APLICAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO BERNOULLI-TIMOSHENKO E DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS E ARCOS

GABRIEL COSTA DE OLIVEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

APLICAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO BERNOULLI-TIMOSHENKO E DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS E ARCOS

GABRIEL COSTA DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

BRASÍLIA/DF: AGOSTO - 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

APLICAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO BERNOULLI-TIMOSHENKO E DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS E ARCOS

GABRIEL COSTA DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

APROVADO POR:

___

Prof. William Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)
(Orientador)

___

Prof. Artur Antônio de Almeida Portela, PhD (ENC-UnB)
(Examinador Interno)

___

Prof. Éder Lima de Albuquerque, Dsc. (ENC-UnB)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 30 DE AGOSTO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA, GABRIEL COSTA DE
Aplicação do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos [Distrito Federal] 2016.
xxiii, 135p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2016).
Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1.Formulação co-rotacional	2.Elemento de viga Bernoulli/Timoshenko
3.Modos de deformação naturais	4.Método dos Elementos Finitos
5.Não-linearidade geométrica	6.Método de comprimento de arco
I.ENC/FT/UnB	II.Título (Mestre)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, G. C., (2016). Aplicação do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 135p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gabriel Costa de Oliveira.
TÍTULO: Aplicação do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos.

GRAU: Mestre ANO: 2016

Gabriel Costa de Oliveira
SQSW 302 bloco G - Setor Sudoeste
70.673-207 Brasília – DF – Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo apoio fundamental. Aos meus pais, Whigney White de Oliveira e Marília Maciel Costa, por me incentivarem de maneira constante a estudar e por me apoiarem incondicionalmente em todas as etapas da minha vida, tanto em questões acadêmicas quanto na minha vida pessoal. Agradeço principalmente por serem pais que servem como exemplo. Tenho muito orgulho de ser filho de vocês. Aos meus dois irmãos, Túlio e Leonardo, agradeço pela convivência diária e pelos ensinamentos que só uma vida inteira ao lado de vocês pode me proporcionar. Agradeço também à minha avó, Maria da Conceição.

Ao professor William Taylor, agradeço pelos ensinamentos, pela orientação e pela solicitude no desenvolvimento desta pesquisa. Por me obrigar a tirar o melhor de mim, fazendo com que aprimorasse meus conhecimentos. Agradeço também aos alunos de doutorado Sebastião Simão e Maria Paz, sempre solícitos.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil e, principalmente, ao professor Raul Durand, que, além de ser um excelente professor, foi um excepcional coordenador de curso, não medindo esforços para a tarefa à qual foi submetido.

Agradeço aos professores Raul Durand e Francisco Evangelista por ministrarem a matéria Método dos Elementos Finitos, matéria de grande valia no desenvolvimento da presente pesquisa. Agradeço, ainda, ao professor Luciano Bezerra, a quem admiro pela garra e pelo desejo de transmitir seus conhecimentos aos alunos.

Agradeço aos meus amigos do curso de graduação e aos meus amigos de longa data: André Borges, Guilherme Rocha, Ian Ulian, Matheus Zegatti, Pedro Copatt, Pedro Dantas, Ramon Vernay, Rodrigo Bento, Victor Hugo, ... Agradeço, ainda, aos companheiros de estudos do programa: Tiago Silva, Thalles Morais, Matheus Leoni, Aurélio Caetano, Renato Abreu, Gleidistone Junior, Wellington Vidal, Eduardo Pains, José Fabiano, Adeilson, Yadian, Jéssica Borges, Wilson, Sirlane Gomes ...

Por fim, agradeço à minha namorada, Ana Paula, pela paciência durante esses dois anos de mestrado, pelo amor, pelo carinho e pelo companheirismo que me foram dados durante todo esse período. E por ser essa pessoa tão especial na minha vida.

RESUMO

APLICAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO BERNOULLI-TIMOSHENKO E DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS E ARCOS

Autor: Gabriel Costa de Oliveira
Orientador: William Taylor Matias Silva
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
Brasília, agosto de 2016

Nesta pesquisa é descrita a formulação co-rotacional de um elemento de viga unificado. Esta formulação engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, utilizadas para descrever problemas fortemente não-lineares e que não apresentam bloqueio por cisalhamento. A cinemática co-rotacional se baseia na separação do movimento de um sólido em uma parte de corpo rígido e em outra deformacional. O deslocamento de corpo rígido é composto por movimentos de rotação e de translação, enquanto o movimento deformacional do elemento é descrito por três modos naturais de deformação, convenientemente selecionados e relacionados aos esforços axial, de flexão pura e de flexão simples. Os esforços internos gerados pelos modos de deformação naturais são autoequilibrados, o que permite obter uma matriz de rigidez tangente consistente. Neste trabalho, descreve-se de forma detalhada a obtenção das matrizes de rigidez geométrica e material. Desenvolve-se, durante a pesquisa, o método de comprimento de arco, que consiste em um método de solução numérica largamente utilizado e altamente robusto, capaz de traçar caminhos de equilíbrio fortemente não-lineares com a presença de diversos pontos críticos. Por meio de exemplos numéricos e da aplicação do método de comprimento de arco em trajetória ortogonal atualizada, são traçados caminhos de equilíbrio no espaço carga-deslocamento de exemplos numéricos extraídos da literatura e, assim, é demonstrada a habilidade do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko em lidar com grandes não-linearidades geométricas.

ABSTRACT

APPLICATION OF THE CO-ROTATIONAL FORMULATION AND THE BERNOULLI-TIMOSHENKO UNIFIED BEAM ELEMENT ON THE SOLUTION OF NONLINEAR FRAMES AND ARCHS

Author: Gabriel Costa de Oliveira
Supervisor: William Taylor Matias Silva
Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil
Brasilia, august of 2016

This research describes the co-rotational formulation for unified beams. This formulation combine two beam theories, the Euler-Bernoulli and the Timoshenko, used to describe strong nonlinear problems without shear locking. The co-rotational cinematic is based on separate the movement of a solid in a rigid body and other deformational. The rigid body displacement is composed of rotation and translation movements, while the deformation movement of the element is described by three natural modes of deformation, conveniently selected and related to the axial efforts, pure bending and simple bending. The internal forces generated by the natural deformation modulus are self-equilibrated which allows to obtain a consistent tangent stiffness matrix. On this paper, the development of the geometric and the material stiffness matrix is described in details. It develops during the research, the arc length method, which consists of a numerical solution method widely used and highly robust, able to trace balance paths strongly nonlinear with the presence of several critical points. Throughout numerical examples and application of the arc length method in updated orthogonal trajectory, equilibrium paths are traced in the load-displacement space of extracted numerical examples of literature and thus is demonstrated the ability of the co-rotational formulation for unied Bernoulli-Timoshenko beams in dealing with large geometric nonlinear problems.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURAS

Símbolos do Alfabeto Grego

α Ângulo entre o vetor de deslocamento convergido e o incremento atual

Δ Incremento

δ Deslocamento virtual / subincremento

$\delta\mathbf{u}$ Subincremento de deslocamento horizontal

$\delta\theta$ Rotação virtual da seção transversal

$\Delta\xi$ Incremento de fator de carga

$\delta\xi$ Subincremento de fator de carga

$\overline{\theta_1}$ Rotação deformacional do nó 1

$\overline{\theta_2}$ Rotação deformacional do nó 2

Φ Parâmetro de cisalhamento

ψ_a Coeficiente de momento antissimétrico

θ^1 Componente rotacional de deslocamentos globais do nó 1

θ^2 Componente rotacional de deslocamentos globais do nó 2

θ_1 Rotação total global do nó 1

θ_1^e Rotação total local do nó 1

θ_2 Rotação total global do nó 2

θ_2^e Rotação total local do nó 2

θ_a Rotação por flexão antissimétrica

θ_r Deslocamento rotacional de corpo rígico co-rotacional

θ_s Rotação por flexão simétrica

φ Ângulo final do elemento de viga

φ_0 Ângulo inicial do elemento de viga

ξ Coordenada adimensional / Fator de carga

$d\theta_1^e$ Componente incremental rotacional de deslocamentos do nó 1

$d\theta_2^e$ Componente incremental rotacional de deslocamentos do nó 2

$d\varphi_a$ Componente incremental de flexão antissimétrico

$d\varphi_s$ Componente incremental de flexão simétrica

Símbolos do Alfabeto Latino

$\Delta\mathbf{u}$ Incremento de deslocamento

$\delta\mathbf{u}$ Vetor de deslocamentos global virtual

$\delta\mathbf{u}^e$ Vetor de deslocamentos local virtual

$\delta\mathbf{u}_d$ Vetor de deslocamentos deformacional virtual

ΔL Comprimento do arco

δV Trabalho virtual

δw Deslocamento virtual

ΔX Variação dos dos nós do elemento no eixo X

ΔY Variação dos dos nós do elemento no eixo Y

$\Delta\mathbf{f}$ Variação incremental de carga

$\delta\mathbf{f}$ Subincremento de carga

$\Delta\mathbf{f}^n$ Incremento de carga no passo corrente

$\delta\mathbf{u}$ Subincremento dos deslocamentos

$\delta\mathbf{u}^f$ Subincremento de deslocamento do ajuste de carga

$\Delta\mathbf{u}^n$ Incremento de deslocamento do passo corrente

$\delta\mathbf{u}^r$ Subincremento de deslocamento residual

$\mathbf{f}$ Vetor de forças global

$\mathbf{f}^e$ Vetor de forças local

$\mathbf{f}_d$ Vetor de forças deformacionais

$\mathbf{K}^n$ Matriz de rigidez do passo corrente

$\mathbf{K}_d$ Matriz de rigidez constitutiva

$\mathbf{K}_i$ Matriz de rigidez do incremento corrente

$\mathbf{K}_r$ Matriz de rigidez co-rotacional

$\mathbf{K}_{d,geo}$ Matriz de rigidez geométrica local

$\mathbf{K}_{d,mat}$ Matriz de rigidez material

$\mathbf{R}$ Matriz de rotação

$\mathbf{R}_1$ Matriz de rotação do nó 1

$\mathbf{R}_2$ Matriz de rotação do nó 2

$\mathbf{S}$ Matriz de transformação

$\mathbf{S}_1$ Matriz de transformação do nó 1

$\mathbf{S}_2$ Matriz de transformação do nó 2

$\mathbf{u}$ Vetor de deslocamentos global

$\mathbf{u}^e$ Vetor de deslocamentos local

$\mathbf{u}_d$ Vetor de deslocamentos deformacionais

$\mathbf{u}_r$ Vetor de deslocamentos co-rotacional

$\mathbf{u}_r^t$ Vetor de deslocamentos translacional co-rotacional

$\mathbf{x}_1$ Coordenadas em relação ao eixo das abscissas do nó 1 na configuração co-rotacionada

$\mathbf{x}_2$ Coordenadas em relação ao eixo das abscissas do nó 2 na configuração co-rotacionada

$\mathbf{x}_e$ Eixo horizontal do sistema de coordenadas local

$\mathbf{x}_e^0$ Eixo horizontal do sistema de coordenadas local na posição inicial

$\mathbf{y}_1$ Coordenadas em relação ao eixo das ordenadas do nó 1 na configuração co-rotacionada

$\mathbf{y}_2$ Coordenadas em relação ao eixo das ordenadas do nó 2 na configuração co-rotacionada

$\mathbf{y}_e$ Eixo vertical do sistema de Coordenadas Local

$\mathbf{y}_e^0$	Eixo vertical do sistema de coordenadas local na posição inicial
A	Área da seção transversal
A_0	Área efetiva ao cisalhamento
B	Ponto de bifurcação
C	Configuração final
c	Restrição
c^u	Derivada parcial da condição de restrição com relação aos deslocamentos
c^ξ	Derivada parcial da condição de restrição com relação ao fator de carga
C_0	Configuração inicial
C_r	Configuração co-rotacional
$d\mathbf{f}$	Incremento de força
$d\mathbf{f}_d$	Variação incremental no vetor de forças internas
$d\mathbf{R}$	Variação incremental na matriz de rotação combinada
$d\mathbf{S}$	Variação incremental na matriz de transformação
dM_a	Variação incremental de momento fletor antissimétrico
dM_s	Variação incremental de momento fletor simétrico
dN	Variação incremental de força axial
du	Variação incremental de deslocamento axial
du_1^e	Variação incremental de deslocamentos local horizontal do nó 1
du_2^e	Variação incremental de deslocamentos local horizontal do nó 2
dv_1^e	Variação incremental de deslocamentos local vertical do nó 1
dv_2^e	Variação incremental de deslocamentos local vertical do nó 2
dw	Variação incremental do deslocamento vertical da linha elástica
E	Módulo de elasticidade
F	Falha

f	Fator de forma para cisalhamento
$f^e_{x_1}$	Força local horizontal do nó 1
$f^e_{x_2}$	Força local horizontal do nó 2
$f^e_{y_1}$	Força local vertical do nó 1
$f^e_{y_2}$	Força local vertical do nó 2
f_{x_1}	Força global horizontal do nó 1
f_{x_2}	Força global horizontal do nó 2
f_{y_1}	Força global vertical do nó 1
f_{y_2}	Força global vertical do nó 2
G	Módulo de cisalhamento
g	Força interna
i	Passo iterativo
$i+1$	Próximo passo incremental
I^{n-1}	Número de iterações do passo anterior
I_d	Número de incrementos desejados
k_a	Rigidez geométrica local referente a flexão assimétrica
k_s	Rigidez geométrica local referente a flexão simétrica
k_{11}	Rigidez material com relação a variação das forças axiais
k_{22}	Rigidez material com relação a variação dos momentos simétricos
k_{33}	Rigidez material com relação a variação dos momentos antissimétrico
L	Comprimento final do elemento de viga
L_0	Comprimento inicial do elemento de viga
L_{max}	Ponto limite de carga máxima
L_{mix}	Ponto limite de carga mínima
M	Momento fletor

m_1^e Momento fletor local do nó 1

m_2^e Momento fletor local do nó 2

m_1 Momento fletor global do nó 1

m_2 Momento fletor global do nó 2

M_a Momento fletor antissimétrico

M_s Momento fletor simétrico

N Força normal

n Passo incremental

$n-1$ Passo incremental anterior

Q Esforço cortante

r Resíduo

S Ponto de salto

S_p Parâmetro de rigidez corrente

T_1 *Turning point* 1

T_2 *Turning point* 2

T_3 *Turning point* 3

u Deslocamento axial

u_1 Deslocamento global horizontal do nó 1

u_1^e Deslocamento local horizontal do nó 1

u_2 Deslocamento global horizontal do nó 2

u_2^e Deslocamento local horizontal do nó 2

u_r Deslocamento horizontal de corpo rígido co-rotacional

v_1 Deslocamento global vertical do nó 1

v_1^e Deslocamento local vertical do nó 1

v_2 Deslocamento global vertical do nó 2

v_2^e Deslocamento local vertical do nó 2

v_r Deslocamento vertical de corpo rígido co-rotacional

w Deslocamento vertical da linha elástica

X Eixo horizontal global

X_1 Coordenadas em relação ao eixo das abscissas do nó 1 na configuração inicial

X_2 Coordenadas em relação ao eixo das abscissas do nó 2 na configuração inicial

Y Eixo vertical global

Y_1 Coordenadas em relação ao eixo das ordenadas do nó 1 na configuração inicial

Y_2 Coordenadas em relação ao eixo das ordenadas do nó 2 na configuração inicial

Nomenclaturas

ANDES *Assumed Natural Deviatoric Strain* - Formulação de Deformação Deviatória Natural

C *Consistent CR Formulation* - Formulação CR Consistente

CE *Consistent Equilibrated CR Formulation* - Formulação CR Auto-equilibrada Consistente

CR Formulação Corotacional

CSE *Consistent Symmetrizable Equilibrated CR Formulation* - Formulação CR Auto-equilibrada Simetrizável Consistente

CSP *Current Stiffness Parameter* - Parâmetro de Rigidez Corrente

DEC Diagrama de Esforço Cortante

DEN Diagrama de Esforço Normal

DMF Diagrama de Momento Fletor

EDO Equação Diferencial Ordinária

EFF *Extended Free Formulation* - Formulação Livre Estendida

EIRC *Element Independent CR* - Formulação Co-rotacional de Elemento Independente

FF *Free Formulation* - Formulação Livre

GSP *General Stiffness Parameter* - Parâmetro de Rigidez Generalizado

LA	Descrição Lagrangeana Atualizada
LT	Descrição Lagrangeana Total
MEF	Método dos Elementos Finitos
NRM	Newton-Raphson Modificado
NRP	Newton-Raphson Padrão
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
PTVC	Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - MOTIVAÇÕES

Com a evolução da engenharia, o emprego de materiais que possibilitassem a implementação e a utilização de estruturas cada vez mais esbeltas, mais rápidas de serem executadas e de alta *performance* fez com que o estudo não-linear de estruturas se tornasse cada fez mais significativo, a fim de garantir a estabilidade estrutural no cálculo de projetos estruturais. Por essa razão, engenheiros não puderam mais restringir-se ao estudo de soluções de problemas lineares mais fáceis de serem resolvidos, apesar de sua grande utilidade em vários casos. O estudo não-linear permitiu a compreensão do comportamento real das estruturas.

Nesse contexto, estruturas passaram a ser estudadas com seus limites avaliados de maneira mais precisa, de forma que pontos críticos, como pontos limites e de bifurcação, pudessem ser identificados e ultrapassados. Isso possibilitou que as estruturas fossem submetidas a uma análise plena de comportamento, por meio de uma leitura completa do caminho de equilíbrio estrutural. É importante destacar que, embora muitas vezes a resposta pré-crítica seja suficiente para os propósitos de projeto, a determinação da resposta no intervalo pós-crítico é essencial quando se deseja identificar a habilidade da estrutura de resistir a carregamentos no domínio de grandes deslocamentos (Bellini e Chulya, 1987).

Com o intuito de descrever caminhos de equilíbrio pós-crítico, vários métodos foram desenvolvidos a partir da década de 1960. De acordo com Alves (1995), esses métodos podem ser agrupados em: análise assintótica clássica, análise modal assintótica e análise incremental. A análise incremental foi a que tomou maiores proporções e, com o tempo, vários métodos foram sendo desenvolvidos, tais como métodos puramente incrementais; métodos incrementais iterativos baseados no método de Newton-Rapshon com controle de carga, com controle de deslocamento e com controle de carga e deslocamento simultâneos – como, por exemplo, os métodos de comprimento de arco; método de deslocamento generalizado; método de controle de trabalho externo; método de resíduo ortogonal; entre outros.

Atualmente a análise não-linear possui dois campos bastante relevantes. Um lida com a não-linearidade física, relacionada ao comportamento mecânico do material, em que são investigados comportamentos materiais como, por exemplo, o elástico, o hiperelástico, o viscoelástico, o elastoplástico, entre outros. Já o outro, trata da não-linearidade geométrica, tema de principal interesse deste trabalho. Nesse campo de atuação, a análise de equilíbrio da peça é realizada considerando-se seu estado já deslocado, em que a força aplicada movimenta-se no espaço gerando esforços que, na configuração inicial indeformada da peça, não existiam.

Na análise não-linear geométrica, com base no Método dos Elementos Finitos (MEF), três diferentes tipos de descrições cinemáticas lagrangeanas têm sido utilizadas: descrição Lagrangiana Total (LT), descrição Lagrangiana Atualizada (LA) e descrição Co-rotacional (CR), sendo a descrição co-rotacional a mais recente e a menos desenvolvida entre as três (Felippa e Haugen, 2005). Apesar de ser a mais nova dentre as descrições lagrangeanas, a CR já se encontra consolidada no meio acadêmico.

A ideia básica da formulação co-rotacional advém de um conceito bastante antigo na Mecânica dos Meios Contínuos, denominado Teorema da Decomposição Polar, que separa os movimentos de corpo rígido dos deformacionais (Reddy, 2006). Utilizada, preferivelmente, para elementos submetidos a pequenas deformações e grandes deslocamentos de corpo rígido, a separação dos movimentos foi o grande trunfo da formulação, por facilitar o entendimento do significado físico da decomposição de movimentos, além de gerar simplificações importantes nas formulações matemáticas.

A evolução dessa ideia ocorreu na indústria aeronáutica e aeroespacial em meados da década de 1950, em que foi apresentada uma modificação bastante simples para a análise não-linear geométrica utilizando o MEF. Em vez de utilizar um sistema único de eixos para a estrutura como um todo, como o utilizado nas demais descrições lagrangianas, utilizava-se um sistema de eixos por elemento. Essa modificação foi essencial para o sucesso da formulação co-rotacional, pois possibilitou que deslocamentos e rotações deformacionais dentro do sistema de referência local fossem pequenos ou, ao menos, moderados. Com isso, surge a grande vantagem da deformação da viga poder ser modelada por uma teoria aproximada de viga. Para tal, o MEF se encaixou perfeitamente, pois, ao discretizar uma estrutura em elementos cada vez menores, garante-se que essa premissa da CR seja atendida. Segundo Menin (2006a), a hipótese de pequenas deformações se torna relevante, pois permite a reutilização de elementos finitos lineares em problemas envolvendo não-linearidade geométrica por meio da formulação co-rotacional.

As formulações lagrangianas são mais utilizadas no caso de elementos finitos contínuos, pois o uso da deformação de Green-Lagrange permite filtrar os deslocamentos de corpo rígido. Contudo, a aplicação das formulações lagrangianas a elementos de pórtico com grandes deslocamentos e rotações leva a expressões muito complexas. Dessa forma, a maior parte desses elementos é restrita ao problema de rotações moderadas (Parente et al., 2014). Desse modo, demonstra-se a importância da formulação co-rotacional aplicada ao estudo de grandes deslocamentos e rotações.

1.2 - OBJETIVOS

O principal objetivo da presente pesquisa é, por meio da cinemática da formulação co-rotacional, descrever o comportamento não-linear geométrico de estruturas discretizadas em elementos de viga unificados Bernoulli-Timoshenko, de maneira a propor uma formulação mais fácil de ser representada, analisada, interpretada, formulada e implementada na análise de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e rotações, quando comparada a outras formulações conhecidas na literatura.

A formulação proposta também tem como objetivo – por meio da utilização de modos naturais de deformação, propostos por Argyris et al. (1979), propositalmente escolhidos como simétrico e antissimétrico, para representar ao mesmo tempo as duas teorias clássicas de viga – evitar problemas clássicos como o travamento por cisalhamento (*shear locking*). Por conseguinte, torna-se desnecessária a utilização de alternativas existentes na literatura, tais como o uso de funções de interpolação que levam a uma representação consistente da tensão de cisalhamento; a avaliação do elemento e a utilização da integração reduzida; ou o uso de parâmetros de rigidez modificados selecionados para compensar os erros introduzidos pela interpolação.

Implementaram-se, para a consecução dos objetivos, o método de comprimento de arco de hiperplano ortogonal atualizado, de maneira a ampliar os métodos de solução numérica existentes no programa "co-rotational-2Dbeam.f90", desenvolvido pelo professor William Taylor e por seus alunos. A implementação desse método de solução numérica teve o intuito de traçar caminhos de equilíbrio de estruturas submetidas a não-linearidade geométrica, de forma a ultrapassar pontos críticos, realizando a leitura completa do comportamento pós-crítico das estruturas, o que tornou possível, por exemplo, a superação dos tão conhecidos salto dinâmico de carga (*snap-through*) e salto dinâmico de deslocamento (*snap-back*).

Por fim, com a finalidade de verificar e atestar a precisão do método e da rotina implementada, comparou-se o comportamento do caminho de equilíbrio das estruturas estudadas com o de exemplos já conhecidos na literatura.

1.3 - METODOLOGIA

Inicialmente, para simular o comportamento de estruturas submetidas a grandes deslocamentos, foram desenvolvidas matematicamente formulações da teoria cinemática co-rotacional, em um contexto de MEF apresentadas por Krenk (2009), que serviram de base para o desenvolvimento da rotina "co-rotating-2Dbeam90". Nesse sentido, foi proposto por meio da rotina, um elemento de dois nós, com três graus de liberdade por nó, totalizando seis graus de liberdade por elemento. Os graus de liberdade do elemento foram compostos pela soma de três movimentos de corpo rígido e três movimentos deformacionais. Por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), foi possível chegar à formulação da matriz de rigidez do elemento, sendo essa matriz a soma de uma parcela geométrica e de outra constitutiva. A parcela geométrica é responsável por descrever os movimentos de corpo rígido que caracterizam a não-linearidade da formulação, enquanto a parcela constitutiva refere-se aos modos de deformação naturais, e se divide em uma parte de rigidez material (calculada por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares (PTVC)) e em outra parte de rigidez geométrica local (calculada a partir da equação diferencial que governa o comportamento de uma viga-coluna). De posse das matrizes de rigidez geométrica e constitutiva, a matriz de rigidez do elemento foi montada e, em seguida, por meio das matrizes de rotação, calcula-se a matriz de rigidez global do elemento.

As formulações matemáticas de técnicas de solução numérica para traçar caminhos de equilíbrio – como os conhecidos métodos de comprimento de arco, com restrição no hiperplano constante e atualizado, apresentadas por Krenk (2009) – são deduzidas, mostrando-se a grande capacidade desses métodos em ultrapassar e superar pontos críticos. Posteriormente, implementamos o método de comprimento de arco de hiperplano ortogonal atualizado exposto, na rotina "co-rotational-2Dbeam.f90".

Por fim, foi verificada a coerência dos resultados confrontando-os com exemplos extraídos da literatura. Para tal, foram analisados exemplos numéricos submetidos a grande não-linearidade geométrica; entre eles, o pórtico de Lee, o pórtico de Roorda modificado, o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica, o arco circular de grande altura rotulado-engastado com carga centrada, o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada e excêntrica, e a viga engastada com momento na extremidade livre, entre outros.

1.4 - ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação encontra-se dividida em sete capítulos. No capítulo 1, situam-se: Introdução, Objetivos, Metodologia e Organização da dissertação.

No capítulo 2, apresentam-se o histórico e a evolução da formulação co-rotacional e das técnicas de solução numérica na análise não-linear de estruturas. No primeiro, assim como no segundo tópico, são abordados dificuldades e problemas que, durante anos, impulsionaram cientistas a desenvolver técnicas cada vez mais robustas para contornar problemas encontrados.

O capítulo 3 discorre sobre a não-linearidade geométrica, tema de principal enfoque desta pesquisa. Nesse capítulo, é apresentada uma breve introdução da importância da consideração da não-linearidade geométrica em elementos estruturais; em seguida, apresentamos um exemplo ilustrativo de uma estrutura submetida a grandes deslocamentos, além das mais recentes formulações de descrição cinemática baseadas no MEF encontradas na literatura e suas divergências; por fim, destacamos algumas vantagens e desvantagens da formulação co-rotacional.

No capítulo 4, é demonstrado o desenvolvimento matemático da formulação co-rotacional do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko. Apresentam-se tópicos relevantes, como o deslocamento de corpo rígido e os modos de deformação naturais utilizados para a consideração dos graus de liberdade presentes no elemento estudado. Por meio das considerações abordadas, é montada a matriz de rigidez do elemento, sendo esta dividida em matriz de rigidez co-rotacional (geométrica) e matriz de rigidez constitutiva (que apresenta tanto rigidez material como uma parcela geométrica local). É feita a montagem da matriz de rigidez local do elemento, que em seguida é transformada em global. Por fim, a implementação computacional do modelo é apresentada.

O capítulo 5 aborda técnicas de soluções numéricas para problemas que envolvem não-linearidade. Nele, apresentam-se alguns métodos conhecidos na literatura que realizam a leitura do caminho de equilíbrio de estruturas submetidas a uma análise não-linear. Posteriormente, encontram-se ilustrados pontos críticos e a dificuldade de alguns métodos em ultrapassá-los. É desenvolvida também uma formulação geral de restrição para o método de comprimento de arco, sendo essa posteriormente utilizada como base para o desenvolvimento de dois tipos específicos de restrição bastante utilizados: a restrição no hiperplano constante e no hiperplano atualizado. Parâmetros importantes para a utilização do método de comprimento de arco também são apresentados. Por fim, a implementação computacional do método de comprimento de arco com restrição no hiperplano ortogonal atualizado é descrita.

No capítulo 6, são vistos exemplos numéricos de estruturas submetidas a grandes deslocamentos e rotações. Esses exemplos são comparados a outros existentes na literatura e uma análise de sua acurácia é estabelecida para a validação da rotina desenvolvida.

Finalmente, no capítulo 7, encontram-se as conclusões das análises realizadas no capítulo anterior e as conclusões obtidas na utilização do elemento co-rotacional unificado Bernoulli-Timoshenko para descrever o comportamento não-linear de estruturas, assim como as conclusões sobre o método de comprimento de arco ortogonal atualizado, implementado para descrever caminhos de equilíbrio. Além disso, ideias, sugestões e propostas para trabalhos futuros são apresentadas.

2 - REVISÃO DA LITERATURA

2.1 - HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

Nesta seção, apresenta-se o histórico da formulação co-rotacional, além dos problemas e das soluções encontradas por meio de seu uso ao longo do tempo, que impulsionaram sua evolução.

Inicialmente, em Truesdell e Toupinn (1960), surgiu a ideia da separação dos movimentos de um corpo em movimento de corpo rígido e movimento deformacional, em uma abordagem na mecânica do contínuo. A formulação surgiu para identificar a taxa de fluxo de tensão de Jaumann. O problema do fluxo de tensão foi introduzido por Zaremba em 1903. Na mesma década, Biot (1965), tratando de problemas geológicos, estabelece que a deformação total de uma superfície contínua pode ser decomposta em movimento de corpo rígido e deformacional. No mesmo ano, Argyris (1965) apresenta o conceito de decomposição do movimento, o qual foi inicialmente denominado de aproximação natural.

Em um contexto de Método dos Elementos Finitos (MEF), Wempner (1969) introduziu o conceito da descrição cinemática co-rotacional para o estudo de rotações finitas de cascas flexíveis submetidas a pequenas deformações e grandes deslocamentos. Nesse mesmo contexto, Belytschko e Hsieh (1973) estudaram elementos finitos de viga submetidos a grandes rotações e propuseram um método baseado em um sistema de coordenadas curvilíneas (*convected coordinates*).

Fraeijs de Veubeke (1976) introduziu o conceito de configuração sombra (*shadow*) no estudo da análise dinâmica para estruturas flexíveis aporticadas na indústria aeronáutica. Sua formulação utilizou muito mais uma solução analítica do que uma formulação de elementos finitos. Utilizava-se um único sistema de eixos co-rotacionais para a estrutura como um todo; este único sistema de eixos gerou uma série de dificuldades, de modo que o conceito de configuração fantasma foi elevado para o nível de elemento sombra (*shadow element*).

Em Bergan e Horrigmoe (1976), Horrigmoe (1977) e Horrigmoe e Bergan (1978), os autores introduziram a importante ideia de um sistema ligado ao elemento. Mais à frente, Bergan e Nygard (1989) introduziram em seu livro o conceito de elemento fantasma (*ghost element*), um elemento muito semelhante ao elemento sombra desenvolvido por Fraeijs de Veubeke (1976). O intuito do elemento fantasma era o de excluir o movimento de corpo rígido de cada elemento e obter apenas o movimento deformacional. Nesse método, obteve-se o vetor das forças internas a partir dos deslocamentos deformacionais. O problema foi que, para a construção da matriz de rigidez tangente, não foram usadas diretamente as derivadas desse vetor, fato que conduziu a uma perda de consistência.

Próximo a década de 80, Belytschko e Glam (1979) introduziram o termo co-rotacional para se referir ao movimento do sistema de coordenadas local anexado ao elemento. Em Rankin e Brogan (1986) nasce a Formulação Co-rotacional de Elemento Independente (*Element Independent CR*) (EICR), proposta para sanar o problema de perda de consistência existente no elemento fantasma. Na pesquisa, os autores utilizaram diretamente operadores de projeção para extrair os deslocamentos deformacionais, e a formação da matriz de rigidez tangente se deu de forma direta, a partir da derivação do vetor de forças internas, dando consistência à matriz de rigidez. Mais tarde, Rankin e Nour-Omid (1988) e Nour-Omid e Rankin (1991) melhoraram e refinaram a EICR; entretanto, sua formulação ainda apresentava algumas restrições no número de graus de liberdade que poderiam participar da rotação do sistema de coordenadas do elemento e, ao mesmo tempo, manter a consistência da matriz de rigidez tangente.

Para resolver as restrições nos graus de liberdade da EIRC, Haugen (1994) desenvolveu um trabalho aplicado ao estudo de cascas planas discretizadas por elementos triangulares e quadrangulares. O autor combinou as principais características do elemento fantasma com as da EIRC; nessa combinação, os elementos possuíam o grau de liberdade de rotação torcional (*drilling*). Haugen descreveu três formulações co-rotacionais para elementos triangulares e quadrangulares: Formulação CR Consistente (*Consistent CR Formulation* - C), Formulação CR Auto-equilibrada Consistente (*Consistent Equilibrated CR Formulation* - CE) e Formulação CR Autoequilibrada Simetrizável Consistente (*Consistent Symmetrizable Equilibrated CR Formulation* - CSE).

Hsiao e Hou (1987) e Hsiao et al. (1987) apresentaram formulações simples e eficientes para a remoção da restrição de pequenas rotações entre dois passos de carga sucessivos em uma análise não-linear geométrica de pórticos planos espaciais. Nesse mesmo contexto, Crisfield (1990) apresentou uma formulação consistente para a análise não-linear geométrica de pórticos espaciais

Em Cardona (1989), utilizou-se o conceito de formulação co-rotacional para o estudo de mecanismos. Na década seguinte, Carlos A. Fellipa e seus colaboradores publicaram uma série de artigos: Felippa e Militello (1992), Felippa e Alexander (1992), Felippa (2000), Felippa e Park (2002), Felippa (2003) e Felippa e Haugen (2005). Em seus artigos, os autores propuseram a formulação de um elemento triangular de três nós com nove graus de liberdade, incluindo a rotação torcional para parametrizar os princípios variacionais. Esses princípios forneciam uma base unificada para diversas técnicas de construção de elementos avançados, como: Formulação Livre (*Free Formulation* - FF); Formulação Livre Estendida (*Extended Free Formulation* - EFF); Formulação de Deformação Deviatória Natural (*Assumed Natural Deviatoric Strain* - ANDES).

No ano de 1992 foi apresentada uma formulação consistente para o estudo de cascas, que utilizava uma combinação do elemento triangular de membrana com deformações constantes e do elemento triangular de placa com curvatura constante (Peng e Crisfield, 1992). Quatro anos depois, Crisfield e Moita (1996) apresentaram um procedimento teórico, inicialmente voltado para o estudo de elementos finitos sólidos e posteriormente modificado para abranger o estudo de vigas e pórticos espaciais.

Ainda na década de 90, Pacoste apresentou estudos de instabilidades em Pacoste e Eriksson (1996) e Pacoste (1998). No primeiro, estudaram-se problemas de instabilidade para elementos de viga no plano e no espaço, comparando as descrições lagrangianas total e co-rotacional. Foram avaliados oito exemplos numéricos, tanto bidimensionais quanto tridimensionais, e os exemplos provenientes da CR apresentaram melhor convergência. Com isso, concluiu-se que não era suficiente aumentar o número de graus de liberdade dos elementos ou refinar a malha no tratamento de fenômenos complexos como a instabilidade de estruturas. No segundo, Pacoste fez estudos de instabilidade de cascas utilizando elementos finitos planos e triangulares de casca contendo três nós e seis graus de liberdade por nó. O autor seguiu a formulação de Rankin e Nour-Omid (1988) por meio da utilização de projetores e implementou uma parametrização das rotações finitas no espaço, que leva a uma mudança adicional de variáveis, de modo que as variáveis relacionadas às rotações no espaço se transformassem em aditivas e, com isso, tornaram desnecessários eventuais procedimentos de atualização.

No final da década de 90, foi proposto um elemento de viga aplicando-se uma técnica baseada na formulação co-rotacional, além de uma técnica de redução no número de termos não-lineares do tensor de deformação de Green (Petrov e Géradin, 1998a). Uma nova abordagem na análise não-linear geométrica exata de vigas foi desenvolvida e concluiu-se que essa permitiria retirar todos os componentes do tensor de tensões, e não somente as tensões que pudessem ser reduzidas a resultantes de tensão. O problema pode ser abordado por diferentes aspectos e teorias de viga, como as de Bernoulli e Timoshenko, que posteriormente foram estendidas para vigas anisotrópicas (Petrov e Géradin, 1998b).

Na virada do milênio, Rodrigues (2000) desenvolveu ferramentas numéricas para a análise estática não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas espaciais na exploração de petróleo *offshore*. No mesmo ano, De Souza (2000) apresentou uma formulação baseada no método das forças para a análise inelástica e de grandes deslocamentos em pórticos planos e espaciais.

Battini (2002) implementou uma formulação co-rotacional para estudar problemas de instabilidade elástica e plástica de vigas planas e espaciais. Em sua pesquisa, foram propostas modificações na forma de parametrização das rotações finitas, incluindo-se um sétimo grau de liberdade para consideração de ligações rígidas. Battini buscou desenvolver elementos de viga não-linear eficiente que possibilitassem incluir efeitos de empenamento arbitrariamente na seção transversal e que fossem suficientemente apurados, a fim de modelar problemas elásticos e elastoplásticos. Um ano depois, Iura et al. (2003) introduz um novo sistema de coordenada local no qual é utilizado um elemento de viga linear para construir a função da energia de deformação. Dessa forma, as soluções numéricas obtidas convergem para as soluções da teoria exata de vigas à medida que se aumenta o número de elementos utilizados na discretização do sistema.

Os livros publicados por Krenk, Krenk (2001) e Krenk (2009) abordaram uma formulação co-rotacional utilizando um elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko, por meio do uso dos modos de deformação natural. O autor comprovou que, com sua nova formulação, os elementos estariam livres do travamento por cisalhamento, conhecido como *shear locking*.

No âmbito da Universidade de Brasília e do Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC), Cortivo (2004) estudou problemas de não-linearidade física e geométrica de estruturas de cascas finas, no domínio de pequenas deformações, adotando o modelo elastoplástico por camadas baseado no critério de escoamento plástico de von Mises. Menin (2006) aplicou a descrição cinemática CR na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliça, vigas e cascas. Dentre os trabalhos publicados pelo autor, podem-se destacar: Menin e Taylor (2003a), que estudaram problemas de instabilidade de pórticos planos, discretizados com elementos finitos de viga de Euler-Bernoulli; Menin e Taylor (2003b) e Menin et al. (2006), que estudaram o comportamento pós-crítico de sistemas de barras articuladas no plano e no espaço, utilizando distintas medidas de deformações; Menin e Taylor (2004), que estudaram problemas de não-linearidade geométrica de pórticos espaciais, baseando-se no conceito de operadores de projeção da formulação EICR; e, finalmente, Menin e Taylor (2005a) e Menin e Taylor (2005b), que estudaram problemas de instabilidade em estruturas de cascas, discretizadas com elementos finitos triangulares, com base em modificações feitas na formulação EICR. Belo (2009) desenvolveu a formulação co-rotacional em elementos finitos de cascas para análises hiperelásticas. Da Silva (2013) desenvolveu um programa de elementos finitos para análise estática e dinâmica não-linear geométrica de pórticos espaciais com o uso do elemento de viga 3D Euler-Bernoulli co-rotacional, em plataforma Matlab, implementando a formulação co-rotacional EICR.

2.2 - HISTÓRICO DAS TÉCNICAS DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção, será apresentada a evolução histórica da análise não-linear, assim como as barreiras a serem ultrapassadas e que acabaram por alavancaram o surgimento de novas técnicas de solução numérica mais eficientes para tratar de problemas envolvendo a não-linearidade.

Um dos primeiros trabalhos de análise não-linear, baseado no MEF, deveu-se a Turner et al. (1960). Turner et al. (1960) e Argyris (1964) destacam-se pela aplicação de um método puramente incremental para solução não-linear, tornando-se o marco inicial no desenvolvimento de métodos incrementais.

A abordagem incremental leva à acumulação não quantificada de erros. Nesse contexto, Oden (1967) e Mallett e Marcal (1968) utilizaram iterações do tipo Newton-Raphson para contornar os possíveis erros nas aproximações incrementais, denominado passo corretor. Um ano depois, Fox e Stanton (1968) empregaram, em uma das mais antigas aplicações, o método quasi-Newton, utilizando elementos finitos. Ainda com relação aos métodos iterativos, Brebbia e Connor (1969) e Murray e Wilson (1969) utilizaram métodos incrementais-iterativos para resolução de problemas não-lineares, em que o conceito da combinação de métodos incremental (preditor) e iterativo (corretor) foi introduzido. Nesse processo, o ciclo iterativo é realizado a carga constante.

Em contraste com o método de Newton-Raphson Padrão (NRP), no qual a matriz de rigidez é continuamente atualizada, Zienkiewicz (1971) e Crisfield (1981) recomendaram um método de Newton-Raphson Modificado (NRM), em que a matriz de rigidez não seria atualizada a cada iteração, mas somente no início de cada passo incremental.

Estudos iniciais que lidam com problemas de saltos sob controle de carga (*snap-through*) e pontos limites foram realizados por Sharifi e Popov (1969) e Sabir e Lock (1972). Com o intuito de contornar os problemas expostos, vários outros métodos foram sendo criados, como: método de controle de deslocamento (Batoz e Dhatt, 1979), método de comprimento de arco (*arc-length method*) (Riks, 1972; Wempner, 1971; Ramm, 1981; Crisfield, 1981 e outros), método da minimização da carga residual (Bergan, 1980), método de controle de energia (Powell e Simons, 1981) e (Yang e McGuire, 1985), método do fluxo normal (Watson et al., 1987), método da minimização do deslocamento residual (Chan, 1988), método do controle de deslocamento generalizado (Yang e Shieh, 1990), método do resíduo ortogonal (Krenk e Hededal, 1995), método do fluxo normal modificado (Saffari et al., 2008), entre outros. Em Rezaiee-Pajand et al. (2013), encontra-se uma avaliação teórica abrangente de algumas dessas técnicas de solução numérica não-linear.

No método de controle de deslocamento, também baseado no método de Newton-Raphson, proposto por Batoz e Dhatt (1979), o ciclo iterativo é realizado não a carga constante, mas a deslocamento constante. Esse método é capaz de contornar os problemas de *snap-through*. Entretanto, esbarra em problemas de salto sob controle de deslocamento, os chamados *snap-backs*. Em Riks (1979), o autor explora importantes problemas como pontos de salto (*snapping*) e, também, relacionados a bifurcação.

Os métodos de comprimento de arco, inicialmente propostos por Riks (1972) e Wempner (1971), não apresentavam controle de deslocamento e nem de carga constantes. O grande trunfo do método foi a ideia de atualizar, ao mesmo tempo, carga e deslocamento. Para isso, os autores utilizaram um método de comprimento de arco baseado em uma restrição em hiperplano constante. Mais à frente, Ramm (1981) e Crisfield (1981) propuseram modificações no método de comprimento de arco original. O primeiro propôs um método de comprimento de arco baseado em uma restrição hiperplano atualizado, enquanto o segundo propôs um método de comprimento de arco baseado em uma restrição hiperesférica.

Outros autores também propuseram sugestões para o método de comprimento de arco. Em Schweizerhof e Wriggers (1986), uma derivação consistente para um algoritmo de Newton-tipo foi dada para a solução de um conjunto de equações não-lineares com funções de restrição arbitrária. Em Ford e Stiemer (1987), demonstrou-se como várias condições de restrição poderiam ser construídas, no espaço combinado carga-deslocamento, por meio de uma formulação geral, desenvolvida a partir de princípios de ortogonalidade. Em Krenk (2009), o autor apresenta três vertentes do método de comprimento de arco a partir de princípios de ortogonalidade.

Em Bergan e Soreide (1973), apresentam-se estudos comparativos entre diferentes formas de solução numérica não-linear. Nesse mesmo contexto, Meek e Tan (1984) apresentaram um resumo das principais técnicas para ultrapassar pontos limites, das quais a técnica do comprimento de arco foi reconhecida como uma das mais eficientes.

Os métodos de comprimento de arco dependem de alguns parâmetros que são cruciais para o seu sucesso. Entre eles, pode-se destacar: o valor do fator de incremento de carga, que corresponde ao passo preditor e é calculado em cada passo incremental; o sinal correto do passo preditor, que evita que a solução convirja para direção errada; o valor do fator de subincremento de carga, que corresponde ao passo corretor e é calculado em cada processo iterativo; em alguns casos, o valor do comprimento de arca; e o critério de convergência, que determina a tolerância aceitável para a parada do processo iterativo (corretor), determinando o momento em que a solução convergiu para o atual passo de carga. Outro parâmetro a ser determinado, no caso do comprimento de arco com restrição hiperesférica, é a escolha correta das raízes encontradas para os fatores de carga dos passos preditor e corretor, pois, sua formulação consiste em uma equação de segundo grau.

Em se tratando de uma estratégia eficiente de incremento automático de carga, essa deve satisfazer basicamente os seguintes requerimentos: fornecer grandes incrementos quando a resposta estrutural for quase linear, levar a pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear, e ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximos e mínimos são ultrapassados (Rocha, 2000). Kouhia e Mikkola (1999) discutiram aspectos que influenciam o custo computacional do processo de continuação, por exemplo, a determinação do comprimento do passo, a escolha da iteração corretora, e a solução das equações lineares. Diferentes técnicas de parametrização também são comparadas.

Um método para controle do tamanho do incremento inicial do parâmetro de carga baseando-se na medida do grau de não-linearidade do sistema estrutural, definido pelo parâmetro de rigidez corrente (*Current Stiffness Parameter* - CSP), foi introduzido por Bergan et al. (1978) e Bergan (1980). Com essa estratégia, procurou-se manter aproximadamente o mesmo número de iterações para a convergência de cada passo de carga. Segundo os autores, os pontos limites da trajetória de equilíbrio podem ser detectados checando-se o sinal do incremento do trabalho externo, caso o sinal do incremento do trabalho externo corrente seja diferente daquele do passo de carga anterior, ali encontra-se um ponto limite.

Em Crisfield (1991), também pode ser vistas estratégias para controle do tamanho do incremento inicial do parâmetro de carga e do tamanho de comprimento de arco, que dependem da quantidade de iterações realizadas no passo de carga anterior, pela quantidade de iterações desejadas. Uma forma de controle do incremento inicial dos deslocamentos foi proposta por Krenk e Hededal (1995). Yang e Kuo (1994), seguindo sugestões de Yang e Shieh (1990), encontram uma estratégia de correção do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo, baseada no chamado parâmetro de deslocamento generalizado (General Stiffness Parameter - GSP). Analogamente ao parâmetro de rigidez corrente, proposto por Bergan et al. (1978), o GSP pode ser usado como um parâmetro representativo da rigidez da estrutura no passo de carga corrente.

No âmbito da escolha do sinal correto do incremento inicial do parâmetro de carga, em Bergan et al. (1978), discute-se que os pontos limites do caminho de equilíbrio podem ser detectados checando-se o sinal do incremento do trabalho externo, e, caso o sinal corrente seja diferente do passo anterior, modifica-se o sinal do incremento de carga corrente. Crisfield (1991) sugere que o sinal do incremento de carga deve ser o mesmo do incremento anterior, a menos que o determinante da matriz de rigidez tangente mude de sinal. Entretanto, segundo Meek e Tan (1984), essa alternativa pode falhar em estruturas com múltiplos autovalores negativos. Outra alternativa é proposta por Krenk e Hededal (1995) e

Krenk (2009), em que o sinal do incremento de carga é definido a partir do produto interno entre o deslocamento do passo anterior convergido e o atual incremento de carga. Segundo Krenk (2009), uma simples implementação de controle direto consiste na checagem da condição na projeção do incremento de deslocamento anterior no atual. Yang e Kuo (1994) também propõem um método para a escolha do sinal correto do incremento inicial do parâmetro de carga. O sinal do parâmetro de rigidez corrente depende dos vetores do passo de carga anterior e do corrente, portanto o parâmetro GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados em regiões próximas a pontos limites; para os demais passos, o parâmetro será positivo.

Shi e Crisfield (1984) e Crisfield (1997) abordam temas como a determinação, com relativa precisão, dos pontos críticos existentes no caminho de equilíbrio, bem como a definição das trajetórias secundárias, que são de fundamental importância no processo de análise da estabilidade de um sistema estrutural.

Com relação aos métodos com restrição em uma hiperesfera, é importante que se escolha a raiz correta do incremento e subincremento do fator de carga para evitar que a solução retorne pela trajetória de equilíbrio. Em uma equação de segundo grau há a possibilidade da ocorrência de três tipos de raízes: raízes reais e diferentes, raízes reais e iguais, e, raízes complexas. Em se tratando de raízes reais, a estratégia consiste em escolher a raiz que leva o subincremento de deslocamento atual o mais próximo do subincremento de deslocamento anterior. Tal estratégia pode ser vista em Rezaiee-Pajand et al. (2013), por exemplo. Para raízes complexas, alguns autores apresentaram diferentes procedimentos para contornarem esse problema. Zhou e Murray (1995) introduziram um fator de relaxação que garante que as raízes da equação sejam sempre reais. Há autores, como Meek e Tan (1984), que, para contornar o problema de raízes complexas, aplicam incrementos puros sem a presença de iterações no passo de carga em que ocorre esse tipo de problema. Um procedimento simples e muito utilizado para contornar o problema de se ter raízes complexas consiste em "cortar" o comprimento de arco, diminuindo, assim, o comprimento de arco inicial (Crisfield, 1981).

No âmbito da Universidade de Brasília e do Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, a utilização de técnicas de solução numérica como o método de comprimento de arco na leitura do caminho de equilíbrio de estruturas submetidas a não-linearidade física e geométrica vêm ocorrendo de forma recorrente, e pode ser visto em Cortivo (2004), Menin (2006), Silva (2011), Da Silva (2013), Gutierrez (2014), Cunha (2015), entre outros.

3 - NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

3.1 - INTRODUÇÃO

A evolução dos materiais em diversas áreas, como aeronáutica, aeroespacial, militar, mecânica, automobilística, civil e outras, possibilitou a criação de materiais mais leves, flexíveis e resistentes, permitindo, desta forma, a construção de estruturas cada vez mais complexas e esbeltas. Para o cálculo de tais estruturas, os efeitos de não-linearidade geométrica passaram a ser relevantes e, portanto, sua consideração se tornou essencial, a fim de garantir a estabilidade do sistema estrutural. Na engenharia, por exemplo, destaca-se tal fenômeno em diversas estruturas, tais como torres, arranha-céus, pontes, estruturas *offshore*, galpões, cascas de navios, fuselagens de aviões, coberturas de estádios, entre outros.

É comum, em um sistema estrutural, admitirem-se hipóteses simplificadoras com a finalidade de viabilizar os cálculos; em especial, destacam-se duas delas. Uma hipóteses é a de que o material da estrutura se comporta elasticamente segundo a Lei de Hooke, hipótese essa que tem o intuito de simplificar o comportamento material. A outra hipótese, na qual equações de equilíbrio são formuladas considerando a posição inicial indeformada da estrutura, assume que as deformações são infinitesimais, de tal modo que os efeitos dos deslocamentos deformacionais sobre o equilíbrio do sistema sejam tratados como insignificantes. Essa segunda hipótese gera simplificação no comportamento geométrico da estrutura.

As duas simplificações apresentadas não necessariamente dependem uma da outra. Hoje em dia, muitas estruturas possuem a capacidade de se deslocar em grande escala sem necessariamente perder suas propriedades materiais. Ou seja, por meio da evolução dos materiais, em diversas ocasiões, apesar de ocorrerem grandes deslocamentos da estrutura no espaço, caracterizando um efeito de não-linearidade geométrica, muitas estruturas ainda trabalham em um regime elástico, descaracterizando a não-linearidade material.

A não-linearidade pode ser entendida como a resposta não proporcional entre a aplicação de certa carga aplicada e os respectivos deslocamentos originados. Desta maneira, triplicando-se as solicitações em uma estrutura, a resposta dos deslocamentos não triplicariam. Em uma análise de não-linearidade geométrica para a construção do caminho de equilíbrio da estrutura, considera-se uma relação entre carga e deslocamentos. A Figura 3.1 ilustra dois caminhos de equilíbrio distintos de um comportamento estrutural, sendo um linear e outro não-linear.

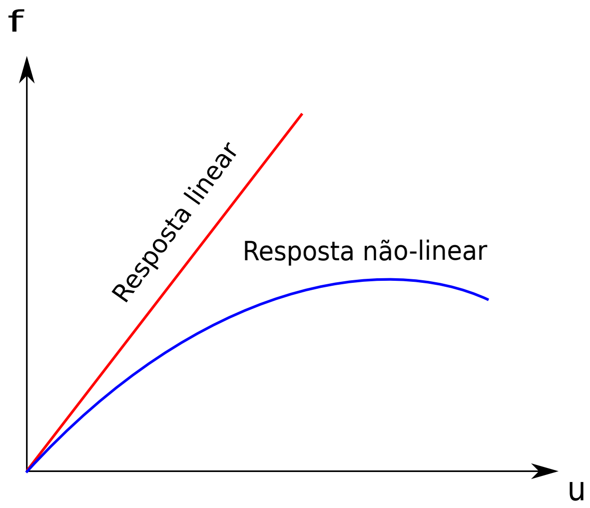


Figura 3.1 – Respostas linear e não-linear de estruturas.

3.2 - DESCRIÇÕES CINEMÁTICAS

Ao tratar de não-linearidade geométrica, um exemplo muito conhecido e estudado por diversos autores é o tão referenciado pórtico de Lee, mostrado na Figura 3.2. Nele podem ser observados os grandes deslocamentos sofridos pela estrutura desde a configuração inicial, representada pelo número 1, até a final, retratada pelo número 4.

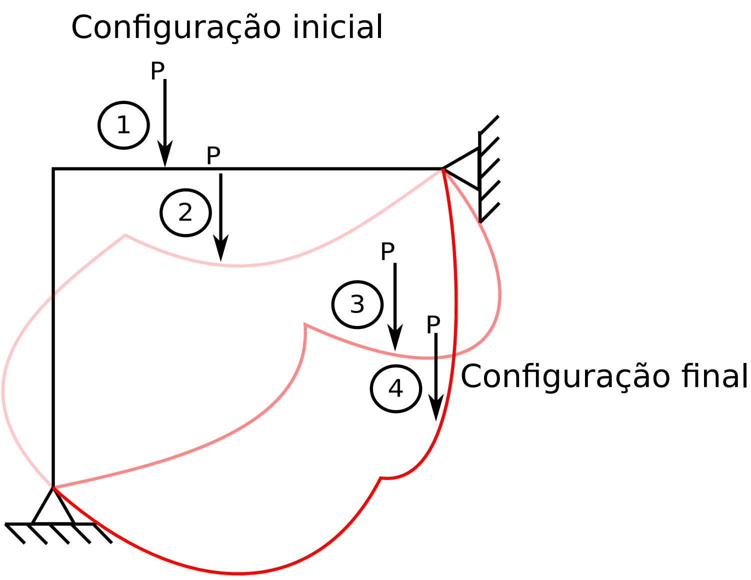


Figura 3.2 – Pórtico de Lee sujeito a grandes deslocamentos.

O exemplo consiste em um pórtico plano, composto por duas barras retas, sendo uma vertical e outra horizontal, formando entre elas uma ligação rígida inicial de noventa graus. Na base de cada barra são aplicadas condições de contorno essenciais por meio de apoios de segundo gênero, portanto neste local há o impedimento de movimentos translacionais, enquanto os rotacionais são permitidos. E, como condição de contorno natural, há uma força vertical externa sendo aplicada na barra horizontal a uma certa distância de seu ponto de apoio. A numeração de 1 a 4 apresentada representa a ilustração do movimento do pórtico no tempo.

Como abordado anteriormente, ao se tratar da análise não-linear geométrica, salienta-se que esta aplicada, ao Método dos Elementos Finitos (MEF), possui três tipos bastante utilizados de descrição cinemática. O que diferencia as formulações umas das outras é principalmente o referencial utilizado para cada análise. Tomando como exemplo o Pórtico de Lee, as três descrições lagrangeanas (LT, LA e CR) serão apresentadas a seguir.

Ao discretizar a estrutura em vários elementos, um elemento genérico i (destacado pelos círculos da Figura 3.3) é escolhido, servindo de base para a leitura do movimento (Figuras 3.4, 3.5 e 3.6). De 1 a 4, a sequência dos números indica em qual instante está sendo feita a leitura da configuração deformada do elemento, em que 1^i representa a configuração inicial e 4^i, a final.

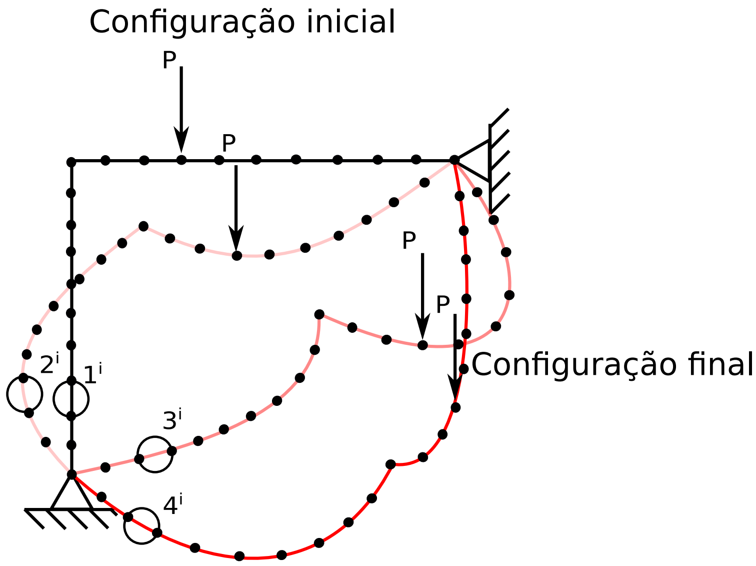


Figura 3.3 – Pórtico de Lee discretizado.

3.2.1 - Descrição Lagrangiana Total

As equações do Método dos Elementos Finitos (MEF) são formuladas em relação a um referencial fixo. Normalmente utiliza-se a própria configuração inicial da estrutura, correspondente ao estado em que esta se encontra sem a aplicação de carregamentos impostos, como pode ser visto na Figura 3.4.

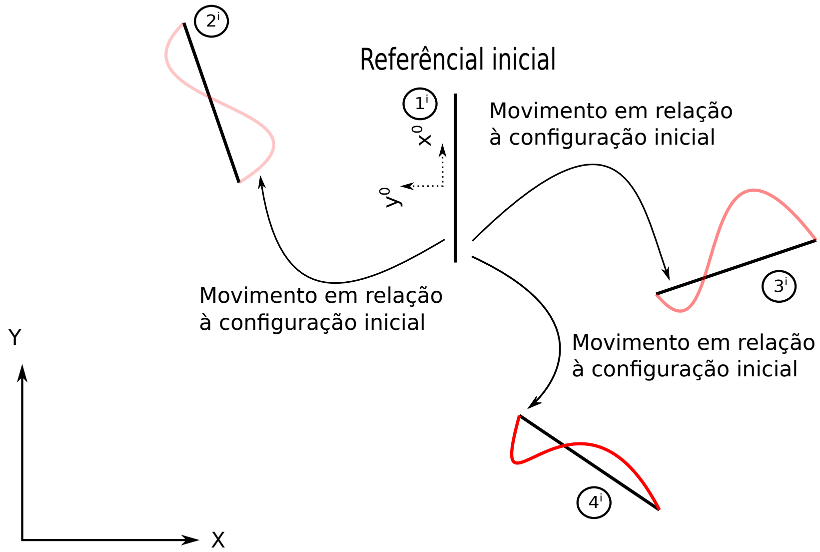


Figura 3.4 – Descrição Lagrangiana Total.

3.2.2 - Descrição Lagrangiana Atualizada

As equações do MEF são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio, ou seja, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, dentro de um mesmo passo de carga, e, uma vez atingido o equilíbrio, todas as tensões e deformações da estrutura passam a ser definidas a partir da nova configuração de equilíbrio (Figura 3.5).

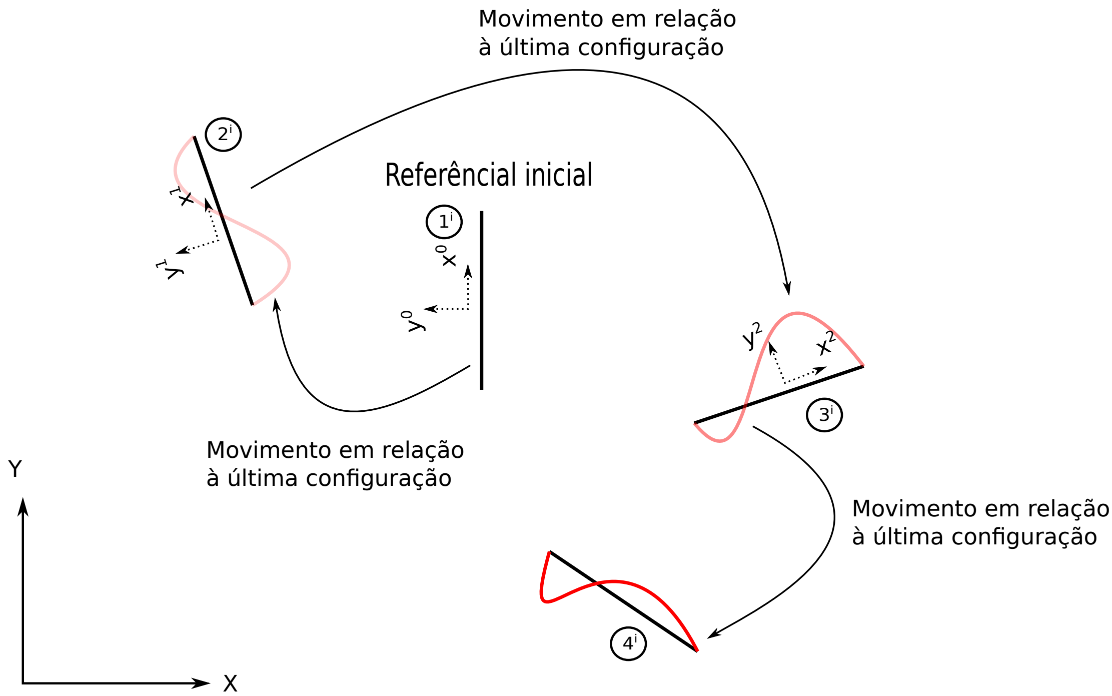


Figura 3.5 – Descrição Lagrangiana Atualizada.

3.2.3 - Descrição Co-rotacional

As equações do MEF de cada um dos elementos são definidas em relação a duas configurações de referência distintas: uma configuração base, que permanece fixa ao longo de toda a análise, sendo utilizada para medir os deslocamentos de corpo rígido, e uma configuração co-rotacional, que acompanha cada um dos elementos e a partir da qual são obtidos, exclusivamente, os deslocamentos deformacionais (Figura 3.6).

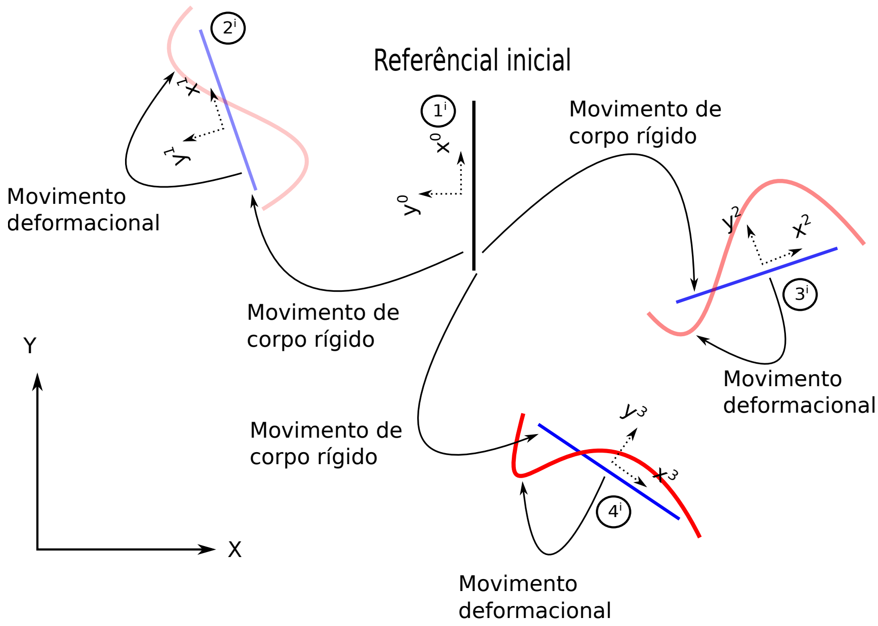


Figura 3.6 – Descrição Co-rotacional.

3.3 - VANTAGENS E DESVANTAGENS DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

Dentre as principais vantagens da formulação co-rotacional para elementos de viga bidimensionais, pode-se salientar:

1. melhor entendimento físico da separação do movimento de corpo rígido do deformacional da estrutura;

2. facilidade na formulação matemática da matriz de rigidez do elemento de viga, pois, em sua formulação, a matriz de rigidez do elemento pode ser decomposta dentro da soma de uma parte de rigidez geométrica, associada aos movimentos de corpo rígido, e de uma parte associada somente à deformação do elemento dentro da configuração de referência co-rotacional;

3. possibilidade de utilização dos modos naturais de deformação da viga, que podem ser adequadamente escolhidos, de modo a gerar simplificações consideráveis. A escolha

de modos de deformação simétrica, relacionada ao modelo de Bernoulli, e antissimétrica, relacionada ao modelo de Timoshenko, permitem a unificação da teoria de Bernoulli e Timoshenko introduzindo o parâmetro de cisalhamento a flexão de vigas na matriz de rigidez do elemento, evitando empecilhos como o *shear locking*;

4. deslocamentos e rotações dentro do sistema de referência local são pequenos ou ao menos moderados, podendo a deformação da viga ser modelada por uma teoria aproximada de viga;

5. possibilidade de reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes, em uma análise não-linear geométrica de estruturas;

6. eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes rotações e deslocamentos, e pequenas deformações, caracterizando uma não-linearidades geométrica. Esse assunto está associado a uma grande variedade de problemas práticos da engenharia estrutural.

Dentre as principais desvantagens, pode-se evidenciar:

1. Na análise de problemas que compreendem grandes deformações, a deformação da viga não mais pode ser modelada por uma teoria aproximada de viga, portanto a formulação co-rotacional, nesse caso, se torna inviável;

2. A formulação é utilizada somente para o caso de elementos finitos contendo dois nós.

4 - FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL DE UM ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO BERNOULLI-TIMOSHENKO

4.1 - INTRODUÇÃO

O elemento tipo viga é um elemento 1D que trabalha fundamentalmente à flexão. Dois modelos matemáticos baseados na hipótese de comportamento elástico e isotrópico do material são bastante utilizados na mecânica estrutural para discretizar elementos de viga que compõem as estruturas. O primeiro deles está associado à teoria clássica de viga, e é conhecido como modelo de Euler-Bernoulli (teoria simplificada). O segundo é conhecido como teoria de vigas de Timoshenko (teoria geral). Embora amplamente utilizados, em certas situações esses modelos podem falhar.

A Teoria de viga de Euler-Bernoulli se baseia em importantes hipóteses que surgem a partir da configuração deformada do elemento. Uma dessas hipóteses é a de que os deslocamentos verticais de todos os pontos da viga são considerados iguais aos do eixo da viga, ou seja, a viga possui um plano de simetria longitudinal; os deslocamentos laterais são nulos; as linhas verticais permanecerão retas e perpendiculares às linhas horizontais que fletiram, e para isso elas sofrerão uma pequena rotação; deformações e rotações transversais são tão pequenas que é assumida uma deformação infinitesimal aplicada; deformações devido a tensões cortantes são desprezadas; e, por fim, ao se considerar um material elástico e isotrópico, isto implica que o mesmo possui propriedades iguais em todas as direções.

O modelo de Timoshenko amplia a teoria clássica de viga, considerando o efeito das deformações cisalhantes. Portanto, a grande diferença da teoria de vigas de Euler-Bernoulli para a de Timoshenko é que, nesta última, considera-se a deformação por esforços cortantes, enquanto, na primeira, não. Isso faz com que essa teoria descreva de forma mais real o comportamento de vigas. Sendo assim, após a configuração deformada do elemento, as seguintes hipóteses são relevantes: deformações devido a tensões cortantes são computadas, de forma que as linhas verticais não permanecerão retas e perpendiculares às linhas horizontais que fletiram, ou seja, assim como as linhas longitudinais, estas também deformarão; assim como na viga de Bernoulli, os deslocamentos verticais de todos os pontos da viga são considerados iguais aos do eixo da viga, os deslocamentos laterais são nulos e o material da viga é considerado elástico e isotrópico.

Ressalta-se que esses modelos podem considerar a não-linearidade geométrica devido ao efeito de grandes deslocamentos e rotações, desde que as hipóteses comentadas sejam obedecidas.

No decorrer deste capítulo, será apresentada a formulação co-rotacional desenvolvida por Krenk (2009), que utilizou os modos de deformação natural propostos por Argyris et al. (1979) para buscar simplificações consideráveis que pudessem ser obtidas por meio da representação da deformação dos modos naturais, desde que em termos adequados. Em relação a esses termos, existem diferentes formas para selecioná-los, mas, nesse contexto, convém utilizar, além do modo de deformação axial, outros dois modos de deformação: o simétrico e o antissimétrico. O primeiro faz referência ao modelo de Euler-Bernoulli, e o segundo, ao modelo de Timoshenko. Esses combinados formam uma robusta ferramenta para cálculo de pórticos, e a essa combinação dá-se o nome de teoria de viga unificada Bernoulli-Timoshenko. Essa teoria tem como trunfo evitar o *shear locking*, problema recorrente no cálculo de vigas (Matias et al., 2015).

4.2 - DESCRIÇÃO CINEMÁTICA CO-ROTACIONAL

Conforme supracitado, a formulação co-rotacional apresenta como grande vantagem comparativa o fato de possibilitar a decomposição da rigidez tangente em duas parcelas: uma associada à rotação do sistema de elemento base e a outra associada à deformação do elemento dentro desse sistema. Dessa forma, esta seção trata de detalhar os processos, as etapas e as considerações que envolvem a formulação co-rotacional e que possibilitarão a formulação da matriz de rigidez de um elemento de viga unificado Bernouli-Timoshenko no espaço bidimensional.

Para o desenvolvimento da formulação co-rotacional proposta, será utilizado um elemento de viga genérico de nós 1 e 2 (Figura 4.1). Na figura, além da presença do elemento de viga, encontram-se representados o sistema de eixos global (X,Y) fixo e o sistema de eixos local $(\mathrm{x_e}, \mathrm{y_e})$ móvel.

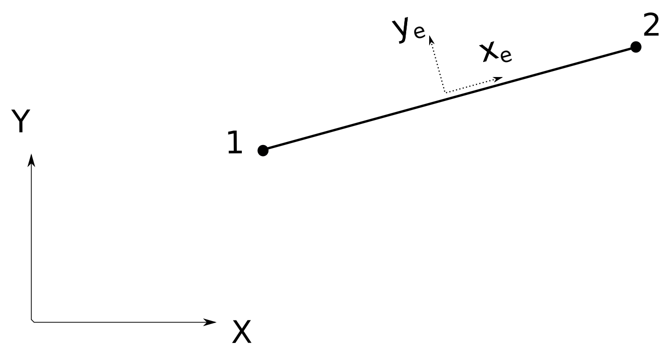


Figura 4.1 – Elemento de viga genérico.

A partir deste momento, os nós 1 e 2 não mais serão apresentados ficando implícita sua presença pela posição apresentada pela Figura 4.1. O elemento de viga genérico (Figura 4.1), submetido a deslocamentos de corpo rígido e deformacionais é resumido pela Figura 4.2.

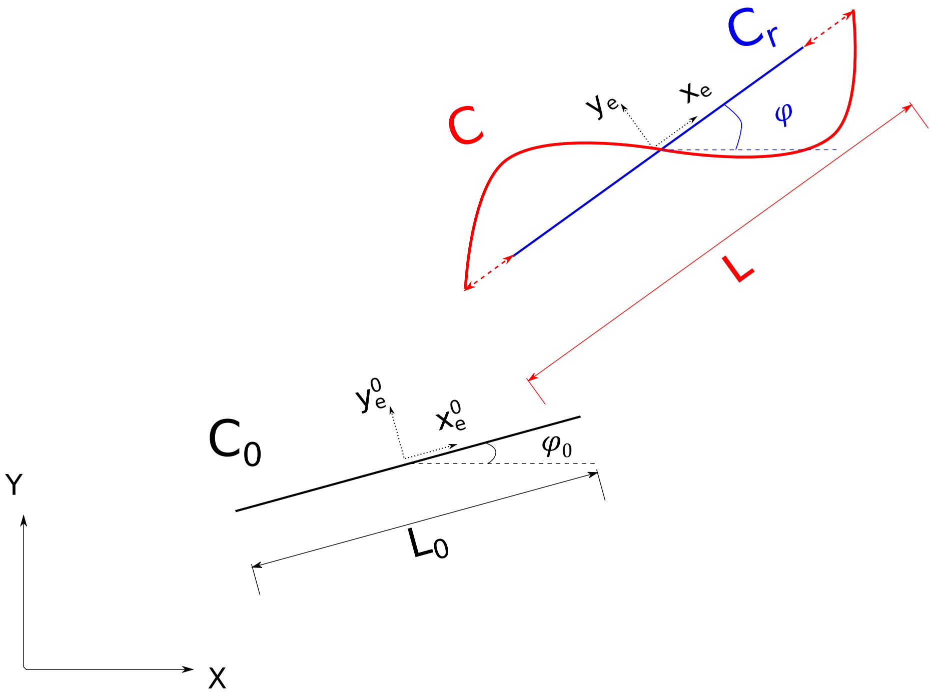


Figura 4.2 – Cinemática co-rotacional do elemento de viga.

A Figura 4.2 apresenta o elemento submetido a três configurações. Inicialmente, o elemento se encontra na configuração inicial (C_0). Em seguida, por meio da aplicação dos movimentos de corpo rígido, o elemento passa à configuração co-rotacionada (C_r). Por fim, a partir das deformações no elemento co-rotacionado (C_r), chega-se à configuração final (C) do elemento.

É importante frisar que na realidade o processo todo realiza-se de modo simultâneo; a separação dos movimentos é de cunho meramente didático e tem o papel de auxiliar na montagem das equações que constituem a formulação co-rotacional.

4.2.1 - Graus de liberdade do elemento

Os graus de liberdade do elemento relativos aos deslocamentos da viga podem ser descritos tanto em relação ao sistema global quanto em relação ao sistema local:

$$\mathbf{u}^T = \begin{Bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{u}^{e^T} = \left\{ u_1^e \quad v_1^e \quad \theta_1^e \quad u_2^e \quad v_2^e \quad \theta_2^e \right\}. \tag{4.2}$$

Em (4.1) e (4.2), o sobrescrito e representa o sistema local enquanto a ausência dele representa o sistema global. Os ângulos θ e θ^e equivalem aos graus de liberdade referente às rotações. Os graus de liberdade relativos aos movimentos de translação no sentido horizontal são representados por u e u^e, e os graus de liberdade relativos ao movimento de translação no sentido vertical são representados por v e v^e. Os subíndices 1 e 2 representam os nós do elemento.

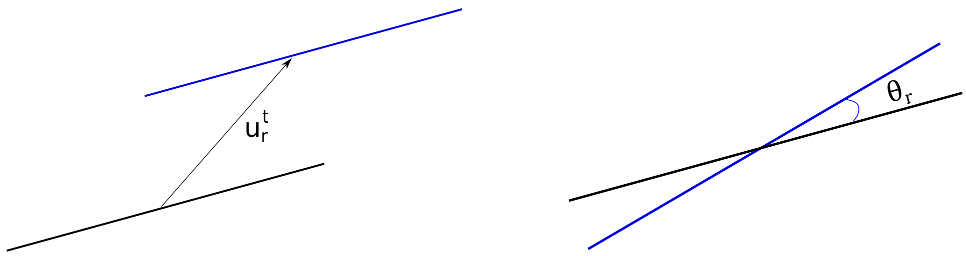
Os seis componentes de deslocamento citados requerem a existência de seis componentes de força correspondentes. Logo, os vetores de força global e local são respectivamente:

$$\mathbf{f}^T = \left\{ f_{x_1} \quad f_{y_1} \quad m_1 \quad f_{x_2} \quad f_{y_2} \quad m_2 \right\} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{f}^{e^T} = \left\{ f_{x_1}^e \quad f_{y_1}^e \quad m_1^e \quad f_{x_2}^e \quad f_{y_2}^e \quad m_2^e \right\}. \tag{4.4}$$

4.2.2 - Deslocamentos de corpo rígido

A primeira etapa do processo da formulação co-rotacional consiste em descrever os deslocamentos de corpo rígido, em que os movimentos de translação e rotação são considerados (Figura 4.3).



(a) Deslocamento translacional. (b) Deslocamento rotacional.

Figura 4.3 – Deslocamento translacional e rotacional do elemento de viga.

A combinação dos movimentos rotacional e translacional pode ser mais bem entendida por meio da Figura 4.4, em que a configuração C_0 do elemento refere-se ao estado em que a viga ainda se encontra indeformada e não deslocada. Nesse estado, o comprimento e o ângulo inicial do elemento são representados por L_0 e φ_0, respectivamente.

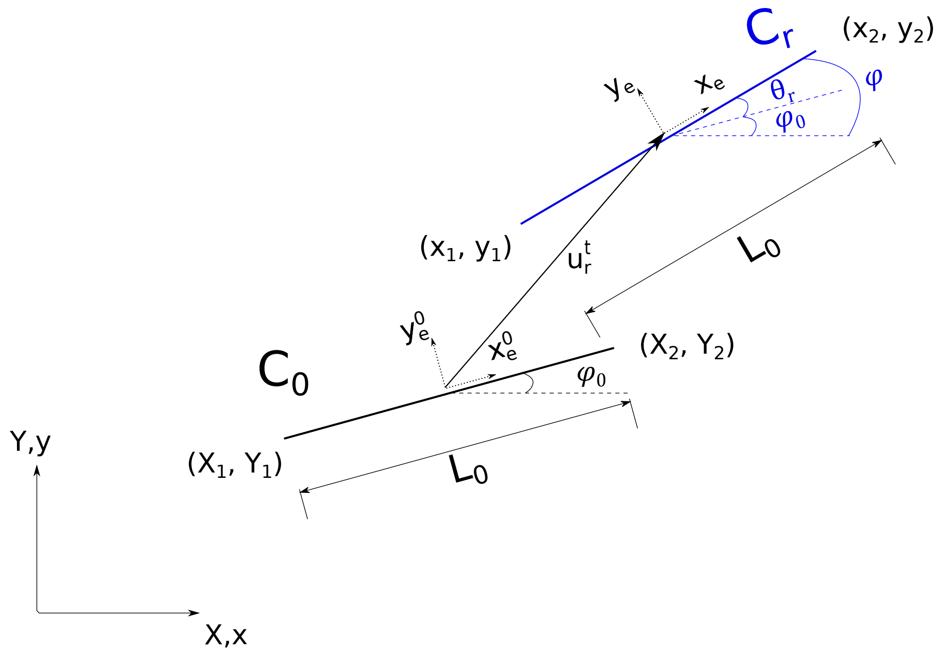


Figura 4.4 – Deslocamentos de corpo rígido.

Partindo da configuração inicial C_0, a aplicação dos movimentos de corpo rígido implica um vetor de deslocamentos $\mathbf{u}_r$, referente ao eixo do elemento

$$\mathbf{u}_r = \begin{Bmatrix} \frac{x_2+x_1}{2} - \frac{X_2+X_1}{2} \\ \frac{y_2+y_1}{2} - \frac{Y_2+Y_1}{2} \\ \theta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_2+u_1}{2} \\ \frac{v_2+v_1}{2} \\ \varphi - \varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ \theta_r \end{Bmatrix}, \tag{4.5}$$

em que as duas primeiras linhas do vetor representam os graus de liberdade referentes à translação $\mathbf{u}_r^t$, no qual u_r e v_r representam os deslocamentos referentes aos movimentos horizontal e vertical, respectivamente; a terceira linha representa a rotação adicional (θ_r) que ocorre da posição inicial para a co-rotacionada (φ_0), essas juntas formam o ângulo final (φ).

4.2.3 - Deslocamentos deformacionais

A descrição inteira do movimento do elemento de viga requer seis componentes, dos quais três são usados para descrever os movimentos de corpo rígido e os outros três, para descrever a deformação da viga. Os três últimos definem três modos de deformação do elemento estudado: axial, simétrico e antissimétrico.

Para passar da configuração C_r para a C à configuração co-rotacionada, somam-se as três configurações de deformação. A essas três configurações de deformação relacionam-se três pares de forças internas equivalentes.

Na primeira configuração deformada (Figura 4.5), as deformações horizontais ($\frac{1}{2}u$) relacionam-se a duas forças internas axiais (N), presentes nos nós do elemento de dois nós apresentado.

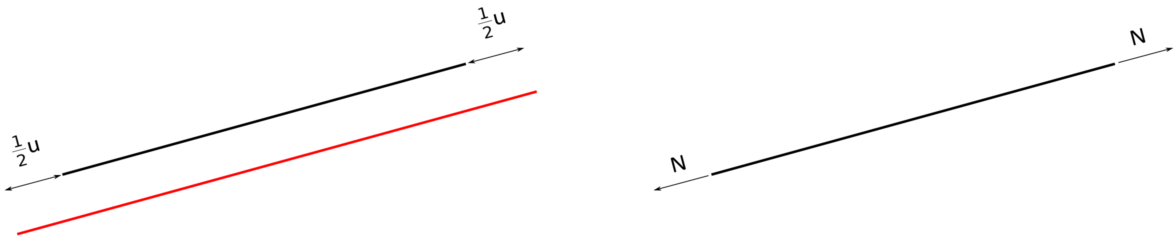


Figura 4.5 – Deformação axial e força normal de referência.

Já na segunda representação (Figura 4.6), à configuração deformada, relacionada a flexão simétrica (ou pura) ($\frac{1}{2}\theta_s$), se desenhará de forma a introduzir dois momentos internos simétricos (M_s), nos nós da barra, cada qual com um sentido, sendo um, horário (nó 1) e outro, anti-horário (nó 2).

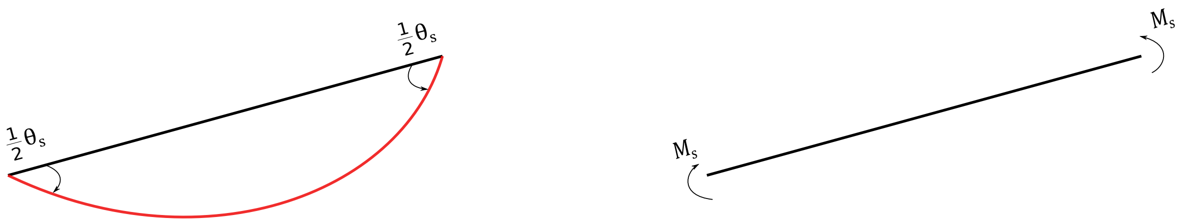


Figura 4.6 – Flexão simétrica e momentos simétricos de referência.

Por fim, a deformação por flexão antissimétrica (ou simples) ($\frac{1}{2}\theta_a$), apresentada na Figura 4.7, resultará em momentos internos antissimétricos (M_a) gerados nas extremidades do elemento, com sentidos anti-horários. Destaca-se que, para que essa configuração satisfaça as equações de equilíbrio estáticas do elemento, ela deverá apresentar duas forças verticais (Q) de sentidos opostos.

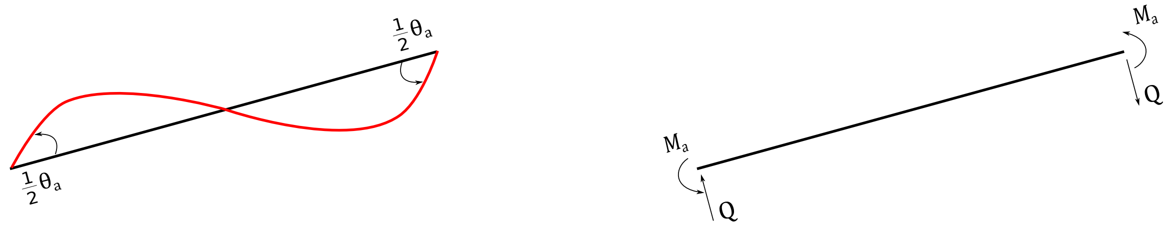


Figura 4.7 – Flexão antissimétrica e momentos antissimétricos de referência.

Devido aos movimentos deformacionais considerados para a análise da devida conjuntura, sendo eles de deformação axial, por flexão simétrica e antissimétrica, o elemento em questão possuirá, respectivamente, os seguintes vetores de deslocamentos deformacionais e de forças internas relacionados entre si:

$$\mathbf{u}_d^T = \begin{Bmatrix} u & \theta_s & \theta_a \end{Bmatrix}, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{f}_d^T = \begin{Bmatrix} N & M_s & M_a \end{Bmatrix}. \tag{4.7}$$

Dessa forma, a configuração final do elemento, resultado das três configurações apresentadas, somada à configuração co-rotacionada da viga, resulta na Figura 4.8, a partir da qual é possível determinar os valores das três componentes do vetor de deslocamentos deformacionais.

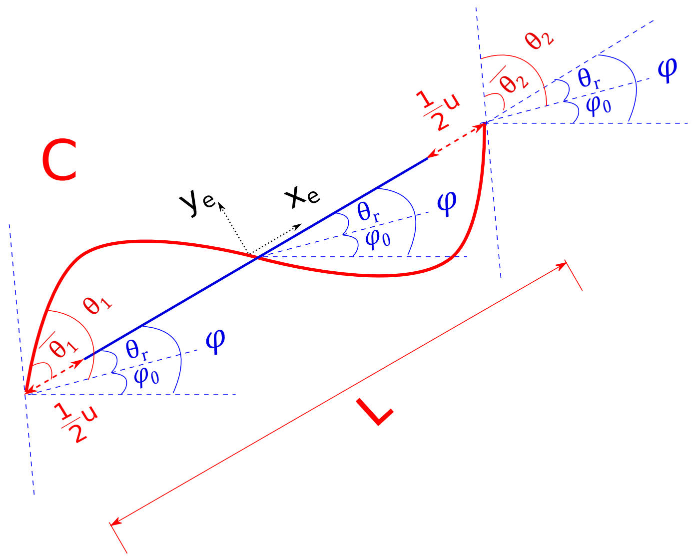


Figura 4.8 – Configuração final do elemento de viga.

O primeiro componente do vetor de deslocamentos deformacionais corresponde à variação de comprimento gerada a partir da deformação axial da viga, que do comprimento inicial L_0 passa a ter comprimento L (Figura 4.10).

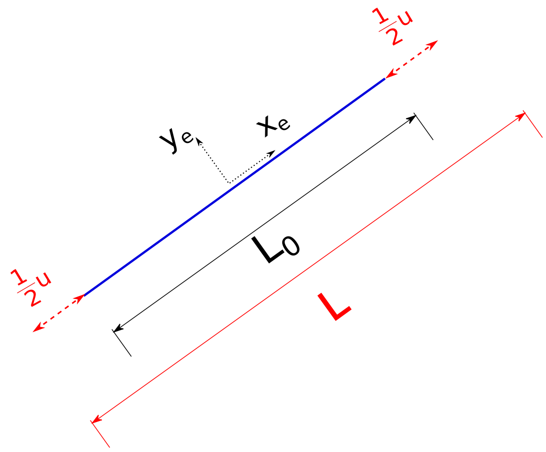


Figura 4.9 – Variação do comprimento do elemento de viga.

Dessa forma, tem-se que

$$u = L - L_0. \tag{4.8}$$

Com o intuito de determinar os outros dois termos do vetor de deslocamentos deformacionais, introduzem-se as variáveis $\overline{\theta_1}$ e $\overline{\theta_2}$ para denotar o ângulo formado pela resultante da deformação por flexão simétrica e antissimétrica dos nós 1 e 2, respectivamente. Para o nó 1, as deformações por flexão se subtraem, já para o nó 2, elas se somam, como ilustra a Figura 4.10.

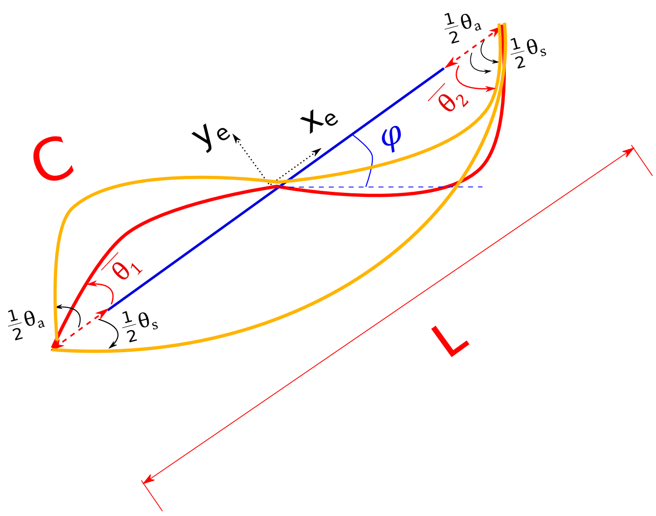


Figura 4.10 – Soma da deformação por flexão simétrica com a deformação por flexão antissimétrica.

Dessa forma, tem-se

$$\overline{\theta_1} = \frac{1}{2}(-\theta_s + \theta_a) \tag{4.9}$$

$$\overline{\theta_2} = \frac{1}{2}(\theta_s + \theta_a). \tag{4.10}$$

Nessa etapa, mais duas variáveis, θ_1 e θ_2, também são introduzidas, com o intuito de determinar os valores de θ_s e θ_a. Essas duas variáveis, como pode ser observado pela Figura 4.8, equivalem à soma dos ângulos gerados pelos dois modos de flexão (equações 4.9 e 4.10) mais o ângulo de rotação de corpo rígido do elemento de viga, referentes aos nós 1 e 2, respectivamente; portanto, tem-se

$$\theta_1 = \overline{\theta_1} + \theta_r \tag{4.11}$$

$$\theta_2 = \overline{\theta_2} + \theta_r \tag{4.12}$$

Relacionando as equações (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) e isolando os termos θ_a e θ_s, estes resultam em

$$\theta_s = \theta_2 - \theta_1. \tag{4.13}$$

$$\theta_a = \theta_1 + \theta_2 - 2\theta_r \tag{4.14}$$

Por meio dos três modos de deformação propostos (Figuras 4.5, 4.6 e 4.7) e das equações de equilíbrio estáticas que satisfazem tais configurações, torna-se possível a composição dos diagramas de esforços presentes na viga como o Diagrama de Esforço Cortante (DEC), o Diagrama de Esforço Normal (DEN) e o Diagrama de Momento Fletor (DMF). Mais à frente, a força cortante $Q(x)$, a força norma $N(x)$ e o momento fletor $M(x)$ dos elementos de viga servirão de base para a determinação da matriz de rigidez constitutiva do elemento.

Os diagramas correspondentes ao par de forças internas normais, dados por

$$Q(x) = 0, \tag{4.15a}$$

$$N(x) = N, \tag{4.15b}$$

$$M(x) = 0, \tag{4.15c}$$

são representados de acordo com a Figura 4.11.

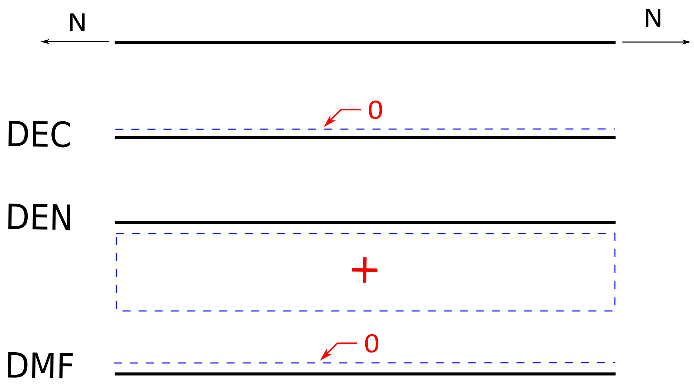


Figura 4.11 – DEC, DEN e DMF para o par de forças normais N.

Os diagramas correspondentes ao par de momentos internos simétricos, dados por

$$Q(x) = 0, \tag{4.16a}$$
$$N(x) = 0, \tag{4.16b}$$
$$M(x) = M_s, \tag{4.16c}$$

são representados de acordo com a Figura 4.12.

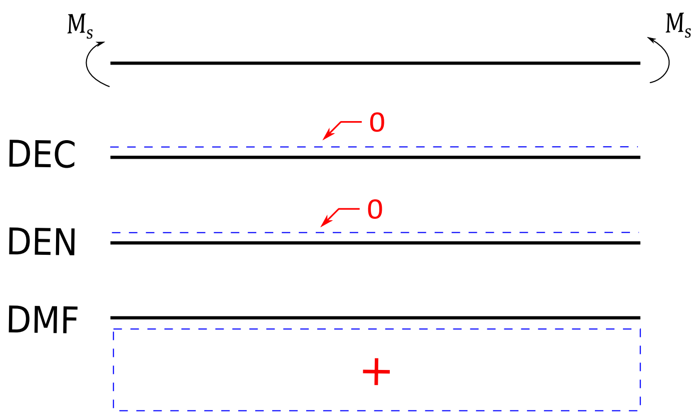


Figura 4.12 – DEC, DEN e DMF para o par de momentos simétricos M_s.

Como já apresentado, constata-se a necessidade de se equilibrar os momentos antissimétricos por forças verticais Q. O que não se faz necessário nos demais modos de deformação por já apresentarem um sistema autoequilibrado. Os diagramas correspondentes ao par de momentos internos antissimétricos,

$$Q(x) = \frac{2M_a}{L}, \tag{4.17a}$$

$$N(x) = 0, \tag{4.17b}$$

$$M(x) = M_a\left(\frac{2}{L}x - 1\right), \tag{4.17c}$$

são dados conforme a Figura 4.13.

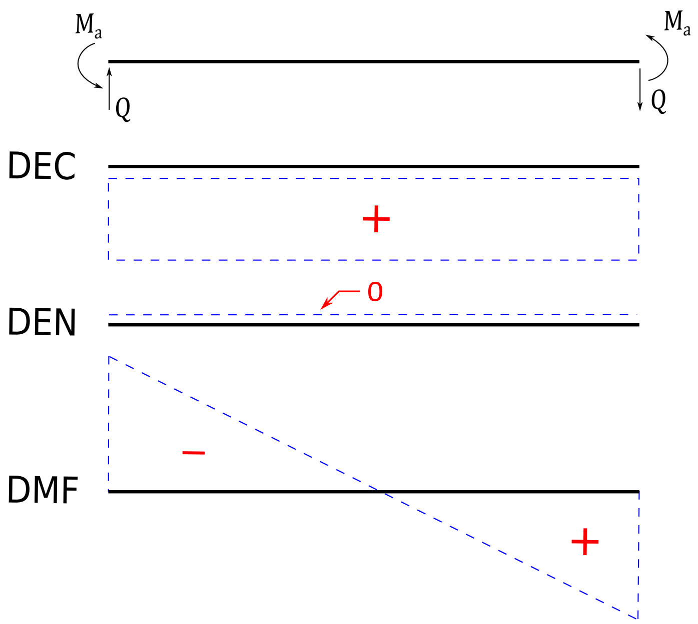


Figura 4.13 – DEC, DEN e DMF para o par de momentos antissimétricos M_a.

4.3 - FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ COROTACIONAL

4.3.1 - Matriz de transformação (S)

Na formulação co-rotacional, para determinar a matriz de rigidez tangente global do elemento estudado, são necessárias duas transformações. Essas transformações partem do Princípio dos Trabalhos Virtuais, apresentado pela equação (4.18) a seguir,

$$\delta V = \delta \mathbf{u}_d^T\,\mathbf{f}_d = \delta \mathbf{u}^{eT}\,\mathbf{f}^e = \delta \mathbf{u}^T\,\mathbf{f}, \tag{4.18}$$

que relaciona deslocamentos $\delta \mathbf{u}_d^T$ e forças $\mathbf{f}_d$ do sistema deformacional com deslocamentos $\delta \mathbf{u}^{eT}$ e forças $\mathbf{f}^e$ do sistema local generalizado, para em seguida se relacionar com deslocamentos $\delta \mathbf{u}^T$ e forças $\mathbf{f}$ do sistema global generalizado, como mostra a Figura 4.14.

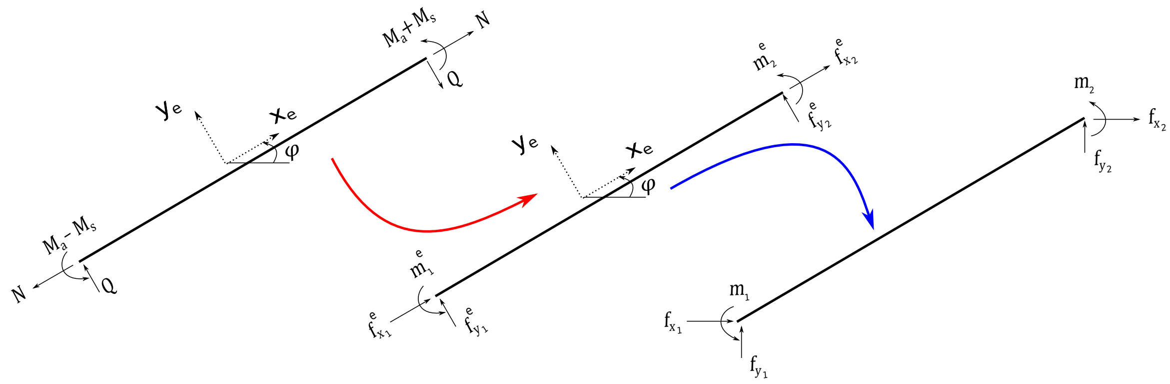


Figura 4.14 – Transformação de forças nodais.

Como visto pela equação (4.18), inicialmente, é possível relacionar um sistema referente às forças locais generalizadas ($\mathbf{f}^e$) a outro, relacionado às forças internas ($\mathbf{f}_d$), decorrentes dos módulos naturais de deformação do elemento. Para que essa relação ocorra, os dois sistemas de coordenadas devem estar alinhados. Nesse processo, por meio de uma matriz de transformação $\mathbf{S}$ (matriz 6×3), ocorre a transformação de um conjunto reduzido de variáveis de forças internas (matriz 3×1) para um conjunto completo de variáveis de forças generalizadas locais (matriz 6×1).

Admitindo-se a direção dos vetores locais generalizados como positivo, tem-se que a relação de forças axiais nos nós *1* e *2* é dada por

$$-f^e_{x_1} = f^e_{x_2} = N, \tag{4.19}$$

enquanto a relação de forças perpendiculares é expressa por

$$f^e_{y_1} = -f^e_{y_2} = Q = \frac{2M_a}{L}\,, \tag{4.20}$$

e, por fim, para a relação de momentos fletores nos nós têm-se

$$m^e_{y_1} = -M_s + M_a, \tag{4.21a}$$

$$m^e_{y_2} = M_s + M_a\,. \tag{4.21b}$$

Realizando a montagem das equações (4.19), (4.20) e (4.21) em formato de matriz, tem-se

$$\begin{bmatrix} f^e_{x_1} \\ f^e_{y_1} \\ m^e_1 \\ f^e_{x_2} \\ f^e_{y_2} \\ m^e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/L \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{f^e} = \mathbf{S}\,\mathbf{f_d}, \tag{4.23}$$

em que a matriz de transformação ($\mathbf{S}$) é igual a

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/L \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

As matrizes $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ são dadas por (4.25) e (4.26) e referem-se a transformação nos nós 1 e 2, respectivamente.

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/L \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

A segunda transformação consiste em, por meio da matriz de rotação $\mathbf{R}$, composta pela rotação dos nós 1 ($\mathbf{R}_1$) e 2 ($\mathbf{R}_2$),

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sen\varphi & 0 \\ sen\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sen\varphi & 0 \\ sen\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \\ & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sen\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\varphi & cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\varphi & -sen\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

transformar a matriz de forças generalizadas locais ($\mathbf{f}^e$) em um conjunto de forças generalizadas globais ($\mathbf{f}$), o que resulta na expressão

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\,\mathbf{f^e}\,. \tag{4.29}$$

Logo, pela relação encontrada na equação (4.23), tem-se que

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\,\mathbf{S}\,\mathbf{f_d}\,. \tag{4.30}$$

De maneira semelhante às forças, os deslocamentos também podem ser relacionados (Figura 4.15).

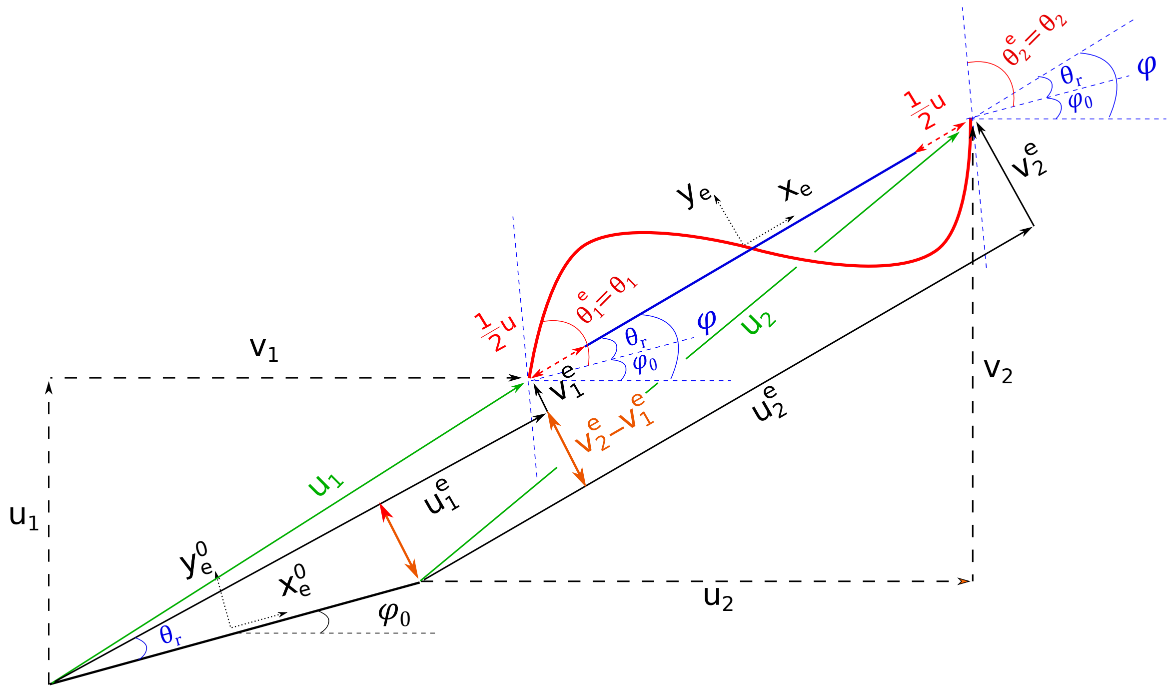


Figura 4.15 – Transformação de deslocamentos nodais.

Por meio da Figura 4.15, têm-se que as relações por deformações axiais são dadas por

$$u = u_2^e - u_1^e. \tag{4.31}$$

Por deformações simétricas, tem-se a relação

$$\theta_s = \theta_2^e - \theta_1^e. \tag{4.32}$$

Para as deformações antissimétricas, tem-se

$$\theta_a = \theta_2^e + \theta_1^e - 2\theta_r. \tag{4.33}$$

Para pequenas rotações, é valida a expressão $sen\ \theta_r \approx \theta_r$. Portanto,

$$\theta_r \approx \frac{v_2^e - v_1^e}{L}. \tag{4.34}$$

Assim, a equação (4.33) se transforma em

$$\theta_a = \theta_2^e + \theta_1^e - 2\frac{v_2^e - v_1^e}{L}. \tag{4.35}$$

Dessa forma, ao relacionar os deslocamentos deformacionais ($\mathbf{u}_d$) com o sistema de deslocamento local generalizado do elemento ($\mathbf{u}^e$), surge a transposta da matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/L & 1 & 0 & -2/L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix}, \tag{4.36}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T \mathbf{u}^e. \tag{4.37}$$

Nesse caso, em vez de utilizar a matriz de transformação para expandir a quantidade de termos, como realizado no caso das forças, utilizou-se a transposta da matriz de transformação, que tem o papel de retirar as componentes dos modos naturais de deformação ($\mathbf{u}_d$) do deslocamento local generalizado ($\mathbf{u}^e$), como expresso pela equação (4.36).

Utiliza-se o mesmo procedimento empregado anteriormente para relacionar forças globais a partir de forças locais por meio da matriz $\mathbf{R}$. Para os deslocamentos globais, tem-se

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\,\mathbf{u^e}. \tag{4.38}$$

Relacionando as equações (4.37) e (4.38), obtém-se

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T\ \mathbf{u}\ \mathbf{R}^{-1}. \tag{4.39}$$

Como $\mathbf{R}$ é uma matriz ortogonal vale, a relação $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$. Logo,

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T\ \mathbf{u}\ \mathbf{R}^T. \tag{4.40}$$

Assim, tem-se que o vetor de deslocamentos globais em relação ao vetor de deslocamentos deformacionais da viga é igual a

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}^{T^{-1}}\ \mathbf{u}_d\ \mathbf{R}. \tag{4.41}$$

4.3.2 - Matriz de rigidez do elemento (K_e)

A matriz de rigidez do elemento de viga estudado ($\mathbf{K}_e$) consiste na soma de duas parcelas. Uma parcela ($\mathbf{K}_r$), pertencente a uma contribuição de rigidez tangente da configuração co-rotacionada, caracteriza a não-linearidade geométrica do elemento. A outra parcela ($\mathbf{K}_d$), decorrente dos modos naturais de deformação e conhecida como a matriz de rigidez constitutiva do elemento, pode ser decomposta em rigidez material ($\mathbf{K}_{d,mat}$) e rigidez geométrica local ($\mathbf{K}_{d,geo}$).

Segundo Krenk (2009), o procedimento padrão para obtenção da rigidez tangente consiste em considerar o incremento do trabalho virtual usado para expressar equilíbrio. No caso de elementos co-rotacionais, somente o trabalho virtual externo δV é utilizado. Portanto, isso conduz à consideração do incremento de trabalho virtual externo aplicado a ($\delta V = \delta\mathbf{u}^T\ \mathbf{f}$). No cálculo desse incremento, o vetor de deslocamento virtual ($\delta\mathbf{u}$) pode ser considerado constante, e assim

$$d(\delta V) = d(\delta\mathbf{u}^T\ \mathbf{f}) = \delta\mathbf{u}^T\ d\mathbf{f}\,. \tag{4.42}$$

A rigidez tangente surgirá, então, da relação incremental das forças generalizadas, encontradas na equação (4.30), sendo

$$d\mathbf{f} = d(\mathbf{R}\ \mathbf{S}\ \mathbf{f}_d) \tag{4.43}$$

e que, a partir da regra do produto, torna-se

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}\ \mathbf{S}\ d\mathbf{f}_d + \mathbf{R}\ d\mathbf{S}\ \mathbf{f}_d + d\mathbf{R}\ \mathbf{S}\ \mathbf{f}_d\,. \tag{4.44}$$

Portanto, com base na avaliação dos termos da equação (4.44), o incremento do vetor de forças globais leva em consideração uma variação nas forças internas dos modos naturais $\mathbf{f}_d$;

uma variação na matriz $\mathbf{S}$, devido a uma alteração em L; e uma variação na matriz de rotação $d\mathbf{R}$, advinda de uma modificação no ângulo de rotação φ. Essas duas últimas relações podem ser notadas por meio das equações (4.24) e (4.28), que dependem apenas das variáveis L e φ, respectivamente.

A variação do vetor de forças internas ($d\mathbf{f}_d$) possui uma relação com a variação do vetor de deformação interna ($d\mathbf{u}_d$), o que pode ser expresso pela seguinte equação de equilíbrio

$$d\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \, d\mathbf{u}_d \,, \tag{4.45}$$

em que $\mathbf{K}_d$ representa a matriz de rigidez relacionada aos modos naturais de deformação do elemento. Diferenciando a equação (4.37), relacionando-a com a equação (4.45), e substituindo o resultado encontrado na equação (4.44), determina-se, após algum algebrismo, a seguinte expressão:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}\,\mathbf{S}\,\mathbf{K}_d\,\mathbf{S}^T\,d\mathbf{u}_e + \mathbf{R}\,d\mathbf{S}\,\mathbf{f}_d + d\mathbf{R}\,\mathbf{S}\,\mathbf{f}_d \tag{4.46a}$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}\,[\mathbf{S}\,\mathbf{K}_d\,\mathbf{S}^T\,d\mathbf{u}_e + d\mathbf{S}\,\mathbf{f}_d + d\mathbf{R}\,\mathbf{S}\,\mathbf{f}_d\,\mathbf{R}^{-1}] \tag{4.46b}$$

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}\,[\mathbf{S}\,\mathbf{K}_d\,\mathbf{S}^T\,d\mathbf{u}_e + \mathbf{f}_d\,(d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T\,d\mathbf{R}\,\mathbf{S})] \tag{4.46c}$$

$$\mathbf{R}^T\,d\mathbf{f} = \mathbf{S}\,\mathbf{K}_d\,\mathbf{S}^T\,d\mathbf{u}_e + \mathbf{f}_d\,(d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T\,d\mathbf{R}\,\mathbf{S}) \tag{4.46d}$$

$$d\mathbf{f}_e = [\;\mathbf{S}\,\mathbf{K}_d\,\mathbf{S}^T + \mathbf{f}_d\,(d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T\,d\mathbf{R}\,\mathbf{S})\,d\mathbf{u}_e^{-1}\;]\,d\mathbf{u}_e\,. \tag{4.46e}$$

Dada a variação da equação de equilíbrio local

$$d\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e\,d\mathbf{u}_e, \tag{4.47}$$

depreende-se das equações (4.46e) e (4.47) que a matriz de rigidez ($\mathbf{K}_e$) é igual a

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S}\,\mathbf{K}_d\,\mathbf{S}^T + \mathbf{f}_d\,(d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T\,d\mathbf{R}\,\mathbf{S})\,d\mathbf{u}_e^{-1}. \tag{4.48}$$

Dessa forma, nota-se que a matriz de rigidez do elemento pode ser representada em duas parcelas. A primeira, relacionada à matriz constitutiva ($\mathbf{K}_d$) e a segunda, à matriz de rigidez geométrica co-rotacional ($\mathbf{K}_r$), que pode, dessa maneira, ser descrita como

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{f}_d\,(d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T\,d\mathbf{R}\,\mathbf{S})\,d\mathbf{u}_e^{-1}. \tag{4.49}$$

Logo, tem-se que a matriz de rigidez local é igual a

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S}\,\mathbf{K}_d\,\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r. \tag{4.50}$$

4.3.3 - Matriz de rigidez co-rotacional (K_r)

A partir da equação (4.49), é possível realizar a montagem da matriz de rigidez ($\mathbf{K}_r$).

Desta maneira, multiplicando-se a transposta da matriz de rotação $\mathbf{R}^T$

$$\begin{bmatrix} cos\varphi & sen\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\varphi & cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.51}$$

por sua derivada $d\mathbf{R}$

$$\begin{bmatrix} -sen\varphi & -cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cos\varphi & -sen\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\varphi & -cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\varphi & -sen\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi, \tag{4.52}$$

tem-se a seguinte expressão

$$\mathbf{R}^T\, d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi. \tag{4.53}$$

Esta, multiplicada pela matriz de transformação $\mathbf{S}$, resulta em

$$(\mathbf{R}^T\, d\mathbf{R})\, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/L \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/L \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi. \tag{4.54}$$

A equação (4.54), multiplicada pelo vetor de forças internas geradas a partir dos modos naturais de deformação, implica em

$$(\mathbf{R}^T\, d\mathbf{R}\, \mathbf{S})\, \mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/L \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\varphi \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_a \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2M_a/L \\ -N \\ 0 \\ 2M_a/L \\ N \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi = \begin{bmatrix} -Q \\ -N \\ 0 \\ Q \\ N \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi. \quad (4.55)$$

A variação do ângulo de rotação $d\varphi$ nada mais é que o incremento da rotação gerado pelo movimento de corpo rígido θ_r. Portanto, por meio da relação da equação (4.34), a equação (4.55) toma a forma

$$(\mathbf{R}^T\, d\mathbf{R}\, \mathbf{S}\, \mathbf{f}_d) d\varphi = \begin{bmatrix} -Q \\ -N \\ 0 \\ Q \\ N \\ 0 \end{bmatrix} \frac{dv_2^e - dv_1^e}{L} = \begin{bmatrix} 0 & Q/L & 0 & 0 & -Q/L & 0 \\ 0 & N/L & 0 & 0 & -N/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q/L & 0 & 0 & Q/L & 0 \\ 0 & -N/L & 0 & 0 & N/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du_1^e \\ dv_1^e \\ d\theta_1^e \\ du_2^e \\ dy_2^e \\ d\theta_2^e \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Ao multiplicar o vetor de forças internas pela variação da matriz de transformação, tem-se

$$(d\mathbf{S})\, \mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/L^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dL \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_a \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2M_a/L^2 \\ 0 \\ 0 \\ 2M_a/L^2 \\ 0 \end{bmatrix} dL = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q/L \\ 0 \\ 0 \\ Q/L \\ 0 \end{bmatrix} dL. \quad (4.57)$$

Da relação do incremento de comprimento L, dada pela variação da equação (4.31), substituindo-a na equação (4.57), esta se torna

$$(d\mathbf{S}\, \mathbf{f}_d) dL = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q/L \\ 0 \\ 0 \\ Q/L \\ 0 \end{bmatrix} (du_2^e - du_1^e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q/L & 0 & 0 & -Q/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -Q/L & 0 & 0 & Q/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du_1^e \\ dv_1^e \\ d\theta_1^e \\ du_2^e \\ dy_2^e \\ d\theta_2^e \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Por fim, na soma das equação (4.56) e (4.58), o vetor de incremento de deslocamentos ($d\mathbf{u}_e$)

pode ser colocado em evidência, esse cancela com o vetor de incremento de deslocamentos ($d\mathbf{u}_e^{-1}$) presente na equação (4.54); dessa forma, a matriz de rigidez $\mathbf{K}_r$ (equação (4.54)) é expressa por

$$\mathbf{K}_r = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & N & 0 & -Q & -N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -N & 0 & Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.59}$$

A matriz de rigidez encontrada pode ser representada em forma de matriz de bloco; sendo assim,

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^r & -\mathbf{K}_{12}^r \\ -\mathbf{K}_{21}^r & \mathbf{K}_{22}^r \end{bmatrix}. \tag{4.60}$$

Logo,

$$\mathbf{K}_{11}^r = \mathbf{K}_{22}^r = -\mathbf{K}_{12}^r = -\mathbf{K}_{21}^r = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.61}$$

4.3.4 - Matriz de rigidez constitutiva ($\mathbf{K}_d$)

A matriz de rigidez constitutiva $\mathbf{K}_d$ é uma matriz que relaciona as deformações com as propriedades físicas (materiais) do elemento estudado $\mathbf{K}_{d,mat}$. Em alguns casos, esta relação poderá envolver uma parcela de contribuição geométrica local $\mathbf{K}_{d,geo}$. Portanto, a seguir será demonstrada a montagem das matrizes de rigidez tangente $\mathbf{K}_{d,mat}$ e $\mathbf{K}_{d,geo}$.

4.3.4.1 - Matriz de rigidez material

Pela equação de equilíbrio referente a matriz de rigidez tangente material, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM_s \\ dM_a \end{Bmatrix} = \left\{ \mathbf{K}_{d,mat} \right\} \begin{Bmatrix} du \\ d\varphi_s \\ d\varphi_a \end{Bmatrix}. \tag{4.62}$$

Para os cálculos que se seguem, será considerada uma viga linear, homogênea e elástica. Essas considerações terão efeito de simplificação na formulação. A matriz de rigidez terá dimensões 3×3. Como a rigidez dos modos de deformação não possui relação entre si, a matriz de rigidez constitutiva será uma matriz diagonal. O primeiro termo da diagonal da matriz de rigidez está relacionado ao módulo de deformação axial; o segundo, à deformação por flexão simétrica e o terceiro, à flexão antissimétrica. Os demais termos da matriz serão zeros.

Partindo-se do princípio dos trabalhos virtuais complementares, o primeiro termo da diagonal principal da matriz de rigidez relacionado a cargas e deslocamentos axiais é expresso por

$$\frac{1}{2}Nu = \int_0^L \frac{N(x)^2}{2EA}dx. \tag{4.63}$$

Por meio da equação de equilíbrio (4.15b) apresentada anteriormente, a equação (4.63) torna-se

$$\frac{1}{2}Nu = \frac{N^2L}{2EA}. \tag{4.64}$$

Isolando a força axial presente na equação, obtém-se a expressão

$$N = \frac{EA}{L}\,u. \tag{4.65}$$

Considerando E, A e L constantes e diferenciando a equação (4.65), tem-se

$$dN = \frac{EA}{L}\,du. \tag{4.66}$$

Depreende-se da equação (4.66) que a rigidez material com relação à variação das forças axiais equivale a

$$k_{11} = \frac{EA}{L}. \tag{4.67}$$

O segundo termo da diagonal principal é resultado da relação entre os momentos fletores simétricos aplicados nos nós do elemento e sua correspondente deformação à flexão. Por meio dos trabalhos virtuais complementares, tem-se que

$$\frac{1}{2}M_s\theta_s = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI}\,dx. \tag{4.68}$$

Substituindo a equação (4.16c) dentro da equação (4.68), esta se transforma em

$$\frac{1}{2}M_s\,\theta_s = \frac{{M_s}^2}{EI}\,L. \tag{4.69}$$

Isolando o momento fletor simétrico, surge a equação

$$M_s = \frac{EI}{L}\,\theta_s. \tag{4.70}$$

Diferenciando a equação (4.70) e considerando E, I e L constantes, obtém-se

$$dM_s = \frac{EI}{L}\,d\theta_s. \tag{4.71}$$

Desta maneira surge o segundo termo da diagonal principal da matriz de rigidez, igual a

$$k_{22} = \frac{EI}{L}. \tag{4.72}$$

O terceiro termo da diagonal principal é resultado da relação entre os momentos fletores antissimétricos aplicados nas extremidades do elemento e sua correlata deformação de flexão antissimétrica. Partindo-se do princípio dos trabalhos virtuais complementares, tem-se que

$$\frac{1}{2}M_a\theta_a = \int_0^L \left(\frac{M(x)^2}{2EI} + \frac{Q(x)^2}{2GA_0} \right) \, dx. \tag{4.73}$$

Como, para satisfazer as equações de equilíbrio estático da viga, há a presença de forças cisalhantes nos nós do elemento, a equação (4.73) possui uma parcela correspondente aos momentos fletores antissimétricos e outra relacionada às forças cisalhantes, localizadas nas extremidades do elemento de viga. Resolvendo o primeiro termo do lado direito da equação (4.73) com a utilização da equação (4.17c), obtém-se

$$\int_0^L \frac{M(x)^2}{EI} \, dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[M_a \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \right]^2 \, dx = \frac{{M_a}^2 L}{3EI}. \tag{4.74}$$

Desenvolvendo o segundo termo do lado direito da equação (4.73) com o auxílio da equação (4.17a), tem-se

$$\int_0^L \frac{Q(x)^2}{GA_0} = \frac{1}{GA_0} \int_0^L \left(\frac{2M_a}{L} \right)^2 dx = \frac{4{M_a}^2 L}{GA_0 L^2}. \tag{4.75}$$

Retomando os termos desenvolvidos para a equação (4.73), (equações (4.74) e (4.75)), e somando-os, obtém-se a expressão

$$M_a \, \theta_a = \frac{{M_a}^2 L}{3EI} + \frac{4{M_a}^2 L}{GA_0 L^2} = L \left(\frac{{M_a}^2}{3EI} + \frac{4{M_a}^2}{GA_0 L^2} \right). \tag{4.76}$$

Isolando o momento antissimétrico, aplicando algum algebrismo e incorporando a variável ψ_a, tem-se

$$M_a = \left(3EI \frac{GA_0 L^2}{GA_0 L^2 + 12EI} \right) \frac{\theta_a}{L} = \left(\frac{3EI\psi_a}{L} \right) \theta_a. \tag{4.77}$$

Pela equação (4.77), nota-se que o termo ψ_a equivale a

$$\psi_a = \frac{GA_0 L^2}{GA_0 L^2 + 12EI} \tag{4.78}$$

e este pode ser simplificado tornando-se

$$\psi_a = \frac{1}{1 + \Phi}, \tag{4.79}$$

em que

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_0L^2}. \tag{4.80}$$

A presença da variável Φ (parâmetro de cisalhamento), dentro da matriz de rigidez do elemento, garante que o efeito de deformação cisalhante na flexão de vigas seja considerado. A variável A_0 corresponde à área da seção transversal corrigida pelo fator de forma f, que leva em conta o efeito da distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal.

Diferenciando a equação (4.77) e considerando E, I e L constantes, obtém-se

$$dM_a = \frac{3EI\psi_a}{L}d\theta_a \tag{4.81}$$

Com o terceiro termo da matriz de rigidez constitutiva encontrado,

$$k_{33} = \frac{3EI\psi_a}{L}, \tag{4.82}$$

a forma completa da matriz de rigidez material pode ser expressa. Por não haver relação entre os modos de deformação natural, os demais termos da matriz de rigidez material serão zeros. Portanto, de posse das equações (4.67), (4.72) e (4.82), tem-se

$$\mathbf{K}_{d,mat} = \frac{1}{L}\begin{Bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 3EI\psi_a \end{Bmatrix}. \tag{4.83}$$

4.3.4.2 - Matriz de rigidez geométrica local

A matriz de rigidez geométrica local ($\mathbf{K}_{d,geo}$) está associada à matriz constitutiva do elemento. Seu cálculo é realizado a partir da equação diferencial (4.85), que governa o comportamento de uma viga-coluna submetida a flexão e sujeita a esforços normais. Para efeito de cálculo, não será utilizada a força cortante, pois, segundo Krenk (2009), a contribuição geométrica para a rigidez dos modos de deformação local pode ser avaliada sob a hipótese simplificadora de desaparecimento da deformação cortante, em que os resultados tornam-se muito simples e geralmente bastante representativos.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(N\frac{dw}{dx}\right) - p = 0 \tag{4.84}$$

Tomando $p = 0$, pois não há presença de carregamento distribuído, tem-se

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} - N\frac{d^2w}{dx^2} = 0. \tag{4.85}$$

A contribuição de rigidez geométrica local correspondente será obtida por meio de incrementos de trabalhos virtuais (δV). Assim sendo, um deslocamento virtual δw, seguido da integração da equação diferencial (4.85) nos limites de 0 a L, serão aplicados.

$$\delta V = \int_0^L \delta w \left(EI\frac{d^4w}{dx^4} - N\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx = 0 \tag{4.86}$$

A representação inicial da equação (4.86) é conhecida com forma forte. Com o intuito de chegar à forma fraca, na qual as condições de contorno naturais já se encontram aplicadas, será feita a integração por partes dos termos da equação (4.86) até que estes se tornem de mesma ordem.

Isto posto, ao integrar por partes duas vezes a primeira parcela da equação (4.86), tem-se

$$\int_0^L \delta w \left(EI\frac{d^4w}{dx^4} \right) dx = \int_0^L \frac{d^2\delta w}{dx^2} EI\frac{d^2w}{dx^2} dx - \left[\frac{d\delta w}{dx} EI\frac{d^2w}{dx^2} \right]_0^L + \left[\delta w EI\frac{d^3w}{dx^3} \right]_0^L . \tag{4.87}$$

E, ao integrar por partes a segunda parcela da equação (4.86) apenas uma vez, tem-se

$$-\int_0^L \delta w \left(N\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx = \int_0^L \frac{d\delta w}{dx} N\frac{dw}{dx} dx - \left[\delta w N\frac{dw}{dx} \right]_0^L . \tag{4.88}$$

Retornando à equação (4.86) e substituindo os valores encontrados nas equações (4.87) e (4.88), tem-se que o trabalho virtual interno é igual a

$$\delta V = \int_0^L \left(\frac{d\delta w}{dx} N\frac{dw}{dx} + \frac{d^2\delta w}{dx^2} EI\frac{d^2w}{dx^2} \right) dx + \left[-\frac{d\delta w}{dx} EI\frac{d^2w}{dx^2} + \delta w \left(EI\frac{d^3w}{dx^3} - N\frac{dw}{dx} \right) \right]_0^L . \tag{4.89}$$

Os termos de bordo, á direita da equação (4.89), não pertencentes á integral, possuem algumas relações de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) conhecidas, que nada mais são que as condições de contorno naturais já presentes na equação. São elas a rotação da viga, dada por

$$\delta\theta = \frac{d\delta w}{dx}, \tag{4.90}$$

o momento fletor, dado por

$$M = EI\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{4.91}$$

e a força cortante, expressa por

$$Q = -EI\frac{d^3w}{dx^3} + N\frac{dw}{dx}. \tag{4.92}$$

Substituindo os termos de (4.90) a (4.92) na equação (4.89), esta pode ser reescrita como

$$\delta V = \int_0^L \left(\frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} + \frac{d^2\delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx + [-\delta\theta\ M - \delta w\ Q]_0^L = 0. \tag{4.93}$$

Logo,

$$\int_0^L \left(\frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} + \frac{d^2\delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = [\delta\theta\ M + \delta w\ Q]_0^L. \tag{4.94}$$

Ao aplicar um incremento ao trabalho virtual á equação 4.94, tem-se

$$d\left\{ \int_0^L \left(\frac{d\delta w}{dx} N \frac{dw}{dx} + \frac{d^2\delta w}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx \right\} = d\left\{ [\delta\theta\ M + \delta w\ Q]_0^L \right\} \tag{4.95}$$

Utilizando a regra do produto no lado esquerdo da equação (4.95), obtém-se

$$\int_0^L \left\{ d\left(\frac{d\delta w}{dx}\right) N \frac{dw}{dx} + \frac{d\delta w}{dx} N\ d\left(\frac{dw}{dx}\right) + d\left(\frac{d^2\delta w}{dx^2}\right) EI \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2\delta w}{dx^2} EI\ d\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) \right\} dx \tag{4.96}$$

Realizando o mesmo procedimento no lado direito da equação (4.95), tem-se

$$[d(\delta\theta)\ M + \delta\theta\ d(M) + d(\delta w)\ Q + \delta w\ d(Q)]_0^L. \tag{4.97}$$

Levam-se em consideração as seguintes condições de contorno para a inexistência de rotações espaciais:

$$d(\delta w) = d\left(\frac{d\delta w}{dx}\right) = d\left(\frac{d^2\delta w}{dx^2}\right) = 0. \tag{4.98}$$

Reescrevendo a equação (4.95) em função dos valores encontrados em (4.96) e (4.97), com as devidas condições de contorno aplicadas (equação (4.98)), finalmente, chega-se à forma fraca do problema:

$$\int_0^L \left\{ \frac{d\delta w}{dx} N\ d\left(\frac{dw}{dx}\right) + \frac{d^2\delta w}{dx^2} EI\ d\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) \right\} dx = [\delta\theta\ d(M) + \delta w\ d(Q)]_0^L. \tag{4.99}$$

De posse da equação (4.99), a seguir serão calculadas, de forma analítica, as funções de forma que levarão aos valores referentes à rigidez geométrica local dos momentos simétrico e antissimétrico considerados para o elemento de viga.

Para simplificação das equações, as deformações em x serão transformadas para um espaço normatizado ξ de -1 a 1, como mostra a Figura 4.16.

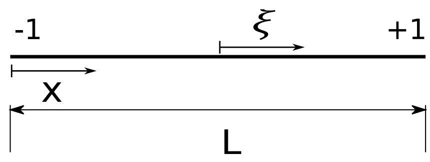


Figura 4.16 – Espaço normatizado.

Desta forma,

$$x = \frac{L}{2}(1+\xi). \tag{4.100}$$

(a) Flexão simétrica:

As equações de rotação e da linha elástica para uma viga biapoiada submetida à aplicação de momentos fletores simétricos em seus nós são dadas, respectivamente, por:

$$\theta(x) = \frac{M_s}{EI}\left(x - \frac{L}{2}\right) \tag{4.101}$$

$$w(x) = -\frac{\theta_s}{2L}(x^2 - Lx). \tag{4.102}$$

Aplicando as condições de contorno ao cálculo da rotação nos nós, em que, no nó *1*, $x = 0$, e, no nó *2*, $x = L$, a equação (4.101) resulta em

$$\theta^1(0) = \frac{M_s}{EI}\left(0 - \frac{L}{2}\right) = -\frac{M_s L}{2EI} \tag{4.103}$$

$$\theta^2(L) = \frac{M_s}{EI}\left(L - \frac{L}{2}\right) = \frac{M_s L}{2EI}. \tag{4.104}$$

Logo,

$$\theta^1 = -\theta^2 = \frac{1}{2}\theta_s = -\frac{M_s L}{2EI}. \tag{4.105}$$

Substituindo as equações (4.100) e (4.105) em (4.102), encontramos

$$w = -\frac{\theta_s L}{8}(1-\xi^2). \tag{4.106}$$

O incremento de deslocamento da linha elástica em relação à rotação simétrica é dado por

$$dw = -\frac{L}{8}(1-\xi^2)\, d\theta_s. \tag{4.107}$$

Sabendo que a derivada de ξ em relação a x, dada pela equação (4.100), é igual a

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}, \tag{4.108}$$

a relação diferencial para o incremento da equação da linha elástica por rotação simétrica é igual a

$$d\left(\frac{dw}{dx}\right) = d\frac{dw}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = \frac{L}{4}\xi d\theta_s \frac{2}{L} = \frac{1}{2}\xi d\theta_s. \tag{4.109}$$

Para os deslocamentos virtuais da equação (4.106), tem-se

$$\delta w = -\frac{L}{8}(1-\xi^2)\,\delta\theta_s. \tag{4.110}$$

Dessa forma, a primeira relação de diferenciação para a equação (4.110) é igual a

$$\frac{d\delta w}{dx} = d\frac{\delta w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = \frac{L}{4}\xi\delta\theta_s\frac{2}{L} = \frac{1}{2}\xi\delta\theta_s. \tag{4.111}$$

De posse das equações (4.108), (4.109) e (4.111), a rigidez tangente relacionada ao modo de flexão simétrica vem de suas substituições na equação (4.99), e, em seguida, isolando-se o incremento de momento simétrico. Dessa forma, obtém-se

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\xi d\theta_s\right) N \left(\frac{1}{2}\xi d\delta\theta_s\right)\left(\frac{L}{2}d\xi\right) = \left[\delta\theta_s\; dM_s\right]_0^L \tag{4.112}$$

$$\left(\frac{1}{8}\;NL\;d\theta_s\int_{-1}^{1}\xi^2 d\xi\right)\delta\theta_s = (dM_s)\;\delta\theta_s \tag{4.113}$$

$$dM_s = \frac{1}{12}\;NL\;d\theta_s. \tag{4.114}$$

Logo, conclui-se que a rigidez por rotação simétrica, referente ao segundo termo da matriz de rigidez geométrica local, equivale a

$$k_s = \frac{1}{12}\;NL. \tag{4.115}$$

(b) Flexão antissimétrica:

As equações de rotação e da linha elástica para uma viga biapoiada submetida à aplicação de momentos fletores antissimétricos em suas extremidades são dadas, respectivamente, por:

$$\theta(x) = \frac{M_a}{EI}\left(\frac{x^2}{L} - x + \frac{L}{6}\right) \tag{4.116}$$

$$w(x) = \frac{M_a}{EI}\left(\frac{x^3}{3L} - \frac{x^2}{2} + \frac{xL}{6}\right). \tag{4.117}$$

Aplicando as condições de contorno ao cálculo da rotação nos nós, em que no nó *1*, $x = 0$, e, no nó *2*, $x = L$, tem-se

$$\theta^1(0) = \frac{M_a L}{6EI} \tag{4.118}$$

e

$$\theta^2(L) = \frac{M_a L}{6EI}. \tag{4.119}$$

Logo,

$$\theta^1 = \theta^2 = \frac{1}{2}\theta_a = \frac{M_a L}{6EI}. \tag{4.120}$$

Substituindo as equações (4.120) e (4.100) na equação da linha elástica (4.117), tem-se como resultado a expressão

$$w = -\frac{L}{8}(1 - \xi^2)\,\xi\theta_a. \tag{4.121}$$

Da mesma forma como foram feitas as relações diferenciais para a flexão simétrica, serão desenvolvidas as formulações para o incremento de rotação antissimétrico. Portanto, o incremento de deslocamento da linha elástica em relação à rotação antissimétrica é dado por

$$dw = -\frac{L}{8}(1 - \xi^2)\,d\xi\theta_a. \tag{4.122}$$

Logo, para a primeira derivada do incremento da linha elástica (equação (4.122)), tem-se que

$$d\left(\frac{dw}{dx}\right) = d\frac{dw}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{4}(1 - 3\xi^2)d\theta_a. \tag{4.123}$$

Para os deslocamentos virtuais da equação (4.121), tem-se que

$$\delta w = -\frac{L}{8}(1 - \xi^2)\,\delta\xi\theta_a. \tag{4.124}$$

Dessa forma, a relação diferencial para o deslocamento virtual é dada por

$$\frac{d\delta w}{dx} = d\frac{\delta w}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{4}(1 - 3\xi^2)\delta\theta_a \tag{4.125}$$

A rigidez tangente relacionada ao modo de flexão antissimétrico vem da substituição das equações (4.108), (4.123) e (4.125) em (4.99) e, em seguida, isolando o incremento de momento simétrico. Dessa forma, obtém-se

$$\int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{4}(1 - 3\xi^2)d\theta_a\right]\,\left[-\frac{1}{4}(1 - 3\xi^2)d\delta\theta_a\right]\left(\frac{l}{2}d\xi\right) = \delta\theta_a\,dM_a \tag{4.126}$$

$$\left(\frac{1}{16}\,NL\,d\theta_a \int_{-1}^{1} (1-3\xi^2)^2 d\xi\right) \delta\theta_a = (dM_a)\,\delta\theta_a \tag{4.127}$$

$$dM_a = \frac{1}{20}\,NL\,d\theta_a. \tag{4.128}$$

Por conseguinte, conclui-se que a rigidez por rotação antissimétrica, correspondente ao terceiro termo da diagonal principal da matriz de rigidez, é igual a

$$k_a = \frac{1}{20}\,NL. \tag{4.129}$$

Por fim, obtém-se a matriz de rigidez pertinente à rigidez geométrica local com uma contribuição de rigidez referente à deformação por flexão simétrica equação (4.115), e outra, referente à deformação por flexão antissimétrica equação (4.129)

$$\mathbf{K}_{d,geo} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}\,NL & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20}\,NL \end{Bmatrix}. \tag{4.130}$$

4.3.5 - Montagem da matriz de rigidez local do elemento

A montagem da matriz de rigidez do elemento se dá a partir das matrizes de rigidez tangente (4.61), (4.83) e (4.130) encontradas. Assim, separando a parcela de rigidez material das parcelas de rigidez geométrica, obtém-se

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S}(\mathbf{K}_{d,mat} + \mathbf{K}_{d,geo})\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r = (\mathbf{S}\mathbf{K}_{d,mat}\mathbf{S}^T) + (\mathbf{S}\mathbf{K}_{d,geo}\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r). \tag{4.131}$$

Generalizando a equação (4.131), encontra-se

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{S}_i\mathbf{K}_{d,mat}\mathbf{S}_j^T) + (\mathbf{S}_i\mathbf{K}_{d,geo}\mathbf{S}_j^T + \mathbf{K}_{ij}^r), \tag{4.132}$$

com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$.

Portanto, a contribuição de rigidez material pode ser escrita em formato de matriz em bloco, como

$$\mathbf{K}^e_{ij_{mat}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^e_{11_{mat}} & \mathbf{K}^e_{12_{mat}} \\ \mathbf{K}^e_{21_{mat}} & \mathbf{K}^e_{22_{mat}} \end{bmatrix}, \tag{4.133}$$

sendo

$$\mathbf{K}^e_{11_{mat}} = \mathbf{S}_1\mathbf{K}_{d,mat}\mathbf{S}_1^T = \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a EI & 6\psi_a EIL \\ 0 & 6\psi_a EIL & (3\psi_a+1)EIL^2 \end{bmatrix}, \tag{4.134}$$

$$\mathbf{K}^e_{12_{mat}} = {\mathbf{K}^e_{21_{mat}}}^T = \mathbf{S}_1\mathbf{K}_{d,mat}\mathbf{S}_2^T = \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12\psi_a EI & 6\psi_a EIL \\ 0 & -6\psi_a EIL & (3\psi_a-1)EIL^2 \end{bmatrix}, \tag{4.135}$$

$$\mathbf{K}^e_{22_{mat}} = \mathbf{S}_2\mathbf{K}_{d,mat}\mathbf{S}_2^T = \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a EI & -6\psi_a EIL \\ 0 & -6\psi_a EIL & (3\psi_a+1)EIL^2 \end{bmatrix}. \tag{4.136}$$

A contribuição de rigidez geométrica também pode ser representada como matriz em bloco por

$$\mathbf{K}^e_{ij_{geo}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^e_{11_{geo}} & \mathbf{K}^e_{12_{geo}} \\ \mathbf{K}^e_{21_{geo}} & \mathbf{K}^e_{22_{geo}} \end{bmatrix}, \tag{4.137}$$

sendo

$$\mathbf{K}^e_{11_{geo}} = \mathbf{S}_1\mathbf{K}_{d,geo}\mathbf{S}_1^T + \mathbf{K}^r_{11} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 0 & -Q & 0 \\ -Q & \frac{6}{5}N & \frac{1}{10}NL \\ 0 & \frac{1}{10}NL & \frac{2}{15}NL^2 \end{bmatrix}, \tag{4.138}$$

$$\mathbf{K}^e_{12_{geo}} = {\mathbf{K}^e_{21_{geo}}}^T = \mathbf{S}_1\mathbf{K}_{d,geo}\mathbf{S}_2^T + \mathbf{K}^r_{12} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Q & -\frac{6}{5}N & \frac{1}{10}NL \\ 0 & -\frac{1}{10}NL & -\frac{1}{30}NL^2 \end{bmatrix}, \tag{4.139}$$

$$\mathbf{K}^e_{22_{geo}} = \mathbf{S}_2\mathbf{K}_{d,geo}\mathbf{S}_2^T = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 0 & -Q & 0 \\ -Q & \frac{6}{5}N & -\frac{1}{10}NL \\ 0 & -\frac{1}{10}NL & \frac{2}{15}NL^2 \end{bmatrix}. \tag{4.140}$$

4.3.6 - Matriz de rigidez global do elemento

Para encontrar a matriz de rigidez global, basta multiplicar a equação de equilíbrio local do elemento pela matriz de rotação

$$\mathbf{R}\; d\mathbf{f}^e = \mathbf{R}\; \mathbf{K}^e\; d\mathbf{u}^e \tag{4.141}$$

e substituir, em seguida, a equação (4.38), relacionando incrementos de deslocamentos locais e globais na equação (4.141), o que resulta em

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R}\,\mathbf{K}^e\,\mathbf{R}^T\,d\mathbf{u}. \tag{4.142}$$

Com isso, pela equação de equilíbrio global, nota-se que a matriz de rigidez tangente global do elemento é igual a

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\,\mathbf{K}^e\mathbf{R}^T. \tag{4.143}$$

Com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, a equação 4.143 pode ser reescrita em forma de notação indicial, como

$$\mathbf{K}_{i,j} = \mathbf{R}\,\mathbf{K}^e_{i,j}\mathbf{R}^T. \tag{4.144}$$

4.4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Na formulação co-rotacional, as propriedades do elemento são primeiramente obtidas em termos de um sistema local de referência, por meio da matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$, para que posteriormente esta matriz de rigidez seja transformada em um sistema global de referência, como foi apresentado no decorrer deste capítulo. A seguir, serão apresentados os passos que levarão à construção da matriz de rigidez global $\mathbf{K}$ e o algoritmo utilizado para implementação computacional (Tabela 4.1).

Partindo-se da Figura 4.17, inicia-se o procedimento para obtenção da matriz de rigidez global do elemento co-rotacional 2D apresentado. A figura apresenta as configuração do elemento de viga deformado. As coordenadas $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$ e $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})$ representam as coordenadas dos nós 1 e 2 do elemento em seu estado atual, assim como os ângulos θ_1 e θ_2 representam os ângulos de rotação dentro da configuração deformada.

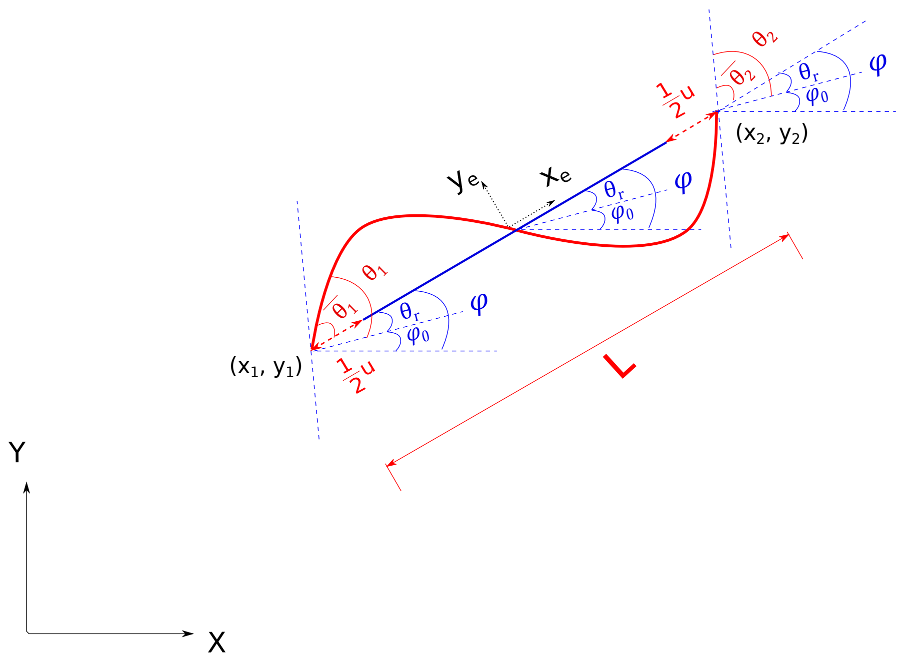


Figura 4.17 – Configuração do elemento de viga co-rotacional em um espaço 2D.

Para o cálculo do ângulo do elemento, φ, em relação ao sistema de eixos global, parte-se da relação trigonométrica da $tan\ (\frac{1}{2}\varphi)$. Desse modo,

$$\varphi = 2\ \ arctan\left(\frac{1 - cos\varphi}{sen\varphi}\right), \tag{4.145}$$

com

$$cos\varphi = \left(\frac{X_2 - X_1}{L}\right) \tag{4.146}$$

e

$$sen\varphi = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{L}\right). \tag{4.147}$$

Assim, tem-se que φ equivale a

$$\varphi = 2\ \ arctan\left(\frac{L - \Delta X}{\Delta Y}\right). \tag{4.148}$$

O próximo passo consiste em calcular deslocamentos deformacionais provenientes dos modos naturais: deformação axial u, deformação simétrica θ_s e deformação antissimétrica θ_a, representadas, respectivamente, pelas equações (4.8), (4.13) e (4.14).

A deformação por flexão antissimétrica apresentada pela equação (4.14) possui, em seu termo, a rotação θ_r, que possibilita o aparecimento de grandes rotações. A função *mod*, apresentada pela equação (4.149), é aplicada para garantir que o ângulo θ_a esteja entre $0°$ e $360°$ graus, enquanto a componente $(-\pi)$ faz com que o ângulo θ_a seja um ângulo absoluto medido a partir do ângulo zero.

$$\theta_a =_{2\pi}^{mod} (\theta_a + \pi) - \pi \tag{4.149}$$

Após a obtenção dos valores dos deslocamentos deformacionais, é possível calcular o vetor de forças internas, $\mathbf{f}_d$, que leva em consideração a força axial N, que pode ser calculada pela equação (4.65); o momento simétrico M_s, que pode ser calculado pela equação (4.70); e o momento antissimétrico M_a, que pode ser calculado pela equação (4.77).

De posse do valor do vetor de forças internas, $\mathbf{f}_d$, torna-se possível calcular o vetor de forças local do elemento, $\mathbf{f}^e$, por meio da equação (4.23). A matriz de rigidez do elemento pode ser calculada a partir da equação (4.132).

De posse dos valores das forças e da matriz de rigidez local do elemento, $\mathbf{f}^e$ e $\mathbf{K}^e$, respectivamente, o último passo é calcular a força global $\mathbf{f}$ obtida a partir da equação (4.29) e a matriz de rigidez global $\mathbf{K}$ por meio da equação (4.144).

A Tabela 4.1, a seguir, apresenta o algoritmo para o elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko no espaço 2D.

Tabela 4.1 – Algoritmo para o elemento de viga unificado 2D.

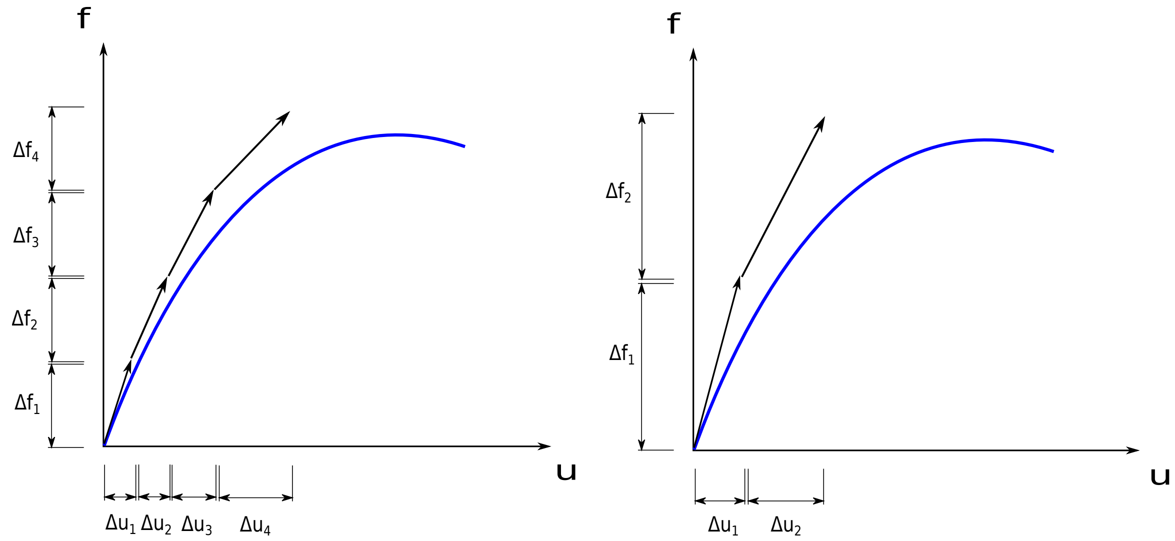
1. Ângulo do elemento
$\varphi = 2\ arctan\left(\frac{L-\Delta X}{\Delta Y}\right)$
2. Deslocamentos deformacionais (modos de deformação natural)
$u = L - L_0$
$\theta_a = \theta_2 - \theta_1$
$\theta_s = \theta_2 + \theta_1 - 2\theta_r$
3. Função *mod* para ângulos absolutos
$\theta_a =_{2\pi}^{mod} (\theta_a + \pi) - \pi$
4. Forças internas
$\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \mathbf{u}_d$
5. Forças globais
$\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{f}_d$
6. Matriz de rigidez tangente global
$\mathbf{K}_{i,j} = \mathbf{R}\,\mathbf{K}^e_{i,j}\mathbf{R}^T$

5 - TÉCNICAS DE SOLUÇÃO NUMÉRICA - MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO

5.1 - INTRODUÇÃO

A dificuldade essencial na análise de estruturas contínuas recai sobre a incapacidade da resolução de algumas das equações diferenciais que as regem. Essas dificuldades são muitas vezes intransponíveis se as equações são não-lineares. Por outro lado, o desenvolvimento de computadores providenciou uma grande capacidade para a solução numérica de grandes sistemas de equações algébricas lineares. Consequentemente, a atenção foi dirigida para os meios de utilizar esta última capacidade de tratamento numérico para problemas não-lineares (Wempner, 1971). Assim nasceram os métodos incrementais-iterativos. Simples exemplos de não-linearidade geométrica podem ser vistos em Crisfield (1991), Krenk (2009), (Rust, 2015) e outros.

Inicialmente, para traçar caminhos de equilíbrio, um dos primeiros métodos que surgiram consistia-se em um método puramente incremental, em que se fragmentava a força em incrementos que seriam aplicados paulatinamente na estrutura, ou seja, fazia-se uma injeção progressiva de uma parcela da força até que ela toda fosse aplicada (Turner et al., 1960; Argyris, 1964). Nesse procedimento, ao mesmo tempo em que os incrementos de força eram aplicados, as análises dos deslocamentos eram feitas. No entanto, para descrever equações não-lineares, o método necessitaria da aplicação de frações muito pequenas dos passos de carga e, consequentemente, muitas interações para uma boa interpretação do comportamento da estrutura seriam realizadas, o que, além de demandar um custo computacional muito alto, talvez chegasse a uma resposta com um erro acumulado também muito alto. Um exemplo do método puramente incremental com diferentes comprimentos de incremento de carga pode ser visto pela Figura 5.1, em que o caminho de equilíbrio calculado (representado por setas) se desenha à medida que se aplica um incremento de carga $\Delta\mathbf{f}_n$. Pela equação $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}$, encontram-se os valores dos incrementos de deslocamento $\Delta\mathbf{u}_n$, sendo $n = 1, 2, 3, ...$



(a) Método incremental puro com pequenos passos de carga (menor erro acumulado).

(b) Método incremental puro com grandes passos de carga (maior erro acumulado).

Figura 5.1 – Método incremental puro.

Com a necessidade do aprimoramento da técnica puramente incremental, surgiram os métodos iterativos e incrementais-iterativos de controle de carga (Oden, 1967; Mallet e Marcal, 1968) (Figura 5.2). Esses, baseados no método de Newton-Raphson, tiveram como trunfo o ajuste do deslocamento. Nesse contexto, à medida que se aplicava o incremento de carga, haveria iterações de maneira que os deslocamentos correspondentes fossem paulatinamente corrigidos, para que, assim, a curva de equilíbrio do comportamento estrutural fosse corretamente traçada. Esse fato, além de gerar menos erros na solução encontrada, também possibilitou que não fosse necessária a discretização do carregamento em incrementos muito pequenos, como ocorria em métodos puramente incrementais, pois as iterações por si sós regulariam o incremento.

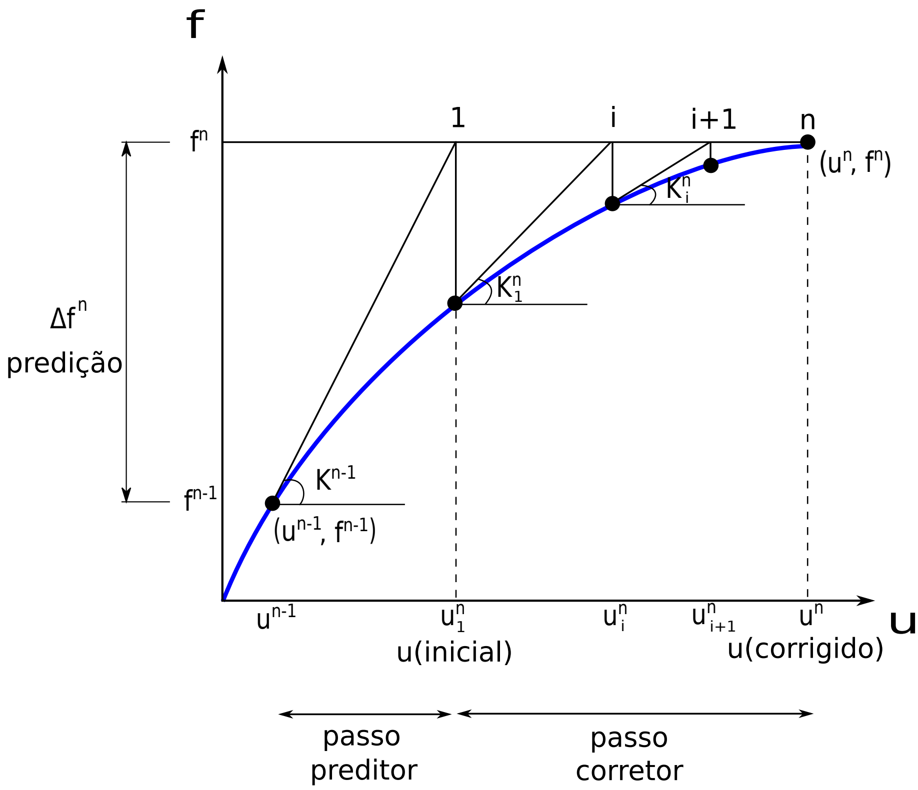


Figura 5.2 – Método de controle de carga.

Em métodos incrementais-iterativos, costuma-se utilizar o sobrescrito n para representar o passo incremental e o subscrito i para representar o passo iterativo. Na Figura 5.2, o ponto $(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{f}^{n-1})$ representa o último estado de equilíbrio encontrado. O processo incremental inicia-se pelo incremento de carregamento $\Delta\mathbf{f}^n$ imposto ao último estado de equilíbrio. Esse incremento é uma predição inicial que permanecerá constante durante todo o processo subsequente (iterativo). Pela relação linear $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}$, encontra-se o primeiro valor do incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{u}$, que, somado ao deslocamento encontrado no passo anterior convergido $\mathbf{u}^{n-1}$, chega-se ao deslocamento inicial $\mathbf{u}_1^n$ do passo atual. Inicia-se, então, o processo iterativo (corretor), em que o incremento de deslocamento é sucessivamente ajustado pelos subincrementos de deslocamento até convergir para o deslocamento corrigido $\mathbf{u}^n$. Após os deslocamentos convergidos, chega-se à coordenada $(\mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n)$ na curva de equilíbrio, a qual será o ponto de partida para o próximo incremento de carga. É importante destacar que o ajuste no passo corretor necessita de um critério de parada (ou critério de convergência) para a solução; para tal, uma tolerância (erro) deve ser pré-estabelecida (seção 5.4.4).

Com lógica semelhante à do método anterior, outros métodos incrementais-iterativos foram criados, como, por exemplo, o método de controle de deslocamento (Batoz e Dhatt, 1979). Nele, em vez da aplicação de incrementos de cargas, agora seriam aplicados incrementos de deslocamentos, e, sendo assim, as cargas seriam ajustadas, como pode ser observado pela Figura 5.3, adaptada de Fuina (2009).

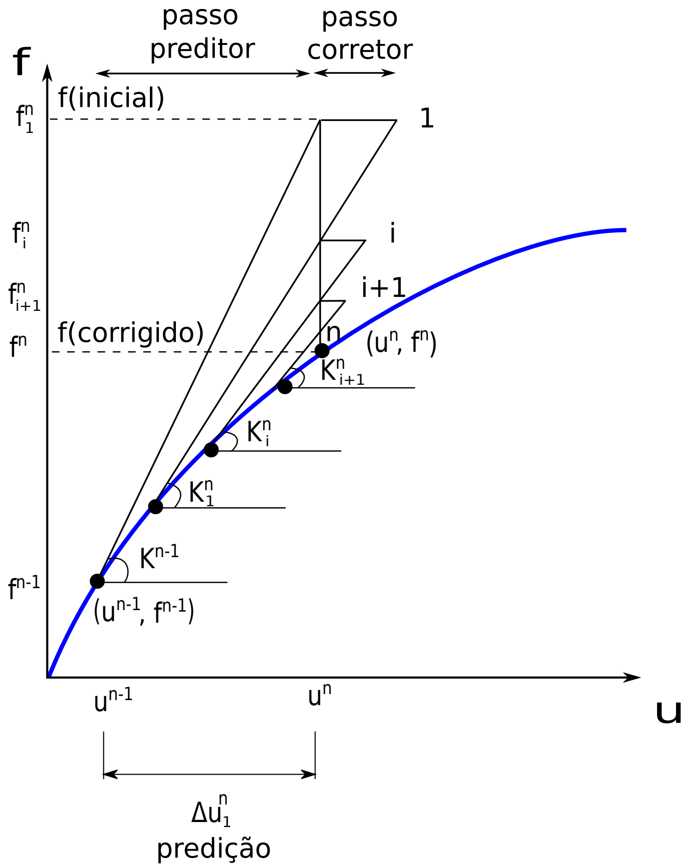


Figura 5.3 – Método de controle de deslocamento.

Apesar dos métodos incrementais-iterativos de carga e de deslocamento serem úteis em várias ocasiões, muitas vezes esses não são aptos a fazer uma leitura além de pontos limites ou de bifurcação, como pode ser visto na seção 5.2. Por esse motivo, houve a necessidade de criação de métodos que fossem além desses pontos críticos, dentre os quais os métodos de comprimento de arco são destaque. Segundo Silva (2011), a necessidade de atravessar um ponto limite e descrever sua continuação é importante por diversos fatores: (i) fato de o ponto limite poder ser apenas um máximo local, podendo a estrutura ainda possuir capacidade resistente que pode ser aproveitada; (ii) melhor entendimento do comportamento de ruptura da estrutura (dúctil/frágil); (iii) maior clareza, se a estrutura atingiu um ponto limite ou iniciou um trecho de instabilidade; (iv) investigação do real estado (tensões, deformações, deslocamentos, zonas plásticas, etc) pós-crítico de uma estrutura e, consequentemente, melhor entendimento sobre como se deu sua falha. Em Crisfield (1991), o autor apresenta uma série de argumentos para destacar a importância do entendimento do comportamento estrutural além de pontos limites.

Os Métodos de Comprimento de Arco (*Arc-Length Methods*) (Figura 5.4), segundo Krenk (2009) são atualmente considerados os métodos gerais mais robustos propostos para solução de equações não-lineares em mecânica dos sólidos e estruturas. Também segundo o referido autor, os métodos de comprimento de arco são atualmente os métodos de análise não-linear em equilíbrio de estruturas e sólidos mais utilizados. Atualmente existem várias bifurcações desse método (Riks, 1972; Wempner, 1971; Ramm, 1981; Crisfield, 1981 e outros). No presente trabalho, será descrito o método apresentado em Krenk (2009).

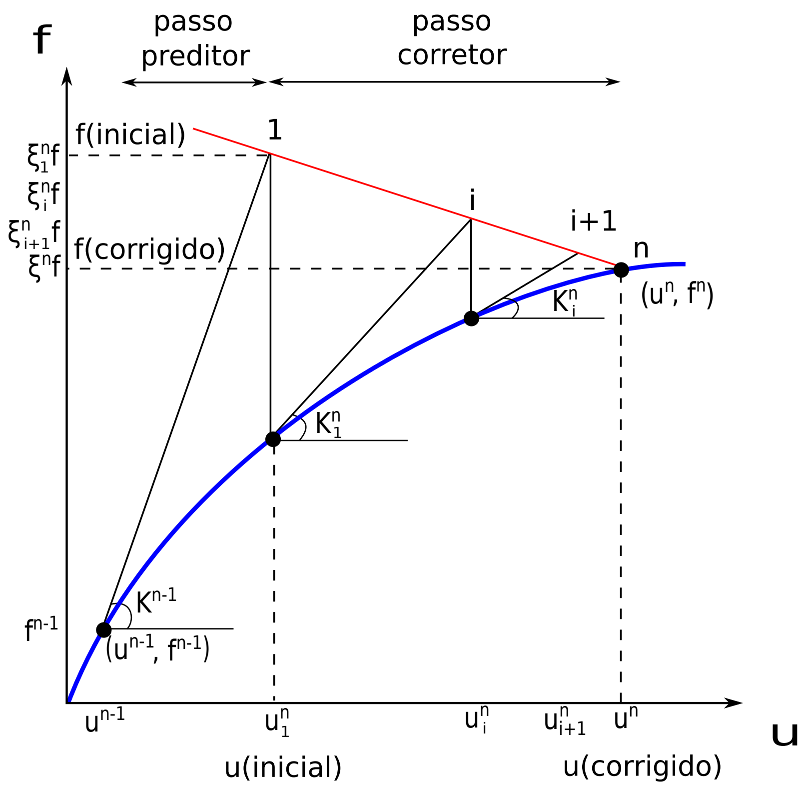


Figura 5.4 – Método de Comprimento de Arco.

A ideia do método é, em um espaço carga-deslocamento $(f - u)$, a partir do último estado de equilíbrio $(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{f}^{n-1})$, fazer uso simultâneo de incrementos de carga $\Delta\mathbf{f}$ e de deslocamento $\Delta\mathbf{u}$, realizando iterações que ao mesmo tempo satisfaçam a condição de restrição imposta, e as condições de equilíbrio da estrutura, para assim chegar ao próximo ponto de equilíbrio $(\mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n)$. O fato de ambos os incrementos de carga e deslocamento serem ajustados durante o processo iterativo - diferentemente das outras técnicas apresentadas, como os métodos de controle de carga ou os métodos de controle de deslocamento, que controlam, respectivamente, carga ou deslocamento separadamente - torna essa técnica ímpar para automatizar a seleção de incrementos e fazer leituras do caminho de equilíbrio na fase pós-crítica.

No método de comprimento de arco, o carregamento é dado em termos de um fator de intensidade escalar ξ. O ajuste simultâneo dos incrementos de carga e de deslocamento somente ocorre, pois, o subincremento do fator de carga $\delta\xi$ é calculado e também se incorpora à equação do cálculo do subincremento de deslocamentos, fazendo com que os dois sejam atualizados no decorrer das iterações, como será visto na seção 5.3.

O nome método de comprimento de arco é utilizado, pois, segundo Riks (1979), o "comprimento do arco" corresponde à aproximação para o caminho de equilíbrio a ser calculado (Figura 5.5).

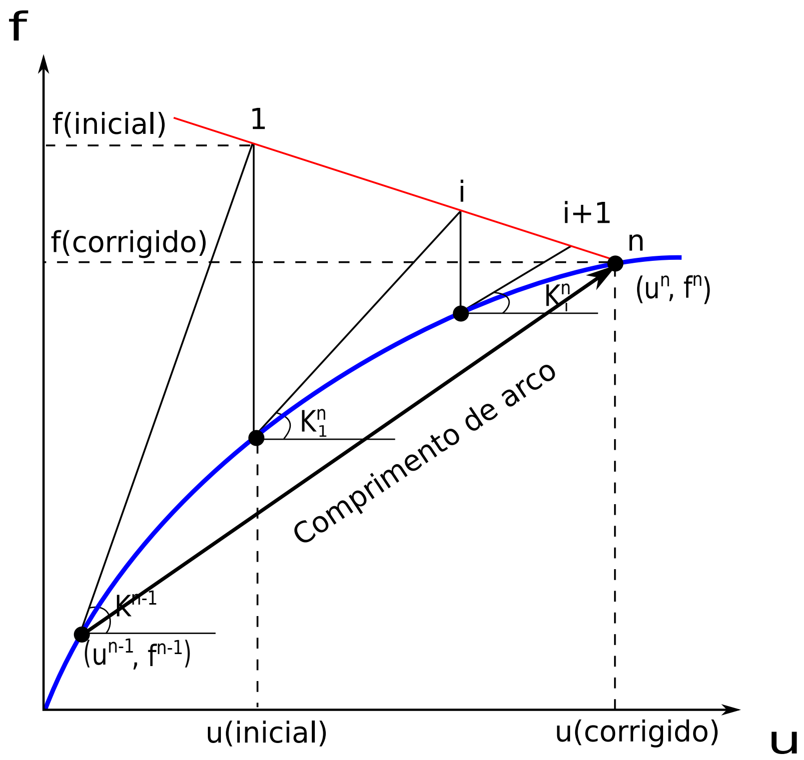


Figura 5.5 – Comprimento de Arco.

No decorrer deste capítulo, inicialmente - como o método de comprimento de arco incorpora uma técnica iterativa de Newton-Raphson, que age concomitantemente com um tipo de restrição e tem como maior trunfo a capacidade de ir além de pontos críticos - serão apresentados alguns desses pontos críticos. Após a apresentação dos pontos críticos, será deduzida uma formulação geral de restrição, também conhecida como algoritmo limítrofe. Duas formas especiais de restrição serão apresentadas: por meio de um hiperplano constante e por meio de um hiperplano atualizado. Posteriormente, também serão apresentados parâmetros importantes para a implementação do método de comprimento de arco, tais como a atualização do comprimento de arco, o valor do incremento de carga no passo incremental/preditor e a escolha correta do seu sinal (o que se resume na escolha da direção correta do passo corrente), alguns critérios de convergência utilizados, e, por fim, o método utilizado para detecção de pontos críticos. É importante mencionar que, no

Apêndice A.1, encontra-se deduzida a técnica de solução iterativa de controle de carga, conhecida como o método de Newton-Raphson, que serve de base para a formulação dos métodos de comprimento de arco.

5.2 - PONTOS CRÍTICOS

A seguir serão apresentados alguns pontos críticos (pontos limites e de bifurcação) e o porquê de alguns dos métodos para leitura do caminho de equilíbrio, apresentados na seção 5.1, serem ou não capazes de descrevê-los. Além disso, serão apresentadas as características dos caminhos de equilíbrio analisados.

Nesse âmbito, seis exemplos diferentes de caminho de equilíbrio servirão como base para essa análise. Dentre eles, encontram-se: trajetória de equilíbrio linear; trajetória de equilíbrio não-linear com um ponto limite de carga; trajetória de equilíbrio não-linear com dois pontos limites de carga, caracterizando o *snap-through*; trajetória não-linear com dois pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento, caracterizando o *snap-back*; trajetória de equilíbrio não-linear com um ponto de bifurcação; e, por fim, trajetória não-linear com quatro pontos limites de carga e três pontos limites de deslocamento, caracterizando o *looping*. Esses e outros exemplos da descrição do tipo de caminho de equilíbrio de estruturas podem ser vistos em Riks (1972), Riks (1979), Bergan (1980), Crisfield (1981), Fujii (1989), Crisfield (1997), De Souza Neto et al. (2008), Krenk (2009), Rezaiee-Pajand et al. (2013), Rust (2015), entre outros.

(a) Trajetória de equilíbrio linear:

O caminho de equilíbrio linear é o mais básico dos caminhos de equilíbrio e geralmente não condiz com a realidade, pois a ideia de uma relação linear entre carga e deslocamento, em tese, não ocorre. Entretanto, em muitas ocasiões, com o intuito de simplificar os cálculos, a consideração de uma trajetória de equilíbrio linear é suficiente. A Figura 5.6 ilustra um caminho de equilíbrio linear com um ponto de falha F no final. O ponto de falha representa o momento em que a estrutura não possui mais capacidade portante e, portanto, o caminho de equilíbrio é interrompido. Essa trajetória de equilíbrio pode ser descrita por qualquer uma das técnicas apresentadas anteriormente. A importância do estudo desse caminho de equilíbrio é que, nesse caso, a estrutura possui um comportamento frágil, em que a falha ocorre sem aviso prévio.

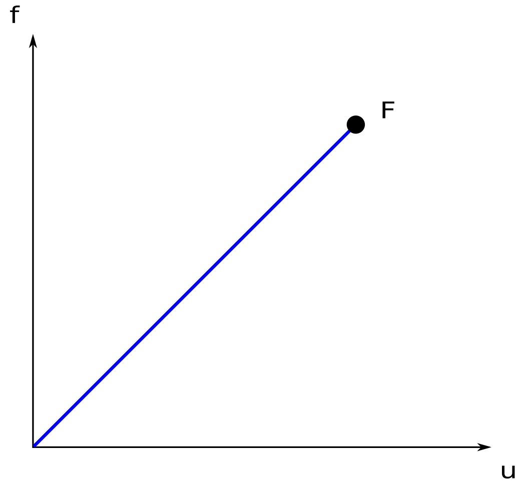
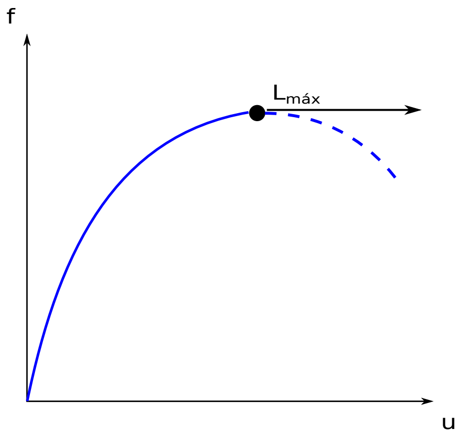


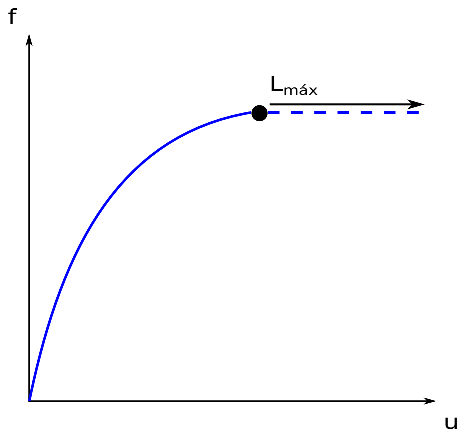
Figura 5.6 – Caminho de equilíbrio linear.

(b) Trajetória de equilíbrio não-linear com um ponto limite de carga:

Na Figura 5.7, um caminho de equilíbrio não-linear com um ponto limite $L_{máx}$ é apresentado. Para essa trajetória, nem todos os métodos já apresentados possuem capacidade de ir além desse ponto. Por exemplo, o método de controle de carga irá fazer uma leitura somente até o ponto limite, não sendo capaz de realizar qualquer leitura posterior a ele. Desse modo, ao encontrar o ponto limite de carga máxima $L_{máx}$, a tangente a trajetória de equilíbrio se torna paralela ao eixo das abscissas, u, divergindo da solução. Já os métodos de controle de deslocamento, assim como os métodos de comprimento de arco, são capazes de fazer a leitura inteira do caminho de equilíbrio. A importância do estudo desse caminho de equilíbrio é que, nesse caso, a estrutura possui um comportamento dúctil; dessa maneira, havendo um aviso prévio antes de sua falha.



(a) Ponto limite máximo de carga 1.



(b) Ponto limite máximo de carga 2.

Figura 5.7 – Caminhos de equilíbrio não-linear com um ponto limite de carga: leitura incompleta e divergência do resultado por meio do método de controle de carga.

(c) Trajetória de equilíbrio não-linear com dois pontos limites de carga, caracterizando o *snap-through*:

O *snap-through*, apresentado na Figura 5.8, demonstra um caminho de equilíbrio não-linear em que ocorrem dois pontos limites de carga: um ponto limite máximo local $L_{máx}$ e um ponto limite mínimo local L_{min}. O *snap-through* ocorre quando, nesse caso, a leitura do caminho de equilíbrio é feita por um método de controle de carga. A Figura 5.8 demonstra o método de controle de carga, fazendo uma leitura do caminho de equilíbrio até o ponto limite máximo de carga $L_{máx}$. A partir desse limite, ocorre um salto de $L_{máx}$ para S, não havendo a leitura entre esses dois pontos (ilustrado pela linha tracejada). Entretanto, para a leitura do caminho de equilíbrio pelo método de controle de deslocamento ou pelos métodos de comprimento de arco, a leitura do caminho de equilíbrio seria feita de forma integral. Nota-se, também, que a importância da leitura além do ponto limite ($L_{máx}$) se dá, pois a estrutura, após passar por uma fase de instabilidade $L_{máx} \rightarrow L_{min}$, ainda possuirá capacidade portante.

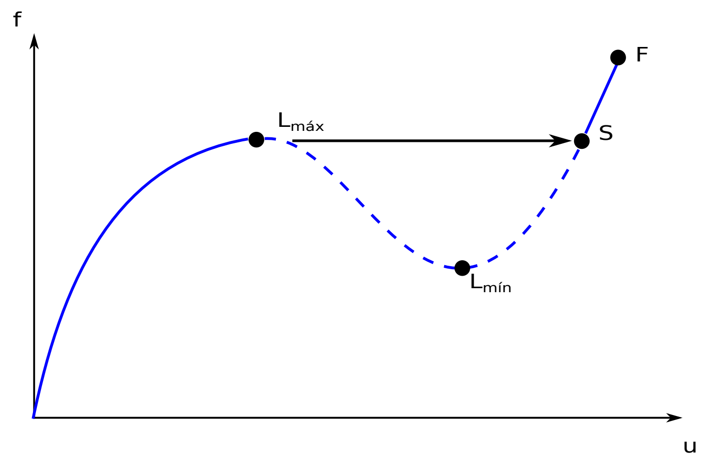


Figura 5.8 – *Snap-through*: salto dinâmico por método de controle de carga.

(d) Trajetória não-linear com dois pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento, caracterizando o *snap-back*:

O *snap-back*, apresentado na Figura 5.9, demonstra um caminho de equilíbrio não-linear em que ocorrem quatro pontos limites: dois pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento. Os pontos limites de carga são representados por um ponto limite máximo local $L_{máx}$ e um ponto limite mínimo local L_{min}, enquanto os dois pontos limites de deslocamento, também conhecidos como *turning points*, são representados por T_1 e T_2. O *snap-back* ocorre quando, nesse caso, a leitura do caminho de equilíbrio é feita por um método de controle de deslocamento, em que, após o primeiro ponto limite de deslocamento, a leitura do caminho de equilíbrio dá um salto de T_1 para S, não havendo a leitura entre esses dois pontos (ilustrado pela linha tracejada). Se a leitura fosse realizada por um método de controle de carga, esse seria capaz de realizar uma leitura apenas até o ponto limite $L_{máx}$. Dentre os três métodos apresentados na seção (5.1), para uma leitura completa do caminho de equilíbrio, apenas os métodos de comprimento de arco seriam capazes. Assim como apresentado para o método anterior, após a estrutura passar por trechos de instabilidade, a estrutura ainda possuiria capacidade portante.

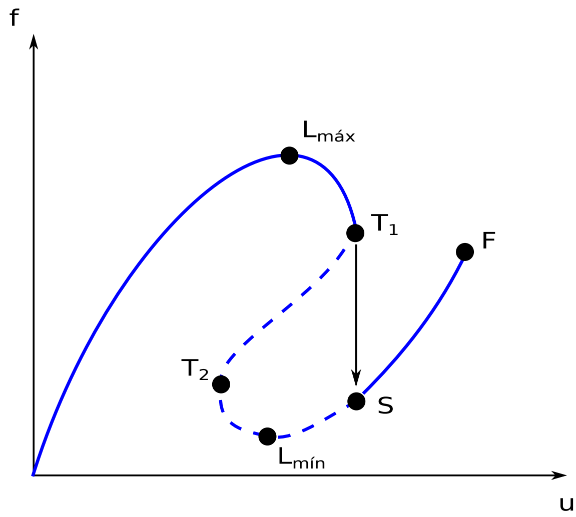


Figura 5.9 – *Snap-back*: salto dinâmico por método de controle de deslocamento.

(e) Trajetória de equilíbrio não-linear com um ponto de bifurcação:

O ponto de bifurcação ocorre devido a uma perturbação no sistema ou até mesmo em um sistema imperfeito, em que a aplicação da carga pode gerar duas ou mais possibilidades de deslocamento da estrutura. Muito comum em elementos sujeitos ao fenômeno de flambagem, a Figura 5.10 ilustra um ponto de bifurcação que ocorre em B, no qual tem-se duas possibilidades de caminho de equilíbrio. Nesse ponto a estrutura, por exemplo, pode flambar para um lado ou para o outro; o caminho ilustrado pela linha tracejada representa o caminho de equilíbrio caso a estrutura não flambasse. Geralmente, em se tratando de pontos de bifurcação, apenas os métodos de comprimento de arco são aptos a fazer uma leitura integral do caminho de equilíbrio da estrutura.

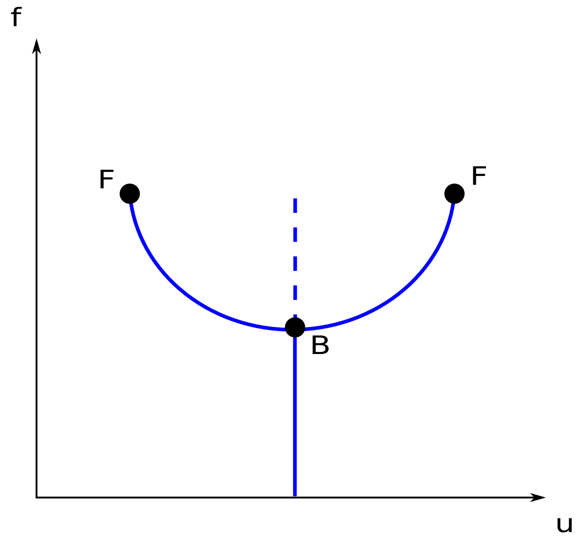


Figura 5.10 – Bifurcação.

(f) Trajetória não-linear com quatro pontos limites de carga e três pontos limites de deslocamento, caracterizando o *looping*:

O *looping* ocorre, por exemplo, em um arco, quando a estrutura deforma abaixo do eixo dos seus apoios devido à ação de uma carga vertical aplicada em seu ápice com sentido voltado para baixo, e, posteriormente, após a carga mudar de sinal, a estrutura volta a se deformar para cima do eixo de seus apoios. Os pontos $L_{máx}$ e L_{min} representam os máximos e mínimos locais, respectivamente, enquanto os pontos T_1, T_2 e T_3 caracterizam os pontos limites de deslocamento. Nem o método de controle de carga, nem o método de controle de deslocamento seriam capazes de fazer uma leitura completa do caminho de equilíbrio: sendo apenas os métodos de comprimento de arco habilitados a fazê-lo.

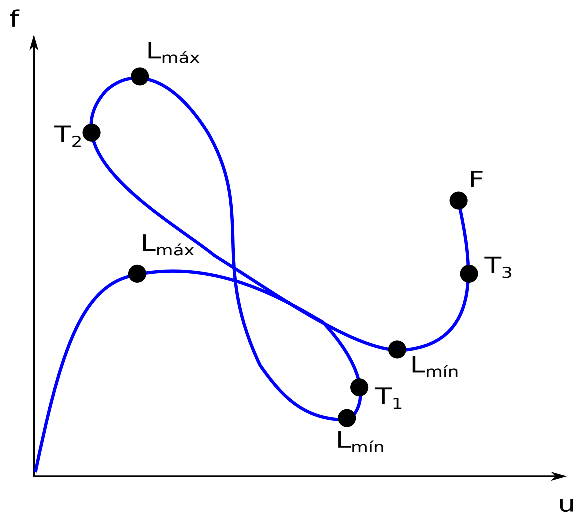


Figura 5.11 – *Looping*.

Após alguns exemplos elucidados, percebe-se claramente a versatilidade e a importância do método de comprimento de arco para a leitura completa do comportamento de caminhos de equilíbrio de estruturas na fase pós-crítica. Esse, diferente de outros métodos, foi capaz de fazer a leitura integral de todos os caminhos de equilíbrio apresentados. Na seção 5.4.5, será apresentado o *Current Stiffness Parameter* (CSP), método capaz de detectar os pontos críticos expostos nesta seção.

5.3 - MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO - RESTRIÇÕES

O Método de Comprimento de Arco utiliza iterações para o equilíbrio enquanto satisfaz as condições de restrição durante cada passo do processo iterativo. Na prática, isso requer restrições que permitam a solução explícita do parâmetro de subincremento de carga $\delta\xi$. Em Schweizerhof e Wriggers (1986), os autores apresentaram uma derivação consistente do algoritmo de Newton para a solução de um conjunto de equações não-lineares com funções de restrição arbitrária.

A seguir, será apresentada a formulação geral de restrição para o método de comprimento de arco, proposta por Schweizerhof e Wriggers (1986), e posteriormente, serão apresentados dois casos particulares de restrição: em um hiperplano constante e em um hiperplano atualizado.

5.3.1 - Formulação Geral de Restrição

Em problemas envolvendo não-linearidade, a relação direta entre a força externa aplicada e a força interna absorvida pela estrutura não se anulam como deveriam e, por isso, surge a necessidade das iterações. Nesse contexto, as iterações (passo corretor) servem para que a diferença entre a força externa, $\mathbf{f}$, e a interna, $g(\mathbf{u})$, chamada resíduo, $\mathbf{r}$, tenda a zero. Logo,

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - g(\mathbf{u}) \approx 0 \tag{5.1}$$

A partir do último estado de equilíbrio indicado pelo ponto $(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{f}^{n-1})$, inicia-se o próximo processo de iteração, a fim de chegar ao ponto $(\mathbf{u}^{n}, \mathbf{f}^{n})$ (veja, por exemplo, a Figura 5.4). Para isso, o primeiro passo do processo é, a partir de um incremento de carga inicial (predição), $\Delta\xi_i^n\mathbf{f}$, calcular o incremento de deslocamento, $\Delta\mathbf{u}_i^n$, correspondente, encontrado por meio da equação de equilíbrio linear $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}$, em que $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez tangente. Nesse momento, o sobrescrito n não mais será apresentado, ficando implícita sua presença nas equações subsequentes desta seção.

Após o processo incremental não convergido, inicia-se o processo iterativo, que nada mais é que o ajuste dos incrementos de carga e de deslocamento por meio de seus subincrementos. Dessa forma, o próximo incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{u}_{i+1}$ é equivale ao atual incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{u}_i$ somado ao atual subincremento de deslocamento $\delta\mathbf{u}_i$. Um procedimento similar segue para o ajuste dos incrementos de carga, em que o fator do incremento de carga seguinte $\Delta\xi_{i+1}$ é igual ao fator de incremento de carga atual $\Delta\xi_i$ somado ao fator de subincremento de carga atual $\delta\xi_i$.

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1} = \Delta\mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u}_i \tag{5.2}$$

$$\Delta\xi_{i+1}\mathbf{f} = \Delta\xi_i\mathbf{f} + \delta\xi_i\mathbf{f} \tag{5.3}$$

Um procedimento equivalente à atualização dos incrementos de deslocamento e carga por meio de seus subincrementos ocorre para a determinação dos deslocamentos e cargas finais, em que os deslocamentos e cargas são ajustados pelos respectivos incrementos de deslocamento e carga. Dessa forma, o deslocamento seguinte $\mathbf{u}_{i+1}$ é equivalente ao deslocamento atual $\mathbf{u}_i$ somado ao incremento de deslocamento atual $\Delta\mathbf{u}_i$. Um procedimento similar segue para o ajuste da carga, em que o próximo fator de incremento de carga ξ_{i+1} é a soma do fator de carga atual ξ_i mais o fator de incremento de carga atual $\Delta\xi_i$.

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i \tag{5.4}$$

$$\xi_{i+1}\mathbf{f} = \xi_i\mathbf{f} + \Delta\xi_i\mathbf{f} \tag{5.5}$$

Consequentemente, a equação do resíduo (5.1) com a substituição das equações (5.4) e (5.5) se torna

$$\mathbf{r}_{i+1} = \xi_{i+1}\mathbf{f} - g(\mathbf{u}_{i+1}) = \xi_i\mathbf{f} + \Delta\xi_i\mathbf{f} - g(\mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i) = 0. \tag{5.6}$$

Desenvolvendo a equação (5.6) e sabendo que $\mathbf{r}_i = \xi_i\mathbf{f} - g(\mathbf{u}_i)$, tem-se a expressão

$$\mathbf{r}_{i+1} = \xi_i\mathbf{f} + \Delta\xi_i\mathbf{f} - g(\mathbf{u}_i) - g(\Delta\mathbf{u}_i) = \mathbf{r}_i + \Delta\xi_i\mathbf{f} - g(\Delta\mathbf{u}_i) = 0. \tag{5.7}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{r}_i = -\Delta\xi_i\mathbf{f} + g(\Delta\mathbf{u}_i). \tag{5.8}$$

Um procedimento iterativo é então construído a partir da força residual (5.8) e de uma equação de restrição geral dada por

$$c(\Delta\mathbf{u}, \Delta\xi\mathbf{f}) = 0. \tag{5.9}$$

O procedimento de iteração de Newton-Raphson para a solução, a fim de combinar equações de equilíbrio e de restrição via as correspondentes equações linearizadas, se dá a partir de uma expansão em série de Taylor truncada, em que os três pontos correspondem aos termos de mais alta ordem, portanto, tem-se

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u}_{i+1} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \xi}\delta\xi_{i+1} + \cdots = 0 \tag{5.10}$$

$$c_{i+1} = c_i + \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u}_{i+1} + \frac{\partial c_i}{\partial \xi}\delta\xi_{i+1} + \cdots = 0 \tag{5.11}$$

As variáveis independentes do problema são o vetor de deslocamento $\mathbf{u}$ e o fator de carga ξ, e, assim, desenvolvendo as duas derivadas parciais da equação (5.10), por meio da equação (5.8), encontra-se

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial(-\Delta\xi_i\mathbf{f} + g(\Delta\mathbf{u}_i))}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial(g(\Delta\mathbf{u}_i))}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K} \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \xi} = \frac{\partial(-\Delta\xi_i\mathbf{f} + g(\Delta\mathbf{u}_i))}{\partial \xi} = \frac{\partial(-\Delta\xi_i\mathbf{f})}{\partial \xi} = -\mathbf{f} \tag{5.13}$$

Isolando o resíduo $\mathbf{r}_i$ da equação (5.10),

$$\mathbf{r}_i = -\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u}_{i+1} - \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \xi}\delta\xi_{i+1} \tag{5.14}$$

e substituindo as equações (5.12) e (5.13) na equação (5.14), tem-se

$$\mathbf{r}_i = -\mathbf{K}\ \delta\mathbf{u}_{i+1} + \mathbf{f}\ \delta\xi_{i+1}. \tag{5.15}$$

Realizando o mesmo procedimento para a restrição c_i, isto é, isolando a restrição da equação (5.11), tem-se que

$$c_i = -\frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{u}}\ \delta\mathbf{u}_{i+1} - \frac{\partial c_i}{\partial \xi}\ \delta\xi_{i+1}. \tag{5.16}$$

Creditando às derivadas parciais da equação (5.16) a seguinte notação:

$$\frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{u}} = (c_i^u)^T \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \xi} = c_i^\xi, \tag{5.18}$$

retornando à equação (5.16) e substituindo as equações (5.17) e (5.18), aquela pode ser reescrita como

$$c_i = -(c_i^u)^T\ \delta\mathbf{u}_{i+1} - c_i^\xi\ \delta\xi_{i+1}. \tag{5.19}$$

Transformando as equações (5.15) e (5.19) em formato matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{f} \\ -(c_i^u)^T & -c_i^\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_{i+1} \\ \delta\xi_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ c_i \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Isolando $\delta\mathbf{u}_{i+1}$ da primeira equação da matriz (5.20), encontra-se

$$\delta\mathbf{u}_{i+1} = -\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{r}_i + \delta\xi_{i+1}\,\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}. \tag{5.21}$$

Para o primeiro e o segundo termos do lado direito da equação (5.21), introduzem-se as notações

$$\delta\mathbf{u}_{i+1}^r = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{r}_i \tag{5.22}$$

$$\delta\mathbf{u}_{i+1}^f = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}. \tag{5.23}$$

Logo,

$$\delta\mathbf{u}_{i+1} = \delta\mathbf{u}_{i+1}^r + \delta\xi_{i+1}\delta\mathbf{u}_{i+1}^f. \tag{5.24}$$

A variável $\delta\mathbf{u}_{i+1}^r$ é gerada pela força residual $\mathbf{r}_i$ e corresponde àquela do método de Newton-Raphson. O segundo termo $\delta\mathbf{u}_{i+1}^f$ representa o incremento de deslocamento vindo do ajuste do incremento de carga.

A substituição da equação (5.24) dentro do primeiro termo da equação (5.19) resulta em

$$c_i = -(c_i^u)^T(\delta\mathbf{u}_{i+1}^r + \delta\xi_{i+1}\delta\mathbf{u}_{i+1}^f) - c_i^\xi\delta\xi_{i+1}. \tag{5.25}$$

Isolando o termo $\delta\xi$, surge a equação geral do incremento do fator de carga, sendo esse igual a

$$\delta\xi_{i+1} = -\frac{(c_i^u)^T\delta\mathbf{u}_{i+1}^r + c_i}{(c_i^u)^T\delta\mathbf{u}_{i+1}^f + c_i^\xi}. \tag{5.26}$$

Apresentada a formulação geral de restrição, parte-se para dois tipos especiais de restrição muito utilizadas: a restrição em um hiperplano, que se divide em hiperplano constante e atualizado. O nome utilizado pelas restrições é bastante sugestivo, em que, para a restrição em um hiperplano constante, o hiperplano permanece perpendicular constante ao primeiro incremento durante todo o processo iterativo, enquanto que, para a restrição no hiperplano atualizado, a restrição é perpendicular ao primeiro incremento e também às sucessivas iterações subsequentes, sendo, desse modo, atualizada a cada passo iterativo.

5.3.2 - Restrição no hiperplano

Wempner (1971), Riks (1972) e Ramm (1981) provaram que o método de comprimento de arco pode ser formulado a partir de uma restrição no hiperplano. Ressalta-se que para um espaço bidimensional, como o apresentado nesta seção, um hiperplano constitui uma reta. A seguir, serão utilizados princípios de ortogonalidade para formulação do subincremento de carga para a restrição no hiperplano ortogonal, de acordo com Krenk (2009).

A condição de que o subincremento $(\delta \mathbf{u}_1^n, \delta\xi_1^n \mathbf{f})$ situa-se em um hiperplano ortogonal ao atual incremento $(\Delta \mathbf{u}_1^n, \Delta\xi_1^n \mathbf{f})$ sugere que o produto escalar entre os mesmos seja nulo (Figura 5.12 - adaptada de Rezaiee-Pajand et al. (2013)). Portanto,

$$(\Delta \mathbf{u}_1^n, \Delta\xi_1^n \mathbf{f}) \cdot (\delta \mathbf{u}_1^n, \delta\xi_1^n \mathbf{f}) = 0. \tag{5.27}$$

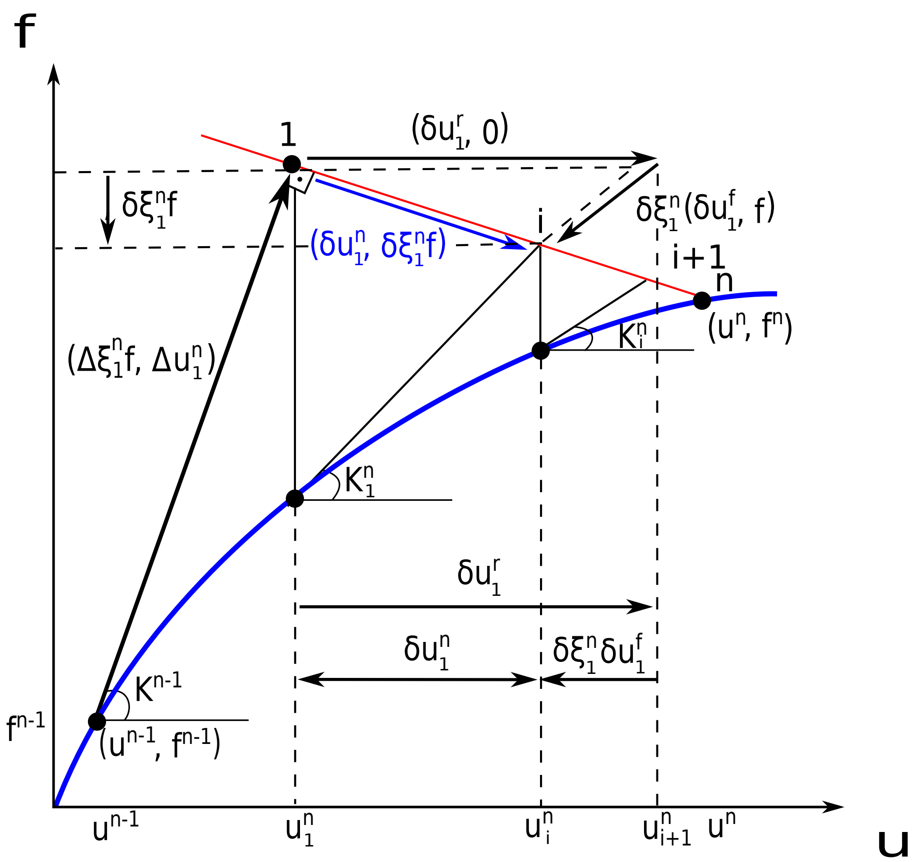


Figura 5.12 – Restrição no hiperplano ortogonal constante.

A variável $\delta \mathbf{u}_1^r$ é gerada pela força residual $\mathbf{r}_1$ e corresponde àquela do método de Newton-Raphson enquanto que o termo $\delta \mathbf{u}_1^f$ representa o incremento de deslocamento vindo do ajuste do incremento de carga. A relação entre essas duas variáveis, como apresentado anteriormente, resulta no subincremento de deslocamento $\delta \mathbf{u}_1^n$ (equação 5.24).

A definição apropriada de um produto escalar depende da introdução de uma métrica adequada no espaço carga-deslocamento, garantindo que os componentes, individualmente, recebam pesos apropriados na formação do produto escalar, para que estejam adequadamente descritos dentro do espaço combinado carga-deslocamento. Dessa maneira, existem dois problemas ao promover um produto escalar entre carga e deslocamento. O primeiro engloba o fato de representarem quantidades físicas diferentes e, por conseguinte, possuírem diferentes unidades e escala. O segundo é que os componentes talvez representem comportamentos diferentes: por exemplo, o vetor de deslocamentos pode representar translações e rotações, assim como os componentes de carga individuais também podem apresentar comportamentos distintos. A variável β é então adicionada à equação (5.27) para formar o produto escalar. Desse modo, tem-se a expressão

$$(\Delta \mathbf{u}_1^n)^T \delta \mathbf{u}_1^n + \beta^2 \Delta \xi_1^n \mathbf{f}^T \delta \xi_1^n \mathbf{f} = 0. \tag{5.28}$$

O incremento de deslocamento equação (5.21) para o primeiro passo de carga, como pode ser visto na Figura 5.12, pode ser escrito como

$$\delta \mathbf{u}_1^n = \delta \mathbf{u}_1^r + \delta \xi_1^n \delta \mathbf{u}_1^f. \tag{5.29}$$

Substituindo a equação (5.29) na equação (5.28) e isolando o termo $\delta \xi_1^n$, chega-se à equação do incremento do fator de carga igual a

$$\delta \xi_1^n = -\frac{(\Delta \mathbf{u}_1^n)^T \delta \mathbf{u}_1^r}{(\Delta \mathbf{u}_1^n)^T \delta \mathbf{u}_1^f + \beta^2 \Delta \xi_1^n \mathbf{f}^T \mathbf{f}}. \tag{5.30}$$

Generalizando a equação (5.30) para o subincremento de carga no passo i, tem-se

$$\delta \xi_i^n = -\frac{(\Delta \mathbf{u}_1^n)^T \delta \mathbf{u}_i^r}{(\Delta \mathbf{u}_1^n)^T \delta \mathbf{u}_i^f + \beta^2 \Delta \xi_1^n \mathbf{f}^T \mathbf{f}}. \tag{5.31}$$

Como mencionado anteriormente, a restrição linear é um caso especial da condição geral de restrição e, assim, a equação (5.31) pode ser comparada à equação (5.26). No caso da restrição linear, o estado combinado da carga-deslocamento é retornado à superfície restrita em cada passo de iteração e, portanto, $c = 0$. O vetor $(c_i^u)^T$ corresponde a parte de deslocamento da normal à restrição hiperplano e, assim, $(c_i^u)^T = (\Delta \mathbf{u}_1^n)^T$. O último coeficiente c_i^ξ representa a dependência da restrição no nível de carregamento e se encontra representado por $\beta^2 \Delta \xi_1^n \mathbf{f}^T \mathbf{f}$.

Para gerar uma restrição em um hiperplano atualizado (Figura 5.13), basta condicionar os subincrementos a um hiperplano ortogonal, gerado não mais a partir do primeiro incremento, mas, sim, a cada iteração. Assim sendo, o produto escalar entre os incrementos e subincrementos que se encontram no hiperplano ortogonal atualizado pode ser representado por

$$(\Delta \mathbf{u}_i^n, \Delta\xi_i^n \mathbf{f}) \cdot (\delta \mathbf{u}_i^n, \delta\xi_i^n \mathbf{f}) = 0. \quad (5.32)$$

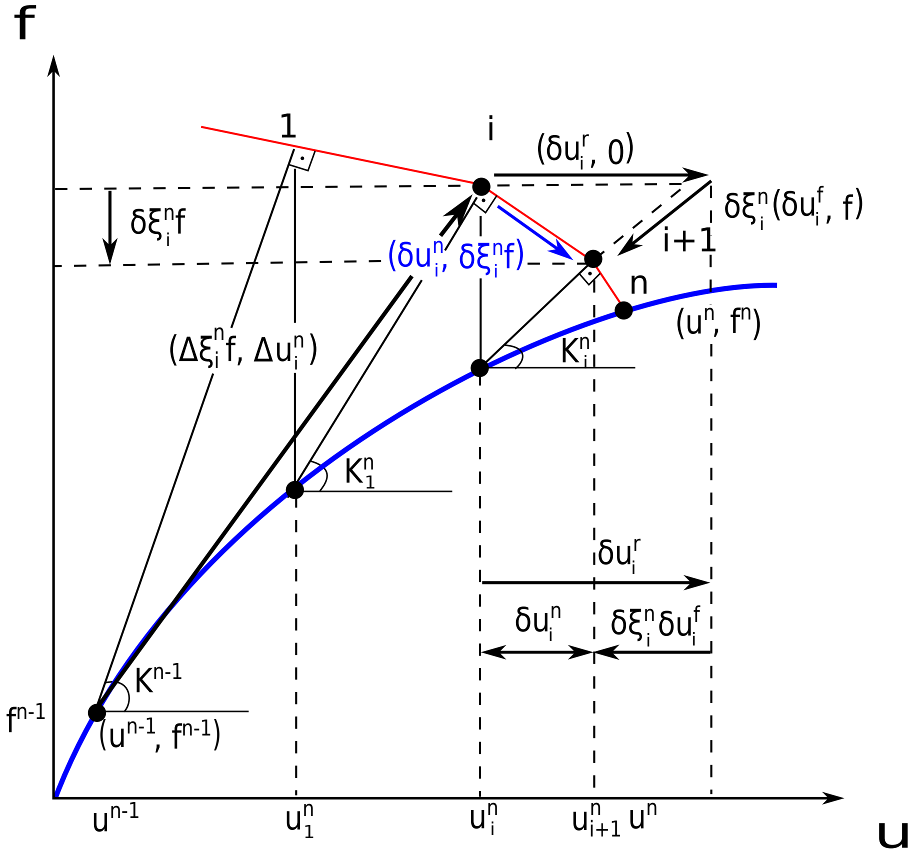


Figura 5.13 – Restrição no hiperplano ortogonal atualizado.

Desse modo, de forma direta, basta substituir o subescrito 1 por i na equação (5.31), retornando à expressão

$$\delta\xi_i^n = -\frac{(\Delta \mathbf{u}_i^n)^T \delta \mathbf{u}_i^r}{(\Delta \mathbf{u}_i^n)^T \delta \mathbf{u}_i^f + \beta^2 \Delta\xi_i^n \mathbf{f}^T \mathbf{f}}. \quad (5.33)$$

Como experiências numéricas mostram, que o valor de β parece não exercer muita influência no desempenho do método de comprimento de arco que usam essas restrições (Crisfield, 1991); será atribuído $\beta = 0$. Dessa forma, para o hiperplano constante e atualizado, os subincrementos de carga se transformam, respectivamente, em

$$\delta\xi_i^n = -\frac{(\Delta \mathbf{u}_1^n)^T \delta \mathbf{u}_i^r}{(\Delta \mathbf{u}_1^n)^T \delta \mathbf{u}_i^f} \quad (5.34)$$

$$\delta\xi_i^n = -\frac{(\Delta \mathbf{u}_i^n)^T \delta \mathbf{u}_i^r}{(\Delta \mathbf{u}_i^n)^T \delta \mathbf{u}_i^f}. \quad (5.35)$$

5.4 - PARÂMETROS UTILIZADOS PARA O MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO

Na literatura existem diversas formas para se determinar uma estratégia automática de incremento de carga. A eficiência do método de solução tipicamente depende do uso adequado do incremento de carregamento (ou deslocamento) inicial em cada passo de carga. Não há uma previsão geral ótima para incremento inicial de um passo de carga baseado na informação de passos anteriores: por exemplo, um ponto de bifurcação pode mudar seu comportamento drasticamente com apenas um passo de carga. Entretanto, para um caminho de equilíbrio suave, sem pontos de bifurcação, vários métodos vêm sendo desenvolvidos (Krenk, 2009).

5.4.1 - Estratégia para a atualização automática do comprimento de arco

A princípio, a escolha do comprimento de arco é inicialmente determinada pelo programador: entretanto, um mecanismo automático para atualização do comprimento de arco foi sugerido por Crisfield (1991). A ideia básica na determinação do tamanho do comprimento de arco é que ele seja grande em regiões com poucas não-linearidades e pequeno em regiões com forte comportamento não-linear.

$$\Delta L^n = \Delta L^{n-1}\left(\frac{I_d}{I^{n-1}}\right)^{1/2} \tag{5.36}$$

Na equação (5.36), ΔL^n representa o comprimento de arco no passo atual n; ΔL^{n-1} representa o comprimento de arco no passo anterior $n-1$; I_d representa o número de iterações desejadas para que a solução convirja (pré-determinado pelo programador); e I^{n-1} representa o número de iterações necessárias para a convergência do passo anterior $n-1$. Assim sendo, teoricamente, em regiões fortemente não-lineares, o número de iterações necessárias para a convergência da solução seria maior do que em regiões com baixo grau de não-linearidade: dessa maneira, percebe-se pela equação (5.36) que, quanto maior for I^{n-1}, menor será o valor de ΔL^n e que, quanto menor for I^{n-1}, maior será o valor de ΔL^n, o que está de acordo com a ideia básica apresentada para a determinação do tamanho do comprimento de arco.

Outra estratégia muito utilizada é, caso a convergência das iterações de equilíbrio estrutural não seja alcançada dentro de um número determinado de iterações (pré-determinado pelo programador), "corta-se" o tamanho de comprimento de arco pela metade. Desse modo, tem-se que

$$\Delta L^n = \frac{\Delta L^n}{2}. \tag{5.37}$$

Na presente pesquisa, optou-se por utilizar apenas o método de corte automático do comprimento de arco caso a solução não convergisse dentro de um número definido de iterações.

5.4.2 - Estratégia de incremento de carga (preditor)

A diferença básica dos métodos de comprimento de arco em comparação aos métodos de controle de carga e de deslocamento é que o fator de incremento de carga $\Delta\xi_1^n$, que consiste na primeira estimativa do ciclo n e denominado preditor, é desconhecido *a priori*.

O passo preditor consiste em duas etapas. Primeiramente, calcula-se o valor da matriz de rigidez do passo anterior $\mathbf{K}^{n-1}$, de posse da matriz de rigidez e do valor da carga $\mathbf{f}$, que é constante e pré-determinado na entrada de dados, calcula-se a primeira estimativa dos deslocamentos, pela relação

$$\delta\mathbf{u}_1^f = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}. \tag{5.38}$$

A segunda etapa, consiste em determinar o valor de $\Delta\xi_1^n$, que multiplicado por $\delta\mathbf{u}_1^f$ e $\mathbf{f}$, resulta no real passo preditor $(\Delta\mathbf{u}_1^n, \Delta\xi_1^n\mathbf{f})$ (Figura 5.14).

Como pode ser observado pela Figura 5.14, para determinar a incógnita $\Delta\xi_1^n$, tem-se que

$$\Delta L^2 = (\Delta\mathbf{u}_1^n)^2 + (\beta\Delta\xi_1^n\mathbf{f})^2 = (\Delta\mathbf{u}_1^n)^T\Delta\mathbf{u}_1^n + \beta^2(\Delta\xi_1^n)^2\mathbf{f}^T\mathbf{f}. \tag{5.39}$$

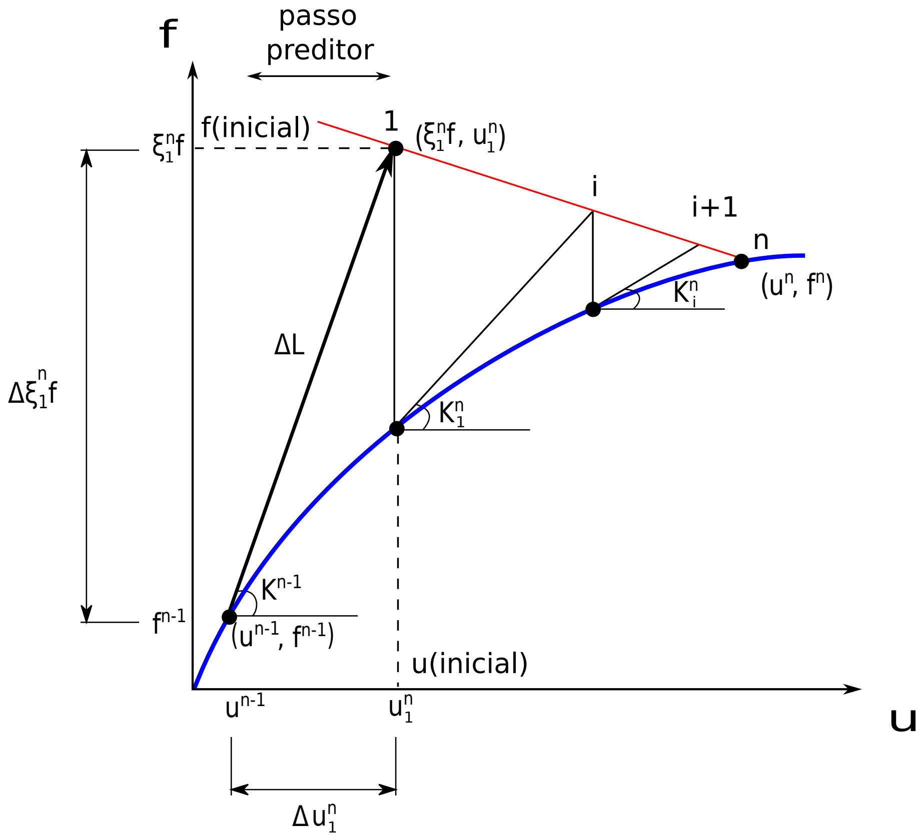


Figura 5.14 – Passo preditor.

A equação (5.39) impõe que o incremento da solução no espaço carga-deslocamento tenha um certo comprimento de valor ΔL, denominado comprimento de arco. Este é um valor pré-determinado e deve ser convenientemente escolhido pelo programador. O valor de $\Delta\mathbf{u}_1^n$ para o passo preditor, no passo n, equivale a

$$\Delta\mathbf{u}_1^n = \Delta\xi_1^n \delta\mathbf{u}_1^f + \delta\mathbf{u}_1^r, \tag{5.40}$$

em que o subincremento de deslocamento, devido às forças residuais $\delta\mathbf{u}_1^r$, é igual a zero, e portanto

$$\Delta\mathbf{u}_1^n = \Delta\xi_1^n \delta\mathbf{u}_1^f. \tag{5.41}$$

Substituindo a equação (5.41) na equação (5.39), esta pode ser reescrita como

$$\Delta L^2 = (\Delta\xi_1^n)^2[(\delta\mathbf{u}_1^f)^T\delta\mathbf{u}_1^f + \beta^2\mathbf{f}^T\mathbf{f}]. \tag{5.42}$$

Dessa forma, isolando $\Delta\xi_1^n$, obtém-se o valor do incremento de carga

$$\Delta\xi_1^n = \pm\frac{\Delta L}{\sqrt{(\delta\mathbf{u}_1^f)^T\delta\mathbf{u}_1^f + \beta^2\mathbf{f}^T\mathbf{f}}}. \tag{5.43}$$

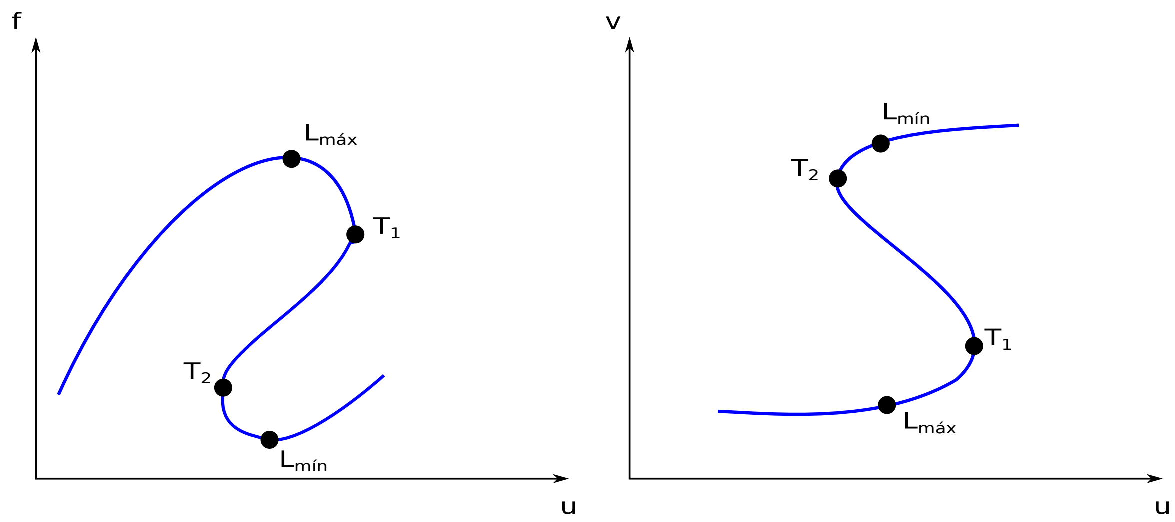
Segundo Crisfield (1991), como experiências numéricas demostram que β não exerce muita influência no método, será creditado $\beta = 0$ e, portanto, o valor para o incremento de carga se torna

$$\Delta\xi_1^n = \pm\frac{\Delta L}{\sqrt{(\delta \mathbf{u}_1^f)^T \delta \mathbf{u}_1^f}} = \pm\frac{\Delta L}{||\delta \mathbf{u}_1^f||}. \tag{5.44}$$

A definição do sinal da equação (5.44) está associada a um processo de carga ou descarga da estrutura, que, por sua vez, está associado às características da matriz de rigidez. Dessa forma, seu cálculo será demonstrado a seguir.

5.4.3 - Direção correta do caminho de equilíbrio (sinal do passo preditor)

Determinar corretamente o sinal do passo preditor significa garantir que a leitura do caminho de equilíbrio caminhe para "frente", e não para "trás". A Figura 5.15 apresenta dois caminhos de equilíbrio genéricos que servirão de base para a escolha correta do passo preditor (Krenk, 2009). Considera-se um caminho de equilíbrio no espaço carga-deslocamento com quatro pontos limites, sendo dois pontos limites de carga, um máximo ($L_{máx}$), e um mínimo (L_{min}) e dois pontos limites de deslocamento T_1 e T_2, como pode ser visto na Figura 5.15a. Para o espaço de deslocamentos correspondente, tem-se o caminho de equilíbrio representado pela Figura 5.15b.

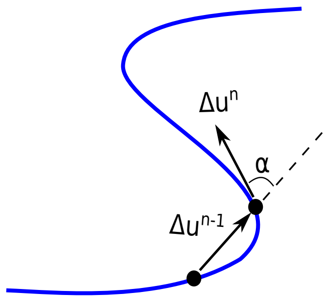


(a) Caminho de equilíbrio no espaço carga-deslocamento.

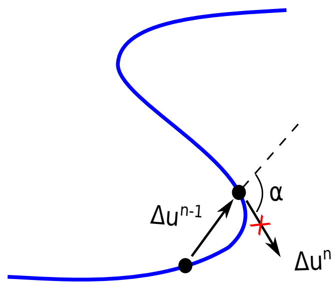
(b) Caminho de equilíbrio no espaço de deslocamentos.

Figura 5.15 – Caminhos de equilíbrio genéricos para a determinação do sinal do passo preditor.

Se o incremento previsto passar do ponto limite, pode haver necessidade de mudança na direção do incremento de carga. Essa situação, dentro do espaço de deslocamentos, ilustrada pela Figura 5.16, apresenta o incremento de deslocamento do passo anterior convergido $\Delta\mathbf{u}^{n-1}$, conectando dois pontos na curva de equilíbrio. Dessa forma, convergida a solução no passo $n-1$, inicia-se o passo seguinte n por meio de um incremento, denominado passo preditor $\Delta\mathbf{u}^n$. É essencial que o vetor de incremento de deslocamento previsto $\Delta\mathbf{u}$ caminhe na direção que continua a curva de equilíbrio, como mostra a Figura 5.16a, e não na direção inversa, como apresentado na Figura 5.16b.



(a) $(\Delta\mathbf{u}^{n-1})^T\Delta\mathbf{u}^n > 0$.



(b) $(\Delta\mathbf{u}^{n-1})^T\Delta\mathbf{u}^n < 0$.

Figura 5.16 – Direção do caminho de equilíbrio.

Sabendo-se que, para a relação entre vetores, tem-se que $(\Delta\mathbf{u}^{n-1})^T\Delta\mathbf{u}^n > 0$ para $0° \leq \alpha < 90°$ (Figura 5.16a), e $(\Delta\mathbf{u}^{n-1})^T\Delta\mathbf{u}^n < 0$ para $90° < \alpha \geq 180°$ (Figura 5.16b). Dessa maneira, uma simples implementação de controle direto consiste na checagem da condição na projeção do incremento de deslocamento anterior no atual

$$(\Delta\mathbf{u}^{n-1})^T\Delta\mathbf{u}^n < 0. \tag{5.45}$$

Se essa condição (equação 5.45) não for satisfeita, mantém-se o sinal do fator de incremento de carregamento, todavia, se essa condição for satisfeita, muda-se o sinal do fator de incremento de carregamento

$$\Delta\xi^n = -\Delta\xi^n. \tag{5.46}$$

É importante ressaltar, que no âmbito do primeiro incremento, ou seja, no passo preditor, a direção de $\Delta\mathbf{u}^n$ é a mesma de $\delta\mathbf{u}^f$, como pode ser observado por meio da equação (5.41) e, assim, a equação (5.45) pode ser representada pela seguinte expressão

$$(\Delta\mathbf{u}^{n-1})^T\delta\mathbf{u}^f < 0. \tag{5.47}$$

Para a restrição do hiperplano, a reversão direta do sinal, como indicado pela equação (5.46), é relevante somente na primeira previsão de passo (preditor), visto que o processo seguinte é governado pelos subincrementos.

5.4.4 - Critérios de convergência

Os processos incremental-iterativos necessitam de um critério de parada, em que a convergência é alcançada quando a solução obtida alcança uma precisão desejada. Nesse caso, isso ocorre quando o critério de parada torna-se menor ou igual à tolerância pré-estabelecida tol, de maneira que, alcançado esse critério, o atual passo iterativo se encerra, para que o próximo passo incremental se inicie.

De acordo com Gago (2004), a escolha apropriada do critério de convergência é importante, assim como a escolha da tolerância correspondente, que conduza a um número de iterações relativamente baixo, sem que se prejudique o rigor dos resultados obtidos. Segundo o autor, a experiência mostra que, adaptando-se os critérios de convergência formulados em termos de forças, deslocamento e energia, os valores dos parâmetros de convergência não deverão ultrapassar, respectivamente, 1.10^{-3}, 1.10^{-6} e 1.10^{-4}.

Os critérios de convergência mais comumente utilizados em problemas não-lineares se dão em termos de deslocamento, força e energia. A seguir, esses três critérios de convergência serão apresentados, assim como algumas características importantes para sua utilização ou não.

Em termos de deslocamentos, a relação entre a norma do subincremento de deslocamento incremental corrente $||\delta \mathbf{u}_i||$, pela norma de deslocamento do passo preditor $||\Delta \mathbf{u}||$ deve ser menor ou igual à tolerância .

$$\frac{||\delta \mathbf{u}_i||}{||\Delta \mathbf{u}||} \leq tol \tag{5.48}$$

Em se tratando de forças residuais, a relação da norma do subincremento de resíduo incremental corrente $||\delta \mathbf{r}_i||$, pela norma de resíduo do passo preditor $||\Delta \mathbf{r}||$ deve ser menor ou igual à tolerância.

$$\frac{||\delta \mathbf{r}_i||}{||\Delta \mathbf{r}||} \leq tol \tag{5.49}$$

Em função de energia, a relação da norma do trabalho realizado pelo resíduo no passo iterativo corrente $||\delta \mathbf{u}_i^T \; \delta \mathbf{r}_i||$, pela norma do trabalho realizado pelo resíduo no passo preditor $||\Delta \mathbf{u}^T \; \Delta \mathbf{r}||$ deve ser menor ou igual à tolerância.

$$\frac{||\delta \mathbf{u}_i^T \; \delta \mathbf{r}_i||}{||\Delta \mathbf{u}^T \; \Delta \mathbf{r}||} \leq tol \tag{5.50}$$

De acordo com Lohse (2015), o critério de deslocamento pode não funcionar bem em problemas não-lineares com grandes deslocamentos, pois, à medida que aumentam os deslocamentos, o critério torna-se frouxo. Ainda segundo o autor, o critério referente às cargas residuais é o mais recomendado para problemas com alta não-linearidade geométrica, porém, por não levarem em conta os deslocamentos, pode indicar convergência quando os deslocamentos ainda apresentam incrementos significativos. O critério de energia, como apresentado por Lohse (2015), apresenta vantagens de levar em conta o processo de convergência tanto em deslocamentos como em forças residuais desequilibradas. Segundo Rodrigues (2000), erros podem ocorrer, em circunstâncias especiais, no caso da utilização de apenas um desses tipos de verificação. Portanto, de modo geral, é recomendável utilizar mais de um desses critérios. Importantes contribuições sobre a escolha correta dentre os critérios de convergência pode ser visto em Bathe e Cimento (1980).

Na presente pesquisa, apesar de ser utilizado apenas o critério de cargas residuais para a convergência das iterações, o programa "co-rotational-2Dbeam.f90" apresenta implementado em seu código todos os três critérios de convergência e, portanto, no decorrer dos exemplos numéricos estudados, todos os critérios são analisados.

5.4.5 - Detecção de pontos críticos (CSP)

O parâmetro de rigidez corrente (CSP), proposto por Bergan et al. (1978) e Bergan (1980), tem provado ser muito útil como uma medida que, além de detectar pontos críticos, caracteriza, de forma simples, a presença de instabilidade e de ganho ou perda de rigidez da estrutura por meio do gráfico CSP *versus* carga. Portanto, a plotagem desse gráfico pode também ajudar na aquisição de uma melhor compreensão do comportamento complexo de sistemas não-lineares. Dessa forma, esta seção se dedica ao cálculo necessário para se encontrar o valor de CSP.

A rigidez de um sistema para incrementos de carga e deslocamento é dada pela simples equação de equilíbrio $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{u}$; dessa forma, tem-se

$$\mathbf{K} = \frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta\mathbf{f}}. \tag{5.51}$$

Como o incremento de carga e de deslocamento são vetores, para se obter um valor escalar, a equação (5.51) é multiplicada por $\Delta\mathbf{u}/\Delta\mathbf{u}$, resultando em

$$\mathbf{K} = \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta\mathbf{u}}\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta\mathbf{u}}. \tag{5.52}$$

Substituindo-se as equações $\Delta\mathbf{f} = \Delta\xi\mathbf{f}$ e $\Delta\mathbf{u} = \Delta\xi\delta\mathbf{u}^f$ na equação (5.52), tem-se que

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{f}\delta\mathbf{u}^f}{\delta\mathbf{u}^f\delta\mathbf{u}^f}. \tag{5.53}$$

O parâmetro de rigidez corrente, então, é determinado pela relação entre a rigidez relativa ao primeiro passo de carga $\mathbf{K}^1$ e a rigidez corrente do passo atual $\mathbf{K}^n$, caracterizando a rigidez média entre duas configurações. Representado por S_p, o parâmetro de rigidez corrente é dado por

$$S_p = \frac{\mathbf{K}^n}{\mathbf{K}^1}. \tag{5.54}$$

É facilmente visto, a partir da equação (5.54), que o parâmetro de rigidez corrente tem o valor inicial da unidade para qualquer sistema não-linear, pois, nesse caso, $S_p = \mathbf{K}^1/\mathbf{K}^1$. Dessa forma, quando o S_p for menor que a unidade, o sistema torna-se "mais macio", portanto há uma perda na rigidez, e, quando o S_p for maior do que a unidade, o sistema está "endurecendo", consequentemente, há um ganho na rigidez.

Um exemplo da utilização do parâmetro de rigidez corrente é mostrado na Figura 5.17, que descreve um comportamento típico de *snap-back*.

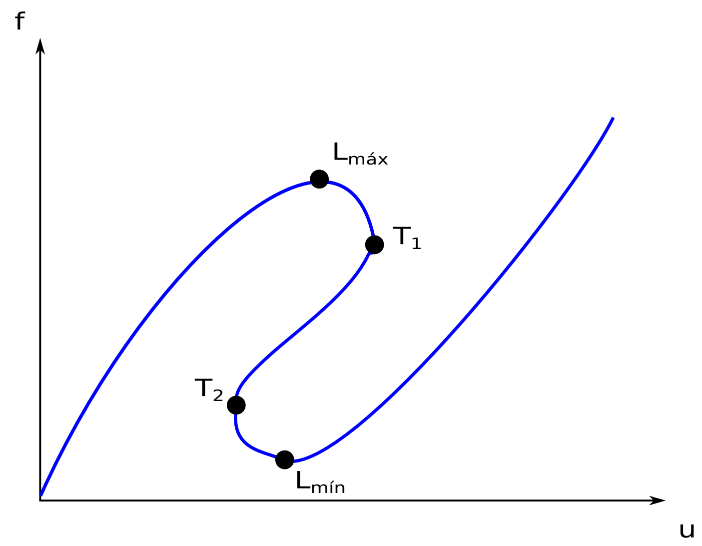


Figura 5.17 – *Snap-back* no espaço carga-deslocamento para o exemplo do parâmetro de rigidez corrente (CSP).

A Figura 5.18 demonstra a variação dos S_p, em função da carga f. O comportamento instável do problema é caracterizado por um valor de S_p menor do que zero. Como apresentado, uma vez que a escala é dada em relação ao sistema inicial, o sistema linear S_P, sempre começa com o valor igual a 1 e diminui em magnitude até que se torne zero para o ponto limite. Esse ponto de cruzamento com o eixo f torna fácil a identificação dos valores máximos e mínimos para o parâmetro de carga e deslocamento.

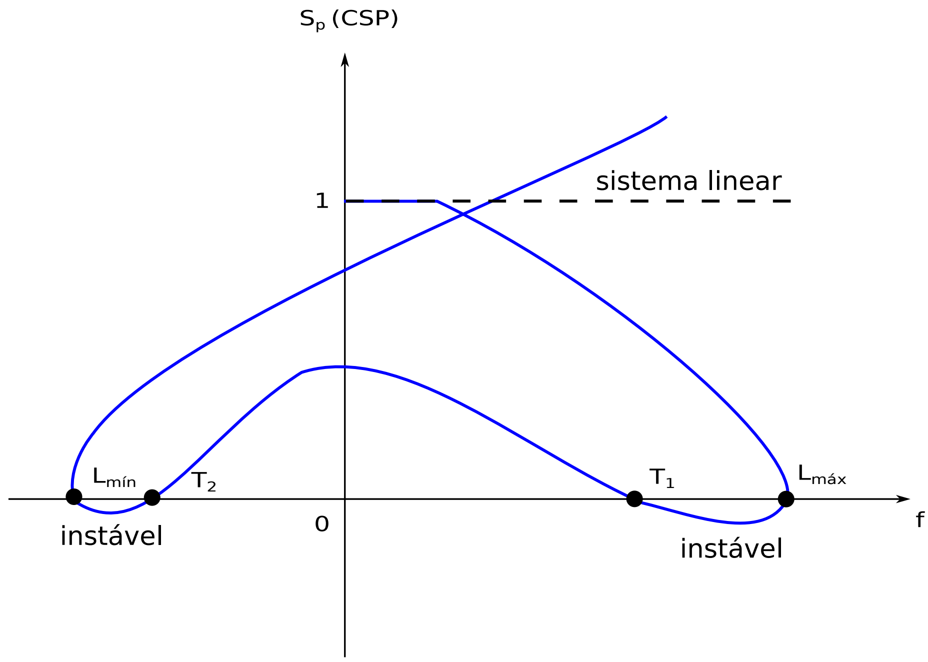


Figura 5.18 – Gráfico de parâmetro de rigidez corrente (CSP) x carga ilustrando a detecção de pontos limites e trechos de instabilidade.

5.5 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O algoritmo de comprimento de arco ortogonal a um hiperplano atualizado encontra-se resumido na Tabela 5.1. O algoritmo começa com a entrada de dados que engloba: o número de incrementos de carga (n), a tolerância (tol), o número máximo de iterações ($i_{máx}$), o número máximo de cortes ($c_{máx}$), o comprimento de arco (ΔL_1) e a força ($\mathbf{f}$). Inicia-se, então, o processo incremental que será realizado n vezes. Cada passo de carga inicia com o cálculo do primeiro incremento de deslocamento $\delta\mathbf{u}^f$. Os valores iniciais $\mathbf{f}$ e $\delta\mathbf{u}^f$ são retidos como referência, e um incremento de escala $\Delta\xi$, calculado pela equação (5.44), e seu sinal determinado pela condição apresentada por (5.45), é usado para definir o real primeiro passo de carga e de deslocamento. A força residual correspondente a este passo é calculada, e o subincremento de deslocamento referente ao método de Newton ($\delta\mathbf{u}^r$) é encontrado para que em seguida seja determinado o subincremento de fator de carga ($\delta\xi$) de acordo com a equação (5.35). O algoritmo pode ser mudado para uso do retorno da restrição pelo primeiro incremento de carga-deslocamento simplesmente pela utilização do subscrito 1 em $\Delta\mathbf{u}$ na equação (5.35). Isto corresponde ao método de comprimento de arco em um hiperplano constante. De posse dos subincrementos de carga $\delta\xi$ e deslocamento $\delta\mathbf{u}$, os incrementos de carga $\Delta\xi$ e deslocamento $\Delta\mathbf{u}$ são atualizados. A convergência é obtida por meio da norma das forças residuais. Ao fim de cada iteração, verifica-se se a tolerância pré-estabelecida foi atendida. Caso isso ocorra, encerra-se o processo iterativo, atualiza-se o fator de carga $\xi\mathbf{f}$ e o deslocamento final $\mathbf{u}$ do passo corrente e inicia-se o próximo passo incremental. Caso não ocorra, há um "corte" do comprimento de arco e o incremento de carga volta a ser calculado. Se a solução não convergir após o número máximo de cortes o programa se encerra sem realizar os n passos de carga. Caso chegue ao número máximo de incrementos de carga (n), o programa também se encerra, todavia, desta vez, com a solução convergida. Note que a matriz de rigidez é tangente e atualizada a cada iteração, caracterizando, desta forma, o Método de Newton-Raphson Padrão. Para a utilização do Método de Newton-Raphson Modificado, basta colocar a equação da matriz de rigidez dentro do passo incremental, e, não, do iterativo (para uma melhor visualização desses métodos, veja o Apêndice A.1).

Tabela 5.1 – Algoritmo de comprimento de arco ortogonal a um hiperplano atualizado.

ENTRADA DE DADOS:
número de incrementos de carga (n), tolerância (tol), limite de iterações ($i_{máx}$), número máximo de cortes ($c_{máx}$), comprimento de arco (ΔL_1), força ($\mathbf{f}$).

Início dos incrementos de carga (etapa incremental/preditora)
for $n = 1$ **to** n **do**
. $\Delta L = \Delta L_1$
. **for** $c = 1$ **to** $c_{máx}$ **do**
. . $\delta\mathbf{u}^f = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$
. . $\Delta\xi = \Delta L \ / \ ||\delta\mathbf{u}^f||$
. . **if** $\Delta\mathbf{u}^T\delta\mathbf{u}^f < 0$ **then** $\Delta\xi = -\Delta\xi$
. . $\Delta\mathbf{u} = \Delta\xi\delta\mathbf{u}^f$
. . $\mathbf{r} = -\Delta\xi\mathbf{f} + g(\Delta\mathbf{u})$
. . $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}$
. . Início das iterações (etapa iterativa/corretora)
. . **for** $i = 1$ **to** $i_{máx}$ **do**
. . . $g(\Delta\mathbf{u}) = g(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) - \xi\mathbf{f}$
. . . $\mathbf{K} = \partial g(\Delta\mathbf{u})/\partial u$
. . . $\delta\mathbf{u}^r = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{r}$
. . . $\delta\xi = -\Delta\mathbf{u}^T\delta\mathbf{u}^r/\Delta\mathbf{u}^T\delta\mathbf{u}^f$
. . . $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^r + \delta\xi\delta\mathbf{u}^f$
. . . $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$
. . . $\Delta\xi = \Delta\xi + \delta\xi$
. . . $\mathbf{r} = -\Delta\xi\mathbf{f} + g(\Delta\mathbf{u})$
. . . **if** $||\mathbf{r}|| \ / \ ||\Delta\mathbf{r}|| \leq tol$ **then break**
. . **end do**
. . **if** $||\mathbf{r}|| \ / \ ||\Delta\mathbf{r}|| \leq tol$ **then break**
. . $\Delta L = \Delta L/2$
. **end do** (fim das iterações)
. **if** $||\mathbf{r}|| \ / \ ||\Delta\mathbf{r}|| \leq tol$ **then break**
. $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$
. $\xi\mathbf{f} = \xi\mathbf{f} + \Delta\xi\mathbf{f}$
end do (fim dos incrementos de carga)

O método de comprimento de arco apresentado pode ser resumido na pré-determinação do comprimento de arco ΔL e sua atualização; no cálculo do fator de incremento de carga $\Delta\xi$, que irá determinar a predição do primeiro passo de cada incremento e está condicionado tanto à carga quanto ao deslocamento; no cálculo do sinal do incremento de carga $\pm\Delta\xi$, que irá determinar a direção correta do passo preditor; no cálculo do fator de subincremento de carga $\delta\xi$, que também está condicionado à carga e ao deslocamento; e, por fim, nos critérios para convergência, que devem ser menores ou iguais a tol, que representam uma tolerância admitida para a convergência do resultado encontrado, ou seja, funcionam como um critério de parada para as iterações.

6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

O elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko, implementado no programa computacional "co-rotational-2Dbeam.f90", foi utilizado para representar os elementos discretizados de pórticos, arcos e de uma viga. Dessa maneira, neste capítulo, avaliou-se a habilidade do elemento de viga unificado por meio da análise de estruturas, como, o pórtico de Lee, o pórtico de Roorda modificado, o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica, o arco circular de grande altura rotulado-engastado com carga centrada, o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada e excêntrica, e a viga engastada com momento na extremidade livre.

Nos exemplos estudados, as estruturas foram representadas por seus respectivos nós e elementos de acordo com a discretização aplicada para cada uma delas. Dessa forma, buscou-se apresentar uma série de configurações deformadas de cada uma das estruturas, com o intuito de visualizar o caminho traçado pela estrutura no decorrer dos passos de carga. Em alguns casos, ao apresentar as configurações deformadas, também houve a intenção de ilustrar a configuração da estrutura em seus pontos limites de carga e de deslocamento.

Em um contexto do método de solução numérica, o caminho de equilíbrio não-linear das estruturas analisadas foi traçado com a utilização do método de comprimento de arco com restrição em um hiperplano ortogonal atualizado. Com a escolha de um nó de referência, buscou-se analisar o caminho de equilíbrio das estruturas no espaço carga-deslocamento, avaliando-se os deslocamentos horizontais (u), os deslocamentos verticais (v) e as rotações (θ). Os pontos críticos desses caminhos de equilíbrio foram detectados com a utilização do CSP e do gráfico CSP *versus* fator de carga.

Em todos os exemplos apresentados, de posse dos caminhos de equilíbrio das estruturas, buscou-se compará-los e confrontá-los a resultados obtidos por outros autores. E, como, em alguns desses caminhos de equilíbrio, é difícil identificar sua continuação, como, por exemplo, nos casos de *loppings*, esses caminhos de equilíbrio foram acompanhados por letras de forma a representarem a sequência traçada para o caminho de equilíbrio da estrutura. Em trabalhos que apresentavam os valores dos pontos limites, procurou-se confrontá-los aos resultados obtidos pela atual pesquisa, a fim de determinar a diferença percentual entre eles.

6.1 - TABELA RESUMO

A Tabela 6.1 é um resumo dos exemplos numéricos que serão apresentados no decorrer deste capítulo. Nela, se encontram dados essenciais para a solução de cada sistema estrutural, como o número de elementos e nós da discretização, a quantidade de passos de carga realizados, a tolerância pré-estabelecida para a convergência dos resultados, o valor do comprimento de arco e, por fim, o número do nó de referência utilizado para a plotagem do caminho de equilíbrio no espaço carga-deslocamento das estruturas.

Tabela 6.1 – Tabela resumo dos exemplos numéricos analisados.

Exemplos numéricos	Número de elementos	Número de nós	Passos de carga	Tolerância (tol)	Comprimento de arco	Nó de referência
Pórtico de Lee	20	21	62	1.10^{-5}	10.2	13
Pórtico de Roorda mod. 1	10	11	180	1.10^{-5}	15.1	6 e 11
Pórtico de Roorda mod. 2	20	21	300	1.10^{-5}	15.1	11 e 21
Arco abatido	20	21	315	1.10^{-5}	0.0085	11
Arco alto	20	21	100	1.10^{-5}	12.1	11
Arco semicírculo (C)	50	51	420	1.10^{-5}	12.0	26
Arco semicírculo (E)	50	51	500	1.10^{-5}	12.0	26
Viga engastada 1	10	11	80	1.10^{-5}	0.628	11
Viga engastada 2	20	21	80	1.10^{-5}	0.628	21
Viga engastada 3	40	41	80	1.10^{-5}	0.628	41

*(C) carga centrada, *(E) carga excêntrica.

É importante enfatizar que, todos os exemplos numéricos apresentados possuem em suas figuras um quadro resumo com as propriedades da estrutura descritas de maneira adimensional (unidades consistentes). Como propriedades constitutivas dos materiais, os quadros apresentam o módulo de elasticidade ou módulo de Young (E), o módulo de cisalhamento (G) e o coeficiente de Poisson (v). Como propriedades geométricas, os quadros apresentam para as seções transversais retangulares: base (b), altura (h), área (A), fator de forma ou coeficiente de distorção (f) e momento de inércia (I). Nas figuras, também encontram-se as dimensões dos pórticos, dos arcos e da viga. As forças aplicadas (P) têm valor igual a +1 e -1 para todos os exemplos. O sinal de mais (+), significa que a força tem sentido voltado para cima e o sinal de menos (-), significa que a força tem sentido voltado para baixo. Foi utilizado o valor de 1 para a força em todos os exemplos, pois, o fator de carga ξ irá regular o real valor da carga no decorrer do processo incremental-iterativo.

6.2 - PÓRTICOS EM L

6.2.1 - Pórtico de Lee

O exemplo em questão (Figura 6.1) é conhecido como pórtico de Lee, sendo inicialmente estudado e proposto por Lee et al. (1968) e, em seguida, analisado por diversos outros autores, como Chichón (1984), Simo e Vu-Quoc (1986), Schweizerhof e Wriggers (1986), Hsiao e Hou (1987), Fujii (1989), Galvão (2000), Battini (2002), De Souza (2008), Paraski (2012) e outros, a fim de investigar uma estrutura sujeita à grande não-linearidade geométrica.

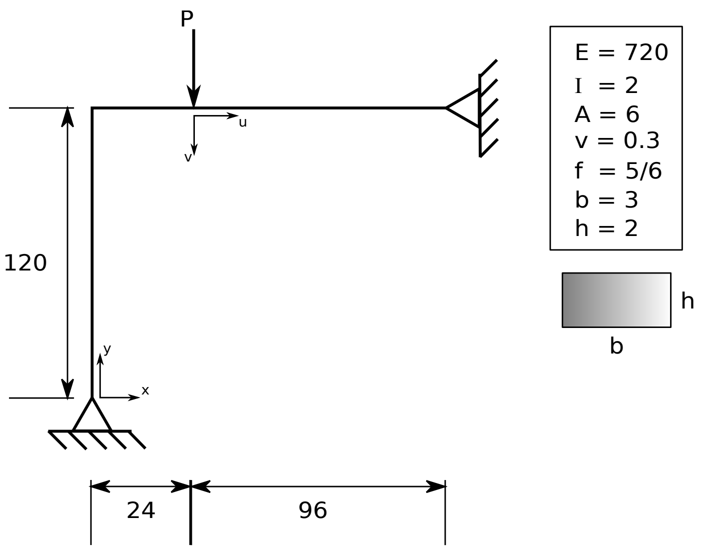


Figura 6.1 – Pórtico de Lee.

O pórtico estudado (Figura 6.1) é composto por dois elementos de barra, formando entre eles uma ligação rígida de noventa graus. Ambas as barras possuem 120 unidades consistentes e dimensões transversais 3x2. Nas extremidades das barras, há apoios de segundo gênero, restringindo-se, desse modo, os deslocamentos translacionais nesses locais. Como propriedades constitutivas, o pórtico possui módulo de Young igual a 720 e Poisson igual a 0.3. A área da seção transversal, assim como a inércia, podem ser calculadas e equivalem a 6 e 2, respectivamente. Por se tratar de um elemento de seção transversal retangular, considera-se o fator de forma ou coeficiente de distorção f igual a 5/6. Por fim, uma carga vertical concentrada-P encontra-se aplicada a 4/5 de distância do apoio da viga.

Para a solução do exemplo, o sistema foi discretizado em 20 elementos - 10 referentes à barra vertical e outros 10 referentes à barra horizontal. Os nós foram enumerados de 1 a 21 e ordenados de forma crescente, partindo-se do apoio da barra vertical até o apoio da barra horizontal. A carga aplicada localiza-se no nó de número 13, em que foram aplicados 62 passos de carga com comprimento de arco constante de 10.5 e uma tolerância relativa às normas residuais de 1.10^{-5}.

Com a presença de grandes deslocamentos e rotações, a Figura 6.2 apresenta as configurações deformadas obtidas pelo programa para a configuração inicial e para os passos 17, 29, 40, 49 e 62; sendo os passos 17, 29, 40 e 49 propositalmente escolhidos por representarem os pontos críticos da curva de equilíbrio da estrutura.

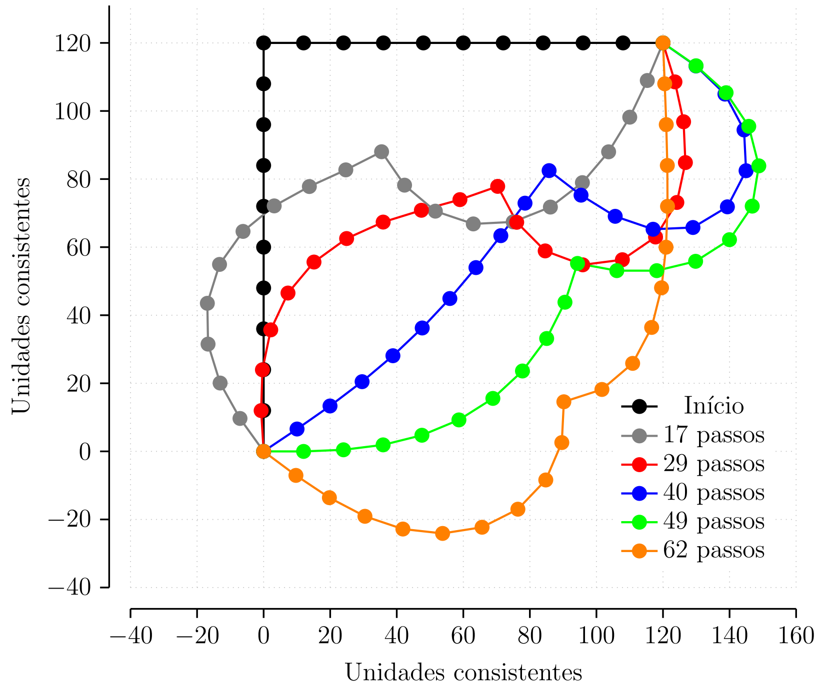


Figura 6.2 – Configuração deformada do pórtico de Lee.

O nó 13 é utilizado como parâmetro para a avaliação dos movimentos translacionais e rotacionais do pórtico e, assim, no espaço carga-deslocamento, é traçado o caminho de equilíbrio em relação aos deslocamentos verticais v e horizontais u, como observado na Figura 6.3, e deslocamentos rotacionais, como ilustrado na Figura 6.4.

A Figura 6.3 ilustra dois gráficos "Fator de carga x Deslocamentos verticais v" e "Fator de carga x Deslocamentos horizontais u", que se referem ao caminho de equilíbrio da estrutura com relação ao nó 13 (nó de referência). Nessa figura, os caminhos de equilíbrio foram comparados a exemplos apresentados por Schweizerhof e Wriggers (1986) e Battini (2002), verificando-se que os resultados apresentados pelos autores encontram-se muito próximos dos resultados encontrados para os caminhos de equilíbrio traçados pela atual pesquisa.

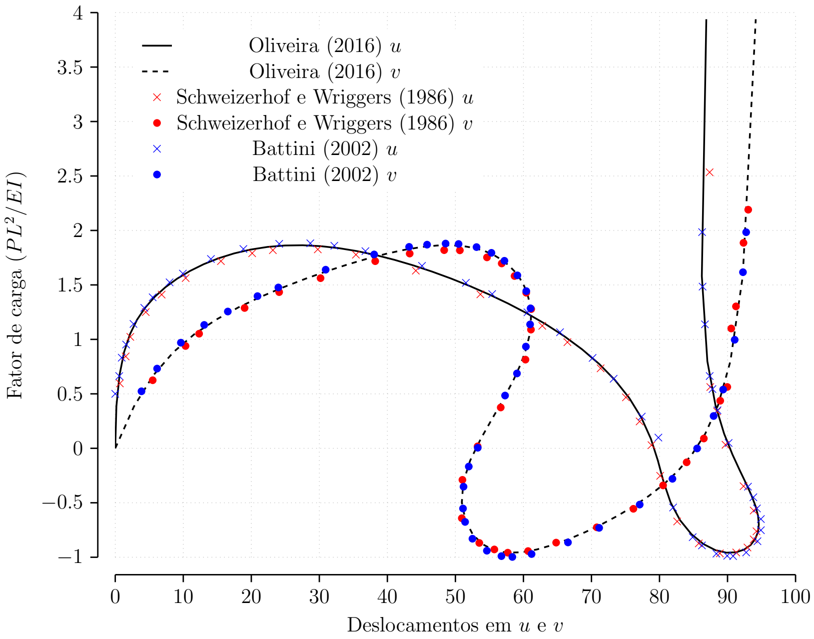


Figura 6.3 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos translacionais u e v para o pórtico de Lee.

Com o intuito de verificar deslocamentos rotacionais, o exemplo ainda foi comparado a gráficos gerados por Galvão (2000) e Paraski (2012) (Figura 6.4), comprovando que a atual formulação também possui ótimos resultados em comparação aos dados obtidos por esses autores.

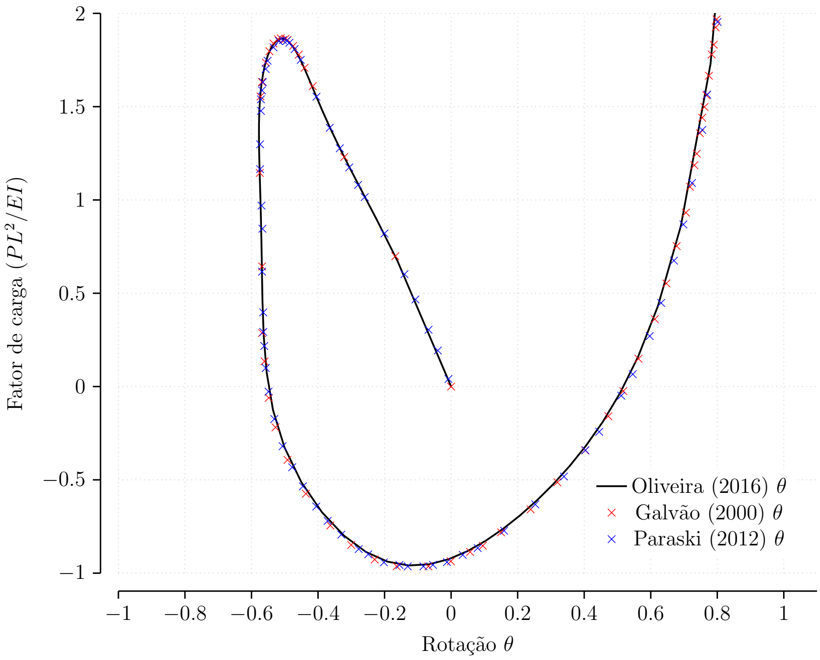


Figura 6.4 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos rotacionais θ para o pórtico de Lee.

Caracterizado por 4 pontos críticos, sendo 2 pontos limites de carga e 2 pontos limites de deslocamento (*turning points*), o fenômeno de *snap-back* para a curva carga-deslocamento em relação a v é claramente observado na Figura 6.5.

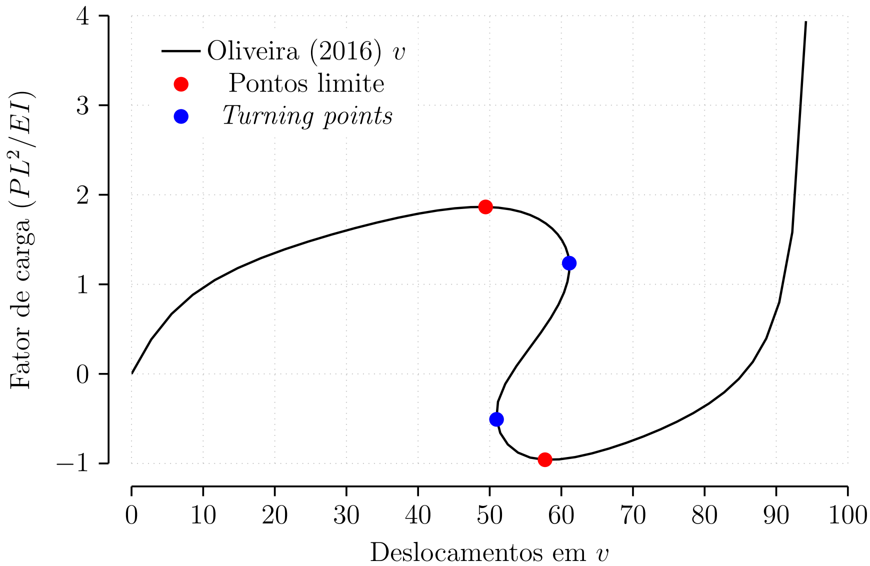


Figura 6.5 – Pontos limites em relação ao caminho de equilíbrio. Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o exemplo do pórtico de Lee.

O caminho de equilíbrio para os deslocamentos verticais atinge um ponto máximo (limite) de carga, 1.8641, no passo 17 e chega a um ponto mínimo (limite) de carga, passo 45, de valor -0.9586. Os dois pontos limites de deslocamento localizam-se nos passos 29 e 40, com deslocamentos 61.1082 e 50.9561, respectivamente. O ponto limite máximo de carga detectado pela atual pesquisa, 1.86410, se comparado ao valor de 1.855 encontrado por Lee et al. (1968), apresenta uma diferença de apenas 0.48%, demonstrando uma boa precisão para os resultados obtidos.

Os pontos críticos (limites de carga e de deslocamento), apresentados na Figura 6.5, foram identificados pelo critério do parâmetro de rigidez CSP (Figura 6.6). Como apresentado na seção 5.4.5, os pontos limites são detectados quando o gráfico "CSP x Fator de carga" cruza o eixo das abscissas, ou seja, quando o CSP for igual a zero. Portanto, pela Figura 6.6 é possível detectar a presença de 4 pontos limites.

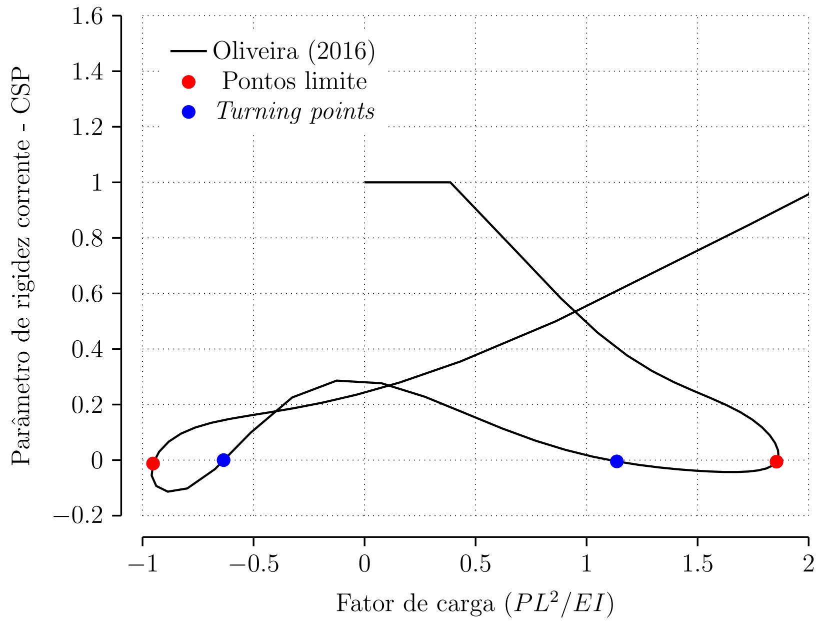


Figura 6.6 – CSP x Fator de carga para o pórtico de Lee.

Por meio da Figura 6.6, também pode-se observar uma perda inicial de rigidez da estrutura; dois trechos de instabilidade presentes entre os pontos limites, momento em que o gráfico apresenta valores negativos para o CSP; e após o último ponto limite, nota-se um crescente aumento da rigidez da estrutura. A Tabela 6.2 apresenta resumidamente os valores dos pontos limites de carga e dos *Turning points*.

Tabela 6.2 – Pontos limites de carga e deslocamento para o pórtico de Lee.

	Pontos limites de carga		*Turning points*	
Passo	17	45	29	40
Carga	1.8641	-0.9586	61.1082	50.9561

6.2.2 - Pórtico de Roorda modificado

Assim como o pórtico de Lee, o pórtico de Roorda (Figura 6.7), inicialmente estudado por Roorda (1965), também é um exemplo largamente utilizado na análise de grande não-linearidade de estruturas com o intuito de avaliar pontos de bifurcação. Entretanto, Fujii et al. (1992) utilizaram o pórtico de Roorda, com algumas modificações nas condições de contorno, visando à análise de *turning points*.

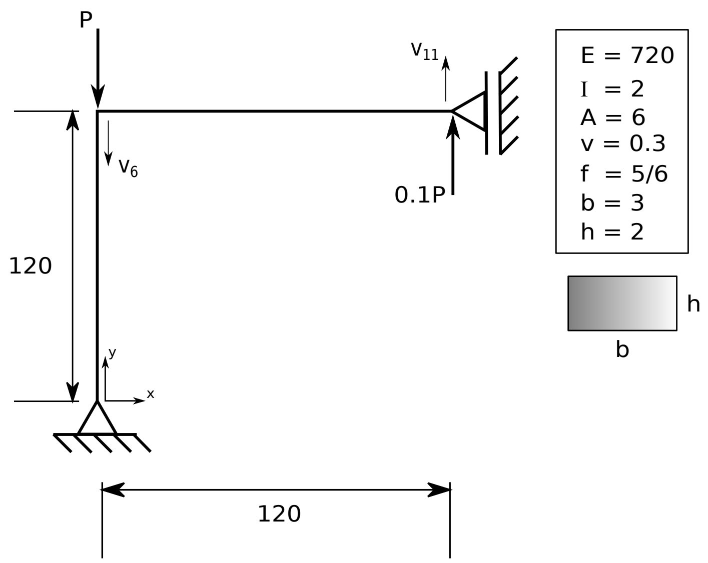


Figura 6.7 – Pórtico de Roorda modificado.

O exemplo apresentado por Fujii et al. (1992) teve como modificações um apoio de primeiro gênero localizado na barra horizontal, com uma pequena perturbação aplicada ao apoio de valor 0.1P, voltada para cima. Para a barra vertical, o autor utilizou como condição de contorno essencial um apoio de segundo gênero; dessa forma, apenas movimentos rotacionais foram permitidos, enquanto, para a barra horizontal, o apoio utilizado permite movimentos tanto rotacionais quanto verticais.

O Pórtico em forma de L possui as mesmas dimensões para a barra vertical e horizontal de 120 unidades consistentes, seção transversal retangular 3x2 e, portanto, área e fator de forma iguais a 6 e 5/6, respectivamente. A estrutura possui propriedades geométricas e materiais como inércia, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson iguais a 2, 720 e 0.3, respectivamente. Como condição de contorno natural, uma força -P é aplicada na direção vertical no encontro entre as duas barras (nó rígido), enquanto uma pequena perturbação é gerada por uma força de valor +0.1P no apoio da barra horizontal, no qual os movimentos verticais são liberados.

Para a resolução do sistema, o pórtico foi discretizado em 10 elementos idênticos, possuindo, dessa forma, 11 nós. Como critério de convergência, foi aplicada uma tolerância relativa às normas residuais de 1.10^{-5}. Foram realizados 180 passos de carga com comprimento de arco constante de 15.1. Os nós de referência utilizados para medir os deslocamentos em v foram os nós 6 e 11, representados pelos deslocamentos v_6 e v_{11}, respectivamente, como mostrado na Figura 6.7. Esses, também, constituem os nós de aplicação das cargas. O gráfico da Figura 6.8 mostra os caminhos de equilíbrio dos dois nós de referência, em relação ao movimento vertical, v, no espaço carga-deslocamento.

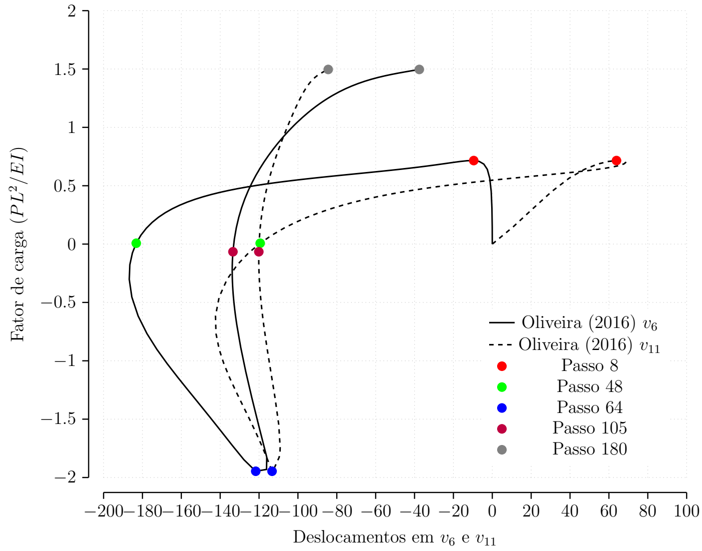


Figura 6.8 – Caminho de equilíbrio dos nós 6 e 11. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais v_6 e v_{11} para o pórtico de Roorda modificado discretizado em 10 elementos.

Na Figura 6.8, os pontos em destaque, apresentados pelos passos 8, 48, 64, 105 e 180, serviram como base para a plotagem das configurações deformadas da estrutura nos referidos passos de carga (Figura 6.9), em que se observaram os grandes deslocamentos e rotações apresentados pela estrutura. Os passos de carga selecionados para a configuração de equilíbrio foram os mesmos escolhidos para representarem as configurações deformadas presentes em Fujii et al. (1992).

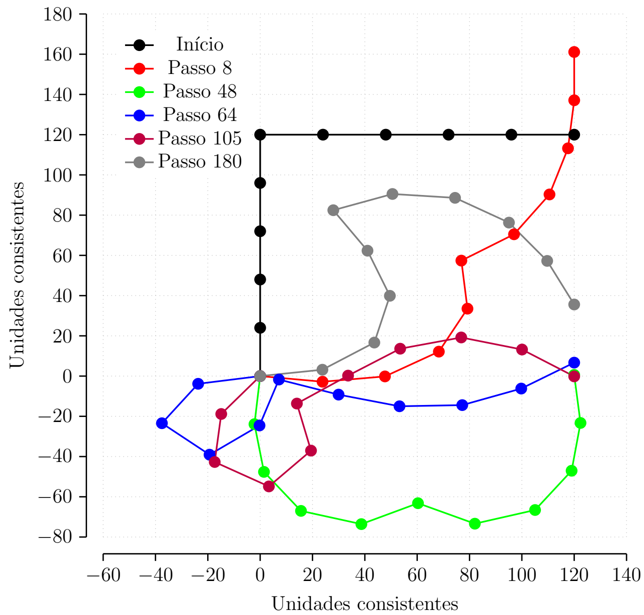


Figura 6.9 – Configuração deformada do pórtico de Roorda modificado discretizado em 10 elementos.

A fim de confrontar os resultados obtidos pela atual pesquisa com os apresentados por Fujii et al. (1992), a Figura 6.10 apresenta um comparativo entre ambos os resultados, com o caminho de equilíbrio representado pelo "Fator de carga x Deslocamentos v_6 e v_{11}". Com o gráfico traçado, pode-se observar uma ótima concordância entre os resultados, mesmo em locais fortemente não-lineares, como em pontos limites de carga e em *turning points* presentes no gráfico.

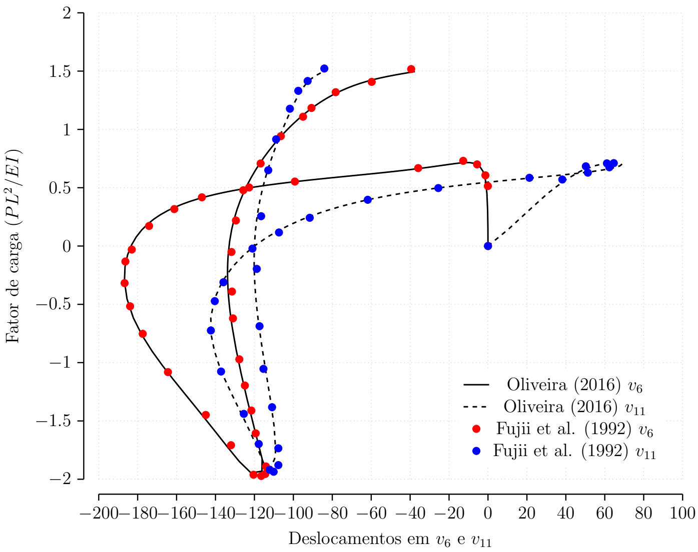


Figura 6.10 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais em v_6 e v_{11} para o pórtico de Roorda modificado discretizado em 10 elementos.

O gráfico da Figura 6.11 apresenta os pontos limites de carga e de deslocamento no espaço "Fator de carga x Deslocamentos em v" para o pórtico estudado.

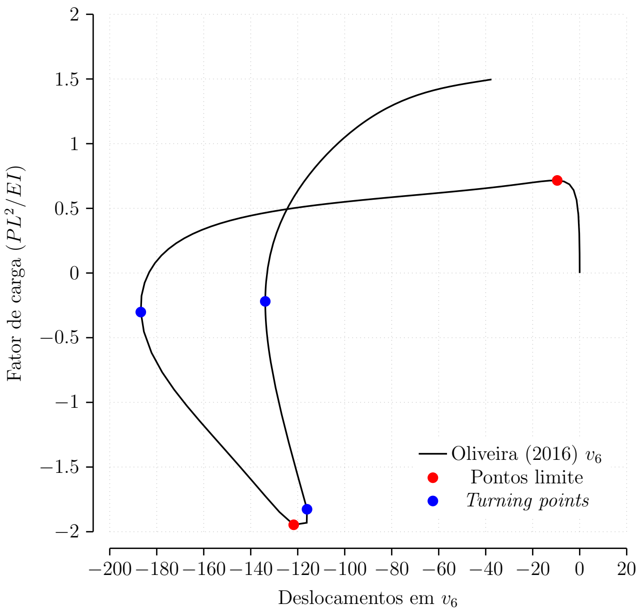


Figura 6.11 – Pontos limites em relação ao caminho de equilíbrio Fator de carga x Deslocamentos verticais v_6 para o exemplo do pórtico de Roorda modificado discretizado em 10 elementos.

Pela utilização do CSP, foi possível identificar 2 pontos limites de carga e 3 *turning points*, no exato local onde o CSP se torna igual a zero (Figura 6.12).

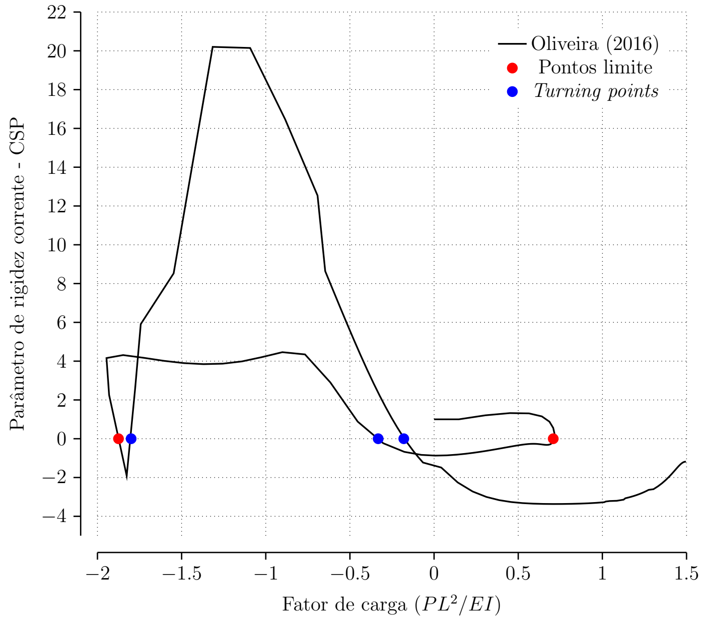


Figura 6.12 – CSP x Fator de carga para o pórtico de Roorda modificado discretizado em 10 elementos.

Assim, como o pórtico de Lee, o pórtico de Roorda também apresentou trechos de instabilidade entre os pontos limites. É possível notar um grande ganho de rigidez a partir do segundo *turning point*, seguido de um pequeno trecho de rigidez praticamente constante e uma perda de rigidez abrupta posteriormente. A Tabela 6.3 apresenta resumidamente os valores desses pontos limites.

Tabela 6.3 – Pontos limites de carga e deslocamento para o pórtico de Roorda modificado discretizado em 10 elementos.

	Pontos limites de carga		*Turning points*		
Passo	8	64	51	66	85
Carga	0.7156	-1.9463	-0.3020	-1.8263	-0.2194

Com o intuito de avaliar o pórtico de Roorda modificado discretizado em 20 elementos, foram aplicados 300 passos de carga e traçados os caminhos de equilíbrio em relação aos deslocamentos verticais do nó 11 (v_{11}), nó localizado entre as barras vertical e horizontal, e do nó 21 (v_{21}), nó localizado no apoio de primeiro gênero, Figuras 6.13 e 6.14, respectivamente.

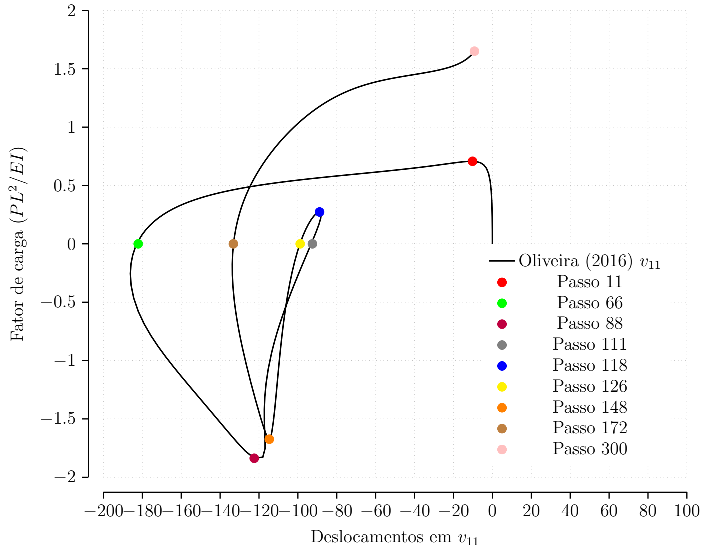


Figura 6.13 – Caminho de equilíbrio do nó 11. Fator de carga x Deslocamentos verticais v_{11} para o exemplo do pórtico de Roorda modificado discretizado em 20 elementos.

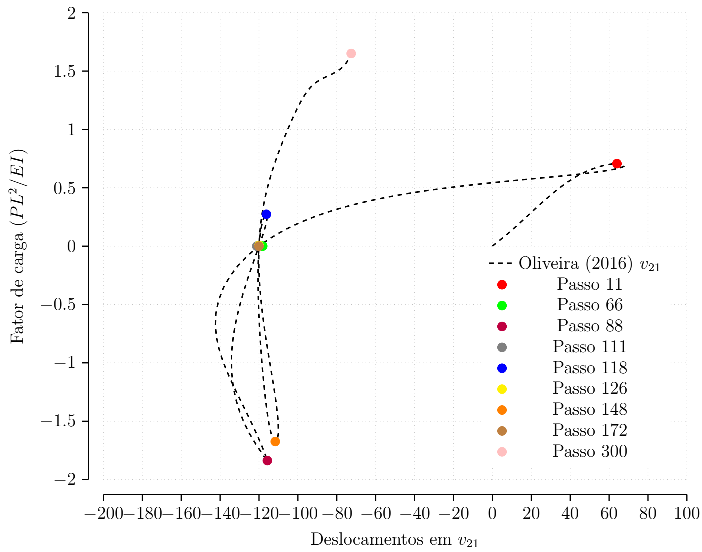


Figura 6.14 – Caminho de equilíbrio do nó 21. Fator de carga x Deslocamentos verticais v_{21} para o exemplo do pórtico de Roorda modificado discretizado em 20 elementos.

Nota-se dessarte que, ao discretizar a estrutura em um maior número de elementos, os caminhos de equilíbrio traçados em relação aos deslocamentos verticais do nó rígido e do nó localizado no apoio de primeiro gênero apresentam um maior número de pontos limites tanto de carga quanto de deslocamento, percebendo-se até mesmo a presença de *loopings* nos gráficos. Para representar a configuração deformada da estrutura (Figura 6.15), foram utilizados os pontos destacados nas Figuras 6.13 e 6.14.

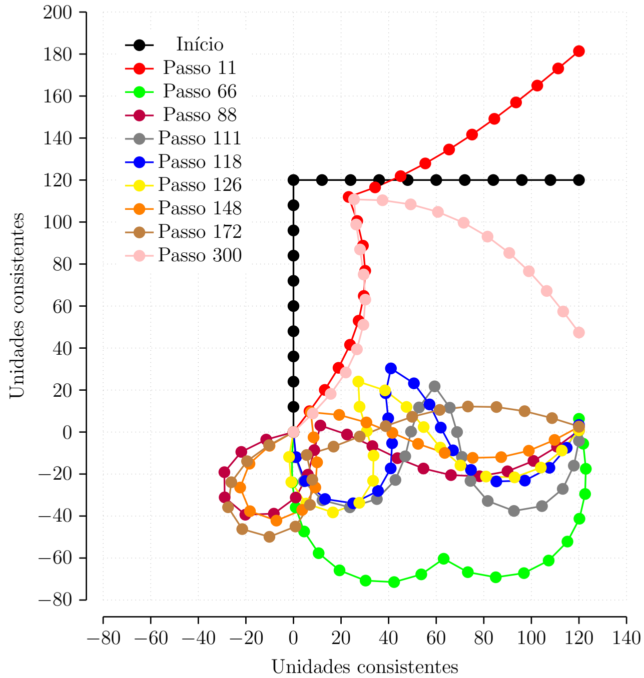


Figura 6.15 – Configuração deformada do pórtico de Roorda modificado discretizado em 20 elementos.

A Figura 6.16 apresenta os pontos limites do caminho de equilíbrio da estrutura em relação aos deslocamentos verticais do nó 11. Nela, apresentam-se 4 pontos limites de carga e 5 pontos limites de deslocamento totalizando 9 pontos limites.

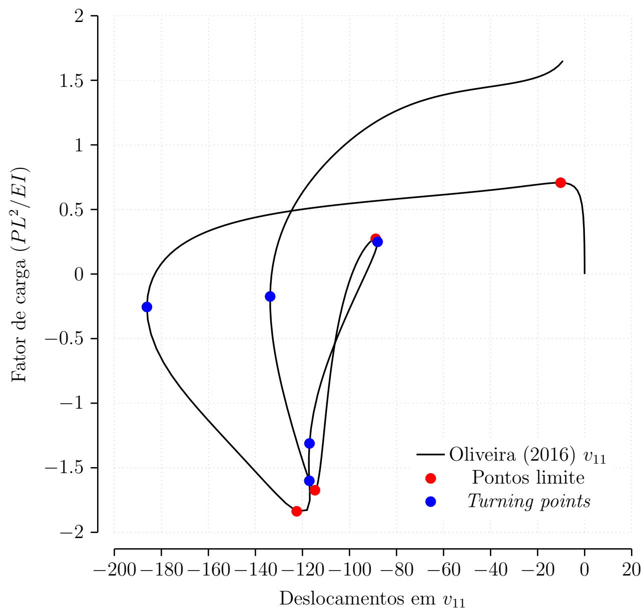


Figura 6.16 – Pontos limites em relação ao caminho de equilíbrio Fator de carga x Deslocamentos verticais v_{11} para o exemplo do pórtico de Roorda modificado discretizado em 20 elementos.

Os 9 pontos limites apresentados pelo caminho de equilíbrio (Figura 6.16) puderam ser detectados pelo gráfico "CSP x Fator de carga" como apresentado pela Figura 6.17.

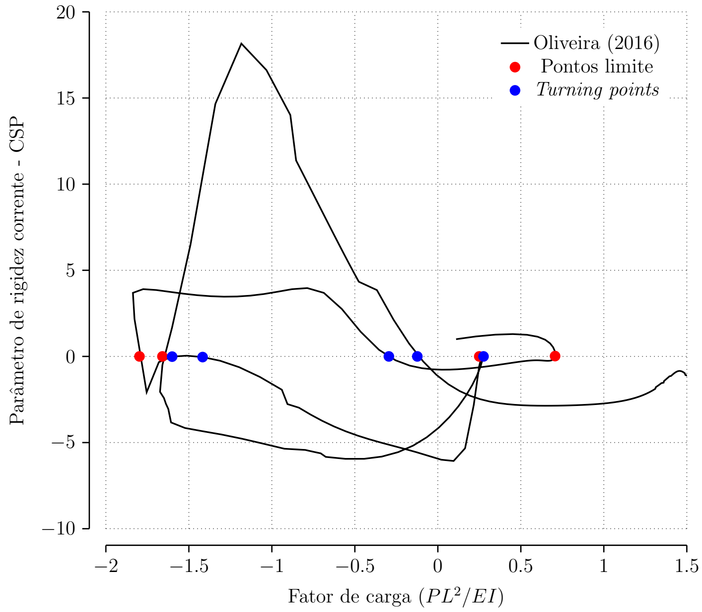


Figura 6.17 – CSP x Fator de carga para o pórtico de Roorda modificado discretizado em 20 elementos.

Encontra-se presente na Tabela 6.4 os valores das cargas dos pontos limites detectados pela Figura 6.17.

Tabela 6.4 – Pontos limites de carga e deslocamento para o pórtico de Roorda modificado discretizado em 20 elementos.

	Pontos limites de carga				*Turning points*				
Passo	11	88	118	148	70	92	95	116	171
Carga	0.7071	-1.8371	0.2729	-1.6740	-0.2551	0.2494	-0.1737	-1.6009	-1.3117

6.3 - ARCOS

6.3.1 - Arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica

O arco abatido (Figura 6.18), assim como os pórticos em L, também é um exemplo bastante discutido por diversos pesquisadores, como Harison (1978), Yang e Kuo (1994), Chan e Chui (2000), Rocha (2000), Galvão (2000), entre outros. Nestes trabalhos foram apresentados exemplos numéricos de arcos abatidos com diversas estratégias de diferentes configurações de forças e apoios para o estudo da não-linearidade geométrica da estrutura.

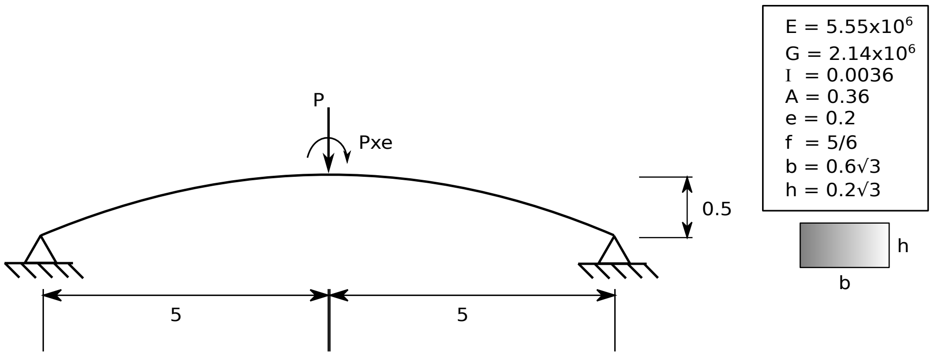


Figura 6.18 – Arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

A estrutura em questão Figura (6.18) é composta por um arco raso de altura 0.5 unidades consistentes e apoios de segundo gênero em suas extremidades, distantes 10 unidades consistentes um do outro. Seus apoios de segundo gênero apenas permitem que haja rotações em sua base.

O arco abatido possui seção transversal retangular de base $0.6\sqrt{3}$ e altura $0.2\sqrt{3}$, com área de 0.36, fator de forma igual a 5/6 e inércia de 0.0036. Como propriedades materiais, a estrutura possui módulo de Young igual a $5.55.10^6$ e módulo de cisalhamento equivalente a $2.14.10^6$. Para representar uma excentricidade na estrutura, um momento Pxe é aplicado no centro do elemento onde encontra-se uma carga vertical concentrada -P.

Para a resolução do exemplo, a estrutura foi discretizada em 20 elementos iguais, possuindo, consequentemente, 21 nós. Foram aplicados 315 passos de carga, com comprimento de arco constante de 0.0085 e uma tolerância para convergência da norma residual de 1.10^{-5}. Como nó de referência, utilizou-se o nó de número 11 e, dessa forma, traçaram-se os gráficos de carga-deslocamento em relação às direções u e v (Figuras 6.19 e 6.20, respectivamente). Para um melhor entendimento da sequência da trajetória de equilíbrio do elemento de arco, os pontos limites de deslocamento foram destacados com pontos representados por letras. Desse modo, partindo-se da coordenada (0,0), o próximo ponto a ser alcançado é representado pela letra A; o segundo, pela letra B, e assim por diante.

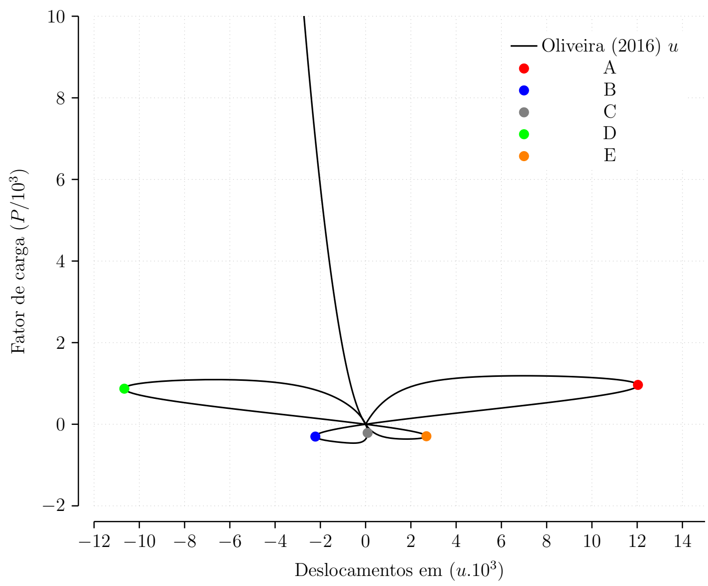


Figura 6.19 – Caminho de equilíbrio e pontos limites de deslocamento de A-E, em relação a u, para o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

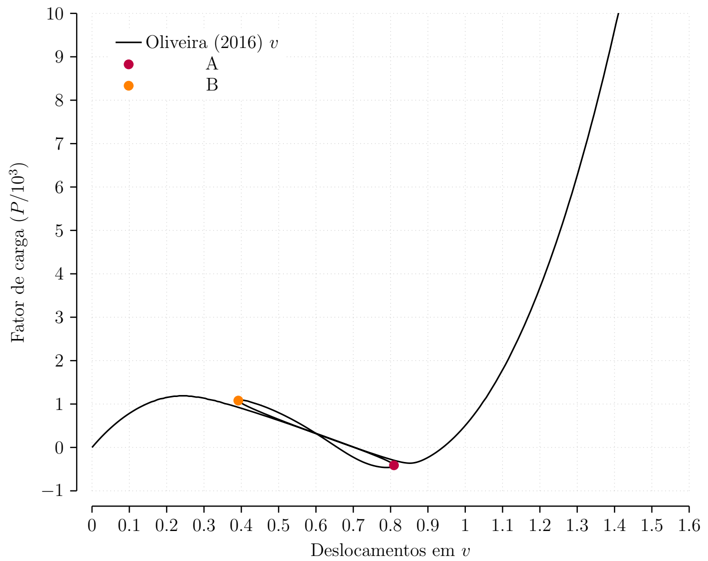


Figura 6.20 – Caminho de equilíbrio e pontos limites de deslocamento de A-B, em relação a v, para o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

Nas figuras 6.21 e 6.22, respectivamente, encontram-se os resultados dos caminhos de equilíbrio em relação aos deslocamentos u e v obtidos pela atual pesquisa, comparados aos evidenciados por Chan e Chui (2000), observando-se uma boa concordância entre os resultados. Também pode-se notar a presença dos fenômenos de *snap-back* e *snap-through*, o que implica que, se a leitura do caminho de equilíbrio fosse realizada pelos métodos de controle de carga ou deslocamento, essa leitura não seria integral.

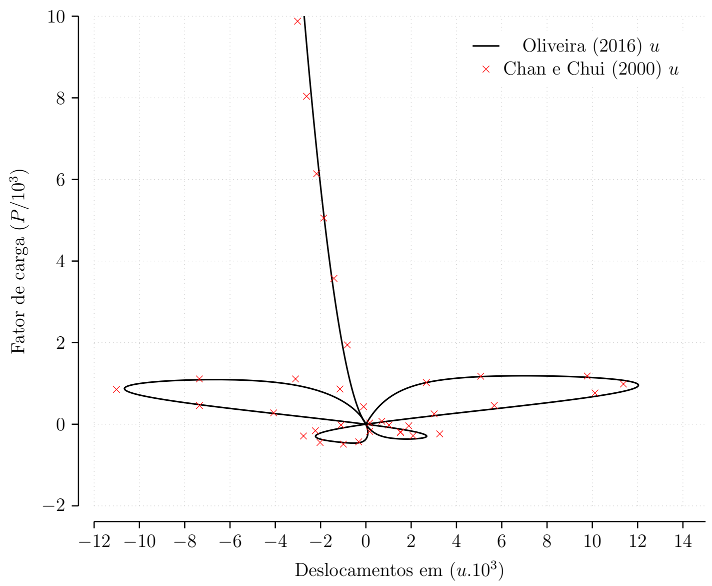


Figura 6.21 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos horizontais em u para o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

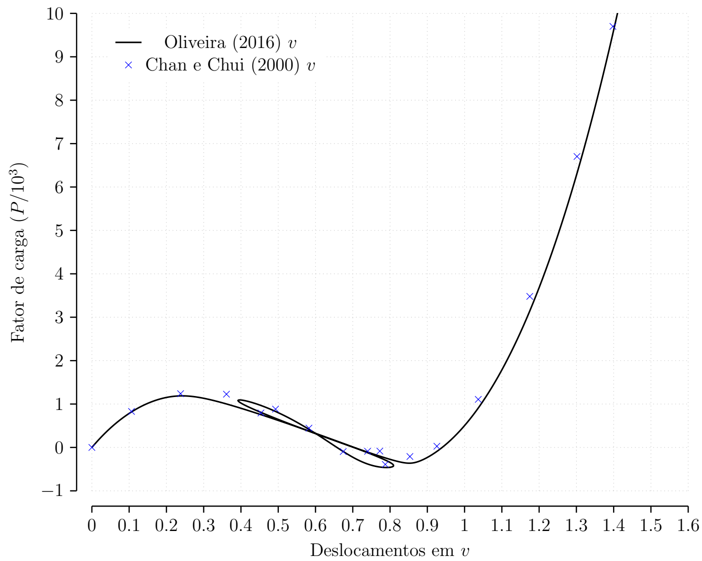


Figura 6.22 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

O gráfico "Fator de carga x Deslocamento em v" apresenta o fenômeno de *looping*, com um total de 2 pontos limites de deslocamento e 4 pontos limites de carga, como pode ser observado na Figura 6.23.

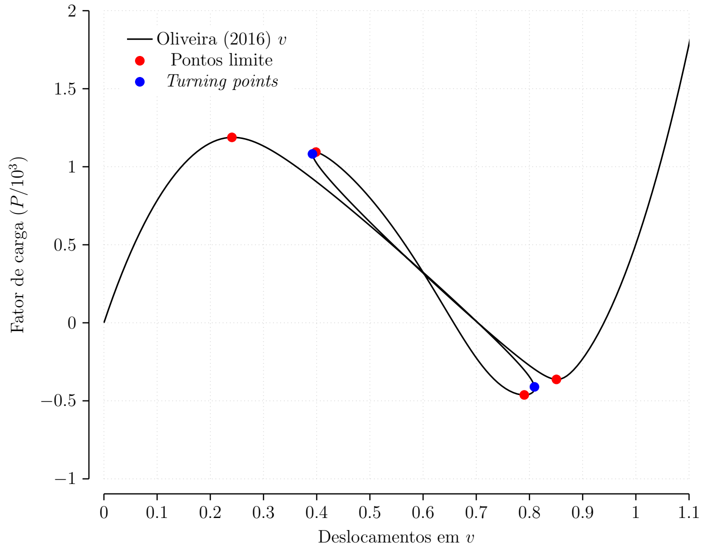


Figura 6.23 – Pontos limites em relação ao caminho de equilíbrio Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

A Figura 6.24 representa o gráfico CSP x Fator de carga para o arco abatido estudado. Nele observa-se o CSP anulando-se 6 vezes, 2 vezes correspondendo aos pontos limites de deslocamento e 4 vezes correspondendo aos pontos limites de carga.

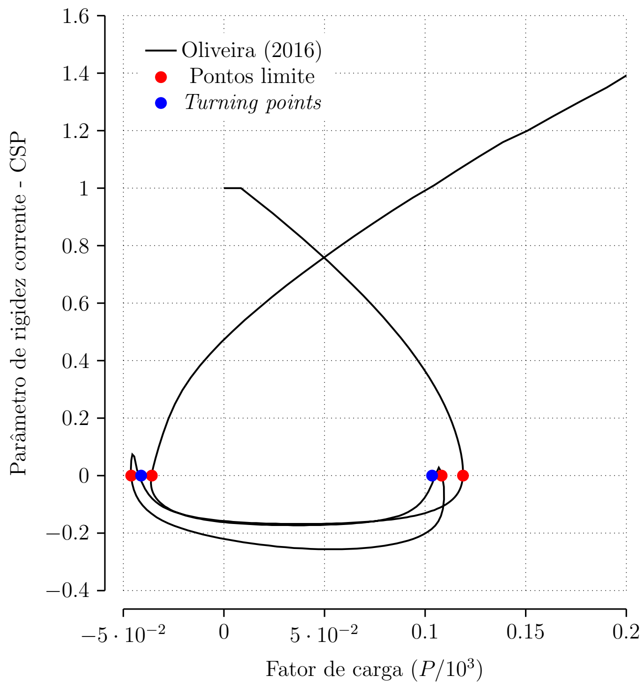


Figura 6.24 – CSP x Fator de carga para o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

Na Figura 6.24 também nota-se uma grande perda de rigidez inicial da estrutura, seguida de longos trechos de instabilidade, até que, posteriormente, a estrutura ganha rigidez, tornando-se estável novamente.

A configuração deformada do arco abatido (Figura 6.25) apresenta a deformação do elemento de arco nos passos inicial, 30, 119, 172, 246 e 315. Os passos 30, 119, 172 e 246 foram escolhidos por representarem os pontos limites de carga da estrutura.

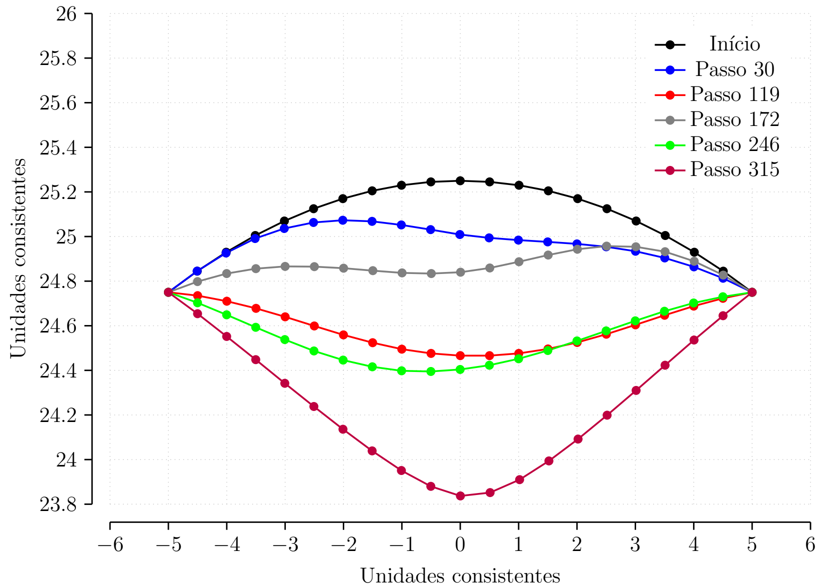


Figura 6.25 – Configuração deformada do arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

Por meio da Figura 6.25, notam-se os grandes deslocamentos e rotações apresentados pela estrutura. A Tabela 6.5 apresenta resumidamente os valores dos pontos limites de carga e deslocamento do arco abatido.

Tabela 6.5 – Pontos limites de carga e deslocamento para o arco abatido rotulado-rotulado com carga excêntrica.

	Pontos limites de carga				*Turning points*	
Passo	30	114	172	246	119	174
Carga	1.188	-0.4624	1.0939	-0.3628	-0.4107	1.0820

6.3.2 - Arco circular de grande altura rotulado-engastado com carga centrada

O exemplo consiste em um arco circular de grande altura engastado-rotulado submetido a uma carga vertical centrada, localizada em seu ápice, com sentido voltado para baixo, como apresentado na Fig. 6.26. Esse exemplo foi estudado por autores como Da Deppo e Schmidt (1975), Wood e Zienkiewicz (1977), Simo e Vu-Quoc (1986), Hsiao e Hou (1987), Fujii (1989), Kouhia e Mikkola (1989), Wriggers e Simo (1990).

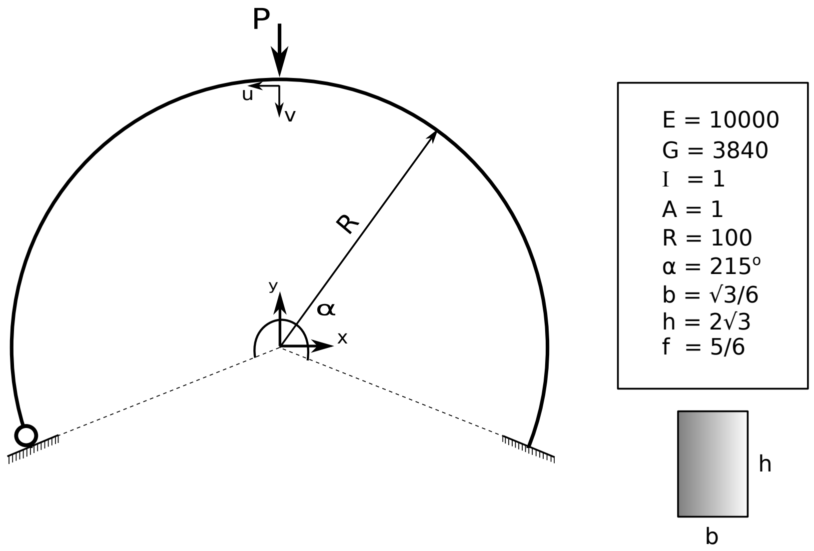


Figura 6.26 – Arco circular de grande altura rotulado-engastado com carga centrada.

A estrutura é constituída por um arco circular de raio igual a 100 e com um ângulo interno de 215 graus. Seus apoios são formados por uma rótula, localizada no lado esquerdo da estrutura, e um engaste, presente no lado aposto. A condição de contorno rotulada permite os movimentos de rotação da estrutura, admitindo com que a mesma rotacione no local, enquanto à direita, onde o apoio é engastado, qualquer movimento de translação ou rotação encontra-se restrito. A área da seção transversal do arco é retangular de base $\sqrt{3}/6$, de altura $2\sqrt{3}$, de área igual a 1, de momento de inércia também igual a 1 e de fator de carga igual a 5/6. O módulo de elasticidade e o de cisalhamento da estrutura são iguais a 10000 e 3840, respectivamente.

Para resolução do sistema, a estrutura foi discretizada em 20 elementos, possuindo consequentemente 21 nós; em em seu topo, no nó 11, localiza-se a carga vertical concentrada voltada para baixo. Foram aplicados 100 passos de carga com um comprimento de arco constante de 12.1 e uma tolerância relativa às normas residuais de 1.10^{-5}. A Figura 6.27 apresenta sua configuração inicial e as configurações deformadas do arco nos passos 10, 20, 30, 36, 40, 50, 65, 80 e 100, demonstrando, dessa forma, a grande não-linearidade geométrica presente no exemplo estudado.

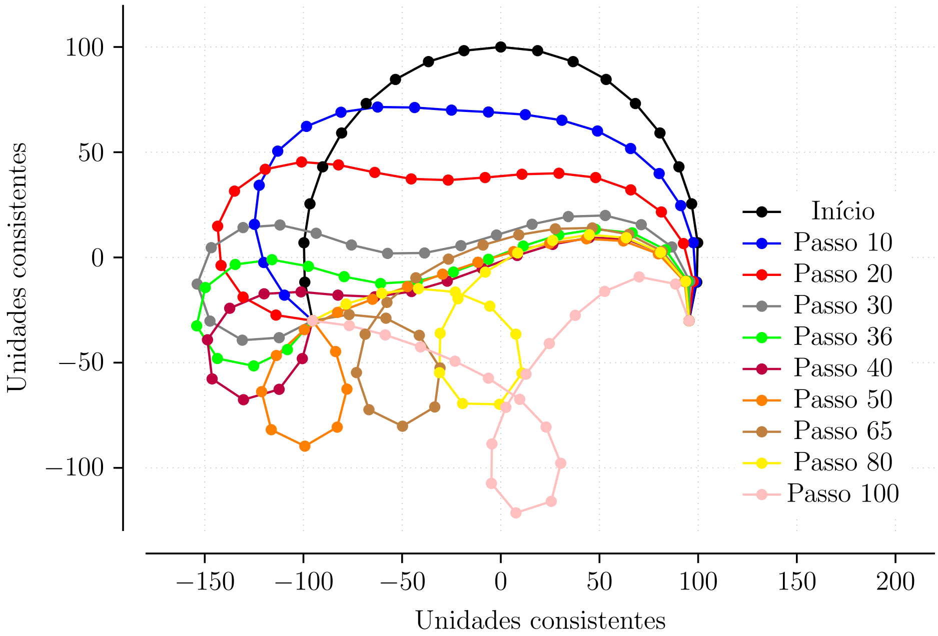


Figura 6.27 – Configuração deformada do arco circular de grande altura rotulado-engastado com carga centrada.

Os passos 36 e 65 representam, respectivamente, o ponto máximo (limite) de carga, equivalente a 9.0861, e o ponto mínimo (limite) de carga, igual a -0.8095, determinados a partir do critério CSP. Para validação dos resultados encontrados, o ponto limite de carga máxima pode ser comparado à solução analítica encontrada por Da Deppo e Schmidt (1975), que apresentou um limite de carga máxima de 8.97, diferindo de 1.01% da solução encontrada pela presente pesquisa. Pode-se, ainda, comparar o resultado ao valor de carga máxima de 9.24, encontrado por Wood e Zienkiewicz (1977), que difere de 0.98% da atual pesquisa.

O caminho de equilíbrio da estrutura no espaço carga-deslocamento referente aos movimentos de translação do nó 11, u e v até o passo 40 foi traçados conforme a Figura 6.28, na qual foram comparados a dois resultados encontrados na literatura: a solução analítica evidenciada por Da Deppo e Schmidt (1975) e a solução encontrada por Wood e Zienkiewicz (1977). Observaram-se uma boa concordância em comparação aos resultados dos dois trabalhos, entretanto a atual pesquisa apresentou resultados mais próximos aos obtidos pela solução analítica do que os resultados presentes em Wood e Zienkiewicz (1977), principalmente próximo ao ponto limite máximo de carga; local em que houve maiores divergências para o método de Wood e Zienkiewicz (1977).

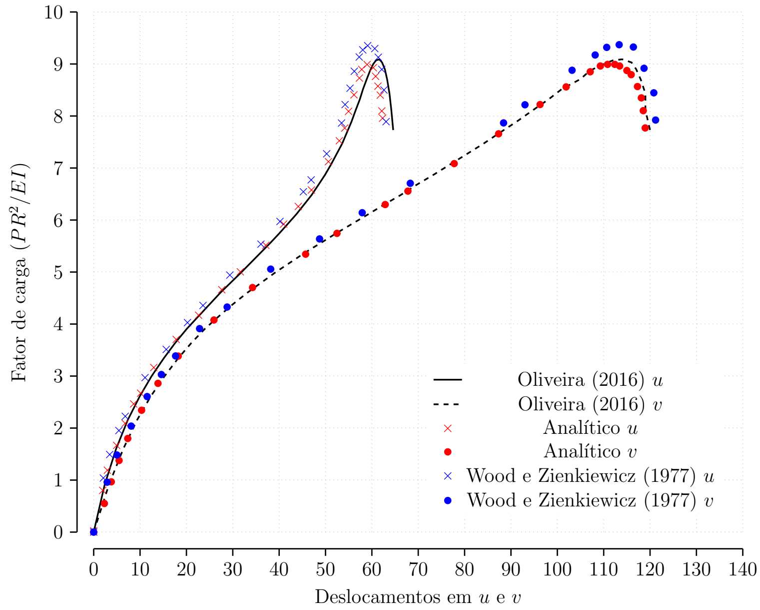


Figura 6.28 – Comparativo entre os caminhos de equilíbrio para o exemplo do arco de grande altura rotulado-engastado com carga centrada para 40 passos de carga.

Para uma comparação completa dos resultados, os caminhos de equilíbrio para 100 passos de carga foram confrontados aos apresentados por Fujii (1989) e Simo e Vu-Quoc (1986) (Figura 6.29), observando-se excelente concordância entre os resultados, inclusive próximo aos pontos limites de carga, local em que há a presença de grande não-linearidade. O caminho de equilíbrio da estrutura no espaço carga-deslocamento referente aos movimentos de translação (u e v) do nó 11 (nó de referência) foi traçado conforme a Figura 6.29, na qual os deslocamentos em v apresentam o fenômeno de *snap-back*.

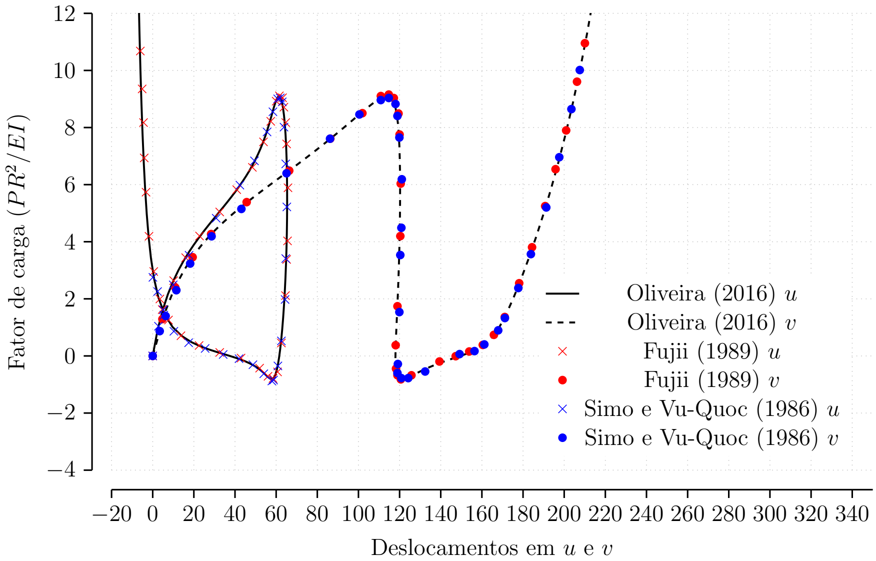


Figura 6.29 – Comparativo entre os caminhos de equilíbrio para o exemplo do arco de grande altura rotulado-engastado com carga centrada para 100 passos de carga.

A Figura 6.30 apresenta o caminho de equilíbrio para o gráfico "Fator de carga x Deslocamentos em v" com a presença de 2 pontos limites de carga e 2 pontos limites deslocamento.

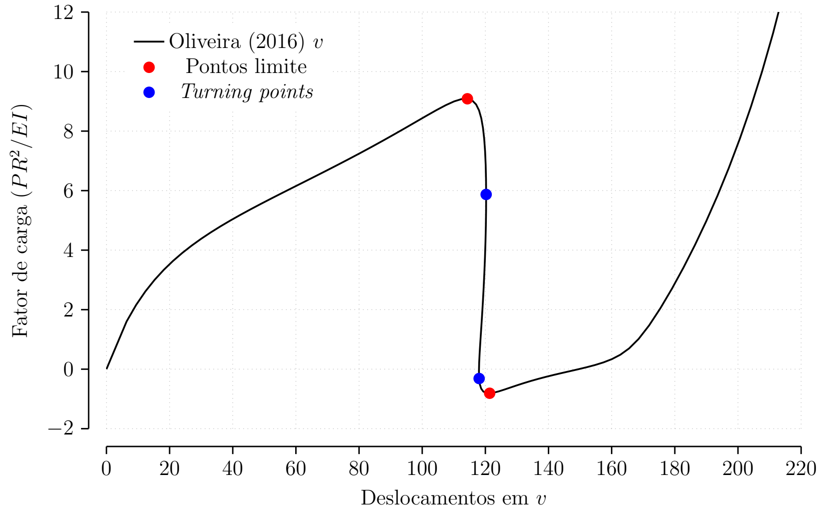


Figura 6.30 – Pontos limites em relação ao caminho de equilíbrio Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco de grande altura rotulado-engastado com carga centrada.

Os 4 pontos limites para o gráfico "Fator de carga x Deslocamento em v", que caracterizam o *snap-back*, foram facilmente identificados pelo CSP, como observado pela Figura 6.31, em que os 4 pontos limites são obtidos cada vez que o gráfico "CSP x Fator de carga" toca o eixo das abscissas.

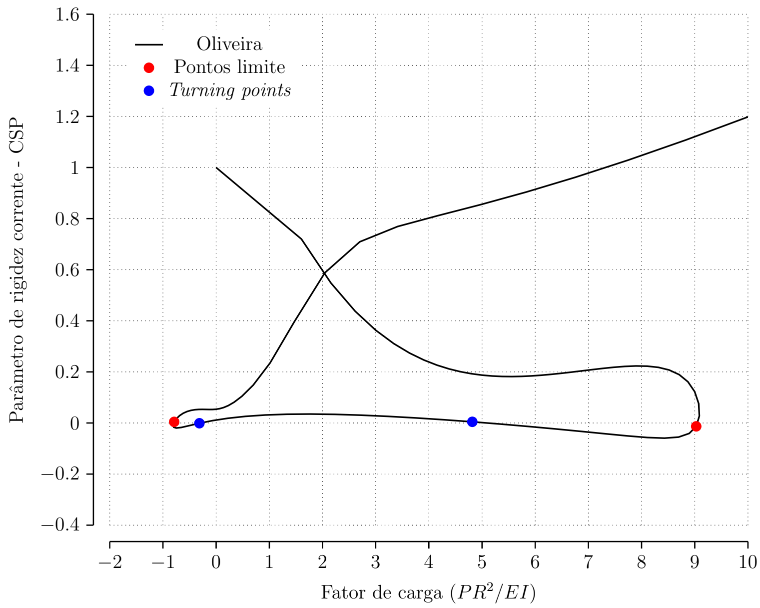


Figura 6.31 – CSP x Fator de carga para o arco de grande altura rotulado-engastado com carga centrada.

Por meio da Figura 6.31, também pode-se observar uma perda inicial de rigidez da estrutura; dois trechos de instabilidade presentes entre os pontos limites, momento em que o gráfico apresenta valores negativos para o CSP; e, após o último ponto limite, nota-se um crescente aumento da rigidez da estrutura. A Tabela 6.6 apresenta resumidamente os valores dos pontos limites.

Tabela 6.6 – Pontos limites de carga e deslocamento para o arco de grande altura rotulado-engastado com carga centrada.

	Pontos limites de carga		*Turning points*	
Passo	36	65	46	60
Carga	9.0861	-0.8095	5.8711	-0.3143

6.3.3 - Arco semi-círculo rotulado-rotulado com carga centrada e excêntrica

Os exemplos estudados (Figura 6.32) são um arco composto por uma semicircunferência com carga centrada (sistema perfeito) e o mesmo arco submetido a uma carga excêntrica (sistema imperfeito). Com a finalidade de estudar a grande não-linearidade ligada a arcos, assim como o fenômeno do *looping*, alguns autores na literatura analisaram o exemplo do arco semicírculo e, dentre eles, pode-se destacar Harison (1978), Yang e Shieh (1990), Yang e Kuo (1994), Rocha (2000), Paraski (2012) e outros.

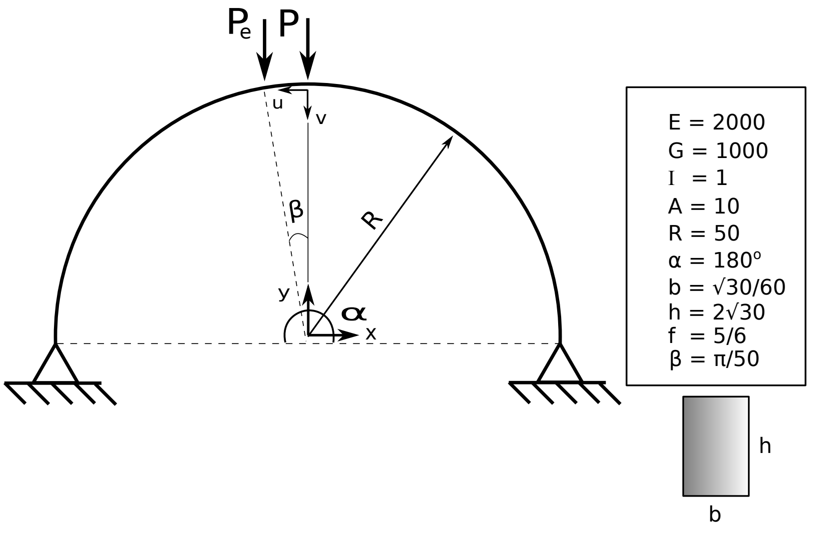


Figura 6.32 – Arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada e excêntrica.

A estrutura é constituída por um arco semicírculo de raio igual a 50 unidades consistentes. Como condições de contorno essenciais, o arco possui dois apoios de segundo gênero, permitindo, dessa forma, a rotação no local. Em se tratando de condições de contorno naturais, para o primeiro exemplo estudado, foi aplicada uma carga centrada -P no alto do arco semicírculo; já para o segundo exemplo estudado aplicou-se uma carga de excentricidade P_e com um ângulo em relação ao eixo vertical de $\beta = \pi/50$, a fim de representar imperfeições na estrutura. A área da seção transversal do arco é retangular de base $\sqrt{30}/60$, de altura $2\sqrt{30}$, de área igual a 1, de momento de inércia também igual a 1, e de fator de carga igual a 5/6. Os módulos de elasticidade e de cisalhamento utilizados foram 2000 e 1000, respectivamente.

Para a resolução do exemplo com carga centrada, o sistema foi discretizado em 50 elementos de mesmo comprimento, possuindo, portanto, 51 nós. Foram aplicados 420 passos de carga com um comprimento de arco constante de 12.0 e uma tolerância relativa às normas residuais de 1.10^{-5}. A Figura 6.33 corresponde ao caminho de equilíbrio no espaço "Fator de carga x Deslocamentos em v" da estrutura com relação ao nó 26 (nó de referência). Foram observados 3 *loopings* realizados pela estrutura, que passa 6 vezes pela origem (Figura 6.34). Os pontos em destaque representados pelas letras de A a F, como visto na Figura 6.33, são os pontos limites de deslocamento e demonstram a sequência correta da trajetória traçada pelo caminho de equilíbrio da estrutura que parte do início, passa por A, B, C e E, chegando finalmente a F.

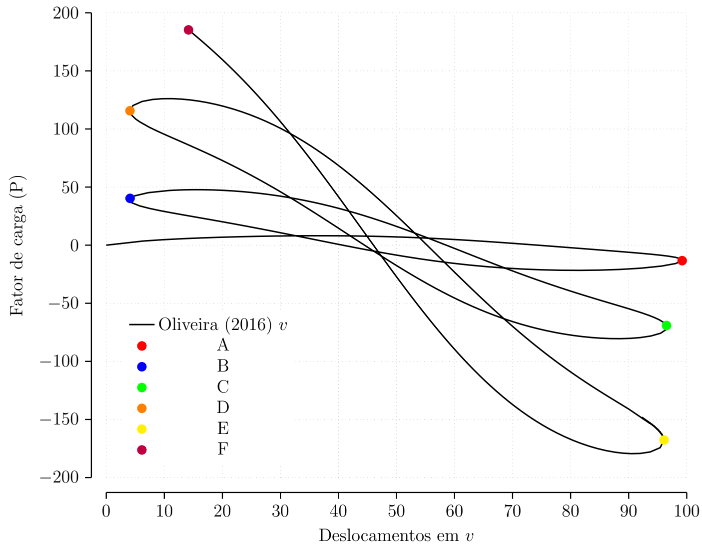
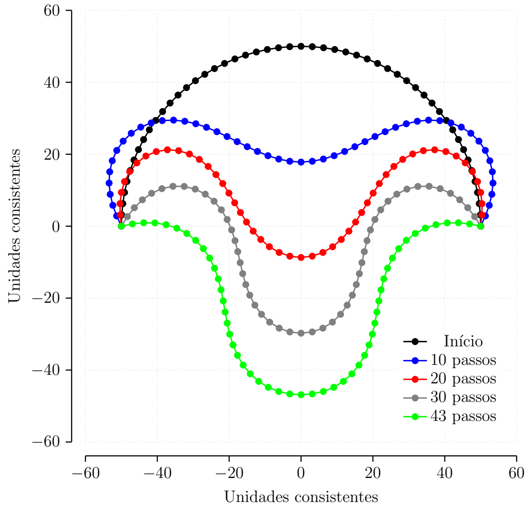
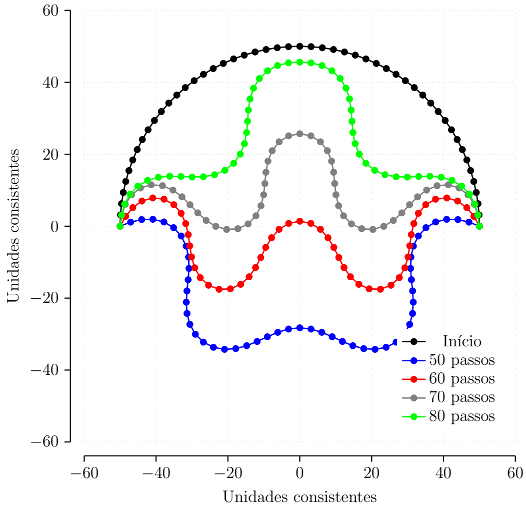


Figura 6.33 – Caminho de equilíbrio com pontos limites de deslocamento. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada.

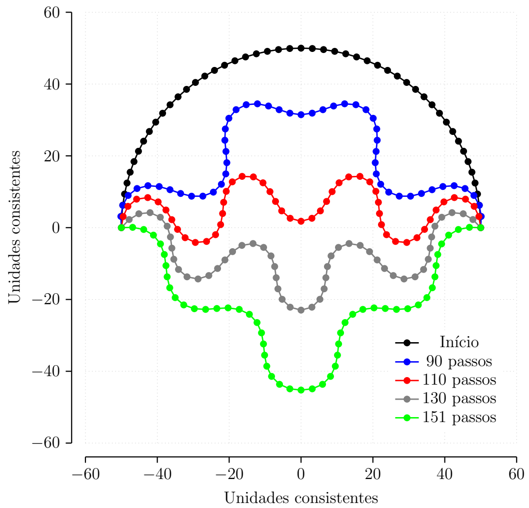
Os pontos limites de deslocamento, apresentados na Figura 6.33, também serviram de base para a montagem da configuração deformada da estrutura presente na Figura 6.34, em que as Figuras de 6.34a a 6.34f representam a configuração deformada de um ponto limite de deslocamento a outro.



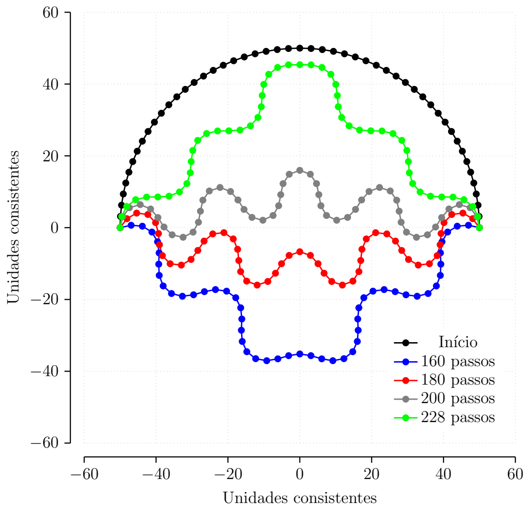
(a) Deslocamentos deformacionais do Início-A.



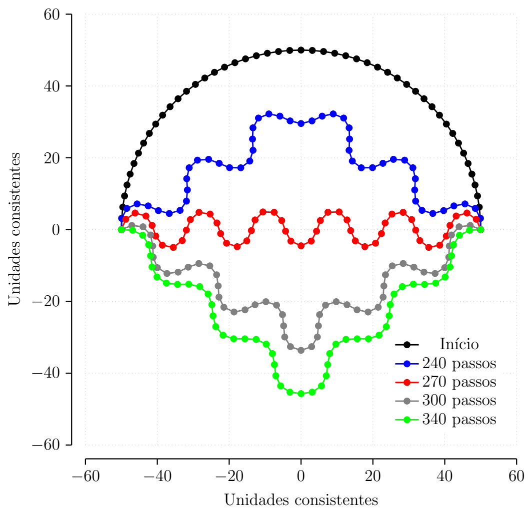
(b) Deslocamentos deformacionais de A-B.



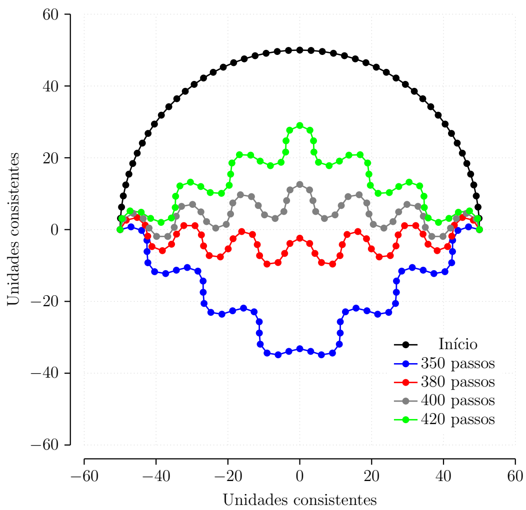
(c) Deslocamentos deformacionais de B-C.



(d) Deslocamentos deformacionais de C-D.



(e) Deslocamentos deformacionais de D-E.



(f) Deslocamentos deformacionais de E-F.

Figura 6.34 – Configuração deformada do arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada.

Por meio da Figura 6.34, pode-se ter uma visão mais geral de todo o processo de deslocamento da estrutura, podendo-se notar os grandes deslocamentos ocorridos, assim como a deformação acumulada no arco.

A fim de verificar a concordância dos resultados obtidos, esses foram comparados aos pontos limites de carga encontrados por Yang e Kuo (1994), como pode ser observado na Figura 6.35 e na Tabela 6.7.

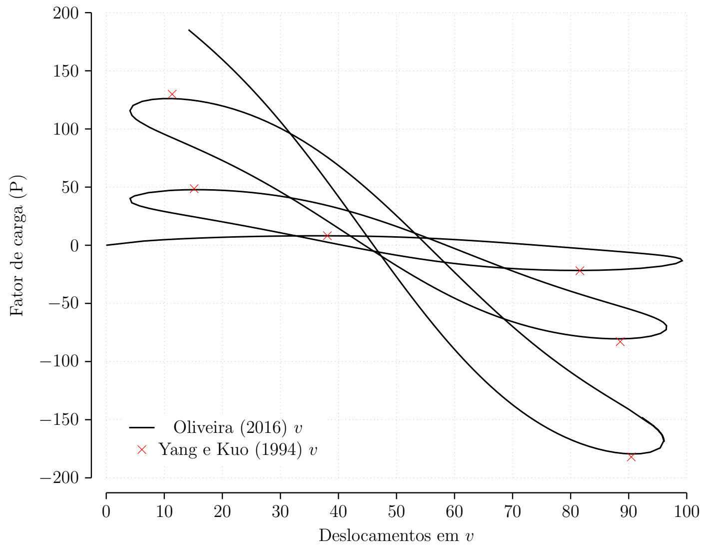


Figura 6.35 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada.

Na Tabela 6.7, podem ser observadas as diferenças percentuais entre as pesquisas, observando-se boa concordância entre os dados obtidos em detrimento da baixa diferença percentual encontrada entre os resultados.

Tabela 6.7 – Pontos limites de carga comparado para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada.

Autores	Pontos limites de carga					
	1	2	3	4	5	6
Oliveira (2016)	8.123	-21.672	47.768	-80.462	126.104	-179.417
Yang e Kuo (1994)	8.186	-21.928	48.648	-82.900	129.841	-182.003
Diferença	0.78%	1.17%	1.81%	2.94%	2.88%	1.42%

A Figura 6.36 apresenta 11 pontos limites presentes no gráfico "Fator de carga x Deslocamentos em v", sendo 6 pontos limites de carga e 5 pontos limites de deslocamento.

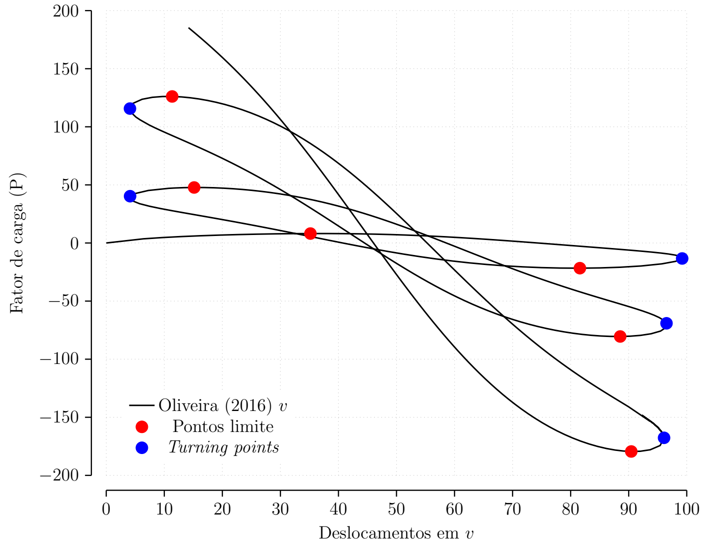


Figura 6.36 – Caminho de equilíbrio com pontos limites. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada.

Esses pontos limites foram detectados por meio do parâmetro de rigidez corrente, em que o gráfico "CSP x Fator de carga" tocou os eixos das abscissas por 11 vezes (Figura 6.37). Observa-se também longos trechos de ganho e perda de instabilidade em que o CSP varia entre valores positivos e negativos.

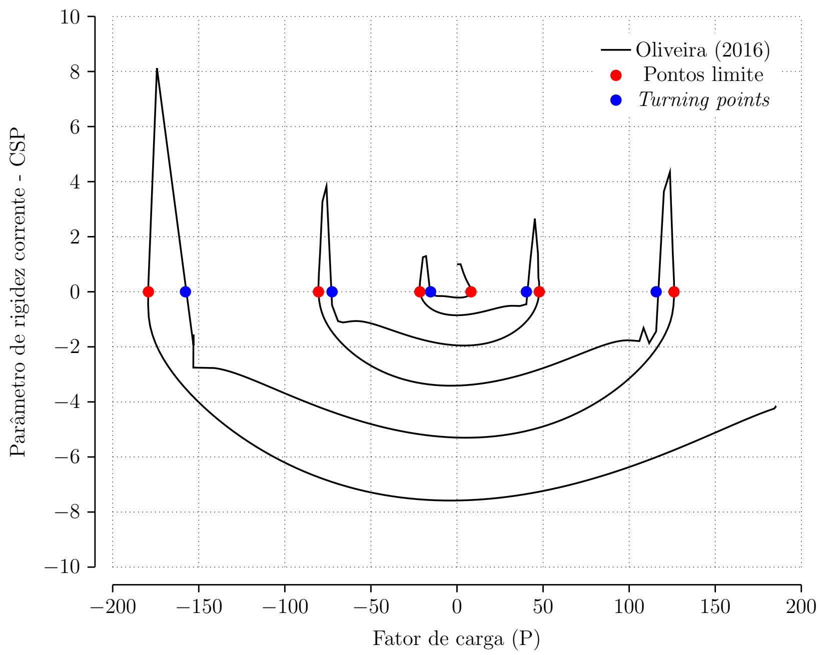


Figura 6.37 – CSP x Fator de carga para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga centrada.

Para a resolução do sistema imperfeito, foram utilizados os mesmos passos e dados apresentados para o sistema perfeito (carga centrada), entretanto, foram aplicados 500 passos de carga. O gráfico no espaço "Fator de carga x Deslocamento em v" em relação ao nó 26 (nó de referência), comparado ao apresentado por Yang e Kuo (1994), é apresentado pela Figura 6.38.

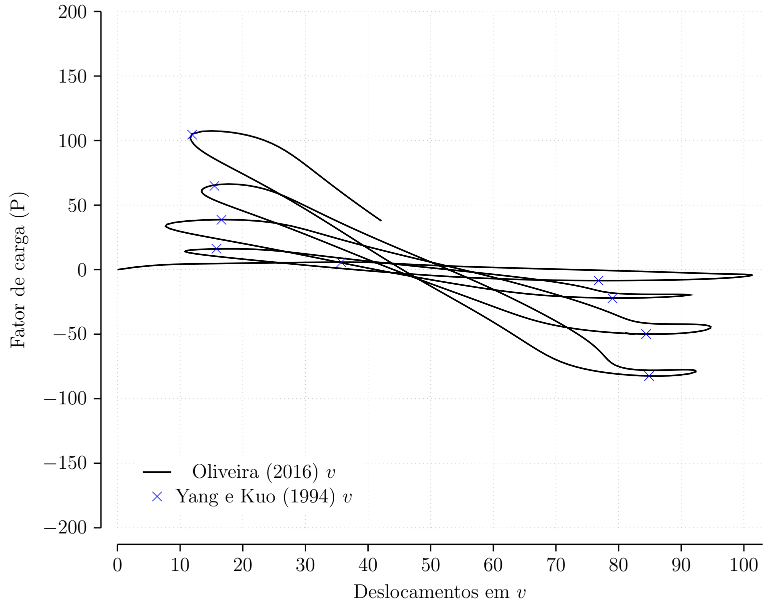


Figura 6.38 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga excêntrica.

Por meio da Figura 6.38 e da Tabela 6.8, é possível comparar os resultados obtidos por Yang e Kuo (1994), em que nota-se boa concordância dos resultados em detrimento da baixa diferença percentual entre os resultados.

Tabela 6.8 – Pontos limites de carga comparados para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga excêntrica.

Autores	Pontos limites de carga								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Oliveira (2016)	5.802	-8.482	16.143	-22.026	38.789	-49.702	65.990	-82.417	107.433
Yang e Kuo (1994)	5.813	-8.498	16.149	-22.162	38.566	-49.896	64.875	-82.420	104.611
Diferença	0.19%	0.19%	0.04%	0.61%	0.58%	0.39%	1.72%	0.004%	2.70%

Com o intuito de apresentar os pontos limites, a Figura 6.39 apresenta 17 pontos limites presentes no gráfico "Fator de carga x Deslocamentos em v", sendo 9 pontos limites de carga e 8 pontos limites de deslocamento.

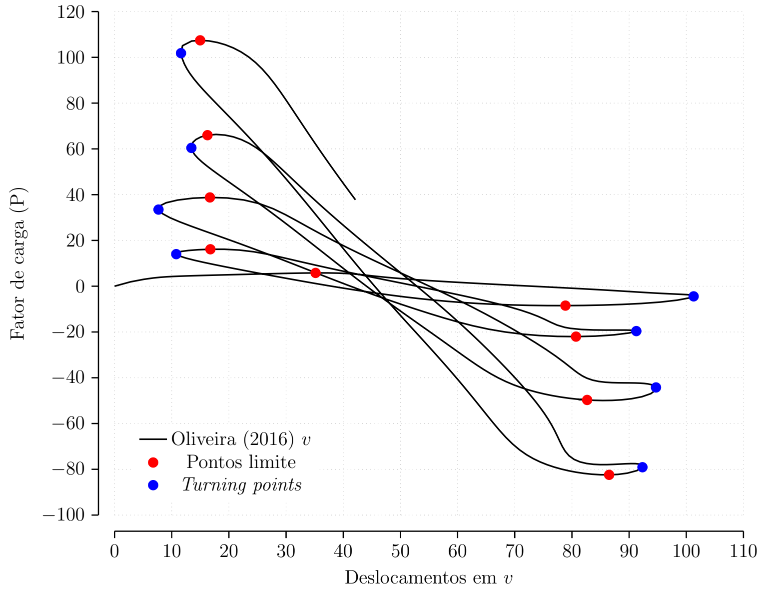


Figura 6.39 – Caminho de equilíbrio com pontos limites. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos verticais em v para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga excêntrica.

Esses pontos limites foram detectados por meio do parâmetro de rigidez corrente, por meio do gráfico "CSP x Fator de carga" (Figura 6.40). Observa-se também longos trechos de ganho e perda de instabilidade em que o CSP varia entre valores positivos e negativos.

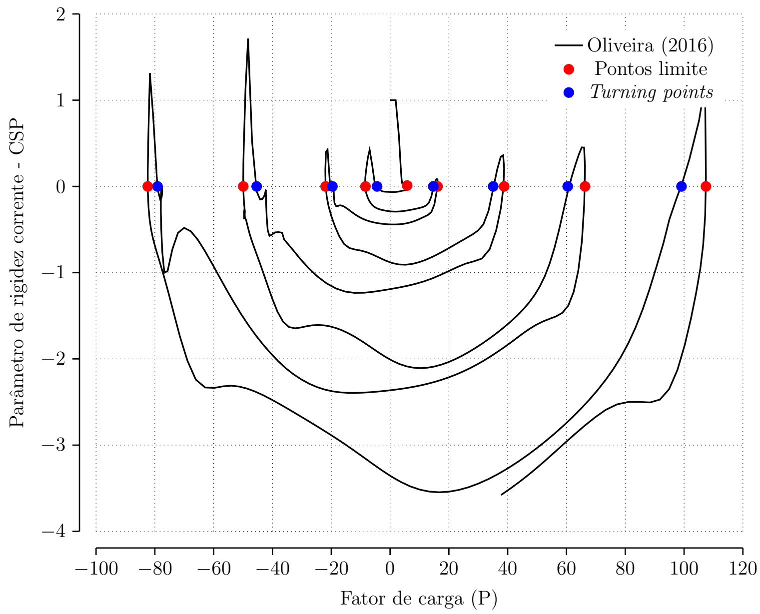


Figura 6.40 – CSP x Fator de carga para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga excêntrica.

O gráfico no espaço "Fator de carga x Deslocamento em u" para a carga excêntrica em relação ao nó 26 (nó de referência) é apresentado pela Figura 6.41, em que a carga excêntrica foi comparada aos resultados obtidos por Galvão (2000), apresentando boa concordância entre os resultados.

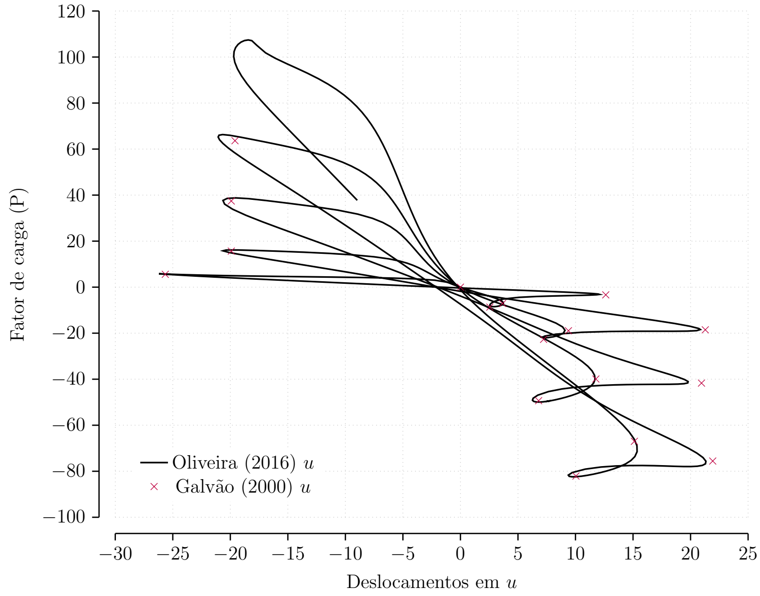


Figura 6.41 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos horizontais em u para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga excêntrica.

Os pontos limites de deslocamento horizontal, apresentados pela Figura 6.42, serviram de base para a montagem da configuração deformada da estrutura apresentada na Figura 6.43, em que as Figuras de 6.43a a 6.43d representam a configuração deformada entre pontos limites de deslocamento horizontais.

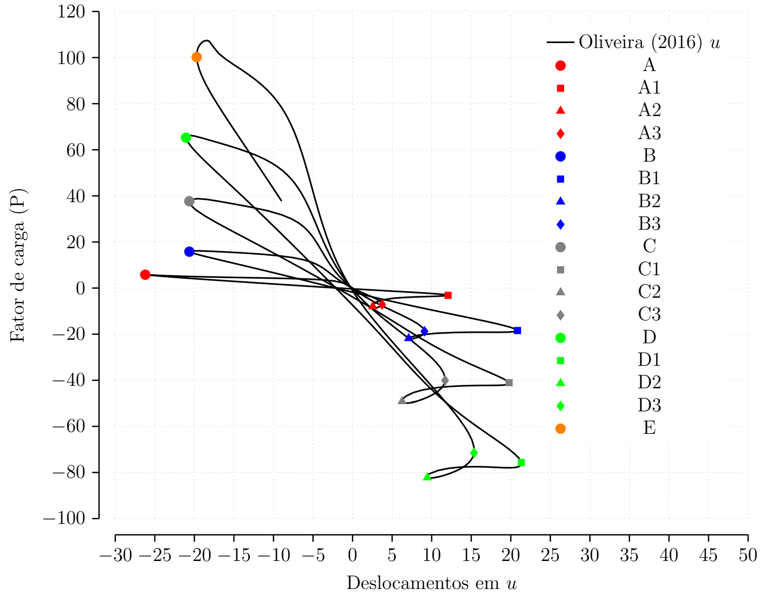
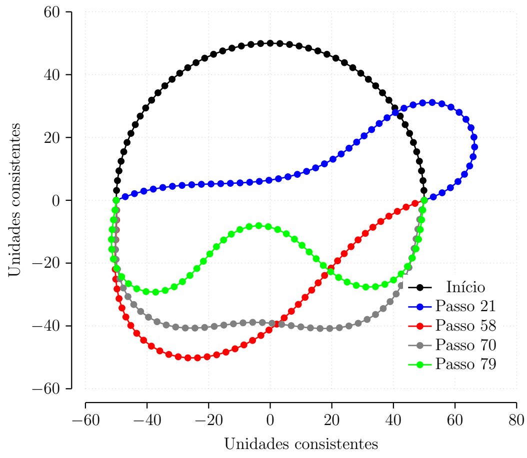
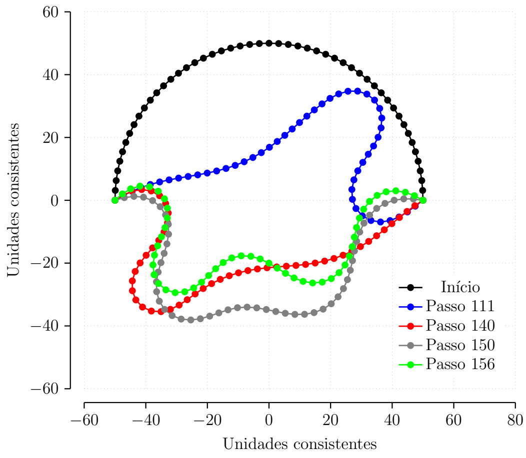


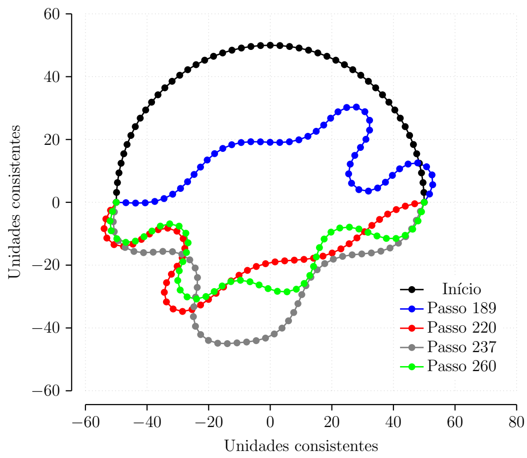
Figura 6.42 – Caminho de equilíbrio. Gráfico Fator de carga x Deslocamentos horizontais em u para o arco semicírculo rotulado-rotulado com carga excêntrica.



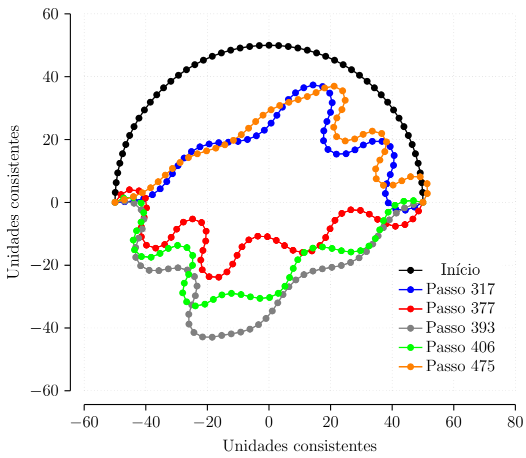
(a) Deslocamentos deformacionais do Início-A3.



(b) Deslocamentos deformacionais de B-B3.



(c) Deslocamentos deformacionais de C-C3.



(d) Deslocamentos deformacionais de D-D3.

Figura 6.43 – Configuração deformada do arco semicírculo rotulado-rotulado com carga excêntrica.

6.4 - VIGAS

6.4.1 - Viga engastada com momento na extremidade livre

A viga engastada com momento aplicado na extremidade livre (Figura 6.44), é um exemplo numérico bastante representativo ao se tratar da análise não-linear de estruturas, e foi estudada por autores como Bathe e Bolouech (1979), Fujii (1983), Simo e Vu-Quoc (1986), Crisfield (1990), Battini (2002), Menin (2006), Krenk (2009), entre outros.

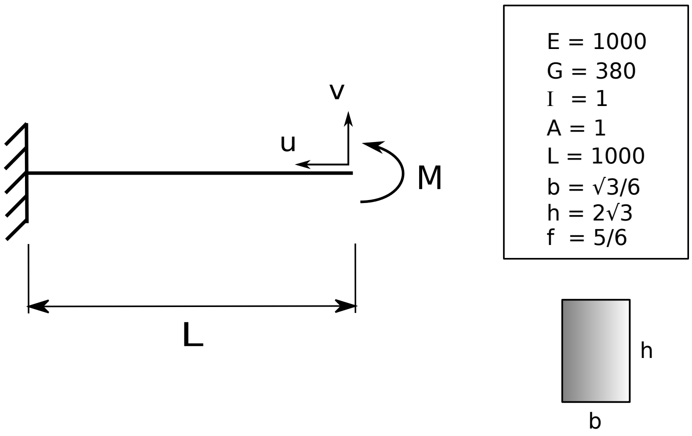


Figura 6.44 – Viga engastada com momento aplicado na extremidade livre.

A viga engastada possui 1000 unidades de consistentes, módulo de elasticidade 1000, módulo de cisalhamento 380, inércia igual a 1, área da seção transversal também igual a 1, $\sqrt{3}/6$ de base, $2\sqrt{3}$ de altura e fator de carga igual a $5/6$, por se tratar de seção retangular. Como condições de contorno, a viga possui um apoio engastado localizado a sua esquerda, enquanto sua borda direita encontra-se livre e com um momento M de sentido anti-horário aplicado.

Para a resolução do sistema, a viga foi discretizada em 10, 20 e 40 elementos. Foi aplicado um total de 80 passos de carga com comprimento de arco constante de 0,628 e uma tolerância para norma residual de 1.10^{-5}. Os nós de referência utilizados, a fim de avaliar os caminhos de equilíbrio no espaço carga-deslocamento, em relação aos movimentos de translação da estrutura foram, respectivamente, os nós 11, 21 e 41 (Figura 6.45).

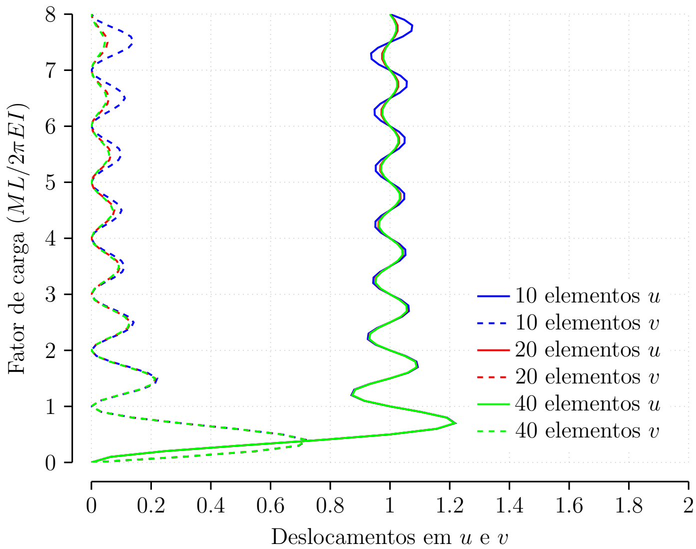


Figura 6.45 – Comparativo entre os caminhos para 10, 20 e 40 elementos no espaço fator de carga x Deslocamento translacionais em u e v para a viga engastada com momento aplicado na extremidade livre.

Por meio do gráfico da Figura 6.45, nota-se que a viga realiza oito voltas em torno de sua extremidade engastada, necessitando, desse modo, de 10 passos de carga para que uma volta completa se realize, Figura 6.46. Nesta figura, apresenta-se a configuração deformada nos passos de carga de 1 a 10 para viga discretizada em 40 elementos.

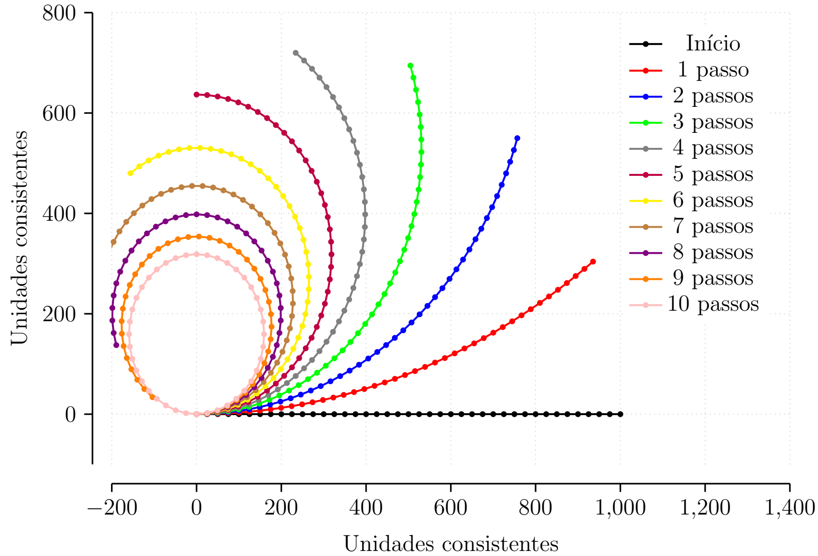


Figura 6.46 – Configuração deformada de uma volta completa para a viga com momento aplicado na extremidade livre discretizada em 40 elementos.

O desenvolvimento analítico para a relação entre o momento fletor interno M da viga e o ângulo de rotação θ gera $\theta = ML/EI$. Dessa maneira, para uma volta completa, tem-se que $\theta = 2\pi$, portanto, para $M = 2\pi EI/L$, os nós inicial e final do sistema se encontram, como pode ser visto na Figura 6.46. Ou seja, nesse momento, os nós 1 e 41 se encontram, e a viga se torna um círculo de diâmetro $D = L/\pi = 318,32$ unidades consistentes. Este diâmetro, portanto, deve ser igual à coordenada em v do nó 21 no passo 10. Comparando o resultado analítico com o do nó 21 no passo 10, que equivale a 318,64, a diferença entre ambos é pequena e igual a 0.1%, demonstrando uma ótima concordância entre os resultados obtidos em relação à solução analítica.

Ainda com a finalidade de comparar os resultados obtidos com os encontrados na literatura, a Figura 6.47 representa um gráfico "Deslocamento em u, v e θ x Fator de carga" para uma rotação de $90°$ graus da viga. É possível notar uma excelente concordância entre os resultados obtidos pela atual pesquisa e a solução analítica, obtendo até resultados mais precisos que os apresentados por Bathe e Bolouech (1979).

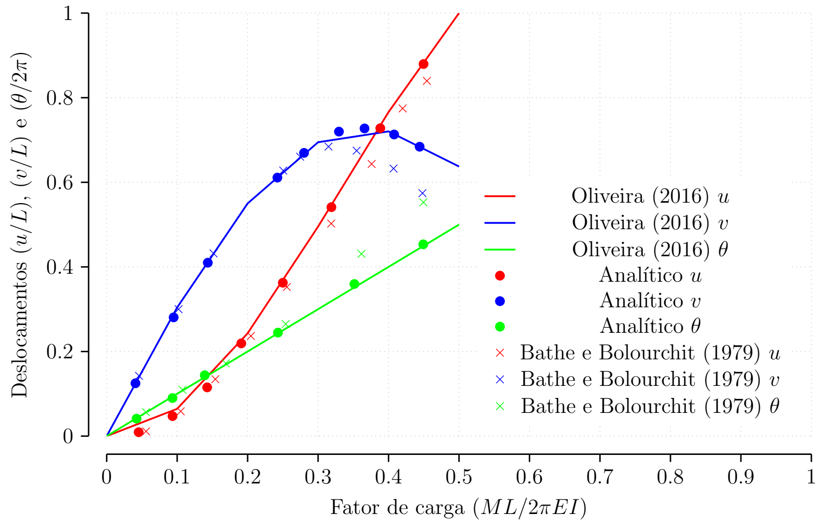


Figura 6.47 – Caminho de equilíbrio comparado. Gráfico Deslocamento em u, v e θ x Fator de carga para a viga com momento aplicado na extremidade livre.

Conforme apresentado pela Figura 6.48, o CST permanece constante e igual a 1 durante toda a análise, de modo que a rigidez da estrutura não varia à medida que o fator de carga aumenta. Como o gráfico "CSP x Fator de carga" não ultrapassa o eixo das abscissas, não há valores negativos de CSP, e, portanto, conclui-se que não existem trechos de instabilidade na análise estrutural. Isso ocorre, pois neste exemplo, há apenas a presença de momento, portanto, não há contribuição da rigidez geométrica.

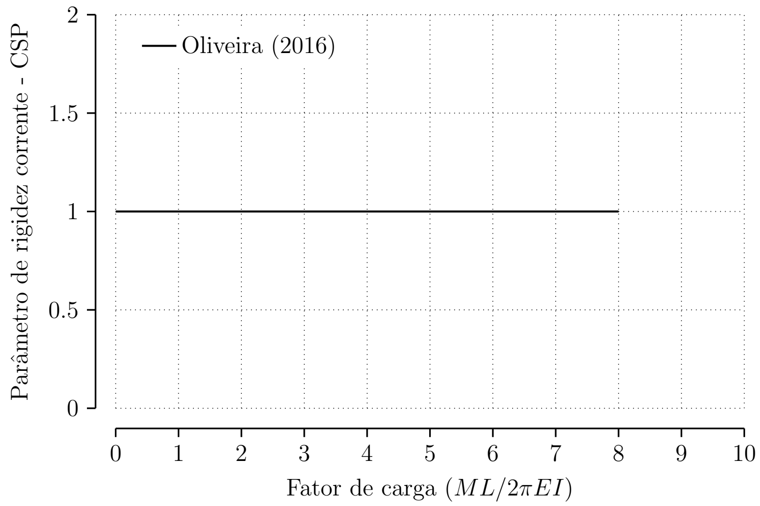


Figura 6.48 – CSP x Fator de carga para a viga com momento aplicado na extremidade livre.

7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 - CONCLUSÕES

No presente trabalho, a formulação co-rotacional foi utilizada como descrição cinemática com o objetivo de avaliar o comportamento não-linear geométrico na análise estática estrutural. O método de comprimento de arco possibilitou o estudo das trajetórias de equilíbrio apresentadas tanto na fase pré-crítica quanto na fase pós-crítica. Desse modo, foi possível realizar um estudo completo e uma análise precisa do comportamento do sistema estrutura como um todo.

No âmbito da formulação co-rotacional, a separação do movimento do elemento de viga em movimentos de corpo rígido e deformacional, por meio da descrição cinemática co-rotacional, permitiu a decomposição da matriz de rigidez em duas parcelas, material e geométrica, possibilitando, de maneira simples, a inclusão dos efeitos da não-linearidade geométrica.

A definição dos modos deformacionais simétrico e antissimétrico (adicionado a uma força cortante) permitiu gerar esforços internos autoequilibrados, em que, por meio da aplicação dos Trabalhos Virtuais Complementares, propiciou-se a obtenção da matriz de rigidez, que leva em consideração as hipóteses de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Ressalta-se, nesse ponto, que a adição de uma força cortante levou a matriz de rigidez a apresentar o parâmetro de rigidez referente ao cisalhamento de vigas submetidas à flexão.

Os exemplos de pórticos e arcos analisados e o exemplo da viga puderam demonstrar a grande habilidade do elemento de viga unificado em lidar com estruturas na presença de grandes deslocamentos e rotações, caracterizadas por forte não-linearidade geométrica.

Em se tratando de métodos de solução numérica, o método de comprimento de arco implementado, com restrição em um hiperplano ortogonal atualizado - uma das técnicas mais utilizados para traçar o caminho de equilíbrio de estruturas sujeitas a grande não-linearidade -, se mostrou robusto e capaz de ultrapassar pontos críticos, descrevendo caminhos de equilíbrio com pontos limites de carga e de deslocamento. O método ainda traçou caminhos de equilíbrio com a presença de *snap-through*, *snap-back* e *looping*.

Na detecção de pontos críticos presentes nos caminhos de equilíbrio estrutural, o *Current Stiffness Parameter* (CSP) se mostrou muito útil, sendo capaz de identificar os pontos limites de carga e deslocamento por meio do gráfico CSP *versus* fator de carga. Além disso, esses gráficos permitiram um melhor entendimento do ganho e perda de rigidez da estrutura, assim como a identificação de trechos de instabilidade estrutural.

Com os exemplos apresentados, comprovou-se a necessidade de atravessar um ponto limite e descrever a continuação do comportamento estrutural, pois o ponto limite, em muitos casos, era apenas um máximo local, de maneira que a estrutura ainda possuía capacidade resistente a ser aproveitada.

Por fim, os resultados numéricos obtidos apresentaram boa concordância se comparados a exemplos extraídos da literatura. Conclui-se, dessa maneira, que a formulação co-rotacional proposta, assim como a estratégia de solução não-linear empregada, apresenta bons resultados na descrição de estruturas sujeitas a grandes não-linearidades geométricas, não havendo a presença do *shear locking*.

7.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como foi demonstrado nesta pesquisa, a utilização da formulação co-rotacional tem uma ótima *performance* na análise de problemas relacionados à não-linearidade geométrica. Entretanto, ainda existem áreas que podem ser exploradas. Sendo assim, como recomendações para trabalhos futuros, propõe-se:

- Modificação do algoritmo implementado, possibilitando a análise da deformação de estruturas sujeitas a cargas seguidoras. Diferentemente dos exemplos utilizados nesta pesquisa, em que se mantém a carga na mesma direção do começo ao fim de toda a análise da estrutura, as cargas seguidoras são cargas que acompanham a deformação do elemento, mudando sua direção de acordo com a configuração deformada em que a estrutura se encontra. A utilização de cargas seguidoras na análise de grandes deslocamentos pode ser vista, por exemplo, em Simo e Vu-Quoc (1986);

- Formulação do elemento finito co-rotacional apresentado na presente pesquisa utilizando o Método Sem Malha (*Meshless*) proposto por Oliveira (2016). Na literatura, até hoje, apenas um trabalho contendo a formulação co-rotacional em um contexto de Método Sem Malha foi apresentado (Yaw et al., 2008);

- Implementação dos efeitos de não-linearidade material na formulação apresentada;

- Realização da análise de instabilidade dinâmica;

- Implementação do elemento co-rotacional de pórticos espaciais apresentado por Krenk (2009). Essa implementação possibilitaria a análise de elementos em três dimensões, como placas, cascas e etc. Estes elementos constituem um grande número de estruturas na engenharia, como, por exemplo: coberturas de ginásios, lajes com grandes vãos, plataformas *offshore*, fuselagem de aviões, casco de navios etc;

- Estudo das estruturas apresentadas com a utilização de seções transversais que não sejam retangulares. Essa variação na seção transversal tornaria possível o estudo do comportamento de outros tipos de seções comerciais correntes;

- Implementação de parâmetros de leitura de caminho de equilíbrio não presentes na rotina, e de diferentes métodos de leitura do caminho de equilíbrio, como, por exemplo, o método de fluxo normal modificado ou o método de controle de energia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, R. V. (1995). "Instabilidade Não-Linear Elástica de Estruturas Reticuladas Espaciais". Tese de doutorado. Brasil: COOPE/UFRJ: Rio de Janeiro, p. 257.

Argyris, J. (1964). *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*. Pergamon.

Argyris, J., H. Balmer e J. St. Doltsinis (1979). "Finite element method – The natural approach". Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 17/18, 1–106.

Argyris, J. H. (1965). "Continua and discontinua". Em: *Proceedings First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. (Dayton). Ed. por editor. AFFDL-TR-66-80. Ohio-USA: Air Force Institute of Tecnology.

Bathe, K. J. e S. Bolouech (1979). "Large displacement analysis of three-dimensional beam structures". Em: *Int. J. Numer. Methods in Engineering* 14, pp. 961–986.

Bathe, K. J. e A. P. Cimento (1980). "Some pratical procedures for the solution of nonlinear finite element equations". Em: *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 22, pp. 59–85.

Batoz, J. L. e G. Dhatt (1979). "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems". Em: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 14, pp. 1262–1267.

Battini, J. M. (2002). "Co-rotational beam elements in instability problems". Tese de doutorado. Sweden: Royal Institute of Technology, p. 180.

Bellini, P. X. e A. Chulya (1987). "An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations". Em: *Computers & Structures* 26, pp. 99–110.

Belo, I. M. (2009). "Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para a análise hiperelástica". Tese de doutorado. Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina, p. 185.

Belytschko, T. e L. Glam (1979). "Application of high order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis". Em: *Computers and Structures*, pp. 175–182.

Belytschko, T. e B. J. Hsieh (1973). "Non-linear transient finite element analysis with convected co-coordinates". Em: *Int. J. Numer. Methods in Engineering* 7, pp. 255–271.

Bergan, P. G. (1980). “Solution algorithms for non-linear structural problems”. Em: *Computers & Structures* 12, pp. 497–509.

Bergan, P. G. e G. Horrigmoe (1976). “Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems”. Em: *Computer Methods in Applied Mech. Engineering* 7, pp. 201–217.

Bergan, P. G. e M. K. Nygard (1989). *Nonlinear shell analysis using Free Formulation finite elements, Finite Element Methods for Nonlinear Problems*. Berlim, pp. 317–338.

Bergan, P. G. e T. H. Soreide (1973). “A Comparative Study of Different Numerical Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem”. Em: *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 2, pp. 185–201.

Bergan, P. G. et al. (1978). “Solution techniques for non-linear finite element problems”. Em: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 12, pp. 1677–1696.

Biot, M. A. (1965). *The mechanics of incremental deformations*. New York, USA: McGraw-Hill.

Brebbia, C. e J. Connor (1969). “Geometrically Non-linear Finite Element Analysis”. Em: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE.*

Cardona, A. (1989). “An integrated approach to mechanism analysis”. Tese de doutorado. Belgium: University of Liege.

Chan, S. L. (1988). “Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method”. Em: *Int. J. Num. Meth. Eng.* 26, pp. 2657–2669.

Chan, S. L. e P. P. T. Chui (2000). *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier.

Chichón, C. (1984). “Large displacements in-plane analysis of elastic-plastic frames”. Em: *Computers & Structures* 19, pp. 727–745.

Cortivo, N. (2004). “Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotacional, um modelo plástico por camadas e o elemento finito ANDES”. Tese de doutorado. Brasil: Universidade de Brasília.

Crisfield, M. A. (1981). “A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through"”. Em: *Computers & Structures* 13, pp. 55–62.

— (1990). “A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements”. Em: *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.* 81, pp. 131–150.

Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1. Chichester, UK.: Essential, John Wiley & Sons.

— (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 2. Chichester, UK.: Advanced Topics, John Wiley & Sons.

Crisfield, M. A. e G. F. Moita (1996). "A unified co-rotational framework for solids, shells and beams". Em: *International Journal of Solids and Structures* 33, pp. 2969–2992.

Cunha, A. A. (2015). "Análise Não Linear de Pórticos Planos Utilizando a Formulação Co-rotacional e Elementos de Viga Unificado Bernoulli-Timoshenko". Brasil: Universidade de Brasília, p. 147.

Da Deppo, D. A. e R. Schmidt (1975). "Instability of clamped-Hinged Circular arches Subjected to a Point Load". Em: *Trans. ASME*, pp. 894–896.

Da Silva, W. A. (2013). "Análise Dinâmica Não-Linear de Pórticos Espaciais Utilizando a Formulação Corrotacional". Tese de doutorado. Brasil: Universidade de Brasília.

De Souza, R. M. (2000). "Force-Based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analsysis of Frames". Tese de doutorado. Berkeley, CA, USA: University of California at Berkeley.

— (2008). "On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs'". Em: *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering* 00, pp. 81–89.

De Souza Neto, E. A., D. Peric. e D. R. J. Owen (2008). *Computational methods for plasticity*. Torquay, U.K.: Wiley.

Felippa, C. A. (2000). "Recent advances in finite element templates". Em: *Computational Mechanics for the Twenty-First Centur*.

— (2003). "A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms". Em: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 192, 2125–2168.

Felippa, C. A. e S. Alexander (1992). "Membrane triangles with corner drilling freedoms: III. Implementation and performance evaluation". Em: *Finite Elements Anal. Des.* 12, 203–239.

Felippa, C. A. e B. Haugen (2005). "A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory". Em: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 194, 2285–2335.

Felippa, C. A. e C. Militello (1992). "Membrane triangles with corner drilling freedoms: II. The ANDES element". Em: *Finite Elements Anal. Des.* 12, 189–201.

Felippa, C. A. e K.C. Park (2002). “The construction of free-free flexibility matrices for multilevel structural analysis”. Em: *Finite Elements Anal. Des.* 191, 2111–2140.

Ford, B. W. R. e S. F. Stiemer (1987). “Iproved arc lenght orthogonality methods for nonlinear finite element analysis”. Em: *Computers & Structures* 27, pp. 625–630.

Fox, L. e E. Stanton (1968). “Developments in Structural Analysis of Direct Energy Minimisation”. Em: *AIAA Journal* 6, pp. 1036–1042.

Fraeijs de Veubeke, B. M. (1976). “The dynamics of flexible bodies”. Em: *nt. J. Engineering Science* Pergamon Press, pp. 895–913.

Fuina, J. S. (2009). “Formulações de Modelos Constitutivos de Microplanos para Contínuos Generalizados”. Tese de doutorado. Brasil: Universidade Federal de Minas Gerais, p. 283.

Fujii, F. (1983). “A simple mixed formulation for elastica problems”. Em: *Computer & Structures* 17, pp. 79–88.

— (1989). “Scheme for elasticas with snap-back and looping”. Em: *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 115, pp. 2166–2181.

Fujii, F., K. K. Choong e S. X. Gong (1992). “Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames”. Em: *Computer & Structures* 44, pp. 133–136.

Gago, A. M. C. S. (2004). “Análise de arcos, abóbadas e cúpulas”. Tese de doutorado. Portugal: Universidade Técnica de Lisboa, p. 450.

Galvão, A. S. (2000). “Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos”. Diss. de mestrado. Brasil: Universidade Federal de Ouro Preto, p. 194.

Gutierrez, M. P. D. (2014). “Análise Elastoplástica de Estruturas Metálicas Usando o Conceito de Rótula Plástica e o Algoritmo de Retorno Radial”. Brasil: Universidade de Brasília, p. 87.

Harison, H. B. (1978). “Post-buckling behaviour of elastic circular arches”. Em: *Proc. Instn Civ.* 65, pp. 283–298.

Haugen, B. (1994). “Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures Using High Performance Finite Elements”. Tese de doutorado. USA: University of Colorado, p. 398.

Horrigmoe, G. (1977). “Finite element instability analysis of free-form shell”. Tese de doutorado. Trondheim, Norway: Norwegian Institute of Technology.

Horrigmoe, G. e P. G. Bergan (1978). “Instability analysis of free-form shells by flat finite elements”. Em: *Computer Methods in Applied Mech. Engineering* 16, 11–35.

Hsiao, K. M. e F. Y. Hou (1987). “Nonlinear finite element analysis of elastic frames”. Em: *Computers & Structures* 26, pp. 693–701.

Hsiao, K. M., H. Jann e Y. R. Chen (1987). “A corotational procedure that handles large rotations of spacial beam structures”. Em: *Computers & Structures* 27, pp. 769–781.

Iura, M., Y. Suetake e S. N. Atluri (2003). “Accuracy of co-rotational formulation for 3-D Timoshenko’s beam”. Em: *Computer Modeling in Engineering* 4, pp. 249–258.

Joaquim, M. C. (2000). “Procedimentos e estratégias para solução de problemas estáticos com não-linearidade geométrica”. Brasil: Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, p. 123.

Kouhia, R. e M. Mikkola (1989). “Tracing the equilibrium path beyond simple critical points”. Em: *Int. J. Num. Meth. Eng.* 28, pp. 2923–2941.

— (1999). “Some aspects on efficient path-following”. Em: *Computers & Structures* 72, pp. 509–524.

Krenk, S. (2001). *Mechanics and analysis of beams, columns and cables*. Springer.

— (2009). *Nonlinear modeling and analysis of solids and structures*. Cambridge University Press.

Krenk, S. e O. Hededal (1995). “A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 123, pp. 95–107.

Lee, S. L., F. S. Manuel e E. C. Rossow (1968). “Large deflection analysis and stability of elastic frames”. Em: *J. Eng. Mech. Div. ASCE 94 EM2*, pp. 521–547.

Lohse, H. R. S. (2015). “Análise estática de problemas com alta não linearidade usando elementos hexaédricos com um ponto de integração e uma formulação Arbitrária Lagrangeana-Eureliana (ALE)”. Brasil: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 122.

Mallett, R.H. e P.V. Marcal (1968). “Finite Element Analysis of Nonlinear Structures”. Em: *Journal of the Structural Division. Proc. ASCE* 94, pp. 2081–2103.

Matias, W. T., A. A. Cunha e M. P. D. Gutierrez (2015). “Obtenção de um elemento de viga unificado utilizando o princípio dos trabalhos virtuais complementares”. Em: *XXXVI Ibero Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering* 1, pp. 1–17.

Meek, J. L. e H. S. Tan (1984). “Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique”. Em: *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 47, pp. 261–282.

Menin, R. C. G. (2006). “Aplicação da Descrição Cinemática Co-Rotacional na Análise Não-Linear Geométrica de Estruturas Discretizadas por Elementos Finitos de Treliças, Vigas e Cascas”. Tese de doutorado. Brasil: Universidade de Brasília, p. 172.

Menin, R. C. G. e W. M. S. Taylor (2003a). “Resposta pós-crítica de pórticos planos discretizados com elementos de viga de Euler-Bernoulli utilizando uma formulação co-rotacional”. Em: *XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2003*.

— (2003b). “Resposta pós-crítica de sistemas articulados com diferentes deformações utilizando uma formulação co-rotacional”. Em: *XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2003*.

— (2004). “Análise não-linear geométrica de pórticos espaciais utilizando uma formulação co-rotacional”. Em: *XXXI Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural*.

— (2005a). “Aplicação da descrição cinemática corotacional na análise não-linear geométrica de estruturas laminares”. Em: *XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2005*.

— (2005b). “Não-linearidade geométrica de cascas finas discretizadas com elementos finites triangulares aplicando a descrição cinemática corotacional”. Em: *Congreso de Métodos Numéricos en Ingenieria 2005 / SEMNI*.

Menin, R. C. G. et al. (2006). “Análise não-linear geométrica de treliças utilizando diferentes medidas de deformações”. Em: *XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering / Cilamce 2006*.

Murray, D. W. e E. L. Wilson (1969). “Geometrically Non-linear Finite Element Analysis”. Em: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* 95, pp. 143–165.

Nour-Omid, B. e C. C. Rankin (1991). “Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors”. Em: *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering* 93, pp. 353–384.

Oden, J. T. (1967). “Numerical Formulation of Non-linear Elasticity Problems”. Em: *Journal of the Structural Division. Proc. ASCE* 93.

Oliveira, T. S. (2016). “Método sem malha local - Colocação na forma fraca em elasticidade linear”. Brasil: Universidade de Brasília.

Pacoste, C. (1998). “Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses”. Em: *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering* 156, pp. 75–110.

Pacoste, C. e A. Eriksson (1996). “Beam element in instability problems”. Em: *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering* 144, pp. 163–197.

Paraski, N. V. (2012). “Análise estática não linear de pórticos planos via Matlab”. Diss. de mestrado. Brasil: Universidade Federal de Fluminense, p. 150.

Parente, E. et al. (2014). “Análise não linear física e geométrica de pórticos de concreto armado”. Em: *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais* 7.5. ISSN: 1983-4195.

Peng, X. e M. A. Crisfield (1992). “A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle”. Em: *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering* 35, pp. 1829–1847.

Petrov, E. e M. Géradin (1998a). “Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation”. Em: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 165, 43–92.

— (1998b). “Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids part 2: Anisotropic and advanced beam models”. Em: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 165, 93–127.

Powell, G. e J. Simons (1981). “Improved iteration strategy for nonlinear structures”. Em: *Int. J. Num. Meth. Eng.* 17, pp. 1455–1467.

Ramm, E. (1981). “Strategies for tracing the nonlinear response near limit points”. Em: *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pp. 63–89.

Rankin, C. C. e F. A. Brogan (1986). “An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations”. Em: *ASME J. Pressure Vessel Technology* 108, pp. 165–174.

Rankin, C. C. e B. Nour-Omid (1988). “The use of projectors to improve finite element performance”. Em: *Computers & Structures* 30, pp. 257–267.

Reddy, N (2006). *An introduction to the Finite Element Method*. 3ª ed. Vol. 3. McGraw-Hill, p. 761. ISBN: 0070513554.

Rezaiee-Pajand, M., M. Ghalishooyan e M. Salehi-Ahmadabad (2013). “Comprehensive evaluation of structural geometrical nonlinear solution techniques PartI: Formulation and characteristics of the methods”. Em: *Structural Engineering and Mechanics* 48, pp. 849–878.

Riks, E. (1972). “The application of Newton’s method to the problem of elastic stability”. Em: *J. Applied Mechanics* 39, pp. 1060–1066.

— (1979). “An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems”. Em: *Int. J. Solid Structures* 15, pp. 529–551.

Rocha, G. (2000). “Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não-linear de estruturas”. Brasil: Universidade Federal de Ouro Preto, p. 176.

Rodrigues, P. F. N. (2000). “Ferramentas numéricas para a análise não-linear física e geométrica de estruturas reticuladas na exploração de petróleo offshore”. Tese de doutorado. Brasil: COOPE: Rio de Janeiro, p. 172.

Roorda, J. (1965). “Stability of structures with small imperfections”. Em: *J. Appl. Mech. Div. ASCE* 91, pp. 87–106.

Rust, W. (2015). *Non-linear finite element analysis in structural mechanics*. Hannover, Germany: Springer.

Sabir, A. B. e A. C. Lock (1972). “The Application of Finite Elements to the Large-deflection Geometrically Non-linear Behaviour of Cylindrical Shells”. Em: *Proceedings of the International Conference on Variational Method in Engineering*, pp. 67–76.

Saffari, H., M. J. Fadaee e R. Tabatabaei (2008). “Nonlinear analysis of space trusses using modified normal flow algorithm”. Em: *J. Structural Eng.* 134, pp. 998–1005.

Schweizerhof, K. e P. Wriggers (1986). “Consistent linearization for path following methods in nonlinear F. E. Analysis”. Em: *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.* 59, pp. 261–279.

Sharifi, P. e E. P. Popov (1969). “Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich Archs”. Em: *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* 97, pp. 1397–1411.

Shi, J. e M. A. Crisfield (1984). “A Semi-Direct Approach for the Computation of Singular Points”. Em: *Computers & Structures* 51, pp. 107–115.

Silva, S. S. (2011). “Análise Não Linear de Pórticos Planos Utilizando uma Formulação Co-rotacional e Plasticidade por Camadas”. Brasil: Universidade de Brasília, p. 164.

Simo, J. C. e L. Vu-Quoc (1986). “A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: computation aspects”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58, 79–116.

Truesdell, C. e R. A. Toupinn (1960). *The classical field theories*. Berlin: Springer.

Turner, M. J., E. H. Dill e H. C. Martin (1960). “Large Deflection of Structures Subject to Heating and External Load”. Em: *J. Aero. Sci.* 27, pp. 97–106.

Watson, L. T., S. C. Billups e A. P. Morgan (1987). “Algorithm 652: HOMPACK: a suite of codes for globally convergent homotopy algorithms”. Em: *ACM Trans. Math. Softw.* 13, pp. 281–310.

Wempner, G. A. (1969). “Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells”. Em: *Int. J. Solids and Structures* 5, pp. 117–153.

— (1971). “Discrete approximations related to non-linear theories of solids”. Em: *Int. J. Solids and Structures* 7, pp. 1581–1599.

Wood, R. D. e O. C. Zienkiewicz (1977). “Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells”. Em: *Computers & Structures* 7, pp. 725–735.

Wriggers, P. e J. C. Simo (1990). “A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points”. Em: *Int. J. Num. Meth. Eng.* 30, pp. 155–176.

Yang, Y. B. e S. B. Kuo (1994). *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.

Yang, Y. B. e W. McGuire (1985). “A work control method for geometrically nonlinear analysis”. Em: *Proceedings of International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Aplications*. Ed. por Middleton. Wales, UK.

Yang, Y. B. e M. S. Shieh (1990). “Solution method for nonlinear problems with multiple critical points”. Em: *AIAA J.* 28, pp. 2110–2116.

Yaw, L. L., Sukumar N. e Kunnath S. K. (2008). “Meshfree co-rotational formulation for two-dimensional continua”. Em: *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering* 00, pp. 0–38.

Zhou, Z. e D. W. Murray (1995). “An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures”. Em: *Computers & Structures* 55, pp. 749–759.

Zienkiewicz, O. C. (1971). *The Finite Element in Engineering Science*. London: McGraw-Hill.

APÊNDICES

A - APÊNDICE A

A.1 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método Newton-Rapshon Padrão e sua versão modificada, o Método de Newton-Rapshon Modificado, servem como base para técnicas mais avançadas de leitura do caminho de equilíbrio, como, por exemplo, o método de comprimento de arco, capazes de irem além de pontos críticos de bifurcação ou de limites de carga e deslocamento. Desse modo, uma sucinta explicação do método de Newton-Rapshon Padrão será apresentada nesta seção.

É importante destacar que a única diferença entre os dois métodos de Newton apresentados (Figuras A.1 e A.2), é que no Método Newton-Rapshon Padrão, demonstrado nesta seção, a matriz de rigidez é sempre tangente ao caminho de equilíbrio da estrutura e, portanto, atualizada a cada passo iterativo/corretor, enquanto o método modificado utiliza sua matriz de rigidez inicial do passo preditor em todo o processo iterativo. Não há regra geral para se escolher um dos dois métodos, entretanto, é de conhecimento amplo que o Método Newton-Rapshon Padrão tem uma convergência mais rápida, mas que seu custo computacional pode se tornar elevado por atualizar sua matriz de rigidez a cada passo iterativo.

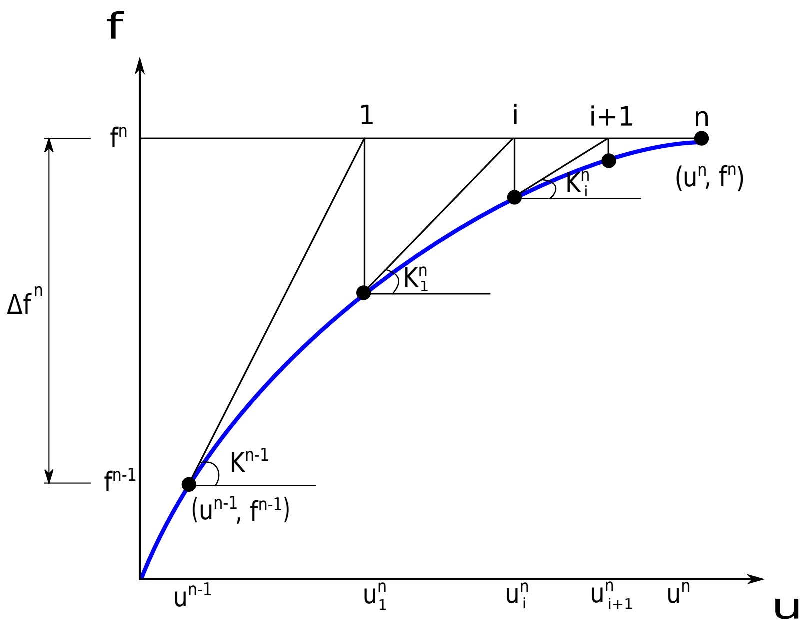


Figura A.1 – Newton-Raphson Padrão.

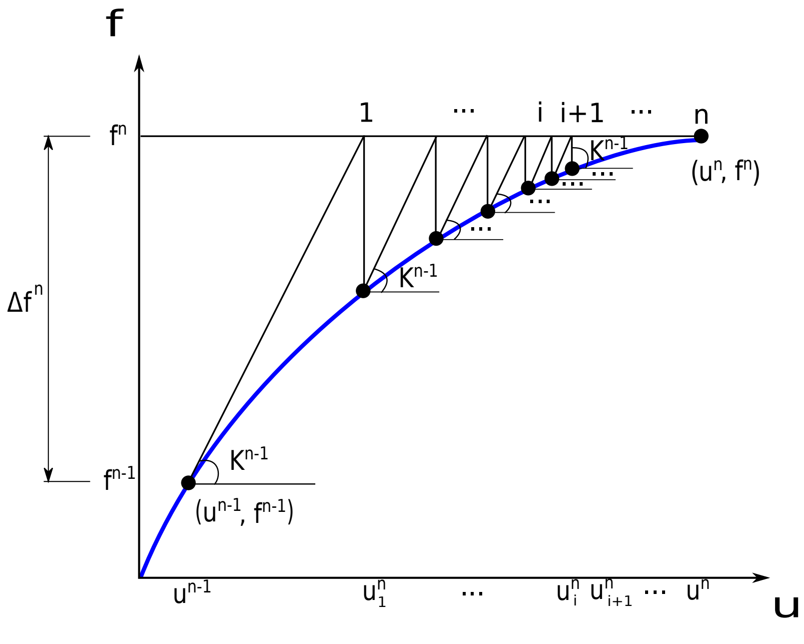


Figura A.2 – Newton-Raphson Modificado.

O problema básico na análise não-linear consiste em encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura que se encontra sob a ação de forças aplicadas. O método de Newton-Rapson, a fim de evitar a acumulação de erros, em cada passo de carregamento promove iterações que têm o papel de estabelecer o equilíbrio para um desejado grau de precisão (tolerância), em cada passo de carga. Dessa forma, busca-se a configuração do caminho de equilíbrio em que a força externa aplicada $\mathbf{f}$ seja igual ou aproximadamente equivalente à força interna $g(\mathbf{u})$ da estrutura

$$\mathbf{f} \approx g(\mathbf{u}). \tag{A.1}$$

A partir de dados iniciais pré-estabelecidos, como o valor do incremento de carga $\Delta\mathbf{f}$ e o valor da tolerância tol, em princípio, o método de Newton-Rapson pode ser descrito por meio de dois passos básicos: um passo preditor e outro corretor, sendo os dados iniciais determinados de acordo com a experiência do pesquisador e do grau de acurácia desejado para o problema.

A etapa preditora corresponde a primeira solução de deslocamento encontrada por meio da equação linear $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{f}$ para o incremento de carga pré-estabelecido $\Delta\mathbf{f}$. Verifica-se se o equilíbrio é satisfeito para a tolerância desejada. Se for, o procedimento abstém-se da fase corretora e um novo incremento de carga é adicionado ao atual estado de equilíbrio encontrado. Se não, o procedimento segue para o passo seguinte, corretor.

Nesse momento, ocorre o processo iterativo, no qual faz-se um ajuste apropriado dos deslocamentos até que a tolerância estipulada seja obtida. Esta etapa consiste em, por meio de subincrementos de deslocamento, atualizar ou corrigir os incrementos de deslocamento.

A.1.1 - Processo iterativo

Em uma análise não-linear, chama-se resíduo $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{f})$ o valor da força resultante da diferença entre carga externa e interna calculada durante cada passo do processo iterativo

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = \mathbf{f} - g(\mathbf{u}). \tag{A.2}$$

Em vista disso, todo o procedimento iterativo se dá em torno da carga residual e tem como objetivo atualizar, ou seja, corrigir os incrementos de deslocamento por meio de subincrementos de deslocamento.

As estratégias incrementais para o tratamento de efeitos não lineares consideram que, em torno de uma configuração deformada, o problema é localmente linear. Desta forma, as parcelas não lineares, representadas em série de Taylor, são aproximadas por termos lineares obtidos a partir do truncamento dos termos de ordem superior da série (Joaquim, 2000). Portanto, essa estratégia faz com que, na falta de equilíbrio, uma melhoria da estimativa de deslocamento $\mathbf{u}$ seja obtida da forma linearizada do equilíbrio em volta do resíduo $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{f})$.

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \mathbf{f}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) + \frac{d(\mathbf{r})}{du}\delta\mathbf{u} + \cdots = 0 \tag{A.3}$$

Destaca-se que na equação (A.3) os três pontos correspondem aos termos de mais alta ordem que não serão utilizados. No método de Newton-Rapshon, $\mathbf{f}$ é constante enquanto $\mathbf{u}$ varia, dessa forma, a partir da equação (A.2) e (A.3), tem-se

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = -\frac{dg(\mathbf{u})}{du}\delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}\delta\mathbf{u}. \tag{A.4}$$

Nesta equação, o resíduo $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{f})$ é conhecido, no que se refere ao estado atual da carga $\mathbf{f}$ e do deslocamento $\mathbf{u}$. A rigidez tangente $\mathbf{K}$ no estado atual de deslocamento $\mathbf{u}$ também pode ser calculada. Assim, a equação A.4 permite determinar o incremento de deslocamento

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{r}. \tag{A.5}$$

Uma vez que o subincremento de deslocamento $\delta\mathbf{u}$ é determinado, o atual incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{u}_{i+1}$ e deslocamento total $\mathbf{u}_{i+1}$ são atualizados.

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1} = \Delta\mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u}_i, \tag{A.6}$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i \tag{A.7}$$

O processo de iteração de equilíbrio de Newton-Raphson é ilustrado na Figura A.3. O sobrescrito n é utilizado para determinação do passo de carga, enquanto o subscrito i determina o passo iterativo dentro de um passo n de carga.

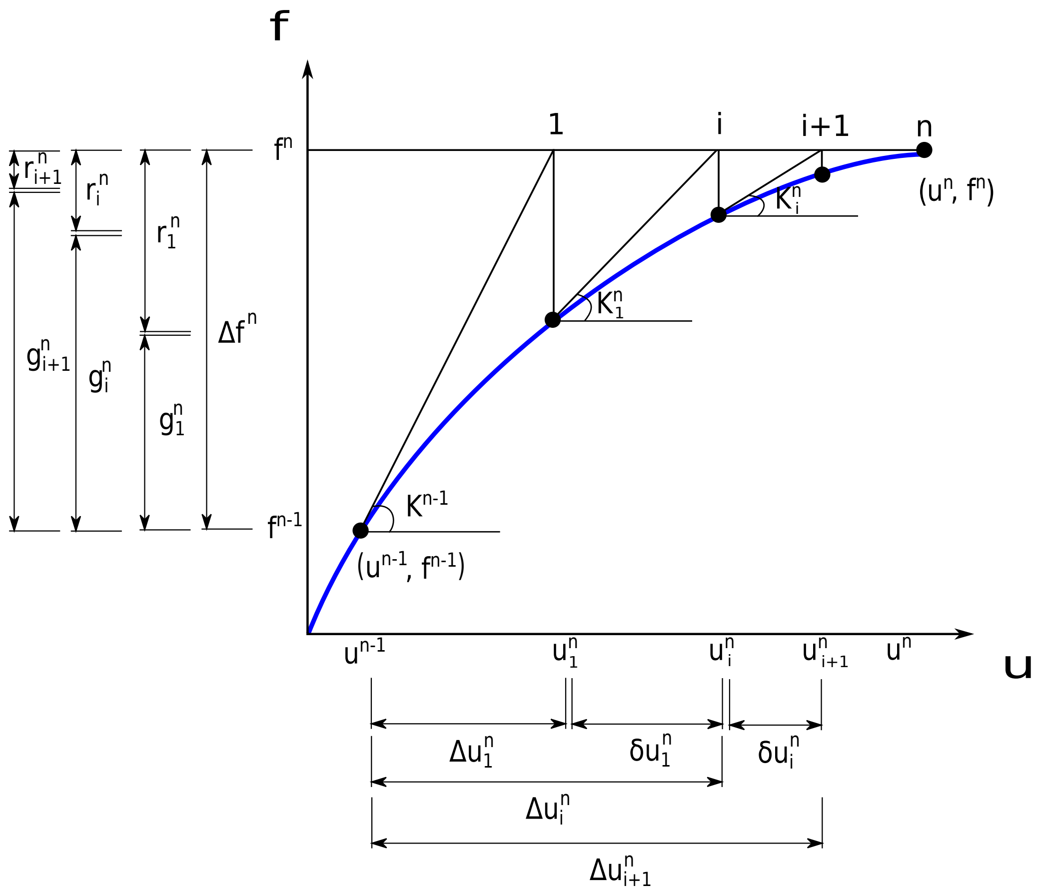


Figura A.3 – Método de Newton-Raphson - processo iterativo.

O atual passo de carga inicia a partir de um estado de equilíbrio encontrado para o passo anterior $(\mathbf{f}^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1})$. O passo de carga é iniciado pelo incremento de carga $\Delta\mathbf{f}^n$ em relação à última carga alcançada $\mathbf{f}^{n-1}$, chegando a $\mathbf{f}^n$. Pela relação $\Delta\mathbf{u}_1^n = (\mathbf{K}^{n-1})^{-1}\Delta\mathbf{f}^n$, encontra-se o incremento de deslocamento inicial. A partir de então, inicia-se a fase interativa. De posse da matriz de rigidez $\mathbf{K}_1^n = dg(\mathbf{u})/du$ e das forças desequilibradas $\mathbf{r}_1^n = \Delta\mathbf{f} - g_1^n$ no passo 1, calcula-se o primeiro subincremento de deslocamento $\delta\mathbf{u}_1^n = \mathbf{K}\mathbf{r}_1^n$. Dessa forma, o subincremento de deslocamento atualiza o incremento de deslocamento, que atualiza o deslocamento total, como apresentado pelas equações (A.6) e (A.7). A próxima etapa consiste em comparar a tolerância estabelecida com critério de convergência estabelecido pelo programador: caso a solução tenha convergido, encerra-se o passo iterativo/corretor e inicia um novo passo de carga; caso não haja convergência, inicia-se um novo processo iterativo. O processo iterativo encerra, quando o critério de convergência estabelecido é satisfeito.