEDIMENTOS PARA SUA MEDIDA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADES FUNDAMENTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada à Comissão Examinadora da Faculdade de Educação, da Universidade de Brasília – UnB para defesa sob a orientação do Professor Doutor Cristiano Alberto Muniz.

Brasília, DF
Maio 2014

EDILENE SIMÕES COSTA DOS SANTOS

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA E PROCEDIMENTOS PARA SUA MEDIDA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADES FUNDAMENTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

BANCA EXAMINADORA

Prof. Doutor Cristiano Alberto Muniz (UnB) – Orientador

Prof. Doutor Iran Abreu Mendes (UFRN) – Examinador

Prof. Doutor Cleyton Hércules Gontijo (UnB) – Examinador

Profa. Doutora Maria Terezinha Jesus Gaspar (UnB) – Examinadora

Prof. Doutor Célio da Cunha (UnB) – Examinador

Profa. Doutora Nilza Eigenheer Bertoni (UnB) – Suplente

Brasília, DF
Março 2014

Dedico esse trabalho a Deus:
33 Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria, como da ciência de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis os seus caminhos!
34 Por que quem compreendeu a mente do Senhor? Ou quem foi seu conselheiro?
35 Ou quem lhe deu primeiro a Ele, para que lhe seja recompensado?
36 Porque dEle e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém.
(Romanos 11: 33-36)

AGRADECIMENTOS

Agradecer representa um ato de reconhecimento. Há muitas pessoas a agradecer, de maneira especial, quero agradecer:

A Deus, razão de minha existência.

À minha família o carinho e atenção

Ao meu marido Marlus a parceria, compreensão, encorajamento e apoio.

Ao professor Dr Cristiano Alberto Muniz, orientador e primeiro a me acolher, acompanhar nesta jornada, pela disponibilidade, pelo incentivo e pelo zelo em conduzir-me nesta pesquisa;

À professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar, a segunda a me acolher e acompanhar nessa jornada com a mesma disponibilidade, zelo e carinho de uma orientadora.

Às professoras e alunos parceiros, terceiros a me acolher, pela confiança, carinho responsabilidade e compromisso comigo e com a pesquisa.

Às minhas queridas amigas o apoio e leituras.

Ao meu grupo de pesquisa COMPASSO-DF o companheirismo, aconchego e descanso.

E a todos os meus amigos de reflexões infinitas, que me incentivaram sempre a continuar.

Aos professores doutores Iran Abreu Mendes, Clayton Gontijo, Célio da Cunha que aceitaram fazer parte da banca examinadora.

À professora Drª Nilza Eigenheer Bertoni que aceitou fazer parte da banca examinadora.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar a aprendizagem utilizando a história da matemática como geradora de circunstâncias de produção e sistematização do conceito de área como grandeza autônoma e sua medida e de atividades heurísticas de tal conceito inseridas na organização do trabalho pedagógico em alunos do 5º ano do ensino fundamental. Para melhor objetivar o estudo, formulei três asserções que orientaram a investigação: (1) A utilização da história da matemática como metodologia representa a possibilidade de criar condições que favoreçam a aprendizagem de conteúdos matemáticos. (2) É possível construir atividades didáticas a partir de textos da história da matemática, transformando as aulas em um espaço que desenvolve a criatividade, a construção e a apropriação do conceito de medidas de área pelos alunos. (3) Existem textos de história da matemática com situações disponíveis que podem ser utilizados na elaboração de atividades didáticas para construção de conceitos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental. Este é um estudo que se insere no paradigma analítico interpretativo e que segue uma abordagem qualitativa, que visa a análise dos processos e produções dos alunos, tendo em conta um espaço de ensino e aprendizagem gerado pela aplicação de uma sequências de atividades elaboradas a partir contexto histórico da matemática. As informações foram obtidas por meio da participação na aplicação das atividades e observações, análise dos registros de produção dos alunos e conversas com as professoras das duas turmas nos encontros para organização do trabalho a ser desenvolvido em sala de aula. Realizei os estudos em duas turmas do 5º ano do ensino fundamental da rede pública de ensino do Distrito Federal. As conclusões desta investigação centram-se numa análise acerca dos procedimentos, dificuldades, representações, mobilização de teoremas e conceitos em ação apresentados pelos alunos participantes do estudo. Constatei o crescimento gradativo do aluno na construção e significação do conceito de área e sua medida, e na compreensão que os conhecimentos não são prontos e que são construídos em processo que envolve tempo, conhecimentos, contextos e pessoas. Ao final da sequência de atividades os alunos demonstraram identificar área como grandeza, nas decisões para resolução não confundiram superfície com sua área e nem área com número.

Palavras-chave: história da matemática; ensino e aprendizagem; decisão pedagógica; área e sua medida.

ABSTRACT

This research aims at analysing learning by using the history of mathematics to create circumstances to produce and systematize the concept of area as autonomous magnitude and its measurements and studying the heuristics activities of such concept inserted in the organization of the teaching work for fifth-year students in the elementary school. In order to be more objective, I formulated three assertions that guide the research: (1) The use of the history of mathematics as a didactic instrument represents the possibility to create conditions to improve the learning of mathematic contents. (2) It is possible to do activities from texts of the history of mathematics, therefore classrooms can be transformed into a place to develop the creativity and the construction and appropriation of the concept of area measurements by the students. (3) Students from elementary school can create mathematics concepts from activities elaborated with the background of the history of mathematics dimension. This study is inserted in the interpretative analytical paradigm and based on a qualitative approach. It aims to analyse the students' processes and productions with due regard to the teaching and learning space generated by applying sequences of activities prepared from the historical context of mathematics. The information was obtained through the conception of activities shared with the teachers; the participation in the implementation of activities and observations; the analysis of the records from the material produced by the students and from the conversation with the teachers of both classes in the meetings to define the work to be developed in the classroom. I performed the studies in two classes of the 5^{th} year of elementary school, both public schools in the Federal District. The conclusions of this research focus on the analysis of procedures, difficulties, representations, mobilization of theorems and concepts in action (VERGNAUD, 1996) presented by the participating students through their actions as well as the records. I verified the students' gradual growth in the construction of the concept of area and its measurement. They understood that their knowledge was not finished yet, actually it was a work in progress that demanded time, understanding, contexts and people. In the end of the sequence of activities performed, students were able to identify the area as magnitude. In their decision making processes, they did not mistake the surface with its area and neither its area with number.

Key words: history of mathematics; teaching and learning; teaching decision; area and its measurements.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

APRESENTAÇÃO

Neste trabalho, dentre as potencialidades da história da matemática a assumimos como elemento norteador de decisão quanto aos procedimentos pedagógicos a serem utilizados na construção do conceito pelo aluno, ou seja, um instrumento que permeará todo o processo de ensino e de aprendizagem de determinado conteúdo. Debruçamo-nos sobre o conceito de área como grandeza autônoma e sua medida por meio de uma proposta de atividades fundamentadas nas concepções históricas da matemática para o ensino e a aprendizagem desse conceito no 5º ano do ensino fundamental.

Assim sendo, não tivemos por pretensão ensinar história da matemática aos jovens estudantes, contudo dela fizemos uso para problematização de situações que permitissem aos alunos apropriação significativa das ideias matemáticas.

A intervenção didática por meio da história da matemática consiste em uma sequência de atividades de experiências, observações e reflexões, que conduzem o aluno a descobertas e tomadas de decisões quanto aos procedimentos, convencendo-o de que é um sujeito capaz.

Na escrita do trabalho utilizamos, na maior parte, do texto primeira pessoa do plural para indicar que nossa fala é resultado da minha interlocução com meu orientador, professor Dr Cristiano Alberto Muniz, com a professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar e com as duas professoras colaboradoras cujos nomes não citaremos, pois acordamos que assim o seria.

Esta tese encontra-se estruturada em quatro capítulos. No primeiro faço um contexto da tese, explicitando meu contato com a história da matemática. Apresento meus objetivos, as asserções, argumento a favor desta pesquisa.

No capítulo II "Fundamentos Teóricos e Metodológicos", abordamos nossas opções metodológicas, caracterizamos os participantes e a técnica utilizada para obter as informações, bem como explicamos o modo como elas foram analisadas por meio dos subtemas: 'considerações metodológicas', 'sequência de atividades', 'os participantes', 'procedimentos e instrumentos', 'o narrador na perspectiva desta pesquisa'. Nesse capítulo também apresentamos uma revisão da literatura relativa às principais temáticas que servem de suporte para esta investigação e que a enquadram: o historiador e o educador, a história da matemática como recurso didático, o conceito de área, medidas na história, medidas no Brasil, a noção de medida em Vergnaud e as contribuições de Vergnaud e Duval.

No Capítulo III, apresentamos as atividades que constituem a sequência com seus respectivos desenvolvimento e análise. Na construção de tal sequência, assumimos que para a formulação do conceito de área o aluno primeiramente necessita construir área como grandeza autônoma distinguindo área e superfície assim como área e medida da área. Por meio da análise das produções dos alunos em sala de aula, identificamos conquistas, desafios e dificuldades; algumas previstas e outras não.

Para a estruturação da sequência tomamos como referencial o trabalho desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989), que distingue três pontos na aprendizagem de área:

1) Construir a noção de área como grandeza autônoma pela comparação direta de duas superfícies por inclusão ou indireta por recorte e colagem.

2) Estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de medida de área unitária.

3) Apontar as diferenças e construir relações entre comprimentos e área.

No capítulo IV "A história da matemática como fonte de sentidos", consideramos a história da matemática como um espaço no qual o aluno conhece, aplica, analisa, julga, constrói e ressignifica o conhecimento; estabelece relações com outros conhecimentos promovendo, assim, aprendizagens.

Em seguida apresentamos as "Considerações finais" com uma breve reflexão pessoal posicionando a pesquisadora ao final da pesquisa, em seguida procuramos sintetizar as principais conclusões provenientes das análises e indicar algumas recomendações que emergem do estudo.

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

1 Contexto da Tese

Como professora de matemática, trago na minha história profissional inquietações e buscas fundamentadas no meu compromisso como mediadora dos conhecimentos escolares, procurando contribuir na formação do sujeito crítico, participativo, criativo. Esse compromisso, além de tornar-me constante aprendiz, colocou-me frente à história da matemática.

O meu primeiro contato com a história da matemática aconteceu no ano 2000, quando ministrava a disciplina de Análise Real, no curso de licenciatura em matemática. Em busca de propostas pedagógicas para trabalhar tal disciplina, iniciei algumas leituras e, dentre elas, estava o livro organizado por Maria Aparecida Viggiani Bicudo, "Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas", no qual um texto, de maneira especial, chamou-me a atenção: "A Pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática" de Rosa Baroni e Sergio Nobre. Então, entre as tendências da Educação Matemática, a história era uma delas! Mas, como levar a história para a sala de aula de matemática? Esse questionamento orientou, desde então, minha leitura em torno de tal tema.

Tais leituras direcionaram-me a fazer a leitura do livro "Teorema do Papagaio", de Denis Guedj (1999) junto com a análise real, a qual aceitou o desafio. Depois da leitura, discutiu-se a possibilidade de aprendizagem, por meio da história da matemática. A maioria achou complicado, talvez pela nossa dificuldade com a própria história e por desconhecer suas potencialidades. No ano seguinte, pedi aos alunos da disciplina de estruturas algébricas, que escolhessem um tema e buscassem conhecer a história de tal tema.

Na biblioteca de nossa faculdade, tínhamos como fonte de pesquisa somente o livro "A História da Matemática", de Carl Boyer (1996), e a maioria dos acadêmicos daquela turma não tinha acesso à internet em casa. Quem podia estar na faculdade no período matutino, quando o laboratório era menos ocupado, tinha mais oportunidades para enriquecer a pesquisa. No entanto, as tentativas de reflexões, a partir da história de um determinado conteúdo, eram insípidas.

Dois desses acadêmicos, que já atuavam em sala de aula, iniciaram a utilização da história com suas turmas. De posse de mais informações e leituras, percebi que fazia uso da história somente para introduzir um assunto. Não sabia como abordar um tema por meio da história, ou seja, anunciávamos o que seria estudado, por meio de uma narrativa de fatos históricos relativos ao tema, ou por narrativa bibliográfica de algum matemático. Lembro-me de que os alunos do curso de matemática gostavam especialmente da história dos matemáticos Tartaglia e Galois.

Com o passar do tempo, meus estudos me levaram a perceber que meus procedimentos didáticos eram justamente o que era desaconselhado por alguns autores, como Imenes (1989), Fauvel e Van Maanen (2000) e Gaspar (2003), que comungam da ideia de que o educador, ao ocupar-se do ensino via história da matemática, não deve fazer um único uso da história, como biografias e narrativa, pois a dinâmica da sala de aula exige apropriação didática da história de diferentes maneiras, uma vez que esse processo é reelaborante e complexo. No entanto, a dúvida persistia: como ensinar e aprender matemática por meio de sua história?

Nesse período, deparei-me com o texto de Byers (1992): “Por que estudar a história da matemática”. Esse texto foi um marco revolucionário na minha concepção do uso da história da matemática como instrumento didático.

Ao entrar no mestrado, tentei trabalhar com esse tema, mas não houve interesse por parte da minha orientadora. Esse desejo ficou cristalizado como investigação, mas não como leituras e estudos.

A inexistência de trabalhos que tivessem como objeto de estudo a adoção da história da matemática, como instrumento didático na construção de conceitos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental, levou-me a iniciar uma investigação sobre esse tema e desejar aprofundá-lo no doutorado.

Por meio de revisão da literatura, constatei que as produções, na sua maioria, dizem respeito à utilização da história na formação de professores. Ao refinar a busca, encontrei algumas pesquisas que, apesar de defenderem o potencial da história da matemática como instrumento pedagógico, não traziam informações no campo da efetivação prática. Nenhuma pesquisa que relatasse resultados de aplicabilidade em sala de aula do ensino fundamental. Resolvi trabalhar no sentido de utilizar a história da matemática em sala de aula como instrumento didático nas séries iniciais do ensino fundamental.

Em suma, as publicações pertinentes que defendem as potencialidades da história como instrumento didático apontam a existência de poucos estudos com o desenvolvimento de atividades práticas em sala de aula dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio, mas quase nada em turmas dos anos iniciais do ensino fundamental.

A utilização da história da matemática, para a promoção da aprendizagem nos anos iniciais do ensino fundamental, apresenta algumas limitações, como a falta de material didático e o fato alegado por pesquisadores de que os estudantes não percebem nenhum sentido no progresso histórico, por conseguinte associam os conhecimentos científicos a fatos imediatos. Desta forma, justificam-se as pesquisas realizadas aproximarem mais uso pedagógico da história para o final do ensino fundamental, médio e de formação de professores. Nesse trabalho defendemos a sua utilização da história da matemática como metodologia de ensino e aprendizagem nas séries iniciais, sempre que possível, pois:

> Acreditamos que de acordo com o nível de complexidade do conhecimento a ser construído pelos estudantes, independente do nível escolar em que se encontrem, é adequado o uso de atividades que favoreçam a interatividade entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento, sempre em uma perspectiva contextualizadora que evidencie três aspectos do conhecimento: o cotidiano, o escolar e o científico. [...]. Utilizar tais princípios aliados à dimensão histórica pode conduzir a investigação em sala de aula, dando maior significação à matemática escolar. (MENDES, 2009a, p. 93).

Os fatos e argumentos apresentados anteriormente contribuíram para definir o meu objeto de pesquisa no Doutorado em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília, que pode ser traduzido como sendo a história da matemática como instrumento didático que favorece a construção[1] do conceito da grandeza e de medida de área no 5º ano do ensino fundamental.

Reiniciei minhas leituras em torno do tema, agora, com um olhar mais apurado, direcionado e de investigadora. Esses estudos são efetivados na busca de comprovações da potencialidade didática da história da matemática e de conhecimentos de situações históricas que permitam desenvolver uma pesquisa fundamentada na seguinte tese: mobilizar didaticamente a história da matemática na ação pedagógica pode proporcionar de forma significativa a construção do conceito da grandeza e de medida de área pelos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Não se trata de construir uma história, mas sim reescrevê-la pedagogicamente a partir de pesquisa bibliográfica apoiada nas publicações disponíveis no Brasil, em especial, aquelas que favorecem a aprendizagem de medidas e que permitem a utilização nos anos iniciais. Então, apresentamos e validamos uma proposta para o 5º ano do ensino fundamental,

---

1 Consideramos que o sujeito no 5º ano está iniciando a construção do conceito de área, pelo fato dessa construção ser um processo paulatino ao longo da sua formação estudantil, até no ensino superior pode ocorrer a construção do conceito quando a medida da área pode ser calculada por integral.

considerando o conteúdo de medida de área, conforme o currículo escolar da Secretaria de Educação do Distrito Federal – SEDF.

Elaboramos uma proposta de atividades fundamentadas nas concepções históricas da matemática, aplicamos e observamos as relações estabelecidas pelos alunos e entre eles na resolução da mesma. Nas análises apresentadas, buscamos evidenciar o impacto de tal proposta na aprendizagem dos educandos. Ao final da aplicação das atividades, apresentamos, por meio de reflexões participativas, um *feedback* aos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Enfim, apropriamo-nos da história da matemática para tomar decisões de como trabalhar a construção do conceito em questão no 5º ano do ensino fundamental. Como toda apropriação é reelaborante, uma de nossas análises foi perceber como o aluno em contato com a história da matemática a reelaborava e até que ponto essa reelaboração preservou determinados saberes que são fundamentais na dimensão histórica e garante alguma produção em termo de benefícios para a aprendizagem do conceito em questão.

Na pesquisa, trabalhamos com as seguintes asserções:

- A utilização da história da matemática, como instrumento didático, representa uma possibilidade de criar condições que favoreçam a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

- Atividades didáticas elaboradas a partir de textos da história da matemática, transformam as aulas em um espaço gerador de inquietação, curiosidade, criatividade, e de construção e apropriação de conceitos matemáticos, especificamente, de área e sua medida.

- Alunos do ensino fundamental podem construir conceitos matemáticos a partir de atividades elaboradas que tenham como pano de fundo a dimensão histórica da matemática.

Esta pesquisa teve como proposta não utilizar a história da matemática como motivação inicial de conteúdos curriculares, mas constituí-la como pano de fundo do processo de construção conceitual e aprendizagem.

Também não tivemos como pretensão a reconstrução explícita da história da matemática ou sua integração à matemática. Essa decisão teve como referência as importantes ponderações de Tzanakis e Arcavi (2000), nas quais ponderam que seguir exatamente o desenvolvimento histórico não é a única forma de apresentação de um assunto e, advogam que a aprendizagem da matemática não deve ser guiada pela ontogênese que recapitula a filogênese.

Propomo-nos a fazer uso da história para tomar decisões pedagógicas quanto ao ensino do conceito de área e procedimentos para o seu cálculo. Então, nossa investigação é entendida como uma atividade que busca, na história da matemática, não uma ferramenta de salvação para o ensino e a aprendizagem de matemática, mas uma alternativa de inserir o aluno no contexto da aprendizagem na qual ele possa construir e reconstruir saberes, a partir da participação ativa, criativa e solidária.

Acreditamos que os alunos podem ser encorajados a formular suas próprias perguntas, fazer a conjecturas e as persegui-las, quando são colocados diante de situações significantes, que lhes deem sentido de pertinência ao grupo, como: leitura; escrita; levantamento de recursos, documentação e informação; reflexão. Para nós, as atividades, de ensino e de aprendizagem da matemática, constituídas com base nos fatos de sua história são contextos que favorecem a construção do conhecimento matemático.

Logo, a história pode trazer consigo contingências de um elemento mediador entre o real e imaginário para o jovem, pois representa uma forma de explorar o sentido de alguns objetos matemáticos para o sujeito e para ele no grupo, isto é, nos seus intercâmbios com o sentido do objeto para si e para a turma em estudo; seria, então, o sentido social, favorecendo o resgate do indivíduo na linguagem matemática, não em correspondência linear com a história da matemática em si, mas uma articulação com os conceitos matemáticos apresentados por meio dela. Nesse momento da pesquisa, buscamos perceber os educandos na sua totalidade, como sujeitos no mundo e com o mundo, além de suas relações com os conhecimentos em questão.

A escolha de medidas como tema da tese ocorreu por ser um conteúdo que, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), o Currículo Básico para a Educação Pública do Distrito Federal (DISTRITO FEDERAL, 2010a) e com as Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica do Distrito Federal (DISTRITO FEDERAL, 2010b), é proposto para todos os anos do Ensino fundamental, no entanto, é pouco discutido como conteúdo de ensino, sendo a ênfase maior em álgebra. Sem falar nos livros didáticos que, na sua maioria, em especial naquele adotado na escola em que será desenvolvida a pesquisa, abordam o assunto com ênfase em uma tabela ou "escadinha", na qual os estudantes "imitam" ou repetem o procedimento de contar casas para a esquerda ou para a direita, conforme a transformação de uma unidade de medida.

A minha experiência como formadora de professores também influenciou na decisão ao consideramos tal tema, uma vez que as medidas estão estreitamente presentes nas atividades cotidianas devido ao seu forte caráter social; entretanto, não é um conceito fácil de ser construído ou sistematizado pelos alunos.

Outro fator que teve peso na decisão foi a escolha de tal tema pelo grupo de professores que participaram dos cursos de extensão de história da matemática, ofertados no Departamento de Matemática da UnB, pela professora Maria Terezinha Jesus Gaspar. Ao finalizar o curso, intitulado "Matemática: uma perspectiva histórica e pedagógica", cujo foco era o ensino de geometria nos anos iniciais, a professora ministrante consultou os participantes sobre qual tema eles gostariam que fosse abordado no curso a ser oferecido no semestre seguinte. De comum acordo, foi definido o tema "medidas", baseados na afirmação de que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem de tal conteúdo.

De acordo com o currículo da Secretaria de Educação do Distrito Federal, no 5º ano do Ensino Fundamental, inicia-se o estudo mais sistemático do conceito de medidas, inclusive da medida de área.

Delimitando o tema de medidas, optamos por medida de áreas e pelo 5º ano do ensino fundamental em virtude dos motivos expostos anteriormente.

2 Objetivos

Apresentamos os objetivos que nortearam o desenvolvimento da pesquisa.

2.1 Objetivo geral

Analisar a aprendizagem utilizando a história da matemática na concepção de circunstâncias produtoras e sistematizadoras do conceito de área como grandeza autônoma e procedimentos para sua medida, bem como geradora de atividades heurísticas deste conceito inseridas na organização do trabalho pedagógico no 5º ano do ensino fundamental.

2.2 Objetivos específicos

- Analisar as ações realizadas pelos alunos – conjecturas, discussões, registros – quando estes resolvem situações estruturadas a partir de um fundo histórico para a construção do conceito de área como grandeza.
- Verificar como os alunos constroem o conceito de área como grandeza partir de proposições pedagógicas fundamentadas nas concepções históricas da matemática.
- Elaborar e validar uma sequência de atividades, fundamentada nas concepções históricas, que favoreça a construção do conceito de área como grandeza e sua medida nos anos iniciais do ensino fundamental.

3 Justificativa

Para percepção fundamentada da situação do ensino e aprendizagem da matemática no Brasil, tomamos como referência os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB (BRASIL, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009) em relação ao ensino fundamental. Esses documentos apontam inúmeras dificuldades dos educandos relacionadas aos conteúdos dessa disciplina.

Muitos são os fatores, apontados por estudiosos do assunto e professores, que interferem no processo de ensino e de aprendizagem da matemática contribuindo para o baixo rendimento em todos os níveis de ensino, como por exemplo: as características inerentes e intrínsecas à disciplina; o currículo extenso; o ensino desvinculado do contexto histórico, social político e econômico no qual está inserido; a formação deficitária do professor; a percepção que o aluno tem da matemática; o papel social dessa área de conhecimento; as metodologias de ensino; a desvalorização do professor; a avaliação não processual; dentre outros.

Mendes (2009b) declara que é função da escola favorecer a integração de novos significados aos conhecimentos matemáticos prévios dos alunos. Neste sentido, consideramos que, para promover a aprendizagem da matemática a todos os alunos, a escola precisa oferecer ensino de qualidade, atendendo às potencialidades de cada educando, considerando a diversidade como uma medida inclusiva.

A história da matemática é apontada por Mendes (2006), como uma alternativa para a superação de dificuldades no ensino e aprendizagem da matemática e na sua valorização como produto cultural, ponderando que esta potencialidade depende do modo como a história é inserida na sala de aula.

Nos últimos anos, tem ocorrido um interesse crescente em estudar e verificar o papel da história da matemática na melhoraria do seu ensino e aprendizagem. Isso tem resultado na elaboração de uma bibliografia consolidada no desenvolvimento e na compreensão mais profunda dos fatores envolvidos no trabalho pedagógico, na perspectiva da associação entre a história da matemática e aquela desenvolvida em sala de aula, com estudantes, em diferentes etapas e em diferentes ambientes e contextos. Apesar de serem em quantidade menor, existem trabalhos que envolvem também a identificação de boas práticas em situações de ensino e aprendizagem.

Sendo assim, Bianchi (2006) considera que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN de matemática foram formulados com a intenção de inovar e proporcionar um ensino diferente aos alunos e possibilitar aos professores a compreensão de aspectos da aprendizagem dos alunos. A história da matemática é apresentada nesses referenciais como um dos caminhos que podem favorecer o ensino e aprendizagem da matemática na sala de aula:

> Mediante um processo de transposição didática e aliada a outras metodologias e recursos, a história da matemática se torna uma importante contribuição para processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Mostrando a matemática como uma criação humana, as diferentes culturas, diferentes momentos históricos, comparações entre processos matemáticos do passado e do presente, o aluno pode desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, p. 45).

Vianna (1995) fez um estudo buscando as relações entre a história e a matemática com vistas identificar implicações pedagógicas em livros didáticos, concluindo que os usos didáticos da história da matemática estavam limitados às questões de motivação ou simples informações adicionais, raramente incorporando-se esse conhecimento à elaboração de novas sequências ou às estratégias didáticas.

Baroni e Nobre (1999) também se reportam ao valor da história como elemento motivador:

> Ao desenvolvermos estudos relativos às contribuições da história da matemática para a Educação Matemática, percebemos que é necessária muita cautela, pois se pode incorrer no erro de simplesmente assumir a história da matemática como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo. Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional. (BARONI; NOBRE, 1999, p. 132).

Talvez, por insegurança metodológica ou epistemológica, mas reconhecendo o valor histórico do conhecimento matemático e, fundamentados no valor da narrativa no aprendizado da criança professores dos anos iniciais tentam inserir a história em suas aulas por meio do que os autores chamam anedotas ou como elemento motivador que assume a função de apenas introduzir um assunto desconectado com as demais etapas da organização para o desenvolvimento de tal conteúdo.

Essa ferramenta serve como um elemento introdutório de algum tema matemático a ser tratado, mas não integra nada a nada, ou seja, ao terminar a narrativa da história da matemática, acabou a parte fácil, a brincadeira, introduz-se o conteúdo propriamente dito da matemática, o que é explicitado no currículo escolar:

> Essa história-anedotário de caráter estritamente factual, quando incorporada de forma episódica nas aulas de Matemática, adquiriria segundo alguns dos defensores desse ponto de vista, uma função didática de relax - a recompensa repousante, merecida e necessária pelo esforço estafante requerido pela aprendizagem da Matemática; tudo se passaria como se a matemática exigisse o pensamento e a seriedade, enquanto a História aliviaria a tensão e confortaria. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 16-17).

Os profissionais utilizam a história da matemática com esse foco, acreditando em que ela possa despertar o interesse do aluno pelo conteúdo matemática. Pode até despertar, mas e aí? Passamos para a parte importante que é o conteúdo matemático em si? Consideramos que esse interesse pode trazer inquietações, prazer na busca e na construção do conhecimento por meio da investigação em sala de aula.

Por conseguinte, nossa experiência profissional e bibliográfica nos revela que o material produzido na perspectiva de defender a história como um elemento potencializador do ensino e aprendizagem da matemática é um pouco mais significante quantitativamente do que referências que divulgam práticas pedagógicas desenvolvidas em sala de aula, principalmente no que ser refere às séries iniciais do ensino fundamental. Há um número maior na formação de professores no ensino médio e nos anos finais do ensino fundamental. Há carência acerca de como utilizar a história ao longo do processo de construção conceitual nas séries iniciais do ensino fundamental.

Nesse sentido, a pertinência desse trabalho justifica-se no desejo de contribuirmos para o avanço das reflexões de utilização da história como instrumento didático, nos anos iniciais, não como histórica satírica[2], ou seja, imitação da história, como comentado por Grattan-Guiness (1973, apud BYERS, 1982, p. 63), mas como elemento norteador de decisão quanto aos procedimentos pedagógicos a serem utilizados na construção do conceito pelo aluno, ou seja, um instrumento que permeará todo o processo de ensino e aprendizagem de determinado conteúdo.

Miguel e Miorim (2004) apresentam argumentos questionadores ao uso da história no ensino de matemática, sendo particularmente interessante a este trabalho a discussão de que a história pode ser um fator que dificulta a aprendizagem, uma vez que os alunos, quando confrontados com problemas originais e procedimentos utilizados ao longo da história, dispensarão mais tempo e esforços na tentativa de reconstituir um contexto que não lhes é familiar.

---

2 História satírica é a história cronológica descontextualizada de um tema (MIGUEL, 1997; GRATTAN-GUINNESS, apud MIGUEL, MIORIM, 2004, p. 66).

Chamaram-nos a atenção as ponderações desses autores às considerações de Grattan-Guinness (1973) de que a história é um elemento que dificulta, mas, ao mesmo tempo, esclarece e dá sentido. No entanto, considera inútil como elemento didático em todos os níveis de ensino, com algumas exceções ao ensino superior, citando algumas dificuldades, entre elas que os alunos têm pouco ou nenhum sentido do processo histórico e não possuem capacidade para dominar a ordenação de fatos sucessivos ou simultâneos.

O primeiro obstáculo enfrentado pelas crianças é contra argumentado por Miguel e Miorim (2004, p. 67), com base no fato de que a criança é capaz de deslocar-se de seu contexto atual e adquirir uma real compreensão do passado histórico; já o segundo obstáculo pode ser superado se a criança conceber o presente engendrando o passado.

Miguel e Miorim[3] consideram, ainda, que os obstáculos propostos, apesar de pertinentes, não devem constituir fatores impeditivos para os estudos históricos, ainda que com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Acordamos com esses autores que os argumentos aqui apresentados, apesar de legítimos, não constituem impedimentos à ação pedagógica que mobiliza didaticamente a história da matemática, por conseguinte, consideramo-los um incentivo à nossa pesquisa e um indicador da necessidade de mais investigações nesse sentido.

Em nosso estudo, buscamos elucidar que é possível elaborar e desenvolver, em sala de aula, atividades que permitam ao aluno dos anos iniciais do ensino fundamental a participação direta na construção de conceitos matemáticos de forma criativa, ética e colaborativa, tornando o ensino mais real e dinâmico.

Assim, a história da matemática pode ser apropriada como elemento estruturante de práticas didáticas para o ensino e aprendizagem ao possibilitar a constituição dos contextos e circunstâncias de produção de conceitos, das significações produzidas, da circulação e da transformação desse conhecimento.

Surge, porém, uma questão: Como conduzir esse processo? Ao buscarmos uma metodologia adequada para tal, optamos pela realização de uma sequência de atividades para favorecer a aprendizagem por meio da participação e do envolvimento do sujeito que aprende dentre outros valores assinalados ao longo desse trabalho.

[3] Ibid idem

CAPITULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Para a concretização dos objetivos, esta pesquisa adotou os pressupostos referentes à investigação em sala de aula apoiados em Skøvsmose (2000), Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), Mendes (2006, 2009a, 2009b), dentre outros, tomando a história como elemento didático no ensino e na aprendizagem do conceito de medidas, no 5º ano do ensino fundamental.

1.1 O historiador e o educador

Ao iniciar este trabalho sobre a importância da história da matemática como elemento potencializador da aprendizagem dos conceitos matemáticos, julgamos importante realizar uma pequena análise entre o papel do historiador e do educador nesse contexto. Assim, evidenciamos as circunstâncias e a nossa posição diante dos fatos históricos.

O historiador, a partir de um conjunto de fontes primárias, elabora uma história. A depender de seu interesse o professor faz uso dessa história para tomar decisões pedagógicas relativas ao ensino de determinado conteúdo. Essa ação pode ser sempre reelaborante e tem como pano de fundo os objetivos didáticos pedagógicos que visam não à assimilação da história da matemática em si, mas à aprendizagem do desenvolvimento epistemológico de conceitos e de procedimentos matemáticos, por meio de atividades didáticas, baseadas na conexão entre a resolução de problemas e o contexto histórico de proposição de superação de tais problemas.

Mendes (2009, p. 10) apresentam algumas dificuldades na utilização da história no ensino da matemática, dentre as quais queremos considerar nesse momento: "o despreparo dos professores que não tiveram tanto em sua formação inicial quanto na continuada, oportunidades de estudo da história da matemática e de análise das possibilidades de inserção desta história em suas práticas pedagógicas".

Mendes (2009b, p. 78) afirma: "o uso didático da história da matemática em sala de aula requer um entendimento profundo da própria matemática e do seu desenvolvimento histórico-epistemológico para que assim seja garantido o significado dessa abordagem pedagógica".

Ao refletir acerca da função da história da matemática na educação matemática, encontram-se algumas proposições e argumentações que fundamentam o uso da história no ensino, uma delas é o Princípio Genético, no qual o processo de desenvolvimento do indivíduo (ontogênese) recapitula os estágios de desenvolvimento da espécie (filogênese).

A esse respeito, Piaget e Garcia (2011) tecem um paralelismo entre psicogênese e história das ciências. Defendem que cada estágio da psicogênese, assim como cada período da história, tem início reorganizando o que foi herdado, fazendo uma correlação entre os estágios ontogenéticos e estágios filogenéticos, respectivamente, nos estágios e períodos precedentes.

Para Piaget (2003), os conhecimentos lógico-matemáticos não resultam de aprendizagens empíricas, mas de reflexões sobre os procedimentos empíricos. Todavia constituem a condição necessária da organização e do registro da experiência. Pode-se conceber a construção das estruturas lógico-matemáticas em forma de um desenrolar endógeno, que procede por etapas, de tal natureza que as combinações caracterizam novas etapas. Tais combinações só ocorrem sobre elementos já dados na etapa precedente.

Então, a construção lógico-matemática não se trata de invenção, nem descoberta, pois procede por abstrações reflexivas e reflexionantes produtoras de combinações novas. Mas essas combinações não podem resultar de uma combinatória acessível ao cálculo, desde os níveis anteriores à construção da nova estrutura, porque esta, por efeito retroativo, exige um reajuste reflexivo dos elementos precedentes e conduz a uma síntese que supera as estruturas iniciais, enriquecendo-as na mesma medida (PIAGET, 2005).

Por conseguinte, as estruturas lógico-matemáticas, de acordo com Piaget[4], não podem resultar da aprendizagem no sentido estrito, porque, embora se apliquem continuamente aos dados exteriores, assimilam a aprendizagem sem serem por esta modificadas, a não ser na qualidade de exercício consolidador e generalizador, contudo, sem alterações de estrutura. Igualmente, não podem resultar de simples transmissão hereditária, porque, se estivessem ligadas a genes, não seriam necessárias, nem gerais, nem dotadas de sua plasticidade construtiva. Assim, as estruturas lógico-matemáticas não são devidas à experiência física, nem à transmissão instintiva ou hereditária, mas são retiradas por abstrações reflexivas das coordenações nervosas, concebendo o indivíduo como ser ativo em seus processos cognitivos.

Piaget e Garcia (2011) defendem que esse processo também acontece no plano filogenético, quer dizer, tanto no plano da psicogênese como da filogênese o conhecimento acontece por abstração reflexiva e generalização completiva que são mecanismos de

---

[4] Ibid idem

passagem pelos quais um novo conhecimento é gerado/construído através da adaptação do saber constituído aos conhecimentos prévios por meio do processo de assimilação, acomodação e equilibração. Assim, as construções históricas (filogênese) e as reconstruções pessoais (psicogênese) desenvolvem-se conforme o mesmo processo evolutivo:

> O conhecimento não é nunca um estado, mas um processo influenciado pelas etapas precedentes do desenvolvimento, impondo-se a análise histórico-crítica. Iremos defender que os únicos fatores realmente onipresentes nos desenvolvimentos cognitivos, tanto em história das ciências como em psicogênese, são de natureza funcional e não estrutural. Estão relacionados com a assimilação das novidades às estruturas precedentes e com a acomodação destas às novas aquisições realizadas. (PIAGET; GARCIA, 2011, p. 47).

Conforme Piaget (2005), a equilibração, fato endógeno responsável pela transformação das estruturas, associado às ações da criança, que permite o “crescimento” do conhecimento. Esse papel positivo do conflito cognitivo, presente na teoria Piagetiana da equilibração, está refletido nas asserções de Kuhn (2006), quando tece ponderações sobre o movimento de caos e de ordem na história das ciências, principalmente ao considerar que o progresso científico ocorre por meio de rupturas, por saltos e não de maneira gradual e progressiva.

Segundo Kuhn (2006), as mudanças de concepção de mundo ocorrem quando se tem um movimento de desordem e busca-se a ordem, ou seja, nos momentos de “revolução científica”, um novo paradigma é estabelecido. Isso ocorre pelo fato do paradigma vigente não dar conta de um problema proposto, então, este entra em crise e cede espaço ao novo paradigma. No entanto, Piaget e Garcia (2011) discordam das implicações epistemológicas de Kuhn quanto às reestruturações constituírem saltos no vazio; para esses autores, elas respondem a uma lógica interna.

> Kuhn, por sua vez, não aceita que haja continuidade na evolução científica, nem que existam mecanismos definidos que permitam substituir um paradigma por outro. Kuhn limita-se a verificar uma conjuntura quando um paradigma é desalojado historicamente por outro, sem que haja normas cuja aplicação poderia esclarecer como se produz um determinado fato. Por outro lado, a sua concepção de paradigma não permite estabelecer critérios de comparação entre eles a fim de estabelecer a superioridade de um em relação a outro. (PIAGET e GARCIA, 2011, p. 351).

Conquanto o Princípio Genético seja reconhecido como elemento importante na fundamentação favorável ao uso da história no ensino de matemática, alguns autores defendem que não se deve reconstruir todo o caminho histórico em sala de aula, visto que hoje os contextos social, cultural, político e econômico são outros. Devemos compreender que a construção histórica aponta sinais de como se processa a construção do conceito. Essas informações é que dão as opções pedagógicas para se ensinar tal conceito na escola.

Miguel e Miorim (2004), por exemplo, reconhecem a existências de vínculos entre a filogênese e a ontogênese, mas negam o determinismo de um em relação ao outro, por sua vez, argumentam que esse determinismo leva a uma visão ilegítima dos matemáticos gregos como criança em relação aos adultos de nossa época. “Toda matemática grega passa a ser vista como a infância necessária e lacunar para a constituição da matemática adulta contemporânea”. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 84)

Para os autores, o ensino, mesmo dentro da perspectiva histórica, não deve ser pautado na linearidade e na hierarquização dos conteúdos na qual uma etapa é mais complexa que a anterior, pois o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem escolar são fenômenos condicionados e socioculturalmente influenciados pelas representações hegemônicas das ideias e não necessariamente por todas as representações históricas da mesma.

Os neopiagetianos criticam tal enfoque. Por exemplo, Vergnaud (1996) pondera que conceitualização[5] do sujeito pode estabelecer desvios que fazem com que o desenvolvimento não seja na mesma linha lógica da história da civilização, a criança que aprende é um sujeito ativo com vivência em um mundo tecnológico e globalizado, isso nos leva a considerar a importância do ensino e da aprendizagem de conhecimentos matemáticos por meio da história da matemática como instrumento didático, tendo a compreensão que o raciocínio do jovem aprendiz pode não acompanhar a linearidade da solução da construção da história do homem.

Na próxima seção, descrevemos alguns fatos relacionados à utilização da história da matemática como recurso didático, aspecto que amplia as referências do saber escolar, pois, além de proporcionar um contexto para de referência para os conteúdos matemáticos, proporciona também a articulação da matemática com os respectivos fatos históricos.

1.2 A história da matemática como recurso didático

O nosso estudo sobre o valor didático da história da matemática para o ensino fundamental ancora-se em autores que a defendem como um instrumento que interliga o

[5]A teoria dos campos conceituais de Vergnaud supõe que o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização (VERGNAUD, 1996).

conteúdo com o fazer pedagógico, entre eles Miguel e Miorim (2004) e Mendes (2006, 2009a).

A concepção de educação, como direito universal subjetivo, consagra a escola pública como um espaço de garantia do direito de acesso à escola e de permanência e sucesso na vida escolar. Os debates e reflexões nesse campo foram intensos ao longo da segunda metade do século XX, contribuindo para a revisão do papel da escola diante das mudanças em curso. Os conhecimentos acumulados sobre a educação, aliados ao avanço do processo de construção da democracia, tornaram possível a compreensão de questões fundamentais para a superação dos grandes conflitos da educação que configuram a negação do direito basilar de acesso e permanência dos alunos na escola. (DELORS, 1998; GADOTTI, 2000; MORAN, 2007).

Deve-se, também, considerar, que todo educando tem condições de construir conhecimentos sobre o mundo. Alunos que, às vezes, parecem ter dificuldades de aprendizagem em atividades de campo são surpreendentes ao mobilizarem conhecimentos para apresentarem soluções criativas ao enfrentarem situações mais complexas do que as apresentadas em sala de aula. (MUNIZ, 2001).

A aprendizagem é um fenômeno que envolve, além das estruturas cognitivas, as dimensões social e afetiva devido à interdependência entre todos os fenômenos físicos, biológicos, psicológicos, sociais, culturais e políticos. Nesse sentido, a cognição coexiste com os fenômenos subjetivos e complexos.

Para Moretto (1999), aprender é construir significado. Na análise da matemática, a atividade humana deve-se compreender não só como o sujeito matematiza, mas como ele se relaciona com ela. No entanto, a matemática tem sido apresentada aos educandos de forma organizada, acabada, a-histórica e despolitizada, com rigor lógico, parecendo bastar-se a si própria. Seus conceitos e teorias parecem atender a necessidades interiores e, como diz Imenes (1989), a matemática tem sido tratada como fechada, relacionando-se somente consigo mesma, pertencente ao seu próprio mundo; o ambiente no qual ela se desenvolve é próprio e único.

A representação social da matemática se trata, em síntese, de uma disciplina difícil, inatingível, de resolução de problemas, abstrata, cristalizada, pronta, sem utilidade prática, serve para desenvolver o raciocínio lógico, tem uma linguagem hermética. Seria essa a representação dos jovens estudantes que cursam a última série do ensino fundamental? Os alunos com os quais trabalhamos expressaram que gostam de matemática, mais até que de outras disciplinas. Mas, como não era foco de nossos estudos não podemos responder e nem generalizar a conclusão a que chegamos com os nossos escolares. Podemos afirmar que os alunos com os quais desenvolvemos os estudos afirmaram gostar de matemática.

Será que a matemática é realmente uma ciência na qual a lógica é inerente à sua estruturação? É uma ciência com princípios, postulados, corolários, teoremas que, isolados, não têm significados, mas que são essencias às demais ciências e que precisam responder às necessidades emergentes das mudanças sociais, econômicas e tecnológicas do mundo contemporâneo, de modo a valorizar a investigação e descobertas pelos alunos, a privilegiar os conhecimentos significativos para os alunos.

Para mudanças nessa realidade no campo escolar, uma das orientações dos PCN para o ensino fundamental é a inclusão dos aspectos históricos no ensino da matemática "para a superação do preconceito de que a matemática é um conhecimento produzido exclusivamente por determinados grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas". (BRASIL, 1998, p. 34) e para que os professores "tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos".[6]

Repensar o ensino e aprendizagem da matemática implica, portanto, rever os aspectos inerentes à própria matemática como conhecimento produzido ao longo da história da própria humanidade como contexto no qual está sendo trabalhada.

No século XX, em decorrência de questionamentos e de novos pensamentos sobre o ensino e a aprendizagem matemática, surgiu a educação matemática. Um fator importante em suas investigações foram os estudos empíricos em educação realizados no começo do século XX pelos institutos de psicologia na Alemanha cujos objetivos eram entender melhor a forma pela qual crianças e jovens estudantes conseguiam aprender esta disciplina.

No Brasil, esses questionamentos eclodiram na década de 1950, quando foi evidenciada a preocupação com o ensino da época e, como consequência, novas propostas foram apresentadas. Floriani (2000) considera que foi por volta de 1973 que a Educação matemática ganhou destaque como área do conhecimento que realiza estudos sobre o processo de construção do conhecimento matemático e também pondera que as finalidades da Educação matemática dependem do tipo de sociedade que os educadores desejam ou gostariam de ver instado.

No entanto, somente com a fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, em 1988, é que houve a consolidação da Educação matemática como área:

---

[6] Ibid, p. 38

> Fundada em 27 de janeiro de 1988, a SBEM é uma sociedade civil de caráter científico e cultural, sem fins lucrativos e sem qualquer vínculo político, partidário e religioso. Tem como finalidade congregar profissionais da área de Educação matemática ou áreas afins. A SBEM tem em seus quadros pesquisadores da área, professores que atuam em diferentes níveis do sistema educacional brasileiro, da educação básica à educação superior e também alunos de cursos de matemática. (Disponível em: www.sbem.com.br acesso 10 ago 2011).

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), estudos identificaram quatro fases de desenvolvimento da educação matemática brasileira como campo profissional e área de investigação:

> 1ª Fase: Gestão da EM como campo profissional (período anterior à década de 1970); 2ª Fase: Nascimento da EM (década de 1970 e início dos anos de 1980); 3ª Fase: Emergência de uma comunidade de educadores matemáticos (década de 1980); 4ª Fase: Emergência de uma comunidade científica em EM (anos de 1990). (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 16)

A Educação Matemática vem propondo novas perspectivas epistemológicas acerca da aprendizagem matemática na escola e novos instrumentos metodológicos para o ensino e aprendizagem da matemática. O que torna fundamental refletir sobre seus aspectos históricos, discutir suas implicações nas práticas pedagógicas e analisar estratégias didáticas para sala de aula que favoreçam a aprendizagem.

Enfim, o objeto da Educação Matemática é a descrição, a compreensão e a interpretação de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática nos diversos níveis de escolaridade, tanto na sua dimensão teórica, quanto prática. É uma área de conhecimento interdisciplinar, transdisciplinar, em construção, que desenvolve reflexão das possibilidades de edificação dos saberes e práticas sobre os processos de ensino e aprendizagem da matemática, bem como o seu papel social e político considerando as dimensões filosóficas, históricas, psicológicas, políticas, metodológicas e culturais.

De acordo com pesquisadores como Floriani (2000), pode-se destacar como fundamentos da Educação Matemática: contextualização do ensino; respeito à diversidade, desenvolvimento de habilidades; reconhecimento das finalidades científicas, sociais, políticas e histórico-culturais da matemática.

As propostas e fundamentos da ação pedagógica do ensino e aprendizagem da matemática constituem, então, as tendências em educação matemática. Para Lopes e Borba (1994), uma tendência é uma forma de trabalho que surgiu a partir da busca de soluções para os problemas da Educação Matemática que se estabelece quando é utilizada por muitos professores ou, mesmo que pouco utilizada, resulte em experiências bem sucedidas. Compreendemos, assim, a que a história da matemática como um elemento didático.

Nesse entendimento, o significado do conhecimento matemático é determinado não só pelas circunstâncias em que ela se torna uma matemática teórica dedutivamente estruturada, mas também pelos processos que originalmente levaram a esse conhecimento e que são indispensáveis para a sua compreensão. Aprender matemática, então, não é só para conhecer e ser competente na manipulação de símbolos e a sintaxe lógica das teorias e para acumular conhecimento de novos resultados apresentados como produtos acabados, mas contempla essencialmente a compreensão das motivações para certos problemas e questões, as ações de tomada de sentido e os processos reflexivos que visam à construção de sentido, ligando conhecimentos antigos e novos, e a ampliação e melhoraria dos campos conceituais.

Aprender matemática como conhecimento e instrumento de desenvolvimento humano pode ser expresso em uma perspectiva mais ampla do que o domínio da didática da matemática, isso, se as atividades matemáticas forem inspiradas em situações problemas e os temas de estudo tiverem significado social, político, e cultural para o aluno. Assim sendo, o ensino da matemática torna-se muito mais complexo do que apenas exposição da matemática (FAUVEL; VAN MAANEN, 2000).

Por conseguinte, para Moran (2007), o ensino organiza uma série de atividades didáticas para favorecer a compreensão de conhecimentos específicos, enquanto a educação tem como foco, além de ensinar, ajudar a integrar ensino e vida, conhecimento e ética, reflexão e ação. Por esse motivo, a comunidade de educadores brasileiros não se limita à terminologia “Ensino da Matemática”, como em outros países, buscando a ampliação de uma visão epistemológica e metodológica voltada à educação matemática, à vida de forma ativa, crítica, criativa, e ética. Nesse contexto, pressupomos que a história da matemática é um bom mediador do processo de ensino e aprendizagem da matemática:

> A viabilidade de uso pedagógico das informações históricas baseia-se em um ensino da matemática centrado na investigação; o que conduz o professor e o aluno à compreensão do movimento cognitivo estabelecido pela espécie humana no seu contexto sociocultural e histórico, na busca de respostas às questões ligadas ao campo da matemática como uma das formas de explicar e compreender os fenômenos da natureza e da cultura (MENDES, 2009a, p. 91).

Segundo Baroni e Nobre (1999), a educação matemática vem buscando e propondo novos instrumentos metodológicos que podem ser utilizados pelos professores em suas atividades didáticas. A história da matemática é um desses instrumentos que extrapola o campo da motivação e abarca elementos que interligam o conteúdo e o fazer pedagógico.

Assim, assumimos a história da matemática como uma possibilidade dentre outras estratégias, não se constituindo em panaceia diante do desafio da constituição e uma aprendizagem significativa, desafiadora, motivadora, dinâmica, revestida de sentido social, cultural, histórico e político-ideológico.

Miguel e Miorim (2004) destacam algumas potencialidades da história da matemática, dentre elas a sua utilização como instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva da matemática. Esses autores elencam alguns argumentos de natureza epistemológica e outros de natureza ética para justificar o uso da história no ensino e aprendizagem da matemática. Todos têm sua importância, porém, três argumentos epistemológicos e dois éticos se justificam diretamente com esse trabalho:

a) Epistemológicos:

- fonte de seleção e constituição de sequências adequadas de tópicos de ensino;
- fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da matemática escolar na atualidade;
- fonte de identificação de obstáculos epistemológicos que se manifestam no processo de ensino e aprendizagem a matemática escolar.

b) Éticos:

- fonte que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação do seu ensino;
- fonte que possibilita um trabalho pedagógico no sentido da conquista da autonomia intelectual (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 60-62).

Autores como Vianna (1995), Tzanakis e Arcavi (2000) e Miguel e Miorim (2004) afirmam existirem alguns argumentos questionadores das potencialidades pedagógicas e didáticas da história. Tzanakis e Arcavi (2000, p. 203)[7] os classificam em filosóficos e de natureza prática.

c) Filosóficos:

- A história não é matemática. Primeiro deve-se ensinar matemática depois sua história. A história pode ser tortuosa e confusa ao invés de facilitar o aprendizado.
- Os alunos podem ter um sentido errado do passado, o que torna impossível a contextualização da matemática pela história sem que eles tenham tido uma maior educação na história geral.

---

[7] Tradução nossa.

- Muitos estudantes não gostam de história, por conseguinte, não gostam de história da matemática; então, estudá-la não é menos chato do que estudar matemática.
- Progresso em matemática é fazer do combate aos problemas difíceis uma rotina; então, por que se preocupar, olhando para trás?
- A história pode ser suscetível a chauvinismo racial, cultural e nacionalista.

d) Práticos:

- Falta de tempo: o tempo de aula não é suficiente para aprender matemática e menos ainda quando a proposta é para ensinar história da matemática.
- Falta de recursos: não há recursos materiais apropriados e suficientes para ajudar mesmo aqueles professores que queiram integrar a concepção histórica ao ensino da matemática.
- Falta de especialização: falta ao professor o conhecimento histórico, consequência da ausência de programas adequados de formação de professores. A falta de especialização leva a uma falta ainda mais debilitante de confiança em utilizá-la como recurso didático.
- Falta de avaliação: não há maneira clara ou consistente de integrar qualquer componente histórico na avaliação.

O valor metodológico da história, também, é considerado por Brolezzi (1991, p. 2):

> A ordem lógica mais adequada para o ensino de matemática não é a do conhecimento matemático sistematizado, mas sim aquela que revela a matemática enquanto Ciência em construção. O recurso à história da matemática tem, portanto, um papel decisivo na organização do conteúdo que se quer ensinar, iluminando-o, por assim dizer, com o modo de raciocinar próprio do conhecimento que se quer construir.

Gaspar (2003) analisa a possibilidade de a história da matemática mudar a percepção e entendimento dos professores sobre a matemática, influenciando na maneira como ela é ensinada e, finalmente, afetando o modo como os estudantes a percebem e a entendem.

Para promover o ensino e aprendizagem de maneira política, histórica e social, o educador matemático deve compreender o seu real papel nesse processo e considerar que a matemática é prática cultural de um povo, contrariando o senso comum que a julga universal e neutra. Então, como entender que aprender matemática é muito mais que decorar fórmulas, repetir modelos, exercitar técnicas; é necessário compreender que a matemática não pode ser vista apenas em seu caráter formal.

Ainda concordando com Gaspar (2003, p. 38), “uma jornada por meio dessa história instrumentalizaria os estudantes a construírem significados matemáticos e a apoiarem suas novas concepções sobre a matemática, mudando suas crenças e atitudes com relação à disciplina e seu ensino".

Em Mendes (2006), o uso pedagógico das informações históricas baseia-se no ensino de matemática, centrado na investigação, direcionando o professor e o aluno à compreensão das estruturas cognitivas estabelecidas pelo homem, no seu contexto sociocultural e histórico, na busca de respostas às questões ligadas ao campo da matemática como uma das formas de explicar e compreender os fenômenos da natureza e da cultura.

Com base nessas concepções, as informações podem ser usadas na produção de matemática escolar, desde que o professor consiga desenvolver em suas aulas uma dinâmica experimental investigatória como princípio científico e educativo por meio de levantamento e verificação de suas hipóteses acerca de atividades manipulativas extraídas da história da matemática. Assim,

> [...] com essa prática, acreditamos ser possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente, pois esperamos que esse modo de encarar o ensino de matemática possa se constituir em um dos agentes provocadores de ruptura na prática tradicional educativa vivida até hoje nas aulas de matemática. (MENDES, 2006, p. 84).

Mendes (2009) explicam que Fauvel em 1991 apontou a importância do uso da história no ensino como elemento que aumenta a motivação dos alunos para a aprendizagem da matemática; humaniza a matemática e mostra seu desenvolvimento histórico por meio da ordenação.

Pelas ideias de Tzanakis e Arcavi (2000), existem três formas nas quais a história da matemática pode ser integrada à educação matemática:

- Aprendizagem da história por meio do fornecimento direto de informações históricas.
- Ensino e aprendizagem de temas matemáticos inspirados pela história.
- Desenvolvimento de uma consciência mais profunda, tanto da própria matemática como dos contextos culturais e sociais nos quais a matemática tem sido desenvolvida.

Assim, Miguel (1997) destaca algumas potencialidades da história da matemática, dentre elas sua utilização como instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva da matemática. Todavia, como ressaltado anteriormente, existem alguns argumentos questionadores, em relação ao uso da história, no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos, fundamentados na possibilidade de ela vir a ser um obstáculo à aprendizagem. A título de exemplo, dois fatores que consideramos relevantes nesse trabalho: o fato de o elemento histórico ser um fator complicador e a ausência, na criança e no jovem, do sentido do tempo/processo histórico.

Pelo o que foi exposto, podemos verificar que a história da matemática tornou-se um campo de investigação em nível de ação pedagógica alicerçada em diferentes abordagens. Este estudo sobre o valor didático da história da matemática para o ensino fundamental ancora-se em autores aqui citados que a defendem como um instrumento que interligam o conteúdo com o fazer pedagógico.

Como definimos trabalhar com o conteúdo que aborda o conceito de área e sua medida, na próxima seção, vamos enunciar alguns conceitos relativos a tal conhecimento.

1.3 O conceito de área

Adotamos, nessa pesquisa, o construto teórico do conceito de área como grandeza autônoma, pertencente ao campo das grandezas geométricas definida por Douady e Perrin-Glorian (1989). Segundo estas autoras, o conceito de área pode ser classificado conforme duas concepções: (1) as geométricas, que se caracterizam pela confusão entre área e superfície, perímetro e contorno; (2) e as numéricas, que tratam os aspectos pertinentes ao cálculo.

Ao adotarmos área como grandeza, distinguimos três quadros Douady (1992): o geométrico, o da grandeza e o numérico. O quadro geométrico refere-se às superfícies planas (triângulos, quadrados, figuras com contornos curvilíneos); o quadro numérico refere-se às medidas da área das superfícies, interpretadas como números reais positivos; e o quadro das grandezas refere-se ao estabelecimento de classes de equivalência formadas por figuras de mesma área.

No entanto, não nos detivemos ao cuidado de trabalhar, explicitamente, detalhando e nem especificando, os quadros e as mudanças de quadros. São importantes para o nosso trabalho, as considerações realizadas por Douady & Perrin-Glorian (1989), no que se referem à área como uma grandeza, distinguindo área de figura, pois figuras distintas podem ter mesma área; também distinguindo área de número, pois ao medirmos a área de uma figura com diferentes unidades, obtemos números diferentes para expressar a medida de área, ou seja, tomamos área como uma grandeza autônoma, pertencente ao campo das grandezas geométricas.

A abordagem de área como grandeza articula-se, do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo, com a ideia de conservação e permite aos alunos o estabelecimento das relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico. Logo, em nosso trabalho, houve uma prevalência do tratamento do conceito de área vinculando o quadro numérico ao quadro geométrico.

Consideramos importante diferenciar área de superfície, pois, em algum momento, as pessoas começaram a falar em “medida de superfície”, o que não tem nenhum sentido, dado que é errado considerar superfície como grandeza. Quando se refere à medida de superfície, inadequadamente, é costume esperar que esteja subentendida a informação “medida de área de uma superfície”, o que é errado, pois superfície possui outros atributos além da área, como perímetro, por exemplo; assim, é necessário determinar com clareza qual atributo da superfície deseja-se medir.

Quando falamos em comprimento, referimo-nos ao comprimento de um segmento, não falamos medida de um segmento. Não se considera o segmento como grandeza. O mesmo ocorre com o volume dos sólidos, não falamos medida do sólido, porque medida do sólido pode ser alusão à área da superfície que envolve esse sólido, ao volume interior do sólido, à capacidade do sólido e inclusive ao volume. Então, falamos medida do volume do sólido.

A área é uma grandeza que está associada a uma superfície. A área é a grandeza e, também, pode ser usada como medida da grandeza. Essa medida depende da unidade de medida que está sendo utilizada.

Em nossa pesquisa: fizemos uma restrição da definição e por se tratar do ensino fundamental, trabalhamos somente com a área de superfícies planas.

Nas seções a seguir, vamos apresentar e refletir as obras e/ou materiais que foram fontes para o conhecimento histórico de medidas e para elaboração das sequências didáticas da pesquisa.

1.4 Medidas na história

> Desde as primeiras civilizações, as medidas se tornaram a linguagem fundamental à realização dos negócios no mundo do comércio. Elas podem ser consideradas um dos principais fatores que sustentaram e fortaleceram as sociedades pelas relações estabelecidas por meio das compras e vendas, pela criação dos padrões que mensuram a produção e pelo suporte dimensional para as ciências e a tecnologia. (SILVA, 2010).

O desejo de verificar a potencialidade da história da matemática, como recurso didático para o ensino de medidas, remete-nos a um levantamento bibliográfico do tema. Para tanto, é fundamental apresentarmos uma ressalva que justifique o eixo da nossa pesquisa histórica. Tomamos por base a história da matemática egípcia, mesopotâmica, grega, indiana e chinesa, pois é esse, provavelmente, o veio histórico que deu origem ao conceito de área com o qual trabalhamos nos dias atuais no Brasil. A matemática que aprendemos é de origem ocidental, veio da Europa e teve suas raízes na matemática dos povos citados.

Nessa seção apresentamos algumas obras que inicialmente foram importantes para a estruturação desse trabalho.

Iniciemos pelo livro de Silva (2010), *História dos pesos e medidas*, por ele ter nos ajudado, orientando em novas buscas de pesquisas dentro das civilizações antigas. Destacaremos o capítulo 2 da obra, denominado de Sistemas pré-métricos de medidas, pois o mesmo evidencia historicamente quanto esforço humano foi necessário para que o homem tivesse atualmente um sistema de medidas simples e coerente.

A obra, no todo, aborda a evolução da metrologia, desde a Antiguidade até nossos dias, valorizando o seu conteúdo social e realçando as relações do homem com os pesos e as medidas através dos tempos. É dividido em seis capítulos, sendo eles: capítulo I – As medidas e o homem; capítulo II – Sistemas pré-métricos de medidas; capítulo III – O Sistema Métrico de Medidas; capítulo IV – Sistema pós-métricos de Medidas; capítulo V – Medindo a terra; capítulo VI – Pesos e Medidas no Brasil e em Portugal.

No Capítulo II, o autor procura fazer uma análise de fatores que possibilitaram a ação de medir. A partir do momento em que o homem teve necessidade de se relacionar socialmente e precisou dividir alguma coisa, ele teve que recorrer ao recurso de convencionar um peso ou uma medida e, assim, foi criada a metrologia. Irineu ainda mostra que, a partir do momento em que o homem precisou cultivar a terra ou transferir os animais para pastagens férteis, houve também a necessidade de comunicar-se em termos metrológicos, surgindo as primeiras unidades de medida, inter-relação entre agricultura e capital.

Essas unidades de medida tiveram como base de comprimento as dimensões do corpo humano. Em todo o capítulo, ele utiliza a evolução do homem como base para o aprimoramento do sistema de medidas.

Os povos da Mesopotâmia possuíam um sistema de medidas extraordinariamente consistente e simples. Foi a partir desse ponto que Silva começou a desenvolver o capítulo, expondo os vários povos e suas maneiras de utilizar o sistema de medidas.

Os povos da Mesopotâmia utilizaram como unidade básica de comprimento o palmo e suas unidades derivadas, o côvado (distância do cotovelo até o dedo médio da mão estendida, aproximadamente 50 cm), o polegar e a linha. A unidade de massa era relacionada com a carga que uma pessoa ou animal podia transportar, sendo denominada *manû* (aproximadamente 0,5 Kg). A unidade básica de volume era denominada *qa* (variação entre 0,40 litros a 0,85 litros). Ainda existiam as medidas agrárias o *ikû* (10,35 hectares) e o *baru* (18 *ikû*).

No período em que os povos da Mesopotâmia se firmavam como civilização, outro povo agricultor estabeleceu as bases de sua civilização, os egípcios. A unidade básica de comprimento do sistema egípcio, também, tinha por base o comprimento do antebraço humano – o côvado. Outra unidade bastante usada era denominada *ser* (distância entre a ponta do cotovelo até o pulso de um braço humano). As medidas agrárias do povo egípcio eram mais sofisticadas, como a *terra* (10x10 côvados), a *centena* (10x100 côvados); e a *setjad* (100x100 côvados). Aqui temos explicitamente uma relação entre formas geométricas e unidades de medidas.

Sobre as unidades de massa, sabe-se que a balança era um instrumento bastante usado. As unidades de volume eram dadas em jarra, barril (10 jarras) e o saco (10 barris). Há pouco tempo, determinou-se que a jarra correspondia a 0,5 litros.

Outro povo que também deixou marcada a história dos pesos e medidas foram os gregos. O povo grego utilizava como unidade de comprimento o *pé grego* (30,83 cm) sendo unidades derivadas o *dedo* (1/16 pés), o *plethron* (100 pés), e o *estádio* (600 pés). A unidade básica de massa era denominada *talento* (25,50 kg a 26,20 kg). Sabe-se que um talento era dividido em 60 *minas* e uma mina era dividida em 100 *drachmae*. Sobre as unidades de volume, os gregos utilizaram um tipo para líquido e outro para sólidos, porém sabe-se apenas sobre a unidade dos líquidos, denominada *ânfora* (27,20 litros), medidas dadas por Silva (2010, p. 47-48). Sobre as medidas agrárias gregas, há indícios de que eles utilizaram o processo geométrico e não o processo com base na produtividade.

Por último, contudo, não menos importante, havia ainda um povo que também deixou suas marcas na história de pesos e medidas, os romanos. Eles conquistaram terras tornando-se um verdadeiro Império. Como consequência, os romanos instauraram um único sistema de medidas para todo o mundo civilizado da época. A unidade básica de comprimento romana era o *pé* (o valor é correspondente a 29,57cm e era dividido em 16 unidades menores denominadas *digitus*, ou em 4 unidades, os *palmus*). *Um pé e meio* caracterizava uma medida chamada *cubitus*, dois *pedes* (plural de pés) equivaliam a uma *pertica*. Para distâncias longas, eram usados o *actus* (120 *pedes*), o *stadium* (625 *pedes*), o *mille passus* (1000 *passus*), e a *légua* (7500 *pedes*). Ainda de acordo com o autor a unidade de massa romana básica era denominada libra (272,81 gramas).

Os romanos utilizavam a mesma metodologia utilizada pelos gregos para as medidas agrárias, a divisão dos lotes em blocos quadrangulares. Quanto maior a hegemonia política de uma região, maior era a quantidade de unidades e sistemas de medidas existentes. O fato de uma determinada região estar subdividida em pequenos *ducadas* implicava possuir inúmeras unidades de medida.

A Idade Média tornou-se uma época fecunda para o aparecimento de procedimento de unidades de medida. Isso porque, para cada setor de atividades, havia um sistema de medidas diferente (SILVA, 2010, p. 54). Um *hectare* podia ter rendimentos diferentes, de acordo com o tipo do terreno, porém, uma medida com base na produção diminuiria tal diferença.

A respeito dos processos de medidas empíricos, encontram-se vários documentos indicando que medições feitas pelos agrimensores (medidores de terra) passaram a mesclar seus conhecimentos de geometria com as unidades empíricas antigas. Por meio dos registros, Irineu mostra que o primeiro documento que atesta o emprego do processo de triangulação para o trabalho de agrimensura data de 1694.

Com relação aos padrões, os recipientes empregados como medidas de volume possuíam forma cilíndrica e em madeira ou couro. Para casos em que a matéria não podia ser medida pelo volume, utilizava-se uma balança. Existiam produtos que eram importantes, sendo objetos de preocupação metrológica pré-métrica, como o “pão, o sal e a lenha” (SILVA, 2010, p. 59). A produção desses produtos devia ser regulamentada, pois era de extrema necessidade de muitas gerações. Dessa forma, eles foram atrelados ao sistema monetário de cada época.

O homem é a medida de todas as coisas: neste ponto, Silva relata que, desde a Antiguidade, o corpo humano é tomado como referência para as unidades de medida.

> A natureza compôs tão bem o corpo humano que a face, a partir do queixo até o topo da testa, na altura da raiz dos cabelos, corresponde a uma décima parte de sua altura. A cabeça, do queixo até seu topo, é uma oitava parte. A distância entre a ponta do queixo até o início das narinas é uma terça parte da altura da face. O pé corresponde a um sexto da altura do corpo, o antebraço, a um quarto. O centro natural do corpo humano é o umbigo. (SILVA, 2010, p. 64).

Algo interessante é que, além dos membros do corpo humano serem utilizados como unidades de medidas lineares, foram usados também como unidade de medida de volume, para isso, o homem utilizou suas mãos. Além de usar os padrões físicos, o homem utilizava, como unidade de comprimento, outros padrões, principalmente, novas medições de distâncias longas.

Nos primórdios, poucos padrões de unidades de medidas resistiram ao tempo, pois, dependendo do material usado, eles se tornavam pouco duráveis. Já entre os materiais duráveis estão o mármore, o ferro, o bronze e outros metais. Silva (2010, p. 68) exemplifica de maneira interessante esses padrões como podemos observar "*devakh*, esse padrão era usado para medir o transbordamento do rio Nilo e encontrava-se fixado sobre uma coluna de mármore". Para o padrão de unidade de volume "um tipo de funil talhado sobre uma pedra por meio da qual se media o volume dos líquidos"[8].

Para representar os padrões de unidades de massa no comércio, as balanças ganharam espaço como instrumento de medida referência, de acordo com Silva (2010, p. 71): "Inicialmente em pedra e posteriormente em vidro e metal, mais tarde a balança criada por volta de 1680, a qual tinha por base a elasticidade dos metais".

1.5 Medidas no Brasil

Na história dos pesos e medidas no Brasil, segundo Silva (2010), constam, além do *palmo* e da *vara*, outras medidas de comprimento como a *braço*, que correspondia à extensão dos braços abertos (sendo 2,20 metros), a *corda* equivalente a 15 *palmas*, utilizando-se também o *côvado* (três palmos). Um fato importante apontado é que o colonialismo atuou como fator de exportação dos sistemas de medidas.

De acordo com esse autor, de todas as medidas que se encontram até hoje em uso no Brasil, é o alqueire, usado originalmente como unidade de volume e, posteriormente, como unidade de medida agrária. Como volume o valor variou de região para região e dependia da

---

[8] Ibid p.70

mercadoria medida. Por exemplo, equivalia 36 litros para medir arroz, farinha e feijão, enquanto, para farinha equivalia entre 38 a 40 litros. O alqueire empregado com base na produção correspondia à área necessária para semear o volume de um alqueire de milho, em covas com cinco grãos, espaçadas a cada cinco palmos. Além dessa unidade, utilizava-se, no Espírito Santo, a *colônia* e a *quarta* no Rio Grande do Norte. Para os líquidos, unidade *canada* que nada mais era que o dobro do cubo de um décimo da vara. Para massa, usava-se a *libra* (453 gramas).

Em sua tese de doutorado, Zuin (2007) apresenta um estudo sobre o sistema métrico decimal nas escolas primárias brasileiras. Essa autora afirma que tal sistema, introduzido na França, em 1795 e, em Portugal, em 1852, foi adotado no Brasil por meio da Lei Imperial nº 1157, em 26 de junho de 1862. Ela relata que o Governo Imperial de D. Pedro II, em 1855, incumbiu Antônio Gonçalves Dias, Giacomo Raja Gabaglia e Guilherme Schuch de Capanema a participarem da Exposição Universal de Paris e da reunião internacional, na qual foi discutida a implementação do sistema métrico decimal, o que aponta o interesse do governo em adotar esse sistema.

Porém, de acordo com Silva (2010, p. 146), foi em 1962, que o Brasil adotou oficialmente o Sistema Internacional – SI como sistema de unidades de medidas. Havia também o Instituto Nacional de Tecnologia – INT que depois, em 1961, foi substituído pelo Instituto Nacional de Metrologia – INPM, o qual mais tarde tornou-se, em 1982, o Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial – Inmetro.

Zuin (2007) comenta que, antes mesmo da oficialização desse sistema de medidas no Brasil, já eram elaborados manuais didáticos que incorporavam tal tema em seus textos. Dentre os autores por ela analisados, citaremos dois a título de exemplo. O primeiro seria Cândido Baptista Oliveira, por ser um forte defensor da implementação, no Brasil, do sistema francês, advogando em favor da sua praticidade, facilidade de operação e conversões em detrimento dos "pesos e medidas do Brasil", sistematizados por uma Comissão instituída pelo Governo Imperial em 1833. Baptista Oliveira publicou, em 1832, o Compêndio de Arithmética para uso das Escolas Primárias, no qual inseriu o sistema métrico decimal. O texto traz justificativas e argumentos para a adoção de tal sistema no Brasil e nas instituições escolares. A nova edição, datada 1963, apresenta tabelas de conversão para o sistema em uso na época.

O outro autor, Manuel Ribeiro de Almeida Junior, publicou, em 1889, o "Compendio do systema métrico decimal para uso das escolas primárias". Defensor do método intuitivo orientava o professor a realizar atividades práticas com o uso de varas para ensinar as unidades de comprimento, da balança para o peso, das caixas de papelão para o volume e do litro (vasilhame) para os líquidos. Defendia que o professor devia trabalhar de acordo com a capacidade infantil, partindo de um assunto mais fácil para o mais difícil; sendo assim, trabalhava-se, primeiro, o assunto medidas lineares, de capacidade e de peso para, só depois, introduzir o estudo de área e volume:

> Almeida Junior (1889, p. 6) destaca a conveniência de começar cedo o estudo do sistema métrico, "ficando para depois delle o das frações ordinárias, sem duvida mais difficil". Em outro momento, acrescenta que o sistema métrico deve ser estudado juntamente com as frações decimais, "pois que funda-se nas mesmas leis que regem a numeração e as operações arithmeticas sobre os decimais". Outro motivo alegado: "é principalmente sobre as medidas métricas que o professor deve formular os problemas para a aplicação dos decimaes, afim de dar ao ensino o caracter de utilidade prática, que tanto importa para que se tire delle o maior proveito". Sugere que o professor proponha problemas baseados em dados reais para que os alunos aprendam o sistema métrico e adquiram as noções exatas das distâncias locais, das outras medidas e o preço dos objetos mais usuais. O livro contém diversas figuras, entre as quais, para explicar o que é o meridiano, ilustração de uma régua de dez centímetros, um cubo representando um 1 cm^3, medida de capacidade para líquidos, gêneros secos, pesos, balança, medidas para lenha, área e volume. (ZUIN, 2007, p. 251).

Silva (2010) traz algumas definições importantes para nosso trabalho apresentadas a seguir.

Grandeza: atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. (BRASIL, 2007).

Medir: ação de avaliar uma grandeza comparando-a com outra de mesma espécie, adotada como referência.

Medida: valor numérico do resultado da comparação entre uma grandeza a ser avaliada e uma grandeza de referência. Termo também usado para descrever o ato ou o processo de comparar uma grandeza a outra, com o objetivo de associar à primeira um número característico de seu valor diante da grandeza com a qual foi comparada (realizar uma medida). Dimensão, tamanho.

Medição: conjunto de operações que tem por objetivo determinar um valor de uma grandeza.

Unidade de medida: é um conceito abstrato usado para expressar o valor referência unitário da medida de determinada grandeza, com a qual outras grandezas de mesma natureza são comparadas para expressar suas magnitudes em relação àquela grandeza específica.

Geralmente uma unidade de medida é fixada por definição e é independente de condições físicas.

Sistemas de medidas ou sistemas de unidades de medida: nome dado ao conjunto de medidas ou unidades de medida de diferentes espécies, agrupadas de maneira coerente, que são utilizadas em diferentes ramos da atividade humana e em suas relações proporcionais.

Padrão de medida: nome dado ao objeto ou fenômeno natural (incluindo constantes físicas e propriedades específicas de substâncias); usado como referência para definir, realizar, conservar ou reproduzir uma unidade de medida.

Capacidade: medida cúbica (medida da área da base x medida da altura); utilizada para medir líquidos e matérias secas que possam ser cubicadas.

1.6 A noção de medida em Vergnaud

Consideramos pertinente trazermos este estudo de Vergnaud, uma vez que ele trata a noção de medida na educação básica.

Vergnaud (2009) considera que a função do instrumento de medidas é a de permitir associar a um objeto um número que será a sua medida. Para o autor, contar é considerado um caso especial de medida, ou seja, a primeira atividade de mensuração é a atividade de contagem, por isso, a noção de número é indissociável da noção de medidas.

Entretanto, devemos ressaltar que concordamos que a contagem é um elemento fundamental no processo de mensuração, mas que deve ser precedida ou mediada pela escolha de uma unidade de medida. Essa escolha requer alguns preceitos: primeiro, ser de mesma grandeza; depois, existe a questão da conveniência entre a grandeza a ser medida e a unidade tomada. A tendência natural do aprendiz é escolher uma unidade de medida menor que a grandeza a ser medida, para que possa haver a contagem, uma vez que o valor numérico corresponde ao número de vezes que a unidade cabe na grandeza a ser medida (Excerto da conversa com Muniz em 12/03/2012).

Outro cuidado essencial é quando consideramos que a área está associada a um número, pois esse número não está só. A área está associada à outra área que é a unidade de medida que permitiu a relação a um número. Se trabalharmos, por exemplo, com a unidade de área um metro quadrado encontraremos um número diferente daquele que seria encontrado se utilizarmos a unidade centímetro quadrado. A área não muda, ela é mutável em relação à unidade de medida que se considera.

Vergnaud (2009) argumenta inclusive que, além dos objetos, podem ser mensuráveis também os comprimentos, as áreas, os volumes, os pesos, dentre outras medidas utilizadas na vida cotidiana, por isso, devem ser ensinadas na escola básica.

Esse autor distingue as grandezas contínuas das discretas, pelo seu caráter contínuo, como os comprimentos, as áreas, os volumes, a massa e a capacidade. A medida de grandezas contínuas permite encontrarmos um valor intermediário o que traz como consequência os números decimais. A representação da ideia de uma unidade de medida maior do que o objeto a ser medido, também, requer o uso dos números racionais.

As medidas, segundo Vergnaud (2009), possuem duas propriedades muito importantes: relação de ordem e adição. No entanto, pelo fato de serem positivas, não admitem o elemento simétrico, portanto, não constituem um grupo. Segundo o autor, as áreas e os volumes são medidas compostas, resultado da composição multiplicativa das medidas.

Para Muniz (2008), em um ambiente de aprendizagem matemática, devem estar presentes os instrumentos de medidas como fita métrica, balança, recipientes graduados, calendários e relógios, já que, para o autor, na construção, no manuseio e na utilização desses instrumentos e de outros, como régua, compasso, esquadros e transferidores, pode-se dar sentido à construção aos conceitos relacionados à medida por meio do uso de instrumentos.

Muniz, Batista e Silva (2002) concordam que, dentro da perspectiva de construção social do conhecimento, o estudo de medidas deve considerar doze princípios os quais vão ao encontro da proposta de transposição e da sequência de atividade sugeridas nessa tese, por isso, permearão nossa atividade de ensino e de aprendizagem das medidas, sendo o ponto de partida do estudo de medidas a percepção; o estudo das medidas deve perpassar todo o currículo, deve estar presente do primeiro ao último dia de aula; o estudo de todas as medidas deve se iniciar com as unidades arbitrárias; a transferência da unidade arbitrária para a unidade padrão deve ser uma decorrência de uma relação social do grupo em questão; a transferência da unidade padrão para a unidade legal deve estar vinculada à história da civilização; é de fundamental importância que a escola estabeleça a relação entre as unidades legais com as unidades culturais, caso não queira comprometer sua função social; no estudo de medidas, é importante que conheçamos a real função da manipulação de material concreto; é preciso trabalhar a real dimensão do sistema de medidas adotado pela nossa cultura; é necessário trabalhar de forma integrada e holística; aceitar e explorar a inter-relação entre medidas e geometria.

Nesse segmento, apresentaremos outra contribuição de Vergnaud para esse trabalho. Apropriaremo-nos de sua teoria e de Duval a fim de analizarmos as produções dos alunos.

1.7 Contribuições de Vergnaud e Duval

As considerações teóricas também estão apoiadas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996, 2003) a qual nos auxiliou nas análises a fim de responder nossas questões de pesquisa referentes à construção do conhecimento, à apropriação do saber do tema em estudo por meio da história da matemática.

Nessa perspectiva, as atividades desenvolvidas pelos estudantes, bem como as observações feitas em sala de aula, as entrevistas com os alunos, os encontros de estudo e planejamento com as professoras foram analisados com base na Teoria dos Campos Conceituais. Além disso, apoiamo-nos nas considerações de Duval (1994, 2003), acerca do desenvolvimento do pensamento matemático, quando considera que as representações semióticas produzidas pelos sujeitos, além de exteriorizar as suas representações mentais são igualmente fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento.

Campo Conceitual é uma teoria psicológica da conceitualização do real que permite analisar a relação entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios que estão implícitas nas condutas dos sujeitos em situação, ou seja, é papel do professor tornar explícitos os invariantes operatórios, pois neles identificamos a estrutura cognitiva implícita numa atividade desenvolvida pelo aluno. A manifestação do conhecimento construído reside, implicitamente, nos invariantes operatórios.

Para Vergnaud (1996), a conceitualização é o cerne do desenvolvimento cognitivo, e a constituição de um conceito depende de três dimensões do conhecimento as quais estão inter-relacionadas. O conceito é então definido pelo seguinte tripé: C= {S, I, R}, S é conjunto de situações, I conjunto de invariantes operatórios e R conjunto de representações. Sendo que, S é conjunto de situações que dão sentido ao conceito (à referência). Situação é uma combinação de tarefas das quais é importante conhecer suas naturezas e suas dificuldades. Destaca que, num certo campo conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos alunos são moldados pelas situações que encontram e que, progressivamente, dominam. Por conseguinte, as situações é que dão sentido aos conceitos; I = conjunto de invariantes operatórios; são propriedades e relações que podem ser reconhecidas e usadas pelos sujeitos para analisar e dominar as situações que dão sentido ao conceito, logo, é o significado do conceito. Finalmente, R é um conjunto de representações como, por exemplo, diagramas, linguagem, gráficos, que se tornam um meio para representar as situações e invariantes operatórios, isto é, o significante.

Diante de determinada situação, o sujeito age, segundo as representações que dela faz, sendo a ligação, entre as representações e a sua conduta, o esquema. De acordo com Moreira (2002), a noção de esquema, para Vergnaud, é a maior contribuição de Piaget (2003, 2011) e é definida como a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações. Esquema é a forma estrutural da atividade, é a organização invariante da atividade do sujeito sobre uma dada classe de situações. As situações podem ser consideradas como propriedades e relações em um espaço de tempo determinado, envolvendo o sujeito e suas ações. Ainda, segundo Vergnaud (1990), esquema é a organização da conduta para uma determinada classe de situações.

Segundo Vergnaud (2003), o primeiro ato de mediação do professor é a escolha da situação para os alunos. Nessa pesquisa, a História da Matemática é coordenadora das ações de aprendizagem. Dela apropriamo-nos para tomar decisões pedagógicas quanto ao ensino do conceito de medida de área e procedimentos para o seu cálculo.

Vergnaud (1996) define que os invariantes operatórios são teoremas em ação e conceitos em ação, constituem a base conceitual implícita que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes. Assim, é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos em ação do sujeito – os teoremas em ação e os conceitos em ação. É nas situações que ocorre a operacionalidade dos conceitos. O esquema é um referente do sujeito e a situação é a circunstância e o contexto em ‘que o objeto a ele se apresenta e repousa sobre uma conceitualização implícita.

Os conceitos em ação são relacionados a objetos, predicados, classes, condições. Dentro de uma vasta quantidade de conceitos que podem estar disponíveis no repertório dos sujeitos, é selecionada uma pequena parte para cada ação. Os teoremas em ação são proposições, que podem ser verdadeiras ou falsas. Os conceitos em ação se articulam por meio dos teoremas em ação. Portanto, os conceitos em ação e os teoremas em ação podem ser adequados ou não adequados para uma dada classe de situações e permanecem implícitos na ação do sujeito podendo tornar-se explícitos. (VERGNAUD, 1998).

Então, na nossa pesquisa, propusemos situações de desestabilização fundamentadas na concepção histórica da matemática. Tais situações tinham como função provocar ações de atividade no sujeito nas quais ele organizava o pensamento para a resolução e, a partir de um esquema construía novos esquemas. O sujeito só constrói novos esquemas se os mobilizados por ele não dão conta de obter uma resposta desejável, o que desestabiliza o aluno levando-o a novos investimentos. Assim, a situação é para o sujeito e o conceito é aquilo de que ele se apropria e reelabora, para dar conta de novas situações, realizando uma síntese de conceitos anteriores de forma racional e criativa.

Vergnaud (1996) esclarece que o sentido de um conceito está fortemente associado à ação de resolução de problemas. Para Duval (1993), a compreensão da aprendizagem da matemática pelo sujeito deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, observando suas produções e buscando um modelo que seja pertinente para analisar e interpretar tais produções. A teoria de Vergnaud nos orientou nas análises das relações advindas e ocasionadas pelo conceito, enquanto a de Duval norteou as análises das representações dos objetos matemáticos. Nesta perspectiva, consideramos construção do conceito de área pelo aluno. Não o conceito pronto expresso em uma definição explicitada no livro didático ou pela professora, mas uma ação experenciada e reelaborada pelo aluno.

Ainda, segundo Duval (2003), um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo três funções, a comunicação, o tratamento da informação e a objetivação. Assim sendo, as representações semióticas não cumprem somente o papel de comunicar, elas são igualmente fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento. Para esse autor, o objeto matemático em estudo não deve ser confundido com suas representações, e sim reconhecido em cada uma delas. Logo, reconhecemos os registros de representação semiótica como um modelo pertinente para interpretarmos e analisarmos as relações entre as ideias e a produção do conceito de área pelos alunos inseridos em situações elaboradas diante da concepção histórica de tal conhecimento.

As produções externas dos educandos podem nos explicitar as condições de aquisição do conhecimento matemático em questão, isto é, as condições específicas de acesso ou não a tais objetos matemáticos. Ao desenvolver situações diversas, que trazem informações em diferentes linguagens, o aluno procura traduzí-las naquelas que consegue utilizar como uma ferramenta de tratamento da situação. Como cada linguagem traduz algumas, mas não todas, propriedades do objeto, uma linguagem pode ser mais adequada que outra para lidar com esse objeto, em uma situação específica. Desta forma, o conhecimento dos alunos sobre os objetos e suas propriedades é ampliado por meio do trânsito entre representações expressas em diferentes linguagens, as quais se tornam ferramentas para o pensamento no desenvolvimento de situações nas quais estes alunos podem ser inseridos.

Temos, em Duval (2003), temos que o acesso aos objetos matemáticos ocorre por meio das representações semióticas, pois nem toda operação cognitiva é perceptível ou observável por meio de objetos concretos, ou seja, os conceitos e conteúdos são abstrações desencadeadas por processos de generalização, que necessitam das representações semióticas para que ocorra uma verdadeira apreensão e evolução do pensamento matemático. As representações semióticas são externas e conscientes da pessoa. Elas desempenham o papel de comunicar, exteriorizar as representações mentais, a fim de torná-las acessíveis às outras pessoas, bem como possibilitar o acesso e a comunicação do objeto matemático.

Duval (2003) classifica em quatro os tipos de registros distintos: língua natural, sistemas de escritas, figuras geométricas e gráficos cartesianos. Sendo a língua natural e o sistema de escritas registros relacionados à representação discursiva, já as figuras geométricas e os gráficos cartesianos são registros relacionados à representação não discursiva. Essas representações além da função de comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, podem estar relacionadas à função de objetivação ou de tratamento. Um objeto matemático pode ser apresentado por meio de diversos tipos de registros de representação: “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. (DUVAL, 2003, p. 14).

Nas representações semióticas, segundo Duval (2003), dois aspectos devem ser tomados em consideração, a forma que é o representante e o conteúdo, o representado. Como existem diferentes registros de representação para o mesmo objeto matemático, a forma pode ser alterada de acordo com os diferentes tipos de tratamento. “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (DUVAL, 1993, p. 51). A coordenação entre dois registros quaisquer se dá através de duas operações: conversão e tratamento.

A formação de uma representação significa uma operação cognitiva. Para analisar a atividade matemática numa perspectiva de ensino e de aprendizagem, Duval (2003), afirma ser necessário realizar uma abordagem cognitiva sobre os dois tipos de transformações de representações que são fundamentais para essa análise, os tratamentos e as conversões de registros de representações semióticas. O tratamento da representação é a transformação de uma representação em outra dentro de um mesmo registro, portanto uma transformação interna a um registro de representação. A conversão compreende a transformação de uma dada representação em outra pertencente a outro sistema semiótico. Citamos, como exemplo de tratamento, $8x-7y = 3x$, então temos a seguinte transformação, $8x-3x = 7y$. E de convenção a passagem da linguagem materna para a linguagem algébrica.

Nesse sentido, as representações semióticas cumprem várias funções primordiais, tais como a comunicação, para tornar visíveis e acessíveis as representações mentais que dependem da interiorização das representações semióticas; na realização de diferentes funções cognitivas, como objetivação (expressão interna, que se presta ao entendimento particular), tratamento e convenção. (DUVAL, 1993).

Outras definições importantes dessa teoria para a nossa pesquisa são as abordadas por Duval[9] acerca de figuras e de ensino e aprendizagem em geometria, que envolve três formas de processo cognitivo:

a) visualização é o processo que examina o espaço, representação da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva;

b) construção é a elaboração de configurações, que pode ser trabalhada com um modelo, em que as ações representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;

c) raciocínio no processo do discurso para a extensão do conhecimento, para a prova e a explicação.

Adotamos essas formas de processo cognitivo na análise das produções realizadas pelos alunos ao trabalharem com recorte e colagem de figuras.

Consideramos a seguinte definição de figura dada por Duval:

> Uma figura é uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo. Segundo a sua dimensão, estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e os traços caracterizam-se, respectivamente, pelo aspecto discreto e contínuo. As zonas caracterizam-se pela sua forma, quer dizer, pelo seu contorno: um traço fechado ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo. Restringindo ao caso em que os elementos figurais são traços, a organização perceptiva de uma figura segue a lei do fechamento e da continuidade: quando diferentes traços formam um contorno simples e fechado, eles se destacam como uma figura sobre um fundo. (DUVAL, 2012, p. 12).

Em nossa pesquisa trabalhamos com interpretações autônomas de figuras. Para essas interpretações, Duval (1994) considera quatro tipos de apreensões:

a) sequencial: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura;

b) perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;

c) discursiva: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados;

[9] Ibid idem

d) operatória: é uma apreensão centrada sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e sua reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

Nas atividades apresentadas na nossa pesquisa os alunos trabalharam com todas as apreensões. A tomada de consciência da distinção das formas de apreensão depende da exigência de resolução da situação na qual o aluno foi inserido.

Ainda de acordo com Duval (1994), a apreensão operatória das figuras depende das modificações pelas quais elas passam. Esse autor classifica essas modificações em:

a) modificação mereológica: a figura pode separar-se em partes que são subfiguras, obtidas a partir da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, uma relação da parte e do todo;

b) modificação ótica: a figura pode ser aumentada, diminuída ou deformada, esta modificação transforma uma figura em outra chamada de sua imagem;

c) modificação posicional: é o deslocamento em relação a um referencial. A figura pode ser deslocada ou rotacionada em relação ao referencial.

Tais modificações são realizadas psiquicamente, mentalmente e graficamente. Em nosso trabalho, essas modificações, em sua maioria, ocorreram nas atividades de recorte e de colagem das figuras e também por meio de desenhos. Queremos enfatizar a modificação mereológica por possibilitar o uso da operação de reconfiguração que consiste em organizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em outra figura. Essa operação permitiu a articulação entre tratamentos tais como as medidas de áreas por soma de partes elementares, ou evidenciar a equivalência entre as áreas das figuras.

Dessa forma, a história da matemática, neste trabalho, tem papel de problematização na perspectiva epistemológica do conhecimento matemático. Neste contexto, assumimos que o aluno, primeiramente, necessita construir área como grandeza autônoma, distinguindo área e superfície, assim como área e medida da área.

A próxima seção diz respeito a como procuramos lidar com nossos objetivos, ao método que orientou a constituição das nossas informações e aos percursos do nosso trabalho de investigação.

2 Metodologia

2.1 Considerações metodológicas

Esta pesquisa foi realizada no ambiente escolar e orientada por uma abordagem qualitativa. As informações foram obtidas por meio da aplicação e da análise de uma sequência de atividades. Assim, foi possível observar as reações dos alunos diante do uso da história da matemática como elemento norteador na elaboração de atividades que os levassem à construção do conceito de área como grandeza, bem como à elaboração de procedimentos para sua medida.

A nossa investigação é colaborativa no sentido de que fomos à escola para desenvolvê-la, considerando o nosso papel de educadores anterior ao de pesquisadores.

O desenvolvimento dessa pesquisa teve como elementos norteadores a produção, a aplicação e a análise de uma sequência de atividades concebidas a partir de decisões pedagógicas fundamentadas na história da matemática tendo em vista três princípios. O primeiro é a experiência física e visual por meio da manipulação e experimentação, na qual observamos a manifestação das primeiras impressões do conhecimento apreendido durante a interação sujeito-objeto vivenciada na produção do conhecimento. O segundo é a verbalização, que ocorreu por meio da comunicação verbal dos fatos experimentados e compreendidos pelos alunos, num processo de socialização das ideias apreendidas, ação-reflexão revelando o caráter comunicativo e social do processo de ensino e da aprendizagem. O terceiro é abstração ou tomada de consciência de regras matemáticas, evidenciada pela representação dos resultados obtidos. (DOCKWEILLER *apud* MENDES, 2001).

Ao utilizarmos a história da matemática na elaboração da sequência, não tivemos por pretensão que o aluno, em seu aprendizado, realizasse as mesmas etapas percorridas historicamente na construção dos conceitos. Não consideramos que a matemática deva ser ensinada de forma linear e hierárquica, por meio da recapitulação do processo histórico de determinados conhecimentos, tampouco que o aluno precisasse reconstruir todo o caminho histórico, percorrendo as mesmas operações e conflitos cognitivos que ocorreram na construção dos conceitos matemáticos ao longo da história.

Elaboramos uma sequência de atividades tomando por base situações e concepções históricas da construção do conceito de área e sua medida, sem utilizar a história para revisar como o conceito foi construído por meio das civilizações e seguindo todos os processos cronológicos na construção de tal conhecimento.

Nossa intenção foi argumentar a favor das possibilidades e potencialidades didáticas da história da matemática pressupondo a necessidade de conhecimento sobre o desenvolvimento histórico epistemológico do conceito matemático em questão.

Consideramos a história como fonte de significado, por isso somos favoráveis ao desenvolvimento de atividades didáticas que proporcionem também a reconstrução de bases metodológicas históricas e métodos empregados como estratégia de pensamento para a construção e ressignificação de conceitos matemáticos na forma como se encontram consolidados atualmente.

Por exemplo, a composição e decomposição de figuras utilizadas pelos gregos podem contribuir na construção do conceito de medidas de área. Mendes (2006) considera que o conhecimento histórico contribui para que o aluno reflita sobre a formalização de leis matemáticas a partir de certas propriedades e artifícios usados hoje e que foram construídos em períodos anteriores ao que vivemos.

Fonte de significado, para nós, tem a mesma denotação de "significado de atividade" para Skøvsmose (2009, p. 105): "motivos, perspectivas, esperanças, aspirações e obtém um combustível do *foreground*[10] dos estudantes".

A sequência de atividades compreendeu quatro etapas: estudos e análises preliminares, concepção das atividades, desenvolvimento das atividades em sala de aula, análise das produções dos alunos.

Os estudos preliminares constituíram a base da elaboração das atividades. Como argumentamos em favor da utilização da história da matemática como elemento mediador no desenvolvimento da aprendizagem, tomamos por base autores que defendem suas potencialidades como Mendes (2006, 2009a, 2009b), Miguel e Miorim (2004), Fauvel (2000), entre outros. Para as concepções históricas desse trabalho, o conceito da grandeza área e de medida de área, as referências básicas foram autores pesquisadores de fatos históricos como Gillings (1972), Joseph (2000), Katz (1998) e Silva (2010).

Ao nos pautarmos nos aspectos históricos da matemática, visando à construção do conceito de medidas de área, pela experiência direta do aluno no contexto da investigação em sala de aula, foi de fundamental importância levantar informações úteis à nossa ação didática no material histórico existente em diferentes fontes. Então, julgamos interessante tecer um breve comentário sobre a nossa fonte de pesquisa como educador que difere do historiador.

---

[10]No contexto desse trabalho, entendemos foreground de uma pessoa, conforme a proposição de Skøvsmose (2009, p. 104), como as oportunidades que a situação social, política e cultural proporcionam a ela

O historiador pode realizar seu trabalho via fonte primária ou secundária. Quando o acesso é possível, ele vai a essas fontes para construir uma história. Ele utiliza um conjunto de fontes primárias e, a partir do seu olhar sobre as mesmas, por meio alguma metodologia, por exemplo, os positivistas agrupam os fatos cronologicamente, analisam os documentos e contam a história a partir dessa documentação. É factível, também, “fazer” a história na qual há mais liberdade para tirar conclusões, levantar conjecturas e tentar construir uma história. Ele está interessado nas provas que estas podem fornecer e contribuir para o desenvolvimento do conhecimento por meio da produção de fontes secundárias.

No caso da secundária, busca-se aproximar o máximo possível de uma fonte primária, por exemplo, não temos acesso a uma história egípcia, temos acesso a livros, como de Gillings (1972), que é considerado quase uma fonte primária por ser referencial à grande maioria dos livros de tal tema. Então, por não ter acesso a fontes primárias, o pesquisador vai a textos que foram escritos a partir de tais fontes (Excerto da conversa com a professora Maria Terezinha Jesus Gaspar em 24/03/2011).

Nós, educadores, teremos, por fonte de pesquisa, o material produzido pelos historiadores e por professores pesquisadores, além do material de origem didática. E a nossa metodologia, para análise de tais fontes, não será o da história. No entanto, o zelo para não transmitir fatos históricos errados é essencial e ético. Assim, nos apropriamos das fontes que são da confiança da atual comunidade científica e confiamos nelas para fazer o nosso trabalho.

Quanto ao material de origem histórica, esse pode orientar na estrutura da sequência de atividades, mas, por serem fontes secundárias, ou elaboradas a partir delas, torna-se imprescindível a realização de análises das informações. Quando se tem uma informação histórica na fonte didática, é necessário confirmá-la na fonte histórica por ela indicada, pois, na fonte didática, o autor pode ter usado sua criatividade para abordar o fato histórico e ter elaborado reflexões que não são necessariamente uma fonte.

Para Benjamin (1994, p. 229), “a história é objeto de uma construção cujo lugar não é o tempo homogêneo e vazio, mas um tempo saturado de agoras”. Segundo esse autor, articular o passado historicamente não significa conhecer como ele foi e sim apropriar-se de uma reminiscência, tal como ela retorna em dado momento. Para Vianna (2010), a história é construída *a posteriori*: “A História é construída sempre acrescentado ao fato. Assim, considerado, não há uma história. Aquilo que assim chamamos é, a cada vez, constituído pelos historiadores que vão escolhendo e tecendo fatos”[11].

Em que pese uma história não ser o fato em si e, sim, a narrativa de alguém de acordo com suas perspectivas, é interessante refletirmos sobre o que “acrescenta” o professor que reelabora fatos a partir de objetivos didático-pedagógicos e que não é historiador, mas se apropria da produção deste levando em conta que:

- é educador, e tem por fonte de produção de historiadores, e pressupõe que o conteúdo do texto histórico é uma “verdade”;

- transforma o texto, o contexto e o fato certificando a produção histórica com a pedagogia voltada à aprendizagem de conceitos matemáticos contextualizados;

- há uma carga pesada de transposição didática, buscando motivar o aluno para a aprendizagem matemática pelo interesse e pelo conhecimento dos contextos de produção histórica da matemática;

- correm sempre o risco de transformar a história da matemática, que deveria ser o pano de fundo do processo de aprendizagem, em objeto de conhecimento a ser ensinado, desvirtuando o objetivo primeiro, confundindo meios e fins.

Segundo Tzanakis e Arcavi (2000), o estudo em história da matemática tem como material de referência três tipos de fontes:

a) material de fonte primária, documentos matemáticos originais.

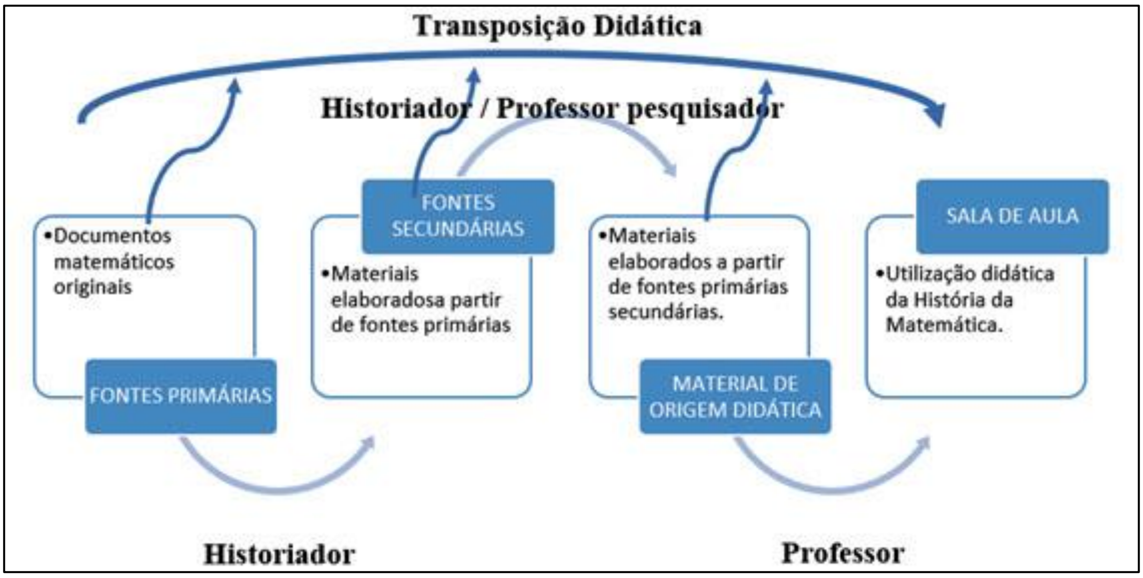
b) material de fonte secundária, que podem ser livros com narrativas da história, interpretações, reconstruções entre outros.

c) material de origem didática, literaturas elaboradas a partir dos escritos primários e secundários com uma abordagem didática e com o olhar inspirado pela história.

A seguir apresentamos, na Figura 1, uma síntese dessas ideias e categorias.

[11] Ibid p. 499

Figura 1 - Transposição didática.



Elaborada pela autora a partir de Tzankis e Arcavi (2000).

Ainda segundo Tzanakis e Arcavi (2000), das três categorias apresentadas, a mais carente no campo educacional é a terceira, material como recurso didático. Professores e educadores matemáticos são encorajados a desenvolver, individualmente ou em colaboração, o seu próprio material nesta categoria e torná-lo disponível para toda a comunidade.

Mendes (2006) acredita que, entre as dificuldades enfrentadas por professores que desejam ter, na história da matemática, um recurso didático, está a falta de informação sobre o desenvolvimento histórico da matemática e a ausência de propostas metodológicas de utilização das mesmas no ensino da matemática escolar. Essas dificuldades, especificamente, segundo esse autor, dão-se ao fato de não existir uma história da matemática exclusivamente centrada na ação pedagógica, e sim uma "história da matemática feita pelos historiadores, preocupados com o contexto científico da matemática". (MENDES, 2006, p. 97).

Sendo assim, o "olhar" nesse trabalho não é de historiador, trata-se de uma apropriação da história, o "olhar" é de educador. Nossa visão será de como poderemos nos apropriar dessa história a fim de realizarmos um trabalho pedagógico. Não queremos escrever uma história, mas, a partir dela, apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem para a matemática sem ficarmos amarradas a conceitos e processos históricos, pois também não desejamos ensinar história da matemática aos alunos do 5º ano. Fauvel e Van Maanen (2000) afirmam que há diferença entre ensinar história da matemática e utilizar a história para ensinar matemática; já Brolezzi (1991) considera:

> Fazer uso da história da matemática para ensinar matemática elementar não se reduz ao simples ato de contar histórias: é necessário captar a forma de pensar, a lógica da construção matemática. Isso faz com que seja fundamental para quem queira fazer uso didático da história da matemática, conhecer primeiro suas fontes. (BROLEZZI, 1991, p. 7)

Utilizamos as concepções históricas do conceito de área para elaborar ou adequar atividades que atendessem às necessidades cognitivas e afetivas específicas dos alunos em questão na pesquisa e os levassem à aprendizagem desse conceito conforme o tratamento que lhe é peculiar nos dias de hoje, ou seja, a história já está construída, não vamos (re)construí-la. E também não temos preocupação em ensinar os conteúdos históricos para estes sujeitos.

Buscamos elementos que indicassem essa construção e, a partir dessa compreensão, definimos escolhas de conhecimentos e procedimentos para a elaboração de atividades que favorecessem aos alunos a construção do conceito de área como grandeza autônoma e sua medida.

Logo, nossa ênfase foi sobre os conceitos da matemática, buscando na história possibilidades de respostas específicas a problemas e a questões matemáticas, conforme o esquema a seguir:

Figura 2 - Construção de conceito.

Elaborada pela autora.

Problemas fundamentados na história da matemática possibilitam aos alunos mobilizarem conhecimentos para resolverem problemas e, assim, descobrirem fatos novos, sendo motivados a encontrarem várias outras maneiras de resolverem o mesmo problema, despertando a curiosidade e o interesse pelos conhecimentos matemáticos desenvolvendo, portanto, a capacidade de solucionar as situações que lhes são propostas.

Um novo conceito matemático é construído na articulação com outros conceitos e depende fortemente das situações a serem enfrentadas pelos sujeitos nas quais utilizarão estratégias pessoais na resolução. É importante a apresentação do conteúdo dentro de um contexto significativo para o aluno. No caso de nossa pesquisa, o contexto é histórico.

Portanto, pressupomos que, como primeira perspectiva do professor pesquisador que deseja utilizar a história como recurso na elaboração de contextos significativos aos alunos, a necessidade é conhecê-la e instrumentalizar-se dela a fim utilizá-la. O professor que não é, necessariamente, um historiador, deve inicialmente adquirir uma base do conhecimento da evolução histórica do conteúdo com o qual irá trabalhar: as ideias-chave, os questionamentos, os problemas que fundamentaram tal evolução histórica, o conhecimento dos aspectos essenciais que historicamente geraram as significações de tais conceitos.

Após a apropriação do conhecimento histórico do conteúdo a ser desenvolvido, o próximo passo deve envolver a transposição didática desse conhecimento em atividade produtiva para o aluno, ou seja, voltada à aprendizagem que é concebida a partir de uma visão de sujeito ativo, crítico, criativo, investigador. Nesse contexto, as reconstruções históricas serão dadas por sequências didáticas que deverão provocar nos alunos interesse acerca do tema em estudo e participação como sujeito que aprende.

O historiador matemático é o que conta uma história. Quando o pesquisador quer apropriar-se da história para ensinar, sua postura é de alguém que olha para o ensino da matemática por meio da história. (Excerto da conversa com a Professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar em 24 mar. 2011).

Concordamos com essas considerações: acreditamos que o professor, para recorrer à história como instrumento didático, precisa acreditar em tal potencialidade e compreendê-la ou aumentar sua compreensão, por meio de estudos da historicidade do tema a ser trabalhado em sala de aula. Contundo é substancial a aplicabilidade da transposição didática do conteúdo histórico.

> A História se manifesta como fonte de busca das formas ideais de aprendizagem matemática. É por essa razão que os pesquisadores deveriam recorrer a ela. Mas, tendo em vista o fato de a história da matemática ser uma história da matemática adulta, isto é, uma matemática produzida por adultos, essas formas ideais de aprendizagem devem ser confrontadas com estudos empíricos de desenvolvimentos conceptuais de crianças da atualidade. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 121).

Em Chevallard (LEITE, 2007), transposição didática é um conjunto de adequações e transformação do saber elaborado pelos cientistas em saber ensinável:

> É um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino. (CHEVALLARD, apud LEITE, 2007, p. 43).

O uso da história do conhecimento matemático para sala de aula requer transposição didática. O conhecimento matemático como está hoje foi modificado, transformado, reelaborado na medida em que a sociedade foi se transformando. Como já foi dito na introdução, desejamos que, por meio do conhecimento histórico da matemática, o aluno construa e ressignifique o conceito de medida de área, isto é, a história da matemática passará por um processo gerador de transformações para a criação do objeto de ensino por meio das sequências didáticas.

No caso desta pesquisa, aconteceram dois níveis de transposição. O primeiro ocorreu por meio da participação das professoras pesquisadora e colaboradora nos cursos de extensão sobre história da matemática; ou seja, a transposição foi no nível do historiador (professora Maria Terezinha Jesus Gaspar) para a pesquisadora e para professora colaboradora que buscavam nos cursos novos aprendizados para a suas práticas pedagógicas.

É importante ressaltar que esse nível de transposição pode ocorrer mesmo que o professor não tenha participado especificamente dos cursos de extensão oferecidos pela professora Professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar, mas pode se dar de outras formas como estudos do tema a serem ministrados em sala, ainda que seja necessário o conhecimento histórico.

Para Muniz (2003), o aprender para o professor denota um rompimento com conceitos cristalizados sobre sua prática profissional, significa um esforço cognitivo de revisão de conceitos e procedimentos.

2.2 Sequência de Atividades

De acordo com o caráter dado ao uso da história da matemática, neste trabalho, entendemos como Mendes (2006, p. 100), para quem "o princípio que articula as atividades de ensino-aprendizagem via história da matemática é a investigação". Por isso, propomos o trabalho numa perspectiva investigatória e construtivista. A investigação em sala de aula foi subsidiada pelas atividades e apoiada nos pressupostos apresentados por Ponte, Brocardo e Oliveira:

> Investigar é procurar conhecer o que não se conhece. Com um significado muito semelhante, senão equivalentes, temos em português os termos “pesquisar” e “inquirir”. [...] Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos procurando identificar as respectivas propriedades. (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA 2003, p. 13).

Conforme esses autores, o conceito de investigação matemática que formula questões, elabora conjecturas, realiza testes e demonstrações, refina teses e comunica resultados aos pares como atividade, pode estar ao alcance do aluno como uma atividade de ensino e de aprendizagem. Para isso, a investigação matemática deve ser desenvolvida em três fases: introdução da tarefa pelo professor, realização das tarefas pelos alunos, individualmente ou em grupo, sempre mediada pelo professor, e discussão dos resultados.

A adoção da sequência de atividades, nesta pesquisa, teve função investigativa das possibilidades e das dificuldades da utilização da história da matemática na construção e ressignificação do conceito de área como grandeza e do conceito de medida de área.

Para Oliveira, Segurado e Ponte (1996), uma atividade é investigativa quando apresenta uma proposta desafiadora na qual os métodos de resolução e a resposta não estão imediatamente acessíveis aos alunos. Segundo os autores, isso corresponde a identificar a aprendizagem da matemática com o fazer matemática.

Ao desenvolvermos a atividade investigativa, também consideramos, como Skøvsmose (2000), que a investigação em sala de aula pode desafiar o paradigma do exercício, contribuindo para que o aluno se engaje ativamente em seu processo de aprendizagem, desenvolvendo no aluno “competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática” (SKØVSMOSE, 2000, p. 2). Para isso, buscamos estruturar as atividades como espaço de acomodação do aprendizado pela investigação. Esse espaço é chamado por esse autor de cenário para investigação. Para Skøvsmose (2009), este cenário abre possibilidades para o desenvolvimento do diálogo entre os estudantes e, também, entre os estudantes de professores.

A estruturação da sequência de atividades apoiou-se em alguns pressupostos da sequência didática explicitados por Pais (2001) e Almouloud (2007).

A elaboração da sequência didática requer preparação:

> Uma sequência didática é formada por certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter especifico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório. (PAIS, 2001, p. 102).

Para Amouloud (2007, p. 174), uma sequência de situações-problema é formada por questões abertas e/ou fechadas em uma situação que envolve um campo de problemas colocados em um ou mais domínios do saber e de conhecimento. Essas situações, mais ou menos matematizadas, são elaboradas na intenção de orientar os alunos na construção do conhecimento de forma construtiva e significativa, bem como desenvolver certas habilidades como ler, interpretar, desenvolver o raciocínio dedutivo dentre outras. Para tanto, devem apresentar algumas características intrínsecas como:

- Os dados do problema são facilmente identificados;

- devem colocar em jogo um campo conceitual no qual o conhecimento em questão está inserido;

- os conhecimentos antigos dos alunos são importantes mais insuficientes para a resolução;

- um problema pode envolver mais de um domínio do conhecimento.

Então, a sequência de atividade aplicada no desenvolvimento desse trabalho procurou gerar esse cenário para desencadear um processo de investigação, envolvendo a professora e os alunos em situações de exploração e de elaboração de conjecturas, testes, reformulação e justificação de conjecturas e avaliação do trabalho, tendo como pano de fundo a história da matemática, o objetivo era levar o aluno a perceber que a descoberta em matemática, o fazer matemático, não é linear e que seus resultados não são arranjos bem organizados; ela não é uma ciência pronta, mas resultado de uma sucessão de acontecimentos, de erros e de acertos em contextos históricos, sociais e econômicos.

Desenvolvemos uma pesquisa participativa na qual a pesquisadora, além participar como observadora no cenário da investigação aplicou algumas das atividades. As duas professoras colaboradoras foram atuantes na organização, na aplicação da sequência de atividades e análises.

Como metodologia de pesquisa, utilizamos a pesquisa-ação que articulou a construção do saber matemático a uma prática reflexiva investigativa, diante da qual as professoras colaboradoras apontaram uma ressignificação nos seus respectivos fazeres pedagógicos.

O saber matemático foi construído a partir de questionamentos levantados sobre o próprio objeto matemático em estudo, daí a necessidade do professor estar preparado para conduzir a sua ação educativa nessa direção o que exige uma ampla capacidade reflexiva sobre a área de atuação.

2.3 Os participantes

Os sujeitos que participaram desta pesquisa foram duas professoras e seus respectivos alunos do 5º ano do ensino fundamental da rede pública de ensino do Distrito Federal – DF.

Nesse momento, consideramos importante tecer algumas considerações sobre a escolha das professoras colaboradas.

Ao realizarmos um curso de história, conhecemos nossa primeira colaboradora. A mesma participou, juntamente com a pesquisadora, de dois cursos de extensão oferecidos pela professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar, no departamento de matemática da UnB, um no segundo semestre de 2010 – "Matemática: uma perspectiva histórica e pedagógica" e outro no primeiro semestre de 2011 – "História das medidas e seu ensino-aprendizagem".

O convite a essa professora, a fim de que participasse desse trabalho, ocorreu devido ao seu empenho em aplicar o que fora aprendido no curso em sua sala de aula e ao seu entusiasmo quando relatou, no encontro seguinte, os resultados, suas dúvidas e as de seus alunos. Também por ela acreditar que a história da matemática seja, de fato, um elemento que pode promover e potencializar o ensino aprendizagem da matemática.

Avaliamos a escolha da professora colaboradora de importância fundamental, pois ela pode atuar estimulando o confronto entre as opiniões, incentivar os alunos de forma que a participação dos alunos nas atividades seja no sentido crítico, reflexivo, argumentativo, de ressignificação do erro, estímulo à criatividade, reforço da segurança nos conceitos prévios, elementos essenciais em atividades práticas e participativas.

Portanto, participar do curso de história da matemática não foi um critério, julgamos a sua participação como indicativo de busca pelo conhecimento histórico, a inicialização de um estudo que poderia ter ocorrido em outro espaço.

Ao realizarmos o convite a tal professora, descobrimos que ela é graduada em história, apesar de lecionar nos anos iniciais. Relatou-nos que, após alguns anos de trabalho com o ensino médio, decidiu que gostaria de atuar nos anos iniciais, onde poderia trazer uma contribuição na formação inicial dos sujeitos que aprendem.

Entretanto, em discussões com o orientador, definimos que trabalharíamos com dois profissionais colaboradores, com a professora já previamente definida e com outra pessoa que inicialmente não tivesse participado do curso de história da matemática.

Definimos que os estudos e organização do trabalho seriam desenvolvidos no espaço da coordenação pedagógica.

Fizemos os estudos necessários e aplicamos a metodologia em duas turmas de 5º ano do Ensino fundamental.

Com objetivos de evitar possíveis ocorrências de viés, a professora da turma, com a qual os alunos já estão acostumados, aplicou a sequência enquanto a pesquisadora realizava a observação e anotações do processo. Também procedemos às mediações quando necessárias ou solicitadas pela professora e aplicamos algumas atividades para as quais as professoras afirmaram não ter segurança.

2.4 Procedimentos e instrumentos

Compreendemos que qualquer método de pesquisa, em qualquer área, supõe uma pesquisa bibliográfica prévia. A pesquisa bibliográfica procura delimitar um problema a partir de referências teóricas publicadas; busca conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado existentes sobre um determinado assunto.

Realizamos essa etapa no sentido de buscar embasamento para o uso da história como elemento didático no ensino da matemática, pontualmente para a história do conceito de área e procedimentos para o seu cálculo. Consideramos que as pesquisas bibliográficas, além de orientar o início do trabalho, permearam a pesquisa no todo, uma vez que todas as suas etapas foram subsidiadas teoricamente.

Adotamos uma intervenção didática que apresenta um esquema experimental fundamentado na elaboração de uma sequência de atividades e na sua aplicação em sala de aula, observação, registro, análise e validação.

Como já explicitado, a pesquisa foi desenvolvida em etapas: estudos preliminares, concepção, aplicação e análise da sequência de atividades. A sequência foi composta de seções, que foram organizadas dentro do tempo que o tema tratado exigiu. Cada seção passou por todas as fases, sendo que a análise da primeira subsidiou a reestruturação da segunda que, por conseguinte, subsidiou a terceira.

2.4.1 Estudos e análises preliminares

Os estudos preliminares fundamentaram a construção das atividades e compreenderam:

a) Estudos históricos e epistemológicos sobre o conceito de área como grandeza e de sua medida. Esses estudos envolveram:

- Estudo da organização da história da matemática como instrumento didático: análise do uso da história da matemática como agente de cognição no ensino e aprendizagem da matemática por meio de levantamento bibliográfico.

- Análise da organização histórica e epistemológica do conceito de medida de área, levantando os principais problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do tema em questão.

- Análise de estratégias e escolhas feitas pelos autores e pesquisadores na utilização da história da matemática como recurso didático – percebemos que é mais comum, entre as pesquisas, a defesa do uso do que a validação de utilização.

Consideramos importante a realização de análises preliminares, pois elas podem evidenciar as concepções dos educandos e as dificuldades que marcam a evolução das tais concepções.

É substancial salientar o compromisso das professoras participantes com a pesquisa. Elas estudavam o conteúdo de cada atividade. As atividades eram enviadas por e-mail com antecedência às professoras. Encontrávamo-nos uma vez por semana, no horário de coordenação. Naqueles momentos, discutíamos as atividades aplicadas na semana e o comportamento dos alunos na resolução das mesmas. Em seguida, discutíamos as atividades a serem aplicadas na semana seguinte. Avaliávamos nossos procedimentos e, quando necessário, realizávamos mudanças para a aplicação da próxima atividade.

Definíamos, também, como iríamos proceder para aplicar a atividade seguinte e realizávamos a análise preliminar das atividades. As professoras, de acordo com as experiências vivenciadas em anos anteriores, ponderavam sobre possíveis dificuldades dos alunos diante de tais enunciados, questionavam também algumas questões que poderiam trazer dificuldades aos alunos e que não nos permitiriam analisar a construção do conhecimento. Então, fazíamos as mudanças pertinentes.

Não era possível as três estarem reunidas, então, a pesquisadora encontrava com cada professora na sua respectiva escola. Além disso, decidimos não fazer comentários das ações de uma turma para a outra, pois consideramos que a participação de uma professora, que já conhecia a história da matemática como instrumento didático, poderia levar a um resultado diferente. No entanto, esse fato não se verificou, uma vez que os comportamentos das duas professoras quanto à metodologia eram semelhantes. Nenhuma das profissionais apresentou dificuldade com o emprego da história da matemática, mas se mostraram preocupadas com o pouco tempo para estudo e para a preparação do material utilizado nas aulas. Ressaltamos, porém, que todo o material foi produzido pela pesquisadora.

No entanto, o Professor Drº Iran Mendes tem publicado livros nesse sentido e orientado trabalhos de pesquisa, e a Professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar tem realizado formação de professores para esse objetivo entre outros professores orientadores.

b) Análise da proposta curricular do 5º ano do ensino fundamental do DF e dos PCN.

c) Reflexões, juntamente com as professoras colaboradoras da pesquisa, acerca das dificuldades e dos obstáculos que surgem no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo em questão.

Para produção de material para análises e verificações, realizamos observações diretas e reflexões com as professoras orientadas pelas produções dos alunos. Utilizamos como forma de registro caderno de campo, gravação em áudio e protocolos dos alunos.

2.4.2 Concepção da sequência de atividades

Para responder aos objetivos e validar nossas asserções, elaboramos um conjunto de atividades.

Assumimos que, para a construção do conceito de área, o aluno primeiro necessita construir área como grandeza autônoma distinguindo área e superfície assim como área e medida da área. Por meio da análise das produções dos alunos em sala de aula, identificamos conquistas, desafios e dificuldades algumas previstas e outras não.

Segundo o Inmetro (BRASIL, 2007b), grandeza é um atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado.

Para estruturar a ordem de aplicação das atividades, tomou-se como referência o trabalho desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989), que distingue três pontos na aprendizagem de área:

1) Construir a noção de área como grandeza autônoma pela comparação direta de duas superfícies por inclusão ou indireta por recorte e colagem:

- por comparação direta de superfícies, por meio da inclusão, ou indiretamente, por recorte e colagem, ou seja, cortando uma superfície S, em um número finito de peças, que, depois, são coladas juntas, sem sobreposição. Uma nova superfície S' que substitui a S para comparação.

- por meio da atribuição de uma série de medidas de área (da mesma superfície) usando pedras de pavimentação (figuras) de várias formas.

Isso nos leva a:

i) diferenciar a forma da área de superfície: duas superfícies de formas diferentes podem ter áreas iguais;

ii) distinguir a área de número, enquanto controla a correspondência entre a medida da área de superfícies e números: a área de uma mesma superfície pode corresponder a números diferentes, dependendo da unidade escolhida, mas a área em si não muda.

2) Estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de medida de área unitária, ou seja por quadrados de lado iguais a uma unidade.

3) Apontar as diferenças entre comprimentos e área.

A seguir exibimos uma relação das atividades que compõem a sequência:

Quadro 1: Sequência de atividades

Atividade	Eixo	Objetivo
1	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão.	Perceber que se uma figura[12] está contida na outra por isometria, então a área da primeira é menor do que a área da segunda.
2	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão.	Perceber que se uma figura é obtida de outra, retirando parte da primeira, a segunda está contida na primeira e a área da segunda é menor do que a área da primeira.
3	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão.	Comparar as áreas de um conjunto de figuras e colocá-las em ordem crescente da área.
4	Eixo 1: comparação direta de superfícies por meio da inclusão	Perceber que: - dados dois quadrados, o que tem a maior área é aquele que tem o maior lado. - dados dois polígonos regulares de mesmo número de lados, tem a maior área aquele que tem o maior lado. .
5.1	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Instrumentalizar os alunos para resolverem o problema de transformar um quadrado em um retângulo de mesma área. Levar o aluno a perceber que, quando decompomos uma figura e reorganizamos as partes sem superposição, a figura resultante tem a mesma área da primeira e essa área é igual à soma das áreas das partes
5.2	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Levar os alunos a perceberem que, quando decompomos uma figura e reorganizamos as partes sem superposição, a figura resultante tem a mesma área da primeira e, essa área é igual à soma das áreas das partes. Transformar um retângulo em quadrado de mesma área. Transformar o quadrado em retângulo de mesma área.

[12] Figura, neste trabalho, é uma superfície limitada e fechada contida no plano.

6	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Perceber, por recorte e colagem, que figuras diferentes podem ter a mesma área. Rever os conhecimentos trabalhados nas atividades anteriores.
7	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Identificar o quadrado e seus atributos. Perceber que a área de um quadrado é igual ao dobro da área do triângulo que se obtém cortando o quadrado ao longo de uma das suas diagonais. Perceber que é possível decompor o quadrado em dois retângulos de mesma área e que é possível construir um quadrado que tenha a metade da área de um quadrado dado.
8	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Resolver o problema da duplicação do quadrado. Reconhecer que a área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado é o dobro da área do quadrado dado.
9	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Trabalhar com a duplicação do quadrado. Construir um quadrado igual em a um triângulo isósceles dado. Verificar a conservação de área na transformação do triângulo isósceles em quadrado.
10.1	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Identificar formas geométricas, comparar áreas.
10.2	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Perceber que a área de uma figura não muda, mas sua medida depende da unidade de medida escolhida. Transformar uma superfície não pavimentada em pavimentada. Calcular área por pavimentação tendo uma unidade de medida definida
10.3	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem Eixo:3 apontar as diferenças entre comprimentos e área.	Construir figuras com as peças do tangram e comparar as áreas. Trabalhar o conceito de perímetro.
11	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem	Evidenciar a natureza de uma unidade quadrada de área. Calcular a área da figura utilizando como unidade o quadrado. Escolher uma subunidade do quadrado para medir a área. Calcular a área de cada figura, adotando, como unidade de medida, o quadrado da malha na qual ela está desenhada.
12	Eixo 2: estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	Por recorte e colagem, transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada.
13.1	Eixo 1: comparação indireta de superfícies por recorte e colagem Eixo 2: estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	Trabalhar com a unidade quadrada. Construir, no geoplano, polígonos cujo perímetro é dado. Comparar as áreas.
13.2	Eixo:3 apontar as diferenças entre comprimentos e área.	Perceber que polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas iguais ou diferentes. Entender que a medida do perímetro não tem relação com a medida da área. A unidade utilizada, para a medida do perímetro, é a distância entre dois pregos e não a diagonal do quadrado formado por eles.
13.3	Eixo:3 apontar as diferenças entre comprimentos e área.	Identificar área e perímetro de figuras não convexas.
13.4	Eixo 2: estender a aplicação de medida às	Consolidar os conceitos de área.

	áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	
14	Eixo 2: estender a aplicação de medida às áreas de superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área unitária.	Promover situações que provoquem no aluno procedimentos para a medição de área para além da contagem de quadradinhos; transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada; tomar a decisão de fazer uma contagem por aproximação. Verificar quais procedimentos foram adotados pelos alunos.
15	Eixos:1,2 e 3	Compreender que a área de um quadrado é uma unidade de medida e essa unidade varia de acordo com a medida do lado do quadrado. Compreender o metro quadrado como unidade padrão. Analisar algumas relações entre as unidades de medidas do sistema métrico decimal.

2.4.3 Desenvolvimento das atividades em sala de aula

A fase da experimentação consistiu no desenvolvimento das atividades em sala de aula visando responder aos objetivos da pesquisa. Para Machado (2002), a experimentação tem início no momento em que se dá o contato com a população de alunos sujeitos da investigação e compreende a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa aos alunos, o estabelecimento do contrato didático[13], a aplicação da sequência, finalmente, o registro das observações realizadas durante a pesquisa.

Segundo Almouloud (2007), a experimentação é o momento de colocar em prática todo o dispositivo elaborado, corrigindo, quando necessário. Esta ocorreu em 23 encontros de duas aulas, algumas vezes houve a necessidade de mais tempo, pois os alunos queriam pintar as figuras, tínhamos que aguardar. Inicialmente, combinamos um encontro por semana, mas houve semanas nas quais foram necessários dois encontros ou não teríamos tempo suficiente para trabalhar todas as atividades previstas. E as professoras preferiram inciar a implementação no terceiro bimestre. Esse era o período para o qual estava previsto o trabalho com o conteúdo objeto desta pesquisa.

Nesse estudo, as atividades foram aplicadas em sala de aula pelas respectivas professoras colaboradoras, com a participação da pesquisadora, que realizou as observações e os registros para composição do caderno de campo, juntamente com as produções e depoimentos dos alunos participantes. No entanto, a pesquisadora realizou medições na implementação da sequência quando julgou necessário ou quando solicitadas pela professora

[13]Contrato didático, no nível de sala de aula, diz respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre professor e alunos (PAIS, 2001, p. 77).

da turma. As observações e as informações obtidas eram discutidas com as professoras nos encontros de planejamento.

2.4.4 Análise das produções dos alunos

Esta etapa consistiu em refletir como base no conjunto de informações produzidas ao longo do trabalho, juntamente com os sujeitos, sobre as dificuldades e impasses enfrentados durante o desenvolvimento da pesquisa em sala de aula, evidenciar a atitude dos sujeitos, da pesquisadora, da professora e dos educandos, diante da proposta aplicada; sistematizar a observação das relações estabelecidas entre os alunos e a metodologia, verificar se as asserções levantadas nas análises preliminares foram confirmadas ou não e, ainda, evidenciar o impacto da proposta da ferramenta pedagógica na aprendizagem dos educandos.

Vale ressaltar que a validação da sequência das atividades foi realizada durante todo o processo de desenvolvimento da proposta. A validação das asserções se deu na análise dos procedimentos e das representações dos alunos imersos na resolução das atividades e na explicitação dos invariantes operatórios.

A partir das situações por nós elaboradas, analisamos os invariantes operatórios produzidos pelos alunos inseridos nas situações de contexto histórico do conceito de área e sua medida. Nas análises, verificamos as conceitualizações implícitas nas ações dos alunos, os procedimentos de resolução, os erros e os acertos cometidos nas resoluções das situações, uma vez que os invariantes operatórios não são verdadeiros ou falsos, pois o conhecimento em ação nos permite agir em determinada situação independente de ser apropriado, ou não, segundo um determinado critério científico. (VERGNAUD, 1990).

Para analisarmos as representações produzidas pelos alunos, apoiamo-nos na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1994, 2003). A função da representação é ajudar o pensamento e a organização da ação. O registro de representação é um sistema de signos que podem desempenhar as funções de comunicação, processamento e objetivação. Segundo Duval, só é possível conhecer, compreender e aprender matemática pela utilização das representações semióticas do objeto matemática.

Duval e Vergnaud fundamentam-se em operações cognitivas do pensamento para compreender o processo da conceitualização pelo sujeito. Embora Duval não trate explicitamente da construção do conceito, para ele, estudar o processo de conceitualização em matemática, significa considerar a conversão, os tratamentos e a coordenação entre os registros de representação semiótica. A conceitualização implica em uma coordenação de diferentes registros de representação.

Em nossas análises, buscamos interpretar as representações produzidas pelos alunos, o que nos ajudou a realizar intervenções mais adequadas no que se refere à construção do conceito de área como grandeza e a sua medida.

Neste sentido, consideramos importante realizar conversões e também, analisar as transformações realizadas pelos alunos na conceitualização de área como grandeza e sua medida. No entanto, sabemos que estas transformações, de modo geral, não acontecem espontaneamente. Esse trabalho apresenta a história da matemática como alternativa pedagógica que possibilita a realização destas transformações.

O desenvolvimento e as análises das atividades serão descritas no Capítulo III desse trabalho. Em seguida, apresentaremos o quadro resumo das fases dessa pesquisa.

Quadro 2: Resumo da metodologia de pesquisa

<table>
<tr><td colspan="5">A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA E PROCEDIMENTOS PARA SUA MEDIDA NO QUINTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADES FUNDAMENTADAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="5">Tese: Mobilizar didaticamente a história da matemática na ação pedagógica pode proporcionar de forma significativa a construção do conceito da grandeza e de medida de área pelos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivo Geral: Analisar a aprendizagem utilizando a história da matemática na concepção de circunstâncias produtoras e sistematizadoras do conceito de área como grandeza autônoma e procedimentos para sua medida, bem como geradora de atividades heurísticas deste conceito inseridas na organização do trabalho pedagógico no 5º ano do ensino fundamental.</td></tr>
<tr><td>ETAPAS</td><td>Análise preliminar das atividades</td><td>Concepção das atividades</td><td>Desenvolvimentos das atividades em sala de aula</td><td>Análise das produções dos alunos</td></tr>
<tr><td>FORMA DE REGISTRO</td><td>Caderno de Campo</td><td>Caderno de Campo</td><td>Caderno de Campo Protocolos Escritos Gravação em áudio.</td><td>Caderno de Campo
Protocolo de Pesquisa</td></tr>
<tr><td>PROCEDIMENTOS CENTRAIS</td><td>Analise do objeto de pesquisa Definição dos objetivos e questões da pesquisa</td><td>Estruturação da sequência definindo objetivos.
Análise matemática e didática da sequência.</td><td>Observação direta. Conversas mediadas pelas produções dos alunos. Produção do protocolo de pesquisa.</td><td>Análise do protocolo de pesquisa. Relacionar as observações com os objetivos definidos a priori.
Feedback aos alunos</td></tr>
<tr><td>PARTICIPANTES</td><td>Pesquisadora
Professora da turma</td><td>Pesquisadora
Professora da turma</td><td>Pesquisadora
Professora da turma
Aluno</td><td>Pesquisadora
Professora da turma</td></tr>
</table>

2.4.5 O narrador na perspectiva desta pesquisa

Como já explicitamos, alguns procedimentos, utilizados ao longo da história, para relacionar área e medida de área, podem ser transformados em atividades didáticas, nas quais os alunos produzem conclusões semelhantes às concluídas na construção de tal conceito.

Não trabalhamos diretamente com a narrativa, contudo, ela esteve presente em todas as atividades, nos relatos dos alunos, na contação de fatos históricos, por isso, julgamos necessário esclarecer o sentido da narrativa em nosso trabalho.

Para Lopes e Nacarato (2009), narrar é contar história. Galvão (2005) defende que, ao se falar de narrativa, deve-se esclarecer o seu significado. Reportando-se a Stephens (1992), o autor afirma que narrar constitui-se a partir da imbricação de três componentes. Primeiramente, a história abrange os personagens envolvidos em determinados acontecimentos num espaço e tempo determinados e possibilita uma primeira interpretação do que é contado; o segundo, o discurso, forma específica como qualquer história é apresentada e, por fim, a significação, uma interpretação de segundo nível que o ouvinte/leitor constrói a partir do inter-relacionamento da história, do respectivo discurso e das suas experiências e conhecimentos prévios.

Neste estudo, algumas atividades trazem a história de forma explícita, assim, a história narrada foi a própria história da matemática, adaptada aos estudantes do 5º ano, com seus acontecimentos, personagens, situações e conceitos matemáticos. A significação seria a manifestação das representações, por meio de suas atitudes, na construção do conhecimento matemático.

Ainda segundo Galvão (2005), no processo da narrativa, podemos identificar pelo menos cinco níveis de representação da experiência vivida: dar sentido, contar, transcrever, analisar e ler. Ainda, considerar que se pode acrescentar o interpretar, uma vez que quem lê ou ouve, necessariamente. Na elaboração e aplicação da sequência de atividades buscamos contemplar os seis níveis apresentados.

Benjamin (1994), filósofo e sociólogo francês do século XX, ao longo do seu texto, “O narrador”, conceitua narração e determina traços característicos de um narrador. Para o autor, uma característica seria a orientação ao interesse prático, ou melhor, o narrador é alguém que dá conselhos. Uma narrativa verdadeira carrega consigo, implícita ou explicitamente, uma lição de moral, um conselho de ordem prática ou simplesmente um ditado. Assim, a história da matemática narrada em sala carregaria em si, implícita ou explicitamente, a possibilidade de aprendizagens de conceitos matemáticos, de trabalho em grupo, de valores éticos. A narrativa constitui-se em mais uma maneira de levar a história da matemática à sala de aula com o propósito de incentivar a participação dos alunos, sua interação e o diálogo na busca do conhecimento.

O autor avança afirmando que metade da arte de narrar está no fato de que na narrativa evitam-se explicações. Os alunos teriam liberdade para interpretar subjetivamente a história narrada, ampliando e recriando o que lhes foi narrado. Em seguida, Benjamin tece comparação entre informação e narração: a primeira tem compromisso com o novo, com o momento, enquanto a narrativa não se perde no tempo, conservando sua força de desdobramento. Este fato permitirá às crianças e jovens estudantes perceberem a matemática como construção histórica e social.

O esperado por nós ocorreu ao longo das atividades, ou seja, o diálogo estabelecido pela narrativa provocou nos estudantes reflexões acerca dos aspectos cotidiano, escolar e científico. Segundo Moran (2007), aprendemos mais quando temos interesse, motivação clara, desenvolvemos hábitos que facilitam o processo de aprendizagem e sentimos prazer no que estudamos e na forma de fazê-lo. A nosso ver, a história da matemática tem força para contemplar todos esses fatores concomitantemente.

De acordo com Benjamin, a narração é uma forma artesanal de comunicação:

> Não pretende transmitir o puro "em si" da coisa, como uma informação ou um relatório. Mergulha a coisa na vida de quem relata, a fim de extraí-la outra vez dela. É assim que se adere à narrativa a marca de quem narra, como à tigela de barro a marca das mãos do oleiro. (BENJAMIN, 1994. p. 205).

Para Benjamin[14], ler um romance é uma prática individual, enquanto narrar uma história é um ato coletivo no qual há a socialização de experiências. A narrativa da história da matemática poderia estabelecer uma nova relação, um novo diálogo entre o professor e o educando durante as aulas de matemática. Acreditamos que essa prática pedagógica pode desenvolver na criança disposição para a aprendizagem, isto é, comprometimento e envolvimento com sua aprendizagem.

Nesse sentido, consideramos que a narrativa da história da matemática pode aproximar a matemática do cotidiano do aluno e fazer com que o estudante perceba-se como um ser matemático. Para isto, terá que ser sujeito ativo e não passivo, sendo assim, a narrativa, bem

---

[14] Ibid p. 213

como toda a atividade, inevitavelmente, deverá possibilitar ao aluno a desenvolver fundamentos do pensamento matemático, da intuição, da imaginação, e do raciocínio lógico, da capacidade de induzir, deduzir e inferir, de estabelecer relações, de conhecer.

> Conhecer é relacionar, integrar, contextualizar, fazer nosso o que vem de fora. Conhecer é saber, é desvendar, é ir além da superfície, do previsível, da exterioridade. Conhecer é aprofundar os níveis de descoberta, é penetrar mais fundo nas coisas, na realidade, no nosso interior. [...]. Pela comunicação aberta e confiante desenvolvemos contínuos e inesgotáveis processos de aprofundamento dos níveis de conhecimento pessoal, comunitário e social. [...] A compreensão se completa com a interiorização, com o processo de síntese pessoal, de reelaboração de tudo o que captamos por meio da interação. (MORAN et al, 2007, p. 25)

Barthes (1976, p. 25) afirma que “o ser humano é essencialmente um contador de histórias que extrai sentido do mundo através das histórias que conta”, e comunga com o pensamento de Machado (2004), ao considerar que um bom professor de matemática, ou de outra área do conhecimento, deverá, necessariamente, ser um bom contador de história. Preparar uma aula, para o autor, é construir uma narrativa pertinente que funciona como suporte para a construção dos significados envolvidos e, de acordo com as proposições aqui expostas, acreditamos que a narrativa é um vetor com potencialidade, que funciona como suporte para a construção dos significados envolvidos.

Acreditamos que trabalhar com história da matemática, explícita ou implicitamente, é tornar a aula um momento em que os alunos podem revelar suas estratégias para a resolução das atividades e, para as professoras, um momento de aprendizagem da prática docente.

CAPITULO III

APRESENTAÇÃO, APLICAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DAS ATIVIDADES

Assumimos que, para a construção do conceito de área, o aluno primeiro necessita construir área como grandeza autônoma, distinguindo área e superfície, assim como área e medida da área. Por meio da análise das produções dos alunos em sala de aula, temos identificado conquistas, desafios e dificuldades algumas previstas e outras não.

Segundo o Inmetro (BRASIL, 2007), grandeza é um atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado.

De acordo com nossas asserções, estruturamos a sequência das atividades tomando como referencial o trabalho desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989), que distingue três pontos na aprendizagem conforme anunciamos na metodologia.

A sequência foi aplicada em duas turmas de 5º ano do ensino fundamental. Ao realizarmos as análises, percebemos que não existiam diferenças significativas entre as duas turmas no que se referem às apresentações das respostas e procedimentos dos alunos, e isso estavam deixando o texto muito repetitivo. Decidimos, então, por não separar as análises por turma, a não ser quando ocorressem diferenças que valessem a pena serem salientadas.

Ordenamos, em cada questão, as respostas dadas pelos alunos em grupos por semelhanças entre as soluções ou procedimentos apresentados pelos mesmos. Em cada grupo, selecionamos uma resposta para representar o grupo e apresentamos no trabalho.

Na turma da professora Tatiana, havia 31 alunos frequentes nas nossas atividades; o momento em que tivemos menos alunos foi em um dia chuvoso, quando houve 8 faltas. Em média, sempre tínhamos 28 alunos presentes. Na turma da professora Vitória, eram frequentes 27 alunos. Era difícil alguém faltar; em média, tínhamos 25 alunos nas atividades.

Apresentamos a seguir cada atividade e sua análise.

ATIVIDADE 1 - COMPARANDO ÁREA DE FIGURAS POR VISUALIZAÇÃO E SOBREPOSIÇÃO

1 Um pouco de história do conceito de área

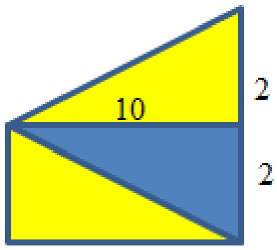
O conceito de área e sua medida foram produzidos historicamente pelo Homem em sua interação com o meio físico, social e político. Ao abordamos a história, no nosso trabalho, não temos por intenção trabalhar todos os conhecimentos de medidas constituídos pelos historiadores; nessa primeira atividade, queremos apresentar, de modo geral, conhecimentos que nos orientaram na elaboração das atividades e quando possível nos ateremos a fatos específicos relacionados à atividade em questão. Nossa preocupação é evidenciar fatos que nortearam a definição da estratégia metodológica adotada em nosso trabalho.

A origem e os primórdios da geometria são atribuídos ao Egito pelo historiador Herôdotos que viveu no (séc. V a. C). A sociedade no antigo Egito era essencialmente agrícola, desenvolveu-se ao longo das margens do rio Nilo, e os impostos pagos pelos proprietários de terras eram calculados em função da quantidade de terra útil para plantio. Após a inundação anual do rio Nilo, havia a necessidade de recalcular os impostos, passando o dono do lote a pagar um tributo proporcional à porção restante. Assim, a geometria egípcia surge da necessidade de medir diferentes áreas de terra, determinar o valor do imposto a ser pago e também para calcular o volume de silos utilizados para armazenar grãos.

A partir de Gillings (1972), a título de exemplo do cálculo de área por essa civilização, podemos citar o problema 49 do papiro de Rhind: cálculo da área de um retângulo de comprimento de 10 *khe*t (1000 cúbitos) por 1 *khet* (100 cúbitos) de altura. A solução é dada por 1000 × 100 = 100.000 cúbitos quadrados. Observem que o quadrado já era utilizado como unidade de área e calculavam tanto a área de um retângulo como o produto das medidas dos lados não paralelos.

De acordo com esse autor, para calcular a área do triângulo, os egípcios antigos usavam um procedimento que equivale a aplicar a fórmula A=1/2 bh, na qual b é um dos lados do triângulo e h, a altura relativa a este lado. Esse problema pode ser encontrado no problema 51, do papiro de Rhind, quando escriba mostra como calcular a área de um triângulo de lado (a palavra no original era *meret* que foi traduzida para altura) 10 *khet* e base (a palavra original era *teper* traduzida para base) 4 *khet*. O escriba tomou a metade de 4, depois, multiplicou 10 por 2, obtendo a área como 20 *setats* de terra. Este procedimento sugere a decomposição do triângulo isósceles, em duas partes congruentes, para formar um retângulo, conforme figura a seguir.

Figura 3 - Decomposição do triângulo isóseles.



O papiro Rhind é um documento importante quando nos referimos à matemática egípcia. Tudo indica, segundo historiadores, que ele foi copiado de escritos mais antigos pelo escriba Ahmes, provavelmente em 1.650 a. C, consta de 87 problemas e respectivas soluções que nos informam sobre a aritmética básica, fração, progressão, proporcionalidade, regras de três, equações lineares, trigonometria básica e cálculo de área e volume; os problemas do número 48 à 55 envolvem áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos. É por meio desse papiro e outros quatro que é possível hoje se ter algum conhecimento sobre a matemática egípcia.

Outro exemplo de cálculo de área está no *Nove Capítulos da Arte Matemática*, um manual da matemática chinesa, que, provavelmente, data 200 a. C. Mas, seu conteúdo tem datas anteriores. Na dinastia Han (206 a. C a 220 d. C.), textos literários e científicos foram transcritos devido à destruição dos livros ocorrida na dinastia anterior, de maneira que os originais são anteriores a essa data, no entanto é difícil datá-los.

É composto por 246 problemas sobre questões de mensuração de campos, agricultura, comércio, sociedades, engenharia, impostos, cálculo e equações. Está dividido em nove capítulos, cada um trata de um tema específico. Segundo Yan e Shíran (1987), o capítulo I é chamado de Mensuração de Campo e traz exemplo prático daqueles tempos em agrimensura, os tamanhos dos campos, construção de aterros, valas e armazéns, ou seja, está intimamente ligado com as necessidades do dia-a-dia daqueles tempos. Os problemas envolvem o cálculo de área de campos quadrados, triangulares, retangulares, trapezoidais, circulares e semicirculares. A unidade de medida utilizada para área é o *“fang”* que significa unidade quadrada, então, medir área significa calcular quantas vezes a unidade quadrada cabe no campo.

Segundo Boyer (1996):

> Nas obras chinesas, como nas egípcias, chama a atenção a justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. São usadas regras corretas para as áreas de triângulos, retângulos e trapézios. A área do círculo era calculada tomando três quartos do quadrado sobre o diâmetro ou um doze avos do quarado da circunferência. (BOYER, 1996, p. 134)

Podemos citar também os Babilônios, do período entre 2000 a 1600 a. C., que podiam obter áreas de campos irregulares, dividindo-os em triângulos retângulos, trapézios e retângulos, cujas áreas sabiam calcular, no entanto, a geometria era tratada de forma algébrica (EVES, 2004). Essa informação é confirmada por Neugebauer (1969), apesar de exemplos que trabalhem com objetos do ponto de vista puramente geométrico, sugere que a geometria babilônica fosse mais algébrica.

Um problema de herança típico pede a divisão de uma propriedade em forma de triângulo reto entre seis irmãos.

A civilização indiana, segundo Amma (1979), estava envolvida com métodos para transformar uma figura geométrica em outra, mas especificamente o quadrado em outra figura geométrica equivalente. A que tudo indica, por meio de decomposição e composição.

Segundo os teóricos, os *Sulbasutras* (753 a. C) são os mais importantes documentos escritos que permitem compreender os processos matemáticos utilizados nas construções de templos pelos indianos. *Sulbasutras* significa regras de corda, nele encontramos, como unidade de medida de área, a "*purusha* quadrado", derivada da unidade de comprimento "*purusha"*, que significa a altura de um homem com os braços levantados. Assim como os egípcios, os indianos utilizavam homens conhecidos na época com estiradores de corda para realizar as medições. (AMMA, 1979; SARASVATI, 1987).

Gaspar (2004) refere-se à dimensão social da matemática e ao papel dos *Subakaras*, homens responsáveis pela construção dos altares indianos:

> A dimensão histórica permite perceber alguns conhecimentos matemáticos como resultado da necessidade oriunda das atividades de trabalho de certos grupos de profissionais. Assim uma forma social da matemática surge, a saber, matemática como conhecimento básico de certas profissões ou trabalhos, como por exemplo, o trabalho dos subakaras indianos. Outro exemplo desta forma social de matemática é o conhecimento matemático desenvolvido pelos astrólogos-astrônomos da Antiguidade. Vemos assim um conhecimento matemático estritamente ligado às funções práticas como um meio de resolver problemas. (GASPAR, 2004, p. 191).

Para Sarasvati (1987), a construção dos altares exigia certos conhecimentos matemáticos:

> Uma olhada nos diferentes altares é suficiente para mostrar que tudo isto não poderia ser realizado sem uma certa quantidade de conhecimento geométrico. Quadrados tinham de ser encontrados, os quais podiam ser iguais à soma de dois ou mais quadrados dados, ou iguais à diferença de dois quadrados dados; retângulos deviam ser transformados em quadrados e quadrados em retângulos ; triângulos tinham de ser construídos iguais a quadrados ou retângulos dados; e assim por diante. A última tarefa, e não a menos importante foi o de encontrar um círculo, na zona em que pode ser igual, tanto quanto possível que a de um quadrado dado. (SARASVATI,1987, p. 105).

Então, o processo de comparar superfícies por recorte e colagem nos remete aos procedimentos utilizados por diferentes civilizações da Antiguidade – Egípcia, Babilônica, Indiana, Chinesa e Grega, na resolução de problemas envolvendo área. Os problemas mais comuns de medição baseados nos volumes de sólidos e áreas das figuras planas, na maior parte, eram calculados corretamente. Áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles foram obtidas corretamente, provavelmente por um processo de "decomposição e composição", semelhantes aos encontrados nas geometrias indiana e chinesa. (JOSEPH, 2000, p. 82).

Segundo Boyer (1996), no Papiro de Ahmes, existem problemas que utilizam o cálculo da medida de área com o uso de composição e decomposição de figuras. Nos textos indianos, datados século V ao século IX a. C., há vários problemas que solicitam transformar uma figura em outra de mesma área. Os indianos utilizavam um procedimento equivalente ao uso de “régua e compasso” para decompor a figura e construir outra equivalente em área a ela. Algumas destas transformações podem sugerir procedimentos de recorte e colagem.

Para Hogben (1958), o método utilizado nos elementos de Euclides para determinar a área de polígonos envolve a decomposição em triângulos, levando à inferência que também os gregos usavam esse princípio de composição e decomposição para determinarem a área de figuras.

Segundo Eves (2004), os pitagóricos resolviam problemas de cálculo de área de uma figura plana transformando-a em outra figura plana cuja área era conhecida. A construção de um polígono de área igual a outro dado pode ser encontrada nas preposições 42, 44, 45 do livro I, e na preposição 14 do Livro II, dos Elementos de Euclides.

Chama-nos a atenção que todos os procedimentos citados, até então, levam à transformação da figura em um quadrado de mesma área e, portanto, isso pode ter levado ao uso da palavra quadrado no resultado da medida.

A seguir realizamos uma pequena reflexão acerca da fundamentação teórica dessa atividade por julgar necessária após a apresentação de algumas dúvidas conceituais por parte das professoras colaboradoras.

2 Fundamentação matemática

Nas atividades 1, 2 e 3 trabalhamos para que o aluno percebesse que pode comparar área de superfície por inclusão, e que figuras congruentes possuem a mesma área. Podemos comparar as áreas de duas superfícies devido ao fato de a área ser uma grandeza. Dadas duas superfícies S_1 e S_2 com áreas A_1 e A_2, respectivamente, se $S_1 \subseteq S_2$, então A_1 é menor ou igual a A_2.

$$S_1 \subset S_2 \; => A_1 < A_2$$

Duas figuras F_1 e F_2 são congruentes se existe uma isometria que leva uma figura na outra. Se a figura F_1 de área A_1 recobre exatamente a figura F_2 de área A_2, então as duas figuras são ditas congruentes, isto é figuras congruentes são aquelas que coincidem por sobreposição.

Uma definição mais formal pode ser dada por: dois subconjuntos “A” e “B” do espaço Euclidiano R^n são chamados congruentes se existir uma isometria f: $R^n \rightarrow R^n$, um elemento do grupo de simetrias de um espaço euclidiano, chamado grupo Euclidiano, E(n) tal que f(A)=B. Congruência é uma relação de equivalência.

Isometria, iso = igual; metria = medida. Isometria é uma transformação geométrica no plano que preserva a distância entre pontos e a amplitude dos ângulos. Definimos uma transformação geométrica como sendo uma correspondência, um a um, entre pontos de um mesmo plano ou de planos diferentes.

Uma vez introduzido o enfoque histórico e fundamentação matemática passemos aos demais pontos da atividade.

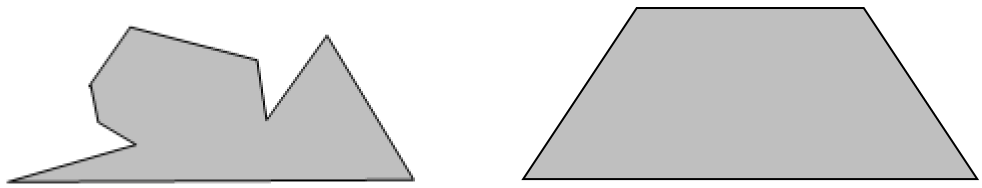
3 Objetivo da atividade

Perceber que se uma figura está contida na outra por isometria, então, a área da primeira é menor do que a área da segunda.

4 Material

Um par de figuras para cada aluno.

Figura 4 - Polígonos disponibilizados para utilização dos alunos.



5 Procedimento

1) Agrupar os alunos de quatro em quatro.
2) Entregar a cada aluno um par de figuras em um envelope (garantir a aleatoriedade da posição entre as figuras).
3) Identificar se eles conhecem as figuras.
4) Questionar qual figura tem a maior área? Pedir para os alunos justificarem a resposta.
5) Provocar no aluno a conclusão que ao compararmos duas figuras se uma delas está contida por (isometria) na outra figura (por superposição), a que a contém tem área maior do que a área da que está contida.
6) Solicitar aos alunos a escrita da conclusão a qual chegaram e o desenho ou o recorte e colagem dos pares de superfícies indicando a de maior área. O objetivo neste ponto é leva-los a perceber o atributo “estar contido” que, caso o par de figuras o possua , permite concluir que a área de uma delas é maior ou menor do que a área da outra. O esperado são desenhos ou colagens nas quais umas das figuras “está contida” por isometria na outra.
7) Pedir aos alunos que troquem seu par de figuras com as de um colega, para eles verificarem qual das figuras tem área maior e justificarem, depois que comparem suas respostas.

A proposta da atividade foi apresentada às duas professoras das turmas participantes do estudo, professoras Tatiana e Vitória. Ao final das discussões concluímos que essas questões deveriam estar detalhadas para serem entregues aos alunos. Então, juntamente com essas professoras, adequamos tal atividade para trabalhar em sala conforme exposição a seguir.

Acordamos que as demais seriam trabalhadas da mesma forma, ou seja, a proposta de atividade era apresentada às professoras, que realizavam as adequações necessárias ao material apropriando-o aos alunos. Após essa reestruturação voltávamos e discutíamos com o professor orientador e com a Professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar buscando a garantia de que o fundo histórico havia sido conservado, assim como, o percurso epistemológico para a construção do conceito de área. Por fim, os alunos eram localizados nas atividades, ou seja, eram apresentados a situações que não sabiam resolver, mas sabiam o que estavam fazendo e onde deveriam chegar com suas ações, pois eram orientados pela mediação da professora e pela própria atividade.

Após os primeiros momentos de trabalho com os alunos foi necessário realizarmos outras adequações quanto à estrutura das questões.

6 Atividade elaborada para orientar a ação do aluno

A fundamentação histórica foi suprida, pois esse saber foi apropriado pela professora mediadora do processo do ensino e aprendizagem**:**

Você recebeu um par de figuras que te ajudará resolver as questões a seguir.

1) Você conhece essas figuras?

2) Você conhece algum objeto que tenha a forma dessas figuras?

3) Qual das figuras dadas tem a maior área:

    a) Por visualização?

    b) Por sobreposição?

    c) Compare os resultados.

4) Cole aqui essas figuras indicando qual tem a maior área. Escreva a sua justificativa.

5) No papel dado desenhe e recorte duas figuras de áreas diferentes, mas que ao seu amigo possa parecer que elas tenham áreas iguais. Indique qual figura para você tem a área maior, depois troque esse par de figuras com um colega.

6) Cole aqui esse par de figuras. Qual figura tem a maior área?

7) Escreva a que conclusão podemos chegar ao analisarmos as áreas desses pares de figuras.
8) Compare a resposta do seu colega com a sua.

7 Análise

Os procedimentos dessa atividade não têm origem na concepção histórica, entretanto tomamos como decisão pedagógica de inicarmos a sequência por ela, uma vez que desejamos que os alunos, primeiro, estabeleçam relações para depois medir. Já que, medir é relacionar medidas de mesmo tipo. Então, a sequência tem esse direcionamento.

Nas análises preliminares consideramos que os alunos poderiam ter dificuldades nas questões cinco e sete. Na primeira, a dificuldade para resolver a questão poderia ser, além da identificação da figura de maior área, em decorrência de parecer confuso, o não entendimento do enunciado dado: figuras de áreas diferentes, mas que por visualização lhes parecerem iguais. Então, optamos por explicar bem o texto sem apontar-lhes nenhum exemplo com figuras, favorecendo, assim, a autonomia e criatividade de suas produções.

Quanto à questão número 7, ficou definido que a atitude mais oportuna era explicitar o significado de “analisar” e de “concluir” a partir de tal análise, pois os alunos não estavam acostumados a esse tipo de atividade, ou seja, analisarem os seus procedimentos na resolução de situações, formularem conclusões e expressá-las por meio da escrita.

Ponderamos a possibilidade da mudança dos enunciados. A professora Vitória defendeu a permanência de tais enunciados como fonte de reflexões, levando os alunos a interpretarem os enunciados. Continuou argumentando que os livros didáticos, com receio do aluno não compreender a linguagem, apresentam perguntas muito simples e diretas, o que contribuía para o empobrecimento do seu vocabulário, tirando-lhe a oportunidade de questionamentos e interpretações.

A professora Tatiana concordou com tais argumentos e defendeu que o aluno já estaria refletindo desde o enunciado. Para a professora Vitória, uma das dificuldades dos alunos na resolução de algumas atividades era a escassez de vocabulário: “a linguagem corrente é pouco utilizada na escrita em aula de matemática, precisamos mudar isso”. Essa discussão fortaleceu nossa decisão.

Acordamos, então, pela permanência dos enunciados, quando necessário, orientaríamos, favorecendo a aprendizagem e a prática da leitura de textos matemáticos. Ao longo da aplicação da sequência fomos trabalhando a dificuldade do aluno em interpretar corretamente um enunciado e sua inexperiência em produzir por escrito a explicação dos procedimentos adotados nas resoluções das situações. ´

Nesse trabalho não separamos as análises das questões por turma, procedemos como se tivéssemos trabalhado em uma única turma.

As figuras eram de cores variadas para evitar que os alunos relacionassem a grandeza área com a cor. Essa troca poderia ser considerada uma variante pelos alunos.

Questão 1- Você conhece essas figuras?

As respostas dos elementos de um mesmo grupo eram iguais, às vezes mais de um grupo exibia a mesma resposta. Respostas apresentadas pelos alunos:

“A figura verde é um trapézio”.

“A figura rosa é um trapézio recortado”.

“A figura verde é um trapézio”.

“A outra não tem nome específico”.

“A figura azul não tem um nome adequado”.

“Eu não sei o nome de nenhuma”.

“Eu só conheço o trapézio”.

“Ele é um quadrilátero”.

“A figura rosa é chamada de quadrilátero e também de trapézio”.

“A verde é um trapézio isósceles”.

Essa última resposta foi expressa por três alunos do mesmo grupo, mas apenas um escreveu a palavra ‘isósceles’ corretamente. Perguntamos àqueles alunos o que era triângulo isósceles, apenas um soube explicar.

Aconteceram muitos casos nos quais a resposta era dada pelo grupo, mas nem todos os participantes sabiam explicitá-la. Em razão desse fato, consideramos de importância fundamental a mediação da professora nos grupos para que a aprendizagem fosse efetiva, evitando a imitação, e a cópia sem reflexão. A afirmação: “um trapézio cortado” não era esperada por nós. Quando questionado o aluno explicou: “quando coloquei uma em cima da outra descobri que as figuras eram iguais e uma foi sendo recortada”.

As respostas dadas pelas duas turmas apontam que os alunos têm conhecimentos do campo geométrico (VERGNAUD, 1996).

Questão 2 - Você conhece algum objeto que tenha a forma dessas figuras?

Para o trapézio responderam: barco, vaso de flor, cabo de makita, pista de skate, telhado, chapéu, banheira, uma tigela que tem lá em casa, ferro de passar roupa, saia, escova de sapato. Para a outra figura dois grupos responderam caracol e montanha.

Essa atividade nos permitiu verificar que os alunos reconhecem as formas geométricas presentes no cotidiano e identificam algumas características geométricas do trapézio. Quando questionados como um dos objetos por eles citados parecia com o trapézio, eles desenhavam no ar tal objeto. A professora disse a eles que a pista de skate tinha forma de "u". Um aluno respondeu: "se olhar de frente para o 'u' dá para imaginar um trapézio passando um lado em cima fechando o u". Perguntamos se a turma concordava com ele, se mais alguém entendia a pista de *skate* como trapézio, a resposta foi sim. As respostas dadas para a questão dois nos levam a considerar que apesar da não terem a definição matemática para o trapézio, eles reconhecem intuitivamente existência das retas paralelas entre si na formação do trapézio.

Questão 3 - Qual das figuras dadas tem a maior área: a) por visualização? b) por sobreposição? c) Compare os resultados.

Devido à possibilidade dos alunos executarem movimentos nas figuras provocando mudança de posição das mesmas no plano, ocorreu o previsto, a maioria dos alunos usou a sobreposição. No entanto, ninguém explicitou a resposta dada, pois, normalmente, não são instigados a analisar e a justificar suas ações, e a pensarem nos conhecimentos mobilizados para as tomadas de decisões.

Alguns seguravam as figuras no alto da cabeça, uma sobre a outra e afirmavam: *"eu nem precisava por uma em cima da outra eu já sabia quem era maior".* Quando questionados como sabiam, as respostas eram convincentes, *"Eu tô vendo"!* E os semblantes tinham uma expressão desafiadoramente alegre e indagadora: eu vejo o óbvio, então, para que justificar? Outro aluno mencionou que tivera dúvida ao visualizar e para este a sobreposição, por sua vez, o ajudou ter certeza qual das figuras tinha a maior área. Como certeza, questionaram o que significava sobreposição.

A reflexão foi orientada até surgirem respostas do tipo "sobra mais espaço quando coloco uma em cima da outra, então a azul é maior". A sobreposição foi um procedimento para constatação que a figura de menor área está inclusa na de maior área. Foram feitas novas mediações para que se esclarecesse aos alunos a necessidade de expressar o atributo da figura que está sendo medido. As professoras precisaram ser recorrentes nessa informação durante muito tempo. Quando as respostas não eram completas, perguntávamos qual atributo estava sendo medido? São atividades e reflexões que o ensino brasileiro não faz regularmente, pois ao tratar do planejamento pedagógico do trabalho com área inicia-se, diretamente com a medida, por meio da contagem de unidades de medidas padronizadas em quadrados, em especial, em malha quadriculada.

Sobre os aspectos acima mencionados Duval (1994) comenta que ao utilizar a apreensão perceptiva os alunos poderão interpretar as figuras por meio da sobreposição das mesmas para solucionar o problema proposto. Nas demais questões os alunos também utilizaram da apreensão perceptiva para evidenciar as diferenças entre as figuras, concebendo que aquela que tem mais área é a que sobra espaço e a menor é a que cabe dentro da outra.

Questão 4 - Cole aqui essas figuras indicando qual tem a maior área. Escreva sua justificativa.

Figura 5 - Colagem de uma figura embaixo da outra.

Figura 6 - Colagem por sobreposição.

Dos 56 alunos participantes, 7 colaram uma figura sobre a outra, a maioria uma abaixo da outra.

As respostas dadas se assemelhavam com estas:

"A verde é maior porque quando eu coloco a azul em cima não cobre a verde toda".

"A maior área é do trapézio, porque a azul foi recortada".

"Por visualização a área do trapézio é maior".

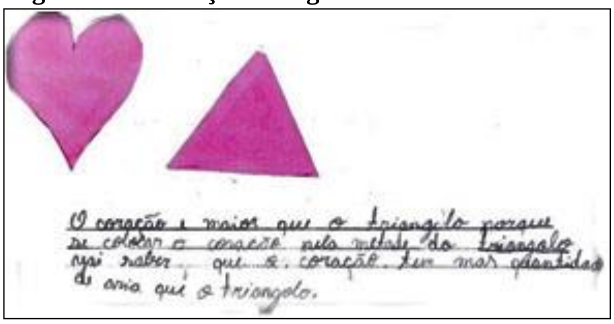
A maioria justificou que tal figura é maior porque sobra espaço quando outra é colocada em cima dela. Esse raciocínio é caracterizado matematicamente por: são dadas duas superfícies S_1 e S_2 com áreas A_1 e A_2, respectivamente, se $S_1 \subseteq S_2$, então A_1 é menor ou igual a A_2.

Ao propormos essa atividade pensamos em todas as possibilidades nas quais os estudantes poderiam realizar as colagens. Então, nenhuma atuação nos surpreendeu, porém a observação das colagens nos ajudou a identificar que três alunos ao responder as questões consideravam o comprimento e não a área, uma vez que ao julgarem as áreas, por comparação, apoiaram-se, apenas em uma das dimensões lineares da figura, como exemplo desse fato temos a produção da Figura 5 para a qual o aluno afirma que a azul é maior. Isso nos levou a conjecturamos se tal fenômeno, dentre outras possibilidades, está relacionado ao fato do aluno desenvolver sua análise centrado em um único atributo da constituição física, não coordenando a existência de mais de uma grandeza. Assim, essa confusão conceitual entre o comprimento e área se apesentará em outras atividades?

As questões 5, 6, 7 e 8 foram analisadas conjuntamente. Essas questões têm por objetivo evocar no aluno os mesmos procedimentos adotados, passo a passo, pelas questões anteriores, uma vez que os conhecimentos dos alunos são moldados pelo domínio progressivo das situações, nas quais são inseridos e podem ser designados por meio do teorema em ação e do conceito em ação (VERGNAUD, 1996). Procuramos identificar nas respostas alguns teoremas em ação, sendo estes os conhecimentos utilizados pelos alunos no tratamento das situações propostas, sendo estas pertinentes ou não na resolução da atividade.

Expomos algumas afirmações dadas em relação às figuras desenhadas, discutidas com o colega e depois coladas no papel. A questão 6 solicitou para depois de colar as figuras responder qual tinha a maior área. Essas soluções envolvem as questões 5, 6 e 7.

Figura 7 - O coração é a figura de maior área.



"O coração é maior que o triângulo, porque se colocar a metade do coração na metade do triângulo vai saber que o coração tem mais quantidade que o triângulo".

"Eu cheguei a essa conclusão medindo, coloquei uma dentro da outra", (o aluno usa o termo medindo e faz medição comparando a medida das áreas).

"A porta é menor do que o quadrado, eu cheguei a essa conclusão por que eu medi as duas formas".

"A figura de menor área cabe dentro da outra".

Figura 8 - O triângulo tem a maior área.

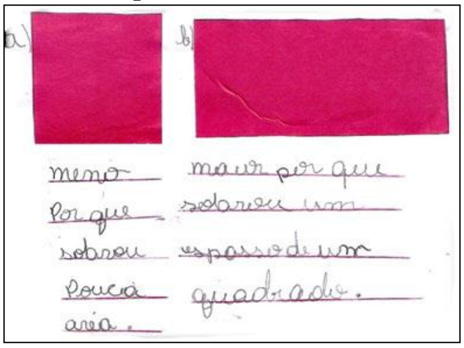
"Retângulo é maior porque eu medi o triângulo com o retângulo, retângulo é maior e triângulo é maior".

"A maior área é a que cobre a outra e a menor é que cabe dentro da outra".

Figura 9 - A figura de maior área é o quadrado.

A Figura 9 representa um grupo de alunos que além de responder a pergunta da questão: qual figura tem a maior área? Mostram como chegaram a essa resposta.

Figura 10 - A área do retângulo é duas vezes a do quadrado.



A resposta apresentada na figura 10 não atende ao enunciado da questão 5, quando esta solicita que os desenhos devem sugerir que as áreas são tão próximas que por visualização poderíamos afirmar que as figuras têm áreas iguais. Ao ser questionada a aluna disse que a maior é duas vezes maior, pois ela fez dois retângulos, sendo que um foi dividido ao meio. Quando ela afirmou que sobrava um espaço de um quadrado ela estava medindo a área da figura maior com a figura menor. Para a aluna, ao dobrar o retângulo ao meio ele ficou parecendo um quadrado.

Utilizamos essa resposta (Figura 10), também, para discutir com a turma a importância da resposta dada estar de acordo com o que foi solicitado no enunciado, e ao afirmarmos que uma figura é maior que a outra devemos explicitar a que grandeza estamos nos referindo.

Chamamos a atenção para a maneira como eles generalizavam as conclusões particulares de uma dada situação. “Como dividir a área do retângulo ao meio dá um quadrado”. Um aluno perguntou: “mas, não dá?”. Então, entregamos um retângulo qualquer aos alunos e pedimos para eles dividirem ao meio formando dois quadrados de áreas iguais. Uns conseguiram e outros não, assim discutimos as condições para que um retângulo dividido ao meio originasse dois quadrados de mesma área.

Questão 7 – Escreva a que conclusão podemos chegar analisando as áreas desses pares de figuras.

Apresentamos algumas respostas expressadas para a questão

“A figura maior é a que sobra mais área”.

“A menor é que cabe dentro da outra”.

“A maior é a que não cabe dentro da outra”

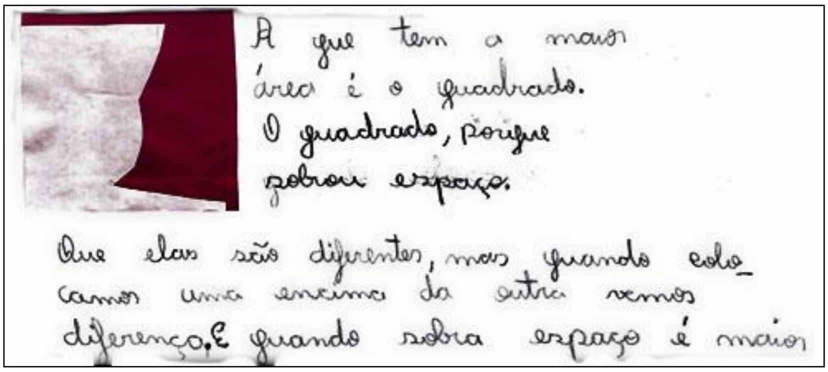
“A maior é a que cobre a outra figura”.

“A figura de menor área cabe dentro da outra”.

“A maior ocupa mais espaço”.

“A maior é que cobre a outra e a menor é que cabe dentro da outra”.

Figura 11 - O quadrado tem área maior.



“Colocando uma em cima da outra sobra mais espaço”.

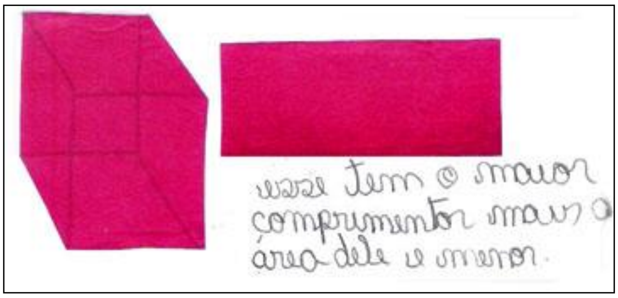
“Podemos perceber que quando medimos as figuras uma é maior que a outra, porque sobra mais espaço”.

“Toda vez que coloco uma figura em cima da outra a que sobra espaço é a de maior área”.

“Coloco uma em cima da outra para saber qual é maior”.

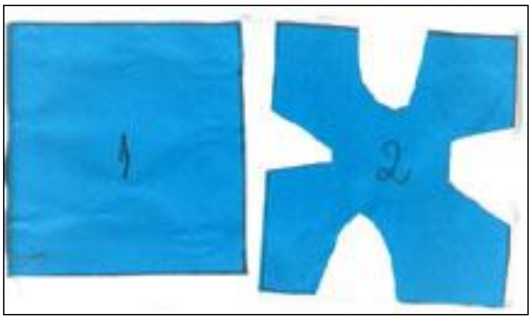
“Uma sobrou espaço e a outra não”.

Figura 12 - O retângulo tem o maior comprimento.



"Esse tem comprimento maior, mas a área dele é menor". Esta foi à única resposta na qual os alunos mencionaram comprimento.

Figura 13 - O quadro recortado tem área menor.



"Porque uma figura está recortada, a outra não".

"A área do quadrado é maior porque eu recortei o outro quadrado".

Teorema em ação

A figura maior é a que tem mais área.

A figura menor cabe dentro da outra figura.

Para saber qual figura tem maior área temos que comparar a área das duas figuras.

Medir área é comparar área.

A figura que tem mais espaço tem a área maior.

As figuras têm mesma área, quando cortamos um pedaço de uma figura ela fica com menor área.

A ideia da atividade era que cada aluno recortasse e passasse para que o colega colasse as figuras e respondesse a relação entre as áreas das mesmas. O aluno que havia recortado as figuras deveria concordar, ou não, com a resposta do amigo, justificando a resposta. No entanto, os alunos preferiram que a atividade fosse verbal para que, ao final, as figuras voltassem para quem as havia construído, então, aquele aluno colaria as em seu caderno e justificaria sua resposta por escrito. Concordamos, considerando que cada um gostaria de ficar com sua produção.

Esses teoremas nos apontam os conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução das situações. Tanto a visualização quanto a sobreposição foram procedimentos importantes para a elaboração de tais teoremas. Para Duval (1994), a visualização é como um processo que examina o espaço da representação, da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva.

Na turma da professora Vitória, uma aluna identificou que uma das figuras era o trapézio e a outra era um trapézio recortado. Na turma da professora Tatiana, não aconteceu nenhuma menção parecida, no entanto, na questão 4, há referências de que a área de uma é maior que a área outra pelo fato de estar recortada. E na questão 5, nas duas turmas, quando solicitamos que recortassem duas figuras de áreas diferentes, mas que, por visualização, pudessem ser consideradas como iguais, foi comum recortarem duas figuras iguais e retirarem um pedaço de uma delas.

Figura 15 - Paralelogramo e retângulo.

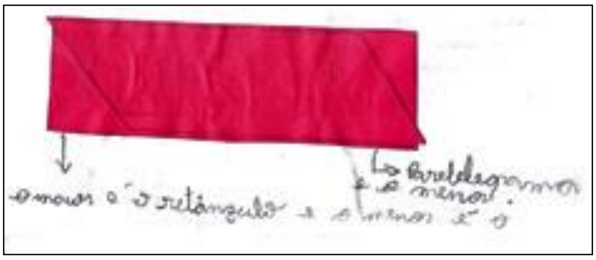


Figura 14 - Cilindro e retângulo.

Um aspecto importante a ser salientado foi o compromisso e envolvimento dos alunos na resolução das atividades, pois tudo era muito bem feito, os alunos procuraram caprichar na escrita e faziam questão de colorir as figuras. Esse comportamento, com certeza, é consequência do contrato didático realizado em sala de aula entre as professora e seus respectivos alunos. Contudo, uma variável difícil de administrar foi a ausência do aluno durante a aplicação da sequência. Quando um estudante faltava, tínhamos que retomar alguns conhecimentos trabalhados na aula anterior a fim de possibilitar que ele acompanhasse a atividade do dia.

8 Conclusões

Os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao tema em estudo, pois demonstraram avanços conceituais no que diz respeito aos seguintes aspectos: a comparação de áreas de figuras por sobreposição; a utilização e conversão de registros de representação: figural; língua natural; linguagem matemática; a ordenação das informações que levam à elaboração de conclusões e generalizações; e a elaboração das informações a fim de produzirem conclusões.

As respostas apresentadas pelos alunos nos levam a identificar variáveis que, ao serem analisadas, permitem-nos conceber mudanças de valores no processo de resolução dos problemas por eles. Para Verganaud (1996), é por meio da resolução de diferentes problemas que um conceito adquire sentido para o aluno. Na atividade em questão, colocamos os alunos em situações de diferentes representações, a fala, a escrita e o desenho, as três expressaram a constância do argumento: a figura recortada tem área menor.

Enfim, a comparação de áreas pode ser feita por meio da decomposição de uma figura e equivale a um procedimento de recorte e colagem. Essa atividade não teve como base a concepção histórica, pois não conhecemos referência, na história antiga, na qual, por recorte e colagem, fosse afirmado que uma área era maior ou menor. A decisão pedagógica foi de iniciar os alunos na construção do conceito de área por meio da decomposição e composição, que é sugerida a partir de procedimentos históricos para cálculo de área. Essa atividade propiciou a percepção dos conhecimentos prévios do aluno.

Além disso, o tratamento dado às situações pelos estudantes anteciparam conhecimentos previstos para próxima atividade cujo objetivo era levá-los a perceber que, se uma figura é obtida de outra, retirando parte da primeira, a segunda está contida na primeira e, ainda, a área da segunda é menor do que a área da primeira. Tal antecipação aponta a utilização de procedimentos, por alguns alunos, que ressalta a relação existente na história entre o processo de composição e decomposição e a determinação de área.

Boa parte dos estudantes identificou essa relação pela sobreposição, o que era esperado, uma vez que a atividade corresponde a uma comparação direta entre as figuras, sem a utilização de uma unidade exterior a elas. Então, o procedimento de medir era essencialmente visual e intuitivo ou por sobreposição.

Como já analisado por Duval (1994), nossos sujeitos também utilizaram a apreensão perceptiva na interpretação das figuras, por meio da sobreposição das mesmas, e assim, evidenciaram as diferenças entre as áreas das figuras dadas. Ficou, então, institucionalizado com os alunos que a figura de maior área é a que sobra espaço e a menor é a que cabe dentro da outra. Os filtros para esse conhecimento foram a sobreposição, a forma visualizada e desenhada no espaço, a caracterização de objetos já conhecidos e o recorte de pequenas porções da figura.

ATIVIDADE 2 - FORMAR UMA FIGURA A PARTIR DA RETIRADA DE PARTE DE UMA FIGURA DADA

Essa atividade tem os mesmos pressupostos e fundamentação da Atividade 1.

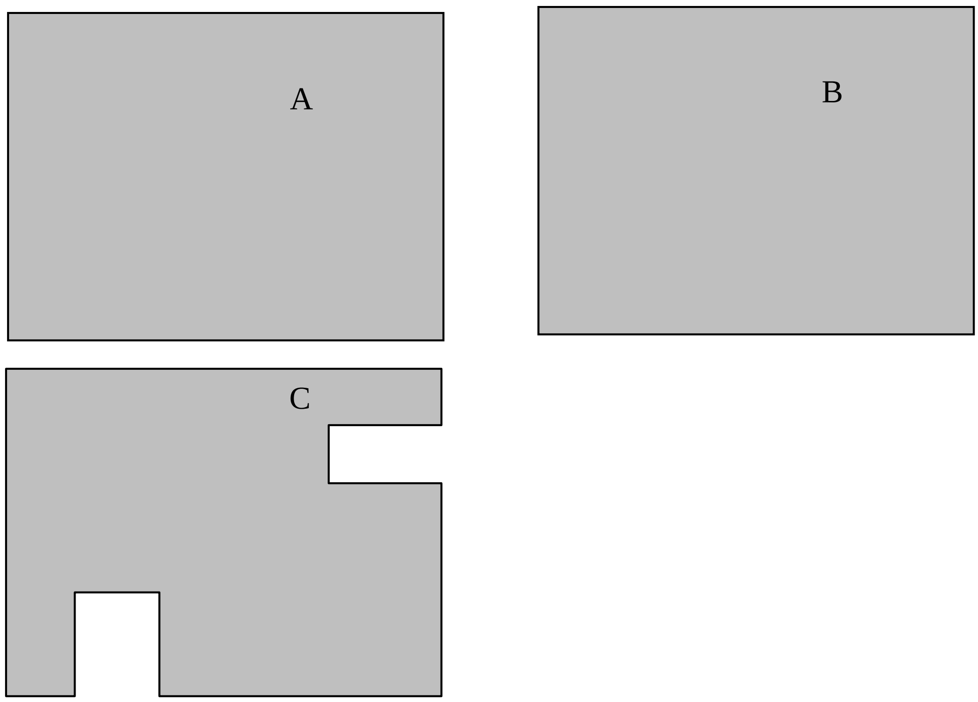
1 Objetivo

Perceber que, se uma figura é obtida da outra, retirando parte da primeira, a segunda está contida na primeira e a área da segunda é menor do que a área da primeira.

2 Material

Três figuras conforme o desenho abaixo.

Figura 16 - Material da atividade 2.



4 Procedimento

1) Agrupar os alunos de quatro em quatro.
2) Entregar a cada aluno as três figuras.
3) Identificar se eles conhecem as figuras.
4) Questionar se as áreas são iguais ou diferentes. Caso as áreas sejam diferentes, qual delas têm a maior área? Justificar as respostas.
5) Questionar como obter a figura C a partir da figura A.
6) Provocar no aluno a conclusão de que:
   a) Se compararmos duas figuras, e se uma cobre exatamente a outra, então, as duas têm a mesma área.
   b) Se recortamos parte de uma figura, a figura resultante tem área menor do que a primeira.
7) Pedir para cada aluno que desenhe uma figura e recorte. Em seguida, eles devem construir, a partir da primeira, uma outra figura que tenha a mesma área e outra que tenha área menor.

5 Análise

Essa atividade envolve o conceito de retângulo, visualização e sobreposição.

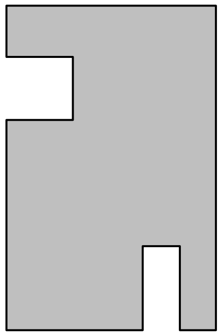
Consideramos que os alunos, principalmente a partir dos procedimentos por eles adotados na atividade anterior, não apresentariam dificuldades em perceber que as figuras têm áreas iguais quando uma cobre exatamente a outra e, quando recortamos parte de uma figura, a figura resultante tem área menor do que a primeira.

As nossas análises buscam explicitar os teoremas e conceitos em ação produzidos pelos alunos na construção do conceito de área, tendo a história da matemática como elemento gerador de atividades propícias à produção dos invariantes operatórios.

Ao elaborarmos a atividade, consideramos que os alunos não teriam dificuldades em visualizar que uma figura foi obtida retirando parte de outra figura; no entanto, poderiam ter certa dificuldade em concluir que, por isso, uma estava contida na outra, sendo menor a figura da qual foi retirada uma parte. Porém, na resolução da atividade, os alunos já expressaram essa análise sem nenhuma dificuldade.

Questão 1 - Você recebeu três figuras que te ajudarão resolver as questões abaixo. Você conhece essas figuras?

Figura 17 - Casa de dois andares.



"Sim, são retângulos".

"Dois retângulos a outra é um polígono".

"Conheço duas figuras, dois retângulos e uma casa de dois andares" (ao olharmos sua colagem compreendemos a afirmação da aluna).

"Sim, três retângulos". Ao questionarmos os alunos que responderam três retângulos, eles explicaram que em uma só faltavam dois pedaços, mas era um retângulo.

"Sim, conheço A, B a figura C não vi".

"Sim, A e B tem quatro lados é o retângulo".

"Sim A e B tem quatro lados é um quadrilátero".

"Sim, tem vários objetos parecidos com o retângulo".

"Sim, mesa, caixa, livros, armário, quadro, é retângulo".

"Só A e a B, elas são retângulos, mas a C tem o formato de um prédio de uma só janela".

"Sim, porque ela tem quatro lados e parece com os objetos que tem em casa".

"Sim, eu já vi muitos objetos com as características da A e B".

"Sim, elas parecem com várias coisas como quadro, mesa, mapa, etc".

Questão 2 - As figuras dadas têm áreas iguais ou diferentes? Caso as áreas sejam diferentes, qual delas tem a maior área: a) por visualização? b) Por sobreposição? c) Justifique sua resposta.

Ao compararem as áreas por visualização, as respostas dadas foram iguais às de quando comparadas por sobreposição:

"A e B tem o mesmo tamanho e C é diferente, é menor".

"A área da figura A é igual a B e C possui menor área".

"A e B são iguais e a C é diferente de A e B".

"A=B≠C. a C tem área menor, a A e B têm área maior".

"A é igual a B e C é diferente porque tem a área cortada e tem menos espaço".

"A e B é maior que C porque sobra mais área".

"A e B são iguais, C é diferente porque tem cortes por isso a sua área é menor".

Justifique sua resposta.

“Eu coloquei a amarela em cima da azul e sobrou espaço, por isso minha, na minha opinião, a amarela por sobreposição é a que tem menor área”.

“Eu coloquei a amarela C em cima da branca B e sobrou espaço e quando coloquei a azul abaixo da B não sobrou espaço”.

“Colocando uma figura sobre a outra cheguei a conclusão que a figura A e B são do mesmo tamanho ficando maior que a C”.

“As áreas maiores são A e B, porque C tem uns pedaços de área faltando”.

“É só colocar uma em cima da outra”.

“Quando eu coloquei a C em cima da A e B, ela era menor porque a área não estava toda completa”.

“Colocando uma em cima da outra dá para ver que A e B são do mesmo tamanho”.

“A menor é a figura C por sobreposição eu soube que a figura C é menor porque ela sobra espaço”.

“Por visualização elas são do mesmo tamanho só muda que a figura C tem duas partes da área faltando”.

“A letra A é de maior largura”. Esta resposta demonstra que o aluno confunde o conceito de área com o de comprimento.

“A figura C é diferente por que medimos, observamos e vimos que a C é recortada”.

“A é igual a B, mas C tem uma área menor que A e B”.

“Porque quando coloco uma em cima da outa vejo que a A e B têm mais área”.

“Eu coloquei A em cima da B e C em cima da B e vi que C tem a área menor”.

“A e B tem área maior e C tem menor área porque tem menos espaço”.

“A e B são iguais, pois se colocar uma sobre a outra as duas tem as áreas iguais. Agora se colocar A, B, C uma em cima da outra a C tem a menor área”.

“Quando colocamos uma figura em cima da outra vemos que A e B são = a figura C é diferente porque foi recortada e ficou com a área menor”.

A partir das respostas, questionamos que atributo da figura estava sendo medido, a que atributo se referia. Por exemplo: “A é igual B” ou “a figura A é igual a B”. Como estamos trabalhando com área, deveríamos dizer que “a área da figura A é igual à área da figura B ou as áreas das figuras A e B são iguais”. Eles respondiam que sabiam que era a área, então, não precisavam escrever o tempo todo. Explicamos que eles sabiam, mas nós, que estávamos lendo, não sabíamos o que eles estavam medindo. Um respondeu que sabíamos sim, pois estava escrito no enunciado.

Então, escrevemos algumas frases comparando os ângulos, os lados e as cores, para que os alunos compreendessem a importância de especificar o que na figura está sendo comparado. No entanto, sabemos a importância de trabalharmos essa questão ao longo da sequência para que o aluno realmente compreenda e se aproprie desse procedimento.

Explicamos aos alunos que as pessoas, na maioria das vezes, não acompanham suas escritas, nesse sentido, era importante que eles se fizessem claros em sua exposição textual, a fim de que seus leitores, realmente, compreendessem o que desejavam informar. No entanto, compreendemos as argumentações, pois o pensamento é muito particular, todo nosso, e, para comunicá-lo a terceiros, é necessário utilizarmos um código de linguagem comum e que, às vezes, não faz parte, por completo, do nosso domínio de linguagem, seja oral ou escrita. Além disso, a linguagem escrita parece bem mais difícil que a oral para os nossos sujeitos. Por isso, consideramos importante que o aluno expressasse, por escrito e verbalmente, seu pensamento e suas operações mentais, pois segundo Vergnaud (1996), a linguagem é importante na construção do conceito:

> A linguagem tem, antes de mais, uma função de comunicação, e a aprendizagem da matemática é uma aprendizagem muito fortemente socializada. Mas essa função de comunicação não pode se exercer utilmente a não ser que se apoie nessa outra função de representação. (...) A linguagem e os símbolos matemáticos desempenham, pois, um papel relevante na conceitualização e na ação. Sem os esquemas e as situações, permaneceriam vazios de sentido. (VERGNAUD, 1996, p. 191).

Para Vygotsky (1993), o pensamento e a linguagem são funções diferentes, com raízes genéticas diferentes, mas profundamente interligadas, e o significado da palavra é uma unidade resultante do ponto de cruzamento do pensamento e da fala no pensamento verbal, cuja unidade é o significado da palavra. Tal significado desenvolve-se num processo histórico cultural.

Transitar de uma representação para a outra não é uma tarefa fácil, exige principalmente elaboração de situações didáticas ricas do ponto de vista da aprendizagem, fundamentadas nas dificuldades relativas das tarefas cognitivas, dos obstáculos habitualmente enfrentados, do repertório de procedimentos disponíveis, das representações simbólicas possíveis e dos esquemas formados anteriormente pelo sujeito (VERGNAUD, 1990).

Por conseguinte, ao longo da sequência de atividades, percebemos os esquemas em ação produzidos pelos alunos, uma vez que cada atividade era importante para desempenho geral, ou seja, para a construção do conceito de área e procedimentos para o seu cálculo.

Questão 3 - É possível obter a figura C a partir da figura A? Como?

“Sim, se cortarmos A ela ficará com o mesmo tamanho de área da letra C”.

“Sim, colocando uma figura sobre a outra e cortando a figura A do mesmo jeito de C”.

“Sim, recortando ela no meio”. - Segundo a professora, o aluno que deu essa resposta apresentava déficit de atenção. Ele não soube explicar o motivo de recortar a figura ao meio. Acreditamos que ele tenha dado uma resposta aleatória. Ele é um aluno dedicado, tem um ritmo próprio, diferente do da turma, mais lento, no entanto, ele fazia as atividades, não gostava de dar suas respostas ao grupo, mas exigia nossa presença, em sua mesa, para conferir sua resposta.

“Sim, cortando a figura A igual a figura C”.

“Sim, cortando dois pedaços da figura A”.

“Sim, é só cortar no mesmo lugar onde C está cortada”.

“Sim, cortando A igual a C e ficamos com as áreas iguais”.

“Sim, pode marcar e cortar do jeito da C”.

“Não, porque a letra A não cabe dentro da letra C”. Ao ser questionado, o aluno disse que tinha entendido que era para transformar a figura C na figura A.

“Sim, é só recortar no formato da figura C”.

“Sim, é só marcar e depois cortar a figura A”.

“Sim, é só marcar o local que está faltando e cortar a figura A”.

“Sim, marca a figura A e recorta para ficar igual a figura C”.

“Sim, é possível marcar e cortar a figura A”.

“Pode recortando a C igual à figura A” – Inicialmente, a resposta dada estava correta, mas o aluno apagou e colocou as letras na ordem do enunciado. Refletimos com ele, para que compreendesse o enunciado da questão.

Questão 4 - Ao compararmos as áreas das figuras A e B, a que conclusão podemos chegar?

“Que elas têm a mesma área, porque quando colocamos uma em cima da outra cobre toda a área”.

“A e B tem áreas iguais”.

“Podemos concluir que a figura A tem a mesma área que a figura B pois coloquei uma sobre a outra não sobrou espaço”.

“Eu cheguei a conclusão que quando coloco uma em cima da outra a área é do mesmo tamanho”.

“Podemos chegar a conclusão que a A e a B têm a área do mesmo tamanho”.

“A conclusão que cheguei é que a B é do mesmo tamanho que A”. Discutimos essa resposta na sala, perguntando “tamanho do quê?” Eles responderam que era da área. Então, mostramos a resposta apresentada acima.

“A conclusão que podemos chegar se compararmos as áreas das figuras A e B é que as duas são da mesma forma, do mesmo tamanho e são retângulos”.

“Podemos chegar a conclusão que a A e B são dois retângulos do mesmo tamanho de área”.

Questão 5 - O que podemos concluir ao compararmos as áreas das figuras A e C?

“A área de A está inteira, a C foi recortada”.

“Eu sei que não são iguais porque C é recortada”.

“Podemos concluir que a C tem área menor que A, porque eu coloquei uma em cima da outra”.

“Colocando uma em cima da outra o tamanho não é igual porque a C tem corte”.

“A C está faltando área e a A tem área maior”.

“As áreas não são do mesmo tamanho porque a C é cortada”.

“Não são iguais porque a letra A tem a área maior e C tem a área menor porque a letra C é cortada e a A não é cortada”.

“A está completa e a C ficou faltando área”.

“A é maior área que a figura C porque coloquei uma sobre a outra e sobra área”.

Duas alunas responderam que elas são iguais em área e em tamanho.

“Tá faltando área na letra C para completar”.

“A figura A é maior do que a figura C. Se colocar a figura C em cima da figura A dá parar perceber qual é a maior e qual é a menor”.

“Que a letra A é maior que a letra C”.

“Que a letra A não tem nenhum furado, mas a letra C tem lugares que estão cortados”.

“Podemos chegar a conclusão que a figura C tem a área menor que a A”.

“Eu concluir que área de C é a menor porque eu coloquei uma em cima de A a C e está cortada”.

“Podemos concluir que a letra A é maior que a C”.

“Que colocada uma em cima da outra ficam diferentes”.

“A figura A tem maior área”.

“A área da figura A está inteira de C foi cortada”.

“Podemos observar que C tem menor área que A”.

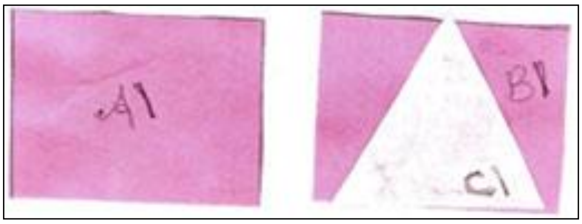
Questão 7 - Desenhe e recorte uma figura qualquer no papel dado. A partir dessa figura, construir uma que tenha a mesma área e outra que tenha área menor.

Apresentamos alguns exemplos que representam todos os grupos de possibilidades de construções identificados nas duas turmas:

Figura 18 - Triângulos.

A maioria dos alunos utilizou um polígono para a resolução; surpreendeu-nos a variedade: triângulos, retângulos, quadrados, e círculos.

Figura 19 - Triângulo sobre o retângulo.



Esse aluno colou a figura C sobre a B, para que pudéssemos entender que a área de C era igual à área de B, retirando a área de dois triângulos (Figura 19 - Triângulo sobre o retângulo.

Alguns alunos escreveram os seus procedimentos, mesmo que isso não tivesse solicitado. Esse aluno (Figura 20) escreveu: “A é igual a B e o C é menor que A e B. Porque eu coloquei um sobre a outra e o C é menor”.

Figura 20 - Retângulo recortado.

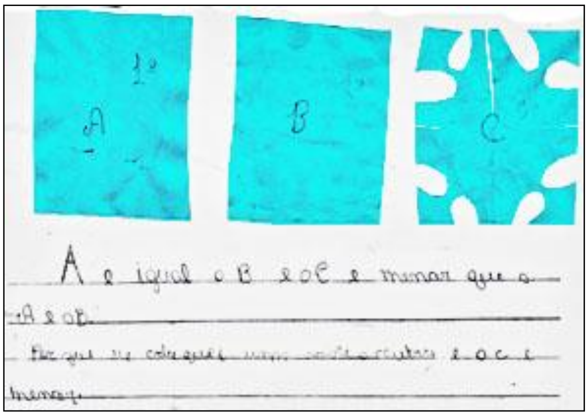
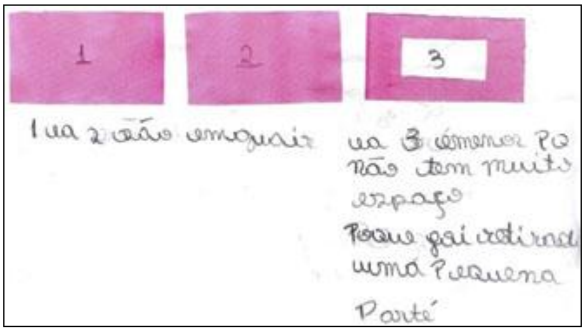
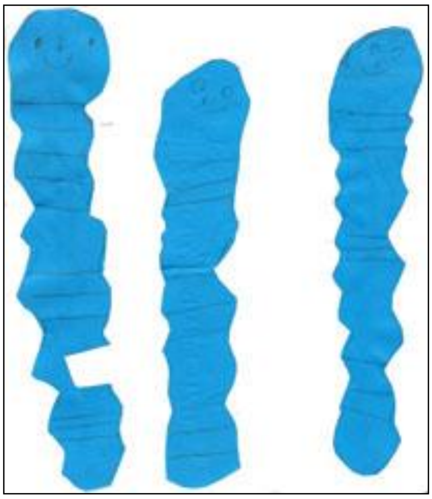


Figura 21 - Retângulo vazado.



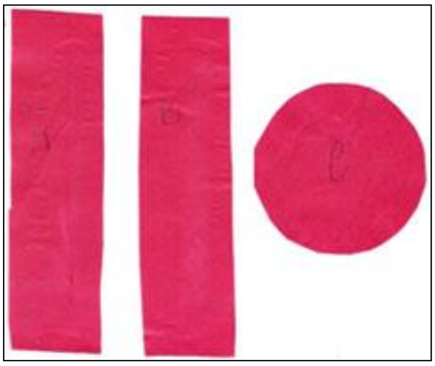
“1 e a 2 são iguais e a 3 é menor. Pq não tem muito espaço. Porque foi retirado uma pequena parte”.

Figura 22 - Minhocas.



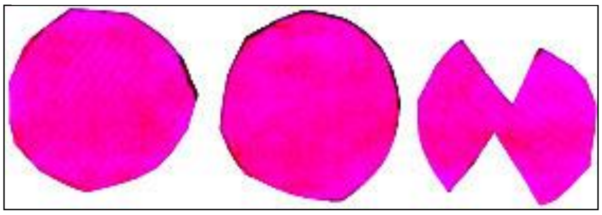
Esta construção trouxe discussões interessantes ao grupo. Intencionalmente, o aluno deixou a primeira figura com mais comprimento, mas retirou um pedaço em forma de retângulo. Segundo o aluno que produziu os desenhos, a figura de menor área é a segunda, pois a primeira tem cabeça maior, que é compensada pelo pedaço retirado na cauda. Um terceiro aluno não concordou, dizendo que, por visualização até poderia ser isso, mas que, por sobreposição, as três tinham áreas diferentes, e que se olhasse bem, daria para ver isso também. Essa reflexão aponta a sua compreensão.

Figura 23 - Retângulos e círculo.



Esta aluna, apesar de ter demonstrado que a figura C tem a menor área, ponderando que ao "recortar a B e colar sobre a C, cobre todinha a C e ainda sobra papel", compreendeu que ela não foi construída a partir da primeira, no caso, a letra A. Ela poderia construir C recortando A e reorganizando. Refletimos com a aluna, a fim de orientá-la no sentido do objetivo da atividade: se uma figura é obtida de outra, retirando parte da primeira, a segunda está contida na primeira e a área da segunda é menor do que a área da primeira, em sequida a aluna elaborou a contrução conforme a Figura 24.

Figura 24 - Círculos.



Nesta atividade, os teoremas em ação produzidos pelos alunos e percebidos por nossas observações são:

"Podemos medir área por visualização e por sobreposição".

"A figura que tem mais espaço tem mais área".

"Tirando um pedaço de uma figura sua área fica menor".

Nessa atividade, bem como em toda a sequência de atividades, consideramos que, por meio da visualização, as imagens reais poderiam ser transformadas em conceitos e teoremas em ação pelos estudantes, ou seja, aspectos ligados às figuras intuídos pela visão foram interpretados pelos alunos e por eles relacionados na construção do conceito.

Para Duval (1993), a visualização é um processo cognitivo que serve para a exploração heurística de uma situação.

No desenvolvimento das atividades, buscamos provocar nos estudantes a coordenação entre os diferentes registros de representação para que, como afirma Duval (2003), ocorra a conceitualização e a compreensão do objeto matemático em estudo.

De acordo com Vergnaud (1991), teorema em ação refere-se a ações pessoais mentais ou reais articuladoras de informações, procedimentos e atitudes, que constituem generalizações lógicas para o sujeito, no seu processo de construção progressiva do conhecimento. Logo, muitas das operações dos alunos são executadas com o auxílio das invariantes operatórias; sem as mesmas, o aluno não seria capaz de expressá-lo, assim, grande parte do conhecimento do aluno é implícita. É papel do professor ajudar a tornar esse conhecimento explícito.

Concluímos que, por meio da visualização e da sobreposição, os alunos compreenderam que uma figura obtida de outra retirando-lhe uma parte tem área menor que a figura inicial e, portanto, consideramos termos atingindo, juntamente com os alunos, mais uma etapa na construção progressiva do conceito de área como grandeza.

ATIVIDADE 3 - ORDENANDO ÁREAS DE FIGURAS

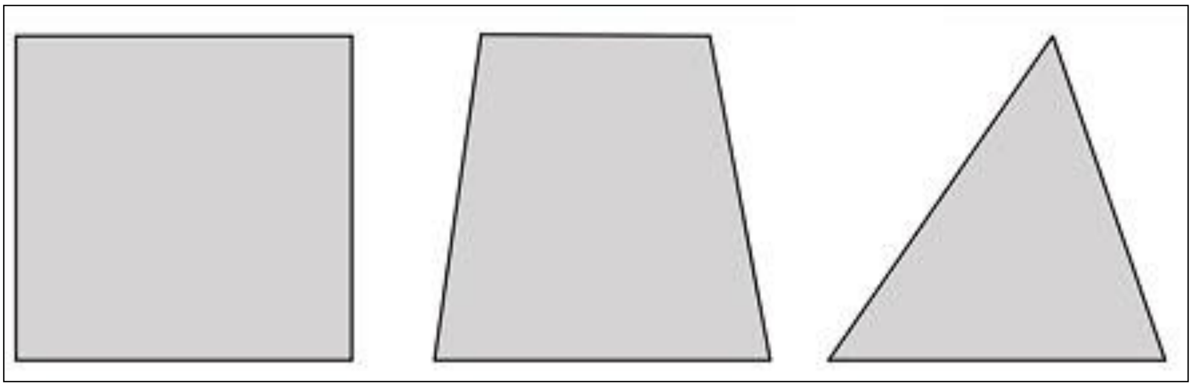
1 Objetivo

Comparar as áreas de um conjunto de figuras e colocá-las em ordem crescente da área.

2 Material

Um conjunto de figuras para cada aluno

Figura 25 - Material atividade 3.



3 Procedimento

1) Agrupar os alunos de quatro em quatro.
2) Entregar a cada aluno um conjunto de figuras.
3) Identificar se eles conhecem as figuras.
4) Pedir para eles colocarem as figuras em ordem crescente com relação à área.
5) Questionar que critério foi adotado para compor a ordem.
6) Provocar no aluno a conclusão de que, ao compararmos duas figuras, se uma está contida na outra por isometria, a que a contém, tem área maior do que a área da figura que está contida.

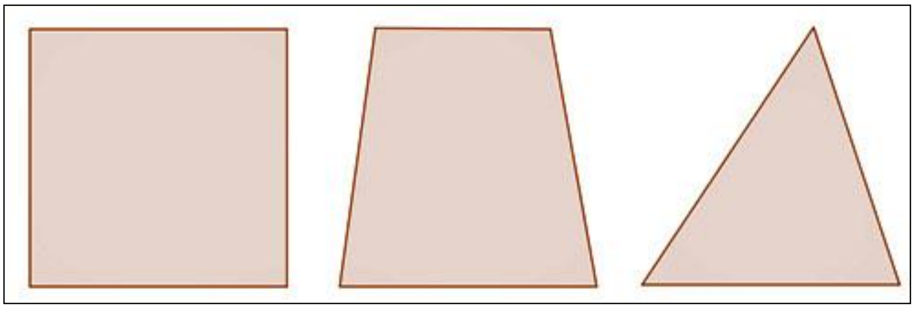
4 Análise

Com esta atividade, desejávamos verificar se os alunos identificavam o quadrado, o trapézio e o triângulo pelo processo de visualização. Também esperávamos que, com base nos conceitos aprendidos nas atividades 2 e 3, os alunos colocassem as figuras dadas em ordem crescente de área e concluíssem que, ao compararmos duas figuras, se uma está contida na outra por isometria, a que a contém, tem área maior do que a área da figura que está contida.

Acreditamos que os alunos não teriam dificuldade, uma vez que, nas duas atividades anteriores, resolveram situações semelhantes com propriedade.

Foram entregues a cada aluno, em um envelope, três figuras, como mostra a Figura 26, a seguir.

Figura 26 - Material da atividade 3.



Questão 1 - Você conhece essas figuras?

Todos os alunos identificaram corretamente as figuras e as colocaram em ordem corretamente. Isso nos revelou mais um conhecimento prévio dos alunos e, ao serem questionados sobre como conhecem as formas geométricas das figuras, emitiram respostas que nos levaram a entender que é por meio da interpretação das formas e por meio da visualização.

Questão 2 - Coloque as figuras em ordem crescente com relação à área (colar somente após ter respondido a questão de número 4).

Figura 27 - Ordenação por sobreposição

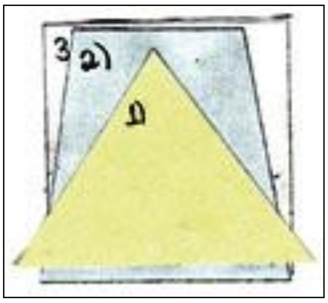
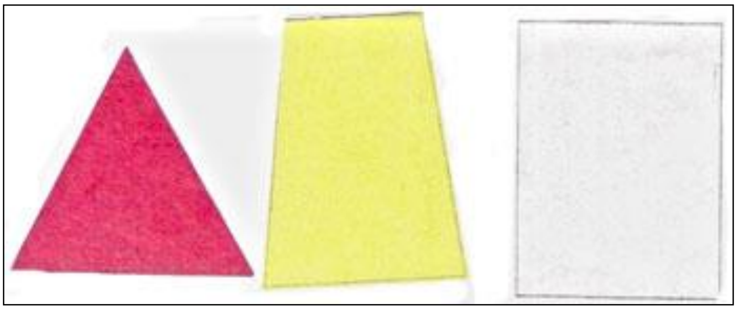


Figura 28 - Ordenação uma figura ao lado da outra



Questão 3 - Qual critério você adotou para compor a ordem?

“Eu observei bem coloquei uma sobre a outra e vi qual era a menor área e a maior”.

“Por visualização”.

“Eu observei”.

“Primeiramente eu vi o quadrado e o trapézio e percebi que o quadrado tem mais área e depois vi o trapézio e por último o triângulo. O quadrado é maior pela área, o triângulo é o menor pela área e o trapézio é médio pela área”.

“Colocando uma em cima da outra e se sobra espaço ela é a maior área”.

“Por sobreposição”.

Todos responderam corretamente à terceira questão que indagava quanto ao procedimento adotado para ter certeza quanto à ordem crescente. No entanto, 14 alunos, além de detalharem o procedimento, afirmaram que a figura de maior área tem mais espaço ou a menor figura tem mais espaço faltando. Por conseguinte, repetiam a resposta da terceira questão, na quarta questão, que perguntava o que podíamos concluir ao compararmos as áreas das três figuras.

Outras respostas dadas se assemelham a estas:

“Olhando eu sei quem tem mais área. Eu conclui que quando eu tiver em dúvida eu coloco uma em cima da outra e se sobrar espaço ela é a maior área”.

“A que sobra mais espaço é maior e vai indo até chegar na menor que sobra menos espaço”.

“Que tem figuras que tem área maior e outras áreas menores”.

Inicialmente, não chamamos a atenção dos alunos ao enunciado das questões 3 e 4, deixando-os escreverem suas respostas, por meio das quais constatamos que eles resolveram a situação comparando a área das figuras por sobreposição e compreenderam que, quando uma figura está contida na outra, a que a contém tem área maior do que a área da figura que está contida. Por fim, mediamos, pedindo para que os estudantes lessem a terceira e a quarta questões. Em seguida discutimos o significado de procedimento e de conclusão.

Entre os alunos que participaram da atividade três utilizaram a sobreposição na ordenação das áreas das figuras, confome Figura 27. Parece que temos aqui uma representação para ordem, segundo as falas dos alunos: “uma ao lado da outra”, “uma depois da outra”.

5 Conclusão

Ao final das três primeiras atividades, podemos concluir, de acordo com Duval (1994), que, por meio da apreensão perceptiva, os alunos adquiriram a habilidade de interpretar figuras geométricas pela sobreposição das mesmas, conceitualizando que as figuras podem ter áreas diferentes ou iguais e que, ao compará-las, a que “cabe” dentro da outra tem área menor.

ATIVIDADE 4 - TRABALHANDO COM O QUADRADO

1 Um pouco de história do conceito de área

De acordo com Gaspar (2003), fundamentada em Seidnberg (1963), podemos conjecturar que o quadrado é uma forma que remonta à pré-história; surgiu de atividades rituais; é uma figura sagrada, assim como o círculo, e ambas as figuras foram estudadas pelos sacerdotes pela mesma razão que estudaram as estrelas: para conhecer melhor os deuses.

Ainda de acordo com essa autora, na religião indiana, um deus era representado por um quadrado, a combinação de deuses conduz ao problema de achar um quadrado, igual em área, à soma de dois quadrados ou mais quadrados dados. (GASPAR, 2003, p. 113).

De acordo com Sarasvati (1987), nos *Sulb*asutras, alguns altares eram construídos com tijolos na forma de um quadrado. Em Gillings (1972), encontramos problemas nos quais a unidade de medida de área utilizada pelos egípcios era o "cubit quadrado".

As civilizações antigas são chamadas de pré-métricas, pois tinham a tendência de criar uma unidade de medidas significativas em vez de geométricas. As derivadas nem sempre correspondiam a um múltiplo da unidade de base. Para medidas agrárias, os gregos utilizavam processos geométricos e não o processo com base na produtividade. O sistema grego prevalecia em todo o oeste asiático oriental médio e oeste do mediterrâneo e o cálculo de área para os lotes eram em quadrados de lados 12. (SILVA, 2010).

Não nos é possível precisar o início da utilização do quadrado como unidade de medida de área, mas temos informações acerca da padronização do quadrado como unidade de medida de área. No entanto, orientamos para o cuidado necessário entre utilizar o quadrado como unidade de medida e medir superfícies comparando-as com um quadrado de mesma área. Isso remonta da antiguidade, quando os antigos calculavam área comparando a figura com um quadrado de mesma área.

Em 1791, uma comissão formada pela Academia Francesa das Ciências, da qual faziam parte Laplace, Lagrange e Monge, recomendou que a unidade padrão de comprimento deveria ser a décima milionésima parte de um quarto de meridiano terrestre. Após um ano de estudo sobre o geodésico do meridiano de Paris, ficou determinado que essa unidade seria chamada de metro e que todos os seus divisores e múltiplos seriam decimais. Quanto à medida de área e volume, ficou determinado que seriam definidas em termos de medida para o comprimento. A unidade de área seria um quadrado com lado de 100 metros, denominado de are. (SILVA, 2010).

2 Objetivo

Perceber que, dados dois quadrados, o que tem a maior área é aquele que tem o maior lado. Compreender, de forma significativa, o ‘quadrado’.

3 Material

5 quadrados de tamanhos e cores diferentes (um para cada aluno); cola e papel.

4 Procedimento

1) Dividir a turma em grupos de 05 alunos.
2) Entregar a cada aluno um quadrado, então, cada grupo ficará com cinco quadrados de tamanhos diferentes. Pode ser entregue também um conjunto de cinco quadrados de tamanhos diferentes a cada aluno.
3) Discutir com eles os atributos do quadrado: lados iguais e ângulos iguais, diagonais iguais.
4) Pedir que coloquem os quadrados em ordem crescente em relação à área. Orientar os alunos que organizem essa ordem na mesa e, depois, desenhem no papel como ficou a arrumação. Queríamos observar que estratégia cada grupo utilizaria para colocar em ordem crescente.
5) Levar os alunos a concluírem que, dados dois quadrados, o que tem lado maior tem a maior área.

5 Análise

Durante as análises utilizamos a Turma da professora Tatiana ou Turma da professora Vitória para evidenciar a ocorrência de algumas participações de alunos que davam origem a explicitações de conteúdos ou procedimentos não previstos por nós.

Questão 1- Cite os atributos do quadrado que você conhece.

Em nossa análise preliminar consideramos que os alunos não apresentariam dificuldades com essa atividade pelo fato de demostrarem conhecimento, nas atividades anteriores, relativos aos atributos do quadrado. Acordamos evidenciar somente os atributos mencionados em sala pelos alunos.

Todos tinham noção de que o quadrado era um polígono formado por quatro lados iguais e quatro ângulos iguais, medindo 90 graus. A medida de ângulo já havia sido trabalhada nas duas turmas. Quanto à diagonal, somente cinco alunos tinham conhecimento. Como o atributo diagonal fora citado na turma por esses alunos, a professora decidiu, então, explicar do que se tratava ao resto do grupo. A professora Tatiana, em sua turma, usou como referência o movimento da rainha no jogo de xadrez.

"Um quadrado tem 4 lados iguais e 4 ângulos iguais, 4 ângulos de 90 graus, duas diagonais".

"Um quadrado tem 4 lados iguais, 4 ângulos iguais, eu posso fazer duas diagonais no quadrado".

"O quadrado tem 4 lados iguais". Apenas um aluno apresentou essa resposta.

"Tem ângulos de 90 graus, quatro lados iguais, é um polígono, tem área, tem lados paralelos e concorrentes".

"Um quadrado tem quatro lados iguais, quatro vértices, quatro ângulos de noventa graus, duas linhas paralelas, duas concorrentes, transversais, ele é um poliguino". (polígono).

"O quadrado tem quatro lados iguais, ângulos de 90 graus, é um polígono, tem área, tem lados paralelos e concorrentes".

"O quadrado tem 4 lados iguais, 4 ângulos iguais de 90 graus e tem como fazer 4 diagonais". Três alunos do mesmo grupo deram essa resposta. Quando pedimos para desenharem as diagonais no quadrado, traçaram duas. Perguntamos sobre as outras duas, um aluno respondeu que eram apenas duas. Já a resposta dada pelos outros dois, levou-nos a voltar à definição de diagonal, pois eles estavam considerando todo segmento que dividia o quadrado ao meio. Isso nos mostra a importância da mediação, pois percebemos de imediato qual era a confusão conceitual do aluno.

Cerca de 20 alunos não só citaram a diagonal, mas se expressaram de forma semelhante a: "eu posso fazer duas diagonais". Então, eles informavam o que percebiam imediatamente como, lados, ângulos, mas a diagonal só existiria se fosse traçada por eles mesmos. Chamou-nos a atenção, para o conceito de ângulo, a seguinte resposta: "o ângulo automaticamente aparece quando eu fecho as linhas para formar o quadrado, se eu não colocar um ângulo de noventa não fica um quadrado".

Nas duas turmas, havia alunos que escreviam 90° graus. Explicamos a notação simbólica, no entanto, tivemos que retomar, várias vezes, e nos demais encontros, à questão dessa notação.

Percebemos que alguns alunos compreendiam o conceito de ângulo e utilizavam o termo hipotenusa, vértice, segmento de retas, retas concorrentes e paralelas.

Ao convesarmos com as professoras foi esclarecido que uma já havia trabalhado esses conceitos no mês anterior. Essa professora enquanto desenvolvíamos a atividade recordava tais conceitos.

Na mediação, os alunos apontaram a dificuldade com a abstração de alguns conceitos. Por exemplo, alguns alunos sabiam que o quadrado tem vértices, mas não citaram por não aparecerem desenhados na figura que eles receberam. Segundo eles, tinha que ter o ponto desenhado no encontro dos dois lados.

Questão 2 - Desenhe aqui como você organizou os quadrados dados em ordem crescente de área.

Figura 29 - Da esquerda para direita.

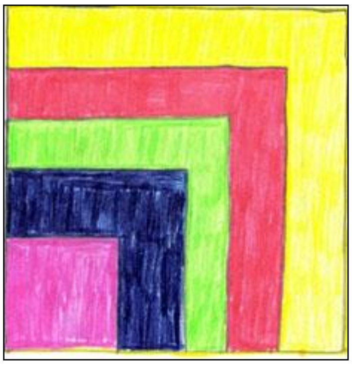


Figura 30 - Centralizada a partir de um dos lados.

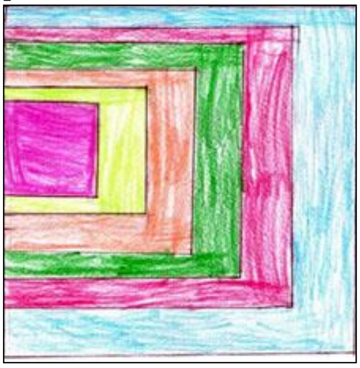


Figura 31 - Da direita para esquerda.

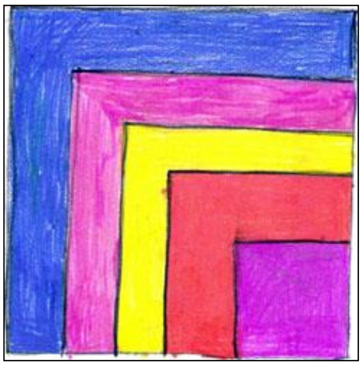


Figura 32 - Centralizado.

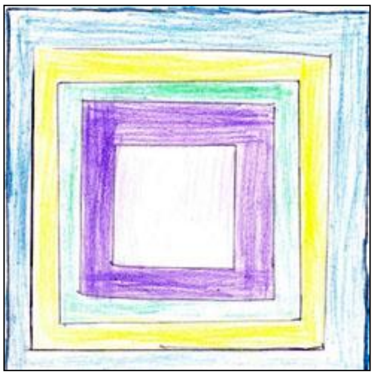


Figura 33 - Uma atrás da outra.

Figura 34 - Alinhada.

Figura 35 - Material centralizado.

Todas essas formas apareceram nas duas turmas, sendo que a Figura 31 foi a que apareceu em maior número. Os estudantes não tiveram nenhum problema em colocar os quadrados em ordem crescente de área. Com a exceção de dois alunos, os demais utilizaram a sobreposição, como era esperado por nós, por ter sido um procedimento muito evidenciado nas atividades anteriores. No entanto, como essa atividade solicitava que o aluno representasse, em forma de desenho, os quadrados em ordem crescente de área, muitos apresentaram certa dificuldade em representar a parte do quadrado que ficava escondida pela sobreposição.

Quando um dos alunos desenhou o quadrado menor e foi completando os quadrados de maior área, utilizando segmentos de retas, formando, assim, o quadrado de fora, conforme mostra a Figura 29, o procedimento se propagou na turma por “imitação”. Alguns alunos que haviam centralizado os quadrados (Figura 35), no momento de desenhar, mudaram a configuração conforme a Figura 29, por acharem mais fácil de desenhar.

Um aluno não conseguiu desenhar, deixamos que ele fizesse a colagem dos quadrados, pois tinha muita dificuldade para utilizar a régua. Percebemos que dificuldade semelhante era apresentada por outros alunos, que utilizavam o próprio quadrado como régua para desenharem, assim, o desenho teve a medida dos quadrados dados. Com isso, tomamos a decisão de que nas próximas atividades deixaríamos um espaço menor para resolução da questão, assim os alunos empregariam uma escala para a devida representação.

Questão 3 - Após as discussões e reflexões sobre os atributos do quadrado, escreva aqui sua conclusão em relação à área do quadrado quando comparamos quadrados entre si.

“O tamanho do lado interfere no tamanho da área”.

“Podemos afirmar que quem define o tamanho da área do quadrado são os seus lados”.

“Não importa o ângulo o que importa é a área, pois todos os quadrados tinham os mesmos ângulos, o que muda é a área e o lado”.

“O quadrado que tem a maior área tem o maior lado”.

“Quem tem maior área é quem tem o maior lado e todos os ângulos são de 90°, a diferença é que um quadrado tem lado maior que o outro”.

“O quadrado maior tem área maior e lado maior, o lado interfere no tamanho da área”.

“Quanto maior o lado maior a área”.

“Quando o lado é mais largo a área é maior”. “Largo” é um termo usado no lugar de comprido.

“Quando colocamos os quadrados um em cima do outro os lados são diferentes e as áreas também, mas os ângulos são de noventa graus”.

“Quanto menor o lado menor a área”.

“Sabemos que o tem maior lado tem a maior área”.

“A conclusão que nós chegamos é que para definir se o quadrado é maior ou menor temos que saber o tamanho do lado porque ele interfere no tamanho da área, se o lado for maior a área é maior e vice versa”.

“Se o lado cresce o quadrado cresce, tipo se eu mudo o quadrado de cor não vai mudar nada só se eu mudar o lado vai acontecer uma transformação no quadrado”.

“Para descobrir qual quadrado é maior ou menor devemos saber o tamanho dos lados, o que tiver lado maior é maior, e o que tiver lado menor é menor, então quanto maior o lado, maior a área”.

Os teoremas em ação

Quanto maior for o lado do quadrado, maior será a sua área.

Quanto maior for a área de um quadrado, maior será o seu lado.

A medida do lado de um quadrado interfere na medida da área desse quadrado.

A medida do ângulo não interfere na medida da área de um quadrado.

Conceitos em ação

O quadrado é um polígono.

O quadrado tem quatro ângulos de 90 graus.

Em seguida, apresentamos aos alunos algumas figuras semelhantes e perguntamos quem tinha área maior, e os alunos responderam corretamente. Quando questionamos como sabiam, responderam que era por sobreposição. Assim, continuamos a discussão e ao final eles concluíram: “o quadrado de maior lado tinha maior área”. Perguntamos se essa conclusão valia, também, para os triângulos que tínhamos, responderam que sim, os triângulos eram equiláteros.

Continuamos questionando os alunos sobre cada conjunto de polígonos regulares semelhantes que tínhamos. Em continuidade, perguntamos se poderíamos assegurar que aquela regra valeria para todas as figuras, ou seja, “entre figuras de mesmo número de lados, terá maior área a que tiver maior lado”. Alguns responderam que sim, outros que não. Quando questionamos por que não poderíamos garantir aquela afirmativa como correta, um aluno respondeu que ele não poderia garantir por não estar vendo as figuras. E se fosse um quadrado e um retângulo? Realizamos uma ilustração com figuras regulares e não regulares para refletirmos sobre a fala daquele aluno[15].

Para prosseguimento da discussão, apresentamos algumas figuras regulares, continuamos questionando: E se garantíssemos que os lados daquelas figuras teriam a mesma medida? Pedimos para que os alunos separassem as figuras de lados iguais das figuras que não tinham lados iguais. Então, concluímos: das figuras regulares, a que tem maior lado tem maior área. Por conseguinte, definimos polígonos regulares.

---

[15] Tínhamos no nosso material algumas figuras e umas ajustamos na hora, então consideramos ter a partir de então um reservatório com figuras que envolvem toda a classificação de polígonos para alguma eventualidade.

6 Conclusão

O objetivo da atividade foi alcançado a contento. Além dos alunos perceberem que a área do quadrado está diretamente relacionada ao comprimento do seu lado, eles tiveram oportunidades de discutir bastante sobre o quadrado e seus atributos.

Apesar de considerarmos que essa atividade pode ser estendida com mais efetividade a outros polígonos, com o objetivo de levar os alunos a construírem o teorema de que, dados dois polígonos regulares de mesmo número de lados, tem a maior área aquele que tem o maior lado; dados dois círculos, o que tem a maior área é aquele que tem o maior raio, deixamos aqui como mais uma sugestão de atividade.

No entanto, optamos por enfatizar o nosso trabalho com o quadrado por termos um interesse particular, nesse momento, em tal figura geométrica, com o objetivo de proporcionar momentos de familiarização com o quadrado, com o seu lado, com a relação entre a medida do lado e a medida de sua área, para que o aluno compreenda, com mais facilidade, quando iniciarmos o estudo da unidade quadrática da medida de área.

Porém, mesmo que de modo menos intenso, foi interessante trabalhar com os alunos outros polígonos regulares, pois inicialmente tínhamos a preocupação se aquela atividade produziria ambientação para a criança estabelecer uma relação direta entre medida do perímetro e da área de qualquer figura desse tipo. Ficamos satisfeitos com o resultado, julgamos que o ato da investigação por parte do aluno e a mediação da professora foram de fundamental importância no processo.

O aluno pôde perceber o estabelecimento de um teorema; na verdade, para aqueles estudantes, estavam nascendo noções e teorias a partir da vivência, então, explicamos que um teorema surge como uma construção social.

As civilizações antigas trabalhavam com o quadrado por considerarem mais simples o cálculo de sua área, assim, as demais figuras eram transformadas em um quadrado de mesma área. Ao analisarmos os Elementos de Euclides, percebemos, no Livro I, preposição 42 e, no Livro II, preposições 4 e 14, que regiões poligonais eram decompostas em triângulos os quais, por sua vez, eram transformados em retângulos. Esses retângulos formavam um retângulo de área igual a do polígono dado. Em seguida, esse retângulo era transformado em um quadrado de mesma área do polígono dado.

A Proposição 42, do Livro I, equivale a transformar um triângulo em um retângulo de mesma área; a Proposição 4, do Livro II, a resolver o problema de transformar um retângulo em outro de mesma área; já a Proposição 14, do Livro II, equivale a construir um quadrado de mesma área que um retângulo dado.

ATIVIDADE 5 - DECOMPOR E COMPOR FIGURAS

1 Um pouco de história do conceito de área

As atividades a seguir estão baseadas nos métodos indianos, chineses e gregos de transformar uma figura em outra de mesma área.

As bases históricas estão no problema indiano de transformar um quadrado em um retângulo de mesma área e as ideias chinesas de utilizar quebra-cabeças pra resolver problemas de área.

Como dito anteriormente, é possível por meio dos *Sulbasutras* termos conhecimento da matemática desenvolvida na Índia antiga. Os *Sulbasutras* compreendem medições e construções dos altares para sacrifícios por meio da elaboração de linhas traçadas de leste para oeste, de perpendiculares, de quadrados, de retângulos, de trapézios, de triângulos e losangos, iguais em área, a um determinado quadrado. Então, eles apresentam a transformação de quadrados em retângulos e vice-versa, de quadrados em círculos e vice-versa, ou seja, as figuras eram transformadas em quadrados de mesma área.

Os altares de fogo foram prescritos de formas diferentes. De acordo com o benefício específico, sacrifício realizado no *syenaci*t (forma de um falcão) era para alcançar o céu e, no praugacit (forma de triângulos isósceles), para destruir os inimigos e assim por diante. Mas todas estas formas diferentes tinham que ter estritamente a mesma área de 7 ½ purushas quadrados. Assim, desenvolveram métodos para transformar uma figura geométrica em outra, especialmente o quadrado, em outras figuras geométricas de mesma área. Portanto, os *Sulbasutras* descritos apresentam diferentes métodos de alterar as formas das figuras, mantendo as mesmas áreas. (AMMA, 1979, p. 32).

Os quatro principais *Sulbasutras*, que são matematicamente os mais importantes, são aqueles escritos por *Baudhayana, Manava, Apastamba e Katyayana*. De acordo com Amma (1979) a comparação de tais textos com outros textos védicos aponta que eles foram datados de cerca de 800 a. C. a 200 d. C., o mais antigo é o que foi atribuído a Baudhayana, escrito por volta de 800 a. C. a 600 a. C. No entanto, é provável que alguns conhecimentos neles tratados sejam anteriores a 1.500 a. C.

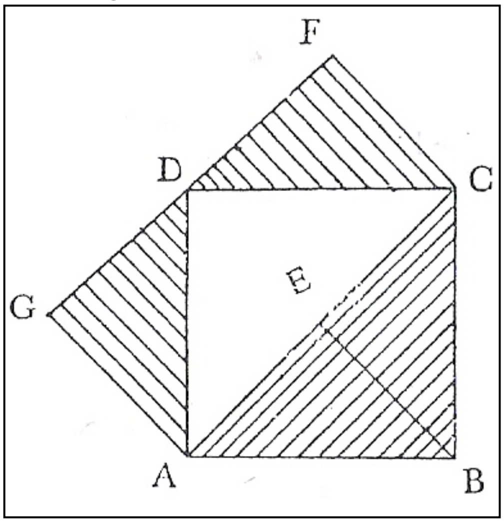
> É interessante observar que apesar do conhecimento geométrico encontrado nos Sulbasutras estar relacionado às exigências teóricas para construção de altares de tijolos, a tecnologia de construção de tijolos cozidos pertencia à cultura Harappa. Há, portanto a possibilidade de que o conhecimento geométrico contido nos Sulbasutras já existisse no período Harappa e também pode ser uma evidência da possibilidade de haver alguma relação entre estas duas civilizações. De qualquer modo são os Sulbasultras as fontes do conhecimento geométrico da Antiga Índia. (GASPAR, 2003).

Para Amma (1979), talvez a primeira declaração do teorema popularmente associado com o nome de Pitágoras (540 a. C.) é a mais importante contribuição da Índia antiga para o desenvolvimento da matemática. No entanto, o atual enunciado do teorema nos *Sulbasutras* não era referente ao triângulo retângulo, o enunciado indiano é relativo ao retângulo: a área do quadrado construído sobre a diagonal do retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados desse retângulo. É um teorema sobre retângulos.

É verdade que a maioria dos povos antigos conhecia e utilizava o triângulo retângulo 3, 4, 5 para obter um ângulo reto e os registros babilônicos contêm uma lista de números pitagóricos. Contudo, essa autora considera o significado geométrico completo do teorema que relaciona entre si os lados de qualquer triângulos-retângulos; talvez eles tenham sido adotados primeiramente na construção de altares de sacerdotes védicos.

Ainda segundo essa autora, os matemáticos alemães A. Bürk e M. Cantor discutiram a questão detalhadamente e chegaram à conclusão de que o teorema era conhecido na Índia, o mais tardar no século 8 a. C., data do mais antigo *Sulbasutra*, o de *Bauhãyana*. Por isso, é provável que o teorema do quadrado da hipotenusa fosse conhecido na Índia muito antes do que o período dos *Sulbasutras*. (AMMA, 1979, p. 17).

Figura 36 - Transformação do quadrado em retângulo.



Fonte: (AMMA, 1979, p. 38).

Baudhãyana, matemático indiano, que viveu no século X a. C., trabalhava com um método de transformar o quadrado em retângulo. Ele escreveu os primeiros textos indianos sobre a construção de altares. Por seus métodos, podemos dizer que ele já aplicava o teorema de Pitágoras: “uma corda esticada ao longo do comprimento da diagonal produz uma área que os lados verticais e horizontais fazem juntos”.

Baudhãyana e *Kãtyãyana* usavam o seguinte método para transformar um quadrado em um retângulo de mesma área: desejando-se transformar um quadrado em um retângulo, deve-se cortar a diagonal no meio, dividir uma parte novamente e colocar as duas metades para o norte e leste da outra parte. Se a figura a ser formada é um quadrilátero, deve-se colocá-los juntos, de forma que eles se encaixem.

Assim, sendo ABCD um quadrado dado. Ele é cortado ao longo de CA para formar dois triângulos retângulos. O triângulo ABC cortado na metade ao longo da altura BE. As duas metades BEA e BEC são removidas para as posições DFC e DGA.

Então, o retângulo ACFG tem área igual ao quadrado ABCD. O problema desse método é que ele não permite transformar o quadrado em um retângulo com um lado qualquer. (AMMA, 1979. p. 38).

Para calcular a área de uma figura qualquer, os gregos costumavam transformá-la em um quadrado equivalente, utilizando régua não graduada e compasso não flexível, já que sabiam como calcular a área de um quadrado. Podemos observar, citando como exemplo a preposição 14, do Livro II, dos Elementos de Euclides, na qual ele mostra ser possível, a partir de uma figura retilínea dada, determinar um quadrado equicomposto, ou seja, obter a quadratura da figura. Para os gregos, determinar a quadratura de uma figura dada significava determinar a área desta figura. (ROQUE, 2012, p. 183).

Passemos, então, à próxima atividade que, na sua estruturação, ficou extensa para o tempo de uma aula, por isso a dividimos em duas partes que chamaremos de atividade 5, atividade 5.1 e atividade 5.2.

ATIVIDADE 5.1 - COMPOR FIGURAS A PARTIR DE TRÊS TRIÂNGULOS DADOS

1 Objetivo

Instrumentalizar os alunos para resolverem o problema de transformar um quadrado em um retângulo de mesma área. Levar os alunos a perceberem que, quando decompomos uma figura e reorganizamos as partes sem superposição, a figura resultante tem a mesma área da primeira e essa área é igual à soma das áreas das partes.

2 Material

Um conjunto de 3 peças de cartolina conforme a figura abaixo (para cada aluno).

Figura 37 - Material da atividade 5.1.

Observação: os triângulos são retângulos isósceles.

3 Procedimento

1) Dividir a sala em grupos de 4 alunos.
2) Entregar o conjunto com as três peças para os alunos.
3) Identificar se os alunos conhecem as peças.
4) Fazer questionamentos sobre a área das figuras: qual tem a maior área? Quais têm áreas iguais?
5) Questionar se existe alguma relação entre as áreas das figuras.

4 Situação 1

a) Utilizando as três peças construir uma figura.
b) Pedir para o aluno registrar, em forma de desenho, a figura que ele construiu.
c) Qual foi a figura que você construiu?
d) Qual é a área dessa figura?
e) Provocar no aluno a conclusão de que, se não houver sobreposição de figuras, a área total é igual à soma das áreas de cada figura.
f) Montar um painel com todas as figuras construídas.
g) Mediar: o que podemos dizer sobre a área dessas figuras?
h) Provocar no aluno a conclusão de que figuras diferentes podem ter a mesma área.

Nossa meta era que os estudantes transformassem, por recorte e colagem, o quadrado em um retângulo de mesma área. Consideramos que eles não resolveriam o desafio de imediato por falta de habilidade com o próprio procedimento de fracionar as figuras e reorganizá-las em outra figura de mesma área. Elas ainda não dominavam o conhecimento de que figuras diferentes podem ter a mesma área. Por isso, resolvemos trabalhar com essa atividade 5, que seria intermediária e importante para conseguimos nossa meta. Apesar das professoras afirmarem que poderíamos, de acordo com a atividade, trabalhar todo o período da aula com a matemática, avaliamos que seria desgastante para os alunos realizarem todos os procedimentos em um único encontro; por isso, dividimos essa atividade em duas partes.

Questão 1 - Você conhece essas figuras?

Como esperávamos, os alunos conheciam as figuras. Tratava-se de triângulos por que tinham três lados.

Questão 2 - As áreas dessas figuras são iguais ou diferentes?

"Tem dois triângulos pequenos com áreas iguais e um grande com área diferente".

"Os dois pequenos têm áreas iguais e o grande área diferente".

"O triângulo grande tem mais área e os dois pequenos menos área".

"Os pequenos têm áreas iguais e o grande não tem área igual".

Questão 3 - Existe alguma relação entre as áreas dessas figuras? No caso de sim, qual é a relação?

Eles colocaram números nos triângulos e responderam:

"O número 1 tem a metade da área do 2".

"Os dos pequenos formam um grande e o grande é o dobro do pequeno".

"Juntando os triângulos 2 e 3 ficarão do mesmo tamanho do número 1. Os triângulos 2 e 3 são a metade de 1".

"Sim, a área do grande é o dobro da área do pequeno".

"Dá para colocar os dois pequenos no grande. A área do pequeno é a metade do grande".

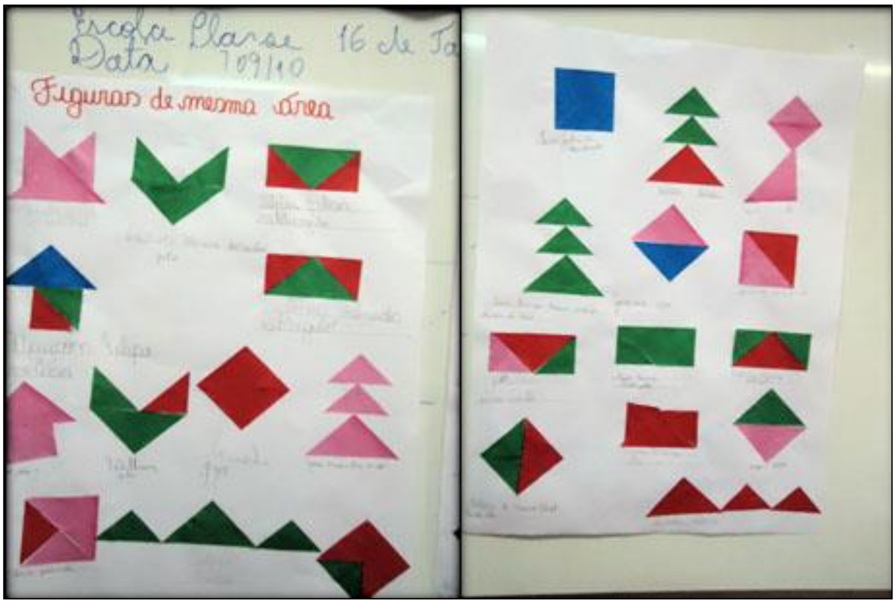
Questão 4 - Utilizando as três peças, sem sobreposição, construir uma figura. Desenhe essa figura aqui.

Pedimos para os alunos desenharem, em vez de utilizarem a colagem, para que eles fossem comparando a figura formada e as partes ao longo do resto da atividade. Outro motivo era para que os alunos continuassem com as peças para manuseá-las. Ao final, foi construído em cada turma um cartaz com as figuras formadas, ou seja, cada aluno montou no cartaz, com suas peças, a figura que ele havia desenhado nessa questão.

Apresentamos aqui os dois cartazes:

Figura 38 - Turma da Professora Tatiana.

Figura 39 - Turma Professora Vitória



Na turma da professora Vitória, houve uma discussão quando ela propôs à turma que escolhessem um título para o cartaz. Uma aluna sugeriu que se chamasse “Figuras Triangulares”; a professora escreveu no quadro todas as opções para votação. No entanto, outra aluna voltou-se à primeira e questionou: onde você vê triângulos nesse cartaz? Por isso não concordo com esse nome. Virou um debate que acabou por envolver toda a turma. A primeira aluna argumentou: mas elas são formadas por triângulos, por isso figuras triangulares. Uma terceira afirmou: mas eu já não vejo mais triângulos, agora vejo outras figuras como um quadrado, uma montanha, uma menina, as partes são triângulos. A segunda concluiu: por isso não podem ser figuras triangulares. Foi quando um aluno sugeriu: "Figuras de mesma área". Todos concordaram e assim ficou o título.

Questão 5 - Qual figura você construiu?

Um triângulo, barco, gato, árvore de natal, retângulo, quadrado, peixe, trapézio, casa, pipa, tenda, paralelogramo, losango, uma montanha.

Questão 6 - Qual é a área dessa figura que você construiu? Justifique sua resposta.

"A área é de dois triângulos pequenos e um grande".

"Dois triângulos pequenos e um grande". Esta resposta foi a mais apresentada.

"Um triângulo grande e dois pequenos pode ser dois triângulos grandes ou quatro triângulos pequenos".

"Ela mede 3 triângulos".

"Ela mede 4 triângulos pequenos".

"A área da minha figura é igual a dois triângulos grandes juntos".

Os teoremas em ação apresentados pelos alunos:

A unidade de medida de área pode ser o triângulo pequeno.

A unidade de medida de área pode ser o triângulo grande.

Para medir a área de uma única figura, posso usar duas unidades de medidas diferentes, no caso o triângulo grande e o triângulo pequeno.

Medir área é comparar área.

Medir área é dizer quantas vezes a unidade de medida cabe na área que está sendo medida.

Consideramos inicialmente, que os alunos teriam dificuldade com essa questão por trabalhar com unidade de medida diferente. Explicamos várias vezes o que a questão pedia. Foi interessante perceber que eles trabalharam tranquilamente com duas unidades de medidas; um número considerável entendeu que poderia transformar uma unidade em outra, quando responderam que a área de sua figura podia medir 4 triângulos pequenos ou dois grandes. Houve uma única resposta na qual a aluna se expressou da seguinte forma: "São 3 desenhos dois que tem 45° que são os pequenos e o outro tem 90° que é grande". Ao questioná-la sobre sua resposta, ela explicou que um dos triângulos tinha 90°, e sabia que, ao juntar os dois triângulos, teria outro ângulo de 90°. Como eles eram iguais, então, cada triângulo ficou com a metade de 90°.

Primeiramente consideramos que aquela aluna não tinha o domínio da propriedade de reversibilidade. Ao mediarmos, entendemos que ela, assim como a turma, havia aprendido a trabalhar com ângulos internos de um triângulo. A professora da turma em que havia surgido a discussão resolveu rever tal conceito por meio de dobradura. Constatamos que as professoras colaboradoras, em suas aulas, trabalhavam conceitos abordados na resolução da atividade da pesquisa, mas não eram foco nesta pesquisa.

Questão 7 - Foi montado um painel com todas as figuras construídas na sala. Pergunta-se: o que podemos dizer sobre a área dessas figuras?

"Podemos dizer que todas figuras têm áreas iguais".

"Que são do mesmo tamanho em área".

"Juntando os dois triângulos pequenos e um grande podemos fazer figuras diferente de mesma área".

"Que todas as áreas são iguais".

"Que todas as figuras do painel tem áreas iguais e só muda o desenho".

"Que as áreas são diferentes e só as figuras são iguais e só muda os desenhos". Esta aluna entendeu o que era área, mas ainda não havia compreendido a medida de área. Tivemos que explicar algumas vezes para ela. Nós percebemos que ela e mais alguns alunos precisariam de mais tempo e mais atividades para compreender esse conceito. Acordamos em ficar atentas àqueles alunos.

Um estudante escreveu: "*Todas as figuras são iguais só que depois ficaram com os formatos diferentes". *Esse aluno expressou-se verbalmente assim: "Todas elas são formadas pelas mesmas figuras, dois triângulos pequenos e um grande, depois cada desenho ficou com um formato diferente. Todo desenho tem área igual".

Uma aluna escreveu: "*Que elas têm área maior menor, são do mesmo tamanho. São diferentes"*. Quando conversamos com essa aluna, ela verbalizou: "elas todas são formadas por triângulos grandes e pequenos, as áreas são iguais, as figuras que são diferentes na forma". A grande maioria dos alunos participantes da pesquisa tinha essa dificuldade de expressar por escrito tudo o que verbalizava.

Questão 8 - Observando o painel, a que conclusão podemos chegar?

“Figura diferente pode ter a mesma área”.

“Que todas têm a mesma área”.

“Se juntarmos figuras pequenas elas formam uma figura grande e as áreas são iguais e as figuras são diferentes”.

“Figura diferente pode ter área igual”.

“Que todas as figuras são soma das três”. Quando questionado, o aluno respondeu que “a área das figuras era igual à soma das áreas dos três triângulos”.

“Com triângulos podemos fazer muitas coisas, e apesar das figuras serem diferentes elas têm as mesmas áreas”.

“Juntando mais de 2 triângulos podemos fazer muitos desenhos”.

“A conclusão é que a gente recebeu só três figuras e transformamos em vários desenhos”.

“Podemos chegar que todas as figuras do painel tem a mesma área”.

“Que quando junta as duas pequenas fica um triângulo do tamanho do grande”. A aluna que escreveu essa resposta construiu um quadrado, juntou os dois triângulos pequenos de mesmo tamanho, formando um triângulo maior, que, junto com o outro maior, formaram um quadrado. Ela continuou fazendo afirmação ao olhar para a sua figura, então, pedimos para que ela observasse o painel. Ela era tão tímida que mal levantava os olhos do seu desenho. Ao percebermos isso, voltamos depois à mesa da aluna, quando esta não estava em evidência, para reiniciarmos a mediação. Finalmente, ela compreendeu que era para estabelecer uma relação entre as figuras construídas por todos os alunos. Esse tipo de procedimento, atendimento individualizado com mais atenção, era possível por estarmos em duas professoras na sala. Enquanto uma cuidava de casos particulares, a outra prestava atenção à turma de forma geral.

Um número pequeno de alunos apresentou dificuldade em responder essa questão corretamente. Como o nosso objetivo era que todos construíssem os conhecimentos desejáveis na atividade, fomos pedindo a determinados alunos para que comparassem dois desenhos dos painéis. Para isso, usamos questionamentos que se assemelhavam aos seguintes: quem construiu essa figura? E essa? Ela se parece com o quê? Qual é o nome da sua figura? O que você sabe da sua figura? Quantos lados ela tem? Ela foi formada por quantas figuras? Qual é o nome dessas figuras? Todos os triângulos tem a mesma área? Qual é a área da figura que você construiu? Se a figura tal tem área igual a dois triângulos pequenos e um grande e a outra figura tem área igual a dois triângulos pequenos e a outra tem área igual a um triângulo grande, podemos dizer que essas figuras têm áreas iguais ou diferentes? Ah, Então figuras diferentes podem ter áreas iguais?

Se o aluno respondesse que a área era dois triângulos grandes, fazíamos as perguntas utilizando essa unidade de medida e assim por diante. Depois escolhíamos três figuras e iniciávamos a mediação provocando os alunos por meio dos questionamentos. Envolvíamos os alunos que estavam com dificuldades na formalização dos conhecimentos, ou seja, aquele aluno com dificuldade era convocado à discussão. É claro que os demais alunos da turma participavam respondendo ou gritando, tentando se antecipar ao sujeito para o qual a pergunta havia sido dirigida. Finalmente aumentamos para quatro figuras e perguntamos à turma: o que podíamos concluir em relação a todas as figuras do painel e suas respectivas áreas?

A partir das respostas, institucionalizamos: Figuras diferentes podem ter áreas iguais.

Como já analisado por Duval (2003), nossos sujeitos também apresentaram, na resolução da atividade, a operação merológica de reconfiguração na construção do raciocínio levando-se em conta a sobreposição e, tendo como filtros desse conhecimento, a ajuda entre pares, reconfiguração, a forma visualizada e desenhada no papel e caracterização de figuras diferentes formadas a partir dos três triângulos que receberam.

Em outros termos, a atividade nos permitiu analisar as produções matemáticas em processo de reconhecimento de que, por meios de operações figurais, podemos transformar uma figura em outra de mesma área. Uma atividade na qual o aluno não precisava proceder cálculos algébricos, o aluno utilizou as operações merológicas de reconfiguração as quais se apoiam sobre a percepção. A atividade tinha o objetivo de que a criança desenvolvesse o simples reconhecimento perceptivo das figuras o qual consideramos um facilitador para a realização das próximas atividades, em busca da construção do conceito de área, como grandeza autônoma.

Conforme Duval (2011), é preciso ter tomado consciência dos tipos de operações figurais e ter adquirido a mobilidade de focalização dimensional do olhar para reconhecer as múltiplas unidades figurais que se fundem no reconhecimento imediato de qualquer forma 2D. Temos aqui uma divisão merológica de uma forma em unidades figurais de mesma dimensão (2DX2D) e a sua reconfiguração, em outra figura de mesma área, mas com outro contorno global.

ATIVIDADE 5.2 - TRANFORMAR POR RECORTE E COLAGEM O RETÂNGULO EM QUADRADO E O QUADRADO EM RETÂNGULO CONSERVANDO A MEDIDA DA ÁREA

1 Objetivo

Levar os alunos a perceberem que, quando decompomos uma figura e reorganizamos as partes sem superposição, a figura resultante tem a mesma área da primeira e essa área é igual à soma das áreas das partes. Transformar um retângulo em quadrado de mesma área. Transformar o quadrado em retângulo de mesma área.

2 Material

Um conjunto de 3 peças de cartolina conforme a figura abaixo (para cada aluno).

Figura 40 - Material atividade 5.2.

Os três são triângulos retângulos isósceles, sendo os dois menores obtidos pela decomposição do maior.

3 Procedimento

1) Lançar à turma a seguinte situação: Com as três peças que vocês receberam, é possível construir um retângulo que não seja um quadrado? Com as mesmas peças, é possível construir um quadrado?
2) Depois das discussões, trabalhar com a turma em dupla, orientando o registro das soluções apresentadas.
3) Realizar mediações em forma de questionamentos:

a) Existe alguma relação entre a área do quadrado e do retângulo construídos? Qual é a relação?

b) Escolha um dos triângulos. É possível, utilizando cópias desse triângulo, construir esse quadrado? Quantos triângulos são necessários?

c) É possível, utilizando cópias de desse triângulo, construir um retângulo? Quantos triângulos são necessários?

d) Que relação existe entre a área do quadrado e a do triângulo que você escolheu?

f) Que relação existe entre a área do retângulo e a do triângulo que você escolheu?

g) Responda essas perguntas escolhendo o outro triângulo.

h) Provocar a conclusão: a área do retângulo é igual à área do quadrado, que é igual a quatro vezes a área do triângulo dado de menor área ou duas vezes a área do triângulo dado de maior área.

i) Por fim, apresentar outra situação aos alunos: transformar um quadrado dado em um retângulo de mesma área.

4) Material: um quadrado para cada aluno, tesouras e réguas. (ter quadrados a mais)

5) Orientar o registro da atividade.

4 Análise

Questão 1 - Utilizando as três peças construir um retângulo. Desenhe aqui esse retângulo.

Não houve dificuldade na construção do retângulo com as figuras. Houve dificuldade, por parte de alguns alunos, em representar, por meio de desenho, a figura construída com o material manipulável. Alguns alunos não obedeciam a um padrão de proporcionalidade entre as peças e outros trocavam a forma das partes conforme a Figura 42

Figura 41 - Montagem de retângulo.

.

Figura 42 - Representação do retângulo utilizando trapézio e triângulo.

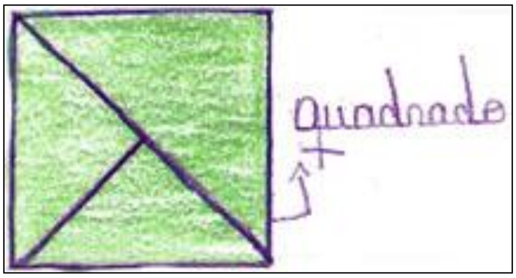
Figura 43 - Representação do retângulo por meio do desenho.

Voltamos ao material manipulável com o qual trabalhamos de forma a levar o aluno a compreender como procedimento de representação, traçar uma reta até o vértice e não até um ponto qualquer sobre o lado do retângulo. Alguns consideravam que traçar retas perpendiculares formando ângulos de noventa graus nas laterais era a condição necessária para formar um retângulo. Discutimos que a ideia de retângulo apresentada por eles, estava correta, mas o desenho, semelhante à Figura 42, não representava as partes que formaram a figura construída com as peças dadas.

Questão 2 - Com as mesmas peças, construir um quadrado. Desenhe aqui esse quadrado.

Todos os alunos construíram o quadrado corretamente. Consideramos que as discussões realizadas na questão anterior, a junção dos dois quadrados de áreas iguais, foi um movimento mais facilmente adotado pelo aluno que contribuiu para mais habilidade em reconhecer as linhas internas no quadrado. O procedimento adotado também contribuiu para desenhar o retângulo formado, a maioria dos alunos fizeram os traçados externos da figura e depois desenharam os traços internos que representavam dos recortes.

Figura 44 - Representação do quadrado por meio do desenho.



No quadrado, eles desenhavam um traço representando o perímetro, traçaram uma diagonal e, em seguida, dividiram um dos triângulos ao meio a partir do vértice. A menor dificuldade em trabalhar com o quadrado pode também estar no fato de já ter sido discutido, em sala, a questão da diagonal do quadrado.

Questão 3 - Escolha um dos triângulos e responda: é possível, utilizando cópias desse triângulo, construir um quadrado de área igual ao quadrado que você construiu na questão dois? Se for possível, quantos triângulos são necessários para essa construção?

Figura 45 - Montando o quadrado.

"Sim, se utilizar o triângulo grande vai precisar de dois".

"Sim, dois triângulos grandes".

"Sim, preciso de quatro triângulos pequenos".

"Sim, são necessários 2 triângulos por que eu escolhi o triângulo menor".

"O menor é igual a 4 x 1 = um quadrado ou um retângulo"

"Sim, dois triângulos". Aos alunos que apresentaram esta resposta, entregamos dois triângulos de áreas diferentes e pedimos para construírem o quadrado. Eles nem tentaram e já responderam que eram dois grandes e iguais. Então, comentamos que, para evitar aquilo, a resposta deveria especificar com que unidade de medida estava trabalhando.

"Sim, quatro triângulos". Tivemos o mesmo procedimento de entregar triângulos diferentes para que os alunos pudessem perceber a importância de especificar a unidade de medida.

Percebemos que foi mais fácil para o aluno que havia optado como unidade de medida o triângulo maior, pois ele visualizava no quadrado construído os dois triângulos grandes. Para os alunos que haviam escolhido o triângulo menor, foi comum a resposta dois triângulos pequenos. Na mediação trabalhávamos com quatro cópias, do triângulo pequeno, para que eles pudessem recobrir toda a área do quadrado. Para alguns alunos, foi mais complexo compreender essa relação, pois viam na construção apenas dois triângulos pequenos.

Teorema em ação

Ao mudar a unidade de medida de área, a quantidade de peça muda.

Questão 4 - Qual é relação entre a área do quadrado que você construiu e o ***triângulo*** *que você escolheu?*

"Que a área do quadrado é duas vezes maior".

"A área do quadrado é 2 vezes maior que os triângulos".

"Que a área do quadrado é quatro vezes a área do triângulo pequeno".

"A área do retângulo mede dois triângulos grandes".

"A área do retângulo mede 2 vezes o triângulo grande".

"O triângulo grande está 2x dentro o retângulo".

"O retângulo é a metade do quadrado".

Quentionamos algumas respostas e, entendemos que os alunos estavam fazendo confusão entre os nomes das figuras geométricas, o que parecia aceitável, já que eram muitos nomes de figuras nos enunciados. Pedimos para que fossem mais atenciosos lendo o enunciado. Eles pensavam em triângulo, entratanto, no momento de fazer o relato por escrito, escreviam retângulo.

*Questão 5 - Qual relação existe entre a área do retângulo que você construiu e o **triângulo** que você escolheu?*

“Para formar um retângulo eu preciso de quatro triângulos pequenos”.

“Do mesmo jeito vai formar um  só muda o tamanho e a quantidade”. Esta referência é em relação ao tamanho e quantidade de triângulo.

“A relação é que o triângulo é a metade do quadrado e a área do quadrado mede dois triângulos”.

“É que o triângulo dá 4 partes do quadrado”. Esta foi a forma do aluno expressar que o triângulo é a quarta parte do quadrado.

“Com quatro triângulos forma um quadrado”.

“Dois a mais por que eu escolhi o grande”.

“O dobro por que eu escolhi o triângulo grande”.

A área do quadrado mede 2 vezes a área do triângulo.

A área do quadrado é igual a 2X a área do triângulo grande”.

“O triângulo mede a metade do quadrado”. O aluno afirmou que não precisava escrever a palavra área por que a pergunta era sobre a área, então já estava dito que a resposta era sobre a área.

“É que o quadrado é 4X a área do triângulo”.

“É que a área do quadrado é 4X a área do triângulo pequeno”. Discutimos com a turma as respostas. Quando perguntamos qual resposta era mais completa, responderam que a segunda. Perguntamos qual das duas informava melhor o fato, a maioria considerou que as duas informavam igualmente. Nosso cuidado era verificar se o aluno não estava confundindo área com a figura.

Ao afirmarmos que nas respostas deveria aparecer escrito “área” antes da palavra quadrado, como por exemplo: a área do quadrado é igual a 4 vezes a área do triângulo. A turma concordou, no entanto, uma aluna disse que não, “porque, se eu estou medindo com a área do triângulo, eu só posso estar medindo a área do quadrado e não o seu ângulo, por isso não precisa usar o termo”. Então, perguntamos: Ah, nós então estamos medindo área? A turma ficou dividida. Perguntamos o que estávamos fazendo, responderam que estávamos comparando a área do triângulo com a do quadrado. Assentimos por seguir comparando áreas para ver quantas vezes a área de uma figura cabia na área da outra. Haveria o momento certo para instituirmos o conceito de medida de área.

Outra resposta assemelha-se a esta: “Que dois sólidos precisam de 3 triângulos”. Partimos para discutir se a figura era um sólido e o que era sólido. A discussão foi tranquila e baseada na experiência. Pedimos para eles diferenciassem, entre alguns materiais, o que eram sólidos geométricos e os que não eram. Em seguida, retomamos com a aluna a questão da unidade que ela havia escolhido, como sugerido na questão 3.

Para alguns alunos, trabalhar a relação foi difícil. Para o aluno que estava com o triângulo menor, como unidade de medida, foi fácil, pois, quando ele não abstraía o conceito dessa unidade, ele recortava o maior e tinha o retângulo formado por quatro triângulos. Para os alunos que tinham como unidade de medida o triângulo, era difícil abstrair que o retângulo era formado por dois triângulos grandes, pois, quando eles juntavam dois triângulos pequenos para formar o grande, desconfigurava o retângulo, então, era muito difícil compreender que o retângulo media dois triângulos grandes.

Entre os alunos das duas turmas, só um aluno trabalhou tendo como referência que o triângulo era a quarta parte do retângulo.

As dificuldades apresentadas nessa atividade evidenciaram a dificuldade dos alunos em trabalhar com unidades maiores do que a área a ser medida.

Agora vamos trabalhar com o triângulo diferente do que você escolheu.

Questão 6 - É possível, utilizando cópias do outro triângulo, construir um quadrado de área igual ao quadrado que você construiu na questão dois? Que relação existe entre a área do quadrado e a área desse outro triângulo?

“A área do quadrado é igual 4X a área do triângulo menor”

“Que dois triângulos grandes formarão essa área do quadrado”

“É que a área do quadrado é 2X a área do triângulo grande”

“Eu preciso de três triângulos para formar um quadrado”. O aluno considera somente a figura e não a unidade de medida estabelecida no enunciado. Entendemos, ao questionar o aluno, que ele sabe que a área do maior é o dobro do menor. Sua falta de atenção é em relação ao enunciado.

“A área do triângulo é 4X a área do quadrado”. Quando questionados sobre essa resposta, uma aluna disse: “eu preciso de 4 áreas do triângulo para fazer o quadrado”. Mas, uma vez discutimos a resposta para que o aluno entendesse que ‘área da figura’ é diferente de ‘figura’. São definições diferentes. Eles não estão confundindo, mas consideram não ser importante falar área toda vez.

“O outro triângulo é o quadruplo do quadrado”. O aluno se referia à quantidade necessária de triângulos para formar o quadrado. Mediamos junto a esse aluno levando a discussão para a turma toda. Ele, assim como outro, ainda considerava desnecessário expressar o termo área na resposta, assim, respondeu*:* “os quatro triângulos formaram um quadrado e todo quadrado tem área”. Apresentamos um quadrado vazado formado por palitos de picolé. Esse aluno respondeu: “apesar de eu não estar vendo, a área está aí, cola um papel para ‘ti’ ver”. A resposta desse aluno mostra que ele tem conhecimento conceitual da delimitação do espaço por uma figura.

Questão 7 - É possível, utilizando cópias do outro triângulo, construir um retângulo de área igual ao retângulo que você construiu na questão dois? Que relação existe entre a área do retângulo e a área desse outro triângulo?

“A área do retângulo é 4X a área do triângulo menor”

“Que dois triângulos grandes formarão essa área do retângulo”

“É que a área do retângulo é 2X a área do triângulo grande”

“Eu preciso de três triângulos para formar um retângulo”. Da mesma forma que na questão anterior, o aluno considerou somente a figura e não a unidade de medida estabelecida no enunciado.

“A área do triângulo é 4X a área do retângulo”.

“É preciso 4X o outro triângulo para faze um retângulo”.

Questão 8 - A que conclusão podemos chegar em relação a área do quadrado, do retângulo e de um dos triângulos?

“Que a área do quadrado e do retângulo são iguais, e do triângulo é menor 4 vezes ou duas se usar dos grandes”. Ele se referia ao triângulo de maior área.

"O quadrado e o retângulo têm a mesma área". Para esse aluno, o triângulo era só a unidade utilizada para medir área. Quando questionamos se o triângulo não possuía área, respondeu: "claro, se não como eu ia medir com ele?". Ele parece ter a noção de área e de instrumento de medida, no entanto, ele separa a unidade das áreas a serem medidas. Podemos considerar expressivo o quantitativo de aluno que tiveram esse procedimento de separar a unidade das áreas.

"A área do quadrado é igual a do retângulo".

"A área do quadrado é do mesmo tamanho do retângulo, mas a do triângulo é menor, cabem 4 triângulos no quadrado".

"A área do quadrado e do retângulo é igual e mede 4 triângulos pequenos".

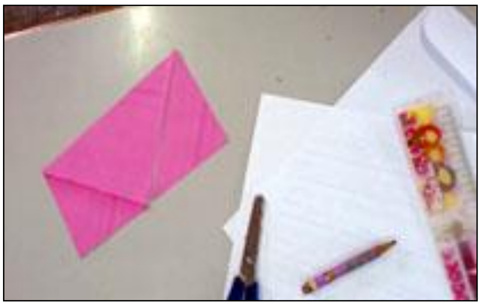
"A área do triângulo é metade do retângulo porque cabem dois triângulos no retângulo e no quadrado também".

Figura 46 - Construindo triângulo.

"A conclusão que eu cheguei é que as três figuras tem a mesma área". Quatro alunos apresentaram essa resposta. Conferindo suas produções, eles tinham construído com as peças um triângulo, o que justifica a resposta, entretanto, não atende ao enunciado que pede um dos triângulos.

Questão 9 - Você receberá um quadrado. Transforme esse quadrado em um retângulo de mesma área do quadrado. Escreva os procedimentos por você adotado para realizar essa transformação.

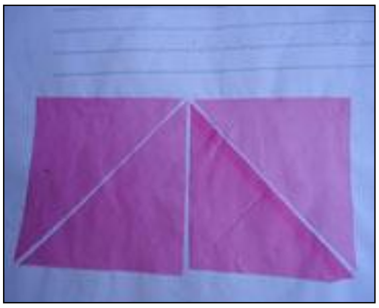
Figura 47 - O retângulo a partir do quadrado.



"Eu recebi um quadrado e reparti ao meio formando dois triângulos iguais, dividi um na diagonal, fiquei com três triângulos. Ai formei o retângulo juntando os três triângulos".

"Cortei meu quadrado em triângulos e formei um retângulo".

Figura 48 - Dois quadrados formam o retângulo.



"Primeiro dobrei ao meio dividi o quadrado na diagonal em dois triângulos iguais, depois cada triângulo eu formei dois triângulos pequenos, com cada dois triângulos eu formei dois quadrados pequenos, coloquei um do lado do outro deu um retângulo".

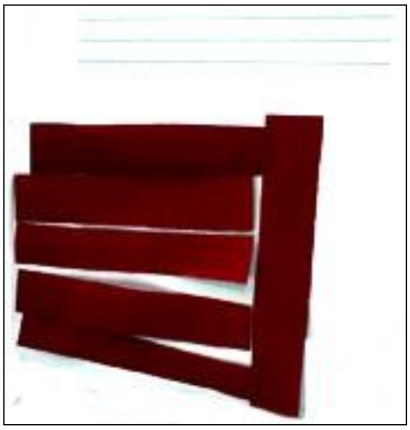
Figura 49 - Quadrado dividido ao meio.

"Cortei o quadrado ao meio, fiquei com dois retângulos coloquei um do lado do outro formou um retângulo de novo".

Figura 50 - Quatro triângulos formando um retângulo.

"Eu cortei o quadrado na diagonal, fiquei com dois triângulos cortei cada um na diagonal formei 4 triângulos juntei e formei um retângulo".

Figura 51 - Retângulo em tiras.



"Eu cortei o quadrado em um monte de tira iguais do mesmo tamanho e formei um retângulo com as tiras".

Essa questão tinha por objetivo perceber se o aluno havia compreendido que uma figura pode ser decomposta em outras que, se reorganizadas, formam outras figuras.

Pelas construções, concluímos que esse objetivo foi atingido. Ficamos satisfeitas em perceber a criatividade dos alunos na resolução da situação. Esperávamos que os alunos optassem por resolver a questão dividindo o quadrado em triângulos. Embora eles tivessem usado o " modelo" (triângulos), alguns perceberam que não era preciso, necessariamente, ser triângulo e realizaram outras decomposições. Uma resolução em particular nos chamou a atenção positivamente: um aluno cortou o quadrado em muitas tiras na horizontal, retirou uma, posicionando verticalmente ao lado das demais. Em seguida, afirmou que já não era quadrado, pois ele tinha aumentado o lado. É claro que sobra um pedaço da tira na vertical, não construindo o retângulo de mesma área. Esse procedimento mostra a mobilização do conhecimento: um quadrado tem todos os lados iguais; se eu mudar um lado, ele não é mais quadrado. No entanto, como ele tirou parte do próprio quadrado, ele mexeu nas duas medidas. Quando discutimos isso com o aluno, ele falou: "caraca, porque não pensei nisso!". A feição deveria ser a mesma que Einstein ou Nilton, provavelmente, fizeram. Tal questão também aponta a compreensão dos alunos quanto à diagonal do quadrado; foram poucos os que não usaram o termo na escrita dos procedimentos.

5 Conclusão

Consideramos essa atividade importante para a criança iniciar o processo de formalização do conceito de que medida de área está relacionada a um número e que esse número muda de acordo com a unidade de medida utilizada. Então, a área não é simplesmente um número.

Os alunos não tiveram dificuldades com as nomenclaturas nas resoluções das questões por meio da linguagem oral, mas, ao escrever, faziam muita confusão quando a questão falava de triângulo, quadrado, retângulo. Orientamos a importância de ler bem o enunciado, entender com qual figura trabalharia em tal questão. Concordamos que era confuso mesmo e que demandava muita atenção.

Alguns alunos não se concentravam de modo algum no enunciado, confundindo o que estava sendo pedido. Isto leva a concluir que muitos alunos erram a questão por não terem "paciência" para entendê-la e acabam resolvendo o que "leram" e entenderam o que, muitas vezes, não é o que foi pedido. A maior dificuldade foi entre as questões 6 e 7. Para amenizar este fator, então, com os alunos com tal dificuldade, fomos lendo e transformando o texto escrito em um "texto manipulável", como por exemplo: É possível, utilizando cópias do outro triângulo, construir um retângulo de área igual ao quadrado que você construiu na questão dois?

Nós: Bem, qual triângulo você utilizou na questão 6?

Alunos: apresentavam o triângulo.

Nós: Ótimo! É ele que é para ser usado?

Alunos: Não, o outro.

Nós: Qual é o outro, pega o outro. É com esse que vamos trabalhar. Só com ele vamos construir um quadrado?

Alunos: Não, podemos fazer cópias ou fazendo outros.

Nós: Quantas cópias?

Um aluno disse que não era possível, pois, no quadrado da questão 2, existiam dois triângulos diferentes. Esta resposta foi interessante. Perguntamos para turma: é igual ao quadrado? A resposta foi que a área deveria ser igual. Perguntamos se era um quadrado que deveria ser construído, alguns alunos responderam que sim. Outros gritavam que era um retângulo de área igual ao quadrado. Explicamos mais e seguimos com a resolução.

Então, quem tinha o triângulo menor, fez duas cópias, utilizou dois triângulos dados e quem tinha o maior, fez uma cópia.

Nós: Vamos responder à pergunta: Que relação existe entre a área do retângulo e a área do outro triângulo? Todos responderam corretamente.

Como já dissemos, concordamos que a questão era de difícil compreensão para aqueles alunos, mas foi importante para os mesmos ficarem atentos à importância de uma leitura com compreensão da mensagem, relacionarem as três figuras e trabalharem com a transitividade. Tendo em vista que a conversão da língua natural para a linguagem matemática envolve a leitura e interpretação do enunciado da situação, essa conversão, por vezes, pode ser um obstáculo para o aluno. Tais situações permitiram orientar o aluno quanto à linguagem matemática.

Duval (1993) chama esse fenômeno de não-congruência que ocorre principalmente quando o que está solicitado, no enunciado de uma questão, não é imediatamente visível, na figura, para o aluno. A figura, ou um esquema de pensamento, pode estar construído mentalmente ou no espaço físico. Isso se dá devido à apreensão perceptiva, uma primeira visão, que tende a privilegiar a percepção de algumas sub-figuras em detrimento de outras. Então, levamos os alunos a interagirem com a figura com o texto do enunciado para a solução da situação.

Os alunos de uma turma tiveram dificuldades com a quantidade de nomes de figuras geométricas nos enunciados, pois eles não liam com atenção. Como cada questão trazia uma relação entre figuras diferentes, eles acabavam por confundir ao resolver. Então, para a outra turma, imprimimos a atividade, destacamos com cores diferentes o nome das figuras geométricas. Esta ação, realmente, ajudou a chamar mais a atenção do aluno e ajudou a evitar que ele fizesse tantas confusões. Citamos, como exemplo, a questão 8 que cita três nomes: *A que conclusão podemos chegar em relação a área do quadrado, do retângulo e de um dos triângulos?* A confusão também se dá pelo fato das outras questões trabalharem com outras figuras. Logo, o aluno precisava estar muito atento ao enunciado.

Na atividade, o desenho ou a colagem foram de fundamental importância para compreendermos o pensamento do aluno e percebemos que, no contexto dos enunciados das questões, a figura foi uma ferramenta para o aluno organizar seu pensamento e, a partir da representação, é como se enxergasse o próprio pensamento. Enfim, ele elaborou estratégias de resolução da situação em questão.

De acordo com Miguel (1993), a história da matemática, como ferramenta didática, auxilia na educação matemática, agindo como instrumento que desmistifica, contextualiza, humaniza. Esses são fatores que sustentam a importância do conhecimento histórico-matemático no ensino e aprendizagem. Nessa atividade, trabalhamos sem falar explicitamente da história para os alunos, mas sabendo que existem estudos indicando que algumas civilizações faziam a decomposição das figuras em triângulos e, em seguida, transformavam os triângulos em retângulos os quais, por sua vez, eram transformados em um quadrado de mesma área da figura dada.

Nesse contexto, refletimos junto com os alunos os diferentes procedimentos na transformação do quadrado em retângulo, qual era o melhor, qual era mais fácil. Se fôssemos definir um padrão de resolução, qual deveria ser?

Utilizando as atividades resolvidas até aqui e, por meio de perguntas e respostas, levamos os alunos a perceberem que o pensamento matemático não é pronto e acabado, e sim uma construção.

ATIVIDADE 6 - CONSTRUINDO FIGURAS GEOMÉTRICAS POR RECORTE E COLAGEM

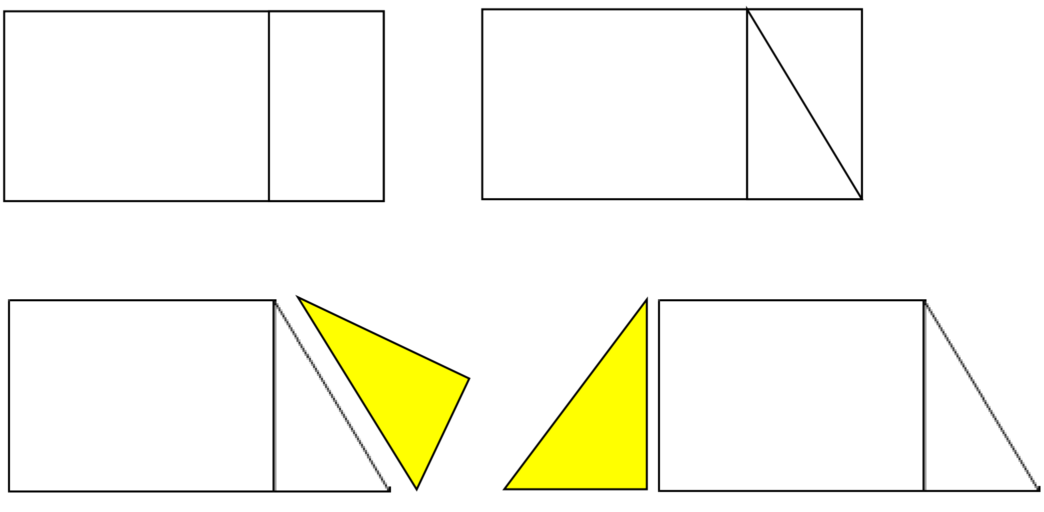
1 Um pouco de história do conceito de área

Os *Sulbasutras*, regras de corda, são documentos que contêm alguns dos conhecimentos da matemática indiana, regras para ritos religiosos, entre elas as de construção precisa de altares para sacríficios.

Segundo AMMA (1979), devido prática de construção de alteres os indianos desenvolveram métodos para transformar uma figura geométrica em outra, mais especialmente, o quadrado em outras figuras geométricas de mesma área.

Por exemplo, para converter um retângulo ou um quadrado em um trapézio o *Sulbasutra Baudhãyana* traz o seguinte método: se desejar fazer um quadrado ou um retângulo de lado menor deve-se cortar uma parte, ficando com dois retângulos. O retângulo menor deve ser dividido pela diagonal, invertido e ligado em cada lado.

Figura 52 - Transformação do retângulo em trapézio.



2 Objetivo

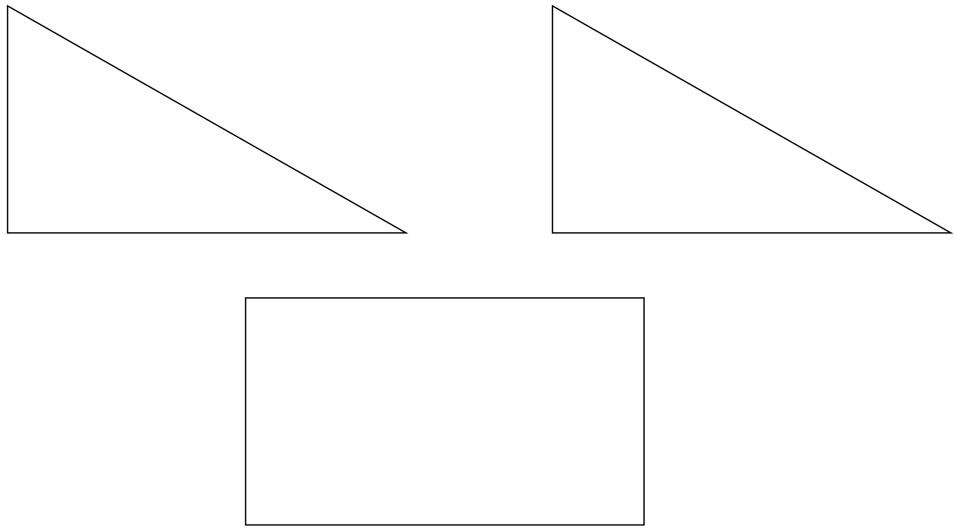
Perceber, por recorte e colagem, que figuras diferentes podem ter a mesma área.

Rever os conceitos desenvolvidos nas atividades anteriores**.**

3 Material

Um conjunto com de três peças: dois triângulos retângulos iguais e um retângulo formado por dois triângulos iguais aos outros dois dados.

Figura 53 - Material da atividade 6.



4 Procedimento

1) Dividir a sala em grupos.
2) Entregar um conjunto de figuras para cada aluno.
3) Identificar se os alunos conhecem as peças.
5) Fazer questionamentos sobre a área das figuras: qual tem a maior área?
6) Quais têm áreas iguais?
7) Solicitar aos alunos que construam uma figura utilizando as três peças, registrando-a em forma de desenho no papel.

a) Qual figura você construiu?

b) Qual é a área dessa figura?

c) Provocar no aluno a conclusão de que se não houver sobreposição de áreas, a área da figura construída será igual à soma das áreas das figuras que a compõe.

Situação 1: Utilizando as três peças, construir um paralelogramo. Com as mesmas peças, construir (1) retângulo; (2) um trapézio.

1) Orientar para que sejam registradas as soluções por meio de desenho.
2) Mediar: Qual relação existe entre a área do paralelogramo, do retângulo e do trapézio.
3) Quantos triângulos iguais ao triângulo dado formam o paralelogramo?

4) Quantos triângulos iguais ao triângulo dado foram o retângulo?
5) Quantos triângulos iguais ao triângulo dado formam o trapézio?
6) Provocar a conclusão: a área do paralelogramo é igual à área do retângulo, que é igual à área do trapézio, que é quatro vezes a área do triângulo retângulo dado. Logo, figuras diferentes podem ter a mesma área.

Situação 2: A partir das três peças, construir um losango de área igual à soma das três áreas dadas.
1) Material: as três peças para cada aluno, tesouras e réguas.
2) Orientar o registro da atividade.

5 Análise

A atividade objetiva verificar os conceitos significados pelos alunos a partir das atividades anteriores, ou seja, esperamos que os alunos, por meio da visualização, da sobreposição, da configuração e da apreensão perceptiva e sequencial, resolvam, por recorte e por colagem, as situações inspiradas na história da matemática indiana, concluindo que figuras diferentes podem ter a mesma área.

A turma da professora Vitória levou a atividade para resolver em casa. Dos 23 alunos que as levaram, 17 trouxeram-nas respondidas. Dois faltaram à aula e cinco esqueceram-se de responder ou de trazer a atividade. A turma da professora Tatiana respondeu em sala, vinte e seis alunos participaram de tal atividade.

Como não percebemos diferença entre as respostas dadas pelos alunos das duas turmas que justificasse a realização de análise separada, realizamos-na conjuntamente.

As respostas foram agrupadas por semelhanças entre elas.

Questão 1 - Você conhece essas figuras?

Essa atividade tinha por objetivo identificar se os alunos conheciam o triângulo retângulo e o retângulo.

“Sim. São dois triângulos e um retângulo”.

“Sim. São dois triângulos e um quadrado”.

“Sim, dois triângulos e um retângulo ou quadrilátero”.

“Sim. Porque o retângulo tem quatro lados e triângulo três lados”.

“Sim, eu conheço porque eles têm 90^0 e três lados”.

“Sim. Eu conheço o quadrado que tem quatro lados iguais e o triângulo de lados iguais”.

“Sim, é um retângulo e dois triângulos porque o azul (retângulo) é de 90^0 e o rosa e o vermelho (triângulos) um de 90^0 e menos de 90^0”.

“Sim, um retângulo e daí o retângulo si transforma em dois triângulos”.

Como esperávamos, a maioria dos alunos identificou as figuras sem nenhuma dificuldade. Dois alunos confundiram o retângulo com o quadrado. Na turma da professora Tatiana, ela trabalhou a questão, demonstrando que todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado. A professora Vitória recapitulou a definição de quadriláteros, quadrado, triângulo e triângulo retângulo.

Nessa discussão, notamos que os alunos tinham o conhecimento do conceito de quadriláteros, ângulos internos, retas paralelas, quadrado, retângulo, ângulo reto e triângulo. Então, esses foram os conceitos em ação para responder aos questionamentos da respectiva professora.

Questão 2 - As áreas dessas figuras são iguais ou diferentes? Há alguma relação entre suas áreas?

“As áreas dos triângulos são a mesma do retângulo, os dois triângulos cobrem o retângulo”.

“Os dois triângulos tem áreas iguais, portanto a área de um triângulo é a metade de um retângulo”.

“Diferentes, o retângulo tem a área de dois triângulos”.

“Não porque eu coloquei o triângulo em cima do retângulo e vi que o triângulo tem área menor”.

“Diferentes, colocando um triângulo sobre o quadrado ocupa metade do quadrado, e colocando os dois triângulos sobre o quadrado ocupa todo o espaço. Os dois triângulos têm a mesma área”.

“As áreas dos triângulos são diferentes do retângulo. Se juntar os triângulos vão formar o retângulo, mas o retângulo é o dobro do triângulo”.

“As áreas são diferentes, mas há uma relação entre suas áreas: o retângulo é o dobro do triângulo, e o triângulo é a metade do retângulo”.

Todos os alunos utilizaram sobreposição para responderem a questão.

Teoremas em ação.

Dois triângulos iguais formam um retângulo.

Se o retângulo é formado por dois triângulos iguais, então a área do triângulo é igual à metade da área do retângulo.

Se dois triângulos retângulos formam um retângulo, a medida da área do retângulo é o dobro da área do triângulo.

Discutimos com os alunos a formação de retângulos por triângulos. Entregamos dois triângulos equiláteros e pedimos para formarem o retângulo. Essa atividade levou os alunos a concluirem que os triângulos devem ser retângulos e iguais.

Questão 3 - Utilizando as três peças, sem sobreposição, construir uma figura. Desenhe essa figura aqui.

Apresentamos as construções mais anunciadas pelos alunos:

Figura 54 - Representação de peixe e trapézio.

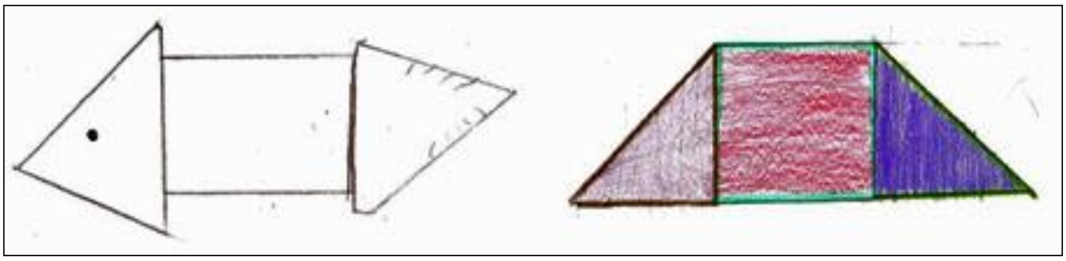


Figura 55 - Representação de paralelogramo e retângulo.

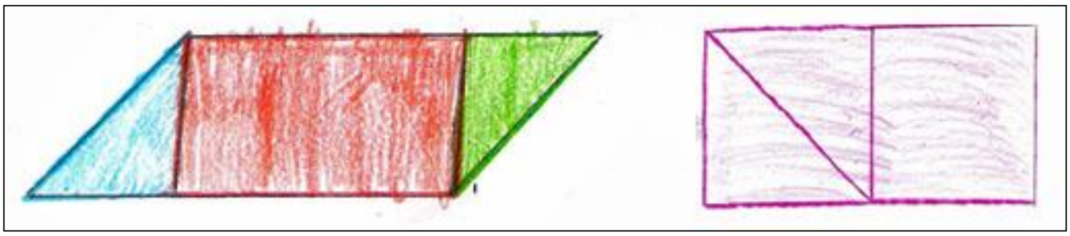
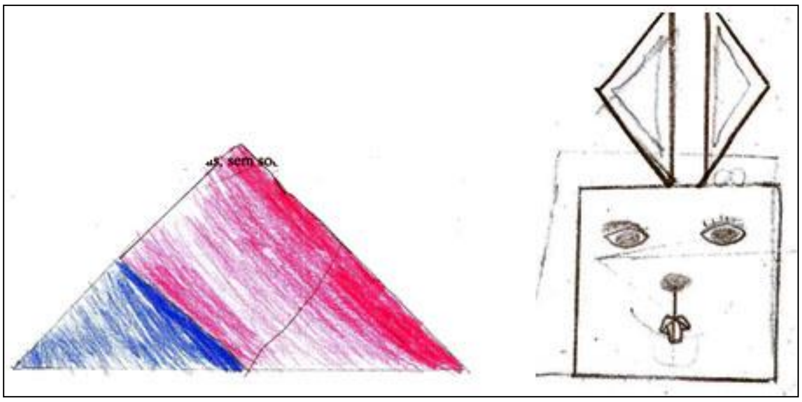


Figura 56 - Representação do triângulo e coelho.



A maioria das composições eram figuras geométricas.

Questão 4 - Qual figura você construiu?

"Retângulo, paralelogramo, trapézio, triângulo, TV 42' de Led, barco, gato, coelha, índio, peixe".

Questão 5 - Qual é área da figura que você construiu? Justifique sua resposta.

"Duas pequenas e uma grande".

"Dois triângulos e um retângulo".

"Dois retângulos. Dois triângulos formam um retângulo".

"Quatro triângulos".

"Trapézio. Porque tem um par de lados paralelo e um par de lados concorrente".

Questão 6 - Usando as três peças, construir um paralelogramo e o represente por desenho.

As respostas foram dentro do esperado, uma vez que já havíamos realizado uma atividade similar anteriormente. Os alunos que responderam "duas pequenas e uma grande" e "dois triângulos e um retângulo", trabalharam com unidades diferentes e, quem respondeu "dois retângulos" ou "quatro triângulos", trabalhou com a mesma unidade, transformando uma unidade em outra. Foi utilizada a decomposição para a transformação de unidade. Quando questionados quanto à medida da área, as respostas eram semelhantes às da questão anterior.

Conceito em ação

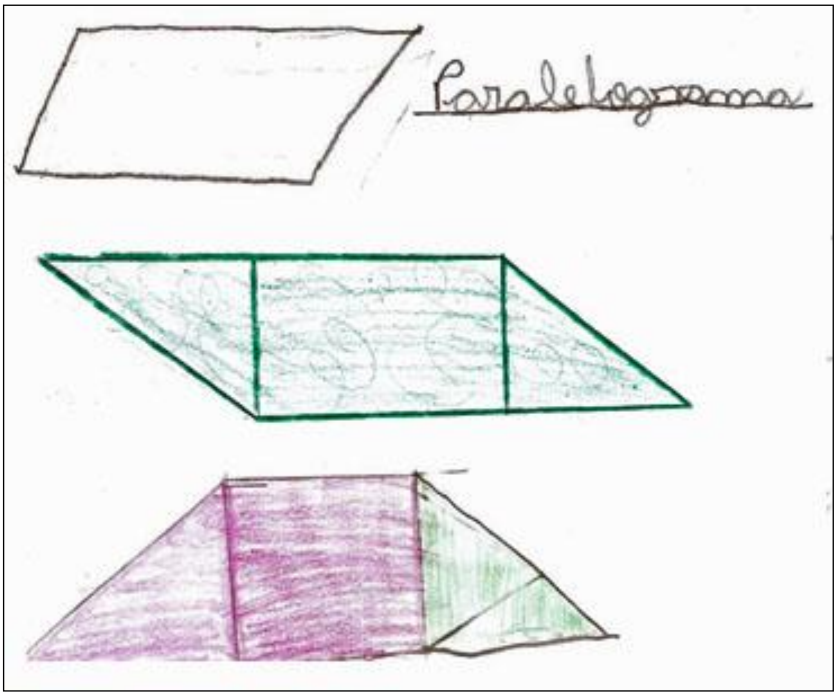
A área de uma superfície pode ser medida utilizando-se duas unidades de medidas diferentes.

Uma unidade de medida pode ser transformada em outra unidade de medida.

Resolução da situação 1

Questão 7 - Usando as três peças construir um paralelogramo, e representá-lo por meio de desenho.

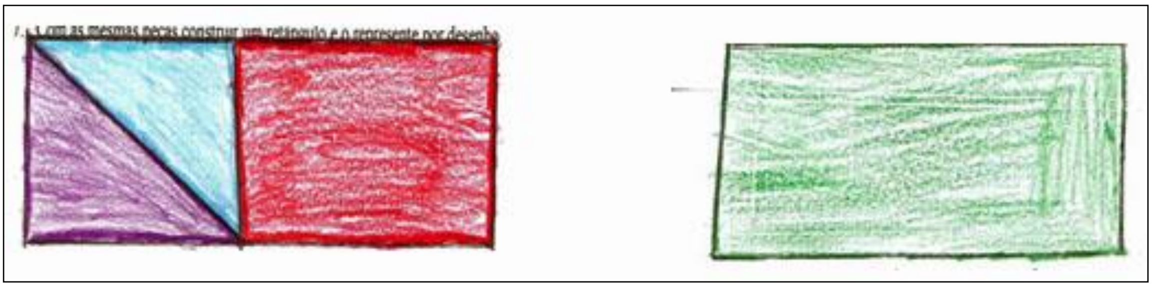
Figura 57 - Representação do paralelogramo e do trapézio.



Um grupo desenhou o trapézio, deixamos para verificar se eles perceberiam o erro na atividade oito. Eles desenharam corretamente o trapézio na questão oito, mas não retomaram essa questão, então, fizemos a intervenção, eles responderam que haviam confundido os nomes.

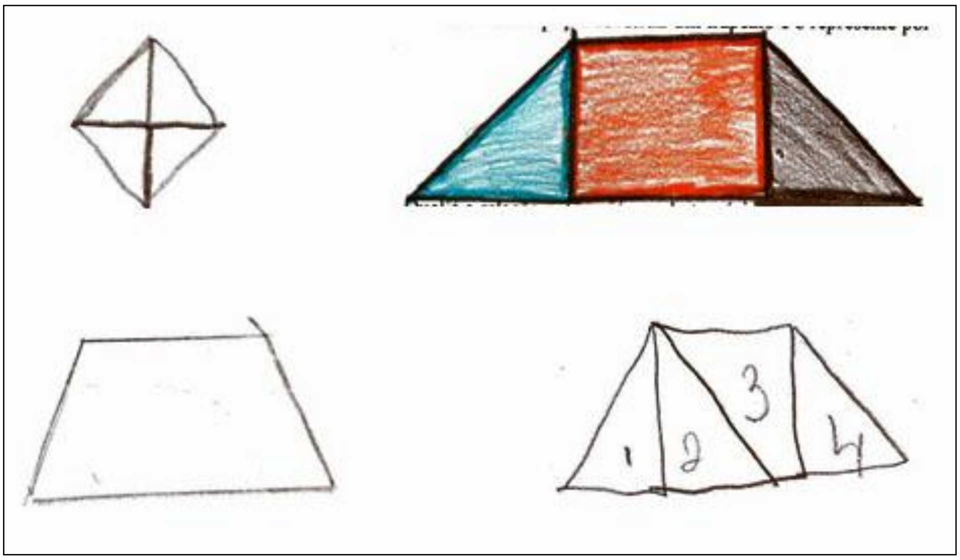
Questão 8 - Com as mesmas peças, construir um retângulo, represente-o por desenho.

Figura 58 - Representação do retângulo.



Questão 9 - Com as mesmas peças, construir um trapézio e represente-o por desenho.

Figura 59 - Produções para a construção do trapézio.



Um aluno desenhou o losango; ao conversarmos com ele, percebemos que ele não havia utilizado as figuras dadas. Simplesmente, havia lido o enunciado e desenhado. Não sabia distinguir o losango do trapézio. Aproveitamos e discutimos a questão com a turma apresentando o losango. Os alunos concluíram que com as três peças não era possível construir o losango a não ser que o retângulo fosse dividido em dois triângulos retângulos.

Questão 10 - Qual é a relação entre as áreas do trapézio, do retângulo e do paralelogramo?

"Áreas são iguais".

"Todas medem 4 triângulos"

"Todas são feitas de um quadrado e dois triângulos, então eles têm área exatamente igual".

"Dois triângulos e um retângulo".

Teorema em ação

Se duas ou três figuras podem ser recobertas pelas mesmas figuras, então elas têm a mesma área.

Conceito em ação

Figuras diferentes podem ter áreas iguais.

Questão 11 - Quantos triângulos iguais ao triângulo dado formam o paralelogramo?

"Quatro triângulos".

"Dois triângulos".

"Dois triângulos e um retângulo".

Teorema em ação

Se utilizarmos a mesma unidade de medida (triângulos), para medir figuras diferentes e elas medirem a mesma quantidade dessa unidade, as áreas das figuras são iguais.

Ao discutirmos as respostas dadas por alguns alunos: "dois triângulos e um retângulo", percebemos que estes não abstraíam a definição de unidade de medida, ou seja, como eles só tinham dois triângulos, não consideravam possível a figura medir quatro triângulos. Apesar de compreenderem que o retângulo poderia ser formado por dois triângulos, que não estavam presentes, pois, para isso, o retângulo deveria ser recortado, eles não conseguiam utilizar os dois triângulos que formam o retângulo na contagem da medida.

Assim, o retângulo teria quatro triângulos e mediria quatro triângulos. Para esses alunos, entregamos quatro triângulos e dois retângulos. Pedimos que eles utilizassem os triângulos a fim medirem a área do paralelogramo, depois que utilizassem os retângulos. Em seguida, deixamos com eles apenas um triângulo e um retângulo. Pedimos que repetissem a medida de tal figura. Então, perguntamos: se utilizarmos, como unidade de medida o triângulo, qual será a medida da área do retângulo? Quando utilizamos, como unidade de medida o retângulo, qual é medida da área do paralelogramo? Em seguida, questionamos se a área da figura havia mudado? Os alunos concluíram que não, o que havia mudado era a unidade de medida, por isso encontramos um número diferente, quatro triângulos e dois retângulos.

Teorema em ação

Ao utilizamos unidades de medida diferentes, para medir a mesma área, encontraremos um número diferente.

Utilizando unidade diferente para medir a mesma área, a área não muda o que muda é a medida da área.

Questão 12 - Quantos triângulos iguais ao triângulo dado formam o retângulo?

"Quatro triângulos iguais".

"Dois triângulos".

As duas respostas estão corretas. A pergunta deixou margem para as duas respostas. Houve aluno que considerou o retângulo dado e houve aluno que considerou o retângulo construído com as três peças.

Questão 13 - Quantos triângulos iguais ao triângulo dado formam o trapézio?

"Quatro triângulos".

"Quatro triângulos, o quadrado é só cortar na diagonal".

"A área de dois retângulos ou quatro triângulos".

"Que quatro triângulos são iguais às três figuras".

"Dois triângulos". Um aluno deu essa resposta, mais uma vez mediamos para que ele compreendesse a utilização da unidade de medida.

Teorema em ação em relação às questões 11, 12 e 13:

A medida da área da figura é o número de triângulos necessários para recobri-la.

A medida da área da figura é o número de retângulos necessários para recobri-la.

Questão 14 - O que podemos concluir em relação à medida da área do triângulo, do retângulo, do trapézio e a do triângulo dado?

"Podemos concluir que todos eles têm a mesma área sendo de triângulo ou quadrilátero só muda a posição".

"Usamos quatro triângulos para fazer todas e são iguais".

"Que todos têm a mesma área porque todos usam as mesmas peças".

"E que todos têm ângulo reto".

"Que a área do triângulo é menor que a do retângulo e do trapézio".

Conceito em ação

Figuras diferentes podem ter a mesma área.

Resolução da situação 2

Questão 15 - A partir das três figuras construir um losango de área igual à soma das áreas das três figuras dadas. Cole aqui o losango.

Todos os alunos recortaram o retângulo em dois triângulos retângulos e formaram o losango.

Figura 60 - Construção do losango com as figuras dadas.

Teorema em ação apresentados pelos alunos na resolução das questões.

O losango pode ser formado por quatro triângulos retângulos iguais.

O losango é formado por triângulos retângulos.

No losango os ângulos do centro são todos iguais a noventa graus. Os alunos não definem as diagonais dos losangos. Quando fazem o desenho, sempre o representam, lembrando que o losango é formado por quatro triângulos retângulos.

5 Conclusão

Essa atividade tinha como objetivo revisitar os conceitos aprendidos até o momento.

Concebemos que os alunos, por meio de conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, utilizaram as apreensões perceptiva e sequencial (Duval, 1994), para a execução das configurações solicitadas. Pela visualização, eles interpretaram a forma das figuras, por isso, a apreensão perceptiva e a sequencial se deu na construção do paralelogramo, do trapézio, do retângulo e do losango com o material dado.

Consideramos que os alunos compreenderam que medir área é comparar duas áreas entre si, ou seja, verificar quantas vezes uma área tomada como unidade de medida cabe em outra área. Eles identificaram a relação entre áreas por meio de composição e decomposição de figuras, procedimentos utilizados nas atividades anteriores e, também se apropriaram do conceito de que figuras diferentes podem ter áreas iguais.

O uso de unidades de medidas não padronizadas permite ao aluno perceber que medir é comparar grandezas. O aluno compreendeu o conceito de unidade de medida e que pode haver relação entre unidades de medidas, por isso, uma pode ser transformada em outra. Mostrou, também, indícios de compreensão da relação entre o número e a unidade de medida ao afirmar que a área pode ser a mesma, mas ter medida de área diferente de acordo com a unidade de medida utilizada. Em atividades posteriores, discutiremos a necessidade da padronização das unidades.

Estamos atentos, pois essa relação entre as unidades de medidas apesar de ser significativa para os alunos, ainda não foi bem apropriada por eles, por isso trabalharemos mais o conceito de unidade de medida e suas relações em outras atividades da sequência.

Consideramos que, na resolução dessa atividade, os alunos mobilizaram conhecimentos construídos nas atividades anteriores os quais foram pertinentes na resolução da atividade.

Buscamos identificar teoremas em ação utilizados, pois, para Vergnaud (1996), eles são os elementos cognitivos que permitem a ação do sujeito ser operatória.

Por meio da mediação, buscamos identificar e compreender os erros apresentados pelos alunos e os teoremas em ação, pois informavam a base conceitual do aluno, implícita ou explicitamente. Tanto o erro do aluno quanto os teoremas em ação foram importantes na identificação das dificuldades dos alunos e dos conhecimentos utilizados. Por este motivo, a teoria dos campos conceituais pareceu-nos um bom instrumento de análise na construção do conceito de área.

Quanto à história da matemática, trabalharmos com a transformação de figuras por composição e sobreposição mostrou-se eficaz no desenvolvimento de conceitos na comparação de áreas de figuras.

ATIVIDADE 7 - CONSTRUÇÃO DE UM QUADRADO QUE TENHA A METADE DA ÁREA DE UM QUADRADO DADO.

1 Um pouco de história do conceito de área

Escrito por Platão, provavelmente, por volta do ano 385 a. C., no qual Sócrates propôs ao escravo de Mênon o problema de encontrar o lado de um quadrado cuja área fosse o dobro da área de um quadrado de lado 2. No apêndice transcrevemos, a partir da tradução de Paleikat (1999), a parte desse diálogo diretamente a nossa atividade.

Encontramos, também, referencia na história da matemática indiana, o *Apastamba Sulbasutra* apresenta três pontos no o teorema da diagonal (propriedade da diagonal de um retângulo) sendo um deles: ‘a diagonal de um quadrado produz o dobro da área’. Portanto, se um quadrado é desenhado na diagonal de um quadrado dado sua área é o dobro da área do quadrado dado’. (AMMA, 1979, p. 48).

> Um sucesso notável das matemáticas védicas foi o descobrimento de um procedimento para calcular raízes quadradas com alto grau de aproximação. O problema pode ter surgido originalmente da tentativa de construir um altar quadrado cuja área seja o dobro da de um altar quadrado dado [união de dois deuses em um deus]. Encontramos um procedimento para determinar um valor aproximado para 2 dado por Apastamba e Katyayana em seus Sulbasutras. (GASPAR, 2004, p. 210).

2 Objetivos

Identificar o quadrado e seus atributos. Perceber que a área de um quadrado é igual ao dobro da área do triângulo, que se obtém, cortando o quadrado ao longo de uma das suas diagonais. Perceber que é possível decompor o quadrado em dois retângulos de mesma área e que é possível construir um quadrado que tenha a metade da área de um quadrado dado.

3 Material

Três quadrados iguais para cada criança sendo um deles branco.

4 Procedimento

1) Dividir a sala em grupos.
2) Entregar a cada criança os três quadrados iguais.
3) Pintar a área do quadrado branco.
4) Retomar a discussão de que o quadrado tem lados e ângulos iguais.
5) Introduzir um novo elemento do quadrado, a diagonal, por meio da atividade a seguir: pedir aos alunos que dividam dois desses quadrados em duas figuras de mesma área, fazendo dobradura. Duas soluções distintas podem surgir: dobrando ao longo de uma das mediatrizes ou ao longo de uma das diagonais. No caso de todos os alunos dobrarem ao longo de uma das mediatrizes, perguntar se não há outro jeito de fazer a divisão.
6) No caso da dobra ao longo da diagonal, perguntar se conhecem o nome dessa linha. Caso não conheçam, nomear esse elemento do quadrado.
7) Perguntar que figura eles formaram ao dobrar um quadrado ao longo da diagonal. Qual é a relação entre a área do quadrado e a do triângulo.
8) Os alunos devem colar parcialmente cada um dos quadrados de modo que possam abrir e fechar a dobradura indicando, assim, a figura que tem a metade da área. Escrever algo equivalente a "Esse retângulo tem a metade da área desse quadrado"; "Esse triângulo tem a metade da área desse quadrado".
9) Colocar a situação a seguir:

5 Situação 1

1) Vocês construíram um retângulo e um triângulo que têm cada um deles a metade da mesma área do quadrado que vocês receberam. Utilizando dobraduras, é possível construir um quadrado que tenha a metade da área do quadrado que vocês receberam?
2) Pedir aos alunos que registrem os procedimentos.
3) Depois de aguardar a resolução dos alunos, refletir as possíveis soluções e orientar.
4) Fazendo dobraduras, dividir o quadrado em quatro quadrados de mesma área.
5) Questionar: qual é a área de cada quadradinho?
6) Dividir cada quadradinho ao longo de uma diagonal. O que acontece com a área de cada parte?
7) Que figura é formada pelas diagonais? Qual é a área dessa figura?

8) Levar o aluno a perceber que o quadrado formado por uma das diagonais de cada quadradinho tem a metade da área do quadrado formado pelos quatro quadradinhos.
9) Levar os alunos a perceberem que a área do quadrado construído sobre a diagonal de um dos quadradinhos tem o dobro da área do quadradinho.
10) Pedir que os alunos colem no caderno e escrevam uma frase semelhante à que escreveram para o retângulo e o triângulo e colarem sobre o lado do novo quadrado.
11) Orientar que todos os procedimentos devem ser registrados.

6 Análises preliminares

Estudos acerca do ensino de geometria, nos anos iniciais do ensino fundamental, e a nossa experiência como docentes, na formação continuada de professores, que atuam em tal nível de ensino, demonstram que uma dificuldade apresentada pelos alunos, no que se refere à medida de grandeza da área, é não compreender o sentido da unidade quadrática. Então, algumas situações foram elaboradas com o objetivo de levar o aluno a construir o conceito de unidade de medida, nesta atividade o trabalho envolve a ideia da transformação de uma figura em um quadrado de mesma área.

Buscamos inspirações na história indiana que apresenta problemas do tipo: como construir um altar que tenha a metade da área do altar dado? Também na história grega, o conto de Sócrates com o menino escravo, a quem ele pede para duplicar a área do quadrado. Sócrates nos leva a pensar que, por meio da ação e de conhecimentos prévios, é possível construir novos conhecimentos.

Nas análises, preliminares consideramos que os alunos poderiam ter dificuldades na duplicação da área do quadrado por envolver muitos conceitos do campo geométrico (VERGNAUD, 1996), como de reta, área, quadrado, diagonal, entre outros, já que alguns deles não eram ainda dominados pelos alunos. Assim, optamos por trabalhar primeiro com uma atividade que abrangesse tais conceitos.

Nesse trabalho, não separaremos as análises das questões por turma, procederemos como se tivéssemos trabalhado em uma única turma. Participaram dessa atividade 50 estudantes.

7 Análises das questões

Questão 1 - Você conhece essas figuras?

Todos responderam corretamente que se tratava de um quadrado. Em uma atividade anterior, já havíamos trabalhado com o quadrado.

Questão 2 - O que podemos afirmar em relação aos lados e ângulos dessas figuras?

"Os ângulos são iguais e medem 90° e os lados também são iguais".

"Os ângulos são iguais e medem o mesmo tamanho, são de 90°".

"Os ângulos são retos e medem 90º graus e os lados são iguais".

"Os ângulos são iguais e medem o mesmo tamanho".

"Os ângulos são iguais e medem noventa graus, os lados são iguais".

"Eles têm quatro lados iguais e quatro ângulos iguais".

"Quatro lados iguais e quatro ângulos retos".

"Todo quadrado tem quatro lados iguais".

Uma aluna respondeu que os ângulos eram iguais e medem 90° graus, e os lados têm a mesma área, medimos para verificar se ela havia se descuidado. No entanto, constatamos que ela havia confundido a medida de lado com a medida de área e tem problemas com a escrita simbólica. Outra aluna disse que os lados mediam 90° graus, percebemos que ela não dominava o conceito de ângulo, apenas repetiu o que o grupo respondia.

Questão 3 - Por meio de dobradura, dividir dois desses quadrados. Cada quadrado deve dar origem a duas figuras de mesma área.

Inicialmente, cada aluno dividiu um quadrado. Uns dividiram ao meio, formando dois retângulos, poucos dividiram ao meio formando dois triângulos.

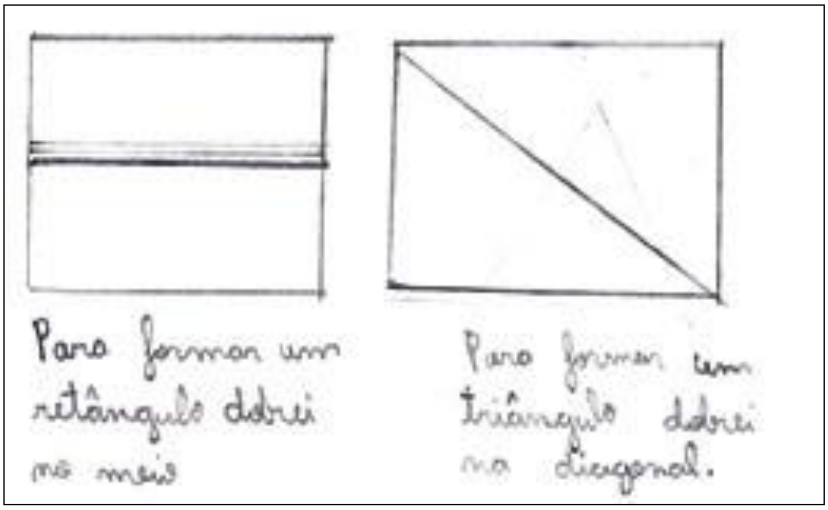
Após as apresentações de seus procedimentos, os alunos perceberam que existem formas diferentes de dividir o quadrado em duas partes iguais fazendo uma única dobra. Discutimos esse fato, e solicitamos, então, que cada um dobrasse o outro quadrado que haviam recebido formando outra figura. Então, quem havia encontrado o retângulo, ao dobrar o primeiro quadrado, ao dobrar o segundo quadrado, formou o triângulo e vice-versa.

Figura 61 - Linha pespontada representando a dobra na figura

"Eu dobrei o quadrado na diagonal e deu 1 triânguulo".

"Eu dobrei o quadrado no meio".

Figura 62 - Representação da divisão da área do quadrado ao meio por um segmento de reta.



"Para formar um retângulo dobrei ao meio".

"Para formar um triângulo dobrei na diagonal".

Questão 4 - Que figura foi formada ao dobrar um quadrado ao longo de uma das duas diagonais? Qual é a relação entre a área do quadrado e essa figura formada?

"A área do quadrado é a de dois triângulos".

"Triângulo, a relação é que a área do triângulo é a metade da área do quadrado".

"Triângulo, a relação e que a área do triângulo é a metade do quadrado".

"Triângulo, a área do quadrado é o dobro da área do triângulo".

"Triângulo, a área do triângulo forma a metade da área do quadrado. Triângulo, do triângulo é a metade da do quadrado".

"Por que se botar uma diagonal no quadrado dá dois triângulos".

"O quadrado tem duas diagonais. É um triângulo, a relação entre a área do triângulo é a metade do quadrado".

Teorema em ação

A área do triângulo obtido dobrando um quadrado ao longo de sua diagonal é a metade da área desse quadrado.

Um aluno, ainda, não escrevia a palavra área. Quando questionado, ele afirmou saber que estava comparando áreas e que, se o enunciado estava pedindo para relacionar áreas, ele não precisa escrever, estava claro. Iniciamos, mais uma vez, com esses alunos a reflexão de que uma figura geométrica tem vários atributos, então, devemos determinar quais estão sendo medidos.

Questão 5 - Cole aqui a sua dobradura de modo que possa abri-la e formar novamente o quadrado. Escreva a relação entre a área da figura formada e a área do quadrado.

Refletimos com os alunos que, se a área do triângulo formado é a metade da área do quadrado, e a área do retângulo formado é a metade da área do quadrado, e como os dois quadrados tinham áreas iguais, era possível afirmar que a área do triângulo é igual à área do retângulo e medem a metade da área do quadrado. Fomos mediando até os alunos chegarem a essa conclusão, porém, percebemos que alguns deles não estavam convencidos. Então, pedimos que fossem recobrindo uma figura com a outra. Concluímos que, se uma figura recobriu toda a outra, sem sobrar nenhum espaço, as suas áreas eram iguais.

Figura 63 - Comparando áreas.

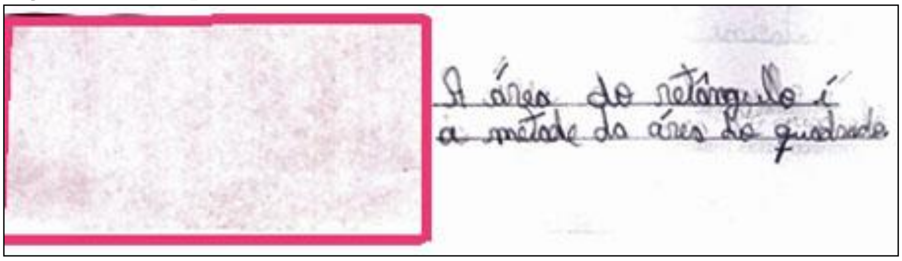


Figura 64 - Triângulo com área igual à metade da área de um quadrado

Recordamos que é possível verificar, por meio de recorte, colagem e sobreposição que figuras de formas diferentes podem ter a mesma área.

Em seguida, ponderamos: vocês construíram um retângulo e um triângulo. Cada um tem a metade da área dos quadrados que vocês receberam. Será que é possível construir, usando somente dobraduras, um quadrado que tenha a metade da área do quadrado que vocês receberam? Registrem seus procedimentos.

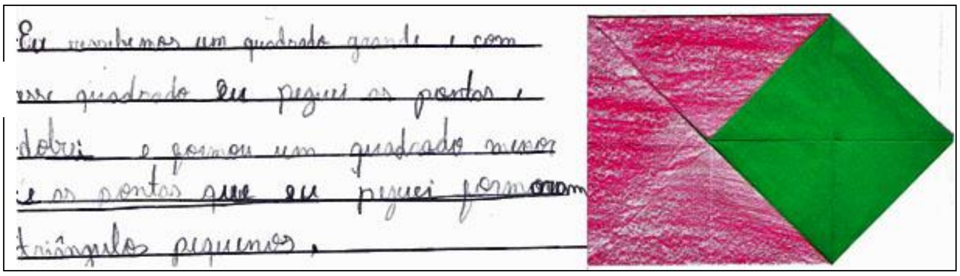
Somente uma aluna resolveu a situação. Pedimos que ela explicasse qual tinha sido o seu procedimento. Ela disse que pegou as pontas do quadrado levando-as para o seu centro.

A turma toda seguiu o mesmo procedimento. Não esperávamos aquela resposta. Então, fomos mediando quantos quadrados estavam sendo formados, qual era a medida de cada um em relação à área do quadrado dado, quantos triângulos formavam cada quadrado? O quadrado maior era formado por quantos triângulos?

Quantos triângulos formavam o quadado menor?

Um aluno respondeu que um quadrado pequeno era formado por quatro triângulos e o outro era formado só pelo quadrado. Então, pedimos que ele vincasse novamente o quadrado, ele não visualizou os quatro triângulos, orientamos que ele recortasse nos vincos. Entregamos outro quadrado para ele que o “vincou” marcando bem as dobras realizadas. Em seguida, ele nos respondeu que cada quadrado pequeno era formado por quatro triângulos iguais. Então, concluímos com a turma que as áreas dos quadrados eram iguais e que a área de cada um é igual à metade da área do quadrado grande.

Figura 65 - Quadrado formado sobre a hiponetusa de um quadrado dado.



Como tínhamos interesse em construir um quadrado sobre a diagonal do outro, entregamos outro quadrado a cada aluno e começamos novas intervenções com as questões de seis a dez dessa atividade. No entanto, na outra turma nenhum aluno construiu o quadrado, então, iniciamos a discussão pela questão seis.

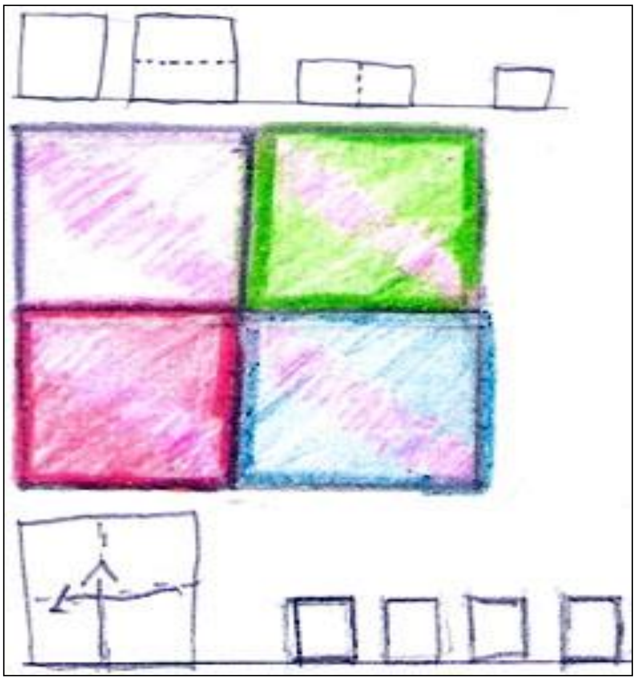
Resolução da situação 1

Questão 6 - Fazendo dobraduras, dividir o quadrado em quatro quadrados de mesma área. Faça o desenho e represente essa divisão.

Alguns alunos representaram o produto final, enquanto outros apresentaram cada passo da dobradura. Interessante notar o uso da reta tracejada para representar o vinco feito no papel. Nas duas representações, os alunos perceberam que cada quadradinho representa um quarto da área total. Alguns, inclusive, escreveram um quarto na notação fracionária.

Outros representaram as dobras por segmentos de retas orientados, indicando o sentido da dobra. Questionamos a professora da referida turma se ela havia trabalhado noções de desenho, ela afirmou que não. Os alunos disseram que haviam aprendido no ano anterior. Pedimos que eles explicassem para a turma seus procedimentos.

Figura 66 - A área do quadrado dividido em quatro partes iguais.



Essa ação dos alunos demostra os conceitos em ação, ou seja, eles mobilizaram conhecimentos apropriados anteriormente na resolução da situação em questão.

Em alguns desenhos, não havia proporcionalidade entre os tamanhos dos quadrados. Quando ponderamos, os alunos afirmaram que não davam conta de desenhar igualzinho, mas o papel estava dobrado certinho. Afirmamos que as respostas dadas por alguns não poderiam ser compreendidas pelas pessoas que não estavam presentes à nossa aula, uma vez que o “papel dobradinho” não as acompanharia. Os alunos defenderam que: “o desenho indicava que cada um era um quadrado, e não tinha como não ser, pois para ser um quarto, os quadrados deveriam ser do mesmo tamanho apesar do desenho não estar certinho”.

Nesta oportunidade, discutimos, então, o conceito de fração e o valor da representação. Apesar de desenhar, apagar, redesenhar e usar a régua, muitos não deram conta de aproximar da representação correta. Explicamos que algumas habilidades vêm com a experiência, logo, ao final das atividades, eles estariam lidando melhor com a régua ou com o desenho à mão livre, de acordo com o interesse de cada um, mas que não podiam perder de vista aquele objetivo. Consideramos fundamental que os alunos entendessem os objetivos determinados pela professora e que determinassem objetivos individuais pertinentes à sua participação no desenvolvimento das atividades. Acreditamos que isso faz com que se tornem responsáveis por atingir objetivos próprios e, por sua vez, corresponsáveis em buscar atingir os objetivos estabelecidos pela professora, que não podem estar alheios aos dos alunos, uma vez que, para o estudante, pode não ser interessante engajar-se em objetivos que não são seus e se também não sabem onde querem chegar com tal atividade.

Questão 7 - Qual é a área de cada quadradinho?

“Um quarto da área grande”.

“O quadrado grande é 4 vezes o quadrado pequeno”.

“O quadrado pequeno é ¼ do quadrado grande”.

“Um quarto”.

“Um triângulo pequeno é a metade do quadradinho”. Os alunos de um grupo antecederam o próximo procedimento.

“É ¼ da área do quadrado grande”.

“É um quarto da área do quadrado dado”.

“A área de cada quadradinho é um quarto do quadrado dado”.

“A área é quatro vezes menor do que a área do quadrado”. Dois alunos responderam: “¼ de cada quadradinho”, os outros dois, do mesmo grupo, escreveram corretamente. Ao mediarmos no grupo, percebemos que os alunos tinham o pensamento correto, entretanto, ao expressar o conceito por meio da escrita, erravam. Percebemos que não era por descuido, pois, após a intervenção, ao escreverem novamente, deram a mesma resposta “¼ de cada quadradinho”.

Em uma turma, já havia sido trabalhado o conceito de fração, os alunos não tiveram nenhuma dificuldade e utilizavam a representação numérica para um quarto. Na outra turma, quando a situação foi colocada, a professora disse que eles não tinham esse conceito. Então, pedimos para que eles dividissem o quadrado nas dobraduras e trabalhamos conceito de um quarto com significado “parte todo” sem entrarmos na representação numérica.

Questão 8 - Se dividir cada um dos quatros quadradinhos ao longo de uma diagonal o que acontece com a área de cada parte?

Para que o aluno pudesse responder essa questão, orientamos que as dobras deveriam estar bem vincadas. Em uma sala, houve um grupo que apresentou dificuldade, então, pedimos aos componentes daquele grupo que abrissem o quadrado e colorissem de cor diferente, um dos quadradinhos, desenhassem nele uma diagonal e dobrassem o papel sobre essa diagonal. Logo eles perceberam que, para continuar tendo um quadrado, o papel tinha de ser dobrado em uma diagonal específica.

“Cada quadradinho vira 2 triângulos, ficando 8 triângulos”.

“Vira um triângulo que tem a metade de um quadradinho”.

“Vira um triângulo que tem a área igual à metade da área do quadradinho”.

“Cada quadradinho vai ter a metade”. Ao ser questionado sobre sua resposta esse aluno disse: “Cada quadradinho vai ficar pela metade, vira um triângulo. Forma um triângulo que é a metade da área dos quadrados pequenos”.

Solicitamos aos alunos que apresentassem suas respostas à sala. Nesse momento, mais uma vez, chamamos a atenção para a importância de expressar o atributo que estava sendo medido, no caso, a área. Das respostas dadas, escrevemos duas respostas no quadro a título de exemplo: “cada triângulo vai ter a metade”, “cada triângulo vai medir metade da área de um quadradinho”, e discutíamos a importância das frases terem a informação completa, pois as figuras têm outros atributos, além da área. No caso da primeira, cada triângulo terá a metade de quê? Também abordamos a importância da unidade de medida estar representada junto à quantidade, ao número.

Questão 9 - Que figura é formada pelas diagonais? Qual é a área dessa figura?

“Um quadrado. É a metade do quadrado dado”.

“Um losango, um quadrado é a metade da área do quadrado dado”.

“Um losango e é a metade da área do quadrado dado”.

“Forma um quadrado”.

“Um quadrado. A área é a metade da área do quadrado maior”.

“Triângulo mede metade da área do quadradinho”.

A maioria das respostas foi semelhante à primeira, o que nos levou, mais uma vez, a retomarmos a necessidade de expressar o termo área e a unidade de medida na resposta. Quando eram questionados, respondiam corretamente, o que nos apontava a pressa em responder ou a preguiça de escrever muita coisa. Então, nosso trabalho evidenciava, em cada questão, a importância de se usar o atributo que estava sendo medido e a unidade com a qual estava sendo comparado.

Alguns alunos tiveram dificuldade em entender o que o enunciado solicitava. Assim sendo, pedimos que primeiro marcassem com um lápis de cor diferente cada diagonal que estava vincada, e depois perguntamos: se olharmos para as quatro diagonais juntas, elas formavam alguma figura? Quando a resposta estava errada, tentávamos, primeiramente, perceber se o aluno tinha tido dificuldade com o enunciado, ou em encontrar as diagonais.

Os alunos, por meio dessas questões, foram colocados em situações, nas quais operaram com a modificação de figuras, separando-as em partes, formando subfiguras que poderiam ser reagrupadas voltando à forma original. Essa transformação na figura é denominada de modificação mereológica por Duval (1994), que reconhece nessa operação a possibilidade de trabalhar as medidas de área por soma de partes elementares como realizado por nossos alunos.

É justamente esse tipo de apreensão, de operação, que permite dar sentido dinâmico às características da figura, podendo-se, assim, fazer manipulações, física ou mental, sobre o todo ou parte da figura.

Questão 10 - Cole aqui a dobradura e escreva a relação do quadrado dado e a área do quadrado obtido por meio da dobradura.

A resposta era que o quadrado era a metade da área dada. Perguntamos, então, como eles tinham certeza. O maior número de resposta foi que havia um quadrado inteiro e um formado por quatro triângulos. Pedimos que eles olhassem se não podíamos falar que o outro inteiro também tinha marcado nele quatro triângulos.

Figura 67 - Um quadrado dá origem a dois quadrados de áreas iguais

Como eles concordaram, perguntamos: se cada quadrado era formado por quatro triângulos, o quadrado maior era formado por quantos triângulos? Logo uns responderam oito, outros tiveram de contar, encostando o dedo em cada triângulo, para terem certeza de que eram oito triângulos.

Perguntamos: se olharmos apenas para um quadradinho, aquele que a área mede ¼ da área do quadrado grande, e compararmos com o quadrado formado pelas diagonais, o que podemos dizer em relação às medidas de suas áreas? Ninguém respondeu nada. Assim, avaliamos que a situação podia estar confusa por lidarmos com muitas dobras, e eles estarem confundindo lado de um quadrado com a diagonal de outro. Estávamos trabalhando com três quadrados de medidas de áreas diferentes no mesmo pedaço de papel. Retomamos pedindo que pintassem um quadrado que representasse um quarto do quadrado maior.

Figura 68 - A área do quadradinho mede ¼ da área do quadrado grande.

Um aluno perguntou: “do quadrado grandão?”. Outro perguntou: “do quadrado mais de fora?” Depois que todos haviam pintado, pedimos que marcassem com o lápis de cor a diagonal do quadradinho pintado. Em seguida, perguntamos se aquela diagonal que eles haviam marcado era o lado de algum quadrado. A resposta foi sim. Então, perguntamos: esse quadradinho mede quantos triângulos? “Dois”, foi a resposta dada.

Continuamos com as perguntas, provocando no aluno a percepção de que o quadrado formado tinha como lado a diagonal do quadradinho, e sua área media quatro triângulos. Alguns alunos não respondiam corretamente às perguntas, consequentemente, passamos a verificar se não entendiam às perguntas ou estruturavam esquemas mentais que os levariam à resposta correta. Então, fomos de grupo em grupo, apontando o quadradinho, a sua diagonal e o quadrado formado sobre a diagonal e questionando quantos triângulos formavam cada quadradinho e quantos formavam o quadrado formado sobre a diagonal.

Concluímos perguntando qual era a relação entre as duas áreas daqueles quadrados. No grupo, apenas 9 alunos tiveram dificuldades em chegar a essa conclusão.

Na Figura 68, temos um exemplo em que o aluno, ao fazer a colagem, quer nos mostrar o quadrado dobrado em quatro quadrados de mesma área e formados por dois triângulos iguais. Então, ele deixa representados dois quadrados e dois triângulos que são, respectivamente, a metade dos outros dois quadrados.

A resolução dessa atividade, em sua totalidade, envolveu diversos aspectos relacionados aos campos conceituais. Do campo conceitual geométrico, a leitura e a interpretação das figuras geométricas: retângulo e quadrado e suas propriedades; do campo conceitual das grandezas, ora tomando os quadrados de tamanhos diferentes como unidade de medida, ora tomando o triângulo com tamanhos também diferentes de acordo com o respectivo quadrado como unidade de medida.

Nessa atividade, observamos, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), que a maioria dos alunos compreendeu que a área de um quadrado é igual ao dobro da área do triângulo, obtida ao cortar o quadrado ao longo de uma das suas diagonais. Perceberam que é possível decompor o quadrado em dois retângulos de mesma área, e que é possível construir um quadrado que tenha a metade da área de um quadrado dado, diante de situações de operações de relação entre a parte e o todo da figura, conforme a teoria de Duval (1994).

Porém demostraram certa dificuldade em reconhecer que a área do quadrado construído sobre a diagonal de um quadrado é o dobro da área do quadrado dado. Entretanto, essa dificuldade era por nós esperada, por isso, ao invés de resolver o problema colocado por Sócrates no *Mêno* de Platão, que equivale a construir um quadrado de área duas vezes maior que a de um quadrado, cuja área é igual a quatro unidades quadradas, o problema foi modificado para encontrar a área de um quadrado, cuja área fosse a metade da área do quadrado dado.

O problema colocado por Sócrates no *Mêno* de Platão foi de determinar o lado de um quadrado que tivesse o dobro da área de um quadrado de lado 2. Sócrates, inicialmente, não apresentou um problema geométrico; mas, para ajudar o menino a resolvê-lo, então, ele desenhou um quadrado. No início, o diálogo era todo aritmético, Sócrates afirmou que o quadrado possuía lado 2. Questionou, então, qual era a área do quadrado que tinha o dobro da área do quadrado por ele apresentado. O menino respondeu que a área era quatro. Em seguida, Sócrates perguntou qual era o lado do quadrado que possuía tal área. O menino respondeu que não sabia. Portanto, ele não propôs ao menino um problema de construir o quadrado.

Assim, constatamos que atividades didáticas elaboradas a partir de textos da história da matemática é uma forma criativa de ensinar e aprender, que gera em sala de aula a inquietação, a curiosidade, incentivando o aluno à criatividade e à apropriação do conhecimento matemático, bem como ao desenvolvimento da leitura e da escrita, à discussão, estimulando-o à análise e à conclusão, permitindo o aluno perceber-se como ser matemático.

ATIVIDADE 8 - A ATIVIDADE EM ESTUDO: DUPLICAÇAO DO QUADRADO

1 Objetivos

Resolver o problema da duplicação do quadrado.

Reconhecer que a área do quadrado, construído sobre a diagonal de um quadrado, é o dobro da área do quadrado dado.

2 Material

Régua, tesoura, canudo e quadrados de papel.

3 Procedimentos

Primeiramente, narrar a história adaptada de Sócrates e o menino escravo. A seguir, apresentar um desafio para a turma e entregar os quadrados para cada aluno.

A história adaptada: Sócrates era um filósofo grego, que viveu entre 469 a 399 a. C.. Um certo dia, o filósofo estava conversando com seu amigo Teetetos e resolveu mostrar como um menino poderia aprender uma coisa nova. Ele chamou um menino e perguntou se ele conhecia o quadrado.

Ele então entregou um quadrado para o menino. Em seguida, perguntou ao garoto qual era a área daquele quadrado. O menino sabia como encontrar a área do quadrado. Ele, então, lançou o seguinte desafio para o menino: Eu quero que você encontre o lado do quadrado que tem o dobro da área do quadrado que eu lhe dei. O menino, com a ajuda de Sócrates, resolveu o desafio.

4 Situação

Dado um quadrado, construir outro que tenha o dobro da área do quadrado dado.

5 Procedimento

1) Dar um quadrado para cada aluno.
2) Perguntar se é possível resolver o problema utilizando apenas o quadrado que receberam. Por quê?
3) Perguntar quanto de papel precisam a mais. Dar outro quadrado de cor diferente para cada aluno.
4) Caso seja necessário, levar os alunos a descobrirem qual das figuras construídas anteriormente ajudaria a resolver o problema.
5) Depois de resolvido o problema, levar os alunos a perceberem que o lado do novo quadrado é a diagonal do quadrado dado.
6) Pedir aos alunos que colem o quadrado obtido em uma folha e escrevam uma frase relacionando o lado do novo quadrado com a diagonal do quadrado dado.
7) Comentar com os alunos que, do mesmo jeito que eles resolveram o problema respondendo a algumas perguntas, o menino escravo também resolveu o problema respondendo a algumas perguntas feitas por Sócrates.

Pessoas de diferentes lugares e que viveram em diferentes épocas, por diversão ou para resolver um problema do cotidiano de seu povo, resolveram o desafio de duplicação do quadrado. Pedir, então, que alguns alunos comentem como resolveram o desafio.

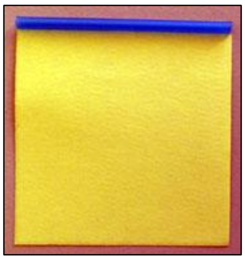
Consideramos que a ajuda dada por Sócrates representa o papel do professor que, por meio da intervenção e da mediação, orienta o aluno na construção do conhecimento e a se colocar como sujeito da aprendizagem. Segundo Fontana e Cruz (1997), as mediações realizadas pela professora contribuem para a elaboração conceitual:

> Através de suas perguntas, ela [a professora] não nega nem exclui as definições iniciais das crianças. Ela as problematiza e as empurra para outro patamar de generalização. Leva as crianças a considerarem relações que não foram incluídas nas suas primeiras definições, provocando reelaborações na argumentação desenvolvida por elas (FONTANA; CRUZ, 1997, p. 113).

6 Análise

Na análise preliminar consideramos que o fato da medida da diagonal ser um número incomensurável poderia configurar uma dificuldade da atividade para o aluno. Resolvemos trabalhar com uma unidade de medida visível e papável aos alunos. Então, acordamos com eles o estabelecimento de uma unidade de medida de comprimento, “um canudinho”, e uma unidade para medir área, no caso, um quadrado cujo lado meça um canudinho.

Figura 69 - “Um canundinho”.



Entregamos para cada aluno um canudinho (haste de cotonete ou pirulito) e um quadradinho. Informamos que aquele canudinho media uma unidade de medida igual a um canudinho. Uma aluna logo comentou que ele media cinco centímetros. Em seguida, todos os alunos da turma passaram a medir o canudo com a régua. Os alunos demonstravam a necessidade de medida explícita para a realização da atividade matemática. Isso pode estar relacionado ao hábito com atividades matemáticas essencialmente aritméticas, fruto da cultura escolar contemporânea.

Nessa circunstância, aproveitamos para envolver o estudante em uma situação de definição de unidade padrão de medida, por meio de uma votação e de transformação de uma unidade de medida em outra. Em continuidade, entregamos outro quadrado e perguntamos qual era a área daquele quadrado. Então, os alunos utilizaram o primeiro quadrado dado como unidade de medida. Disseram que cabiam quatro quadradinhos no novo quadrado.

Questionamos como sabiam que eram quatro quadradinhos. Um respondeu prontamente que era por visualização e, os outros concordaram. Pedimos que eles provassem essa afirmativa.

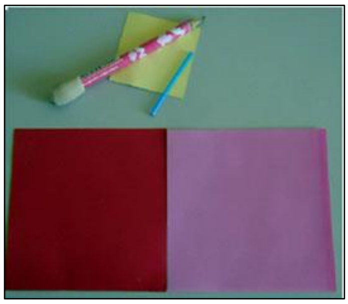
Figura 70 - Quatro quadrados.

Foi quando recobriram o quadrado com quatro quadradinhos. Depois de algumas discussões e exemplificações, concluímos que a área do quadrado do exercício é igual a quatro quadrados de lado igual a um canudo.

Definida a questão da unidade de medida, passamos para a questão seguinte. Entregamos um quadrado a cada aluno, contamos uma história de Sócrates e o menino escravo e encerramos a história com a seguinte pergunta: será que vocês conseguem resolver esse desafio? Alguns encontraram um quadrado com a metade da área dada. Esse havia sido o desafio da atividade anterior, a número sete. Após discutirmos tal questão, perguntamos se com um quadrado daria para encontrar outro com o dobro da área. Como a resposta foi não, perguntamos de quantos quadrados eles precisariam e eles responderam dois quadrados.

Entregamos mais um quadrado a cada aluno. Inicialmente, eles colocaram um quadrado ao lado do outro afirmando que a área era o dobro.

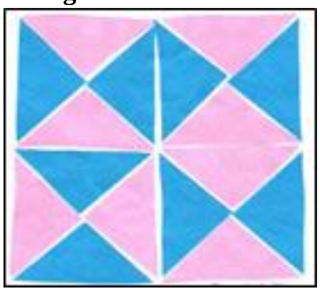
Figura 71 - Um quadrado do lado do outro.



Mediamos: certamente a figura formada tem o dobro da área do quadrado dado, mas a esta figura é um quadrado? Alguns imediatamente responderam: “É impossível! Se juntar os dois não forma um quadrado”. Outros perguntaram se poderiam recortar um dos quadrados. Respondemos que eles poderiam recortar os dois, se considerassem necessário. Julgamos tal questionamento consequência das experiências realizadas nas atividades anteriores da sequência de atividades em questão. Após algumas tentativas, eles conseguiram encontrar o quadrado com o dobro da área. Consideramos que tal “sucesso” se deu devido ao encadeamento entre as atividades e, por conseguinte, pela retomada de procedimentos realizados em atividades anteriores.

Ao término, solicitamos aos alunos que colassem o quadrado formado na folha e escrevessem o procedimento adotado para construí-lo. As falas abaixo representam as ideias agrupadas por semelhanças:

Figura 72 - Dezesseis triângulos.



“Eu dobrei os quadrados dados formando dois triângulos, dobrei os triângulos, três vezes cada, e cortei as linhas, formando dezesseis triângulos pequenos, depois formei um, medi, com os canudos, o quadrado e deu doze canudos no total, e três canudos em cada lado. O lado do quadrado maior tem o mesmo tamanho da medida da diagonal do quadrado dado. Portanto, a área é duas vezes maior”.

Figura 73 - Quatro triângulos.

“Eu peguei dois quadrados grandes e cortei ao meio e ficou quatro triângulos, depois montei um quadrado, o dobro do grande. O lado desse quadrado mede 2,8 canudos. O lado do quadrado maior tem o mesmo tamanho da medida da diagonal do quadrado dado. Portanto, a área é duas vezes maior”.

Os procedimentos adotados demonstram a percepção dos alunos de que quadrados podem ser transformados em triângulos e que a área da figura formada pela reorganização das partes é igual à soma das áreas de tais partes.

“Eu recortei os dois quadrados que a professora me deu e nas pontas do quadrado eu dobrei, depois de eu ter cortado nas pontas eu dobrei no meio desses triângulos pequenos e formou um triângulo grande. Aí eu comecei a montar, depois de duas tentativas eu consegui montar. O lado do quadrado maior tem o mesmo tamanho da medida da diagonal do quadrado dado. Portanto, a área é duas vezes maior ou a área é o dobro da área dada”.

Figura 74 - A diagonal como medida do lado.

A figura aponta para a necessidade de o aluno constatar a medida do lado do quadrado por ele construído. Ele recortou outro triângulo, ao longo da diagonal, e, com ela, mediu o lado do quadrado construído. Mais alunos realizaram esse procedimento.

Constatamos, com isso, que alguns alunos apresentaram dificuldade em perceber que o lado do quadrado por eles construído era igual à medida da diagonal do quadrado dado. Então, retomamos o movimento com as figuras e pedimos que retornassem ao quadro inicial.

Os estudantes fracionaram os quadrados em triângulos e esses em outros triângulos, então, reorganizaram essas partes em um quadrado que tinha o dobro da área do quadrado dado. Essa certeza vinha da experiência concreta de manipular todas as partes de dois quadrados de áreas iguais para formar um quadrado. Duval (1994) denomina essa operação de “modificação mereológica” que consiste na divisão de uma figura em partes, para, em seguida formar outra.

Pela apreensão perceptiva, o aluno interpreta a forma da figura em uma situação geométrica. Para esse autor, essa operação realizada pelos alunos em questão é uma sequência de tratamento possibilitada pela operação com as figuras, ou seja, a obtenção da área do quadrado pela soma da área de dois quadrados dados, sendo que as áreas dos quadrados dados são iguais.

Esse método de decomposição e recomposição de figuras provavelmente foi adotado pelos egípcios e pelos antigos geômetras chineses que calculavam com precisão área de algumas figuras como retângulos, triângulos e trapézios isósceles.

Euclides apresenta procedimento geral para transformar um polígono qualquer em um quadrado de mesma área. Para Hogben (1958), uma das principais estratégias utilizadas por Euclides, em suas demonstrações, era a decomposição dos polígonos em triângulos. Ele demonstrou que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos.

Ao longo do processo da resolução do desafio, por meio da nossa mediação, os alunos foram construindo os seguintes *teoremas em ação*:

Para dobrar a área de um quadrado é preciso somar dois quadrados de áreas iguais.

Dois quadrados iguais justapostos formam um retângulo com o dobro da área de um quadrado dado.

A soma da área de dois quadrados iguais pode ser igual à área de um retângulo formado pelos dois quadrados.

A soma de dois quadrados dá um quadrado, para isso temos que transformar os quadrados em triângulos com um ângulo reto.

Um quadrado dividido ao meio, pela diagonal, forma dois triângulos de áreas iguais.

Quando um quadrado é formado a partir de dois quadrados iguais, a medida do lado do novo quadrado não é duas vezes o lado do quadrado dado, mas a medida da área do novo quadrado é duas vezes o dobro de um quadrado dado.

Quando a área de um quadrado mede o dobro da medida da área de um quadrado dado, a medida do seu lado é igual à medida da diagonal do quadrado dado.

Conceito em ação

Um quadrado pode ser decomposto em triângulos.

Por fim, institucionalizamos que a medida da área do quadrado, construído sobre a diagonal de um quadrado dado, é o dobro da área desse quadrado.

A cada atividade que compunha a sequência de atividades, constatamos a evolução temporal do aluno, por meio de suas produções, e a partir da verificação dos teoremas em ação produzidos para que eles chegassem à formalização do conceito de área. A análise, por meio dos desenhos e das figuras construídas, dá significação do conhecimento pelos alunos e a identificação, nas situações, dos teoremas em ação e dos conceitos em ação, aponta a evolução temporal do conhecimento dos alunos. Isso tem nos ajudado a perceber a compreensão que os estudantes têm no processo de formação do conceito de área e sua medida.

ATIVIDADE 9 - TRANSFORMAR UM QUADRADO EM TRIÂNGULO ISÓSCELES DE MESMA ÁREA POR RECORTE E COLAGEM.

1 Um pouco de história do conceito de área

Na civilização indiana a transformação de um quadrado em um triângulo isósceles era utilizada na construção do *Praugacit*, altar em forma de triângulo isósceles que tinha por finalidade destruir os inimigos. Todos *Sulbasutras* trazem a mesma orientação para a edificação de desse altar. Tomar um quadrado que tenha o dobro da área do quadrado.

Construir um quadrado 'A' de área igual ao dobro de um quadrado 'B', que por sua vez tem a área desejada para o altar a ser edificado. Nesse quadrado deve-se desenhar linhas a partir do ponto médio do lado leste para os cantos inferiores (vértice do lado oposto). Então o triângulo isósceles obtido tem área igual a metade da área o quadrado 'A', e portando igual a área do quadrado 'B'. (AMMA, 1979).

Entre todas as transformações de uma figura em outra de mesma área, escolhemos a do quadrado em triângulo isósceles, pelo fato da mesma permitir aplicar o conhecimento já adquirido da duplicação do quadrado. Para isso, optamos por trabalhar com a história explicita nessa atividade, orientando a resolução por etapas.

2 Objetivo

Trabalhar com a duplicação do quadrado. Construir um quadrado igual em área a um triângulo isósceles dado. Verificar a conservação de área na transformação do triângulo isósceles em quadrado.

3 Material

Quadrados, sendo um o dobro da área do outro, tesoura e cola.

4 Procedimento

1) Contar uma história que faça referência aos *Sulbasultras*:

Os *Sulbasutras* são manuais, livros que contém instruções de caráter religioso para a construção de altares. A palavra *Sulbasutra* deriva das palavras "sulba" e "sutra", que significam "regras de corda".

Três dos *Sulbasutras* mais importantes do ponto de vista matemático, compostos em versos, foram os compilados por três matemáticos indianos: *Baudhayana*, *Apastamba* e *Katyayana.* Sabemos que o mais importante desses textos é o de Baudhayana, datado de 800 a. C a 600 a. C; os outros foram, provavelmente, reunidos dois séculos depois.

As instruções encontradas nos *Sulbasutras* eram usadas para construir figuras de uma área dada, como triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos, semicírculos, e também figuras com área igual a de outras figuras.

Por exemplo, para transformar um quadrado em um triângulo isósceles, com a mesma área, *Baudhayana* utilizou o seguinte método:

1) Primeiro constrói-se um quadrado com o dobro da área do quadrado inicial.

2) Em seguida, une-se o ponto médio de um dos lados obtidos a cada um dos vértices opostos a esse lado. Assim, era obtido o triângulo isósceles de mesma área do quadrado dado (AMMA, 1979; SARASVATI, 1987).

3) Propor o desafio: por recorte e colagem, verificar se o método de *Baudhayana* está correto.

Iniciar a mediação para a construção:

Convidar os alunos para verificação proposta. Entregar a cada aluno um par de quadrados e afirmar: "você recebeu dois quadrados, sendo que um tem o dobro da área do outro". Verificar se a relação entre as áreas dos quadrados realmente está correta e, em seguida, pelo método utilizado por *Baudhayana,* construir um triângulo isósceles igual em área ao quadrado. Por fim, transforme o triângulo isósceles em um quadrado de mesma área.

5 Análise

Quanto à verificação se a área de um dos quadrados dado tem o dobro da área do outro, foram apresentadas respostas semelhantes a estas:

"É verdadeira porque a diagonal quadrado menor é do mesmo tamanho do lado do quadrado maior".

"Está correta porque o quadrado pequeno mede 2 triângulos e o grande mede 4 triângulos".

“Está correta, seu sei por que dobrei o quadrado vermelho (maior) em oito triângulos e medi ficou igual ao triângulo azul (menor)”.

“É. Porque quadrado maior tem oito triângulos e o menor só quatro triângulos”.

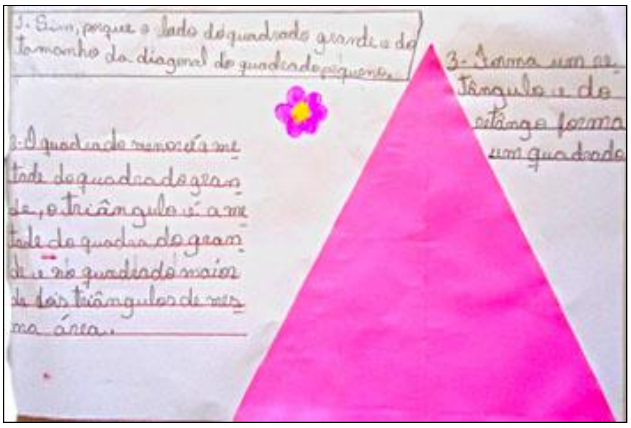
“Eu dobrei na diagonal dos quadradinhos do quadrado grande e deu oito triângulos, o quadrado pequeno tem 4 triângulos”.

Os alunos resolveram a questão sem nenhuma dificuldade. Nós esperávamos que eles lembrassem a atividade da duplicação do quadrado e respondessem algo semelhante à primeira resposta, no entanto, aquela foi a resposta que menos foi apresentada. Chamou-nos a atenção que eles trabalharam mais com o procedimento da atividade do que com o resultado, e se lembraram dos procedimentos para reduzir a área à metade. Então, tomaram o quadrado de maior área e dobraram de modo a encontrarem dois quadrados de mesma área os quais, por sua vez, eram iguais à área do quadrado dado.

Figura 75 - Medindo o lado do quadrado com a diagonal do quadrado.

Figura 76 - Diagonal do quadrado é igual ao lado do quadrado maior.

Figura 77 - Representação verbal escrita.



Questão 1 - Utilizando o método usado por Baudhayana construir um triângulo isósceles igual em área ao quadrado.

“Eu pequei o quadrado com o dobro da área dobrei e encontrei o ponto médio formei o triângulo cortei deu três triângulos, com os dois menores eu formei um triângulo. Fiquei com dois triângulos isósceles”.

“Eu dobrei e encontrei o ponto médio e a partir dele eu passei linhas e formei um triângulo e depois eu recortei e com as partes que sobraram eu formei outro triângulo”.

"No quadrado maior fizemos um triângulo isósceles com os outros triângulos formamos um retângulo de mesma área do triângulo isósceles".

Figura 78 - Construção do triângulo isósceles.

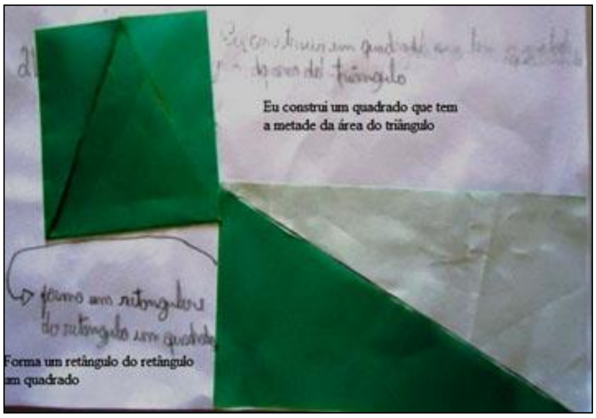
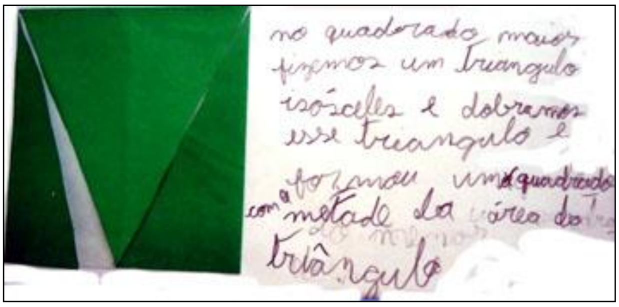


Figura 79 - Estabelecimento entre as medidas das áreas.



"Eu cortei formei um triângulo isósceles e formei com ele um quadrado". Todos os alunos que colaram o triângulo isósceles na folha escreveram algo semelhante a: "eu virei as três pontas do triângulo e formou um quadrado. Esse quadrado tem a metade da área do triângulo". Provavelmente, alguns fizeram e os demais imitaram o procedimento. É importante enfatizar que eles perceberam que o triângulo poderia ser transformado em um quadrado, mas as áreas não seriam iguais, a relação estabelecida entre as medidas das áreas estava correta.

Em seguida, refletimos com os alunos que a área daquele triângulo deveria ser igual à do quadrado menor, pois havíamos construído dois triângulos isósceles de áreas iguais. Então, eles mediram os dois triângulos.

Questão 2 - Transformar o triângulo isósceles construído em um quadrado de mesma área.

Os alunos pegaram os dois triângulos retângulos e formaram um retângulo e, em seguida, um quadrado. No entanto, muitos não realizaram a última transformação. Chegavam até à construção do retângulo e escreviam: "agora é só transformar em quadrado". Como se transformar o retângulo em quadrado fosse uma tarefa corriqueira, de conhecimento de todos, assim estava provado que o triângulo isósceles poderia ser transformado em um quadrado de mesma área. Eles se remetem a um conhecimento adquirido anteriormente, especificamente,

Figura 80 - Transformação do triângulo isósceles em retângulo.

na Atividade 5. Trabalharam com a decomposição do retângulo em triângulos para formar o quadrado, tendo um retângulo cujo um lado era o dobro do outro. Chamamos, mais uma vez a atenção, a essa particularidade do retângulo para o qual o procedimento permitia realizar a transformação.

As respostas dadas assemelham-se a: “Forma um retângulo cortando o triângulo ao meio e do retângulo forma-se um quadrado”.

Figura 81 - Formação do retângulo cortando o triângulo ao meio.

“Com o triângulo isósceles forma dois triângulos que formam o retângulo. Marca o ponto médio no lado maior do retângulo e desenha outro triângulo, recorta formando três triângulos junta os três triângulos formando um quadrado”.

“Para fazer o molde eu cortei o quadrado de área maior ao meio. Ficou um retângulo, eu dobrei ao meio formou dois quadrados iguais eu marquei a diagonal de cada quadrado, ficou um triângulo eu cortei deu um triângulo grande e dois pequenos, depois juntei formou o quadrado”.

Figura 82 - Construção utilizando molde.

Os alunos deste grupo, ao desenharem as linhas para cortarem, perceberam que dois triângulos formam um retângulo, então bastava pegar um quadrado, de mesma área, e cortar o meio formando dois retângulos. Este era o “molde”. Optaram por trabalhar com o molde por terem dificuldades em formar três triângulos a partir dos dois triângulos. Importante ressaltar que a dificuldade não era conceitual e sim compor o triângulo com da Figura 82, obtida a partir do retângulo, que por sua vez, estava composto por dois triângulos retângulos.

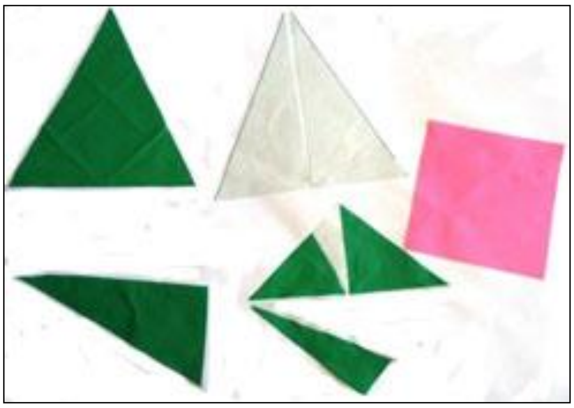
Figura 83 - Quadrado.

A dificuldade não era cortar os triângulos, mas sim juntar as partes para formar o quadrado como a representação da Figura 83.

"Eu cortei o triângulo isósceles ao meio, virei e ele formou um retângulo que eu cortei em triângulos arrumei em um quadrado". Nesta resposta, o aluno enfatizou os movimentos de rotação e translação dos triângulos. Os alunos que transformaram o retângulo tiveram dificuldades em trabalhar com as partes na recomposição do quadrado, pelo fato de o retângulo estar dividido em dois triângulos. Então, um aluno perguntou se poderia fazer um modelo, já que aquele procedimento havia sido utilizado em atividade anterior. Com o modelo, eles acharam mais fácil, mas alguns alunos ainda preferiram trabalhar montando as partes.

Como exemplo, citamos um que teve dificuldade em escrever com detalhes todos os procedimentos e perguntou se poderia fazer tudo com colagem. Entregamos a ele uma folha em branco e quadrados. Depois de pronto, pedimos para que ele explicasse à turma o que havia feito e, enquanto ele explicava, a professora escrevia no quadro. O procedimento do aluno por meio de recorte e colagem está representado na Figura 84. Utilizamos sua colagem para discutir passo a passo com a turma e depois as apresentamos na turma da professora Vitória

Figura 84 - Etapas da construção do triângulo isósceles.



Conceitos em ação

Triângulo isósceles tem dois lados iguais.

Triângulo retângulo tem um ângulo de noventa graus.

Ponto médio de um segmento de reta divide o segmento em dois de mesma medida.

Teoremas em ação

A área do quadrado pode ser transformada em uma soma de áreas de triângulos iguais.

Dividindo o triângulo isósceles ao meio, formam-se dois triângulos retângulos.

Um quadrado pode ser transformado em dois quadrados de mesma área.

O triângulo pode ser usado como unidade de medida de área.

A medida de área é um número de determinada área, no caso, um triângulo.

Para comparar igualdade entre área, a unidade de medida deve ser a mesma.

Na comparação entre medidas de área, o dobro da unidade me garante o dobro da medida da área.

Sabendo que uma unidade de medida de área é o dobro ou a metade de outra unidade de medida, e a medida da área de uma grandeza em relação a uma delas para saber a medida da área desta grandeza na outra unidade é suficiente multiplicar ou dividir a medida conhecida por dois.

Em um quadrado x que tenha o seu lado igual à diagonal de um quadrado y, podemos dizer que a área do quadrado x é igual ao dobro da área do quadrado y.

6 Conclusão

Por meio da atividade, foi possível perceber que os alunos compreenderam a mudança do estatuto da figura e produziram conclusões, ou seja, observamos teoremas em ação, mobilizados em atividades anteriores, que foram associados às tomadas de decisão na resolução desta.

Na resolução dessa atividade, mais uma vez, os alunos vivenciaram as especificidades da apreensão operatória e trabalharam a relação parte-todo da figura por meio da decomposição e composição. Ao reconstruírem o quadrado, a partir do triângulo isósceles, reconfiguraram o quadrado por meio da visualização e realizaram deslocamentos de rotação e translação na construção do quadrado. (DUVAL, 1994).

Consideramos que os alunos evidenciaram compreender que uma figura plana pode ser decomposta e composta em outra de mesma medida de área e, assim, que figuras diferentes podem ter áreas iguais. Logo, a medida de área não está condicionada à forma da figura, de acordo com as pontuações de Vergnaud:

> O saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por 'problema' é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução. (VERGNAUD, 1990, p. 52).

ATIVIDADE 10 - MEDINDO ÁREA COM O TANGRAM

1 Um pouco de história do conceito de área

Segundo Matzloff (1987), quebra-cabeças e passatempos nunca são mencionados em livros tradicionais de matemática chinesa que tratam da aprendizagem e seu ensino, mas o que pode ser adquirido com eles é amplamente disseminado por todo o oceano de literatura geral chinesa.

O tangram é um quebra-cabeça tradicionalmente planimétrico, composto de sete peças, nascidas de uma dissecção geométrica de um quadrado. Montado de forma astuta, essas peças podem gerar um número incrível de formas. Martzloff (1997) explica que essas informações estão documentadas em Tangrams de Joost Elffers, e que, segundo este documentário, a fonte impressa mais antiga conhecida acerca de tangram remonta ao início do século IX.

Entretanto, recentemente, dois historiadores matemáticos, Liu Dun e GuoZhenyi, apresentaram vários quebra-cabeças similares ao tangram, escritos em um gênero clássico literatura chinesa – o bijide – com data de 1617. Em particular, uma breve descrição de um deles aparece em *Juan 3* de Liu Xianting’s. Na Europa, um quebra-cabeça semelhante é citado por vários autores da antiguidade entre os quais se encontra Arquimedes.

Desde o início do século IX, o tangram tem sido amplamente difundido em todo o mundo. No contexto original, o tangram e outros quebra-cabeças eram vistos muito mais como passatempos agradáveis do que como dispositivos suscetíveis de análise matemática. No entanto, foram criados tratamentos matemáticos para vários enigmas chineses. (MATZLOFF, 1987).

2 Objetivo

Conhecer o tangram, comparar áreas, construir figuras diferentes com a mesma área, definir unidades de medidas de área, e perceber a conservação da medida de área.

3 Material

Um tangram para cada aluno.

4 Procedimento

Narrar a lenda do tangram:

Não se sabe, ao certo, quem inventou o tangram, mas já era conhecido na China, por volta do século VII a. C., pelo nome de *Chi Chiao Pan*, que significa “O jogo dos Sete Elementos” ou "As Sete Tábuas da Sabedoria". Existem muitos mistérios e lendas sobre sua origem que apareceram nos últimos dois mil anos.

A história mais contada é a do monge Tai-Jin que chamou o seu discípulo conhecido como Lao-Tan, entregou-lhe uma placa quadrada de porcelana, um pote de tinta, um pincel e deu-lhe uma grande missão: Lao-Tan deveria percorrer o mundo e, tudo o que os seus olhos encontrassem de mais belo, deveria ser registrado na placa de porcelana. Tremendo de emoção por tão importante tarefa que o mestre lhe confiara, ao sair da sala, Lao-Tan deixou cair a placa quadrada de porcelana. Magicamente, a placa de porcelana quebrou-se em sete pedaços de formas geométricas simples como as do nosso jogo. Preocupado com o que acabara de acontecer, Lao-Tan imediatamente ajoelhou-se para recolher o que restava dela. Ao juntar os pedaços, o discípulo identificou uma figura conhecida. Trocou a posição das peças e surgiu nova figura. Assim, outras figuras foram, naquele momento, formando-se a cada variação de posição dos pedaços. De repente, Lao-Tan percebeu que sua viagem não era mais necessária, pois com os sete pedaços da placa quadrada de porcelana poderia representar tudo o que de belo existe no mundo. Na Antiga China, esse jogo era muito popular e era considerado um jogo para mulheres e crianças.

Figura 85 - Peças do Tangram.

Figura 86 - Tangram formando o quadrado

Pelo fato de a atividade ser muito extensa, decidimos por trabalhar em três encontros, então, a divisão em 10.1, 10.2, 10.3 foi uma referência para as professoras.

A atividade teve por objetivo conhecer o tangram, comparar áreas, construir figuras diferentes com a mesma área, definir unidades de medidas de área, trabalhar o conceito de perímetro, evidenciar a diferença conceitual entre perímetro e área de figuras planas.

Essa atividade não foi elaborada por nós, ela foi aplicada no curso de extensão da UnB de História da Matemática, ministrada pela Professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar, aos professores do ensino fundamental. Esses professores aplicavam a atividade em sala e, no encontro seguinte, relatavam a experiência e a relação da criança com a atividade.

Consideramos que os alunos poderiam apresentar certas dificuldades em desenvolver as situações propostas, pois, apesar de a maioria demonstrar domínio nas apreensões sequencial, perceptiva e operatória (DUVAL, 1994), teria de articular as três ao mesmo tempo e trabalhar com conversão de registros, com a transformação de unidades de medidas, além da justaposição, da espacialidade, da rotação e da translação.

No entanto, sem maiores problemas, evidenciaram, por meio da articulação dos enunciados às propriedades matemáticas de tais figuras e à elaboração de conclusões, compreender os elementos das figuras geométricas pertinentes ao tangram. Apresentaram a apreensão perceptiva ao juntarem peças na composição de figuras, a discursiva nas informações captadas na figura para identificação da unidade de medida e cálculo da área.

Consideramos que a atividade requereria conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores como comparação de áreas, determinação de unidades de medidas, conversões de unidades de medidas e também de registro.

Apesar de considerarmos o fato de os alunos apropriarem-se da sobreposição, como uma ferramenta na comparação de áreas, esperávamos que, naquele momento, os alunos realizassem as conversões de unidades sem a necessidade de sobreposição entre as unidades, ou seja, que utilizassem o processo de visualização sob o aspecto das apreensões perceptiva e operatória (DUVAL, 1994).

ATIVIDADE 10.1 - ANALISANDO AS PEÇAS DO TANGRAM

1 Objetivo

Identificar formas geométricas, comparar áreas**.**

2 Material

Um tangram para cada aluno.

3 Questionamentos

1) Que tipo de figuras são as peças do tangram?
2) Quantos triângulos têm a mesma área?
3) Que relação existe entre a área do triângulo pequeno e a do médio?
4) Que relação existe entre a área do triângulo grande e a do médio? E entre o grande e o pequeno?
5) Compare a área do quadrado com a do triângulo pequeno.
6) Compare a área do paralelogramo com a do triângulo pequeno.
7) Quais figuras têm a mesma área?

4 Análise

Questão 1- Que tipo de figuras são as peças do tangram?

"Dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo".

"Dois triângulos grandes, três triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo".

Ao questionarmos a segunda resposta, recebemos como justificativa que os triângulos que não eram grandes, eram pequenos, mas que os pequenos tinham tamanhos diferentes. Esses alunos apresentavam a apreensão perceptiva e operatória, faltava-lhes a nomenclatura. Ao ouvirem a terminologia grande, médio e pequeno optaram por utilizá-la.

Questão 2 - Quantos triângulos têm a mesma área?

“Dois triângulos grandes e dois pequenos”.

Depois da discussão realizada na questão anterior, todos apresentaram a resposta esperada, a identificação de duas medidas tendo como processo a visualização examinando o espaço representação da figura, por meio de uma verificação subjetiva, a breve olhada (DUVAL, 1994), ou seja, a igualdade de área foi pela identidade não pensaram inicialmente na composição de uma maior com a justaposição de dois menores.

Questão 3 - Que relação existe entre a área do triângulo pequeno e o médio?

“A área do triângulo pequeno é a metade do triângulo médio”.

“A área do triângulo médio é duas vezes a área do triângulo pequeno”. Alguns mencionaram o dobro ao invés de duas vezes.

Os alunos não tiveram dificuldade em determinar essa relação, alguns realizaram por visualização outros por sobreposição.

Questão 4 - Que relação existe entre a área do triângulo grande e o médio? E entre grande e o pequeno?

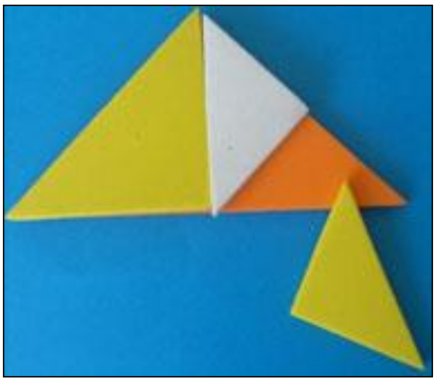
Figura 87 - Relação entre dois triângulos do Tangram

“A área do triângulo médio tem a metade da área do triângulo grande. A área do triângulo grande é quatro vezes maior que o triângulo pequeno”.

“A área do triângulo médio tem a metade da área do triângulo grande. A área do triângulo grande é três vezes maior que a do o triângulo pequeno, o pequeno é quatro vezes a área do grande”.

Como esperado, a maioria apresentou capacidade em estabelecer relação entre as áreas das figuras por meio da composição. O grupo que afirmou ser três vezes maior considerou o triângulo médio e os dois pequenos. Sem a mediação, os alunos não consideraram que o triângulo médio era igual a dois pequenos. No entanto, quando questionado, um dos alunos respondeu que ele sabia que no triângulo médio cabiam dois pequenos, no entanto, ele não tinha quatro triângulos pequenos, ele tinha um médio e dois pequenos, por isso, ele considerou que um grande é igual a três pequenos. Isso evidencia que o aluno tem a percepção visual e apreensão perceptiva, mas não há domínio pleno da operatória. Ele não consegue, ainda, trabalhar sem o material concreto.

Figura 88 - Comparando as medidas das áreas.



Essa análise é reforçada pela afirmação de que o pequeno é quatro vezes a área do grande. Os alunos que deram essa resposta afirmaram que no grande cabem quatro triângulos pequenos, mas não sabem expressar que ele é quatro vezes menor. Observamos, então, que faltou operar a propriedade da reversibilidade e, também, percebemos que eles não tinham domínio de números fracionários. Começamos a trabalhar com eles o termo um quarto. Eles utilizam o termo metade e demonstraram entender o significado, mas ainda não sabiam se expressar em forma fracionária.

Questão 5 - Compare a área do quadrado com a do triângulo pequeno.

"A área do quadrado é o dobro da área do triângulo pequeno".

"A área do triângulo é a metade da área do quadrado".

Nenhuma dificuldade foi apresentada.

Teorema em ação

O quadrado dividido ao longo de uma de suas diagonais da origem a dois triângulos retângulos isósceles.

Conceito em ação

Dois triângulos isósceles retângulos de mesma área formam um quadrado.

Questão 6 - Compare a área do paralelogramo com a do triângulo pequeno.

"A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo".

"A área do paralelogramo é o duas vezes (outros falaram dobro) a área do triângulo pequeno".

Tanto na questão 5 como na questão 6**,** relacionamos a desenvoltura dos alunos na resolução ao fato de haver dois triângulos que podiam ser sobrepostos ao quadrado e ao paralelogramo.

Teoremas em ação.

O paralelogramo pode ser transformado em dois triângulos.

Esse paralelogramo e o quadrado têm áreas iguais.

Questão 7 - Quais figuras têm a mesma área?

"Os dois triângulos grandes têm a mesma área, e os dois triângulos pequenos têm a mesma área".

"Dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, um quadrado, um losango e o triângulo médio tem a mesma área do triângulo pequeno".

"Dois triângulos grandes. Dois triângulos pequenos. Tem a mesma área dos triângulos pequenos o quadrado e o paralelogramo. O paralelogramo tem a mesma área do triângulo médio".

"Dois triângulos grandes. Dois triângulos pequenos. Têm a mesma área dos triângulos pequenos o quadrado e o paralelogramo. O paralelogramo tem a mesma área do triângulo médio e do quadrado".

"Dois triângulos grandes. Dois triângulos pequenos. O quadrado e o paralelogramo têm a mesma área de dois triângulos pequenos ou igual a um triângulo médio".

Aqui todos tomaram, como unidade de medida, o triângulo pequeno. No entanto, dois alunos, de grupos diferentes, afirmaram terem tomado emprestado os triângulos de outro grupo e que foram sobrepondo as figuras. Perguntamos por que eles haviam feito aquilo; um dos componentes do grupo afirmou que era só para nos provar e o outro respondeu que estava tirando a prova.

Consideramos que os alunos já dominam a conceitualização: "figuras diferentes podem ter a mesma área. Então, institucionalizamos que o conceito de área é diferente de medida de área".

ATIVIDADE 10.2 - TRABALHANDO COM UNIDADES DE MEDIDAS (FIGURAS PAVIMENTADAS)

1 Material

Um tangram para cada aluno.

2 Objetivos

Perceber que a área de uma figura não muda, mas sua medida depende da unidade de medida escolhida.

Transformar uma superfície não pavimentada em pavimentada. Calcular área por pavimentação tendo uma unidade de medida definida.

3 Procedimentos

1) Determinar a área de cada peça tomando como unidade de medida o triângulo maior.
2) Construir três figuras utilizando as peças do tangram e desenhe as figuras em uma folha de papel.
3) Determinar a medida da área da figura que você construiu utilizando como unidade de área:

a) O triângulo maior

b) O paralelogramo

c) O quadrado

d) O triângulo menor.

4 Análise

Questão 1 - Determine a área de cada peça tomando como unidade de medida o triângulo maior.

"A área do quadrado é metade da área do triângulo grande. A área do triângulo pequeno é quatro vezes menor que a área do triângulo grande".

"O triângulo é o dobro da área do quadrado. O triângulo pequeno é quatro vezes a área do triângulo grande. O triângulo médio é metade da área do triângulo grande".

"A área do quadrado é a metade da área do triângulo grande. O triângulo pequeno é ¼ do triângulo grande. A área do paralelogramo é a metade da área do triângulo grande".

"A área do quadrado é a metade da área do triângulo grande. O triângulo pequeno é ¼ do triângulo grande. A área do paralelogramo é a metade da área do triângulo grande. O triângulo médio é metade da área do triângulo grande".

Alguns alunos tiveram dificuldade nessa atividade pelo fato da unidade de medida ser maior que as figuras que estavam sendo medidas. A maioria utilizou o triângulo pequeno para medir e fez a relação. No entanto, um número pequeno de alunos apresentou a tendência de estabelecer uma razão entre as áreas das figuras e não contar quantas vezes a figura de menor área cabia na de maior, o que se traduz no instrumento da medida que é permitir associar a um objeto um número de unidades consideradas.

Consideramos positivo o fato de a maioria utilizar relações coerentes para resolver a questão. Isso aponta para o entendimento de que medir área é comparar área de figuras e o uso adequado de unidade de medidas, pois, realizaram a contagem de unidade de medida considerando o triângulo pequeno e converteram a contagem para o triângulo grande.

Ainda assim, consideramos que muitos alunos compreenderam que, apesar de alguns terem escrito errado, os seus procedimentos estavam corretos. Muitos alunos utilizaram o triângulo pequeno como referência, mas não necessariamente como unidade de medida, entretanto, não utilizaram a sobreposição. Eles usaram relações já estabelecidas nas questões anteriores. Quando questionamos como sabiam, eles respondiam que já haviam feito a medida nas questões anteriores.

Tal resposta revela que, em uma sequência como essa, importantes produções matemáticas são desenvolvidas, mas não necessariamente os alunos e suas atividades e falas correspondem exatamente ao que prevê o professor que propõe a atividade. Demonstra, também, o quanto a atividade é assumida pelo aluno como produção deles, sem preocupação em estarem estritamente respondendo às necessidades do professor. Mesmo isso ocorrendo, os alunos assumem que estão em plena e importante produção matemática, repletas de conceitos e procedimentos matemáticos, que consideramos centrais no aprendizado da geometria e de medidas.

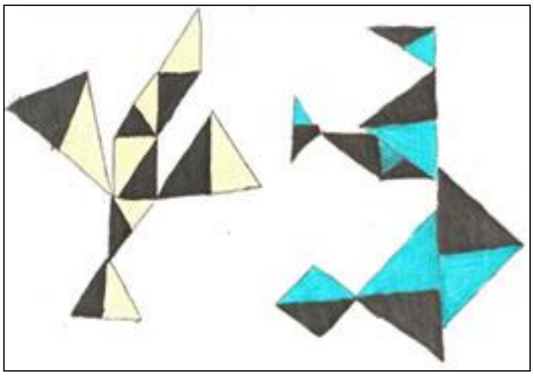
Questão 2 - Construa três figuras utilizando as peças do tangram e desenhe as figuras em uma folha de papel.

Apresentamos algumas das figuras construídas:

Figura 89 - Pássaro, homem sentado e barco.

"Barco ao vento", segundo o aluno.

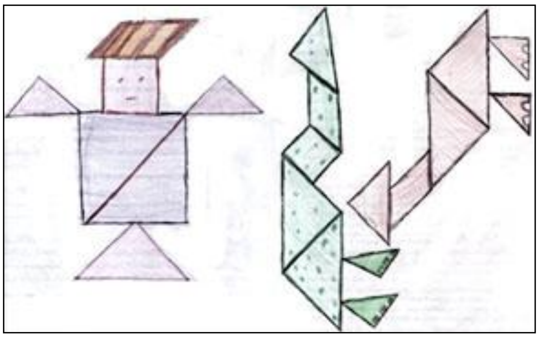
Figura 90 - Pássaro e homem sentado.



Na Figura 90, o aluno deu às figuras o nome de pássaro e homem sentado, respectivamente; interessante notar que ele dividiu cada peça em triângulos, como se a figura fosse composta de triângulos de tamanhos diferentes. Ele demontrou que compreendeu que as figuras geométricas podem ser compostas utilizando triângulos. Também utilizou duas cores de forma que elas não se encontrem e para que os triângulos fiquem bem demarcados.

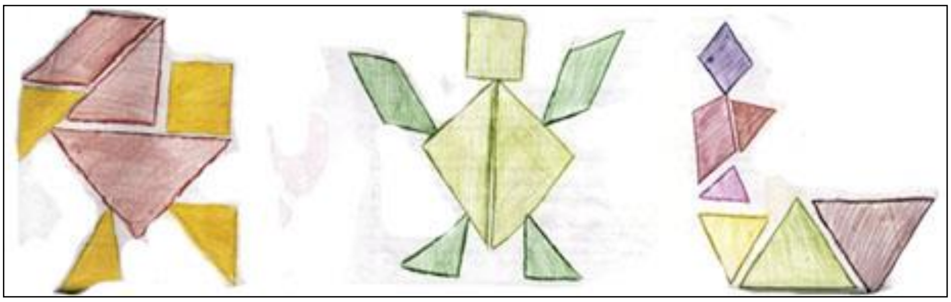
Já Figura 91, o aluno deu os respectivos nomes à sua produção: um homem, um dinossauro e um cavalo. Ele marca bem a diagonal, representando um ornamento na roupa e linha para dar efeito ao chapéu; o rosto é marcado pelos olhos e boca. O dinossauro tem pintas, e o cavalo tem os seus pés marcados. Há uma necessidade de dar vida às peças a fim de que a representação seja mais fidedigna.

Figura 91 - Homem, dinossauro e cavalo.



Na Figura 92, o aluno chamou sua primeira composição de pato, a segunda de tartaruga e a terceira de barco; ele, para fazer suas representações, utilizou as peças do tangram. No entanto, ao desenhar a tartaruga, colocou um losango no lugar de um triângulo, pois considerou que os dois losangos representariam melhor as patinhas da tartaruga. Ao desenhar o pato, o aluno não quis usar o triângulo médio para representar o bico do animal, por achar que era desproporcional, assim, desenhou um triângulo menor.

Figura 92 - Pato, tartaruga e barco.



A maioria dos alunos utilizou as peças como molde para o desenho. Segundo Duval (1993), as representações funcionam como o elemento que constrói o sentido do objeto em estudo. Consideramos o procedimento adotado importante, mas definimos que, nas demais atividades, os espaços do papel para a resolução seriam menores, esperando do aluno outros procedimentos, como a redução das medidas e a proporcionalidade entre as peças. Consideramos isso importante como atividade cognitiva do pensamento, porque torna possível a elaboração do conhecimento e, a construção dessa representação envolve as apreensões do processo cognitivo: visualização, construção e raciocínio (DUVAL, 1993), o que, por sua vez, envolve perceber a proporcionalidade entre o real e sua representação.

Alguns alunos utilizaram uma folha, que entregamos, na qual havia desenhos construídos, outros criaram seu próprio desenho. Interessante foram os nomes dados, ou seja, o aluno compreendeu que as peças formam o desenho de objetos, isto é, representam objetos.

Na questão a seguir, esperávamos que os alunos apresentassem certas dificuldades por exigir domínio das quatro apreensões definidas por (DUVAL, 1994): sequencial, perceptiva, discursiva, operatória, assim como, a determinação da área de uma figura com unidades de área variada. No entanto, não apresentaram nenhuma dificuldade ao distinguirem área de número, pois a mudança de unidade de medida de área pode mudar o número que expressa a medida de área da figura sem alterar a área.

Questão 3 - Determine a medida da área da figura que você construiu utilizando como unidade de área:

FIGURA 1 - pato

1) O triângulo maior: 4

2) O paralelogramo: 8

3) O quadrado: 8

4) O triângulo menor: 16

FIGURA 2 - tartaruga

1) O triângulo maior: 4

2) O paralelogramo: 8

3) O quadrado: 8

4) O triângulo menor: 16

FIGURA 3 - barco

1) O triângulo maior: 4

2) O paralelogramo: 8

3) O quadrado: 8

4) O triângulo menor: 16

Nessa atividade, alguns alunos não escreveram a unidade de medida apenas o número. Uns porque não incorporaram que a medida é um número acompanhado da unidade de medida. Outros justificaram que, como a pergunta especificou a unidade, não seria necessário repetir. Mais uma vez salientamos a importância de o número estar acompanhado da unidade, e esse exercício nos ajudou especialmente nessa discussão.

Cada aluno fez a medição da composição das figuras como exemplo na Figura 93.

Figura 93 - Medindo área da figura com unidades solicitadas.

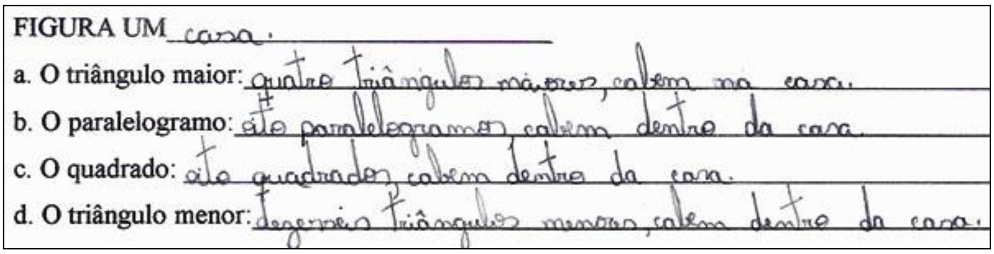


FIGURA UM casa.

a. O triângulo maior: quatro triângulos maiores, cabem na casa.

b. O paralelogramo: oito paralelogramos cabem dentro da casa.

c. O quadrado: oito quadrados cabem dentro da casa.

d. O triângulo menor: dezesseis triângulos menores, cabem dentro da casa.

Depois, solicitamos que eles observassem as medidas das três figuras. Em seguida, iniciamos questionamentos: Há alguma relação entre as medidas das figuras? Quando você utilizou o triângulo menor, quanto mediu cada figura? Olhando para a figura, quanto mediu cada área quando utilizou o triângulo maior, o paralelogramo, o quadrado, e o triângulo menor? Uma aluna apresentou a resposta da Figura 93, expressando por escrito o seu procedimento, o uso da sobreposição para proceder à medida.

Questão 4 - A partir das áreas determinadas no exercício três o que podemos concluir?

"As áreas são iguais, eu usei as mesmas peças nas três figuras".

"Podemos concluir que todas as figuras têm a mesma área".

"Que as áreas são iguais mesmo sendo desenhos diferentes".

"Que todas têm a mesma área. E também quando uso unidade menor dá um número menor e quando uso unidade maior dá um número maior".

"Podemos concluir é que mudou só a aparência das figuras, mas mantendo a mesma área que são sete peças geométricas".

“Todas as figuras têm a mesma área. Quando uso unidades diferentes dá número diferente porque as unidades são diferentes”.

“Todas têm a mesma área, mesmo que seja a mesma figura tem a mesma área, o número é diferente por ser unidade diferente”.

“Que todas as figuras têm a mesma medida de área”

Aproveitamos a fala “que todas as figuras têm a mesma medida de área” para provocar uma reflexão em sala e perceber se os alunos diferenciavam “área” de “medida de área”. Solicitamos aos alunos, que desejassem ler sua resposta e explicá-la para a turma, que o fizessem. À medida que as leituras ocorriam, provocávamos, por meio de questionamentos, discussões que indicaram alguns *teoremas em ação*:

Área é o espaço ocupado pela figura (os alunos deslizavam a mão sobre a figura para explicar o que era área da figura).

Área é a superfície da figura.

Para medir a área é preciso definir uma unidade de medida.

Medir área da figura é dizer quantas vezes a unidade cabe na figura.

A área da figura não muda, a medida da área muda.

A área não vai mudar, a medida da área vai mudar se mudar a peça.

Concluímos que a maioria dos alunos estava dominando os conceitos. Consideramos que trabalhar primeiro a comparação por recorte e colagem e unidades não padronizadas favoreceu o entendimento do número na medida da área, na relação direta entre o número e a unidade de medida.

ATIVIDADE 10.3 - CONCEITO DE PERÍMETRO

1 Objetivos

Construir figuras com as peças do tangram e comparar as áreas. Trabalhar o conceito de perímetro.

2 Material

Um tangram para cada aluno, cordão.

Para cada figura que você construir:

1) Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

2) Compare as áreas

3) Compare os perímetros com o auxílio do cordão.

a) Usando três peças do tangram, construa triângulos.

b) Usando três peças do tangram, construa paralelogramos.

c) Usando três peças do tangram, construa retângulos.

d) Usando quatro peças do tangram, construa retângulos.

e) Construa retângulos usando cinco ou seis peças do tangram.

f) Construa quadrados usando duas, quatro ou cinco peças do tangram.

h) Construa paralelogramos usando duas ou quatro peças do tangram.

i) Construa triângulos usando quatro ou cinco peças do tangram.

j) Construa retângulos usando as sete peças do tangram.

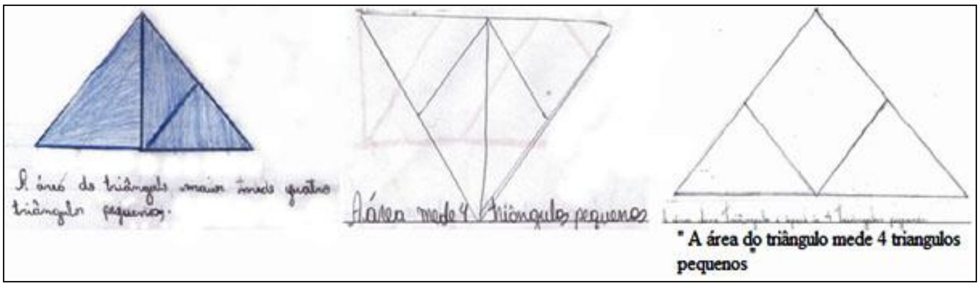
k) Construa triângulos usando as sete peças do tangram

3 Análise

Como consideramos que o tempo gasto para a resolução seria diferente, decidimos esperar os alunos realizarem todos os desenhos para depois discutirmos cada resolução.

Questão 1 - Usando três peças do tangram construa triângulos. Determine a área usada. Como unidade de medida o triângulo menor.

Figura 94 - Construção do triângulo com três peças do tangram.

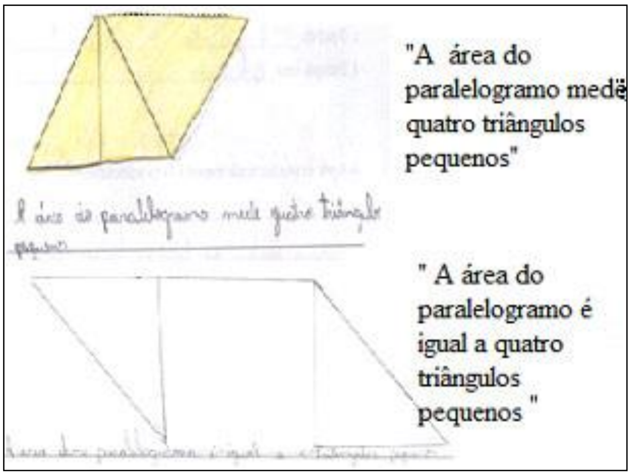


Essas foram as produções apresentadas. Os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em construir as figuras. Poucos alunos utilizaram a sobreposição para o cálculo de área. Muitos diziam que o quadrado mede dois triângulos, então, a área são quatro triângulos. O mesmo aconteceu com o uso do triângulo maior. Eles já afirmavam que sua área media dois triângulos.

Questão 2- Usando três peças do tangram construa paralelogramos. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

Essas são as duas construções apresentadas. Todos acertaram a medida da área.

Figura 95 - Construção do paralelograma com três peças do tangram.



Questão 3 - Usando três peças do tangram construa retângulos. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

Os alunos que optaram por essa construção utilizaram o triângulo maior e dois pequenos. Essa foi a representação que mais despontou. Consideramos que poderia ser pelo fato de já conhecerem essa construção.

Figura 96 - Construção de retângulo com três peças do tangram.

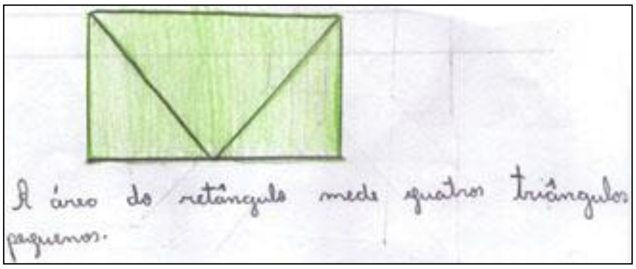
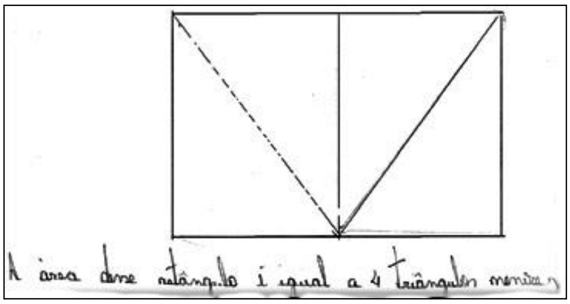


Figura 97 - Construção de triângulo com três peças do tangram.

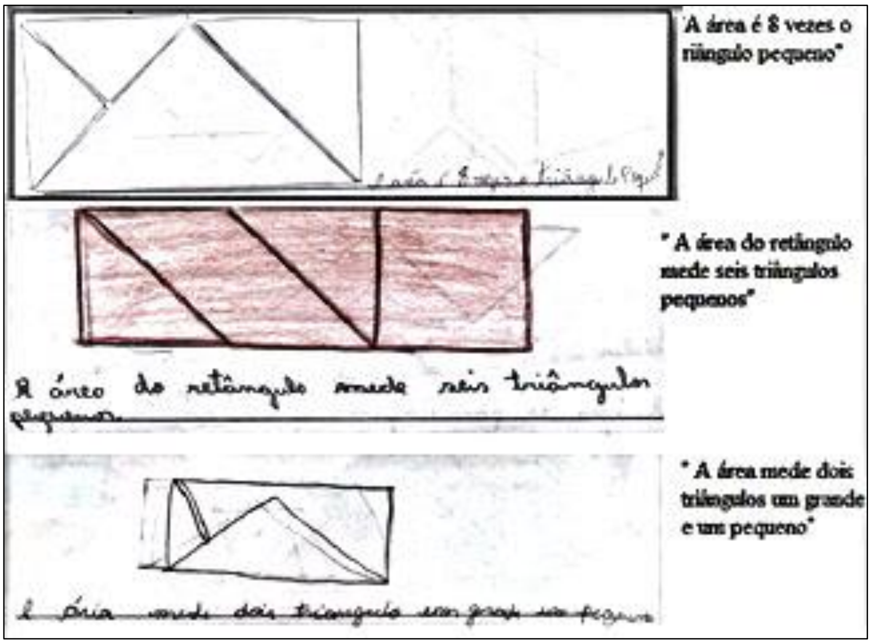


Outra construção foi essa (Figura 97) um triângulo grande e dois triângulos pequenos. Interessante é que alguns alunos marcaram a diagonal emesponto, apontando os quatro triângulos, e afirmam que a área do retângulo é igual a quatro triângulos menores.

Questão 4 - Usando quatro peças do tangram construa retângulos. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

Essas foram as construções produzidas (Figura 98.). Alguns alunos, na representação, não traçaram as retas fechando totalmente a figura. Esse procedimento foi discutido nas duas turmas. Utilizamos esse desenho como exemplo para reflexão com a turma: ele realmente era uma representação do que estava no material concreto? Perguntamos se eles estivessem vendo somente o desenho, se poderiam afirmar por quais figuras eram formados.

Figura 98 - Construção de retângulos com peças do tangram.



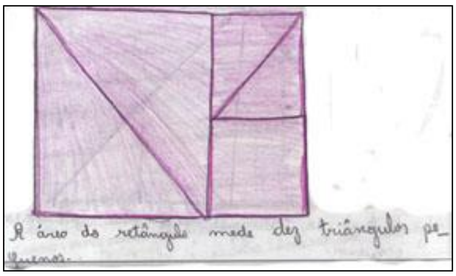
Discutimos a importância de a representação ser fiel ao que desejamos comunicar. Um aluno disse que todos sabiam que era um triângulo grande, um médio e dois pequenos, pois não havia outra peça, ou seja, ele estava dizendo que a representação deve levar em conta sempre o contexto no qual é considerado.

Então, discutimos que aquela era uma verdade para quem estava presente e vivendo a situação no momento, mas se fôssemos a outra turma e perguntássemos a outros alunos, alheios ao contexto, tal situação não ocorreria. A professora convidou três alunos de outra turma, trouxe-os à sala e, diante da classe, fez o desenho na lousa e perguntou se eles podiam identificar as figuras que formavam o retângulo. Todos afirmaram três triângulos e um cujo nome não sabiam; um aluno arriscou dizendo que parecia uma bandeirola. Os alunos compreenderam o que é lógico para ele não é para o outro, e que não se trata simplesmente de estar errado, mas sim que o outro não entendeu o que ele queria informar com o desenho.

Segundo Duval (2003), um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo três funções, a comunicação, o tratamento da informação e a objetivação. Logo, na situação acima, o registro de representação semiótica não pôde ser traduzido em um modelo pertinente para a interpretação da relação entre as ideias e a produção da figura requisitada na situação.

Questão 5 - Construa retângulos usando cinco ou seis peças do tangram. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

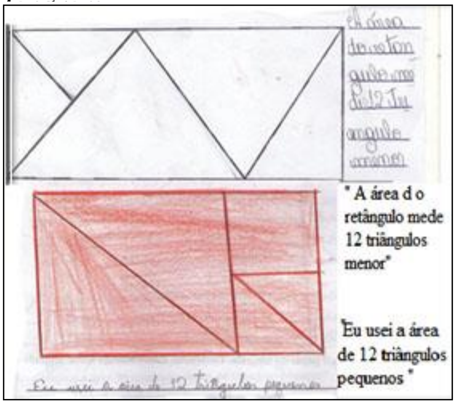
Figura 99 - Qual é a contagem?



Na Figura 99, o aluno parece ter considerado que, em cada triângulo grande, cabem três triângulos pequenos. Se estivermos corretos na consideração, isso indica que ele não utilizou a sobreposição.

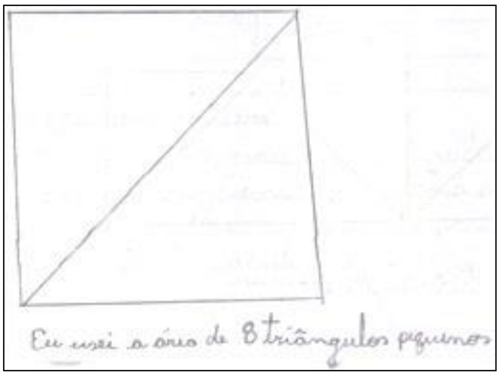
Nenhum aluno fez o desenho utilizando seis peças. Foram expressas nas duas turmas somente as duas representações da Figura 100. Consideramos que, na experimentação das peças, os alunos construíam o retângulo com cinco peças e por aí paravam.

Figura 100 - Representação do triângulo construído com 5 peças do



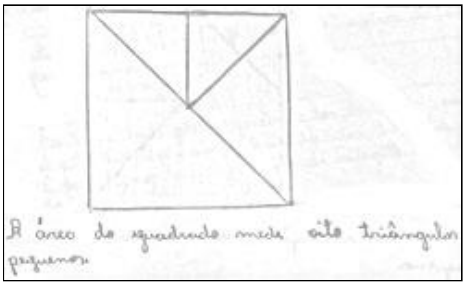
Questão 6 - Construa quadrados usando dois, quatro ou cinco peças do tangram. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

Figura 101 - Dois triângulos iguais do tangram formam um quadrado.



A grande maioria utilizou dois triângulos para a construção do quadrado. Alguns grupos utilizaram os triângulos pequenos na composição (Figura 102) e afirmaram corretamente que a área do quadrado era igual a dois triângulos pequenos.

Figura 102 - Área do quadrado mede 8 triângulos pequenos.

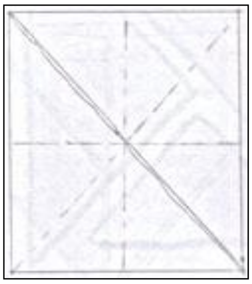


Um grupo, que também respondeu oito triângulos pequenos para a medida da área, desenhou três triângulos, dois médios e um grande. Quando questionamos a resposta, entendemos que os alunos deste grupo não utilizaram o material concreto. Então, intervimos. Percebemos que eles compreendiam a relação entre as medidas de área das peças. Explicamos, então, que poderiam não fazer uso do material concreto e, ir direto para a representação no papel, desde que, atendessem ao enunciado.

Questionamos o que pedia tal enunciado. Responderam que usassem as peças do tangram. Perguntamos quais eram as peças do tangram. Mediante as respostas, continuamos, então: podemos utilizar, na construção, dois triângulos médios? O tangram não tem dois triângulos médios e, o enunciado não orienta o uso de três peças.

Houve, contudo, um grupo que apresentou a mesma resposta por ter pedido emprestado um triângulo médio ao colega. Discutimos, mais uma vez, com a turma, a questão do enunciado. Explicamos que apesar da medida da área da figura composta estar correta a resolução não atendia à orientação do enunciado. Segundo Duval (1994), a compreensão dos elementos da figura geométrica, por meio da articulação dos enunciados relacionados às propriedades do objeto, envolve a apreensão discursiva.

Figura 103 - Representação de segmentos de reta.



Outros alunos não utilizaram as peças do trangram no desenho, representaram quadrado formado por dois triângulos grandes, divididos em oito triângulos pequenos conforme a Figura 103.

A grande maioria utilizou os dois triângulos grandes e afirmou que a área mede oito triângulos pequenos. Percebemos que, em alguns casos, tal escolha se deu pelo fato de não utilizarem o triângulo pequeno, que era a unidade de medida considerada. Então, a construção foi com um triângulo para ser medido com o indicado. Um grupo desenhou as linhas para nos provar a existência dos oitos triângulos; interessante que o grupo representou a diagonal com uma reta, os demais segmentos, pontilhou.

Quando questionamos, disseram que: "a reta é porque é a separação entre os dois triângulos e as demais a separação não existe por isso ele desenhou pespontado". Perguntamos se o grupo havia tido aula de desenho, responderam que não, ou seja, foi um procedimento intuitivo, que institucionalizamos na turma.

Conceitos em ação

Quadrado é formado por quatro lados iguais e quatro ângulos de noventa graus.

Dois triângulos retângulos isósceles e congruentes formam um quadrado.

Unidade de medida é uma área utilizada para medir outra área.

Teoremas em ação

Todas são quadrados, mas as áreas são diferentes.

Figuras de mesma forma podem ter áreas diferentes.

Questão 7- Construa paralelogramos usando duas ou quatro peças do tangram. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

Figura 104 - Construções do paralelogramo.

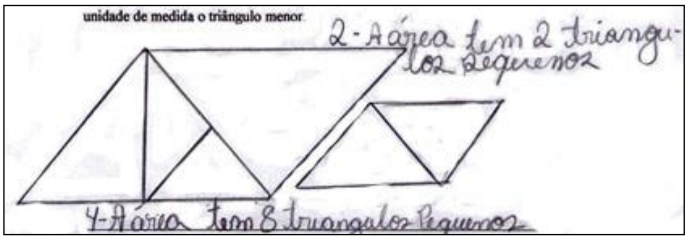


Figura 105 - Construção do paralelogramo utilizando quatro peças.

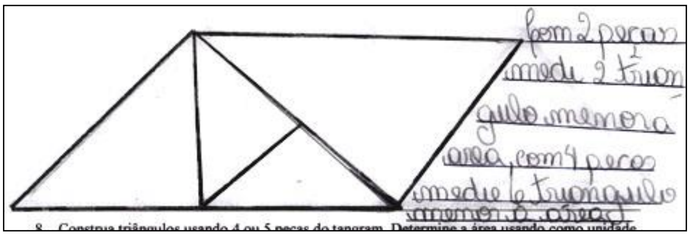
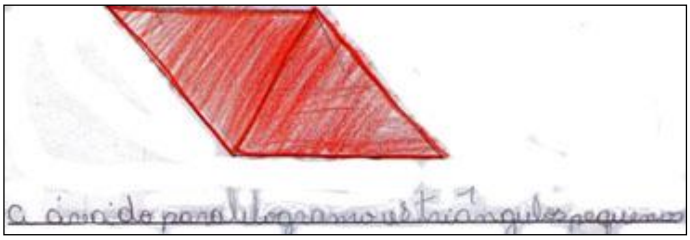


Figura 106 - Construção do paralelogramo utilizando duas peças.



Os alunos não apresentaram dificuldades nessa construção. No entanto, a identificação do paralelogramo é figural e intuitiva. Eles diferenciam o paralelogramo do quadrado por ele não ter o lado perpendicular à base do paralelogramo, ou seja, eles não conhecem as propriedades nem identificam o quadrado como um paralelogramo.

Teoremas em ação

O paralelogramo é um quadrilátero.

O paralelogramo tem lados paralelos são iguais entre si.

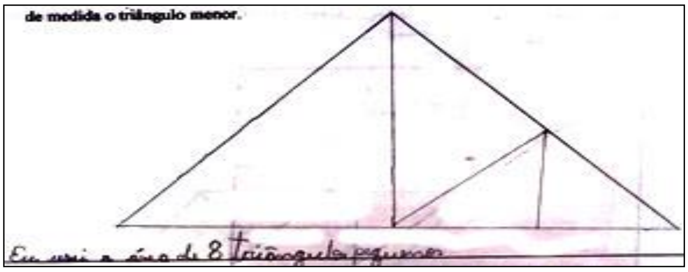
O paralelogramo tem dois lados não perpendiculares a sua base.

Dois paralelogramos podem ter áreas diferentes.

Figuras de mesma forma podem ter áreas diferentes.

Questão 8 - Construa triângulos usando quatro ou cinco peças do tangram. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

Figura 107 - Construção do triângulo utilizando 4 peças.



Apareceram construções de figuras diferentes, mas todas utilizaram apenas quatro peças. Quando questionamos por que não havia construções com cinco peças, responderam que, como o enunciado fala com quatro ou cinco e estavam fazendo por tentativa, ao dar certo com quatro peças, passaram para a atividade seguinte. Três alunos desenharam utilizando quatro triângulos pequenos e pegaram dois triângulos emprestados.

Figura 108 - Construção utilizando triângulo e quadrado.

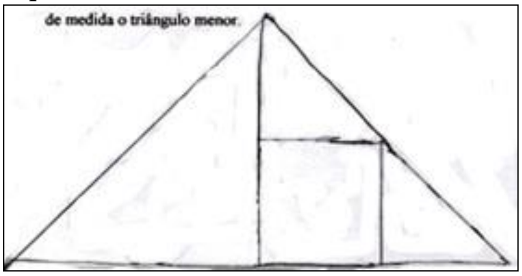
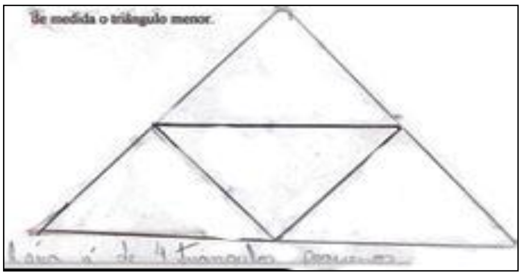
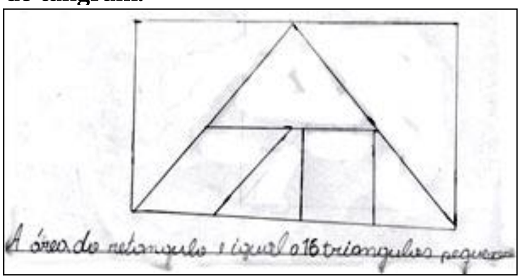


Figura 109 - Utilizando dois tangrams.



Questão 9 - Construa retângulos usando as sete peças do tangram. Determine a área usando como unidade de medida o triângulo menor.

Figura 110 - Retângulo formado por 7 peças do tangram.

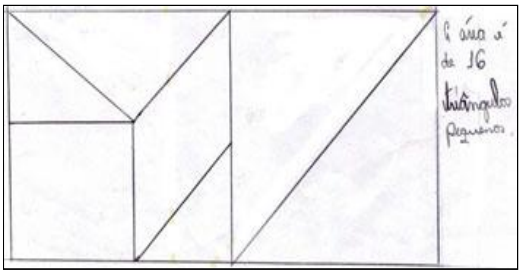


Inicialmente, os alunos apresentavam dificuldade ao desenhar a figura. Nos desenhos, não havia proporcionalidade entre as peças e não havia as retas fechadas nos vértices.

Alguns alunos não identificaram os vértices nas junções das peças, então, na hora de representá-las no papel, eles não desenhavam o vértice, assim, a reta poderia tocar em qualquer parte do segmento de reta em questão. Trabalhamos a questão do vértice e da proporcionalidade lembrando os alunos que os desenhos representavam as construções e que elas não acompanhariam o desenho.

Percebemos muitos desenhos apagados muitas vezes em busca da perfeição, a representação é um desafio, ainda mais no contexto da aprendizagem da geometria. Ao final, muitos alunos desenhavam acentuando os vértices.

Figura 111 - Área mede 16 triângulos pequenos.



Os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade na construção dos retângulos com sete peças.

Conceitos em ação

O retângulo é um quadrilátero que tem dois paralelos iguais entre si.

Os ângulos internos do retângulo são iguais e medem noventa graus.

O retângulo tem lados paralelos iguais entre si, mas esses pares são diferentes entre si, sendo um maior que o outro.

No retângulo um lado é maior em relação ao que lhe é perpendicular.

Teorema em ação

Juntando dois dos retângulos construídos eles formam um quadrado.

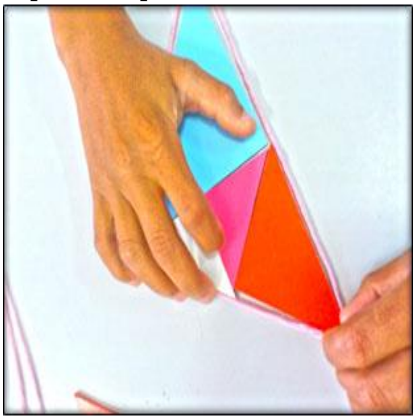
Figura 112 - Construção livre.

Ao longo da atividade, os alunos realizavam outras construções diferentes das solicitadas. Eles ficavam brincando e emitindo informações a respeito de suas construções como: “Juntando dois dos retângulos eles formam um quadrado”. Eles formavam figuras com um tangram ou juntavam suas peças com as do amigo.

Nessa atividade, iniciamos o trabalho com o conceito de perímetro. Após as construções serem realizadas e as áreas medidas, foram entregues vários pedaços de barbante para os alunos. Inicialmente, questionamos se, com o barbante, poderíamos medir a área da figura construída, eles responderam que não. Continuamos questionando, então, o que poderíamos medir com o barbante; responderam que poderiam medir os lados, o perímetro. Alguns alunos perguntaram o que era perímetro, outros alunos responderam: “a soma de todo os lados”, “a medida do contorno da figura”, “medir os lados e somar”.

Em seguida, pedimos que cada um medisse o perímetro da figura construída, comparasse com a área da mesma figura e, depois, comparasse com as medias encontradas pelos colegas do grupo.

Figura 113 - A medida de área não depende do perímetro.



Teoremas em ação.

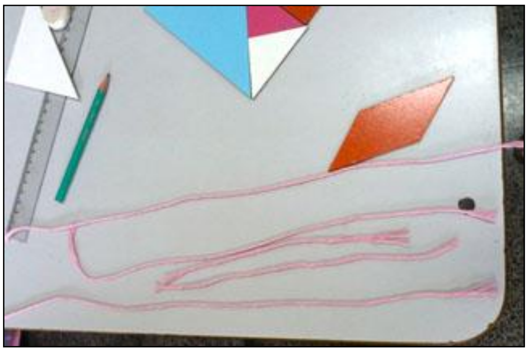
Figuras de formas diferentes têm áreas iguais e perímetros diferentes.

Figuras de formas diferentes têm áreas iguais e perímetros iguais.

A medida da área não depende da medida do perímetro.

Após algumas discussões, institucionalizamos que figuras de áreas iguais podem ter perímetros iguais ou diferentes. Percebemos que essa definição não era muito significativa para os alunos. Apesar da experimentação, havia alunos que respondiam as nossas argumentações e, assim, chegavam aos teoremas em ação citados acima, isto é, eles foram instigados por nós, pesquisadora e professora, a pensarem sobre a situação. Não ficamos preocupadas, pois, na próxima atividade, trabalharíamos mais a questão da diferença entre área e perímetro.

Figura 114 - Com o barbante medimos perímetro.



4 Conclusões

Nessa atividade desenvolvida em três encontros, verificamos que os alunos passaram da percepção para a apreensão operatória, quando identificavam as figuras pedidas e realizavam o trabalho de configuração mereológica das figuras para compor a que foi pedida no enunciado da questão.

No processo de resolução, o aluno trabalhou com a visualização sob o aspecto das apreensões perceptivas e operatórias (DUVAL, 1994). Alguns alunos, para representarem suas construções, primeiro desenharam as retas externas, que formavam a figura solicitada no enunciado, depois traçavam as retas internas, representando, assim, os lados das peças que a compõem.

Com base nas conclusões, institucionalizamos que “figuras com formas iguais podem ter áreas diferentes ou iguais”, ou seja, a forma não é importante na determinação da medida da área, dois triângulos, por exemplo, de áreas iguais não são necessariamente iguais.

Percebemos que os alunos dominam a sobreposição, a visualização, a decomposição e a composição, no entanto, a dificuldade estava no fato de não ser permitida a decomposição física da unidade de medida. Na turma, na qual as peças eram de papel, combinamos isso e na outra, como o tangram era de madeira, ao invés de recortar, o aluno tinha de fazer uma escolha de unidade entre as peças.

Quando o aluno, que estava com a peça em papel, queria fazer a divisão para resolver a situação, então entregávamos o tangram em outro material. Ao compor e decompor, ele identificava a relação entre as áreas. No entanto, esse foi o primeiro exercício no qual eles não podiam recortar figura; trabalhamos com eles a troca de uma por outra. Se houvesse dúvida, ele investigava, comparando as áreas por meio da sobreposição de figuras.

Na China, temos a obra "Nove capítulos sobre a arte da matemática", que data do período Han (947-951). Trata-se do mais importante entre os textos chineses antigos de matemática. Essa obra tem 246 problemas sobre mensuração, agricultura, propriedades sobre triângulos e retângulos, e trata de área de figura por manipulação com método análogo ao tangram.

Então, consideramos o tangram um objeto importante, ou seja, o avanço na aprendizagem e na construção do conceito de área e de unidade de medida, uma vez que ele nos permitiu obter vários polígonos distintos com a mesma área como descrito na história da matemática chinesa, de acordo com a obra citada anteriormente. Essa inferência se dá, na nossa percepção, em virtude das crescentes articulações, feitas pelos alunos, dos conceitos em ação, por meio dos teoremas em ação, nas situações apresentas.

ATIVIDADES 11 e 12

Nas atividades 11 e 12 vamos tratar de figuras não pavimentadas. Por meio de contrato didático utilizaremos o quadrado como unidade padrão de medida de área.

A seguir apresentamos a base histórica para a constituição histórica dessas atividades.

1 Um pouco de história do conceito de área

No Egito antigo, uma corda de 100 cúbitos de comprimento foi chamada de 1 khet. A unidade comum de área era o *seta*t ou *khet* quadrado, usada frequentemente como tradução da palavra grega *aroura*. Para áreas menores, o *seta*t foi progressivamente reduzido pela metade e sinais especiais foram utilizados no Papirus Rhind para um meio, quarto e oitavo de um *seta*t que, presumivelmente, tinham nomes especiais.

Na prática, um *setat* também foi considerado, por ser divisível em tiras estreitas de comprimento, um *khet* e um cúbito de largura, chamadas de "tiras cúbitas" de modo que uma área de terra inferior a um *seta*t era dada por meio de frações unitárias de um *seta*t, 1/2, 1/4 ou 1/8, ou por meio de uma quantidade inteira de tiras "cúbitas". Para grandes áreas de terra, um múltiplo de 10 do *setat* foi utilizado, correspondendo a 1000 tiras "cúbitas". Em termos modernos, o *setat* era cerca de dois terços de um acre ou 0,275 hectares, de modo que seus múltiplos de l0 era cerca de 2,75 hectares (ROBINS; SHUTE, 1987, p.13-14).

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), existem dois tipos de concepção de área: as concepções geométricas e as concepções numéricas. Para as autoras, construir o conceito de área como grandeza autônoma exige distinguir claramente área e superfície, bem como área e número.

Ao longo das atividades, os processos utilizados levaram os alunos a designarem área como o lugar ocupado por uma superfície, no caso, por uma figura no plano. Os alunos perceberam a diferença entre área e superfície e também entre área e número.

Trabalhamos agora com atividades que favoreceram aos alunos compreenderem que a área de $1cm^2$ corresponde à área de um quadrado, cujo lado mede um centímetro de comprimento, bem como, abstrair esse conceito para qualquer unidade quadrática.

Para isso adotamos quadrado como unidade de medida.

Dizemos que uma superfície de uma figura é pavimentada se for possível cobri-la por uma unidade, sem decompor a unidade, e sem decompor a figura. As superfícies não pavimentadas se encaixam em um dos seguintes casos nas atividades que apresentaremos a seguir:

Por decomposição, a superfície pode ser transformada em pavimentada.

Existe uma subunidade que pavimenta a superfície.

Entre as situações nas quais não é possível decompor a unidade nem a superfície, existem alguns casos em que a área só pode ser calculada por aproximação.

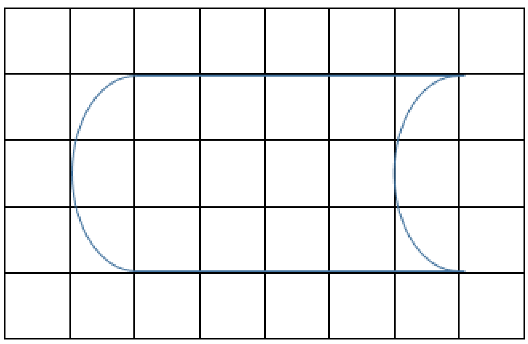
Para representar a área, assumiremos, como unidade de medida padrão, um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento 1cm que será chamado quadrado unitário. Em decorrência, a área do quadrado unitário será igual a uma unidade de área, $1cm^2$.

ATIVIDADE 11- MALHA QUADRICULADA: UNIDADE DE MEDIDA DE ÁREA

1 Objetivo

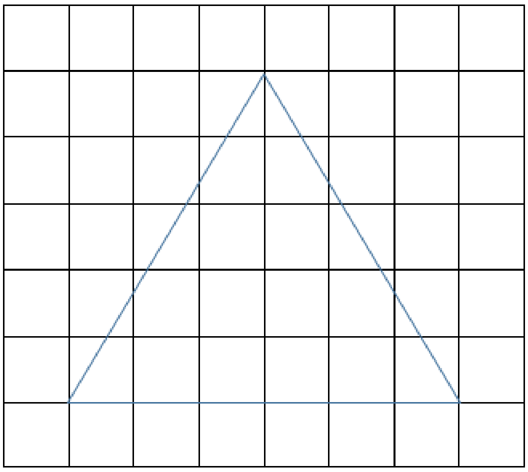
Evidenciar a natureza de uma unidade quadrada de área. Calcular a área da figura utilizando como unidade o quadrado. Escolher uma subunidade do quadrado para medir a área. Calcular a área de cada figura, adotando, como unidade de medida, o quadrado da malha na qual ela está desenhada.

Figura A



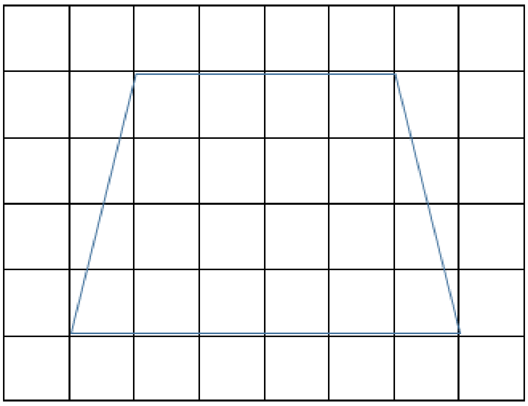
Justifique sua resposta:____

a) Figura B



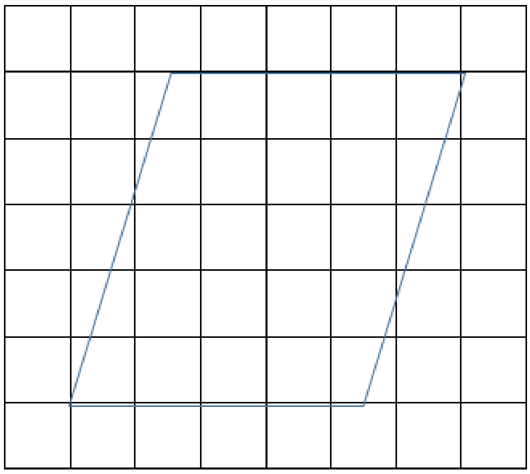
Justifique sua resposta:____

b) Figura C



Justifique sua resposta:____

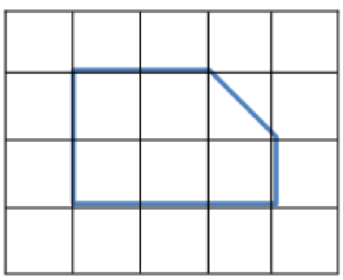
Figura D



Justifique sua resposta:____

2 - Dadas as figuras abaixo:

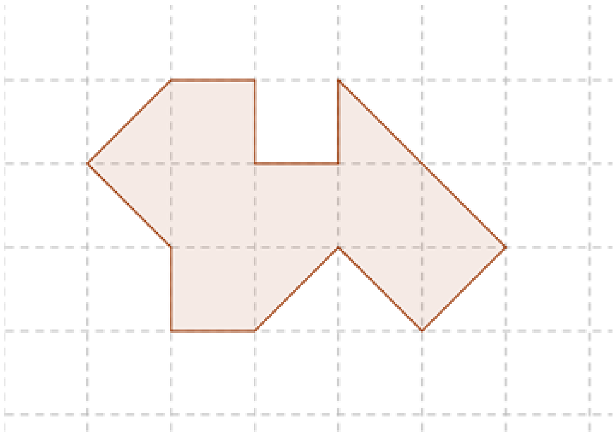
Figura 1



a) Calcular a área da figura 1 utilizando, como unidade de medida, o quadrado da malha.

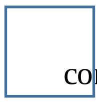
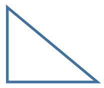
b) Calcular a área da figura 1 utilizando, como unidade de medida, uma subunidade do quadrado da malha.

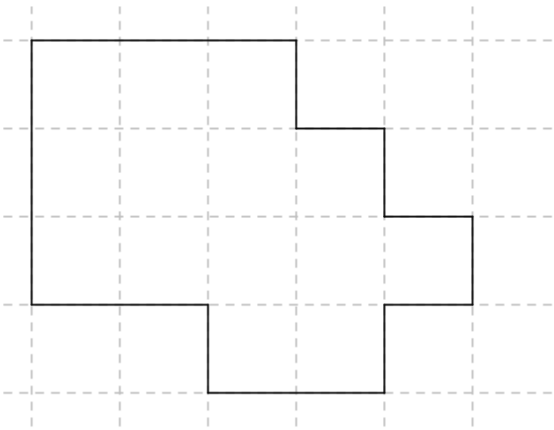
Figura 2



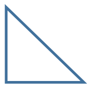
a) Calcular a área da figura 2 utilizando, como unidade de medida, o quadrado da malha.

b) Calcular a área da figura 2 utilizando, como unidade de medida, uma subunidade do quadrado da malha.

3 - Dada a figura calcular a área com o quadrado  com o triângulo 
e com retângulo. 



Preencher a tabela abaixo:

Unidade de medida	Medida da área
	
	
	

Observando a tabela com a unidade de medida e a medida da área o que podemos concluir?

2 Análise

Nossa intenção, nesse exercício, era fazer com que os alunos realizassem a decomposição e a composição de figuras para encontrarem a medida da área, uma vez que, já tinham o conceito de que figuras diferentes podem ter a mesma área e que, pela reconfiguração, pode-se separar o todo em partes e a área do todo será igual a somas das áreas das partes.

Acreditamos que, inicialmente, eles não teriam problemas em perceber, por intuição, que mentalmente ou por manipulação, poderiam movimentar parte da figura compondo outra e que a área da segunda é igual à da primeira, pois a área ocupada pelas duas figuras é a mesma. Por conseguinte, consideramos pertinente a presença de certas dificuldades, uma vez que, em atividades anteriores, como no tangram, os alunos recebiam a figura toda, mas já decomposta em partes; nesta atividade a figura estava inteira, e o aluno, além do movimento os estudantes, deveriam definir a parte do todo a que deveria ser movimentada.

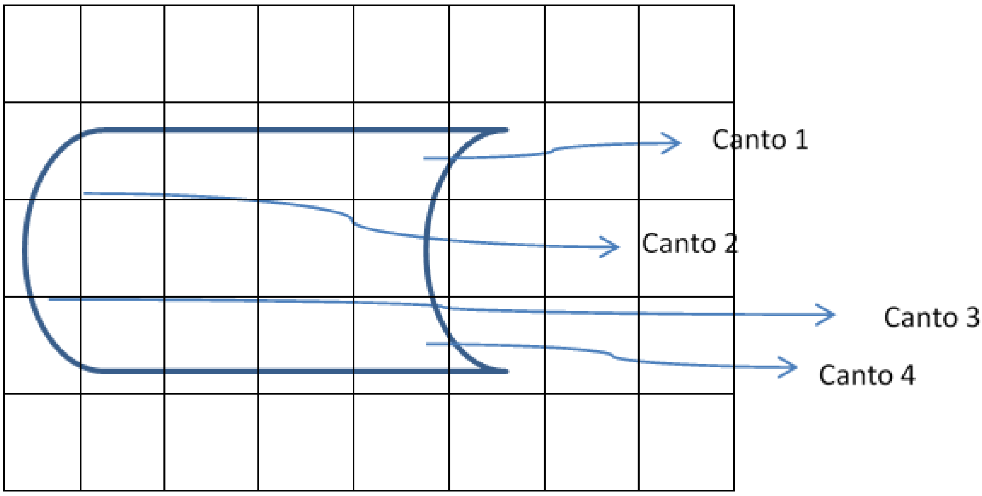
Então, de acordo com as definições de Duval (1988), ao nosso ver, os alunos, pelos resultados das atividades anteriores, apresentam conhecimentos de visualização, decomposição e composição de figuras. Dessa forma, acreditamos que eles não teriam dificuldades em realizar a apreensão operatória, ou seja, manipular mental ou fisicamente as modificações na figura para obter a medida da área de tal figura.

3 Análise das questões

Questão 1 - Calcular a área de cada figura adotando como unidade de medida o quadrado da malha na qual ela está desenhada.

As respostas para as justificativas foram organizadas em grupos, cada frase representa um grupo:

Cálculo da área da Figura A:



As respostas dadas, para a medida da área da figura A, foram 15 quadradinhos; quatro alunos responderam 18 quadradinhos:

“Essa figura é coberta por 15 quadrados porque se passarmos a ponta do lado esquerdo para o direito vai virar um retângulo”

“Tem em uma área 15 quadrados juntando todos os quadrados separados”.

“Primeiro formamos um retângulo depois a área que sobrou juntamos”.

“Eu descobri ajuntando os quatro cantos é igual a dois quadrados”.

“A área mede 15 quadradinhos. Porque completando os quadradinhos que estão só a metade fica um inteiro”.

“A área mede 18 quadradinhos”. Marcaram um retângulo, contornando a figura, contaram os quadrados internos, contanto duas vezes os a primeira coluna de quadrados da figura.

Apresentamos, a seguir, alguns exemplos que representam alguns procedimentos:

Figura 115 - Representa o movimento para pavimentação.

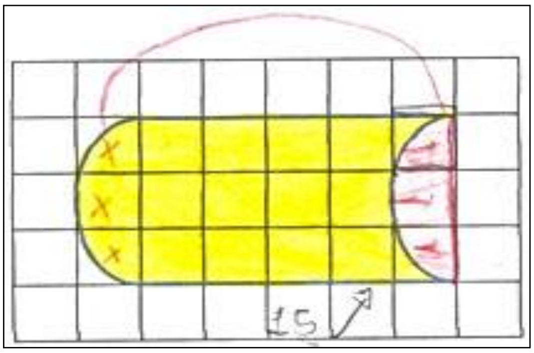


Figura 116 - Diferencia a unidade quadrática na contagem.

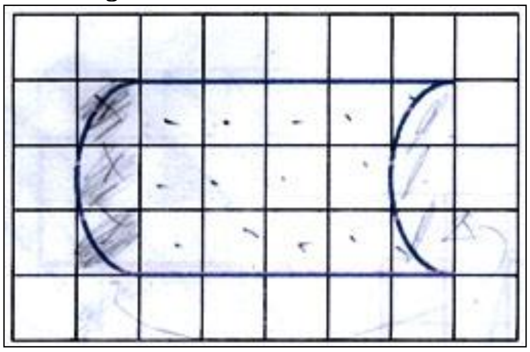


Figura 117 - Construção de um retângulo para fazer a contagem.

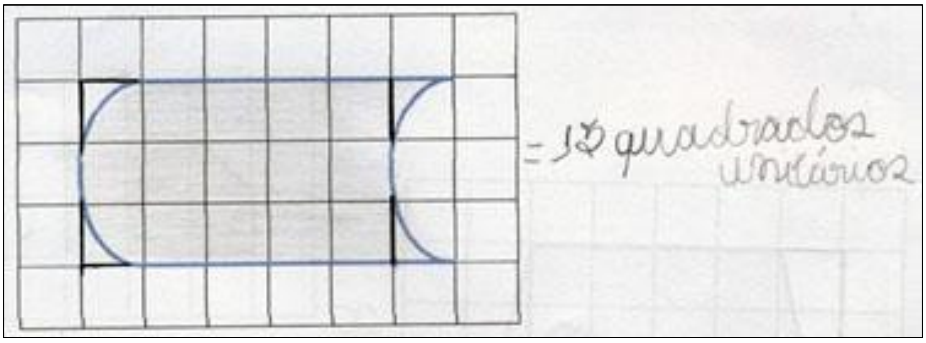
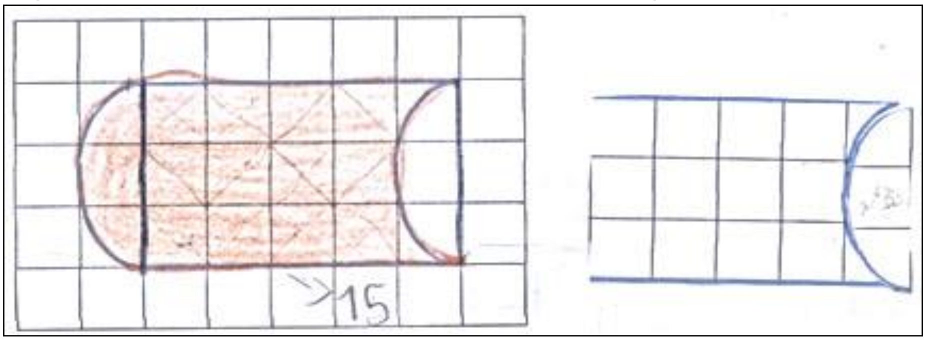


Figura 118 - Recorta e cola um molde para fazer a contagem.



Cálculo da área da figura B:

Figura 119 - Pavimentação um a um.

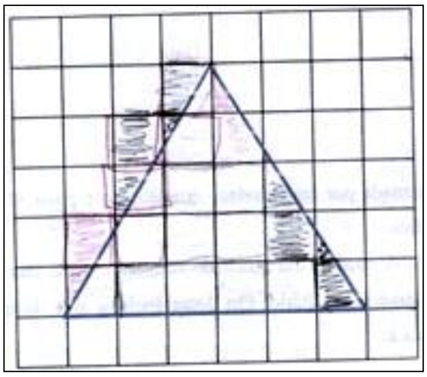


Figura 120 - Pavimentação um a um.

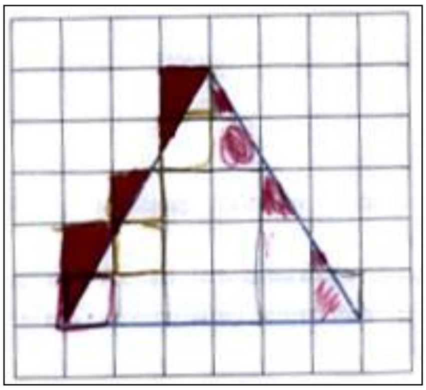


Figura 121 - Pavimentação compondo um retângulo.

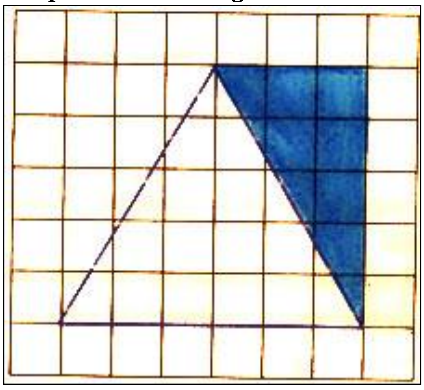


Figura 122 - Pavimentação da figura.

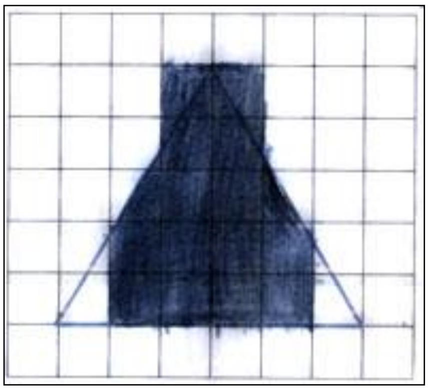


Figura 123 - Recorte e colagem formando um retângulo.

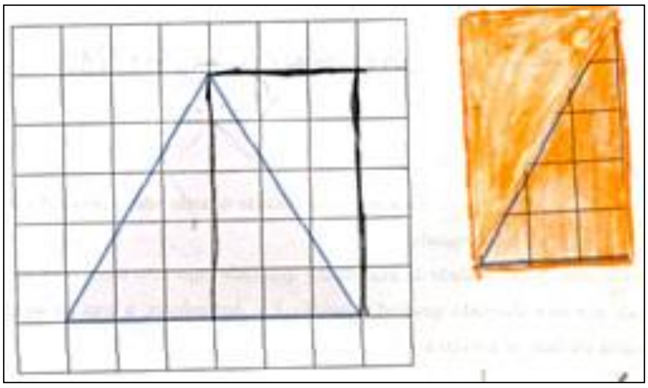
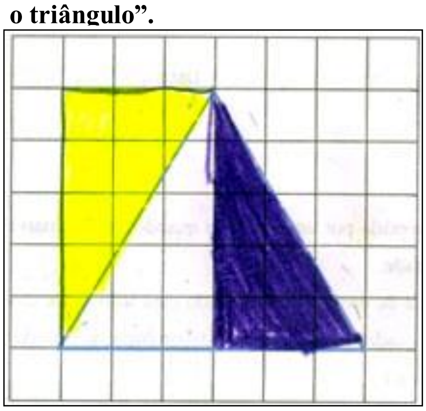


Figura 124 - Pavimentação "girando o triângulo".



As justificativas dadas para a medida da área da figura B foram:

"Eu tirei a área da ponta e coloquei nas duas laterais que formam no total de 15 quadrados de área".

“Eu peguei os quadrados do lado e fui contando os quadrados e a área da figura ficou igual”.

“Pegando a metade do triângulo e colocando do outro lado de cabeça para baixo forma um retângulo de 15 quadrados unitários”.

“Eu transformei o triângulo no retângulo e a área dele mede 15 quadradinhos”.

“A área da figura mede 15 quadrado para saber essa conclusão marquei o eixo de cimetria (simetria) e dobrei almeio (ao meio) e formou um retângulo”.

Cálculo da área da Figura C:

Apresentamos algumas produções dos alunos.

Figura 125 - Destaca dois retângulos, aponta o deslocamento.

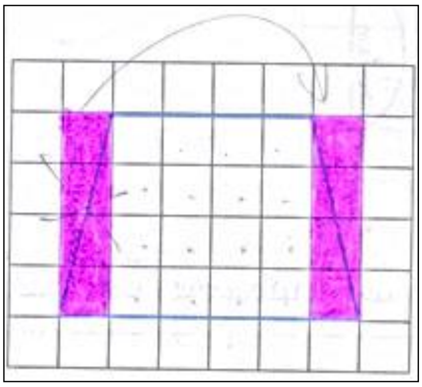


Figura 126 - Marca o eixo de simetria.

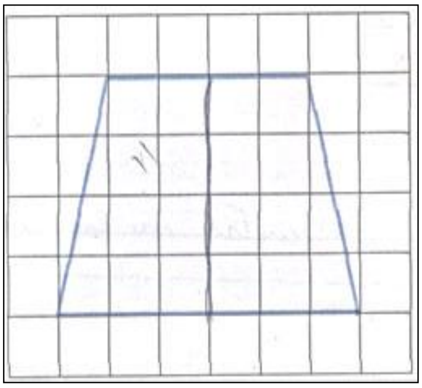


Figura 127 - Marcação de um retângulo para a contagem da unidade.

Figura 128 - Deslocando um a um para formar unidades.

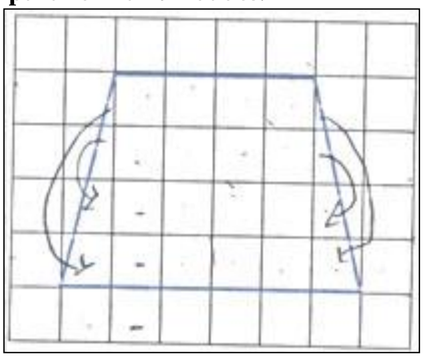
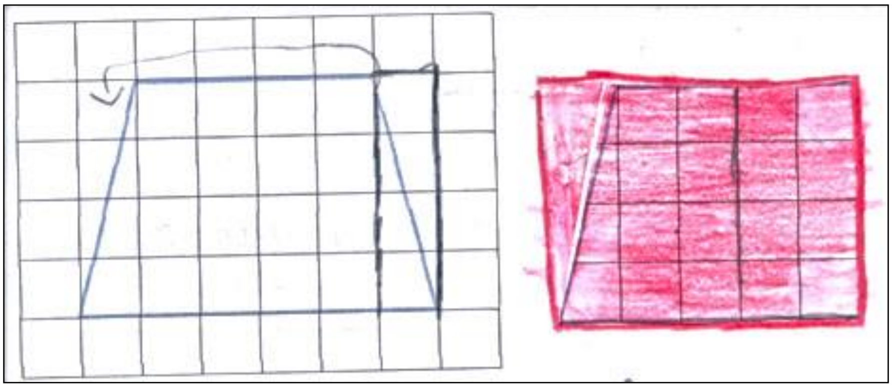


Figura 129 - Utilização do material concreto.



As justificativas se assemelham aos seguintes grupos de respostas:

"Formei um quadrado e com as duas áreas que sobrou formei um retângulo e tem 10 quadradinhos a área da figura".

"Eu peguei e contei os lados e a área da figura do outro lado. Eu esqueço o outro lado e tem 20 quadrados".

"Eu tinha um trapézio e transformei em um retângulo a área dele mede 20 quadradinhos".

"Eu juntei as duas pontas de cima com as duas pontas de baixo e formou um quadrado depois eu juntei as pontas da segunda fileira e da terceira ai das duas fileiras formou dois quadrados ai deu 20 a área da figura".

Cálculo da área da Figura D:

Apresentamos algumas produções dos alunos:

Figura 131 - Triângulo do outro lado.

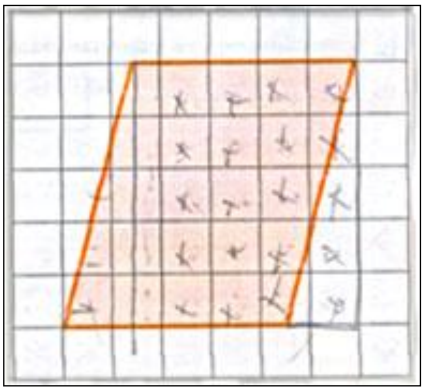


Figura 130 - Objetivo: compor o retângulo.

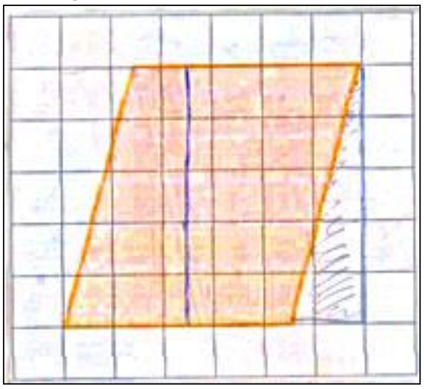


Figura 132 - Trapézio do outro lado.

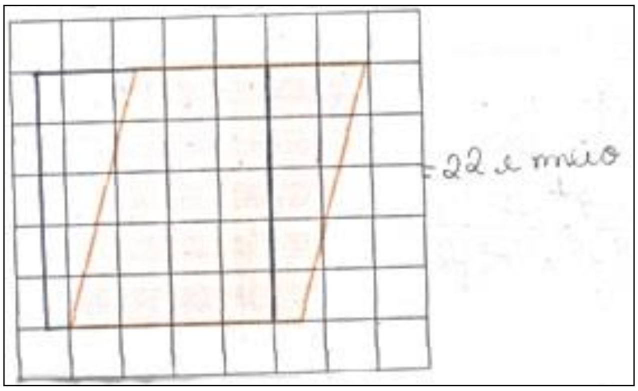
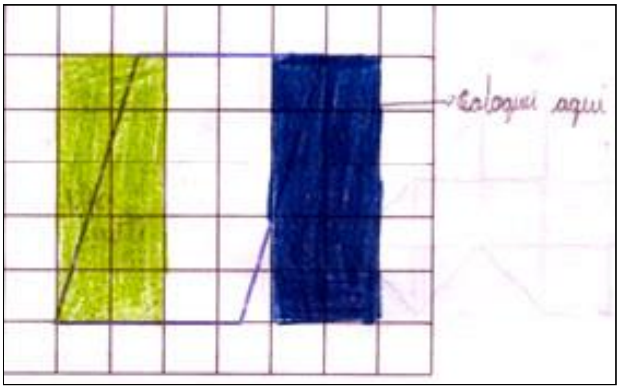


Figura 133 - Não considerou o que é interno e externo na figura.



Alguns alunos, ao trabalharem com moldes da figura, utilizaram outras medidas para os lados do paralelogramo. Esse fato os levou a encontrarem valores diferentes. Para nós, o importante é verificar se os procedimentos adotados levaram a resultados satisfatórios. Esse aluno, por exemplo, respondeu 17 quadrados e meio quadrado.

As justificativas para a medida da área da figura D (considerando a figura apresentada na atividade) foram:

“Eu tinha uma parte que na tenho metade e batem do outro lado e deu 20 e meio”.

“Esta área mede 22 quadrados e meio porque cortando um lado e colocando no outro você percebe”.

“Mede 22 quadrados e meio. Que juntando um lado com o outro lado forma um retângulo”.

“A área do paralelogramo mede 22/2”. O aluno utiliza 22/2 para representar sua fala: “são vinte e dois e meio”.

“Se eu recortar a figura na parte marcada e colar do outro lado ficará um retângulo com 22 ½ de quadrados”.

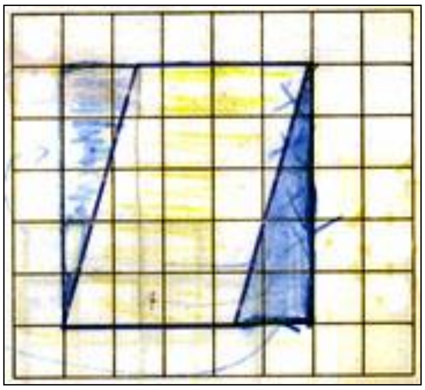
Os alunos revelaram dificuldade apenas na letra "d" da questão, uma vez que ela apresentava mais complexidade para a percepção em relação ao modo de decompor e compor a figura e também por utilizar metade do quadrado, na vertical, e não em triângulo, como eles vinham trabalhando. Consideramos, também, que a dificuldade teria ocorrido pelo fato de as três figuras anteriores serem resolúveis pela articulação dos mesmos conhecimentos em ação.

No entanto, a quarta figura dada na questão exigiu a articulação mais ampla de conceitos em ação. Outra dificuldade apresentada, mas em número menor, foi a figura não ser "manuseável" por estar fixa em papel. Aos alunos com essa dificuldade, apresentamos um papel quadriculado, no qual eles copiaram a figura, recortaram-na e, colaram-na para obterem a medida da área. Esses alunos ainda não abstraem, por isso, estão presos ao material.

Vergnaud (1993) explica que "os erros" na resolução de alguma atividade, frequentemente, decorrem porque os sujeitos se deparam com questões que nunca se propuseram antes ou que envolvem valores não usuais das variáveis de uma dada situação e isso gera autonomia crescente na realização das atividades.

Essa autonomia é percebida quando, ao comparar os valores encontrados na resolução, os alunos tentam descobrir se o valor está certo, por que está certo, e no que ele errou. Tal ação gera autonomia na discussão e na argumentação em busca de solução para o problema.

Figura 134 - Mudança da medida da base.



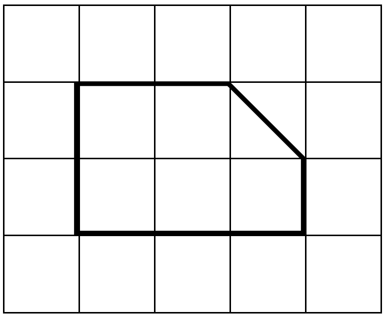
Apresentamos uma discussão com um aluno que desenhou a Figura 134 com a resposta "17,5 quadrados", para a medida da área do paralelogramo. Questionamos como ele havia encontrado aquele valor, se ele havia medido uma área externa à figura. O aluno, ao fazer o modelo, mudou a medida da base, no entanto, como ele considerou o desenho por ele construído, seus resultados estão corretos.

Diante da resposta do aluno, salientamos que a área da figura era a parte interna. O mesmo aluno argumentou que ele sabia que a área era a parte interna contornada pelos lados, todavia, utilizou a parte externa para fazer a medida da área. Explicou que formou o retângulo maior (medida da área igual a 25 quadrados), achou a área, contando os quadrados, e, depois, subtraiu o retângulo formado pelos dois triângulos azuis, assim, encontrou a área da figura em laranja (a área do paralelogramo).

Na resolução, percebemos um procedimento padrão adotado em todas as figuras, por meio de decomposição e composição. Elas foram transformadas em retângulos e, depois, os "quadradinhos" foram contados. Os alunos evidenciaram reconhecerem a diferença entre área e superfície. Para eles, a medida da área não está associada à superfície (figura), uma vez que é possível transformar a superfície conservando a medida da área.

Questão 2 - Dada a figura:

a) Figura 1



a) Calcular a área da figura 1 utilizando como unidade de medida o quadrado da malha:

Figura 135 - Pavimentação por unidade.

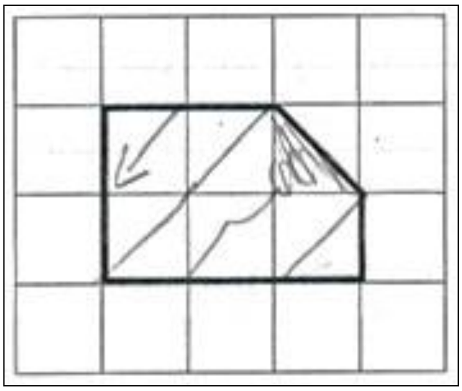


Figura 136 - Fraciona a figura.

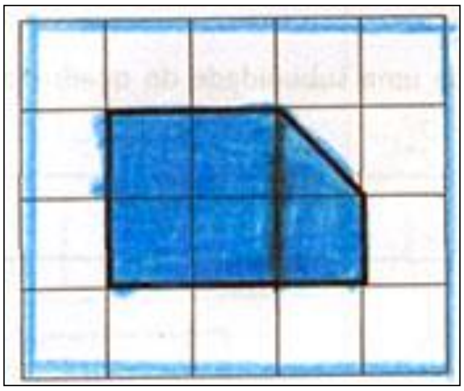
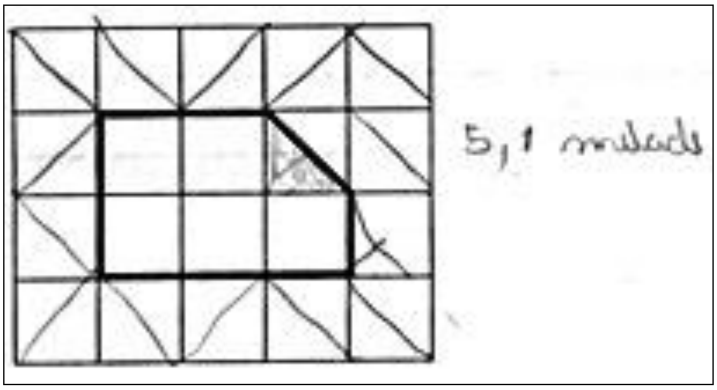


Figura 137 - Subtração de área.



As respostas se assemelham a:

"A figura dá um quadrado e sobra uma metade"

"A área mede cinco quadrados e meio".

"É 5/2 a área de medida". A aluna utiliza essa representação para escrever o que está expressando verbalmente, cinco e meio. A professora dessa turma ainda não havia trabalhado o conceito de fração, mas nós havíamos falado em atividade anterior que meio pode ser representado por ½. Os alunos apresentaram diferentes formas como tentativas de representar as frações. Essas representações fracionárias mereciam uma análise relacionada com as respostas do aluno, o que não era objeto de nosso trabalho.

"A área da figura mede 5 ½".

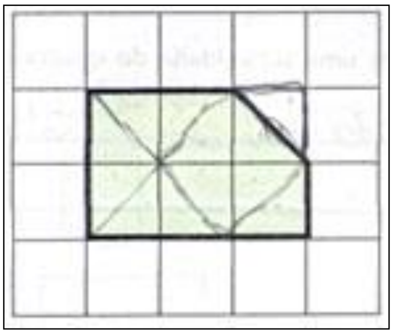
"5 inteiros e 1 metade do inteiro".

b) Calcular a área da figura utilizando como unidade de medida uma subunidade do quadrado da malha.

As respostas dadas:

"A área mediu 11 di (de) uma subunidade (subunidade) do quadrado".

Figura 138 - Unidade de medida: triângulo.



"A área mede 11 triângulos".

"A área da figura utilizando como unidade de medida o triângulo é 12 cortado ao meio". Esse aluno explicou que o cada quadrado foi cortado ao meio e deu 12 triângulos, ele encontrou a área retângulo esquecendo-se de retirar um triângulo que não fazia parte da figura dada.

"A área da figura que está na metade mede 10 ½".

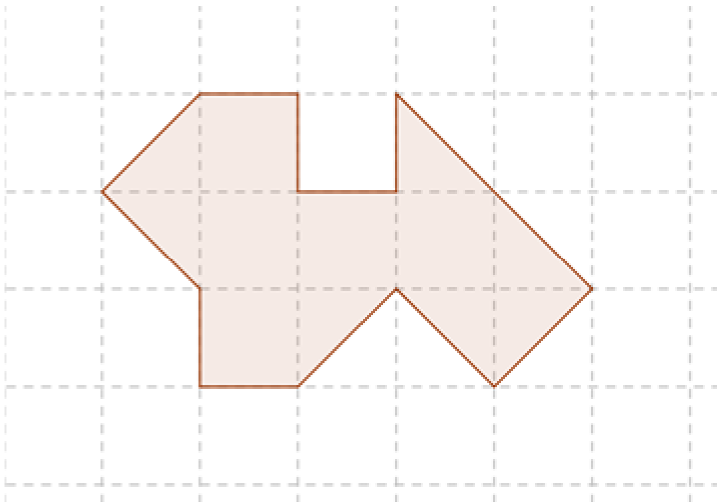
Na questão anterior, o aluno trabalhou com o conceito de que duas metades formam um quadrado inteiro, apresentando o resultado de seu cálculo em “quadrados”, por exemplo: oito quadrados e meio.

Essa atividade teve por intenção levar o aluno a ampliar o conceito da pavimentação por uma unidade, ou seja, não sendo possível informar a área por um número exato da unidade - “quadradinhos” – levou-os, também, a perceberem que a unidade pode ser reorganizada em subunidades, e a área continuará a mesma. No entanto, a sua medida pode ser expressa na unidade ou na subunidade, ou ainda, na unidade e subunidades.

Notamos que, apesar de a figura trazer destacado de modo explícito um triângulo, a metade do quadrado, quando solicitado que medissem a área com uma subunidade, levou alguns alunos a trabalharem com um quarto do quadrado, uma subunidade que estava implícita na figura.

Na conversa, um aluno explicou que, como o triângulo media a metade do quadrado, logo estaria representado. Ele pensou que queríamos saber se ele seria capaz de encontrar a subunidade do quadrado. O aluno já havia compreendido que não poderia ser o triângulo maior, porque ele já estava no desenho. Parece que, da mesma forma que queremos entender os processos do pensamento do aluno, ele, por sua vez, também quer entender o processo de nossos comandos para as questões, ou seja, ele quer entender o que esperamos que ele responda. Ele busca descobrir o que desejamos que seja respondido. Por isso, às vezes, não busca em seus esquemas as respostas e sim no professor.

b) Figura 2



a) Calcular a área da figura 2 utilizando como unidade de medida o quadrado da malha:

As respostas dadas se assemelham:

“A área da figura é de 8 e meio, medindo com o quadrado da malha”.

“A área da figura mede 5 quadrados pequenos e 7 triângulos pequenos”.

“Eu fechei um retângulo e fui tirando a parte que não tinha a figura, a área é 8 quadrado e meio”.

Figura 139 - Reconfiguração.

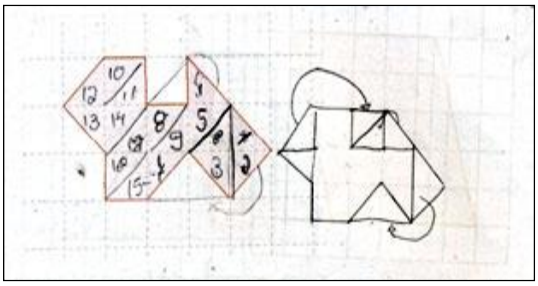


Figura 140 - Corta a unidade.

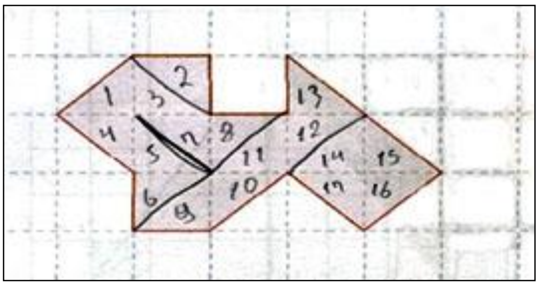


Figura 141 - Aponta os recortes e colagens.

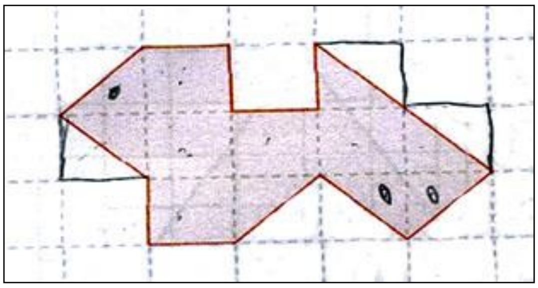
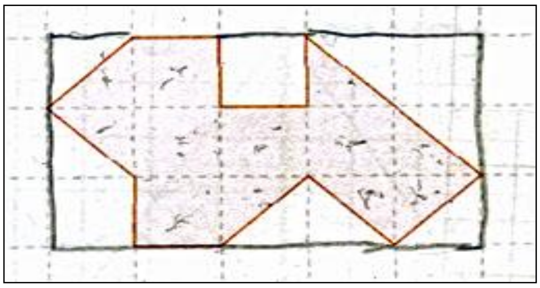


Figura 142 - Uma parte do todo.

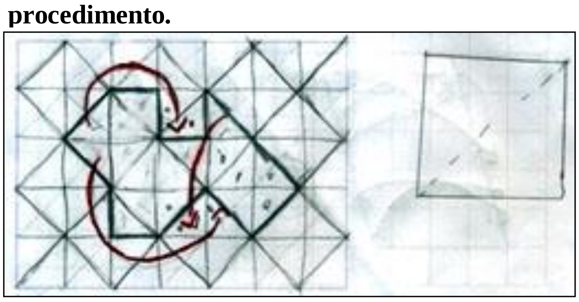


b) Calcular a área da figura 2 utilizando como unidade de medida uma subunidade do quadrado da malha.

As respostas dadas assemelham-se a:

“A área dessa figura tem 17 triângulos”.

Figura 143 - Expressa uma legenda para o procedimento.

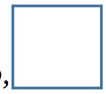
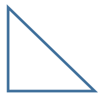


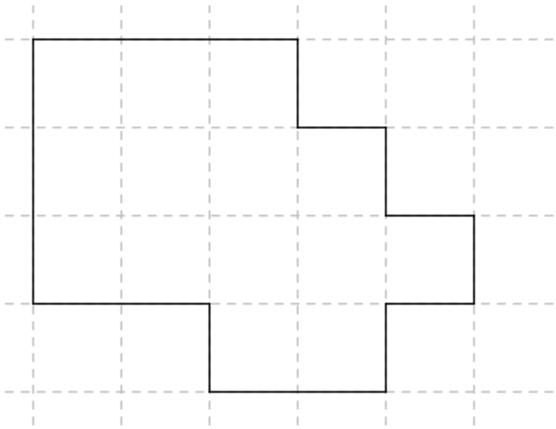
“Calculei a figura a em cima ele mende 26 triângulos pequeno”.

“Calculei a figura acima usando essa subunidade e ao todo mediu 34 quadrados de subunidade”

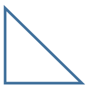
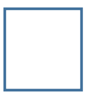
“A área é de 16 de uma subunidade”.

Essa questão também nos ajudou a verificar que os alunos não têm dúvida quanto à medida de área em relação a uma unidade de medida. Quando o número era superior ao número exato de quadrados, eles, sem nenhuma dificuldade, trabalharam com a subunidade, no caso o triângulo.

Questão 3 - Dada a figura, calcular a área com o quadrado,  *com o triângulo*  *e com retângulo* 



Preencher a tabela a seguir:

Unidade de medida	Medida da área
	28
	14
	7

Observando a tabela com a unidade de medida e a medida da área, o que podemos concluir?

“Podemos concluir que 28 é a medida de área do triângulo, 14 é o do quadrado e 7 o do paralelogramo”.

“Podemos concluir que a unidade de medida se multiplica”.

“Podemos concluir que a figura faz cada uma medida que pediu a quantidade mudou mais a área continuou a mesma”.

“Com qualquer forma geométrica tem sempre medidas diferentes”.

“A área não muda, a única coisa que muda é a unidade de medida”.

“Podemos concluir que 28 triângulos, 14 quadrados e 7 retângulos formam a mesma figura, porque todas são a mesma figura, mas só muda a unidade de medida”.

“Posso concluir que a medida é certa”. O aluno quer dizer com “é certa” que utilizando o quadrado, triângulo ou retângulo a figura fica toda recoberta.

“Podemos dizer que para calcular qualquer figura precisa de medir a área. E ver a medida”.

“Que cada um é a metade do outro”.

“Para resolver a medida precisa da figura geométrica”.

“Que as áreas dos quadrados são diferentes”.

“Quando medimos com essa figura podemos concluir que dá resultados diferentes um é metade de outro. Um e subunidade e outro e múltiplo”.

“Que quanto maior a unidade de medida mais veze ela cabe na figura e diminuem o número e quanto menor a unidade de medida mais números”.

“Muda o número de medida porque quanto maior o número de medida menor o número”.

“Que o triângulo é a metade do quadrado e o retângulo é o dobro do quadrado”. Mais uma vez, a resposta do aluno está de acordo com situação na qual ele está inserido; cabe, mais uma vez, a mediação da professora em realçar essa situação, nem sempre tal afirmação é verdadeira. Está correta para essa situação.

“Podemos concluir que a área da figura é medida de varias maneiras e formas. O retângulo é o dobro do quadrado e o quadrado é o dobro do triângulo”.

“Podemos concluir que a área da figura do triângulo mede 28 quadradinhos a do quadrado 14 e a do retângulo são 7 retângulos. Quando eu medi com o triângulo deu o dobro quando medi com o retângulo deu metade”.

“Que a medida da área depende da unidade de medida”.

A resolução dessa questão e as justificativas apresentadas nos levam a perceber que os alunos concebem a relação entre a unidade de medida e a medida da área da figura, ou seja, eles reconhecem que é possível associar números a grandezas.

Notamos, também, muita desenvoltura do aluno em passar de uma unidade para a outra, isto é, recobriram a mesma figura com unidades diferentes para medi-la e, para eles, era esperado que os números fossem diferentes, pois as unidades de medidas eram diferentes. Eles demostraram dominar esse conceito. Isso foi trabalhado enfaticamente na atividade com tangram, Atividade 10.

Ao longo da atividade, os alunos não apresentaram dificuldades e demonstraram dominar a apreensão operatória. Realizaram operação mental ou por meio do material concreto; também fizeram configurações mereólogicas, decompuseram e compuseram figuras retangulares a fim de calcular a medida da área. (DUVAL, 1994).

Então, a partir de conhecimentos adquiridos em atividades anteriores, os alunos desenvolveram decomposição e reconfiguraram o quadrilátero de acordo com a unidade de medida dada. Eles demonstraram que dominam (1) a apreensão operatória, ou seja, a função mereológica, quando a utilizaram como método a decomposição de figuras em partes e a relação dessa parte com o todo; (2) a visualização e a função posicional, quando deslocaram por meio de rotação ou translação as partes, para obterem as figuras retangulares.

ATIVIDADE 12 - TRANSFORMAR UMA SUPERFÍCIE NÃO PAVIMENTADA EM SUPERFÍCIE PAVIMENTADA

1 Material

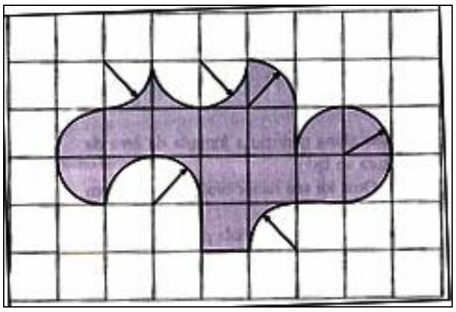
Figuras, tesoura e cola.

2 Objetivo

Por recorte e colagem, transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada**.**

Questão 1 - Dada a figura abaixo, calcule sua área:

Figura 144 - Material da atividade.



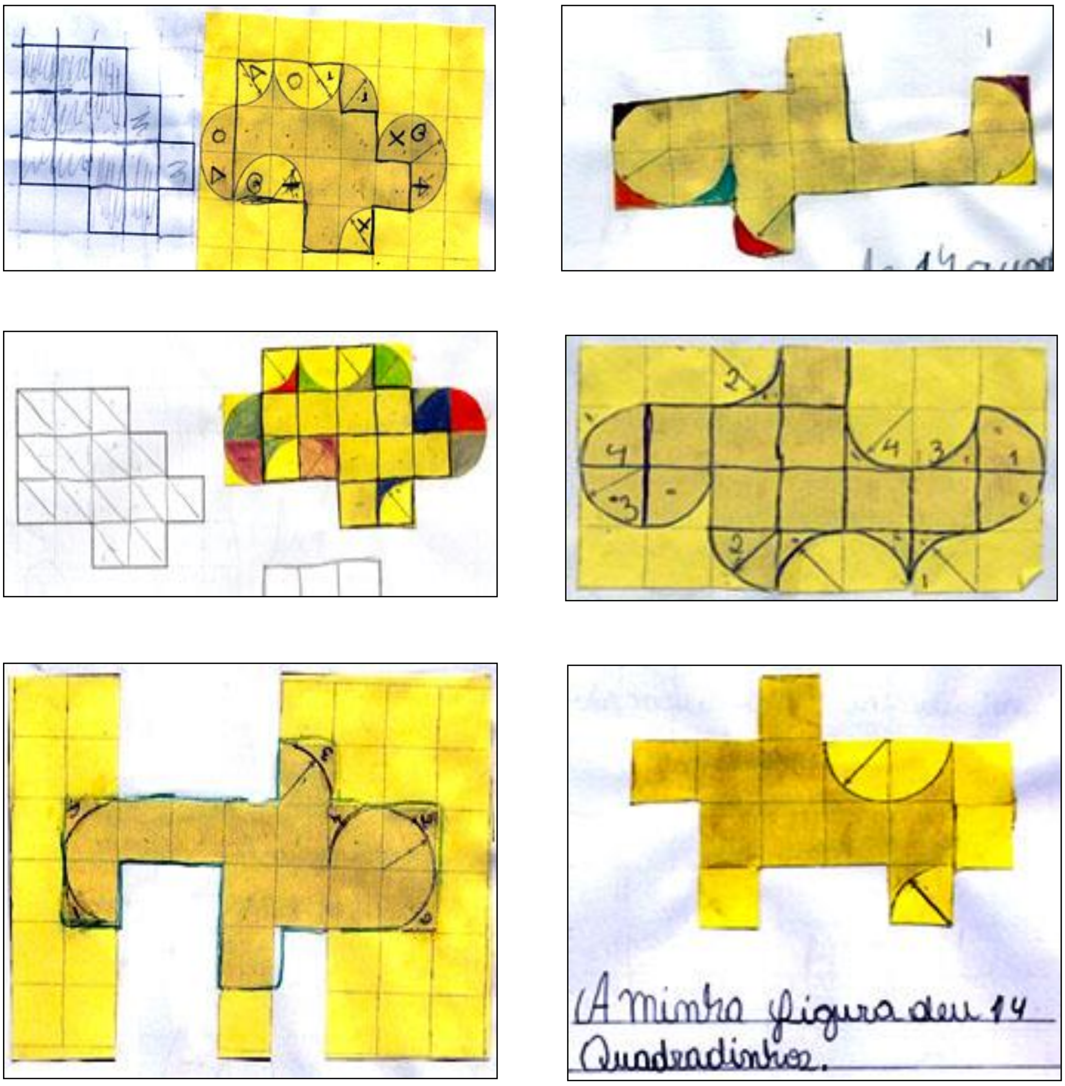
3 Análise

Nessa atividade, os alunos mobilizaram os conhecimentos trabalhados na atividade 13, e resolveram a atividade sem nenhum problema.

Então, definimos por trabalhar com uma figura que não lembrasse facilmente um retângulo. Selecionamos, entre as figuras por nós encontradas no conteúdo em questão, em livros didáticos do ensino fundamental, essa figura por apresentar formas que lembram partes de uma circunferência, curvas.

A seguir, apresentamos algumas produções:

Figura 145 - Procedimentos para pavimentação da figura.



Nesse processo, estamos realizando duas operações distintas, uma geométrica e outra numérica. No caso do cálculo da área na malha quadriculada, a operação geométrica corresponde a ladrilhar a figura, e a numérica contar a quantidade de unidades de área que couberam na figura.

Pouquíssimos alunos apresentaram dificuldade nessa questão, superaram, pois, nossas expectativas. Os alunos foram logo contando os quadrados e tentando juntar as partes para formar um quadrado, conforme apresentado nas colagens acima. Alguns alunos recortaram e colaram, outros representavam os movimentos das partes por desenhos.

Em seguida, pedimos que desenhassem no papel quadriculado como havia ficado a figura ao final e qual era a sua área. A partir da área da figura, construída no papel quadriculado, afirmaram que a área da figura dada era igual a quatorze quadrados, isto é, a figura mudou, mas a área continuou a mesma.

Teoremas em ação das atividades 13 e 14.

O quadrado é uma unidade de medida de área.

O quadrado pode ser divido em triângulos que podem ser utilizados como unidades de medidas.

Em uma figura quadriculada, a medida da área é igual ao número de quadrados (da malha) que recobre a figura.

Se eu juntar dois quadrados do papel quadriculado, forma um retângulo; a área medida com esse retângulo será metade da área medida com o quadrado.

Quando a unidade de medida for maior, o número vai ser menor, aumentando a unidade de medida, a área é a mesma, mas o número fica menor". A medida da área é diferente, a área é a mesma.

Um figura tem área e medida de área.

Medir com triângulo é melhor por ele ser uma unidade menor, dá mais certo.

A medida da área da figura pode ser com duas unidades, quadrado ou triângulo.

Quando eu mudo a unidade, eu não posso dizer que a área mudou, a figura é a mesma!

Quando se mede uma mesma figura com unidades diferentes, a medida é diferente, mas a área é a mesma, muda a unidade, muda o número não a área.

Existem áreas que podem ser recobertas por unidades quadradas.

Conceito em ação

A medida da área depende da unidade escolhida.

A unidade de área é uma figura.

Área é um atributo da figura.

4 Conclusão

Por recorte e colagem da figura, transformaram superfícies não pavimentadas em superfícies pavimentadas e, se esse procedimento não permitisse determinar a medida da área, compreenderam que outra possibilidade seria cortar a unidade de medida, isto é, utilizar uma subunidade do quadrado para cobrir a área e determinar sua medida. Ou ainda, calcular a medida da área por aproximação.

Para nós, tal ação anuncia que os alunos, por meio de reconfiguração, desenvolveram procedimentos para a medida de área.

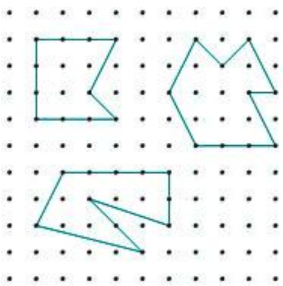
Na história do desenvolvimento matemático, é possível pressupor utilização dessas práticas. Conforme Boyer (1974), no Papiro de Ahmes, existem, pelo menos, dois problemas (número 51 e 52) para os quais os egípcios utilizavam o cálculo de áreas, com o uso de composição e decomposição de figuras. Segundo Roque (2012), Jean Høyrup, nos anos 1990, com base em novas traduções dos termos, mostrou que a algebra dos babilônicos estava intimantente ralacionada a um procedimento geométrico de cortar e colar. Høyrup caracteriza essas práticas como “geomtria ingênua”.

Høyrup (2002) considera que algumas resoluções de problemas presentes nos tabletes babilônicos podem ser descritas como “quase algébricas”, pois, ao que tudo indica, eles foram resolvidos em passos analíticos que podem ser convertidos para um procedimento algébrico, embora o argumento real fosse baseado em uma geometria “ingênua” do tipo corte e cole.

ATIVIDADE 13 - ÁREAS E PERÍMETROS DE POLÍGONOS NO GEOPLANO

1 Um pouco de história do conceito de área

Figura 146 - Exemplo de plano reticulado e polígonos simples.



No início do trabalho, evidenciamos que tomaríamos como base histórica as civilizações antigas: egípcia, babilônica, chinesa, indiana e grega, no entanto, faço uma observação a essa atividade para apresentar um teorema descoberto em 1899 por Georg Alexander Pick; por meio de uma fórmula, calcula-se a área de um polígono simples contando o número dos seus pontos de fronteira e o número dos seus pontos interiores. Diz-se que um polígono é simples quando não possui buracos no seu interior nem intersecções das suas arestas. Os vértices do polígono são pontos (coordenadas) dessa rede (plano cartesiano).

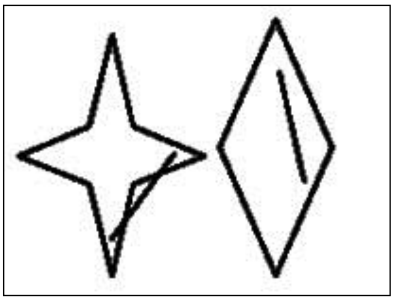
Este teorema nos é propicio, nesse momento, dado o fato de trabalharmos com o quadrado como unidade de medida de área, tendo como base um plano reticulado; no caso de nossa atividade, será o geoplano utilizado como instrumento que representa tal plano reticulado.

Para enunciar este teorema, consideremos um polígono simples P, no plano cartesiano: os pontos que estão sobre as arestas do polígono chamaremos pontos fronteira (F) e, os que estão no interior do polígono, chamaremos pontos interiores (I). Se os vértices de P têm todas as coordenadas inteiras, a área A (P) desse polígono é dada por:

$$\mathrm{A\ (P)} = \frac{1}{2}F + I - 1$$

O teorema nos permite calcular a área de um polígono simples a partir da contagem de pontos do reticulado (plano cartesiano). (LIMA, 1991, p. 103).

Figura 147 - Poligono não convexo e convexo.



Revisitando conhecimentos matemáticos:

Segundo Lima (2010), polígono é uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais. Também designa a região do plano limitada por tal linha.

Uma região plana é chamada de polígono convexo se e somente se dois pontos pertencem ao polígono, então, todo o segmento, tendo estes dois pontos como extremidades, estará inteiramente contido no polígono. Se dados dois pontos do polígono, o segmento que tem esses pontos como extremidades, contiver pontos que estão fora do polígono, ele será denominado não convexo.

Wilmer e Pereira (1975, p. 62) definem: “uma figura é qualquer subconjunto do espaço. Uma figura plana é uma figura contida em algum plano. Uma figura é convexa se contém o segmento que liga quaisquer dois de seus pontos: A, B f AB f”.

O retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos internos iguais a noventa graus. Segundo Lima (1991a), “Se os lados de um retângulo R têm para medidas os números inteiros m e n, então, mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em m.n quadrados unitários, de modo que se deve ter área de R = m.n”. Diz-se, logo, que a área de um retângulo é o produto da base pela altura, e podemos estender a definição considerando m e n para qualquer número real positivo. O autor mostra que a área é o produto do comprimento dos lados.

Alguns problemas em matemática podem ser usados para ajudar os alunos a aprimorarem suas habilidades no cálculo e para fazerem generalizações. Outros são úteis no desenvolvimento de processos essenciais de investigação e descoberta. Muitos artigos e livros já foram escritos mostrando como o geoplano pode ser usado para ensinar informalmente geometria e alguns conceitos algébricos no ensino fundamental e médio. As atividades sugeridas neste texto estão relacionadas ao problema de encontrar polígonos com perímetros e áreas específicas.

Essa atividade foi trabalhada no curso de extensão de história da matemática: Geometria para séries iniciais, oferecido pela UnB e ministrado pela Profª Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar, em 2011. Então, uma das professoras tinha conhecimento dessa atividade uma vez que participou do curso.

Nem todas as questões foram trabalhadas pelas professoras, elas escolheram uma ou outra com devidas adaptações. Nós, também, realizamos algumas adequações pertinentes aos nossos objetivos.

Nesta atividade, e em outras, surgiram alguns questionamentos em relação ao uso do quadrado como unidade de medida: que fatos haveriam influenciado o uso do quadrado como unidade de medida? Por que o quadrado como unidade medida se todas as figuras podem ser transformadas em triângulos e depois em quadrado?

Roque (2012), explica que para medir área de uma figura, era encontrada a área de uma figura mais simples cuja área fosse igual à da figura dada. “Essa figura era o quadrado, logo o problema de encontrar a quadratura de uma figura qualquer era equivalente ao problema de construir um quadrado cuja área fosse igual à da figura dada”. (ROQUE, 2012, p. 170).

Essa atividade foi divida em quatro partes: Atividades 13.1, 13.2, 13.3 e 13.4.

ATIVIDADE 13.1 - GEOPLANO: UNIDADES QUADRADAS

1 Objetivo

Trabalhar com a unidade quadrada**.** Construir, no geoplano, polígonos cujo perímetro é dado. Comparar as áreas.

2 Material

Geoplano, ligas coloridas, papel quadriculado.

3 Desenvolvimento

Explicar para os alunos o geoplano (plano quadriculado e os pontos desse plano).

Entregar as ligas elásticas e deixar os alunos “brincarem” livremente com o material.

Acordar com os alunos que a unidade de medida seria o nosso quadradinho, então, para área seria o quadrado de lado uma unidade.

Orientar a resolução das atividades.

1) Construa dois retângulos, diferentes de perímetro 10 unidades cada um, cujos vértices são os pregos do geoplano.

2) Calcule a área destes retângulos.

3) Desenhe na folha de papel quadriculado os retângulos e escreva ao lado de cada um, sua área e seu perímetro.

4) Polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes?

ATIVIDADE 13.2 - A NÃO RELAÇÃO ENTRE ÁREA E PERÍMETRO

1 Objetivos

Perceber que polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas iguais ou diferentes. Entender que a medida do perímetro não tem relação com a medida da área. A unidade utilizada, para a medida do perímetro, é a distância entre dois pregos e não a diagonal do quadrado formado por eles.

1. Construir as seguintes figuras no geoplano, calcular a área e o perímetro.

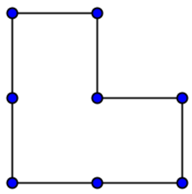


Figura A

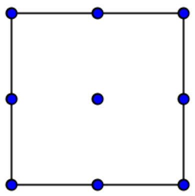


Figura B

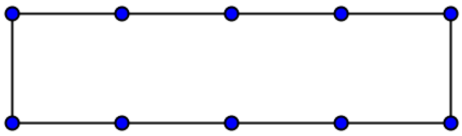


Figura C

Agora responda as questões:

a) Polígonos de mesmo perímetro têm a mesma área?

b) Polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes?

c) O que podemos concluir diante dessas questões?

d) Entre essas figuras quem tem a maior área? Por quê?

ATIVIDADE 13.3 - FIGURAS NÃO CONVEXAS: ÁREAS E PERÍMETROS

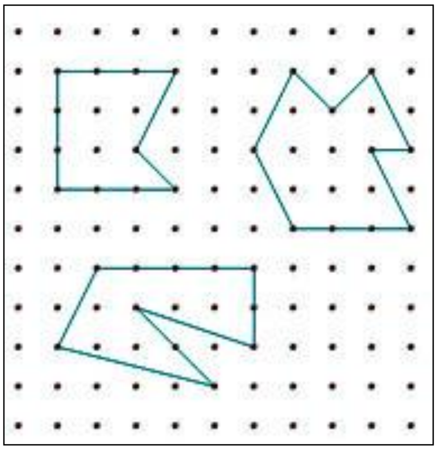
1 Objetivo

Identificar área e perímetro de figuras não convexas.

2 Material

Geoplano, ligas e papel quadriculado.

1. Observe as seguintes figuras construídas no geoplano.



1. Quantos pregos cada uma dessas figuras têm em seu interior e em seu contorno?

Figura A

a.interior: ____________________

b. contorno: __________________

Figura B

a.interior: ____________________

b. contorno: __________________

Figura C

a.interior: ____________________

b. contorno: __________________

2. Construa 5 figuras no geoplano que tenham exatamente um único prego no seu interior. Faça o desenho na folha quadriculada.

Calcule a área.

Complete a tabela a seguir:

Figuras	Área	Número de pregos sobre o contorno
1		
2		
3		
4		
5		

3. Que relação existe entre o número de pregos sobre o contorno da figura e sua área?

ATIVIDADE 13.4 - TRABALHO COM O GEOPLANO E PAPEL QUADRICULADO

1 Objetivo

Consolidar o conceito de área.

2 Material

Geoplano e folhas de papel quadriculadas.

1. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e nenhum prego em seu interior. Calcular a área.

2. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e 1 prego em seu interior. Calcular a área.

3. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e 2 pregos em seu interior. Calcular a área.

4. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e 3 pregos em seu interior. Calcular a área.

Figuras	Número de pregos no interior	Área
A	0	
B	1	
C	2	
D	3	
E	4	

Que relação existe entre a área da figura e o número de pregos no interior?

Análise das atividades 13.1, 13.2, 13.3 e 13.4

Para Duval (1998), a visualização e a representação são aspectos importantes da aprendizagem e desenvolvimento de conceitos.

Acreditamos que o geoplano é um instrumento que favorece a visualização e representação de procedimentos de cálculo de área e perímetro por meio de investigações, além de permitir o reconhecimento de padrões em relação ao perímetro e a área de uma figura, então, os alunos, por meio desse reconhecimento, podem justificar suas respostas e representar o mesmo objeto matemático por meio de desenho no papel quadriculado.

A partir de nossas experiências anteriores com o geoplano e dos relatos das professoras do curso de extensão, que aplicaram a atividade com suas turmas, consideramos que o geoplano seria um elemento facilitador para a apropriação do quadrado como unidade de medida de área e para a distinção entre medida de área e medida de perímetro. Consideramos que os alunos não teriam dificuldades com as atividades, por isso, definimos que eles manuseariam à vontade o material, para depois orientarmos para as questões, além de ser outra maneira de trabalhar com a malha quadriculada.

Para Duval (1993), a coordenação dos diferentes registros de representação ligados ao tratamento dos conhecimentos não se operam espontaneamente. Então, é papel do professor organizar as atividades de forma a favorecer essa coordenação; para nós, a história da matemática pode criar essas oportunidades como apresentamos ao longo da sequência.

Inicialmente, deixamos os alunos manusearem bastante o geoplano. Eles foram colocando os elásticos de modo intuitivo e construindo muitas figuras diferentes. Depois, iniciamos uma discussão em relação às características do material. Intuitivamente, identificaram que as distâncias entre os pregos eram iguais e também perceberam que quatro pregos formavam um quadrado.

Então, pedimos para que medissem com a régua a distância entre os pregos e todos encontraram a distância correta de um centímetro. Em seguida, explicamos que aquelas madeiras com pregos eram chamadas de geoplano - “geo” significa geometria, e “plan” significa tábua ou superfície plana – e os pregos representam pontos no plano. Pedimos para utilizarem o geoplano e as borrachinhas coloridas para resolverem as questões que foram entregues.

Análise da atividade 13.1 Geoplano: unidades quadradas

1. Construa dois retângulos diferentes de perímetro 10 cada um, cujos vértices são os pregos do geoplano.
2. Calcule a área destes retângulos.
3. Desenhe na folha de papel quadriculado os retângulos e escreva ao lado de cada um sua área e seu perímetro.

Essas representações foram as realizadas pelos alunos, a diferença não estava na construção no geoplano, mas na forma de representar usando a linguagem escrita. Uns expressavam as unidades para os atributos medidos, alguns só para áreas; uns escreviam como unidade de comprimento “cm”, outros, lado do quadrado; ninguém utilizou, porém, o termo “cm^2” como unidade da medida de área**.** Chamou-nos a atenção que, na primeira representação, os alunos evidenciaram os pregos que contornavam a figura, ou o lugar onde estava o elástico. Na segunda representação, foi acentuada a marcação de cada quadradinho que compunha a figura. Isso demonstrou que na visualização uns traços são mais visíveis que outros para observadores diferentes.

Figura 148 - Representação escrita.

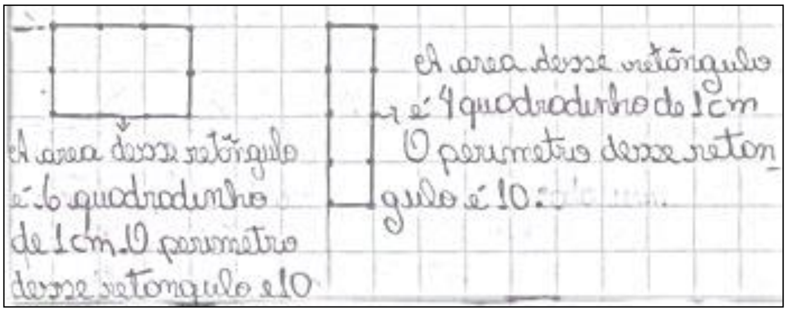
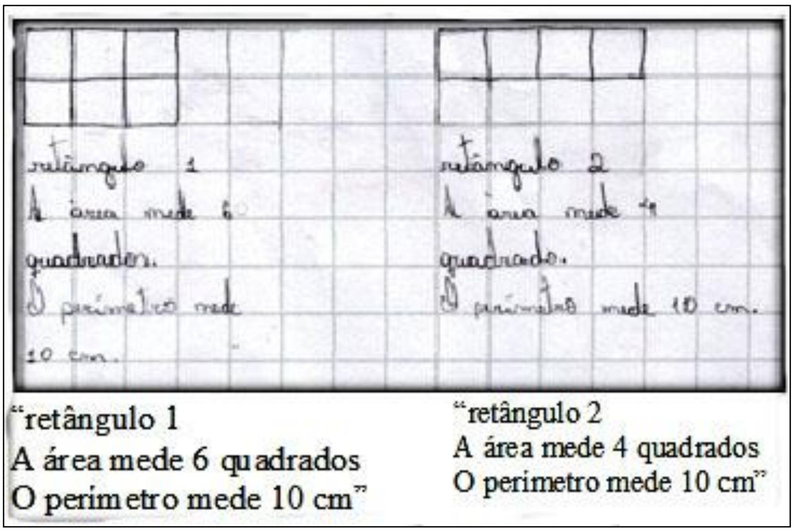
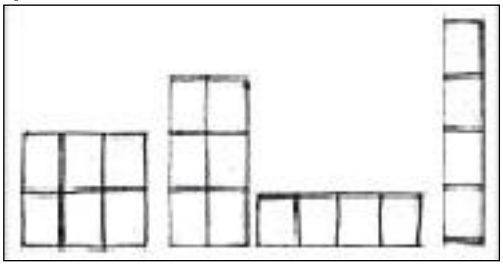


Figura 149 - Figuras de mesmo perímetro.



Inicialmente, os alunos não construíram os dois retângulos de perímetro igual a dez unidades. Construíam um e paravam, pois achavam que só poderia haver um retângulo com tal perímetro. Eles não consideraram o enunciado que pedia dois retângulos. Pedimos para que lessem o enunciado mais uma vez e, em seguida, fomos fazendo perguntas em relação ao enunciado, enfatizando cada comando do mesmo. Depois, solicitamos para que cada aluno caminhasse de grupo em grupo e fosse analisando as construções. Então, cada um retornou ao seu lugar e construiu mais um retângulo. As formas apresentadas foram essas:

Figura 150 - Representação no papel quadriculado.



Discutimos com os alunos que as duas primeiras figuras eram iguais entre si, assim como as duas últimas, o que diferenciava uma da outra era sua posição no espaço. Para essa discussão, fixamos como referência um prego próximo, ou seja, um ponto.

Após as construções no geoplano e os desenhos realizados no papel quadriculado, perguntamos:

Polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes?

As respostas se assemelham a estas:

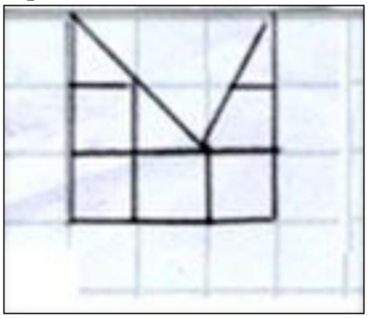
"Sim".

"Sim. Porque podem ter tamanhos diferentes".

Para o cálculo do perímetro, percebemos que alguns alunos contavam o número de pregos; discutimos tal procedimento com a turma toda e ficou esclarecido que deveriam ser contados os segmentos de reta de tamanho um cm, distância fixada no geoplano. Nas duas turmas ocorreu esse erro.

Como não previmos esse tipo de erro, não tínhamos material para que os alunos realizassem investigações a fim de que alcançassem entendimento. Além do mais, houve alunos que ponderaram que sempre dava certo. Então, pedimos que eles fossem para a atividade 4 e reproduzissem no geoplano as figuras do desenho. Em seguida, pedimos para que eles nos dissessem se os perímetros e o número de pregos eram iguais. Afirmaram que sim, pedimos para que medissem cada seguimento com a régua.

Figura 151 - Exemplo de figura "quebrada".



Uma aluna disse: "mas eu posso dizer que quando a figura não for quebrada o número de pregos de fora é igual ao perímetro". Explicamos que o nome da "figura quebrada" era figura não convexa, e que essa afirmação poderia ser uma verdade para algumas figuras no geoplano, mas a definição de perímetro, em qualquer situação, é a soma de todos os lados da figura. Por meio de desenhos no quadro, separamos os lados das figuras marcando, em cada lado, os pontos que representavam os pregos; explicamos que, se contássemos os pregos, acabaríamos contando os dos cantos (vértices) duas vezes.

A aluna continuou argumentando: é só não contar duas vezes e você já contou uma vez, além do mais, na figura eles não estão separados. Contra argumentamos: "mas será que podemos generalizar? Será que realmente isso vai dar certo para todas as figuras não convexas, 'não cortada'?" Todos os alunos começaram a tentar provar tal argumento desenhando no papel quadriculado ou construindo figuras no geoplano. Eles foram percebendo que, quando os pregos eram consecutivos nas figuras convexas, o número de pregos e o número de segmentos unitários era igual. Um aluno usou o termo "quando a liga pega um prego do lado do outro o número de pregos é igual ao perímetro".

Trabalhamos com polígonos não convexos, para os quais essa afirmação não era verdade. Então concluímos, devido às particularidades e para evitar erro, que era melhor contar o número de segmentos. Mas, para nós foi muito interessante percebermos os alunos argumentando, utilizando o pensamento matemático para justificar suas respostas. Nenhum aluno apresentou dificuldade em determinar a medida da área nessa atividade que se limita ao trato de retângulos.

Análise da Atividade 13.2 A não relação entre área e perímetro

1. Construir as seguintes figuras no geoplano, calcular a área e o perímetro de cada figura.

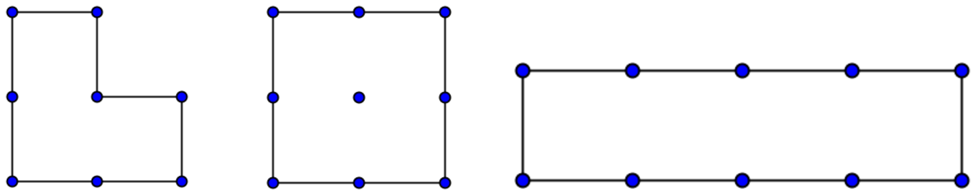


Figura A Figura B Figura C

Agora responda as questões:

a) Polígonos de mesmo perímetro têm a mesma área?

As respostas foram estas:

“Não”.

“Sim”.

“Pode ter e pode não ter”.

“A figura A e C tem a mesma área e a B não tem”.

b) Polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes?

“Sim”.

“Sim, porém a A e B tem áreas diferentes”.

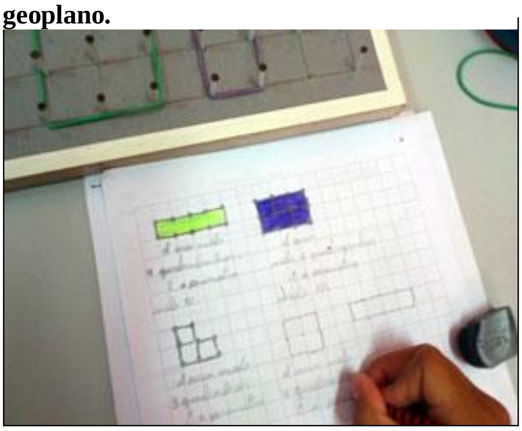
c) Polígonos de mesmo perímetro podem ter áreas iguais?

“Sim”.

“Não”.

d) O que podemos concluir diante dessas questões?

Figura 152 - Representando a construção no geoplano.



As respostas se assemelham a estas:

“Que perímetro e área não são a mesma coisa”.

“Podemos concluir que todos os polígonos com mesmo perímetro podem ter áreas iguais ou diferentes”.

“Podemos concluir que as áreas são diferentes”.

“Que a área não pode determinar o perímetro e nem o perímetro pode determinar a área”.

e) Entre essas figuras quem tem a maior área? Por quê?

“A figura C, pois ela tem o maior perímetro”.

“A figura B, porque tem área igual a 4”.

“As figuras são iguais”.

“A figura C e B, pois as duas medem 4 quadrados”.

“A Figura A, B e C, porque elas têm áreas iguais”.

Figura 153 - Reflexão em grupo.

Apesar do número de alunos que deram respostas erradas ser muito pequeno em relação ao número que acertou, consideramos que exigimos um nível alto de abstração para os alunos. Também poderamos que a questão ficaria mais elaborada se contivesse mais uma figura que permitisse ao aluno verificar que figuras de perímetros iguais podem ter áreas iguais, isto é, as medidas de áreas podem ser iguais ou diferentes, pois não estão relacionadas à medida do perímetro. Assim, o sentido de “podem”, na afirmação acima, fica mais geral, pois as figuras dadas só permitem relacionar perímetros iguais com área diferentes e perímetros diferentes com áreas iguais. Verificamos que alguns alunos erraram porque se focaram somente nas três figuras dadas. Nós usamos uma situação particular e esperávamos que, ao utilizarmos a palavra “polígonos”, os alunos seriam capazes realizar a generalização.

Concluímos que a questão ficaria melhor se acrescentássemos a figura D a seguir, e as questões deveriam ser:

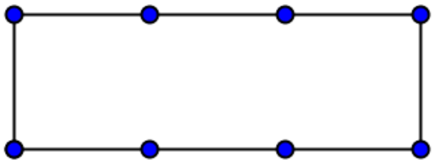


Figura D

a) De acordo com as figuras dadas podemos afirmar que polígonos de mesmo perímetro têm a mesma área?

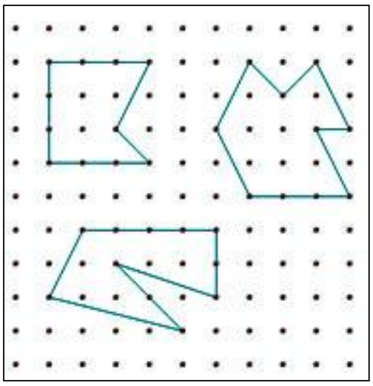
b) De acordo com as figuras dadas podemos afirmar que polígonos de mesmo perímetro têm áreas diferentes?

Assim, o aluno não seria induzido ao erro.

Análise da Atividade 13.3 Figuras não convexas: áreas e perímetros

Geoplano, ligas, papel quadriculado.

1. Observe as seguintes figuras construídas no geoplano.



Quantos pregos cada uma dessas figuras têm em seu interior e em seu contorno?

Figura A

a.interior: as respostas dadas foram 3 , 4.

b. contorno: as respostas forma 10 ou 11.

Figura B

a. interior: as respostas dadas foram 7 ou 9.

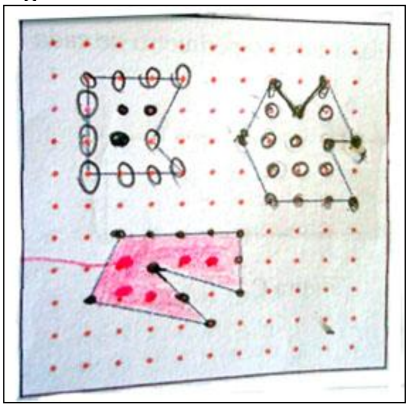
b. contorno: as respostas foram 8 ou 10.

Figura C

a. interior: as respostas dadas foram 5 , 6 ou 8.

b. contorno: as respostas dadas foram 9, 11 ou 12.

Figura 154 - Representação de figura não convexa.



Não era esperado por nós que os alunos cometessem erros nessa atividade. No entanto, alguns alunos consideravam ponto interno a reentrância das figuras não convexas. Solicitamos aos alunos que erraram para contornarem a figura com um lápis colorido a fim de que os pontos daquele contorno fossem mais evidenciados.

Em seguida, orientamos que os pontos internos da figura fossem pintados de outra cor. Entre os alunos, cinco pintaram os pontos nas duas situações. Eles contaram o mesmo ponto no contorno, e no interior da figura. Pensamos que eles poderiam estar com dificuldades na transição do geoplano de madeira para a representação no desenho em papel. Solicitamos que realizassem a construção no geoplano e procedessem a contagem, o erro foi o mesmo. Então, pedimos aos alunos que nos mostrassem o que era área na figura e o que era perímetro, apontaram-nos corretamente.

Na reflexão com um dos alunos que cometia tal erro, foi possível perceber que, quando se utilizava o termo “interior”, ele pensava “para dentro” da figura em relação ao plano, e não em relação à figura. Aqui temos um conceito em ato. Consideramos que o erro conceitual talvez tenha ocorrido devido ao pouco trabalho realizado com polígonos não convexos no ensino fundamental. Seria necessário buscarmos mais informações para afirmarmos com certeza. Contudo, seguimos fundamentando mais os alunos em trabalhos com figuras não convexas.

Para solucionar o problema na “Figura C”, entregamos um papel colorido aos alunos e pedimos para que eles fizessem o molde de uma das figuras e que, inclusive, marcassem os pontos. Orientamos para que recortassem a figura e constassem os pontos do contorno e do interior; a contagem foi correta. Chamamos de pontos interiores os que estavam na região interna da figura, ou seja, na área da figura. Enquanto os pontos externos estão sobre o perímetro dessa mesma figura. Na fala dos alunos: “pontos dentro da figura”; externo, “pontos no contorno da figura”.

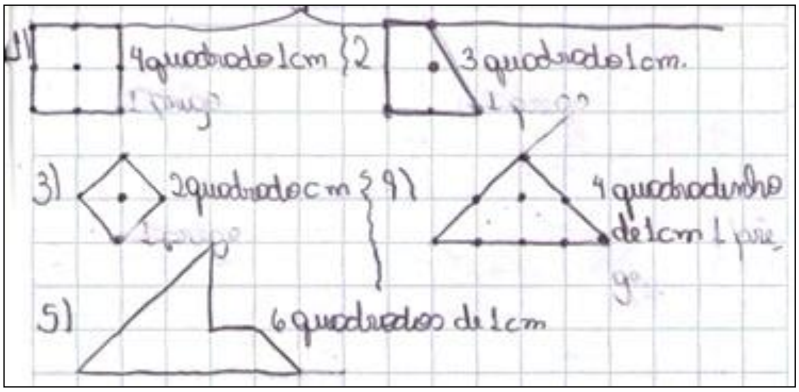
2. Construa 5 figuras no geoplano que tenham exatamente um único prego no seu interior. Faça o desenho na folha quadriculada.

Calcule a área.

Complete a tabela abaixo:

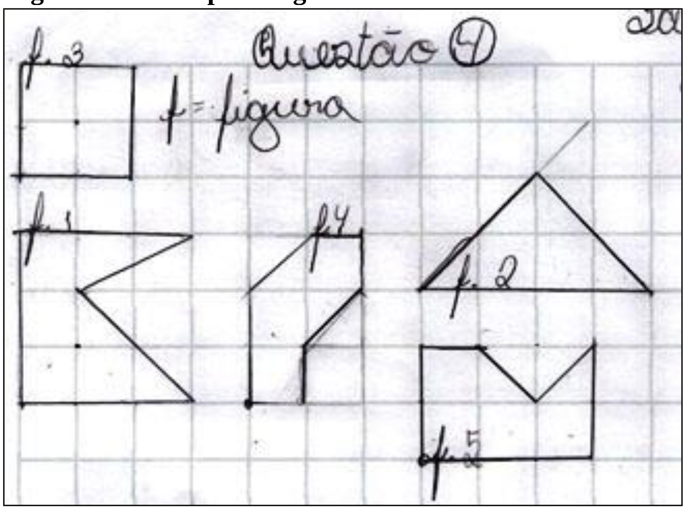
Apresentamos aqui algumas representações que mais apareceram na resolução:

Figura 155 - Representação de figura não convexa.



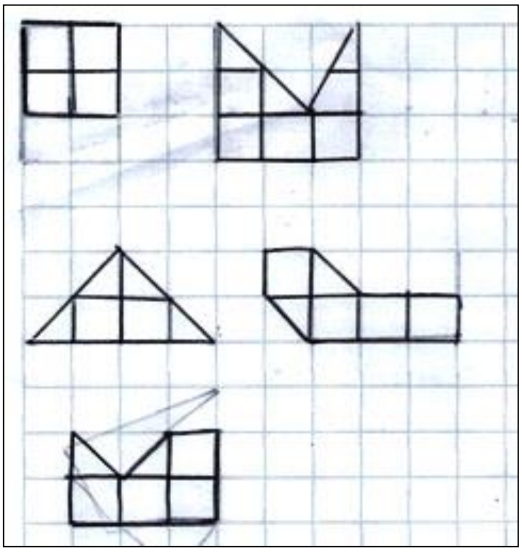
Figuras	Área	Número de pregos sobre o contorno
1	4	8
2	3	6
3	2	4
4	4	8
5	6	12

Figura 156 - Compõem figuras não convexas



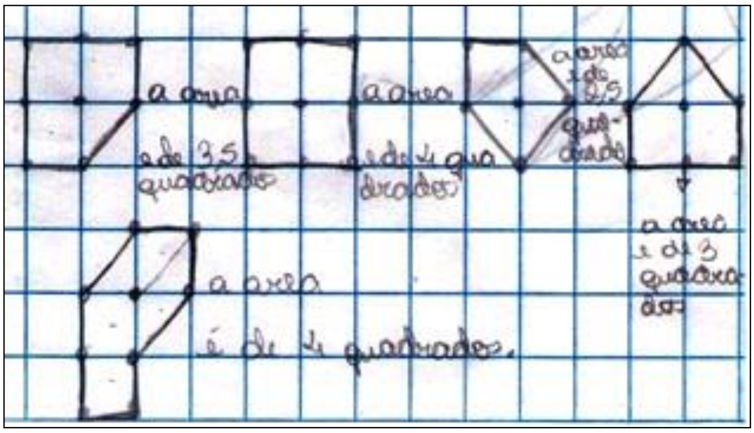
Figuras	Área	Número de pregos sobre o contorno
1	6	12
2	4	8
3	4	8
4	4	8
5	5	10

Figura 157 - Demarca as unidades.



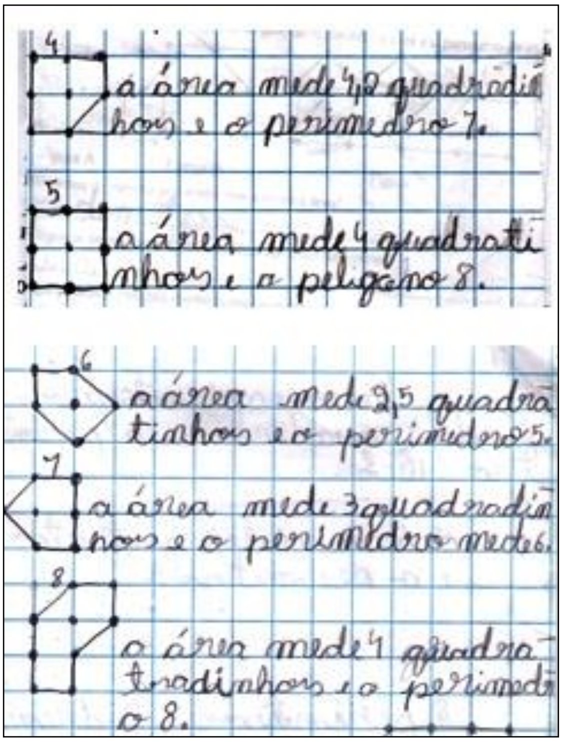
figuras	Área	Número de pregos sobre o contorno
1	6	12
2	4	8
3	4	8
4	4	8
5	3	6

Figura 158 - Representação dos pregos externo e interno e expressa a unidade de área.



Figuras	Área	Número de pregos sobre o contorno
1	3,5	7
2	4	8
3	2,5	5
4	3	6
5	4	8

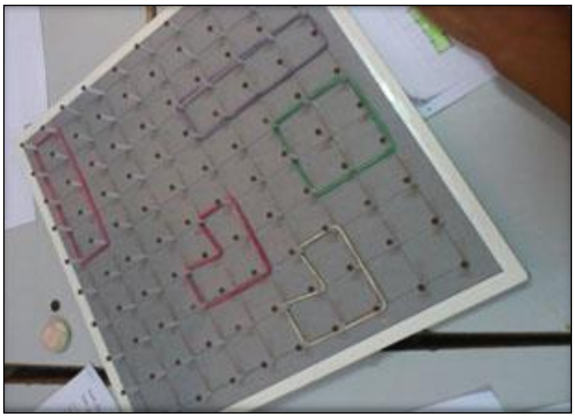
Figura 159 - Expressão escrita.



Figuras	Área	Número de pregos sobre o contorno
4	4,2	7
5	4	8
6	2,5	5
7	3	6
8	4	8

Nas produções, alguns alunos enfatizaram, em suas representações, o prego no centro e nas laterais, enquanto outros evidenciaram os quadrados que compõem a área da figura, alguns utilizaram a figura não convexa, mas a maioria trabalhou com a configuração de figuras convexas em suas construções.

Figura 160 - Utilizando o geoplano.



Esse procedimento foi importante para realizarmos algumas discussões: foi contado o número de pregos, mas foi escrito o perímetro. O aluno perguntou: “mas o número de prego não vai ser igual ao perímetro?”. Pedimos para eles medissem o perímetro das figuras que construíram e verificassem se era igual ao número de pregos. Uns responderam que era igual e outros disseram que às vezes.

Então, começamos passar de grupo em grupo e fomentar a discussão no pequeno grupo, depois, trouxemos a discussão mais uma vez para a turma toda. Assim, concluímos que não poderíamos afirmar que o número de pregos e a medida do perímetro eram iguais, porque nem sempre eram iguais, e não eram iguais quando o perímetro envolvia diagonais do quadrado e não só os seus lados.

Na discussão de grupo em grupo, percebemos que havia alunos que afirmavam que eram iguais por considerarem pequena a diferença entre a diagonal e o lado que arredondava o valor da diagonal para um. Esse arredondamento era intuitivo e, quando questionado, o aluno não explicava, afirmava que era só para facilitar a conta. Provocávamos: “então, se é só para facilitar a conta você sabe que ele é maior, pouco! Mas é maior, e se é maior não são iguais, concorda”?

A partir de um erro foi possível discutir e refletir sobre muitos conhecimentos inclusive sobre a medida da diagonal que não estava previsto por nós. Certo é que enriqueceu a discussão e o aprendizado.

Para nós, como pesquisadoras foi algo bastante significativo, pois, na fala de Vergnaud (1990), o desenvolvimento cognitivo depende de situações e de conceitualizações específicas necessárias para lidar com as mesmas. Portanto, é por meio das situações que um conceito adquire sentido para o sujeito.

Questão 3 - Depois da tabela preenchida responda: Que relação existe entre o número de pregos sobre o contorno da figura e sua área?

“A relação é que o contorno da figura é o dobro da área”.

“Umas figuras tem áreas iguais outras diferentes”.

“A área da figura tem 6 quadradinhos e o contorno tem 12”.

Foi necessário explicar o que o exercício pedia quando falava em “relação”. Os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade em perceber que a relação era de dobro da quantidade, mas não sabiam como expressar isso na escrita, ou não entendiam “como era para escrever”, ou seja, eles ficaram inseguros, pois era-lhes difícil falar de dois atributos ao mesmo tempo, não sabiam como expressar a relação. Esses alunos demonstram a apreensão perceptiva e apreensão operatória e realizam a articulação entre elas, no entanto, apresentaram dificuldades com a apreensão discursiva (DUVAL, 1993).

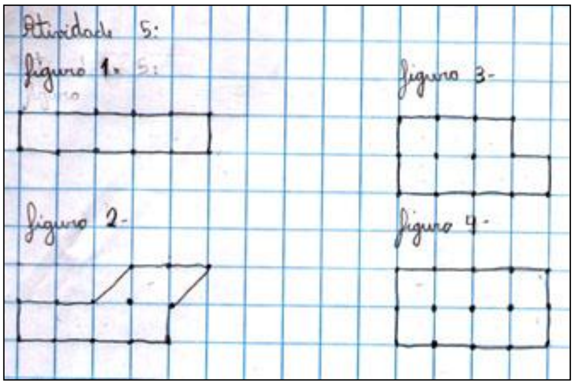
Análise da Atividade 13.4 Trabalho com geoplano e papel quadriculado

1. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e nenhum prego em seu interior. Calcular a área.
2. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e 1 prego em seu interior. Calcular a área.
3. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e 2 pregos em seu interior. Calcular a área.
4. Construir uma figura com 12 pregos sobre o contorno e 3 pregos em seu interior. Calcular a área.

Figuras	Número de pregos no interior	Área
A	0	5
B	1	6
C	2	7
D	3	8
E	4	9

Apesar de não ter sido pedido alguns alunos desenharam no papel quadriculado.

Figura 161 - Representa no quadriculado.



5. Que relação existe entre a área da figura e o número de pregos no interior?

“A área é o número de pregos mais 5”.

“A medida da área é igual ao número de pregos mais 5”.

“Cada vez que aumenta o número de pregos aumenta a área da figura”.

“Quanto maior o número de pregos maior a área”.

"Aumenta um prego a área aumenta mais um quadradinho".

Percebemos que os alunos, ao olharem verticalmente as duas colunas, consideravam que a quantidade de pregos aumenta de um em um e a medida da área aumentava de um em um. Foram bem poucos os alunos que logo perceberam a relação, aos demais pedimos que eles olhassem na horizontal. Explicamos que, quando eles observavam na vertical, estavam relacionando uma figura com a outra, e o enunciado solicitava que fossem relacionados o número de pregos no interior e a área da mesma figura.

Foi necessário explicar o que significava relacionar. Eles demoraram bastante para fazer a relação correta. Convocamos um grupo que recortassem a quantidade de "quadradinhos" que representavam a área e os colocassem sobre a tabela; o número de pregos representamos por palitos. Quando viram as quantidades, logo perceberam a relação. Notamos que esses alunos, quando viam o número, não o relacionavam à quantidade. Consideramos esse exercício importante por tratar a questão da área, mas também por instigar o aluno a "olhar", enxergar, significar, dar um tratamento matemático ao olhar, ou seja, o aluno foi além da apreensão perceptiva.

Atentamos à possibilidade de as tabelas, tanto do item 5 como do item 4, terem cooperado para o olhar do aluno em relação ao todo e não, especificamente, para cada figura. A intenção da tabela era de organização dos dados para a visualização da relação em cada figura e no todo; o objetivo, então, era de evidenciar regularidades. Assim, concluímos que teria sido melhor não apresentar a tabela na proposta do exercício, mas sim na correção, pois, durante a resolução, os alunos trabalhariam com os dados, teriam criado alguma estratégia e, se não criassem na correção, perceberiam que, se os dados estivessem agrupados, poderiam ajudar na análise, o que significa que os dados na tabela não têm o mesmo significado para todos os alunos. Além disso, durante a correção, o aluno poderia decidir se apropriação da tabela seria ou não um fator significativo para que ele pudesse enxergar a relação.

Ao longo da atividade, os alunos mobilizaram alguns conhecimentos por nós evidenciados:

A medição não é sempre um número inteiro.

A soma de partes pode dar um inteiro.

Medir área é contar unidades de áreas.

Existe uma relação de igualdade entre a medida da área de uma figura e a quantidade de unidades de medida de área que é a área do quadradinho da malha que pode estar representada no geoplano ou no papel quadriculado.

A medida de perímetro não está restrita ao conjunto dos números inteiros.

Teoremas em ação apresentado na atividade 13.

A medida de área não está restrita ao conjunto dos números inteiros.

Medir a área no contexto do geoplano e no papel quadriculado corresponde a determinar quantas vezes o ‘quadradinho’ cabe dentro da figura.

Medir área de uma figura é recobri-la com quadrados de área uma unidade de lado.

Por recorte e colagem podemos transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada.

Logo, a atividade atingiu seus objetivos, uma vez que alunos tiveram oportunidades de perceberem e trabalharem, em uma mesma figura, duas grandezas, o comprimento e área. Verificamos também que os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em aceitar que a área de uma figura pode ser medida pela unidade e por subunidades, e que a medida da área pode ser representada por um valor fracionário.

O geoplano foi um contexto que ajudou o aluno a realizar representações diferentes de medida de área e também a perceber que a medida de área pode ser um número fracionário. Apesar de ser como o papel, o geoplano é um material de malha quadriculada que permite a manipulação com movimentos inclusive do plano. Nessa perspectiva, o uso do geoplano propicia a introdução do quadrado de determinado lado como unidade convencional de medida de área.

No processo de construção do conhecimento, no que se refere à distinção entre a medida de área e de perímetro, percebemos que os alunos não apresentaram maiores dificuldades, uma vez que construíram as figuras, utilizaram o conceito correto para medir a área e o perímetro, acertando tanto o cálculo da primeira grandeza, quanto da segunda.

Por fim, institucionalizamos que a medida linear mede o contorno da figura, o perímetro. A unidade quadrática mede a superfície interna da figura, a área. No nosso caso, como a unidade é o centímetro, então, o perímetro será medido em centímetro, cm. A área será medida em quadrados de lado um centímetro, cm^2.

Quanto à história da matemática, o geoplano assessorou no entendimento do uso da unidade quadrada como uma unidade padrão. No caso, utilizamos o quadrado de lado um cm, pois, nosso sistema métrico, vem da linha histórica que usa o metro quadrado como unidade padrão de medida de área.

ATIVIDADE 14 - CALCULANDO ÁREA POR APROXIMAÇÃO

1 Um pouco de história do conceito de área

Durante a evolução da humanidade, a religião e a geometria mantém uma relação muito próxima; para Pennick (1980), elas são inseparáveis. Esta ligação pode ser concebida e compreendida quando observamos os templos antigos mesopotâmicos, babilônicos, entre esses a Torre de Babel, santuários, o próprio Tabernáculo hebraico. Essa geometria recebe um nome especial, é a Geometria Sagrada, algumas formas geométricas têm significado especial para os povos antigos (PENNICK, 1980).

Na Índia, como já discutimos em atividades anteriores, o pensamento geométrico tem traços de motivações baseadas na construção de templos e altares fundamentados pelos costumes religiosos, como na Grécia, em que as construções para práticas religiosas satisfaziam condições geométricas a fim de agradar os deuses.

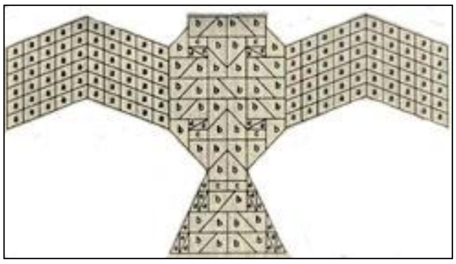
Embora, os *Sulbasutras* sejam considerados, basicamente, um manual de geometria aplicada, é notável que, além da resolução de problemas geométricos, apresentem muitas proposições geométricas gerais. Por exemplo, o teorema hoje atribuído a Pitágoras, matemático que viveu cerca de 540 a. C., esse mesmo teorema foi provado por outro matemático, Euclides, cerca de 300 a. C.

Tal teorema foi essencial na construção de altares em formas e tamanhos definidos, especialmente quando não havia requisitos, por exemplo, para a construção de um altar com o dobro da área, mas, exatamente, da mesma forma de um outro já determinado. Os *Sulbasutras* referem-se à construção de figuras geométricas de uma determinada forma igual em área a uma figura cuja área já fosse conhecida, ou sabiam como a calcular. Então, equivalência de áreas era o método utilizado pelos indianos para a edificação de altares.

Os altares eram concebidos por diferentes formas em sua estrutura; para as devidas construções, eram utilizadas diferentes formas de tijolos e, respectivas quantidades dos mesmos, as quais estavam descritas em versos nos *Sulbasutras*. A geometria dos *Sulbasutras* surgiu da necessidade de assegurar a conformação rígida da orientação para a forma e para a área de um altar às prescrições previstas nas escrituras védicas. Tal precisão é tão importante para a eficácia do ritual como era a pronúncia meticulosa dos cantos Vedas. (JOSEPH, 2000).

Alguns formatos e tamanhos de altares foram associados com particulares dons que o sacrificador desejava dos deuses. Assim, aquele que desejava ganhar o céu deveria construir o altar em forma de falcão, pois essa ave era considerada a mais veloz. A construção do altar em forma de uma tartaruga deveria ocorrer quando o desejo era ganhar o mundo do deus Brahman, em forma de losango, para destruir inimigos.

Figura 162 - Altar em forma de falcão.



Fonte: Joseph, 2000.

Os rituais indianos eram uma combinação de deuses em um único deus. Como na religião indiana um deus era representado por um quadrado, a combinação de deuses conduz ao problema de achar um quadrado, igual em área, à soma de dois quadrados ou mais quadrados dados. (GASPAR, 2003, p. 113).

Os antigos indianos associavam os deuses a quadrados e os humanos a retângulos. A associação de deuses gerava um novo deus e isso os levou a buscarem a solução para resolver vários problemas geométricos. Um dos mais famosos e complexos altares indianos da época védica é o Altar do Falcão. Sua estrutura básica é formada por 7 quadrados. (GASPAR, 2003, p. 105).

Dos altares encontrados nos *Sulbasutras* em forma de falcão, o retangular é o mais antigo e possuía o corpo em forma de um quadrado 2 x 2 (constituindo assim 4 *purushas* quadradas), as asas e a cauda tinham a forma de um quadrado, cada um com medida de uma purusha. Para que o altar realmente tivesse a forma de um pássaro (falcão), foi necessário que a cauda e as asas fossem alongadas. Esse alongamento correspondeu a 1/5 de uma *purusha* para as asas e a 1/10 para a cauda.

Esse altar era constituído por camadas e essas medidas corresponderam à primeira camada. Na segunda camada, era acrescentada uma *purusha* quadrada e, a cada camada seguinte, era acrescentada uma purusha quadrada à camada anterior, até que se alcançasse a área de 101 1/2 *purushas* quadradas, formando, assim, uma escada. Cada degrau determinava o grau do sacrifício que estava de acordo com o bem a ser alcançado. (SARAVASTI, 1987).

Esse procedimento e a medidas analisadas por Gaspar (2004):

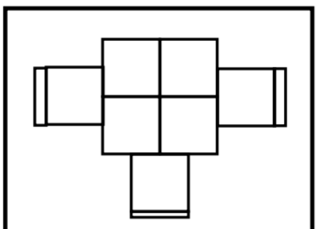


Figura 1

> Por exemplo, um dos altares públicos cuja construção está descrita nos Sulbasutras é o altar do falcão. Sua forma básica tinha uma área de 7 1/2 *purushas* quadradas; o corpo do altar era um quadrado 2 x 2 (4 *purushas* quadradas), as asas e a cauda um quadrado de

> uma *purusha* cada. Para que a imagem pudesse estar bem próxima da forma real de um pássaro, asas e caudas foram alongadas – a primeira em um quinto de uma *purusha* e a segunda em um décimo [Figura 1]. Esta era o tamanho e a forma do altar do falcão em sua primeira camada. Na segunda construção, uma *purusha* quadrada era acrescentada, isto é, a área do segundo altar seria então de 81/2 *purushas* quadradas; na próxima construção, outra *purusha* quadrada era acrescentada e assim por diante, até chegar à área de 101 1/2 *purushas* quadradas. É importante observar que na construção dos altares maiores (81/2 , 91/2,..., etc.) a mesma forma do altar básico é exigida. Temos aqui o problema geométrico de construir figuras semelhantes à da figura1 de áreas 81/2, 91/2,..., etc. (GASPAR, 2004, p. 191).

2 Objetivo

Promover situações que provoquem no aluno procedimentos para a medição de área para além da contagem de quadradinhos; transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada; tomar a decisão de fazer uma contagem por aproximação. Verificar quais procedimentos foram adotados pelos alunos.

3 Material

Figuras quadriculadas.

Na resolução de atividades anteriores, pontuamos para os alunos que uma superfície é não pavimentada por uma unidade quando não é possível cobri-la com um número inteiro de vezes dessa unidade. Temos três situações quando a superfície é não pavimentada:

1) Por recorte e colagem, podemos transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada**.** Então, medimos a área contando as unidades de medidas.

2) Não sendo possível cortar a figura, corta-se a unidade. Nessa situação, o aluno deve tomar a decisão de utilizar uma subunidade e cobrir a área com a subunidade.

Nessa atividade desejamos que ele compreenda, também, que:

3) Há situações que não podem ser resolvidas por recorte e colagem da figura, nem utilizando uma subunidade, então, o que se deve fazer é calcular a área por aproximação. Existem figuras planas cujas áreas podem ser obtidas por cálculos aproximados. Para obter a área, podemos quadricular a figura com quadrados iguais à unidade de área escolhida para medida.

Para isso entregamos três figuras “quadriculadas”, explicamos o conceito de aproximação e quando podemos utilizar um cálculo aproximado de área. Entre as figuras, duas são adequações de dois altares indianos, uma em forma de falcão e o outra em forma de tartaruga, e decidimos por uma pertencente ao cotidiano, um carro. Uma quarta figura foi utilizada; cada aluno contornou a própria mão no papel quadriculado, que é uma atividade elaborada por Douady, e também utilizada pela professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar no curso de extensão na UnB.

Pensamos em iniciar a atividade com uma pequena narrativa sobre os altares indianos, mas consideramos que poderiam surgir problemas por questões religiosas. No entanto, na turma da professora Vitória, um aluno quis saber por que escolhemos aquelas figuras. Então, perguntamos: "essas figuras têm que forma"? As respostas foram: "pássaro, tartaruga e carro".

Explicamos que o pássaro representava um falcão, ele e a tartaruga tinham a forma de altares construídos pelos antigos indianos. A construção do altar em forma de falcão denotava o desejo de alcançarem o céu; já a edificação do altar em forma de tartaruga, significava a intenção de agradarem o deus que consideravam mais poderoso dentre os seus deuses. Essas construções exigiam conhecimentos de medida de área e, para sua execução, eram utilizados tijolos de medidas e formas diferentes.

Para a realização da atividade, nós fizemos uma adaptação, tomando como forma de tijolos, o quadrado e o triângulo retângulo. Na resolução da atividade, alguns alunos questionaram a grande quantidade de quadrados. Orientamos que a medição poderia ser feita por estimativa. Não foram dadas mais explicações, pois desejávamos investigar os procedimentos que os alunos utilizariam para medir a área.

Agrupamos as produções por semelhança de procedimentos e apresentamos uma como representativa de cada grupo:

Figura em forma de falcão

O aluno fez a contagem de triângulos; primeiro enumerou os triângulos que eram visualizados, contornando, assim o desenho. Em seguida, contou duas unidades em cada quadradinho, escrevendo a contagem na qual os dois números são separados por um traço. Outra característica foi que o aluno procurou manter o padrão de contagem dentro de cada coluna, como se tivesse separado a figura em retângulos verticais. Escreveu na figura duas vezes o número 30 e 49 (Figura 163).

Figura 163 - Corta a unidade de medida.

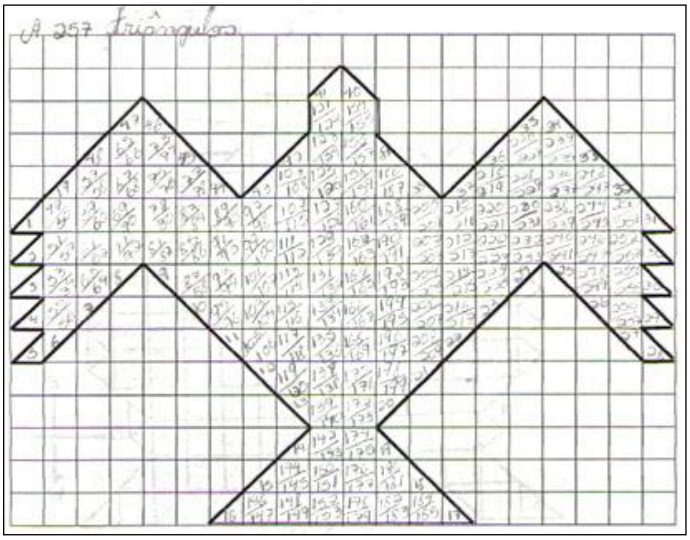
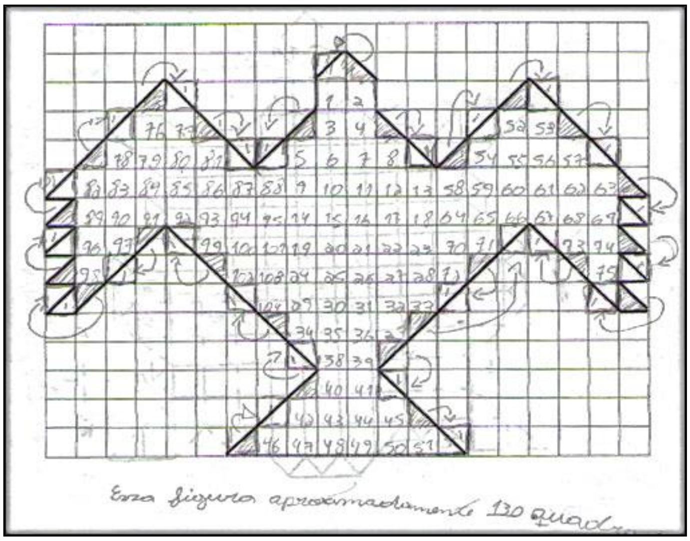


Figura 164 - Transformação da unidade triangular em quadrática.



O aluno transformou os triângulos em quadrados, por modificação posicional (Duval 1998) dos mesmos, como indicado pelas setas (Figura 164). Ele hachurou o triângulo movimentado e marcou, com um traço, a constituição de um novo quadrado, sendo assim, o espaço hachurado representa a medida de área que não existe mais. Essa mudança no padrão pode ter sido o motivo dele ter contado duas vezes alguns quadrados formados. Enumerou, corretamente, os quadrados visualizados na Figura 164.

Esse aluno, Figura 165, primeiro, mediu a área do contorno da figura onde estavam os triângulos. Ele enumerou um triângulo e o seu simétrico com o mesmo número, da cabeça para a cauda, e também foi colorindo os simétricos, que formariam um quadradinho, com a mesma cor. Enumerou e coloriu até o quadradindo de nº 11. Já estava evidenciado seu procedimento. Então, para essa contagem, ele criou uma regra utilizando o conceito de simetria. No entanto, ele chamou a professora à mesa e perguntou se ela entendeu o que ele havia feito. Ele justificou: “Se eu continuar colorindo, vou repetir cor, mas até aqui já dá para entender que estou contanto de um lado e do outro, não dá?”. Na contagem, no interior da

Figura 166 - Traça eixo de simetria.

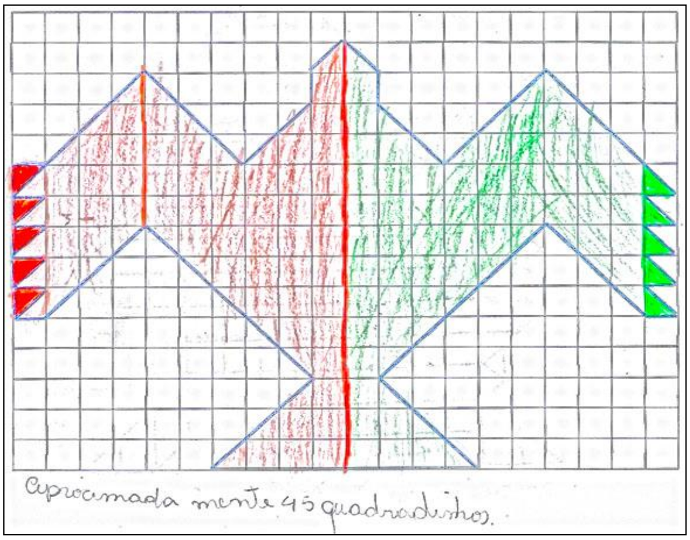
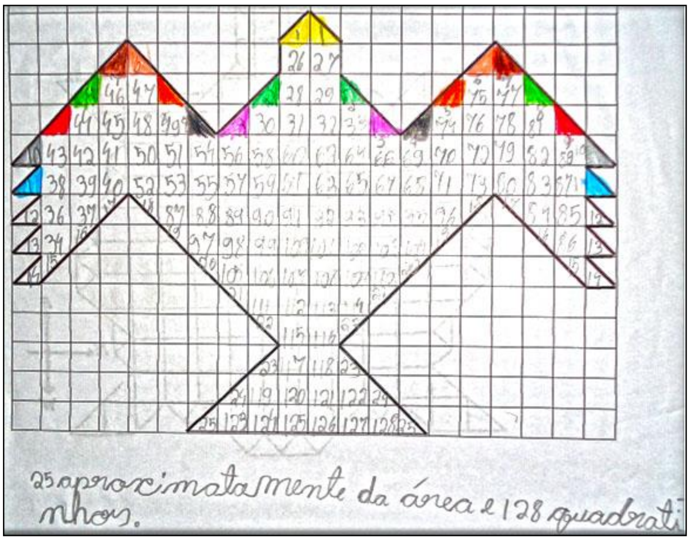


Figura 165 - Destaca os simétricos.



figura, ele repetiu alguns números e pulou outros, o que é compreensível devido à grande quantidade de quadrados.

Essa produção, Figura 166, faz parte de um grupo que trabalhou com simetria e estimativa. Nós não havíamos compreendido esse procedimento e, no encontro seguinte, pedimos a um aluno que explicasse.

Ele justificou da seguinte maneira: "Eu vi que dividindo na metade era igual um lado e ouro, dividi a parte vermelha em três partes mais ou menos igual, contei uma parte e multipliquei por três, deu 47,5, eu aumentei os três triângulos das pontas, deu quarenta e nove". Perguntamos: "Humm.... então, quarenta e nove é a medida da parte vermelha?" Ele respondeu: "a verde também mede quarenta e nove quadradinhos". Marcamos com "X" as "três pontas" indicadas pelo aluno.

O procedimento da Figura 167, pertence ao grupo que contou toda a figura em quadradinhos, a cada dois triângulos, um quadrado; em seguida, multiplicou o resultado por dois para obter a medida da área em triângulos. Esse, em especial, apontou no desenho o último quadradinho enumerado e a soma com o quantitativo de "x" representado ao lado do desenho. Cada "X" representa dois "x" da figura, dando um total de 25"X", isto é, 25 quadradinhos. Ele encontrou 105 quadradinhos por ter pulado o número "24", assim, na figura não havia nenhum quadradinho preenchido com o número 24.

Figura 167 - Contagem por agrupamento de unidades.

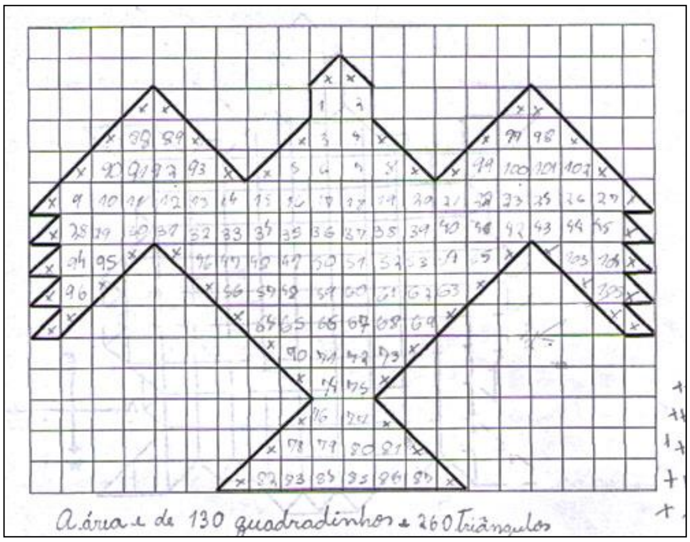
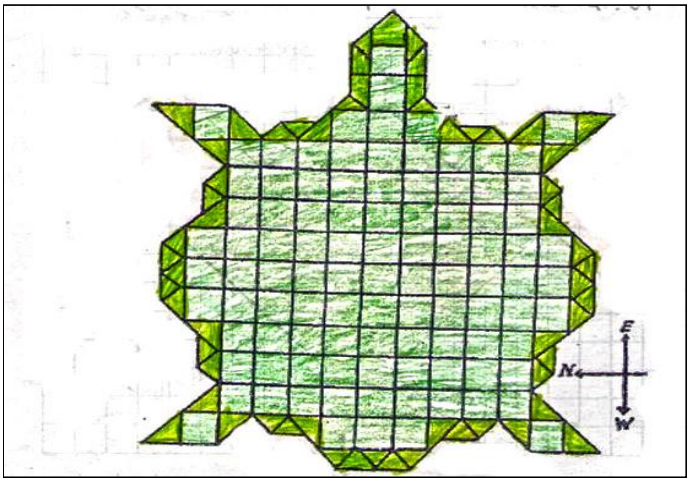


Figura em forma de tartaruga

Figura 168 - Contagem aproxiamada das unidades triangulares.



Essa figura representa o *Kurma-cit* (SARASVATI, 1987, p. 230).

Esse procedimento, da Figura 168, representa os alunos que, na contagem, consideraram que os triângulos tinham o mesmo tamanho e cada dois desses triângulos formavam um quadrado de medida de área igual aos quadrados explícitos na figura. Por isso a medida da área é uma aproximação. O aluno firma: “a área da figura é aproximadamente 132 quadrados”.

Nesse procedimento, os alunos enfatizaram o quadrado no centro do desenho. Calcularam a área multiplicando o número de linhas pelo número de colunas e depois acrescentaram os quadrados das bordas. Quando questionamos como haviam feito a contagem dos quadradinhos do quadrado central, as falas diferentes comunicavam a mesma coisa; escolhemos uma que demonstra a percepção de duas dimensões da figura e que a decomposição pode ser multiplicativa, além de aditiva: “cada linha do quadrado tem nove quadradinhos, é só o somar nove, nove vezes, ou multiplicar por nove, dá no mesmo”. Alguns alunos contaram, para cada dois triângulos menores, um triângulo maior e ainda nos explicaram que fizeram igual ao procedimento da atividade do Tangram em que a soma da área de dois triângulos pequenos resultava um triângulo médio.

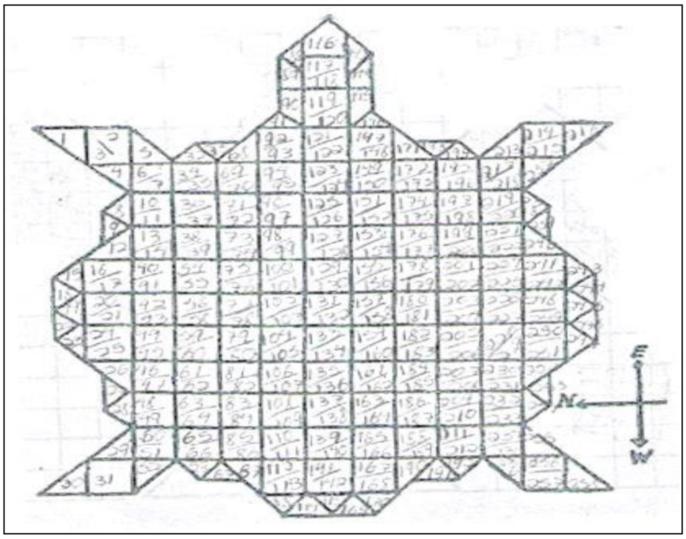
Perguntamos, então, se dois triângulos pequenos teriam a mesma área do triângulo grande. Foram muitas as respostas, mas uma nos surpreendeu positivamente: “por visualização parece que é, mas se a senhora me der mais uma (figura) para recortar vou ter certeza”. Ele retomava os procedimentos adotados até aqui. Respondemos que não havia necessidade, poderiam utilizar a aproximação. E mais uma vez discutimos com a turma o conceito de “estimar”. Escolhemos essa produção para representar o grupo pelo fato da aluna ter utilizado o termo perímetro para designar contorno. Tal fato provocou mais uma discussão, já que, para ela, o perímetro poderia ter área e comprimento, ou só comprimento.

Levamos esse conceito para a turma, e mais dois alunos tiveram a mesma ideia. Um explicou saber que, para calcular o perímetro, ele usaria o metro ou o barbante, e que para calcular área, poderia utilizar qualquer figura. Entretanto, o aluno não estava calculando o perímetro, só estava chamando o contorno de perímetro.

Os três alunos pertenciam ao mesmo grupo de trabalho, então, um pode ter influenciado a resposta do outro que, por sua vez, não tinha o conceito bem solidificado; na dúvida, os outros dois acharam a explicação do amigo bastante contundente. Ele afirmou: “eu aprendi que o perímetro é o contorno da figura”.

A professora havia iniciado uma explicação, intervimos e perguntamos ao aluno: o que você está chamando de perímetro faz parte da figura? Faz parte do interior da figura? Outra aluna interviu gritando: “perímetro é perímetro e área é área, ele errou, e fica complicando!” Em seguida, toda a turma quis participar da discussão, uns a favor, outros contra à justificativa do aluno. Por fim, concluímos que tínhamos que redefinir o conceito de “contorno da figura” para a classe. A tal aluna, mais uma vez, gritou impaciente: “eu não. Eu sei muito bem o que é contorno da figura!”.

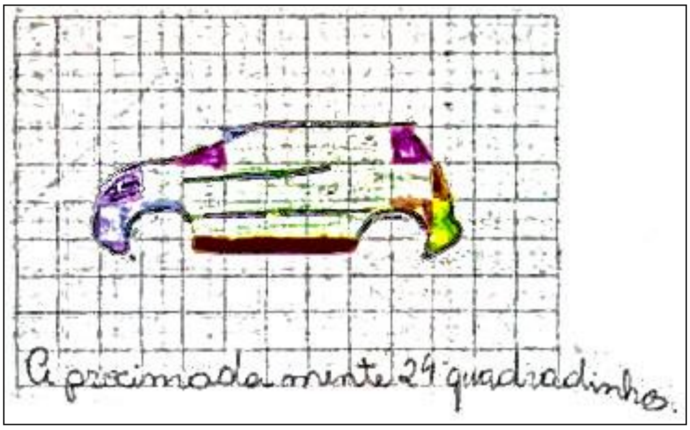
Figura 169 - Corta as unidades quadráticas e as enumera.



A numeração, nesse desenho, Figura 169, revelou que alguns alunos utilizaram o triângulo como unidade de medida, e consideraram que todos os triângulos possuíam a mesma área. Dividiram o quadrado em dois triângulos de mesma área.

Figuras na forma de carro

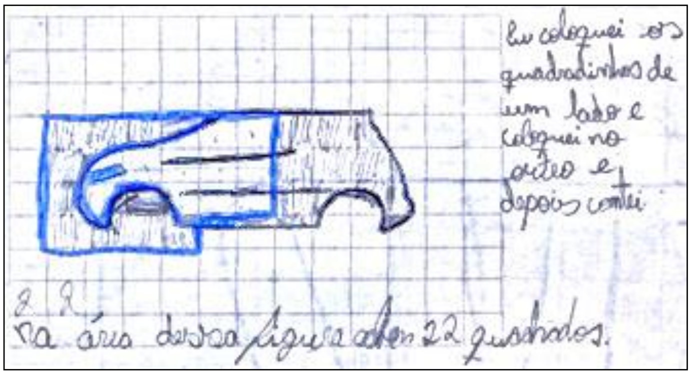
Figura 170 - Medida aproximada da área.



A produção da Figura 170 representa o grupo que, por aproximação, juntou as partes da figura para formar aproximadamente um quadradinho, considerado com unidade de medida.

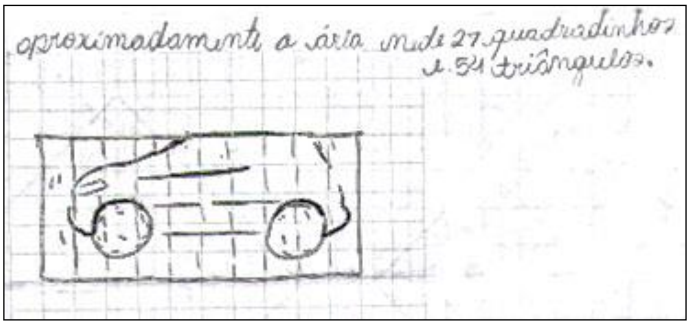
Um pequeno grupo de alunos optou pelo método da Figura 171. Eles transformaram uma superfície não pavimentada em pavimentada pela formação de retângulos; transformaram o carro em um polígono convexo. Escolhemos essa produção (Figura 171), para representar o grupo, pelo fato de uma aluna, em particular, considerar que, ao realizar a pavimentação, não necessitou estimar a formação dos quadradinhos; na nova figura, a

Figura 171 - Formação de retângulos para medir a área.



medição da área foi um número exato. A aluna justificou que, por isso, escreveu “dessa figura”. Então fica entendido que a área do carro é de aproximadamente 22 quadradinhos. Ela continuou afirmando que “é muito, mas muito próxima mesmo de 22”. Ela considerou a área do carro igual a 22 quadradinhos.

Figura 172 - Subtração de áreas



Essa produção, Figura 172, representa os procedimentos pelos quais os alunos formaram um retângulo que continha o carro. Contaram o total de quadradinhos e subtraíram a área que não fazia parte da área do carro. Alguns desenharam as rodas por acharem que facilitaria a contagem, outros por determinarem que carro tem rodas; a contagem havia ficado mais difícil, mas não importa, carro tem rodas! Houve um grupo que transformou a quantidade de quadradinhos em triângulos dobrando sua quantidade.

Figuras na forma de mão

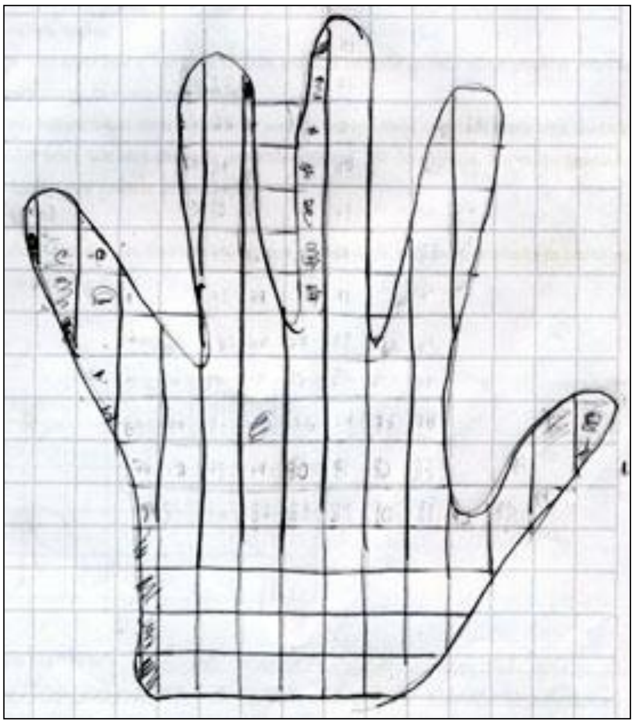
Essa aluna foi a única a manter o procedimento de formar um polígono (Figura 173).

Figura 173 - Formação de retângulos.

Ela explicou que movimentou os quadradinhos de baixo para cima; outros tentaram, mas se perderam nas contas. Mudaram, então, para movimentar partes, preocupados somente em formar os quadradinhos. Essa aluna escreveu “nessa área cabem 120 quadradinhos”, para que não tivéssemos dúvidas, quando perguntamos a medida da área da mão, ela perguntou: “o que você acha?” É como se ela nos respondesse trabalhou o tempo todo visualização e agora não consegue ver que eu movimentei parte da mão para formar outra figura, mas essa figura tem a mesma área da mão. Insistimos, fazendo perguntas para verificar se havíamos compreendido o que ela queria dizer. Havíamos!

A produção da Figura 174 foi um procedimento único, o aluno primeiro organizou o desenho, movimentando as partes para formar um quadradinho inteiro, depois, separou o desenho em retângulos, contando os quadradinhos por retângulos, e somando as contagens ao final. Esse procedimento trouxe-nos à lembrança certa semelhança ao cálculo da área por integral.

Figura 174 - Decomposição da área em retângulos.



A maioria dos procedimentos foi semelhante a esse da Figura 175, pela junção de partes até formar aproximadamente um quadradinho. Houve uma variedade de legendas e, para cada quadrado formado, um risquinho do lado representando essa contagem.

Figura 175 - Representação da contagem para medir a área.

Não houve nenhum desenho no qual os dedos estivessem juntos. Perguntamos se a área da mão teria outra medida ao juntarmos os dedos. Houve alunos que sentiram necessidade de desenhar, mas não realizaram a contagem, então percebemos que eles buscaram, na visualização, elementos para refletirem sobre a pergunta. Houve respostas como esta: “a área da mão é a mesma, só que abrindo os dedos gasta mais papel”. Isso demonstra a compreensão do aluno do que seja área.

4 Análise

Nos procedimentos, os alunos buscaram medir a área, contando os quadradinhos, agrupando as frações de quadradinhos para formar um quadrado inteiro. Quando necessário, segundo o julgamento de cada aluno, consideravam-no como inteiro, ou seja, como a soma das frações não tinham o valor exato de um quadradinho inteiro, eles aproximavam aquele valor para um quadradinho inteiro. Completaram a malha para visualizarem os quadradinhos e procederem à contagem dos mesmos. Alguns decidiram por contar somente quadradinhos inteiros, outros realizaram a contagem da metade do quadradinho, isto é, triângulos.

Alguns alunos enumeraram os quadradinhos ou triângulos, outros utilizavam algum esquema de contagem como traços, x, jogo da velha para representar a contagem já realizada. Alguns trabalhavam mentalmente com a decomposição e composição dos quadradinhos enquanto outros as realizavam no desenho. Poucos alunos enquadraram a figura ou parte dela em retângulo ou outra figura geométrica, o importante era que o perímetro tivesse como lado seguimentos de reta e não mais arcos de circunferências.

Observamos, também, que as estratégias de resolução adotadas pelos alunos variavam de uma figura para outra. Inicialmente, eles tentavam utilizar a mesma estratégia na qual haviam obtido bom resultado em uma figura anterior. Percebendo que esse procedimento não era ideal para uma nova figura, mudavam o procedimento e buscavam outros procedimentos para o cálculo de área de determinadas figuras. Isso nos mostra a autonomia do aluno na resolução da situação proposta.

É importante ressaltar que o aluno demonstrava-se seguro, confiante em tomar decisões de resolução; não se mostrava preso a um modelo determinado pela professora. Pode parecer redundante falar em autonomia e confiança. No nosso caso, não consideramos redundante, fundamentadas no fato de que os alunos tinham segurança em que seus conhecimentos e esquemas estavam corretos, pois definiam diferentes caminhos, por meio dos quais poderiam encontrar a solução correta, no entanto se questionavam sobre qual seria a melhor solução.

Então, não utilizavam o método da tentativa de certo ou errado, era uma questão de tomada de decisão. Eles aprenderam que a melhor solução era a que eles definissem. Isto significa que o aluno, como sujeito de sua aprendizagem, define individualmente que procedimento lhe é mais significativo.

Segundo Duval (1998), a apreensão operatória permite dar um sentido dinâmico às características da figura, podendo-se, assim, fazer manipulações físicas ou mentais sobre o todo ou parte da figura. As modificações no caso foram posicionais.

Ao resolver essa atividade, o aluno utilizou a articulação entre a apreensão perceptiva e a apreensão operatória que é chamada de visualização. Fez uso também da articulação entre a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva. Além disso, o aluno foi capaz de empregar a articulação entre a apreensão sequencial e a apreensão discursiva, realizando a modificação posicional, que é o deslocamento em relação a um referencial, ou seja, corresponde a deslocamentos por rotação, translação e simetria.

Teoremas em ação

A área pode ser um número não inteiro.

Podemos trabalhar com aproximação para determinar a medida da área.

Quando eu utilizo uma unidade que representa as muitas unidades dadas em uma figura, tenho um cálculo aproximado da medida da área.

Em uma figura, a unidade pode estar dividida pela diagonal ou por arco de circunferência.

Invariância da área, pelo deslocamento de parte figura de uma posição para a outra, formando retângulos.

Juntar partes de para formar a unidade de medida, no caso o quadradinho, para verificar quantas vezes essa unidade está contida na figura.

Nem sempre juntando partes de um quadrado forma com precisão a área de um quadrado designado como unidade de medida, então o cálculo da área não é exato, é uma aproximação.

Podemos calcular área por estimativa e aproximação quando não é possível fazer a contagem exata da unidade de medida adotada.

Quando o contorno da figura dada não coincide com as retas do quadradinho, podemos fazer compensação com os quadradinhos que cabem na figura, obtendo, assim, um cálculo aproximado da medida da área.

Uma figura pode ser decomposta em retângulos para medir sua área.

Os procedimentos mais utilizados foram:

Separar em grupos as diferentes unidades, e proceder à contagem de quadradinhos.

Transformar a figura em uma única unidade, no caso, triângulo obtido dividindo o quadradinho ao meio.

Decomposição e composição da figura seguida de contagem de determinada unidade.

Passar na figura um eixo de simetria, contar as unidades em um dos lados e duplicar o resultado, obtendo, assim, a medida da área.

Passagem da medida inteira de área para a medida fracionária, obtendo, como medida de área, um número inteiro, ou um número misto o qual utiliza a unidade e a subunidade "tantos quadradinhos e meio".

5 Conclusão

Percebemos que os alunos não tiveram nenhuma dificuldade na distinção entre a área do quadradinho e o quadradinho como unidade de área. A compreensão de que a área do quadradinho não depende de sua forma e sim da quantidade do espaço que este ocupa, leva o aluno a inferir que a soma dos dois triângulos, formados ao traçar a diagonal no quadradinho, possuem a mesma área de um quadradinho.

Nesse momento, os alunos evidenciaram que, ao longo das atividades, foram aprendendo que existem estratégias de resolução que podemos considerar como "ótimas" para situações específicas.

Os alunos também evidenciam a compreensão que dominam de que, na medida de área, o número está associado à grandeza, ou seja, a medição depende da unidade escolhida. Assim, a área não é igual a um número, pois esse pode mudar de acordo com a unidade escolhida para fazer a contagem.

Na resolução da atividade, os estudantes demonstraram compreender que, para determinar a medida da área, devemos comparar essa área com a unidade de medida, no entanto, para isso, a medição não depende do recobrimento da figura utilizando uma quantidade finita de áreas unitárias da mesma forma da unidade dada. Se isso não for possível na figura dada, ele pode criar outros procedimentos de medida.

Os alunos também apresentaram estratégias que nos levaram a considerar que eles dominam o conhecimento de que a decomposição e a reconfiguração da figura, sem perda nem acréscimo de partes, conserva a medida de área; então, podemos transformar a figura em outra figura cuja medida da área já era conhecida.

Segundo Duval (1994), uma modificação mereológica é aquela que faz surgir uma forma como um todo fracionado em partes homogêneas ou em partes heterogêneas. Nessa atividade, os alunos trabalharam com o fracionamento em partes homogêneas, quando dividiram o quadradinho em dois triângulos iguais, e também quando trabalharam com a apreensão operatória, que corresponde à transformação de uma figura dada em outra para obter elementos que podem orientar na resolução da situação em questão. Nesse sentido, a realização da decomposição e composição da figura, em função mereológica, parte e todo; ou a reconfiguração da figura por visualização ou por deslocamento de rotação e/ou translação entre as partes.

Constatamos, ainda, a familiarização de procedimentos e de conhecimentos estudados nas atividades anteriores o que aponta o crescimento gradativo do aluno na significação do conceito de área e sua medida. Assim, enfatizamos, junto aos alunos, que os conhecimentos não são prontos e nem instalados de maneira singular e simplória, mas são construídos num processo que envolve tempo, conhecimentos, contextos e pessoas.

Essa atividade nos ajudou a constatarmos que os alunos estão identificando a área como grandeza, já que, para resolverem as situações dadas, utilizaram a visualização, a decomposição, a composição das figuras e das unidades e, nas tomadas de decisões, para resolução, não confundiram superfície com área, pois apreenderam que a área é uma grandeza associada à superfície. Também calcularam a medida da área pela soma das áreas das subfiguras que preenchiam a figura dada. A medida da área de uma superfície (uma figura) depende da unidade de medida que está sendo utilizada.

Então, finalizamos com uma atividade que “reforçou” alguns conceitos trabalhados ao longo da sequência e a partir da história da matemática.

ATIVIDADE 15 - O METRO QUADRADO COMO UNIDADE PADRÃO DE MEDIDA DE ÁREA.

Inicialmente esta atividade não fazia parte da sequência. Ela foi estruturada para atender solicitações das professoras que tinham em seu planejamento o trabalho com sistema de medidas

1. Um pouco de história do conceito de área

Ao longo do tempo, existiram diversas tentativas de unificação dos sistemas de medidas antes de se concretizar o sistema métrico. De todas as unificações regionais anteriores ao sistema métrico, a que obteve maior sucesso foi a imposta por Carlos Magno (SILVA, 2010, p. 74). Outra tentativa de unificação foi imposta pela França. A proposta de unificação "quantidade incrível de 250 mil unidades de pesos e medidas agrupadas em cerca de 800 nomes"[16].

Em 1791, uma comissão formada pela Academia Francesa das Ciências, da qual faziam parte Laplace, Lagrange e Monge, recomendou que a unidade padrão de comprimento deveria ser a décima milionésima parte de um quarto de meridiano terrestre. Após um ano de estudo sobre o geodésico do meridiano de Paris, ficou determinado que essa unidade seria chamada de metro e que todos os seus divisores e múltiplos seriam decimais. Quanto à medida de área e de volume, ficou determinado que fossem definidas em termos de medida para o comprimento. Logo, a unidade de área seria um quadrado com lado de 100 metros, denominado de are. A massa de um centímetro cúbico de água a uma dada temperatura ficou determinada como unidade básica de massa, o grama.

> Adotaram o nome 'metro' para a unidade básica de comprimento, que provinha da palavra grega *metron*, que significava medida. A nomemclatura grega também ajudava o produto a soar mais universal que francês. Academia empenhou-se então em criar um sistema decimal de medidas de cumprimento baseado na divisões e nos múltiplos do método. Unidades de volume seriam criadas formando cubos com tais medidas de cumprimento; unidades de peso enchendo tais unidades de volume com água destilada. Unidade de cumprimento, volume e massa estariam todas interligadas, o sistema inteiro derivado de um padrão único, universal em falível. (CREASE, 2013, p. 82).

[16] Ibid p. 71

Foram também idealizados sistemas decimais para o dinheiro tendo como referência o valor do peso do ouro e da prata. Para a medida de ângulos, dividiram o quadrante de um círculo em 100 partes iguais, hoje chamados de grados. Por fim, projetaram a decimalização do calendário.

A aceitação da divisão em décimos para os ângulos e para o calendário, na maior parte do mundo, durou doze anos; no entanto, tal padrão para pesos e medidas é aceito até os dias de hoje, com raras exceções (KATZ, 1998, p. 75). Além da França, a Inglaterra também tentou a unificação. Após o desenvolvimento de uma nova remodelação, instituída para todo o reino britânico, o Sistema Imperial de Pesos e Medidas Inglês ficou inalterado até 1975 quando, finalmente, a Inglaterra adotou o Sistema Internacional.

2 Objetivo

Compreender que a área de um quadrado é uma unidade de medida e essa unidade varia de acordo com a medida do lado do quadrado. Compreender o metro quadrado como unidade padrão. Analisar algumas relações entre as unidades de medidas do sistema métrico decimal.

3 Material

De 120 a 150 unidades de medida em papel de cores diferentes do dm^2 quadriculado em cm^2; para cada grupo de alunos, um metro quadrado cortado em papel pardo, régua e lápis colorido; uma unidade de cm^2 para cada aluno.

Retomar com os alunos a atividade 4, a qual tinha como objetivo perceber que, dados dois quadrados, o que tiver a maior área é aquele que tem o maior lado.

Discutir, com os alunos, as unidades em questão, suas relações e tomar o metro quadrado como padrão.

Em seguida, pedir para responder as questões abaixo:

1) Entre essas unidades, qual é a mais adequada para medir a área da tampa da sua mesa de estudo?
2) Qual é a medida da área da tampa de sua mesa de estudo?
3) Qual é a relação entre as duas unidades de medidas, o quadrado de lado um centímetro e o quadrado de lado um decímetro?

4) Qual é a medida da tampa de sua mesa em decímetro quadrado?
5) Sem fazer nova medição, apenas transformando o valor, determine a medida da tampa da sua mesa em:
   a) cm^2: _____________
   b) m^2: ______________

   Qual foi o procedimento que você utilizou para fazer a transformação?
6) Sabendo que o valor da medida da área da tampa da mesa da professora é igual a 48 dm^2, pergunta-se:
   a) Qual unidade de medida utilizada?
   b) Se desejarmos informar essa medida em decímetros quadrados, qual vai ser o valor da medida da área?
   c) Como podemos representar essa medida em centímetros quadrados?
7) Considerando que a medida da área da sala de aula é 35 m^2, pergunta-se:
   a) Qual foi a unidade de medida utilizada?
   b) Se desejarmos informar essa medida em decímetros quadrados, qual vai ser o valor da medida da área?
   c) Se desejarmos informar essa medida em centímetros quadrados qual será o valor medida da área?
8) Se a medida de área de um terreno for 14 km^2, isso significa que esse terreno pode ser recoberto por _________ quadrados cujos os lados medem___________.
9) Responda:
   a) 1 m^2 corresponde a quantos dm^2? Ou seja, 1m^2 = __________ dm^2.
   b) 1 dm^2 corresponde a quantos cm^2? Ou seja, 1dm^2 = _________cm^2.
   c) 1 cm^2 corresponde a quantos mm^2? Ou seja, 1cm^2 = __________ mm^2.
   d) 1 dm^2 corresponde a quantos cm^2? Ou seja, 1dm^2 = __________ cm^2.

Acreditávamos que os alunos não teriam dificuldade nessa atividade com a contagem dos quadradinhos na malha quadriculada e nem em relacionar o lado do quadrado maior com o lado do quadrado do quadriculado, pois haviam trabalhado em atividades anteriores com esta relação. No entanto, esperávamos que os mesmos tivessem dificuldades relacionadas com as unidades de medidas maiores e com o mm^2 e, por conseguinte, com as abstrações. Então, resolvemos discutir primeiramente as unidades cm^2 e $m^{2.}$

Retomamos a atividade 4, na qual o objetivo era perceber que, dados dois quadrados, o que tiver a maior área é aquele que tem o maior lado.

Em seguida, contamos a história de Herôdotos (1988):

Em 1900 a. C, o rei egípcio chamado Sesóstris, dividiu o território do Egito entre todos os egípcios, dando a cada um deles um lote de terra em forma de um quadrado de mesma área e impondo-lhe o pagamento de um tributo anual. Qualquer homem despojado de parte de suas terras pelas cheias rio Nilo, poderia ir a Sesóstris e expor-lhe a ocorrência; então, o rei mandava seus homens observarem e medirem a extensão do decréscimo da terra para conceder ao detentor do lote uma redução do tributo proporcional à perda.

A partir dessa narrativa, retomamos a padronização do quadrado como unidade de medida de área. Entregamos três unidades quadráticas, sendo a primeira um quadrado de lado igual a um canudo (o canudo estava colado no lado do quadrado), a segunda um quadrado de lado um centímetro e a terceira um quadrado de lado igual a um metro.

Figura 176 - Comparando dm^2 com cm^2.

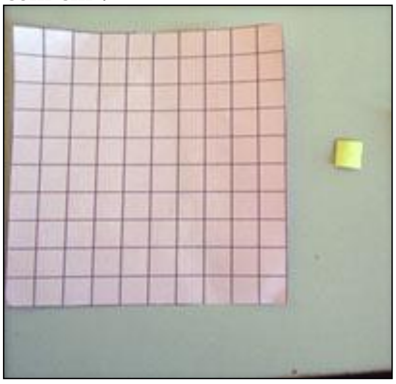


Figura 177 - Comparando m^2 com cm^2.

Entregamos duas unidades de medidas, cm^2, dm^2, aos grupos e iniciamos uma discussão. Entregamos o quadrado de lado um decímetro todo quadriculado, conforme Figura 177, o quadrado de lado um metro em papel pardo. Pedimos para os alunos pintarem um quadradinho do quadrado de lado um decímetro e compará-lo com o quadrado de lado um centímetro. Eles concluíram que cada quadradinho tinha a área igual a do quadrado de lado um centímetro. Alguns alunos chegaram a essa conclusão antes que fosse pedido para pintarem o quadradinho. Então, pedimos para eles contarem os quadrinhos do quadrado de lado um decímetro. Encontraram 100 quadradinhos.

Dialogamos com os alunos, fizemos perguntas, respondemos às suas dúvidas, então eles chegaram aos seguintes *teoremas em ação:*

A área de um quadrado de lado um decímetro é igual à área de um quadrado de um centímetro.

O lado de um quadrado de lado um decímetro mede 10 centímetros, então posso falar um decímetro é igual a 10 centímetros.

1 dm = 10 cm.

Em seguida, pedimos que eles pegassem o quadrado de lado 1 metro. Nas duas turmas, alguns alunos disseram que o lado desse quadrado era igual a cem centímetros. Pedimos para que eles provassem. Como eles não tinham o metro em sala utilizaram suas réguas, que mediam 10, 15 ou 30 cm. Foi muito tumultuado esse momento, todos falavam juntos, cada um informava um quantitativo.

Notamos que eles nunca tinham realizado a medição. Uma aluna disse que a régua não dava para medir o comprimento, pois ela tinha área. Isso gerou outra discussão, e concluímos que a régua realmente tem área, mas que utilizaríamos somente o lado dela que estava graduado para medirmos comprimento. Essa aluna ponderou: "então, qualquer área serve para medir comprimento".

Perguntamos se ela lembrava a atividade que havíamos feito com as peças do tangram e o barbante e as atividades com o geoplano. Ela afirmou que sim, mas que a dúvida dela era se área servia para medir comprimento. Voltamos ao quadrado de lado 1 decímetro e o de lado 1 centímetro. A sala toda participava, dava explicações, tentava convencer a colega. Por fim, concluímos que a unidade quadrada tem lados que são uma medida linear, e os alunos expressaram:

Figura 178 - Quantos dm^2 estão contidos em 1 m^2.

"Um quadrado de lado um decímetro tem perímetro igual a quatro decímetros".

"Um quadrado de lado um decímetro tem perímetro igual a 40 centímetros, porque um decímetro é igual a 10 centímetros".

"Um quadrado de lado um decímetro pode ser escrito da seguinte forma: $1dm^2$, esse expoente dois significa um quadrado". Os egípcios antigos utilizavam essa simbologia, ainda não conheciam a potência, utilizaram o algarismo dois no expoente para simbolizar o quadrado utilizado como unidade de medida de área.

Consideramos que o processo de aquisição do conceito de unidade de medida está intimamente ligado ao conceito de grandeza e medida. Sua compreensão é de fundamental importância.

Em continuidade, reiniciamos as discussões e retomamos o quadrado de um metro de lado. “O lado desse quadrado é igual a um metro = 30 centímetros + 30 centímetros + 30 centímetros + 10 centímetros, então, um metro é igual a 100 centímetros”. “Representamos centímetros por cm e metro pela letra m, tudo minúsculo, essa convenção é universal”. “Um quadrado de lado um metro tem o perímetro igual a 4 metros ou 400 centímetros”.

Por conseguinte, perguntamos aos alunos se eles sabiam quantos quadradinhos de lado um centímetro cabiam em um quadrado de lado um metro. A sala ficou em silêncio e, em seguida, iniciaram as tentativas. Em uma das turmas não surgiu nenhuma proposta de encaminhamento para tomada de procedimentos, mas na outra, uma aluna disse que, se no quadrado de lado um decímetro cabiam 100 quadradinhos, era só descobrir quantos quadrados de lado um decímetro caberiam no quadrado grande. Perguntamos se ela tinha ideia de como poderia fazer aquela descoberta. Outro aluno propôs que era só riscar os quadrados. Pedimos, então, que eles desenhassem os riscos, tarefa realizada com sucesso por poucos pelo fato de a maior régua nos grupos medir 30 centímetros, assim, desenharam traços que não ficaram perfeitamente alinhados. O importante é que, se tivessem uma régua de um metro teriam resolvido o problema, o que aponta um bom encaminhamento da atividade pelos alunos.

Dando seguimento à atividade, apresentamos uma caixa com muitos decímetros quadrados e sugerimos que o metro quadrado fosse recoberto com aqueles decímetros quadrados. Cada aluno caminhava até o quadro e pregava um decímetro no quadrado de lado um metro. Percebemos que todos pregaram em linha reta, seguindo o padrão do quadriculado do quadrado de lado um decímetro.

Depois da primeira linha preenchida, perguntamos quantos quadrados de lado um decímetro haviam sidos utilizados na primeira linha. Como a resposta foi dez, perguntamos então qual era a medida da área da primeira linha; as respostas não foram corretas, então, questionamos qual era a área de cada quadradinho. Como a resposta foi um quadrado de lado 1 decímetro, concluímos que a área era dez quadrados de lado um decímetro, o que poderia ser escrito da seguinte forma: área = 10 dm^2, onde o número dois representava a palavra “quadrado”.

Portanto, a área era igual à soma de todos dos quadrados, isto é:

Área da primeira linha = área do quadrado 1 + área do quadrado 2 + área do quadrado 3 + área do quadrado 4 + área do quadrado 5 + área do quadrado 6 + área do quadrado 7 + área do quadrado 8 + área do quadrado 9 + área do quadrado 10. Mais uma vez, lançamos outra pergunta: vocês já podem saber qual é a área do quadrado de lado um metro? Ao preenchermos a terceira linha, alguém perguntou: "é só contar o número de linhas?" Perguntamos, portanto, se poderiam dar mais detalhes.

Dentre as explicações corretas, selecionamos: "em cada linha cabiam dez quadradinhos, então era só descobrir quantas linhas tinha no total". Perguntamos se alguém sabia como fazer tal descoberta. Eles explicaram todos ao mesmo tempo, então, pedimos para que alguém fosse ao quadrado e mostrasse. Com um "quadradinho", o aluno foi medindo, até que, finalmente, chegou a 10. Então, 10 vezes 10 é igual a 100.

Fizemos a proposta de continuarmos recobrindo o quadrado para tiramos a prova se a quantidade era, realmente, 100. Ao final, perguntamos: se em um quadrado de lado um metro, cabem 100 quadrados de lado um decímetro, quantos quadrados de lado um centímetro cabem no quadrado de lado um metro? Rapidamente alguns responderam mil. Pedimos para que fizessem a contagem mais uma vez. Então, alguns responderam 10.000. Fizemos a contagem e a multiplicação para que os demais entendessem. Então concluímos:

Um quadrado de lado um metro pode ser escrito $1m^2$ ou m^2. O número dois representa o quadrado e '1m' a medida do lado do quadrado.

$1m^2$ tem a mesma área de 100 dm^2

$1m^2$ tem a mesma área de 10.000 cm^2

100 dm^2 têm a mesma área de 10.000 cm^2

Discutimos o fato de algumas unidades serem maiores e outras menores, de acordo com a situação, utilizamos unidades maiores ou menores e a necessidade de ter um padrão, uma referência. Falamos que o quadrado de lado um metro foi tomado por muitos países como padrão de medida de área e que nós também o tomaríamos como padrão.

Após essas discussões e reflexões, passamos a responder as questões de 1 a 7. Primeiramente, eles resolveram em grupo e, em seguida, discutimos os resultados no grande grupo. Em seguida solicitamos que respondessem as questões oito e nove.

Questão 1 - Entre essas unidades, qual é a mais adequada para medir a área da tampa da sua mesa de estudo?

As respostas dadas são semelhantes a: "O quadrado de lado 1 de decímetro".

Justifique sua resposta:

"Não escolhi o quadrado pequeno porque demora para medir a área, e o quadrado é mais rápido para medir".

"Seria mais adequado porque o metro passaria da tampa da mesa".

"Pela lógica o quadrado de um centímetro é muito pequeno, e é melhor utilizar algo maior, mas o metro é muito grande".

"A tampa da mesa é muitas vezes do quadrado de 1 decímetro".

"Porque o metro é muito grande e o centímetro pequeno".

Poucos alunos responderam que seria o quadrado maior. Pedimos para que realizassem a medição. Perguntamos: qual é a medida? Como eles não responderam, entregamos o quadrado que possuía a colagem dos decímetros quadrados e pedimos para que realizassem a medição. Um respondeu que era uma parte do quadrado e nessa parte cabiam quase 26 quadradinhos. Ele trabalhou com aproximação.

Questão 2 - Qual é a medida da área da tampa de sua mesa de estudo?

"A área da mesa é igual a 24 decímetros quadrado".

"A área é 26 decímetro quadrado".

"25 decímetros quadrados".

"27 dm^2".

"A área da minha mesa é igual a 28 dm^2".

"deu 22 decímetros quadrado".

"A medida da área deu 21 quadradinhos de lado de um decímetro".

"De um lado deu 6 e do outro 20".

Questão 3 - Qual é a relação entre as duas unidades de medida, o quadrado de lado um centímetro e o quadrado de lado um decímetro?

"Que cabe 100 cm^2 dentro de 1dm^2".

"Um centímetro quadrado, metade de 1 dm^2".

"A relação que existe é que a medida dará 1centímetro ou 1decímetro e etc".

"A relação é 1 dm^2 = 1 cm^2".

"O decímetro mede 1 dm^2".

Quando questionamos, o aluno que respondeu "um centímetro quadrado, metade de 1 dm^2", ele disse que "10 vezes 10 é igual a 100 por isso um dez é só a metade". Quando solicitamos a ele que escrevesse, já nos respondeu que a metade era 50. Em seguida, pedimos para que dobrassem o decímetro quadrado e nos respondessem quantos centímetros quadrados tinha. Perguntamos: se um decímetro quadrado tem 100 centímetros quadrados, quantos decímetros têm em um centímetro quadrado? As respostas foram: nenhum, o centímetro é menor que o decímetro, o decímetro não cabe no centímetro. Continuamos: então, se o centímetro é uma parte do decímetro, que parte é essa? Como podemos representá-la?

Solicitamos aos alunos que pintassem um centímetro quadrado no decímetro quadrado e perguntamos: são quantos quadrados de lado um centímetro? Ótimo, desses 100 vocês pintaram quantos? Esse um faz parte dos cem quadradinhos? Então, entre os 100 você pintou 1, certo? Pintou 1 dos 100. Logo, um centímetro quadrado é um dos 100 centímetros quadrados. Pegamos outros conjuntos na sala e perguntando as relações entre as partes e o todo. Por fim, sistematizamos que um centímetro quadrado é igual à centésima parte do decímetro quadrado, que pode ser representado por: $1cm^2 = 1/100\ dm^2$.

Questão 4 - Qual é a medida da tampa de sua mesa em decímetro quadrado?

“20 dm^2”; “21 dm^2”; “24 dm^2”; “ 25 dm^2” “26 dm^2”; 27dm^2”

“2.100 cm quadrados”.

Diante das medidas apresentadas, questionamos por que elas eram diferentes, uma vez que as tampas pareciam ter o mesmo tamanho. A resposta foi que cada um fez uma aproximação diferente. Perguntamos qual a medida estava mais certa. Responderam que todas, mas que 20 estava muito longe de 27. Refletimos essa observação feita por eles.

Questão 5 - Sem realizar uma nova medição, apenas transformando o valor, determine a medida da tampa da sua mesa em:

cm^2: 2.100, 2.400, 2.700 cm^2, 24 cm, 6200 cm^2, 100 cm, 25 cm^2, 240 cm

m^2: 24/100 m^2, 25/100 m^2, 24 m^2, 26/100 m^2, 10.000, 2/6 m.

Qual foi o procedimento utilizado para você para fazer a transformação?

“Eu multiplique 27x100 para o centímetro, e dividi por 100 para o metro”.

“multiplicando e dividindo”.

“uma vez eu aumentei e outra vez eu dividi”.

“Fui colocando o quadrado grande no contorno da mesa e deu 24 cm^2”.

Questão 6 - Sabendo que o valor da medida da área da tampa da mesa da professora é igual a 48 dm², pergunta-se:

a) Qual unidade de medida utilizada?

“A medida é o decímetro quadrado”.

“A unidade de medida é o decímetro quadrado”.

b) Se desejarmos informar essa medida em centímetros quadrados, qual será o valor da medida da área?

“4.800 centímetros quadrado”.

“multiplicando 48 por 100, que é igual a 4.800”.

c) Como podemos representar essa medida em centímetros quadrados?

“4.800 cm²”.

“48 cm²”.

Alguns alunos desenharam o quadrado ao invés de apresentarem a resposta por escrito.

“Eu colocaria um quadrado de 100 centímetros quadrados”.

Esperávamos a primeira e a segunda respostas, mas foi muito interessante discutir essa questão; os alunos disseram que responderam segundo o enunciado. O terceiro e o quarto alunos disseram que os quadrados mencionados eram a unidade de medida. Um dos alunos que respondeu “48 cm²” e disse que não perguntamos quantos centímetros quadrados tinham em 48 dm².

Questão 7 - Considerando que a medida da área da sala de aula é 35m², pergunta-se:

a) Qual foi a unidade de medida utilizada?

As respostas dadas se assemelham a essas: “metros quadrados”; “m²”; “35 md²”.

“os dm²”;“100 dm²”.

A grande maioria respondeu “m²”. Discutimos as demais respostas no grupo pequeno com os alunos utilizando o material concreto.

b) Se desejarmos informar essa medida em decímetros quadrados, qual vai será o valor da medida da área?

“vai ser 350.000 dm²”.

“vai ser 3.500 dm²”.

“35x100x100 = 350.000 cm²”.

“1000 cm²”.

“100 dm²”.

Foram poucos os alunos que erraram, mas, apesar de não termos resolvido as situações diretamente pela multiplicação, todos os alunos assim o fizeram. Só utilizaram o material quando lhes foi pedido, com o objetivo de tirar a dúvida se a resposta correta era 350.000 dm^2 ou 3.500 dm^2. Quanto às demais respostas dadas, acreditamos que a nossa maneira de perguntar os confundiu; eles não sabiam de qual medida perguntávamos. Tiveram dificuldade em entender que a letra b referia-se a questão de letra a.

c) Se desejarmos informar essa medida em centímetros quadrados, qual será o valor da medida da área?

"vai ser 35.000 cm^2".

"3.500 cm^2".

"Vai ser 35 cm^2".

"100 cm^2".

A análise é a mesma da letra c. Quando corrigimos as resoluções, pedimos para os alunos não apagarem o que tinham produzido, que colocassem a resposta correta na outra linha. Isso foi para nos ajudar a entender no que o aluno estava errando. Houve um aluno que colocou 35 nas questões e apenas mudou a unidade (35 m^2, 35 dm^2, 35cm^2); ele disse que sabia que o número era o mesmo e que a unidade (de medida) era diferente, e a área também era diferente.

Outro aluno, que colocou 3.500 cm^2 e 3.500 dm^2, explicou sua resposta afirmando que 1dm^2 = 100 cm^2 e, como em 3.500 dm^2, que tem dois zeros, significa que tem 100, então, se já tem 100 pode ser trocado por cm^2. O aluno ainda não dominava o conceito de proporção, no entanto, ele apropriou-se da questão "de dois zeros significar que o número foi multiplicado por cem". Isso aponta que a maneira do professor se expressar sobre um determinado conteúdo pode levar o aluno gerar dúvidas.

Retomamos a discussão, agora trabalhando com as unidades de medida mm^2 e km^2. Nosso objetivo era que, a partir do trabalho com o material concreto para as unidades cm^2, dm^2 e m^2, os alunos abstraíssem para mm^2 e km^2. Para o km^2, os alunos apresentaram menos dificuldades. Logo, alguns alunos deram as respostas corretas, e os demais os seguiram. Para ter certeza de que haviam entendido o procedimento, começamos a questionar a alguns alunos como eles tinham encontrado aquele valor. As respostas eram semelhantes a estas:

"Tudo está multiplicado por cem, mas o km está multiplicado por mil".

"O quilometro tem mil quadrados nas linhas".

"Aumenta de cem em cem".

"Multiplica ou divide por cem, ai acha o resultado".

"O quilometro é fácil, mas o 'mimetro' eu não sei".

"Eu sei que multiplica ou divide por cem, mas não sei quem!"

Percebemos que os alunos mobilizaram o conceito em ação: "o quilometro é igual a cem metros". Para realizarem a abstração, refletimos que um quadrado de lado um km dividido em quadrados de lado um metro teria 1000 quadrados nas linhas e 1000 quadrados na vertical, e que a área desse quadrado em metros quadrados seria igual a 1.000.000 m^2, ou seja, 1.000.000 quadrados de lados um metro.

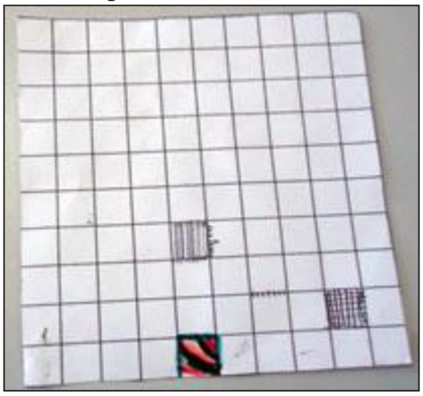
Questionamos se eles tinham ideia do tamanho daquele quadrado. As respostas foram: "não"; "muito grande". Também perguntamos se eles tinham noção da quantidade de quadrados de lado 1 metro, a resposta também foi não.

Perguntamos se eles aceitavam o desafio de recortarem esses quadrados até formarmos um quadrado de um km^2. As duas turmas disseram que não, era muito. Perguntamos: muito quanto? Responderam: "muito". Um aluno da turma da professora Tatiana apresentou a seguinte solução "é só a gente cortar 4.000 quadrados e montar o quadrado lá na quadra e dentro a gente risca com o giz".

Concluímos que os alunos nessa faixa etária não têm a precisão da quantidade, mas compreenderam o procedimento. Por isso, consideramos aconselhável trabalhar inicialmente com as unidades cm^2, e m^2, pois são unidades mais comuns no dia a dia desses alunos; parece que as demais não lhes são significativas.

Ainda assim, perguntamos se alguém conhecia outra unidade de medida de área; um aluno apenas disse que ouve seu pai falar em hectare. Perguntamos qual era a profissão de seu pai, eles respondeu: "marreteiro, vende terreno, fazenda, chácara, casa". Falamos na sua turma que um hectare é uma unidade agrária, então serve para medir fazenda, chácara, e é igual a 10.000 m^2. Mas foi só um informativo, não trabalhamos com a unidade.

Figura 179 - Múltiplos e submúltiplos.



Retomamos a questão do m^2 ser o padrão e retomamos a discussão a respeito de que a área é a mesma, mas muda o número porque a unidade de medida mudou. Por comparação e relação, refletimos com os alunos quando multiplicaríamos e quando dividiríamos. Não tínhamos a intenção de abordar os conceitos por esse esquema de raciocínio, mas como eles assim o fizeram, fomos esclarecendo, chamando a atenção para que a multiplicação ou divisão não fosse feita direta e sim acompanhada da comparação entre as unidades de medida. Isso deu mais trabalho do que mandar os alunos decorarem a "escadinha", descendo divide por cem, subindo multiplica por 100 a cada degrau, mas fica sem significado e o conceito não é apropriado pelo aluno.

Concluímos que era importante retomar o material concreto para que todos entendessem. Então, pedimos para que pegassem o dm^2, nele pintassem um cm^2. Retomamos toda a discussão da relação entre o cm^2 e o dm^2. Depois, pedimos para que no cm^2 pintado eles marcassem um mm^2. Muitos não conseguiram fazer por ser muito pequeno, no entanto entenderam que os lados do quadrado tinham que ser dividido em dez partes iguais. Já uma minoria queria marcar o quadrado na vertical em cem partes. Uma aluna exclamou: "então por isso é 100, tem dez quadradinho na vertical e de dez na horizontal", alguns alunos brincaram por ela só ter entendido naquele momento. Outro aluno comentou "por isso que é ao quadrado, por que pega dois lados do quadrado". Uma aluna disse que, se ela tivesse inventado o sistema, seria quatro (m^4) e não dois (m^2), por que o quadrado tem quatro lados. Outro aluno perguntou se compramos alguma coisa em mm e mm^2, ou se ele só serve para marcar a régua.

Por essa não esperávamos! Respondemos que o 'mm' é utilizado para medir o índice pluviométrico, explicamos do que se tratava, e que também poderia medir filamentos, sobre o mm^2 eu não lembrava no momento. Esclarecemos que não era por ser uma unidade muito pequena que não tinha utilidade, pois, no mundo, assim como existem objetos muito grandes, existem objetos muito pequenos que nossos olhos não enxergam, e para os quais há a necessidade de estabelecermos unidade de unidades de medidas menores que o mm, como é o caso do micrômetro, que serve para medir as células.

Propusemos à turma pesquisar medidas pequenas e sua utilidade, assim como o uso do mm^2. Em seguida, pedimos para que os alunos respondessem as questões sete e oito.

Questão 8 - Se a medida de área de um terreno for 14 km², isso significa que esse terreno pode ser recoberto por _______ quadrados, cujos lados medem________.

As respostas foram:

"14 quadrados cujos lados medem 1 km²".

"14 quadrados cujos lados medem 1 km".

"1000.000 quadrados cujos lados medem 1m".

"10.000 quadrados cujos lados medem 1 dm".

Eram esperadas por nós apenas as duas primeiras respostas. Apesar de a transformação estar errada para o dm, consideramos positivo o aluno ter percebido a relação do km^2 com as outras unidades de medidas para além do m^2.

Questão 9 - Responda:

a) 1 m² corresponde a quantos dm²? Ou seja, 1 m² = <u>100</u> dm²

b) 1 dm² corresponde a quantos cm²? Ou seja, 1 dm² = <u>100</u> cm².

c) 1 cm² corresponde a quantos mm²? Ou seja, 1 cm² = <u>100</u> mm².

d) 1 dm² corresponde a quantos mm²? Ou seja, 1 dm² = <u>10.000</u> mm²; <u>1000000</u> mm²

Não houve erros na questão, a não ser na letra d. Percebemos que alguns alunos erraram na unidade de medida, utilizaram o metro , pois eles pegaram o dm^2 e contaram em cada tem 100mm, para cada quadrado da primeira linha contaram: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 e apresentavam como resposta 1000000 mm². Isto aponta o entendimento de que, em cada cm^2, tinham 100 mm^2.

Porém, um aluno explicou que deu 1000 na primeira linha, então, ele multiplicou por 10 quadrados da vertical, no entanto ele afirmou que havia esquecido que em cada "quadradinho teriam 100 quadrados mais pequenos", também. Percebemos que alguns alunos apresentaram dificuldades com quantidades grandes, que não lhe são significativas, e outros têm dificuldade de abstração e de criar regras matemáticas. Nesse caso, o material acabou ajudando a cometer o erro, pois ele trabalhou com o dm^2, dividido em cm^2, mas lhe era absolutamente visível somente o metro quadrado e o decímetro quadrado.

Por fim, perguntamos se eles tinham visto ou trabalhavam, no dia a dia, com essas medidas. Um falou que a mãe estava reformando a casa e comprou cerâmicas. Em cada caixa vinha escrito $2m^2$. Perguntamos se em uma caixa havia duas cerâmicas e ele respondeu que não, que eram muitas. Continuamos questionando: "então, por que está escrito $2m^2$ se não há dois quadrados de lado 1 metro cada um na caixa?". Responderam que dava para cobrir dois metros quadrados de chão.

Na outra turma, uma aluna disse que, perto de sua casa, existia uma casa à venda com uma faixa que dizia: 100 metros quadrados de área construída. Discutimos essa informação, perguntamos se ela lembrava como estava escrito na faixa. Ela escreveu no quadro: 100 $metros^2$. A aluna disse que quando lia aquela informação, não entendia, mas que agora ela sabia o que significava. Perguntamos se eles consideravam que a casa com $100m^2$ tinha a forma de um quadrado. Alguns responderam que sim. Pedimos para pegarem os $7m^2$que tínhamos em sala e montarem como quisessem. Surgiram várias formas. Concluímos que todas elas tinham $7m^2$, então, a tal casa poderia ter várias formas. A aluna explicou que ela era comprida. Pela sua explicação, entendemos que ela era uma construção retangular.

Ao longo dessa atividade, os alunos produziram os seguintes *teoremas em ação:*

Em um quadrado quadriculado sua área é igual ao produto do número de quadrados da primeira linha horizontal pela primeira vertical.

A medida do lado do quadrado maior está relacionada com a quantidade de quadradinhos que cabem em cada linha desse quadrado maior.

A área de um quadrado pode ser dividida em cem quadrados de áreas iguais.

A medida da área de uma superfície é igual ao número de quadrados iguais que cabem nela.

A medida da área de uma figura depende da unidade de medida utilizada.

No quadrado dividido em quadrados iguais, todas as linhas têm o mesmo número de quadrados, que também são iguais ao número de quadrados das colunas.

Para resolução dessa atividade, os alunos vivenciaram e aplicaram os conhecimentos adquiridos ao longo da sequência com mais reflexão e abstração.

Apesar dos alunos apresentarem dificuldades com as transformações, constatamos que eles identificaram com muita propriedade a área como grandeza autônoma, não confundiram área com número, superfície com área e nem área com perímetro, e ainda identificaram que a unidade de medida quadrática é um quadrado de determinado lado.

Os alunos compreenderam que área é uma grandeza associada a uma superfície que tem uma medida, a medida da área, também chamada de área. Área é a porção do plano ocupado por uma superfície no espaço bidimensional. A medida da área dessa superfície depende da unidade de medida que será utilizada.

Por meio da verbalização dos alunos, foi possível verificar a análise cognitiva das unidades (desenhadas no papel), ou seja, a maneira como essas eram vistas e utilizada na resolução das situações. Como eles percebiam a relação entre as medidas dos lados e das áreas das unidades consideradas, a linguagem natural constituiu um importante registro de representação para o funcionamento do pensamento. Assim, foi possível identificar as operações mentais realizadas pelos alunos. Segundo Duval (2011), as operações discursivas são irredutíveis à aplicação de regras de sintáticas e ao conhecimento de um vocabulário. Elas se situam no ponto exato em que conhecimento, compreensão e conscientização são inseparáveis. Para o esse autor, o sujeito precisa exprimir para si e para o outro para tomar consciência da elaboração do seu pensamento.

De acordo com Duval (2003), podemos considerar que os alunos apresentam a conceitualização de unidade e de medida de área, uma vez que os mesmos mudaram os registros de representação não discursiva – apreensão perceptiva e operatória nas figuras que representam as unidades de medidas – para o registro discursivo da língua natural, que são as associações verbais e escritas validadas a partir dos teoremas em ação e dos conceitos em ação.

Essa capacidade de mudar de registro mantendo o objeto matemático implica na compreensão do conceito, ou seja, realizar procedimentos significa trabalhar o conceito para sua efetiva formalização pelo sujeito que aprende.

A construção do conceito pelo aluno requer a criação de um espaço de ensino e aprendizagem impregnado pela atividade, exploração, investigação, mobilizando-o para a ação. Então, aprender torna-se significativo, onde errar é levado em conta como parte do processo cognitivo.

De acordo com Vergnaud (1996), esse espaço que ativa o realizar procedimentos de aprendizagem são as situações-problema: “um conceito não assume a sua significação em uma única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único conceito” (VERGNAUD, 1996, p. 190), ou seja, são as situações que dão sentido ao conceito, elas são as referências no processo de conceitualização.

Assim, nossa referência para a elaboração das situações foi o contexto histórico da matemática. Podemos concluir que o trabalho com esta sequência de atividades revela que a história da matemática pode contribuir para a construção do conceito de área como grandeza autônoma pelos alunos do ensino fundamental.

O trabalho, também, revela que é possível aos alunos do ensino fundamental aprender por meio da história da matemática, e aponta que, como toda metodologia de trabalho em sala, exige por parte do professor estudos e planejamentos.

CAPITULO IV

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO FONTE DE SENTIDOS

1 Construindo sentidos

Como as representações embasam a atividade humana, acreditávamos que a utilização da história da matemática, como instrumento didático, poderia promover mudança da representação da matemática em alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Essa atividade, a nosso ver, pode modificar as concepções que os educandos têm da matemática e, quem sabe, de motivar os alunos a participar como sujeitos da sua aprendizagem. Entretanto, o estudo de Pricken (2009) revela que até dois anos de intervenção implica em mudanças periféricas, e que mudança no núcleo da formação de representação, requer uma formação de aproximadamente seis anos por que:

> mudar a Representação acerca da Matemática é um processo que demanda tempo, estudo e reflexões sobre o processo de ensinar e de aprender matemática, para o qual a possibilidade de participar tanto de espaço formativo quanto de pesquisa no campo da Educação Matemática é fator determinante para mudança de elementos que constituem o núcleo da representação social do professor. (PRINCKEN, 2009, VII).

Essa constatação é percebida nos relatos e nas ações das professoras que participaram da nossa pesquisa.

Para González Rey (2006), o sujeito da aprendizagem é capaz de desenvolver um percurso diferenciado em relação ao que aprende e, de se posicionar crítica e reflexivamente em relação ao seu processo de aprendizagem, a qual não ocorre por repetição, por simples memorização de fórmulas e regras. “A produção individual de sentido tem sua gênese no encontro singular de um sujeito com uma experiência social concreta”. (GONZÁLEZ REY, 2004, p. 5).

Assim sendo, as experiências realizadas pelo sujeito epistêmico são fundamentais para revisão de percepções e representações. Nesse aspecto repousa uma função importante na escola de oferta de experiências, que apesar da existência de representações sociais, o sujeito construa suas próprias percepções e confronte-as com a visão social mais global.

Decidimos por ter a história da matemática como um espaço em que o aluno conheça, aplique, analise, julgue, construa e ressignifique o conhecimento; estabeleça relações com outros conhecimentos promovendo, assim, aprendizagens. Nesse sentido, averiguamos que a história da matemática pode contribuir como ferramenta na prática pedagógica do docente e promover a aprendizagem da matemática aos educandos dos anos iniciais do ensino fundamental.

A sequência de atividades elaborada, tendo como pano de fundo a história da matemática e aplicada na sala de aula, não teve por objetivo que o aluno de 5º ano aprendesse história da matemática, mas pressupôs: promover o diálogo entre os sujeitos envolvidos; incentivar o desenvolvimento da criatividade dos alunos e do professor, tornando o ensino significativo; motivar o aluno à aprendizagem, levando-o a buscar uma forma de pensar e organizar o pensamento, e a entender os sentidos subjetivos gerados nesse contexto, em relação aos conceitos matemáticos envolvidos e à Matemática, e qual é a sua relação com a linguagem matemática.

A orientação dessa busca pelo aluno foi fundamentada em González Rey (2006), que considera o diálogo um estímulo ao envolvimento do aluno o qual assume posições norteadas por suas reflexões, sendo esse processo facilitador da emocionalidade no aprender.

Nesse contexto, a história da matemática possibilitou a (re)criação e a (re)descoberta pelos alunos de conceitos matemáticos, a partir da discussão da, objetividade, da intersubjetividade e da validade universal da matemática, em relação a sua produção histórica, social e cultural. Na ressignificação dos conceitos os alunos realizaram algumas generalizações e algumas sínteses dos mesmos, como foi possível perceber por meio dos procedimentos e dos teoremas em ação realizadas, o que nos levou a evidenciar o aumento do nível de generalização dos mesmos.

Na resolução da sequência de atividades, os alunos perceberam a necessidade de articular alguns conhecimentos que já eram de seu domínio e de elaborar outros para solução de situações apresentadas a eles. Quando esse fato não lhes era claro, as professoras mediavam, mostrando quantos conhecimentos eles já dominavam e coordenavam na resolução da atividade, sempre valorizando o fazer de cada aluno, suas tentativas, seus erros e acertos. Essa situação ocorreu, por vezes, não apenas com os alunos, mas também com as professoras, constituindo, assim, a investigação como espaço de formação em serviço, uma vez que constatamos no processo as professoras reelaborando seus próprios conceitos matemáticos em ação. Muitas das vezes elas se apresentaram surpresas com a capacidade de seus alunos, e notaram que não conheciam a realidade cognitiva dos mesmos quando mergulhados em experiências mais significativas de construções geométricas baseadas em contextos históricos da matemática.

Assim sendo, dessa necessidade, o aluno atribui um sentido ao conhecimento. "A condição de sujeito no processo de aprender leva à organização própria e diferenciada do material aprendido, o que implica erros nesse percurso, os quais não podem ser desestimulados". (GONZÁLEZ REY, 2006, p. 41).

Para tal, a atividade didática proposta configurou-se em um contexto social promotor de subjetividade, permitindo a participação do aluno, sua exposição diante da aprendizagem sem medo do erro, fato corroborado pelas ideias de González Rey (2004, p. 58), "o social é uma força ativa geradora de sentido de forma permanente [...]", visto que, a construção de tais processos psíquicos subjetivos aparece nos três sujeitos: alunos, professores e pesquisadora.

Para González Rey (2009), a produção de sentido é associada a uma configuração pessoal que tem uma história e um contexto social os quais se veiculam, de uma forma determinada, diante da ação concreta de um sujeito.

Nessa perspectiva, compreendemos a necessidade do sujeito que aprende da presença de outro sujeito durante a realização das atividades: a fala do outro na constituição de referências. A relação aluno-aluno, professor-aluno[17] subsidiou as falas, as escritas, as dúvidas, as certezas, as tentativas, os pareceres mediante a sequência.

Isso favoreceu ao grupo autoanalisar como percebiam ou interpretavam as atividades (os alunos refletem ao longo do processo os sentidos acerca das intencionalidades didático-pedagógicas da experiência oferecida pela escola, e suas ações, reações, comportamentos, sentimentos, dependem fortemente deste sentido subjetivo de apreensão pelos sujeitos acerca das atividades propostas. Assim, as expectativas das educadoras, na percepção dos alunos, influenciam as atividades realmente realizadas e seus resultados), conforme as expectativas particulares de cada um. Essa autoanálise favoreceu a evidência de que, ao interpretar a fala de alguém, interpreta-se, além das palavras, seu significado, inserido em determinado contexto. Observa-se, também, a fala em sua totalidade com a participação do corpo.

Citamos, como exemplo, a fala de uma aluna em um momento que discutíamos a importância do conhecimento nos dias de hoje e o que a tecnologia tinha mudado a nossa vida, ela disse: "gostaria de aprender mais matemática para construir um telefone que caiba no seu ouvido". Perguntamos se ela gostaria de ser engenheira. Ela respondeu que não, talvez

[17] Nossa postura no decorrer da pesquisa foi como professora-pesquisadora, por isso, quando nesse capítulo nos referirmos às professoras estamos falando da pesquisadora e das duas professoras colaboradoras.

advogada. Afirmamos que existem os fones de ouvido, claro que ela já sabia! Então, questionamos por que um telefone que coubesse no ouvido? As respostas foram muitas e não só de tal aluna, muitos tinham contribuições e compartilhavam do sonho. Uma resposta foi que não seria necessário parar de fazer nada para falar ao telefone. Outra que poderia ficar escondido.

Consideramos que as atividades elaboradas com base nas concepções históricas, permitiram aos alunos ressignificassem os conceitos e se apropriarem dos mesmos, e assentiram se assumirem como sujeitos ativos no processo de construção do conhecimento, e favoreceu o resgate do indivíduo na linguagem, ou seja, na forma de expressar seus conhecimentos e na maneira de relacionarem-se com eles e com os demais elementos do processo.

Muitas vezes, os alunos têm dificuldade com algum conhecimento e não sabem explicitá-la. Foi gratificante presenciar, no nosso estudo, os alunos com as “rédeas” do seu conhecimento em suas mãos. Mas essa liberdade de ação era compartilhada, pois, sempre havia alguém no grupo que havia resolvido errado e vinha o questionamento quem estava certo. Havia uns que tinham confiança e defendiam seus procedimentos, o debate era bom! No entanto, havia outros que achavam que o colega era mais inteligente então possivelmente o procedimento para a resolução do colega era o correto.

Nesse contexto, a mediação das professoras foi muito importante, pois intervinham: apontavam formas corretas, analisavam as erradas discutindo com os alunos o porquê não poderia ser tal resposta e a partir de então faziam um contraponto, e questionamentos que permitiam todos se manifestarem e repensarem seus esquemas quando necessário. O medo de errar foi passando e a cada dia a participação era maior.

Para exemplificar, tivemos uma situação na sala da professora Vitória que, ao olhar as escritas produzidas, encontrou três respostas diferentes. Então, tentou provocar uma discussão para verificarem a que estaria correta, esse fato revela a existência de uma representação social que em matemática sempre temos uma, exclusivamente, uma resposta certa, e aprender depende de encontrar esta única solução, socialmente aceita como ‘a correta’.

Os alunos não demonstraram interesse em participar. A professora escolheu três alunos para apresentarem à turma as respectivas respostas que eram diferentes entre si. Todos votaram em uma única resposta como certa, a da aluna que era considerada entre eles como mais inteligente.

A professora começou a questionar os alunos mais tímidos menos participativos, que só respondiam com monossílabos, enquanto isso outros gritavam e davam as respostas completas. A professora pediu para que tivessem paciência, pois ela queria ouvir as respostas dos colegas que quase nunca se pronunciavam, e perguntou "vocês não querem?" Uma aluna respondeu: "não! Ela não vai falar mesmo". Outro aluno respondeu que, de qualquer forma, a resposta da colega chamada pela professora estaria errada e começou a rir. A professora repreendeu a turma, o que é muito importante para clarear quais os sentidos e as finalidades maiores do aprender matemática, num contexto da diversidade, ou seja, de compreender que o conhecimento está sustentando em processos e não produtos, na diversidade e não na convergência, nas dúvidas e não apenas nas certezas, nos erros e não apenas nos acertos, uma vez que são neles que podemos explicitar os conceitos em processos de ação e construção. Em seguida, continuou o questionamento a tal aluna, problematizando de forma que a aluna pudesse estruturar o seu pensar e responde ao que havia sido solicitado no enunciado da questão.

Ao final mostrou-se contente com a aluna. Esse fato traz-nos a evidência da importância da professora como mediadora das aprendizagens possibilitando o direito à fala a todos da turma e, além disso, fortalecendo o poder de fala dos alunos silenciados:

> A mediação da aprendizagem matemática realiza-se, assim, por intermédio dos problemas matemáticos 'do professor', em que cabe ao aluno, antes de lançar-se à atividade matemática, receber, acolher, interpretar, compreender e resolver aquilo que, desde sua gênese, é de propriedade do professor. Antes de dar início ao processo de aprendizagem propriamente dita, existe um momento de apropriação, de sedução, de compreensão e de interpretação do objeto de mediação pensado e produzido pelo professor para que haja então certa aprendizagem matemática. (MUNIZ, 2006, p. 150).

Percebemos que, para esses alunos, a imagem da matemática que só os alunos mais "inteligentes" seriam capazes de ser compreendê-la e acertar as resoluções das situações apresentadas. Vários fatores contribuem para a formação de crenças pelos alunos em relação à matemática, um deles pode ser o fazer pedagógico, a postura do professor frente à matemática e aos alunos. Gómez Chacón (2003) aponta quatro categorias em relação às crenças: crenças sobre a matemática, sobre si mesmo, sobre o ensino da matemática e sobre o contexto social ao qual pertencem os alunos.

A cada aula trocávamos os grupos de trabalho para que todos interagissem com todos. Em todas as atividades os alunos foram estimulados a descrever seus procedimentos, então quem havia acertado a questão proposta deveria ajudar a descobrir o que estava errado no procedimento do outro. Depois, iniciávamos a discussão com a sala toda. Buscamos trabalhar de forma que o processo de resolução não fosse um ato solitário, mas que as situações fossem interpretadas e resolvidas por ações cognitivas coletivas, e que o confronto das diferentes interpretações e algoritmos e validações fossem se constituíssem em um desafio sociocognitivo dentro de uma comunidade de investigação, o grupo. (MUNIZ, 2006).

Nesse ato, foi possível capturar os sentidos subjetivos dos alunos em relação à matemática, aos conceitos matemáticos e ao autoconceito como aprendizes de matemática. Essa prática pode apontar caminhos para a análise das atividades dos alunos.

Para Vygotski (1999), a principal diferença entre a imaginação e o pensamento realista é a direção da consciência, que na imaginação tende a afastar-se da realidade ao contrário da cognição imediata da realidade. Nas palavras do autor, "a imaginação é um momento totalmente necessário, inseparável do pensamento realista" (VYGOSTSKI, 1999, p. 128). Por isso, para alguns pesquisadores, é fundamental a presença das histórias, como instância pedagógica, por meio das culturas, por relacionarem os valores e as crenças abstratas com a materialidade do contexto experimentado pelos alunos.

Vamos citar o exemplo de um aluno que apreciava os nossos encontros, fazia muitas "hipóteses"; argumentava bastante; respondia a todos os questionamentos, na maioria das vezes, corretamente; as suas construções eram encantadoras. Não importava se estava correto, ele gostava de apresentar suas resoluções.

Na reunião de pais, presenciamos o pai desse aluno muito bravo porque o filho não queria nada e tinha tirado, mais uma vez, seis em matemática. A professora tentou explicar que se tratava de um aluno muito bom, o pai respondeu: "bom? Como se só tira notas baixas em matemática?". Mais, uma vez a professora contra argumentou dizendo que o aluno era participativo, educado, amável, fazia as tarefas, responsável, fazia as leituras encaminhadas para casa...O pai não quis saber e afirmou que a mãe não pôde ir à reunião porque estava trabalhando e que, quando visse aquelas notas baixas... "se ele não melhorar, ela vai tirá-lo da escola, não quer nada!".

Ao final da reunião, confirmamos com a professora se aquele era o aluno a quem nos referíamos. Sim, era! Foi uma surpresa saber que tal aluno não tinha nota "boa" em matemática. A professora disse que notou o quanto ele fica nervoso em dia de prova, talvez ele não se adapte ao tipo de prova utilizado. Em nosso trabalho, a avaliação da aprendizagem estava constantemente presente ao longo de todas as atividades, consideramos este espaço como o mais importante em termos de captação das necessidades, motivações, interesses, dificuldades dos alunos em processo de produção matemática. O que não é valorizado pela escola em termos de sistema institucional de avaliação formal

Em continuidade, perguntei se não poderíamos avaliar como estávamos trabalhando. Ela respondeu que a avaliação intermediaria sim, mas, a avaliação mais importante era igual para todas as turmas de 5º ano, assim como era igual para as demais. E como as demais professoras não estavam participando da pesquisa não seria possível.

No começo, convidamos as demais professoras da escola para participarem da pesquisa, mas para utilizarem a mesma metodologia, as mesmas atividades, ou algumas. Elas não aceitaram, justificando a falta de tempo. Houve uma que disse que os alunos não sabiam nem multiplicar, como trabalhar com área e medida com eles, ou seja, não seria possível iniciar outro conteúdo, no caso geometria, se eles não sabiam nem multiplicar. Contra argumentamos, sem sucesso.

2 Reações afetivas

Reconhecemos o quanto a emoção pode ser negativa em um momento de exame. A pessoa fica mais concentrada na percepção de seu estado emocional bloqueando outros processos, como o cognitivo. Então, consideramos que o ambiente favorável criado para a aprendizagem deve ser propício também em dia de testes e provas. As professoras acordaram em considerar toda a participação do aluno no processo avaliativo, mas tal aspecto não seria utilizado nas provas. Gómez Chacón considera que as situações similares repetidamente produzem o mesmo tipo de reações afetivas:

> Ao aprender matemática, o estudante recebe estímulos contínuos associados a ela – problemas, atuações do professor, mensagens sociais, etc. – que geram nele uma certa tensão. Diante desses estímulos reage emocionalmente de forma positiva ou negativa. Essa reação está condicionada por suas crenças sobre si mesmo e sobre a matemática. Se o indivíduo depara-se com situações similares repetidamente, produzindo o mesmo tipo de reações afetivas, então a ativação da reação emocional (satisfação, frustração, etc.) pode ser automatizada e se "solidificar" em atitudes. Essas atitudes e emoções influem nas crenças e colaboram para sua formação. (GÓMEZ CHACÓN, 2003, p. 23).

Mesmo com esses vieses e incompreensões a respeito do processo avaliativo, as professoras estavam satisfeitas, pois os alunos apresentaram melhoria em comportamentos relativos às aulas de matemáticas, e também nas provas ao final do bimestre em questão, quarto bimestre. Segundo as professoras parceiras alguns alunos estavam mais seguros e com conhecimentos consolidados.

Confirmamos ao longo do trabalho que atividades fundamentadas na história da matemática podem provocar no educando a explicitação de suas razões, emoções e ações, relação as seus sentimentos, como aprendiz de matemática, e a sua capacidade de recriar conceitos, apropriando-se do mesmo, de acordo com sua vivência com a matemática. Acreditamos que os alunos passaram a perceber que o que conhecemos como matemática foi e é uma construção humana de avanços processuais.

Por meio da sequência de atividades, os estudantes foram capazes de comunicar seus conhecimentos e suas dificuldades ao grupo. Trabalhar com história da matemática, pela investigação em sala de aula, foi, a nosso ver, tornar a aula criativa na medida em que possibilitou a produção de um novo valor na aprendizagem e no desenvolvimento do aluno, pois o educando teve a possibilidade de desenvolver a oralidade e aquele que sentia dificuldade em se expor teve oportunidade de vencer seu silêncio. O ambiente tornou-se favorável para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de induzir, deduzir e inferir, desenvolvimento do senso crítico, da imaginação e da criatividade do aluno, para a manifestação da curiosidade da criança em relação ao tema, e para a manifestação de suas propriedades artísticas.

Como os ritmos de aprendizagem são diferentes para as pessoas, percebemos que alguns alunos precisaram de mais tempo do que outros, mas para cada um foi um avanço relevante no movimento de muitas aprendizagens, entre elas a emocional. O tempo de produção e aprendizagem depende do “modus operante”, assim, como há nos grupos diferentes modos de produção matemática, temos, por consequência, tempos diferentes, e que os que são mais rápidos não necessariamente são mais inteligentes.

Os alunos gostavam muito das aulas pertinentes à pesquisa. Um dia ouvimos a seguinte fala: “se vocês não se comportarem não terão mais aula com a Edilene”. No dia de reunião de pais, uma mãe disse: “minha filha gosta muito da professora Tatiana, ela é ótima. A amiguinha dela, que estuda na outra classe, estava em minha casa e reclamou que não tem aula com a ajudante da professora Tatiana, que minha filha havia dito para ela que é um momento ‘de mais’”.

A pesquisadora era conhecida na escola pelos alunos das outras salas como a ‘ajudadora' da professora Tatiana. Eu achei aquilo sensacional! Eles consideravam que a aula da professora Tatiana era especial ao ponto de ter uma ajudante. Na sexta-feira, no primeiro tempo, a professora Tatiana deixava os alunos jogarem xadrez, na quarta-feira, havia aula no laboratório e, nos outros dias, ainda tinha uma ajudante.

Os alunos da escola reconheciam a dedicação da professora Tatiana que naquele momento havia trazido até uma ajudante. E as aulas estavam sendo comentadas nos corredores da escola, nas conversas no intervalo de aula e, segundo a fala da mãe, até em casa.

Pais (2002) afirma que o saber matemático se constituiu de noções objetivas, abstratas e gerais, no entanto, não há como negar a intermediação da subjetividade e da particularidade na atividade humana de sua elaboração, uma vez que, os sentidos subjetivos desenvolvidos na aprendizagem constituem, segundo González Rey (2006), verdadeiros sistemas motivacionais, que permitem aos alunos representarem o seu envolvimento afetivo com a atividade desenvolvida. Quer dizer, a subjetividade, no contexto da aprendizagem, revela tendências na forma de pensar e agir no desenvolvimento da atividade pedagógica. Em suas palavras:

> As emoções que o sujeito vai desenvolver no processo de aprendizagem estão associadas não apenas com o que ele vivencia como resultado das experiências aplicadas no aprender, mas emoções que têm sua origem em sentidos subjetivos que trazem ao momento atual do aprender momentos de subjetivação produzidos em outros espaços e momentos da vida. (GONZÁLEZ REY, 2006, p. 32).

Gómez Chacón (2003) se refere às crenças como “verdades” pessoais incontestáveis de cada um, derivadas da experiência ou fantasia que tem um forte componente avaliativo e afetivo. Para Vila e Callejo (2006), as crenças são um tipo de conhecimento subjetivo referente a um conteúdo com forte componente cognitivo que predomina sobre o afetivo.

Apontamos, pois, a história da matemática, utilizada como recurso didático, como um espaço de: alegria, realização, descoberta do potencial de aprendizagem e de ver o mundo como uma obra em permanente construção.

Temos consciência de que a história da matemática como metodologia de ensino ou como instrumento didático não pode dar conta de todas as dificuldades que o ensino da matemática tem enfrentado no mundo contemporâneo, no entanto, constatamos que ela exerce importante papel no processo de ensino e aprendizagem. Ela representa uma opção pedagógica de abordagem dos conteúdos, pois permite ao professor problematizar situações que tornam a aprendizagem significativa para o aluno, além de favorecer momentos de produções cognitivas nas quais podemos identificar e interpretar os procedimentos e a apropriação significativa do conhecimento matemático. Então, atividades com fundo histórico podem estimular a autoconfiança na capacidade de aprender matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> “A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria”. (Paulo Freire, 2000).

Considero essa fala de Paulo Freire a expressão muito mais significativa da procura e do achado em minha pesquisa. O que eu pesquisadora, procurava, como se deu esse processo de procura e como foram gestados os achados. A boniteza e a alegria dos meus achados nasceram ou nascem da minha aprendizagem como pesquisadora e também do meu processo de “reensinar”. Nesse aspecto, encontramos a boniteza e a alegria exaltadas por Freire, no processo de ensino aprendizagem, isto é, nós nos reencontramos no processo, redescobrimo-nos nas respostas dos alunos, nas falas dos professores, nos corredores das escolas e até na descrição/socialização dessa escrita. Creio que a pesquisa científica nos convida pra esse processo de busca e de encontros, os achados são inevitáveis.

A seguir faço considerações acerca do caminho, dos meus parceiros, das buscas, da boniteza e da alegria.

1 Quem sou eu na pesquisa

Nesta seção, parece-me propício pedir ao meu orientador uma licença que não é poética, mas acadêmica, para falar utilizando a minha pessoa, isto é, a primeira pessoa do singular.

É importante realçar o desenvolvimento pessoal e profissional que a pesquisa dessa natureza proporcionou para mim como educadora.

Este estudo me proporcionou compreender melhor a produção do conhecimento em torno do tema desta pesquisa; entender melhor as estratégias utilizadas pelos alunos; aprender a perceber emoções imanentes no aprendizado da matemática quando compreendo, com alegria, a beleza do aluno protagonista que não carrega em si a obrigatoriedade de ser o “mocinho” que sempre está correto, forte, presente, disposto, responsável, coerente, seguro, feliz. É permitido errar, fracassar e nem por isso deixar de ser competente. Mesmo com diferentes competências, todos podem aprender.

Também, levou-me a entender que a estruturação da aprendizagem é extremamente ligada a quem "eu" sou e como estou no mundo, que esse "meu" estar no mundo pode ser diferenciado. E que se pode aprender a aprender, que há um método de aprender muito particular do sujeito. Assim, a participação do professor é muito importante para apontar caminhos, estratégias e dar liberdade para a definição entre elas quais o aprendiz prefere e a partir de então ir amadurecendo até não escolher entre caminhos apresentados, mas criar novos, isso é componente do processo da busca. Logo, é essencial um professor e uma metodologia de ensino que permitam questionamentos, participação, exposição de ideias, observação dos tempos e maneiras diferentes de aprender.

Essas compreensões, apreensões e entendimentos renovaram minhas perspectivas, crença e esperança na educação, e proporcionaram-me um olhar "de novo" para minha prática como educadora, como professora de matemática, formadora de professores e como professora-investigadora.

O caráter sistemático de análise e reflexão desta pesquisa levou-me a conceber o desenvolvimento gradual do professor pesquisador. O início do processo do trabalho foi repleto de dúvidas e inseguranças. Meu orientador um dia me disse: "Engraçado! Sempre você está com medo". Em seguida completou: "Bom que ele não te paralisa". Isso me chamou a atenção para o fato de, a cada encontro com ele, eu iniciar dizendo: "meu medo é". Para compreender algo novo, é essencial ter uma boa dose de coragem, ousadia e persistência. A mim cabia o desejo de enfrentar os dilemas inevitáveis do processo de aprendizagem. Meu orientador, o professor Dr Cristiano Alberto Muniz, mostrou-me que um dos grandes achados da aprendizagem pressupõe articular o modo de ser e de pensar do aluno com as estruturas epistemológicas dos conteúdos.

No entanto, essa insegurança é por estar trabalhando tendo a história da matemática como referência. Eu não queria ser doutora em história, mas acreditava que ela poderia fazer a diferença no modo de ensinar e, para isso, eu tinha que adquirir alguns conhecimentos pertinentes ao campo da história da matemática. E como um professor nunca está pronto, eu investi nessa pesquisa, errei, acertei como os meus alunos o fazem. Isso significa ser sujeito na aprendizagem. Muitas vezes a professora Terezinha (Drª Maria Terezinha de Jesus Gaspar) perguntava: de onde você tirou isso? (referindo-se a algumas informações citadas na pesquisa). Eu explicava, ela continuava: "não, não. Isso é uma inferência sua! Em História você não pode ser contundente assim, você não pode afirmar. Você pode inferir: ao que tudo indica..., isso nos leva a considerar".

Então, o meu caminhar foi leve, sem pisar forte, mas firme, sempre muito atenta e cuidadosa. Um andejar de procura, de estudo, de inquietação, de busca de melhores práticas para a sala de aula, de reflexão sistemática, às vezes só, outras com meu orientador, professor Dr Cristiano Alberto Muniz, com a professora Drª Maria Terezinha Jesus Gaspar, com as professoras parceiras. De fato, aprendi a legitimar a possibilidade dos erros e a valorizar mais a reflexão do que o resultado acabado.

Esse caminhar influenciou positivamente as minhas queridas professoras colaboradoras de pesquisa, que eu chamo de parceiras, pois elas também pesquisaram e estudaram muito. O envolvimento delas e a responsabilidade comigo e com minha pesquisa - que acabou virando 'nossa' - foi maravilhosa.

Ao final da pesquisa, estávamos no início de dezembro, uma delas me disse: "para o ano que vem, pode mandar uma colega sua vir fazer pesquisa na minha sala, eu aprendi tanto, e os alunos também. Mas, tem que ser de outro conteúdo, quero aprender mais coisas". Isso foi maravilhoso! Como é gratificante, apesar de nossos anos de trabalho e de prática, assumir que sempre há o que aprender!

A outra professora relatou que gostaria de trabalhar dessa forma em outras disciplinas. Que havia ficado satisfeita com a produção dos alunos, com o carinho e a responsabilidade de seus alunos com o meu trabalho e que havia descoberto neles outro adjetivo: "parceiros". E que, se soubesse que o resultado seria tão positivo, teria iniciado antes. Em sua sala de aula havia alguns alunos que ela considerava apáticos e que, durante a pesquisa, mostraram-se ansiosos por participarem das atividades.

Alguns chegavam pela manhã ansiosos por saber se haveria aula da pesquisa, outros perguntavam da aula da professora Edilene. Lembrando que a maioria das atividades foi aplicada pelas professoras da turma. Creio que toda aquela satisfação e alegria dos alunos fosse em relação à metodologia que era utilizada a cada encontro, pois, considero cada uma das professoras compromissadas com seus alunos como pessoa e como aprendiz. Parcerias que construíram significados e reconstruíram conceitos entre nós.

Uma dessas professoras estava correndo atrás de bolsas de estudos, para estudante de escolas públicas, que estivessem de acordo com as expectativas de seus alunos. Fez reunião com os pais, explicou a importância de buscar vaga em determinada escola. A outra, em horário particular, atendia alunos que não acreditavam em si mesmos, mas, como ela acreditava, buscava estabelecer uma parceria com a família. Na reunião de responsáveis percebi o quanto ela era estimada e respeitada pelos pais.

Uma coisa particular que as duas professoras tinham era a obrigação em respeitar o acordado com os alunos. Assim, elas ensinavam aos alunos o valor da palavra, do compromisso.

Quero com isso afirmar que não é só a pessoa, mas também a metodologia, as estratégias que foram utilizadas que garantiram bom desempenho das atividades. É claro que poderiam me dizer "mas isso poderia ser feito com outra metodologia, outras estratégia". Sim! Poderia, mas a pesquisa teve por meta verificar se pela história da matemática é possível. Ao concluir esse trabalho de pesquisa, posso dizer que sim, é possível aos alunos do 5º ano aprenderem por meio da história matemática. E podemos dizer mais ainda! É possível a uma educadora, que não é historiadora, utilizar a história da matemática como instrumento didático para ensinar! Certamente, ela vai precisar estudar; pesquisar; talvez mudar a sua prática, a sua forma de mediar e de se relacionar com o currículo escolar, com o aluno, com a escola e com os pais.

Nesse sentido, considero oportuno deixar um incentivo para aqueles que desejam iniciar, uma sequência de atividades aplicadas e analisadas no 5º ano do ensino fundamental, e que podem ser adequadas e trabalhadas em outros anos do ensino fundamental. Um brindar pedagógico à história que nós professoras construímos juntas. Sempre, na interação primeira que era construir ferramentas para desenvolver o saber matemático para o aluno. Esse é o meu achado, minha alegria e a boniteza maior da minha pesquisa.

2 Quem são os alunos na pesquisa

Com base nas informações coletadas, observamos que os alunos tendem a uma simplificação das tarefas em sala de aula, em que as de maior grau de dificuldade são menos trabalhadas. Percebemos, no início do trabalho, que as questões mais desafiadoras eram respondidas por pouco. Então, ao novo ver, a metodologia utilizada favoreceu aos alunos que se percebessem como seres matemáticos. Errar não era mais perda de tempo, pois, alguns pensavam "vai estar errado nem vou perder meu tempo". Fomos mostrando que com o erro ou o acerto percebíamos como eles estavam elaborando seus esquemas para que fosse possível uma intervenção. Então, nesse percurso, o que é errar? Construímos conhecimento com os erros. Aliás, o erro pode ser um dos achados da caminhada.

Ao final realizamos um encontro com os alunos para agradecer a participação e colher mais informações. Um aluno expressou-se assim: "incrível cara, era você entender o que penso pelo o que escrevo!" A linguagem verbal e em forma de desenhos foi tomada como objeto de reflexão, de investigação, de aprendizagem na medida em que pode ser analisada como expressão de práticas, de procedimentos, de pensamentos. No caminho da aprendizagem, os colaboradores, os alunos também descobriram e reconstruíram conhecimento. Entendo que meu processo de pesquisa e de conhecimento passou a fazer parte de uma coletividade. Junto comigo, outras pessoas também faziam seus achados. Um caminho particular, mas construído por todos. A sala de aula.

Outro aluno disse que gostava quando fazíamos perguntas: "você e a Tatiana ficavam perguntando como eu tinha feito, eu não sabia, eu só tinha feito. Depois eu sabia, só não sabia como explicar".

Uma aluna disse: "eu acho chique dizer: podemos concluir que, ...observamos que". Ela se referia às questões que solicitavam a observação, a verbalização do raciocínio e o consequente entendimento, em seguida, a conclusão do fato.

Outra aluna comentou: "a atividade que eu mais gostei foi a primeira, achei incrível, uma figura em cima da outra e isso chamar sobreposição. Gostei também de dizer se era por sobreposição ou visualização".

"Eu gostei de fazer molde". Quando pedimos para ela explicar melhor, ela disse que na folha de exercício, ela não entendia, então, fazia o molde e recortava colava, assim era possível medir a área, comparar.

"A atividade que mais gostei foi do geoplano, onde eu media área e perímetro ao mesmo tempo. Eu confundia uma com outra, na verdade eu nem sabia qual era a diferença". A fala da aula foi exatamente essa, a maturidade na expressão nos surpreendeu, ela identificou, por meio da atividade, qual era sua dificuldade. Essa aluna era a única da turma que havia tido um contato anterior ao nosso trabalho com o conceito de área. Quando perguntamos aos demais alunos da turma se eles confundiam área e perímetro, a pergunta soou estranha a eles. Um respondeu: "área é área e perímetro é perímetro". Isso reforçou as nossas considerações de que se os alunos trabalhem o conceito.

A atividade citada como a que mais gostaram de trabalhar foi a do tangram. Quando perguntamos a uma aluna por que ela havia gostado tanto da atividade, ela respondeu: "Porque sim". Perguntamos o que mais havia lhe chamado atenção naquela atividade. Ela respondeu: "nada, eu só gostei mais". Isso é maravilhoso, ela gostou por gostar, por ter prazer em fazer, em experimentar.

Houve uma atividade em que, ao final, foram construídos cartazes. A professora Vitória decidiu expor os trabalhos dos alunos no corredor da escola, para que todos vissem. Isso gerou um sentimento de orgulho no grupo.

Particularmente, eu me deliciava com suas respostas que traziam frutos do aprendizado e demonstravam que haviam compreendido o processo da procura e dele participavam ativamente e até mesmo com ousadia, pois sabiam exatamente o que queríamos em cada atividade, é como se eles soubessem o que estava sendo observado em cada atividade. Os objetivos iniciais das atividades não foram expressos explicitamente a eles. A delícia estava em perceber que não caminhávamos sós. Os alunos estavam juntos naquela estrada.

Notamos que as informações obtidas pelas falas dos alunos, pelos resultados alcançados e pelos relatos das professoras definiam elos com nossas asserções as quais consideramos, então, terem sido comprovadas. Então, era estimulante perceber os seus achados, os quais, muitas vezes, não eram o que esperávamos, entretanto eram oportunidades geradoras de discussões que contribuíam para o amadurecimento dos alunos inseridos em seus tempos individuais. Quero dizer que os achados eram, às vezes, conflitantes entre estudantes, o que enriquecia o conhecimento não só de quem não havia acertado, mas também daquele que havia encontrado o resultado satisfatório e teve um momento repleto de reflexão e, por que não, de conjecturas.

Entre os aspectos que me surpreenderam no convívio com esses aprendizes de matemática cito: a esperteza; a rebeldia; a disponibilidade; a dor calada de alguns; o refúgio no mundo da escola para esquecer o do “lar”; a necessidade de ser considerada (o) sempre a melhor da turma em tudo; a necessidade de ser a primeira ou primeiro a emitir opinião; o desejo de passar despercebido (a) entre seus pares; a responsabilidade com o meu trabalho, mesmo que não compreendessem que isso significa ter compromisso com o outro; amadurecimento, quando expressavam suas opiniões, apesar de lhes faltar vocabulário; como se sentiam importantes por suas produções estarem sendo gravadas (áudio). Havia alguns que seguravam o gravador junto à boca para ter certeza de que sua fala ficaria registrada, enquanto outros falavam bem baixo para não serem ouvidos.

Portanto, ficou-nos evidente que, no processo de aprendizagem, é importante sermos visualizados em sala de aula, seja em nossos talentos, seja em nossas dificuldades, já que somos atores de um mesmo processo, ainda que instrumentalizados de formas distintas para construir conhecimento ou se sentir um ser matemático. Um novo objeto de conhecimento apresenta resistência e, para conhecê-lo mais de perto, é necessário acionar conhecimentos prévios e lançar mão de algum ou de muito esforço intelectual. Logo, nessa caminhada do conhecimento, não há como chegarmos, ao final do processo, a mesma pessoa da partida, no que tange a dados referenciais, afinal, interferimos no caminho e ele ‘mexeu conosco’, com nossas verdades, com nossas emoções e com nossos conhecimentos. De fato nos encharcamos de dúvidas, respostas e indefinições. Por isso, para compreender “algo”, é necessário refletir, pensar, estabelecer relações e resistir mais do que os próprios objetos de conhecimento. É não se dar por vencido.

Era indescritível a emoção de presenciar o conhecimento nascendo, brotando em um conjunto de ações e falas de muitos sujeitos. Um apresentava uma resposta, o outro completava. Eu ficava maravilhada e entendi realmente o que significa a construção do conceito pelo sujeito. Eu me perguntava se eles entendiam o que havia acabado de acontecer na sala naquele momento. Eles me olhavam como se eu não falasse coisa com coisa. Eu dizia: “vocês acabaram de construir um teorema que foi construído por ‘fulano’. Vocês estão fazendo matemática, vocês são brilhantes matemáticos. Vocês são seres matemáticos”! Eu me maravilhei muitas vezes, nesse sentido. Um dia, um aluno me perguntou: “O que é ser matemático?”. Como se me dissessem, eu sou ser humano. Quando eu expliquei, alguns ficaram garbosos, outros duvidosos: “tá brincando! Eu sou tudo isso”? Notável, entender que comecei uma caminhada, orientada por minhas leituras e discussões com o Cristiano Muniz e com a Maria Terezinha Jesus, trazendo comigo algumas sementes e agora visualizo um campo semeado, produtível e fértil para novos plantios.

Para esses estudantes, o mundo da matemática era platônico, a percepção era de uma realidade matemática independente de nossa prática, de nossa linguagem, de nosso mundo. Foi surpreendente, por meio das atividades, provar a eles que a matemática é para todos, apesar de necessitar de esforço, de dedicação – se errar não pode desistir – que é importante experimentar sempre, que as pessoas as quais elaboraram um teorema, não o fizeram da noite para o dia e, muitas vezes, muitas pessoas pensaram naquele teorema e o melhoraram até ele estar na forma como o conhecemos hoje. A matemática é social, por isso temos maneiras diferentes de matematizar. Como linguagem, acredito que conjugamos o verbo matematizar no plural. Sim, matematizamos nossas ideias, conceitos e falas. No sentido mais exato, problematizamos a matemática e socializamos seus conceitos.

E o aspecto da linguagem verbal? Foi maravilhoso trabalhar a matemática como linguagem procurando orientar os alunos a desenvolverem o discurso argumentativo. Foi um momento incrível quando uma aluna perguntou: “os povos antigos transformavam tudo em quadrado para medir a área, mas os gregos dividiam as figuras em triângulos, dos triângulos em retângulos, os retângulos em quadrados. Então, por que a unidade de medida não é o triângulo? Por que nossa unidade é quadrática”? Eu fiquei em estado de choque, sem saber por onde iniciar. Aliás, eu não tinha a resposta. Ela argumentou mais uma vez: “veja bem, se eu junto triângulos, tenho quadrado; se corto quadrados, posso ter triângulos; então, a unidade de medida deveria ser o triângulo”. Resguardadas algumas questões conceituais que discutimos com o grupo, como a questão dos triângulos formarem quadrados, a argumentação é pertinente aos seus conhecimentos.

Diante da minha alegria e satisfação, respondi: o que sei é que esses povos utilizavam a transformação das figuras em quadrado como um processo para medir as figuras que eles não conheciam a área. Como eles sabiam calcular a área do quadrado, transformavam a figura em quadrado e comparavam suas áreas. Mas por que e quando começaram a utilizar o quadrado como unidade de medida, eu não sei. Mas vou pesquisar na história da matemática. Vocês podem me ajudar? E lancei uma pergunta para eles: Vocês conhecem alguma coisa na natureza que é quadrado? Então, eu vou buscar na história da matemática a resposta para vocês e vocês buscarão na natureza a resposta para a minha pergunta. E assim ficou combinado. Eu poderia ter solicitado a eles a pesquisa na história, mas preferi fazer como se fosse uma parceria e divisão de tarefas.

Se pensamos e queremos, hoje, uma sociedade democrática, vejo e acredito que o caminho seja ajudar os alunos a desenvolverem a capacidade de avaliar, de ser crítico, de ser criativo, não podemos impingir sistematicamente uma matemática obscura, instrumental, decorada.

Eu me empenhei nessa busca. Tenho algumas respostas simples, que estão ancoradas em suposições e por isso precedidas de: ‘pode ser’, ‘preciso estudar mais’. E vocês, que estão lendo essas considerações, podem me ajudar? De fato, peço a companhia de vocês para uma nova caminhada. Uma vez que eu e meus parceiros caminhamos trilhando por lugares que nos ajudariam com nossas asserções e objetivos, no entanto, o caminho sem acordo prévio nos favorecia algumas conclusões, percepções, certezas, e em troca nos pedia respostas trazendo perguntas como: Foram as práticas sociais, políticas, econômicas que influenciaram o uso do quadrado como unidade de medida? Quando e por que o quadrado começou a ser utilizado como unidade de medida? Por que o quadrado como unidade medida, se todas as figuras podem ser transformadas em triângulos e depois em quadrado? Essas atividades podem ser adequadas para o ensino médio? Verificamos que o aluno pode aprender por meio de atividades elaboradas com base na concepção histórica da matemática. Mas e o professor? Como pode ser instrumentalizado para planejar aulas e atividades com esse enfoque? Lembrando que o professor que atua nos anos iniciais do ensino fundamental não é formado em matemática. Não tem, normalmente, na formação inicial, contato com a história da matemática.

Outro aspecto que quero salientar é a curiosidade dos alunos a cada início dos nossos encontros quando entregávamos a cada um o envelope. Como se perguntassem "o que ela trouxe hoje"? Quando abriam e viam as figuras, primeiramente queriam trocar as cores depois da euforia, alguns perguntavam: "e agora? O que vamos fazer com isso"? Era um bom início, era vivo!

Pela fala dos alunos, eu concluo que durante a pesquisa eles foram alegres, participativos, criativos; iniciaram a prática da autonomia, do 'experienciar', da permissão do erro ao fazer matemática. Refletiram sobre o fazer matemático. Retomo Paulo Freire e utilizo suas palavras como sintetizadoras desse processo único de aprendizagem: participação, criação e autonomia, ações que nos dão a chave da experiência e a permissão de se arriscar na alegria de novas aprendizagens.

Acredito que esses alunos tomaram a consciência de que por de trás dos números existe uma linguagem matemática que nos situa em diversos contextos da vida. Infelizmente, o que se vê é que, às vezes, essa linguagem, esse letramento matemático não é suficientemente frisado.

3 Quem foram minhas colaboradoras, parceiras de pesquisa?

Foram pessoas bonitas. Penso que, com os nossos encontros, elas aprenderam um pouco sobre matemática e sobre a história da matemática, bem como a possiblidade de utilizar a história da matemática como instrumento didático. Aprenderam, também, como os alunos manifestam seus saberes, quando estão imersos na metodologia trabalhada, como o conhecimento matemático pode ser construído. Elas consideraram que cada conhecimento tem características e desafios que lhes são inerentes e que a compreensão dos alunos guarda uma estreita relação com sua história e com o conhecimento que é valorizado ou depreciado em seu grupo social, principalmente na família.

Elas foram capazes de perceber o quanto são apreensivas, quando os alunos estão produzindo, e se eles tomassem o caminho errado, imediatamente interviam, orientando-os na direção certa. Não esperavam que eles descobrissem que estavam errados e questionavam até que eles encontrassem a direção adequada. Imediatamente, apontavam “o processo correto” para que os jovens encontrassem a solução, como se aquele caminho fosse único. Ficaram encantadas com as produções dos alunos e vivenciaram comigo a alegria das conquistas feitas pelos alunos ao largo da pesquisa.

Aqui estão pontos que, de uma forma ou de outra, foram expressos por uma delas ou pelas duas em nossas conversas.

A construção do conceito pelo aluno requer a criação de um espaço de ensino e de aprendizagem impregnado pela atividade, pela exploração, pela investigação, mobilizando-o para a ação.

Com elas, aprendi:

O valor do respeito ao que foi acordado com os alunos. No início, elas me afirmaram que eu poderia ir à escola quando fosse melhor para mim, só tínhamos que combinar o dia e horário no encontro de planejamento. Só não poderia ser na sexta-feira, nos dois primeiros tempos, na turma da professora Tatiana, pois aquele horário era reservado ao jogo de xadrez. Na turma da professora Vitória, era às quartas-feiras por haver um curso do qual os alunos gostavam de participar.

Compromisso; essas professoras, assim como eram compromissadas com seu trabalho e com seus alunos, assumiram a pesquisa com maior responsabilidade. A professora Vitória, além do nosso encontro, continuava o estudo. Quando eu chegava, antes de iniciar a aplicação, ela tirava dúvidas comigo sobre alguns conceitos matemáticos. Depois dos nossos estudos, e depois que elas haviam sugerido modificações nas atividades, na forma de encaminhar, eu remetia as atividades por e-mail. Caso eu não enviasse no dia combinado, no outro dia ela já me cobrava.

A professora Tatiana tinha uma preocupação enorme com minha tese. Além dos estudos, ela me convidou para toda segunda-feira à noite ir à sua casa onde poderíamos pensar na elaboração das atividades seguintes. Para me ajudar leu algumas teses que falavam a respeito do meu objeto de pesquisa. Nos estudos prévios, ajudou-me a observar como o tema era tratado em alguns livros didáticos do 5º ano. Ela conseguiu os livros de várias editoras. E sempre me dizia: “não quero que nada atrapalhe a sua pesquisa, se você precisar de mais tempo, faço questão de que você aplique todas as atividades previstas. Os meus alunos são privilegiados com essa pesquisa".

Solidariedade; na turma da professora Tatiana, os dias de encontro eram variados, mas sempre nos dois últimos horários. Eu chegava no horário do intervalo e eles estavam lanchando. A Tatiana não lanchava a merenda dos alunos, pois é institucionalizado pelo Programa Nacional de Alimentação Escolar – PNAE que alimentação é oferecida somente aos alunos. Ela respeita essa orientação do PNAE e levava sempre a sua fruta para participar com os alunos do momento da merenda, a fim de incentivar aqueles que dispensavam a alimentação escolar, a comerem o que tinham trazido de casa: biscoitos, doces e refrigerante. Explicava que a fruta, assim com a alimentação escolar, era boa para saúde; que o cardápio era reparado por uma nutricionista, então, continha os ingredientes necessários para uma alimentação saudável e de qualidade. Quando eu chegava, ela tinha uma fruta lavada e envolta em um guardanapo para mim. E me dizia: "eu sei que você está sempre correndo e precisa se alimentar bem; além disso, nós não vamos comer e deixar você ficar olhando". Até que eu aprendi a levar minha fruta.

A professora Vitória preparou uma caixa com brinquedos para eu levar para a comunidade na qual eu trabalhava e ensinou aos seus alunos que sempre temos algo para doar, para fazer alguém feliz.

Pela atitude dessas duas professoras, pela seriedade e compromisso com seus alunos eu considero que o trabalho apresentou resultados satisfatórios não pelos fatos de termos uma pesquisadora em sala, que poderia ser considerada uma novidade motivadora aos alunos. Os dois ambientes de sala de aula antes da pesquisadora já eram acolhedores, de respeito, de atenção, de comprometimento, entre outras qualidades. O que mudou no ambiente, foi a metodologia que abarcava a investigação pelo aluno, a criatividade, a produção, pois as atividades concebidas nas concepções históricas da matemática gerou um cenário de desafio para os alunos que tiveram a oportunidade de refletir, de inventar argumentos, de discutir resultados, de expressar suas conclusões, dando um caráter mais construtivo e significativo ao aprendizado.

Esse caráter presente na organização e no desenvolvimento da sequência de atividades contribuiu para melhor desempenho dos professores e dos alunos na construção do conceito de medida de área. Nesse sentido, é conveniente traçar as perspectivas em relação à utilização da história da matemática como elemento potencializador da aprendizagem da matemática. Ela foi a nossa referência para elaboração das atividades. Destacamos que o desafio proposto aos alunos e o caráter significativo do processo só aconteceram e se constituíram significativos porque foram conduzidos e gestados numa atmosfera de respeito, solidariedade e comprometimento.

4 Outras aprendizagens

Na sequência de atividades por nós proposta, o ato de aprender tornou-se dinâmico e significativo ao aluno quando ele percebeu que seus erros, suas concepções e suas representações eram tidos como relevantes, colocados em discussão na turma; o respeito à especificidade de trabalho cognitivo dos alunos implicou em mudanças na perspectiva epistemológica de suas professoras.

O processo de estudar e compreender as concepções históricas do meu objeto de pesquisa foi repleto de idas e vindas e de muitas aprendizagens. Tomei alguns caminhos tortuosos até chegar aos conhecimentos que buscava. Contudo, avalio que esse percurso me orientou a enxergar novas possibilidades.

Meu orientador foi essencial, considero o termo perfeito; no grego, *orientador* significa aconselhar e pensar na raiz Indo-europeia. O professor Dr Cristiano Muniz aconselhou o meu pensar. Fez mais que isso! Disse-me: está na hora de parar de ler e de estudar e começar a escrever. Eu tinha dois anos de leituras intensas e estava vivendo a história da matemática! Participava de todos os encontros, seminários, congressos possíveis. Um dia ele, me disse: “precisamos de ajuda e quem pode nos ajudar é a Terezinha Gaspar, conhece?”.

Conversei com ela que marcou um primeiro encontro só comigo. Em seguida, marcou um segundo encontro comigo e com o Cristiano (professor Dr Cristiano Alberto Muniz). Foi uma noite de muito aprendizado para mim. Nesse encontro, além de aprender muito sobre a minha pesquisa, eu aprendi muitos sentimentos, os mais fortes foram humildade, sabedoria, disponibilidade e a paixão pelo que se faz. Reconheci, naquela conversa, a importância de alunos e de nós, professores, termos espaços para falar do modo como pensamos ao resolvermos uma situação matemática e de percebermos a relação da matemática com a vida. Sim, essa foi uma conversa entendida, porque foi pessoal e partilhada.

A viagem por esses caminhos foi longa - quatro anos. As vicissitudes de tal viagem ofereceram muitas dificuldades acadêmicas e pessoais, mas eu tinha alguém para me orientar e me encorajar com sabedoria, conhecimento, inteligência, carinho e firmeza, o que me permitiu um amadurecimento indispensável para essa viagem.

Nesse amadurecimento, eu compreendi que eu não encontraria obras específicas que tratassem do meu objeto no sentido da busca, afinal, eu estava trabalhando com a história e eu teria que ir juntando os fatos, em uma e outra civilização, em uma época e em outra. Às vezes lia um livro todo para encontrar uma informação, preciosa que era tão pequena, mas que já sinalizava outras riquezas, outras referências.

Hoje, enxergo com clareza o caminho percorrido e vejo também que não há mapas, bússolas ou, falando contemporaneamente, GPS que possa nos indicar um caminho único. O caminho é pessoal, único porque ele está encharcado de nossos valores, experiências e escolhas. A caminhada que fiz, nessa experiência de professora/pesquisadora, revela meus ideais, minhas experiências de sala de aula e, principalmente, o entendimento matemático que carrego dentro de mim. Nessa descoberta, alegro-me com a boniteza do conhecimento e com os diferentes caminhos que ele nos apresenta. Ainda estou nesta caminhada e meu pedido a Deus, meu Senhor de todas as coisas, é que eu, Professora, jamais perca o encanto que o conhecimento traz e que possa trazer sempre comigo o sorriso largo dos jovens colaboradores dessa pesquisa, esses fazem parte dos meus caminhos de aprendizagem e de conhecimento.

Inicialmente, o meu trabalho era sobre medidas, mas, ao fazer o recorte de pesquisa, a ideia era trabalhar com medida da área. Mas, em que consiste a medida? Então, eu e as professoras aprendemos que é difícil separar a medida da geometria, porque os dois temas estão interligados. As atividades apontaram uma estreita relação entre os dois domínios de conhecimento.

As professoras, à medida que desenvolvíamos a nossas atividades, iam comentando os conceitos adquiridos da geometria e de outros domínios. E que quando não eram tratados diretamente, abriam questionamentos para introdução de outros conceitos que eram tratados nas aulas de matemática que não eram as da pesquisa. Um dia me perguntei: o meu trabalho, afinal, é sobre medida? Sua roupagem é geométrica. Então, compreendi: a geometria diz respeito ao estudo das características e propriedades das formas e figuras, e, se essas características forem mensuráveis, então estaremos no domínio da medida, isto é, não podemos olhar a medida sem abordagem intimamente relacionada com a geometria.

Com os estudos das teorias de Duval e Vergnaud, aprendi a ficar alerta ao movimento do pensamento do aluno e do meu. Também a rever meus pressupostos como educadora e suspender alguns. Aprendi que é mais fácil analisar a construção de um conceito pelo aluno, quando ele erra, porque é possível identificar as diferentes interpretações que ele faz do objeto e as confusões com os símbolos análogos de um texto escrito em linguagem matemática. Quando ele aplica a regra corretamente, muitas vezes não modifica nada, então não há uma ação por meio da qual possamos perceber seus registros na construção do conceito.

Em virtude do que foi exposto e, por todas as análises apresentadas nas atividades, no Capítulo III e nas nossas considerações finais, julgamos que nossos objetivos foram alcançados e que nossas asserções se confirmaram.

Todavia, não negamos ou deixamos de considerar outra forma de abordar esse objeto matemático no contexto do ensino e da aprendizagem, ao contrário, procuramos oferecer uma fonte que permita problematizar a ação pedagógica, no sentido de gerar conhecimento do recurso cognitivo e interpretativo favoráveis à apropriação significativa dos conceitos matemáticos, já que entendemos que os problemas interessantes não estão presos às folhas dos livros, mas sim na atividade matemática que se desenrola na vida e na prática social que todos os dias vivenciamos com nossos problemas reais.

Reiteramos, mais uma vez, que é esse o caminho da história da matemática que queremos percorrer. Trazer uma matemática viva. Viva porque explora e investiga o mundo real no tempo presente.

Por fim, esperamos que as reflexões provenientes desta investigação possam, ainda que modestamente, representar uma contribuição na compreensão acerca das reais contribuições que a história da matemática possa trazer ao processo de ensino e a aprendizagem da Matemática e que, com certeza, repercutirão em nossa prática pedagógica futura, especialmente no que diz respeito à abordagem do conceito de área. Acreditamos que essa experiência também foi esclarecedora e contribuiu para a prática pedagógica das professoras colaboradoras. Esperamos, ainda, que os resultados deste trabalho possam trazer aportes ao campo de pesquisa das relações entre a História da Matemática e o ensino e a aprendizagem da Matemática e suscitar, novas questões a respeito desse tema.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. 1. ed. Curitiba: UFPR, 2007.

AMMA, T. A. S. *Geometry in Ancient and Medieval India*. 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979.

BARTHES, R. Introdução à análise estrutural da narrativa. In: BARTHES, R. et.al. *Análise estrutural da narrativa*. Rio de Janeiro: Vozes, 1976.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática*: Concepções & Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 129-136.

BENJAMIM, W. *Magia e técnica, arte política*: ensaios sobre literatura e História da cultura. 12. reimp, 7. ed. São Paulo: Brasiliense, 1994.

BIANCHI, M. I. Z. *Uma reflexão sobre a presença da história da matemática nos livros didáticos*. 2006. 103 f. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF – Terceiro e quarto ciclos, 1998.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 1995.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 1997.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 1999.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 2001.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 2003.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 2005.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 2007.

BRASIL. Quadro geral de unidades de medida. Resolução do *CONMETRO* n.12/1988. 4. INMETRO. ed. Brasília: SENAI/DN, 2007b.

BRASIL. Relatório Sistema de avaliação do ensino básico. Matemática**.** Brasília: INEP/ MEC, 2009.

BROLEZZI, A. C. *A Arte de contar*: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática. 1991. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 1991.

BYERS, V. Porque estudar a História da Matemática. *International Journal Mathematics Education, Science and Technologie*, v.13, n.1, p. 59-66, 1992.

CREASE, R.P. *A medida do mundo*: a busca por um sistema universal de pesos e medidas. Tradução de George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

DELORS, J. (org.). *Educação*: um tesouro a descobrir – Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI. São Paulo: Cortez, 1998.

DISTRITO FEDERAL. Currículo Básico para a Educação Pública do Distrito Federal. Brasília: SEED, 2010a.

DISTRITO FEDERAL. Diretrizes curriculares da rede pública de educação básica do Distrito Federal. Brasília: SEED, 2010b.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics* 20: 387-424, 1989. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1989.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM V.* 6, p.132-158, 1992.

DUVAL R. Approche cognitive des problèmes de géométrie, Annales de Didactiques et de sciences cognitives, *IREM de Strarsbourg*, v.1, p.57-74, 1988

______. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg, vol. 5, p. 37-65. 1993.

______. Les différents fonctionnememts d'une figure dans une demarche géométrique Irem de Strasbourg, n. 17, p.121-137, 1994.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

______. *Semiósis e pensamento humano*: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

______. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução - Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

______. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência**.** Tradução de Méricles T. Moretti. *REVEMAT*, Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. *History in mathematics education*: the ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 6, 2000.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONTANA, R. e CRUZ, N. *Psicologia e trabalho pedagógico*. São Paulo: Atual, 1997.

FLORIANI, J. V. *Professor e pesquisador:* exemplificação apoiada na matemática. 2. ed. Blumenau: FURB, 2000.

GADOTTI, M. *Perspectivas atuais da educação*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

GALVÃO, C. Narrativas em educação. *Ciências & Educação*. Bauru, v. 11, n. 2, p. 327-345, 2005.

GASPAR, M. T. J. *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores*. 2003. 307 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

______. Um estudo sobre áreas em um curso de formação de professores tomando como ponto de partida a história da matemática indiana no período dos Sulbasutras. *RBHM*, v. 4, n.8, p. 189 - 214, 2004.

GILLINGS, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publications Inc., 1972.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. *Matemática emocional*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

GONZÁLEZ REY, F. *O social na Psicologia e a Psicologia Social:* a emergência do sujeito. Tradução de Vera Lúcia Mello Joscelyne. Petrópolis, RJ: Vozes, 2004.

______. O sujeito que aprende: desafios do desenvolvimento do tema da aprendizagem na psicologia e na prática pedagógica. In: TACCA, M. C. (Org.) *Aprendizagem e trabalho pedagógico*. Campinas: Alínea, 2006.

______. *O social na psicologia e a psicologia no social:* a emergência do sujeito. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2009.

GRATTAN-GUINNESS, I. Not from nowhere: history and philosophy behind mathematical education. *lnternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 4, p. 421-453, 1973.

GUEDJ, D. *O teorema do papagaio.* 2. ed. São Paulo: Cia das Letras, 1999.

HERÔDOTOS. *História.* Tradução de Mario da Gama Kury. 2a. ed. Brasília: Universidade de Brasília, 1988.

HOGBEN, L. *Maravilhas da matemática*: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. 4. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1958.

HØYRUP, J. *Lengths, widths, surfaces:* a portrait of old babylonian algebra and its kin. New York: Springer, 2002.

IMENES, L. M. P. *Um estudo sobre o fracasso do ensino da aprendizagem da matemática*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática– UNESP. Rio Claro, 1989.

JOSEPH, G. G. *The Crest of the Peacock:* non-european roots of mathematics. 2. ed. USA: Princeton University Press, 2000.

KATZ, V. J. *A history of mathematics:* an introduction. 2. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc, 1998.

KUHN, T. S. *A estrutura das revoluções científicas.* Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. 9. ed. São Paulo: Perspectiva, 2006.

LEITE, M. S. *Recontextualização e transposição didática*: introdução à leitura de Basil Bernstein e Yves Chevallard. Araraquara: Junqueira e Marin, 2007.

LIMA, E. L. Como calcular área de um polígono se você sabe contar. In: ____. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro: IMPA/ VITAE, 1991. p. 101-114.

______. Qual é mesmo a definição de polígono convexo. *Revista do professor de Matemática.* Rio de Janeiro: SBM/OBMEB, n.69, p. 129-134, ago. 2010.

LOPES, A. R. L. V.; BORBA, M. C. Tendências em educação matemática. *Revista Roteiro*, Chapecó, n. 32, p. 49-61, jul./dez., 1994.

LOPES, C. E.; NACARATO, A. M. *Educação Matemática, leitura e escrita:* armadilha utopias e realidades. Campinas: Mercado das Letras, 2009.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: _____. *Educação matemática:* uma introdução. 2 ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197-208.

MACHADO, N. J. *Conhecimento e valor.* São Paulo: Moderna, 2004.

MARTZLOFF, J. *A History of Chinese Mathematics.* Berlim: Springer-Verlag, 1997.

MENDES, I. A. *O uso da história no ensino da matemática*: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. *A História como um agente de cognição na Educação Matemática.* Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES I. A. et al. *História da matemática em atividades didáticas***.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MENDES, I. A. *Matemática e investigação em sala de aula:* tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009a.

______. *Investigação histórica no ensino de matemática.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009b.

MIGUEL, A. *Três Estudos sobre história e educação matemática.* 1993. 257 f. Tese (Doutorado em Educação matemática) Programa de pós-graduação em Educação Matemática - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

______. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké,* v.5, n. 8, jul/dez. 1997. P. 73-105.

______. Contribuição Crítica à discussão acerca da participação da história e da epistemologia da matemática na investigação em educação matemática. *Horizontes*, Bragança Paulista, v.22, n.1, p. 71-107, jan./jun. 2004.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na educação matemática:* propostas e desafios. 1 ed., 1 reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN J. M.; MASETTO, M.; BEHRENS, Marilda. *Novas tecnologias e mediação pedagógica***.** 13. ed. São Paulo: Papirus, 2007.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Revista Investigações em Ensino de Ciências,* v.7, n.1, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>. Acesso em: 08 out 2012.

MORETTO, V. P. *Construtivismo*: a produção do conhecimento. Rio de Janeiro: DP&A, 1999.

MUNIZ, C. A. Educação e linguagem matemática. In: ______. *Organização do trabalho pedagógico:* educação e linguagem matemática e educação ciências físicas e biológicas. Curso de pedagogia para professores em exercício no início de escolarização. (PIE). Módulo I, v. 2. Brasília: FE/SEDF, 2001.

MUNIZ, C. A.; BATISTA, C. O.; SILVA, E. B. Educação e Linguagem matemática. In: *Curso de pedagogia para professores em exercício no início de escolarização (PIE)*- módulo III - (Decimais e Medidas). Brasília: UnB, 2002.

MUNIZ, C. A. Transposição didática: o professor de matemática pesquisador. *Textos para estudo*. Brasília: Gestar – MEC, 2003.

______. Mediação e conhecimento matemático. In: TACA, M.C.V.R. (Org). *Aprendizagem e trabalho pedagógico*. Campinas: Alínea, 2006.

______. Diversidade dos conceitos das operações e suas implicações nas resoluções de classes de situações. In: GUIMARÃES, G; B.R. (Org). *Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização*. Recife: SBEM, 2008.

NEUGEBAUER, O. *The Exact Sciences in Antiquity***.** 2. ed. New York: Dover Publications Inc., 1969.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. *Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática.* Lisboa, 1996. Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.PDF. Acesso em: 09/10 2011.

PAIS, L. C. *Didática da matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

______. Transposição didática. In: ALCÂNTARA, S. D. *et al*. *Educação matemática:* uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p.11-48.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. 15. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2000.

PENNICK, N. *Geometria sagrada:* simbolismo e intenções nas estruturas religiosas. 9. ed. São Paulo: pensamento, 1980.

PIAGET, J. *A construção do real na criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

______. *Seis estudos de psicologia.* 24. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2005.

PIAGET, J; GARCIA, R. *Psicogênese e história das ciências.* Tradução de Giselle Unti. Petrópolis: Vozes, 2011.

PLATÃO, *Diálogos*: Mênon, Banquete, Fedro. Tradução de Jorge Paleikat. Rio de Janeiro: Ediouro, 1999.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PRICKEN, Veronica Larrat. *Dinâmica das representações sociais da matemática reveladas na práxis de professores dos anos iniciais*. 2009. 230 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

ROBINS, G. e SHUTE, C. *The rhind mathematical papyrus*: an ancient Egyptian text. London: British Museum Press, 1987.

ROQUE, T. *História da matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SARASVATI, S.S. P. *Geometry in ancient India.* Índia: Govindran Hasanand, 1987.

SBEM. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: <www.sbem.com.br> Acessado em 10 ago2011.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry. *Archieve for History of Exact Sciences*, p. 488- 527, 1963.

SILVA, I. da. *História dos pesos e medida*s. 2. ed. São Carlos: UFSCar, 2010.

SKØVSMOSE, O. *Cenários para investigação*. Rio Claro, 2000. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf> Acesso em: 18 set 2011.

______. Preocupações de uma educação matemática crítica. In: FÁVERO, M. H.; CUNHA, C. da. *Psicologia do conhecimento:* o diálogo entre as ciências e a cidadania. Brasília: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, Liber Livro Editora, 2009.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. *History in Mathematics Education:* The ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 6, p. 201-240, 2000.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 1990, vol 10, n°2.3, p. 133-170. Pensée Sauvage: Grenoble, França.

______. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. p. 1-26. 1993.

______. A teoria dos Campos Conceituais. In: BRUNNER, J. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

______. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior*, n. 17, v. 2, p. 167-181. 1998

______. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. *Por que ainda há quem não aprende?:* a teoria. Petrópolis: Vozes, 2003

______. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VIANNA, C. R. Matemática e história: Algumas relações e implicações pedagógicas. 1995. 228 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Metodologia do Ensino e Educação Comparada da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

______. *História da matemática, educação matemática:* entre o nada e o tudo. *Bolema*, Rio Claro, v. 23, n. 35B, p. 497-514, *2010.*

VYGOTSKI, L. S. *Pensamento e linguagem.* Traduzido por Jeferson Luiz Camargo. Revisado por José Cipolla Neto. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

______. *O Desenvolvimento Psicológico na Infância. Traduzido* por Cláudia Berliner. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. *Matemática para aprender a pensar o papel das crenças na resolução de problemas.* Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artemed, 2006.

WILMER, C. B. e PEREIRA, M. R.F. *Geometria para desenho industrial***.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

YAN, L.; SHÍRAN, D. *Chinese mathematics*: a concise history. Tradução John N. Crosseley e Anthony W.C.Lun. New York: Oxford Press, 1987.

ZUIM, E. S. L. *Por uma nova arithmetica*: o sistema métrico decimal como um saber escolar em Portugal e no Brasil oitocentista. 2007. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2007.

ANEXO - Diálogo de Mênon

Devido à riqueza didática do Diálogo de Mênon, transcrevemos, neste espaço, parte do mesmo, que fundamentou duas de nossas atividades, a sete e oito. Esse diálogo foi escrito por Platão. Há indícios de que possa ter sido elaborado por volta do ano 385 a. C, a tradução elaborada por Jorge Paleikat foi a qual que tivemos acesso. (1999, p. 56-60).

Mênon: - Seja, Sócrates! Entretanto, o que é que te leva a dizer que nada aprendemos e que o que chamamos de saber nada mais é do que recordação? Poderias provar-me isso?

Sócrates: - Não faz muito, excelente Mênon, que te chamei de habilidoso! Perguntas se te posso ensinar, quando agora mesmo afirmei claramente que não há ensino, mas apenas reminiscência; estás procurando precipitar-me em contradição comigo mesmo!

Mênon: - Não, por Zeus, caro Sócrates! Não foi com essa intenção que fiz a pergunta, mas apenas levado pelo hábito. Todavia, se te é possível mostrar-me de qualquer modo que as coisas de fato se passam assim como o dizes, demonstra-no, pois esse é o meu desejo!

Sócrates: - Não é uma tarefa fácil o que pedes; fá-la-ei, entretanto, de boa vontade, por se tratar de ti. Chama a qualquer um dos escravos que te acompanham qualquer um que queiras, a fim de que por meio dele eu possa fazer a demonstração que pedes.

Mênon: - Com prazer. (Dirigindo-se a um de seus escravos moços): Aproxima-te!

Sócrates: - Ele é grego e fala grego?

Mênon: - Sim; nasceu em minha casa.

Sócrates: - Então, caro Mênon, presta bem atenção, e examina com cuidado se o que ele faz com meu auxílio é recordar-se ou aprender.

Mênon: - Observarei com cuidado.

Sócrates: - (Voltando-se para o escravo ao mesmo tempo em que traça no solo as figuras necessárias à sua demonstração): Dize-me, rapaz: sabes o que é um quadrado?

Escravo: - Sei.

Sócrates: - Não é uma figura, como esta, de quatro lados iguais?

Escravo: - É.

Sócrates: - E estas linhas, que cortam o quadrado pelo meio, não são também iguais?

Escravo: - São.

Sócrates: - Esta figura poderia ser maior ou menor, não poderia?

Escravo: - Poderia.

Sócrates: - Se, pois, este lado mede dois pés e este também dois pés, quantos pés terá a superfície deste quadrado? Repara bem: se isto for igual a dois pés e isso igual a um pé, a superfície não terá de ser o resultado de uma vez dois pés?

Escravo: - Terá.

Sócrates: - Mas este lado mede também dois pés; portanto a superfície não é igual a duas vezes dois pés?

Escravo: - É.

Sócrates: - A superfície, por conseguinte mede duas vezes dois pés?

Escravo: - Mede.

Sócrates: - E quanto iguala duas vezes dois pés? Conta e dize!

Escravo: - Quatro, Sócrates.

Sócrates: - E não nos seria possível desenhar aqui uma outra figura, com área dupla e de lados iguais como esta?

Escravo: - Sim, seria.

Sócrates: - E quantos pés, então, mediria a sua superfície?

Escravo: - Oito.

Sócrates: - Bem; experimenta agora responder ao seguinte: que comprimento terá cada lado da nova figura? Repara: o lado deste mede dois pés, quanto medirá, então, cada lado do quadrado de área dupla?

Escravo: - É claro que mede o dobro daquele.

Sócrates: - (A Mênon): Vês, caro Mênon, que nada ensino, e que nada mais faço do que interrogá-lo? Este rapaz, agora pensa que sabe quanto mede a linha lateral que formará o quadrado de oito pés. És da minha opinião?

Mênon: - Sou.

Sócrates: - Mas crês que ele de fato saiba?

Mênon: - Não, não sabe.

Sócrates: - Mas ele está convencido de que o quadrado de área dupla tem também o lado duplo, não é?

Mênon: - Está, sem dúvida.

Sócrates: - Observa como ele irá recordando pouco a pouco, de maneira exata. Responde-me (disse voltando-se para o escravo): tu dizes que uma linha dupla dá origem a uma superfície duas vezes maior? Compreende-me bem: não falo de uma superfície longa de um lado e curta de outro. O que procuro é uma superfície como esta, igual em todos os sentidos, mas que possua uma extensão dupla, ou mais exatamente, de oito pés. Repara agora se ela resultará do desdobramento da linha.

Escravo: - Creio que sim.

Sócrates: - Será, pois, sobre esta linha que se construirá a superfície de oito pés, se traçarmos quatro linhas semelhantes?

Escravo: - Sim.

Sócrates: - Desenhemos então os quatro lados. Esta é a superfície de oito pés?

Escravo: - É.

Sócrates: - E agora? Não se encontram, porventura, dentro dela estas quatro superfícies, das quais cada uma mede quatro pés?

Escravo: - É verdade!...

Sócrates: - Mas então? Qual é esta área? Não é o quádruplo?

Escravo: - Necessariamente.

Sócrates: - O duplo e o quádruplo são a mesma coisa?

Escravo: - Nunca, por Zeus!

Sócrates: - E que são, então?

Escravo: - Duplo significa duas vezes; e quádruplo, quatro vezes.

Sócrates: - Por conseguinte, esta linha é o lado de um quadrado cuja área mede quatro vezes a área do primeiro?

Escravo: - Sem dúvida.

Sócrates: - E quatro vezes quatro dá dezesseis, não é?

Escravo: - Exatamente.

Sócrates: - Mas, então, qual é o lado do quadrado da área dupla? Este lado dá o quádruplo, não dá?

Escravo: - Sim.

Sócrates: - A superfície de quatro pés quadrados tem lados de dois pés?

Escravo: - Tem.

Sócrates: - O quadrado de oito pés quadrados é o dobro do quadrado de quatro e a metade do quadrado de dezesseis pés, não é?

Escravo: - É.

Sócrates: - E seu lado, então, não será maior do que o lado de um e menor do que o de outro desses dois quadrados?

Escravo: - Será.

Sócrates: - Bem; responde-me: este lado mede dois pés e este quatro?

Escravo: - Sim.

Sócrates: - Logo, o lado da superfície de oito pés quadrados terá mais do que dois e menos do que quatro pés.

Escravo: - Tem.

Sócrates: - Experimenta, então, responda-me: qual é o comprimento desse lado?

Escravo: - Três pés.

Sócrates: - Pois bem: se deve medir três pés, deveremos acrescentar a essa linha a metade. Não temos três agora? Dois pés aqui, e mais um aqui. E o mesmo faremos neste lado. Vê!, agora temos o quadrado de que falaste.

Escravo: - Ele mesmo.

Sócrates: - Repara, entretanto: medindo este lado três pés e o outro também pés, não se segue que a área deve ser três pés vezes três pés?

Escravo: - Assim penso.

Sócrates: - E quanto é três vezes três?

Escravo: - Nove.

Sócrates: - E quantos pés deveria medir a área dupla?

Escravo: - Oito.

Sócrates: - Logo a linha de três pés não é o lado do quadrado de oito pés, não é?

Escravo: - Não, não pode ser.

Sócrates: - E então? Afinal, qual é o lado do quadrado sobre que estamos discutindo? Vê se podes responder a isso de modo correto! Se não queres fazê-lo por meio de contas, traça pelo menos na areia a sua linha.

Escravo: - Mas, por Zeus, Sócrates, não sei!

Sócrates: - (Voltando-se para Mênon): Reparaste caro Mênon, os progressos que a sua recordação fez? Ele de fato nem sabia e nem sabe qual é o comprimento do lado de um quadrado de oito pés quadrados; entretanto, no início da palestra, acreditava saber, e tratou de responder categoricamente, como se o soubesse; mas agora está em dúvida, e tem apenas a convicção de que não o sabe!

Mênon: - Tens razão.

Sócrates: - E agora não se encontra ele, não obstante, em melhores condições relativamente ao assunto?

Mênon: - Sem dúvida!

Sócrates: - Despertando-lhe dúvidas e paralisando-o, acaso lhe causamos algum prejuízo?

Mênon: - De nenhum modo!

Sócrates: - Sim, parece-me que fizemos uma coisa que o ajudará a descobrir a verdade! Agora ele sentirá prazer em estudar este assunto que não conhece, ao passo que há pouco tal não faria, pois estava firmemente convencido de que tinha toda razão de dizer e repetir diante de todos que a área dupla deve ter o lado duplo!

Mênon: - É isso mesmo.

Sócrates: - Crês que anteriormente a isto ele procurou estudar e descobrir o que não sabia, embora pensasse que o sabia? Agora, porém, está em dúvida, sabe que não sabe e deseja muito saber!

Mênon: - Com efeito.

Sócrates: - Diremos, então, que lhe foi vantajosa a paralisação?

Mênon: - Como não!

Sócrates: - Examina, agora, o que em seguida a estas dúvidas ele irá descobrir, procurando comigo. Só lhe farei perguntas; não lhe ensinarei nada! Observa bem se o que faço é ensinar e transmitir conhecimentos, ou apenas perguntar-lhe o que sabe. (E, ao escravo): Responde-me: não é esta a figura de nosso quadrado cuja área mede quatro pés quadrados?

Escravo: - É.

Sócrates: - A este quadrado não poderemos acrescentar este outro, igual?

Escravo: - Podemos.

Sócrates: - E este terceiro, igual aos dois?

Escravo: - Podemos.

Sócrates: - E não poderemos preencher o ângulo com outro quadrado, igual a estes três primeiros?

Escravo: - Podemos.

Sócrates: - E não temos agora quatro áreas iguais?

Escravo: - Temos.

Sócrates: - Que múltiplo do primeiro quadrado é a grande figura inteira?

Escravo: - O quádruplo.

Sócrates: - E devíamos obter o dobro, recordaste?

Escravo: - Sim.

Sócrates: - E esta linha traçada de um vértice a outro da cada um dos quadrados interiores não divide ao meio a área de cada um deles?

Escravo: - Divide.

Sócrates: - E não temos assim quatro linhas que constituem uma figura interior?

Escravo: - Exatamente.

Sócrates: - Repara, agora: qual é a área desta figura?

Escravo: - Não sei.

Sócrates: - Vê: dissemos que cada linha nestes quatro quadrados dividia cada um pela metade, não dissemos?

Escravo: - Sim, dissemos.

Sócrates: - Bem; então quantas metades temos aqui?

Escravo: - Quatro.

Sócrates: - E aqui?

Escravo: - Duas.

Sócrates: - E em que relação aquelas quatro estão para estas duas?

Escravo: - O dobro.

Sócrates: - Logo, quantos pés quadrados mede esta superfície?

Escravo: - Oito.

Sócrates: - E qual é seu lado?

Escravo: - Esta linha.

Sócrates: - A linha traçada no quadrado de quatro pés quadrados, de um vértice a outro?

Escravo: - Sim.

Sócrates: - Os sofistas dão a esta linha o nome de diagonal e, por isso, usando esse nome, podemos dizer que a diagonal é o lado de um quadrado de área dupla, exatamente como tu, ó escravo de Mênon, o afirmaste.

Escravo: - Exatamente, Sócrates!